Э. КАРТАН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО Г. Н. БЕРМАНА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. В. В. СТЕПАНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1940 Ленинград

É. CARTAN
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

LEÇONS
SUR LES
INVARIANTS INTÉGRAUX

Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS
J. HERMANN, SUCCESSEUR 6, RUE DE LA SORBONNE, 6
1922

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Выходящая в русском переводе книга Картана в первую очередь излагает теорию интегральных инвариантов. Это понятие, введенное Пуанкаре в связи с его механическими исследованиями, получает в изложении Картана значительное упрощение в связи с введением диференциала независимого переменного; совокупность всех интегральных инвариантов оказывается легко обозримой. Далее в настоящей книге эта теория применяется к ряду проблем анализа и механики. Механические приложения требуют от читателя общей ориентировки в аналитической механике и в механике непрерывной среды. Более элементарное изложение теории интегральных инвариантов по Пуанкаре и бесконечно малых преобразований в применении к механике читатель может найти в книге Уиттекера „Аналитическая динамика“, ОНТИ, М.—Л. 1937; эта книга является естественным введением к механическим приложениям, рассматриваемым у Картана.

Книга Картана богата математическими идеями и сильно расширяет кругозор внимательного читателя.

В. Степанов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Эта книга является воспроизведением курса, читанного в течение летнего семестра 1920—1921 гг. на физико-математическом факультете (Faculté des Sciences) Парижского университета.

Теория интегральных инвариантов создана А. Пуанкаре (H. Poincaré) и изложена им в III томе его труда „Новые методы небесной механики".

В двух заметках в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (16 и 30 июня 1902 г.) при изучении диференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, автор пришел к рассмотрению некоторых диференциальных выражений, иазванных им *интегральными формами*: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены только через первые интегралы данных диференциальных уравнений и через их диференциалы. Углубляя свои изыскания в той же области, автор пришел, с одной стороны, к основанию своего метода интегрирования систем уравнений с частными производными, которые допускают характеристики, зависящие только от произвольных постоянных [характеристики Коши (Cauchy)], с другой стороны, — к основанию своей теории структуры непрерывных групп преобразований, конечных и бесконечных.

И вот оказывается, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставление этих двух понятий легло в основу настоящего труда.

Рассмотрим, например, систему трех диференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями x, y, z и независимой переменной t; можно считать, что они определяют бесконечное множество траекторий подвижной точки. Диференциальная форма, например, $P\,dx+Q\,dy+R\,dz+H\cdot dt$ может рассматриваться как величина, связанная с состоянием (x, y, z, t) подвижной точки и состоянием точки бесконечно близкой $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$. Утверждение, что эта форма является *интегральной* (или *инвариантной*, согласно терминологии, принятой в этом курсе), очевидно, означает, что эта величина зависит только от траектории, которая содержит первое состояние, и от бесконечно близкой траектории, которая содержит второе состояние. Иначе говоря, инвариантная форма не меняет своего значения при перемещении каким-либо способом двух состояний (x, y, z, t), $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ на их траекториях. Тогда,если рассматривать непрерывную линейную последовательность траекторий, и если взять интеграл $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ вдоль дуги кривой, которая является геометрическим местом положений, занимаемых подвижной точкой на этих траекториях *в один и тот же момент* t, то этот интеграл не будет зависеть от t; это — *интегральный инвариант* по терминологии А. Пуанкаре. Обратно, есть очень простой способ возвратиться от интегрального инварианта $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ Пуанкаре к соответственной инвариантной форме $P\,dx + Q\,dy + R\,dz + H\,dt$.

Эти исследования не ограничиваются линейными диференциальными формами. Всякая диференциальная инвариантная форма, которая может быть помещена под знаком интеграла, простого или кратного, порождает интегральный инвариант в смысле А. Пуанкаре, если опустить члены, которые содержат диференциал (или диференциалы) независимой переменной [1]).

Таким образом, *величина под знаком интеграла в интегральном инварианте Пуанкаре есть не что иное, как усеченная диференциальная инвариантная форма.* Инвариантный характер *дополненного* интеграла сохраняется, если он распространяется на какую-либо совокупность положений, *одновременных или нет.*

Это сближение двух понятий — интегрального инварианта и диференциальной инвариантной формы — влечет за собой многочисленные следствия. Прежде всего, все свойства, относящиеся к образованию интегральных инвариантов, к выводу одних инвариантов из других, становятся очевидными. То же можно сказать о применении к интегрированию диференциальных уравнений.

Следует отметить другое следствие, относящееся к принципам механики. А. Пуанкаре показал, что общие уравнения динамики обладают тем свойством, что они допускают линейный (относительный) интегральный инвариант, а именно

$$\int p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n, \tag{1}$$

где q и p обозначают канонические переменные Гамильтона (Hamilton). Если дополнить диференциальное выражение под знаком интеграла, интегральный инвариант принимает вид

$$\int p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n - H\,\delta t \tag{2}$$

где H — функция Гамильтона. Таким образом наряду с *количествами движения* ($p_1, \ldots, p_n$) рассматриваемой материальной системы появляется ее *энергия* H. Выражение под знаком интеграла приобретает, в связи с этим, исключительно важное механическое значение; ему можно дать название *тензора „количества движения — энергии“* [2]). Элемен-

[1]) Р. Харгревс (R. Hargreaves) в статье, помещенной в Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. XXI (1912 г.) уже рассматривал интегралы, содержащие диференциал независимой переменной; но его точка зрения совершенно отлична от принятой нами, и независимая переменная у него всегда играет особую роль.

[2]) Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона; это отмечалось уже неоднократно. Впрочем, этим же путем оно вводится и в нашем курсе.

тарное действие Гамильтона есть не что иное, как этот тензор, рассматриваемый вдоль траектории: понятие *действия* связано, таким образом, с понятиями количества движения и энергии.

Более того. Диференциальные уравнения движения не только допускают интегральный инвариант (2), но и являются единственными диференциальными уравнениями, обладающими этим свойством. Поэтому в основу механики можно положить следующий принцип, которому можно было бы дать название „принцип сохранения количества движения и энергии“:

Движения материальной системы (с вполне голономными связями, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию) управляются диференциальными уравнениями первого порядка, связывающими время, параметры положения и параметры скоростей; и эти диференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что интеграл тензора „количества движения — энергии“, распространенный на любую непрерывную линейную замкнутую последовательность состояний системы, не меняет значения при перемещении этих состояний каким-либо способом вдоль соответственных траекторий.

В этой формулировке понятие *состояние* означает совокупность величин, определяющих положение системы в пространстве, момент, в который она рассматривается и скорости в этот момент.

Предыдущая формулировка более абстрактна и менее интуитивна, чем, например, формулировка принципа наименьшего действия Гамильтона. Тем не менее, она имеет преимущества, которые важно здесь отметить. Уравнения Лагранжа (Lagrange) позволяют дать законам механики форму, *не зависящую от установленной в пространстве координатной системы*, и в этом заключается их значение. Но время еще играет в них особую роль. Напротив, принцип сохранения количества движения и энергии дает законам механики форму, не зависящую от системы референции, принятой для вселенной (пространство — время): если производят замену переменных, относящуюся *одновременно* к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора „количество движения — энергии“ в новой системе координат, чтобы вывести из него уравнения движения. Таким образом получается схема, которой должны подчиняться все механические теории и которой действительно подчиняется и релятивистская механика.

Следует отметить, что эта схема относится только к материальным системам, зависящим от конечного числа параметров.

Настоящий труд оставляет в стороне большое количество приложений теории интегральных инвариантов; в частности, совершенно в стороне оставлены приложения, — исключительно важные в небесной механике, — относящиеся к теории периодических решений проблемы трех тел, к теории устойчивости по Пуассону (Poisson). Автор сознательно ограничился приложениями, относящимися, главным образом, к интегрированию диференциальных уравнений; но даже в этом кругу идей проблема лишь затронута.

Автор старался, однако, показать, что эта проблема не может рассматриваться особняком; он только сузил бы ее, если бы не рассматривал ее как частный вид более общей проблемы, в которую должно войти исследование не только интегральных инвариантов, но еще и уравнений Пфаффа (Pfaff), инвариантных для данных диференциальных уравнений, а также бесконечно малых преобразований, допускаемых этими диференциальными уравнениями. Полное изложение этой проблемы значительно расширило бы рамки настоящего курса и, сверх того, потребовало бы некоторого знания теории непрерывных групп. Автор ограничивается тем, что при случае указывает на существенную роль группы $\mathfrak{G}$ преобразований, которые, будучи применены к интегралам данных диференциальных уравнений, оставляют неизменными все данные об этих интегралах, известные *a priori* [1]. Всякая система диференциальных уравнений сводится к типичным системам, из которых каждая отвечает *простой* группе $\mathfrak{G}$. Если эта простая группа—*конечная*, получаются системы диференциальных уравнений, которые хорошо изучены С. Ли (S. Lie) и Э. Вессио (E. Vessiot), давшим им название систем Ли. Они связаны с теорией интегральных инвариантов в том смысле, что—посредством присоединения, в случае надобности, неизвестных вспомогательных функций—они допускают столько линейных интегральных инвариантов, сколько имеется неизвестных функций. Читатель найдет в XV главе этой книги некоторые общие указания с этой последней точки зрения относительно таких уравнений.

Если простая группа $\mathfrak{G}$ оказывается *бесконечной*, и если не принимать в расчет случая, когда это будет самая общая группа с n переменными—случая, при котором ничего неизвестно о соответственной системе диференциальных уравнений,—то эта группа допускает или интегральный инвариант максимальной степени [теория множителя Якоби (Jacobi)], или относительный линейный интегральный инвариант (теория уравнений, приводимых к каноническому виду), или инвариантное уравнение Пфаффа (уравнения, приводимые к уравнению с частными производными первого порядка). Главы XI—XIV посвящены этим классическим теориям.

Понятие интегрального инварианта можно рассматривать с точки зрения, несколько отличающейся от точки зрения А. Пуанкаре, которой, в общем, мы держались в этом курсе. Вместо того, чтобы рассматривать кратный интеграл, связанный с системой диференциальных уравнений, по отношению к которой он обладает свойством инвариантности, его можно рассматривать в связи с группой преобразований, относительно которой он инвариантен. Впрочем, обе точки зрения связаны между собою. Последней держался С. Ли, которому в течение некоторого времени она казалась единственно правильной. Тут понятие интегрального инварианта тоже играет важную роль, ибо, как это показал автор [2], всякая группа преобразований, посредством присоединения

---

[1] E. Cartan.—Les sous-groupes des groupes continus de transformations. Ann. Ec. Normale (3), т. XXV (1908 г.), стр. 57—194 (гл. 1-я).

[2] E. Cartan.—Sur la structure des groupes infinis de transformations. Ann. Ec. Normale (3), т. XXI (1904 г.), стр. 153—206; т. XXII (1905 г.), стр. 219—308.

при надобности вспомогательных переменных, может быть определена как совокупность преобразований, допускающих известное количество линейных интегральных инвариантов. Эта точка зрения на понятие интегрального инварианта оставлена совершенно в стороне в нашем курсе.

Несколько глав посвящено правилам исчисления диференциальных форм, которые встречаются под знаками кратного интеграла. Гурса (Goursat) дает этим формам название символических выражений; я предлагаю называть их диференциальными формами с внешним умножением, или, короче, — *внешними диференциальными формами*, потому что они подчиняются правилам внешнего умножения Грассмана (Grassmann). Я предлагаю также назвать внешним диференцированием действие, которое позволяет перейти от $(p-1)$-кратного интеграла, распространенного по замкнутому многообразию $p-1$ измерений, к p-кратному интегралу, распространенному по многообразию p измерений, ограниченному первым [1]. Эта операция, сводящаяся в конечном итоге к обыкновенному диференцированию, если коэфициенты диференциальной формы под знаком интеграла допускают частные производные первого порядка, может сохранить смысл и тогда, когда последнее обстоятельство не имеет места. В связи с этим возникают интересные проблемы, которые систематически еще не изучены и заслуживают обстоятельного исследования.

Книга заканчивается двумя главами, впрочем очень сжатыми, посвященными связи теории интегральных инвариантов с вариационным исчислением и принципами оптики.

В конце книги находится не претендующий на полноту список основных трудов, относящихся к теории интегральных инвариантов. Ссылки на работы, относящиеся к классическим теориям множителя Якоби, к каноническим уравнениям и уравнениям с частными производными первого порядка, приводятся только в том случае, если работы эти непосредственно связаны с теорией интегральных инвариантов.

Le Chesnay 24 ноября 1921 г.

---

[1] „Операция D“ у Гурса.

Глава I.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ГАМИЛЬТОНА И ТЕНЗОР „КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ — ЭНЕРГИИ".

Случай свободной материальной точки.

1. Всю небесную механику можно обосновать на принципе, который приводит определение движения материальной системы к решению проблемы вариационного исчисления: это — принцип наименьшего действия Гамильтона. Начнем его изложение со случая движения свободной материальной точки под действием силы, допускающей силовую функцию U, зависящую от прямолинейных координат точки x, y, z и от времени t.

В этом простом случае принцип Гамильтона выражается так:

Из всех возможных движений, переводящих материальную точку из данного положения (x_0, y_0, z_0) в момент t_0 в другое данное положение (x_1, y_1, z_1) в момент t_1, фактически осуществляется то, при котором определенный интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] dt$$

принимает наименьшее значение.

В этом выражении m обозначает массу точки; x', y', z' — компоненты скорости; величина под знаком интеграла называется *элементарным действием*; интеграл W есть *действие* за промежуток времени (t_0, t_1).

Для доказательства этого принципа будем рассматривать x, y, z как функции t и произвольного параметра α и вычислим вариацию интеграла W, когда α получает приращение $\delta\alpha$, полагая при этом, что *при любых значениях α* x, y, z принимают значения x_0, y_0, z_0 при $t = t_0$ и значения x_1, y_1, z_1 при $t = t_1$. Имеем:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left[m (x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right] dt;$$

но

$$\delta x' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha\right) = \frac{\partial(\delta x)}{\partial t};$$

интегрирование по частям (заметим, что при $t=t_0$ и $t=t_1$ вариации δx, δy, δz равны нулю) дает:

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

Если потребовать, чтобы δW обращалось в нуль при $\alpha=0$, каковы бы ни были функции δx, δy, δz от t, равные нулю при $t=t_0$ и $t=t_1$, то, применяя классическое рассуждение, найдем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы при $\alpha=0$ имели место равенства:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что *движения материальной точки под действием данной силы осуществляют экстремум интеграла W по отношению ко всем возможным бесконечно близким движениям, соответствующим тому же самому начальному и конечному положениям точки, и что, кроме того, эти движения являются единственными, обладающими указанным экстремальным свойством.*

Строго говоря, речь может итти только об *экстремуме* действия, а не о *минимуме*, так как обращение первой вариации δW в нуль есть условие необходимое, но не достаточное для минимума.

2. Может показаться, что элементарное действие

$$\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]dt$$

введено здесь при помощи чисто искусственного приема вычисления, чтобы получить возможность выразить в сжатой форме законы движения. Мы сейчас увидим, что принцип Гамильтона можно заменить другим эквивалентным принципом, который также связан с выражением, линейным относительно dx, dy, dz, dt, но у которого все коэфициенты имеют простое механическое значение.

Действительно, вернемся к действию W, но предположим теперь, что t_0 и t_1 сами являются функциями параметра α, так что соответствующие значения x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 также суть функции α. Вычисляя δW приемами диференцирования определенного интеграла, получаем:

$$\begin{aligned}\delta W=&\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_1}\delta t_1-\\&-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_0}\delta t_0+\\&+[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_1}-[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_0}+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$[\delta x]_{t=t_1}=\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]_{t=t_1}\delta a;\quad \delta x_1=\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=t_1}\delta t_1+\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]_{t=t_1}\delta a;$$

и, следовательно,

$$[\delta x]_{t=t_1}=\delta x_1-x_1'\,\delta t_1.$$

Формула, выражающая δW, будет, таким образом, иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}\delta W={}&mx_1'(\delta x_1-x_1'\delta t_1)+my_1'(\delta y_1-y_1'\delta t_1)+mz_1'(\delta z_1-z_1'\delta t_1)+\\&+\left[\frac{1}{2}m(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+U_1\right]\delta t_1-\\&-mx_0'(\delta x_0-x_0'\delta t_0)+my_0'(\delta y_0-y_0'\delta t_0)+mz_0'(\delta z_0-z_0'\delta t_0)+\\&+\left[\frac{1}{2}m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)+U_0\right]\delta t_0+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Положим

$$\left.\begin{aligned}\omega_\delta={}&mx'(\delta x-x'\delta t)+my'(\delta y-y'\delta t)+mz'(\delta z-z'\delta t)+\\&+\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]\delta t=\\&=mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-U\right]\delta t.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Коэфициенты введенного таким образом диференциального выражения суть, во-первых,

$$mx',\quad my',\quad mz',$$

т. е. составляющие *количества движения* подвижной точки, затем

$$\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-U,$$

т. е. *энергия* E.

Благодаря этому обозначению можно написать

$$\begin{aligned}\delta W={}&[\omega_\delta]_0^1+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что мы рассматриваем последовательность реальных траекторий, зависящих от параметра α, и каждую траекторию ограничиваем промежутком времени (t_0, t_1), зависящим от α. Формула, которая представляет вариацию действия вдоль этих переменных траекторий, сводится к

$$\delta W = (\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0.$$

Предположим, наконец, что мы рассматриваем „*трубку*" *траекторий*, т. е. непрерывную линейную *замкнутую* последовательность траекторий, каждая из которых ограничена промежутком времени (t_0, t_1); полная вариация действия, когда мы вернемся к начальной траектории, будет, очевидно, равна нулю, так что, интегрируя по α, получим

$$\int (\omega_\delta)_1 = \int (\omega_\delta)_0.$$

3. Для пояснения полученного результата условимся называть *состоянием* материальной точки совокупность семи величин

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t,$$

определяющих: три первые — положение точки, три следующие — ее скорость и последняя — момент времени, в который мы ее рассматриваем. *Состояние* точки можно рассматривать как точку пространства семи измерений — *пространства состояний*. Траекторию можно определить как последовательность состояний, соответствующих одному и тому же реальному движению точки, т. е. в итоге, как решение системы диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x'; & m\frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x};\\ \frac{dy}{dt} &= y'; & m\frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y};\\ \frac{dz}{dt} &= z'; & m\frac{dz'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В силу этого, *криволинейный интеграл*

$$\int \omega_\delta = \int mx'\delta x + my'\delta y + mz'\delta z - E\,\delta t,$$

взятый вдоль некоторой замкнутой кривой пространства состояний, не изменяется, если переместить каким-либо способом каждое из составляющих его состояний вдоль траектории, соответствующей этому состоянию.

Можно также сказать, что если дана какая-либо *трубка траекторий, то интеграл* $\int \omega_\delta$, *взятый вдоль замкнутой кривой, охватывающей эту трубку, не зависит от этой кривой, а зависит только от трубки.*

Следует заметить, что выражение ω_δ можно рассматривать как элементарную работу вектора четырехмерного мира (x, y, z, t); этот вектор имеет в качестве пространственных компонент три обычных компоненты количества движения и в качестве компоненты по времени —

энергию. Его можно назвать „тензор количества движения — энергии"; каждая из компонент имеет, таким образом, простое механическое значение.

4. Если рассматривать последовательность „*одновременных*" состояний, т. е. если предположить $\delta t = 0$, то интеграл $\int \omega_\delta$ принимает вид

$$\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z);$$

в этом предположении мы получаем следующую теорему:

Если рассматривать замкнутую последовательность траекторий и если взять на этих траекториях состояния, соответствующие какому-либо определенному моменту t, то интеграл $\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$, взятый по замкнутой последовательности полученных таким образом состояний, не зависит от t.

Эта теорема принадлежит А. Пуанкаре, который характеризовал полученное таким образом свойство, дав наименование *интегрального инварианта* интегралу

$$\int m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z),$$

взятому по замкнутому контуру *).

В эту концепцию Пуанкаре понятие энергии не входит; оно необходимо появилось бы, если бы вместо исследования замкнутой последовательности *одновременных* состояний мы исследовали замкнутую последовательность любых состояний.

Будем говорить, что интеграл $\int \omega_\delta$ от тензора „количества движения — энергии" есть *полный интегральный инвариант* (или проще — *интегральный инвариант*, в случаях, когда нет оснований опасаться путаницы) для диференциальных уравнений движения. Интегральный инвариант Пуанкаре есть, следовательно, полный интегральный инвариант тензора „количество движения — энергии", рассматриваемый с особой точки зрения.

Замечательно, что если вместо последовательности одновременных состояний мы будем рассматривать последовательность состояний, удовлетворяющих соотношениям

$$\delta x = x'\delta t, \quad \delta y = y'\delta t, \quad \delta z = z'\delta t,$$

то тензор ω_δ приводится к элементарному действию Гамильтона

$$\left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] dt.$$

*) Рассматривается замкнутый контур одновременных состояний. *Прим. ред.*

Следовательно, интегральный инвариант Пуанкаре и действие Гамильтона представляют собою лишь два различных вида интеграла „количество движения — энергии“, хотя с первого взгляда между этими двумя понятиями и нет никакой связи.

5. Выше мы вывели из принципа Гамильтона одно свойство тензора „количества движения — энергии“, а именно, что интеграл этого тензора, взятый вдоль замкнутой линии состояний, не изменяется, когда меняют форму этой замкнутой линии, не меняя трубки траекторий, на которой она лежит. Докажем теперь, что *это свойство может заменить принцип Гамильтона*, а именно, что *диференциальные уравнения движения являются единственными, которые допускают в качестве интегрального инварианта интеграл* $\int \omega_\delta$, *взятый по любому замкнутому контуру.*

Действительно, пусть дана некоторая система диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dx'}{X'}=\frac{dy'}{Y'}=\frac{dz'}{Z'}=\frac{dt}{T}, \tag{5}$$

где знаменатели суть определенные функции семи переменных x, y, z, x', y', z', t. Вообразим трубку интегральных кривых системы, зависящих от параметра α; и пусть этот параметр изменяется от 0 до l, так что интегральная кривая, соответствующая $\alpha=l$, тождественна с той, которая соответствует $\alpha=0$. Чтобы выразить, что интеграл $\int \omega_\delta$, взятый вдоль замкнутой кривой, охватывающей эту трубку, не зависит от выбора кривой, представим, что координаты x, y, z, x', y', z', t любого состояния, лежащего на трубке, являются функциями параметра α и другого параметра u. Придав u постоянное значение, получим замкнутую кривую, охватывающую трубку. Перемещаясь вдоль какой-нибудь интегральной кривой, составляющей трубки, имеем:

$$\varrho\, du=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\ldots=\frac{dt}{T},$$

где ϱ обозначает произвольный фактор, *который можно выбрать таким образом, что при* $u=\text{const}$ *получится данная последовательность замкнутых контуров, охватывающих трубку.*

Тогда интеграл $I=\int\limits_{(C)} \omega_\delta$, в котором u имеет определенное значение, есть функция u и если для перемещения, при котором изменяется только u, сохраним символ d, мы получим:

$$dI=\int\limits_{(C)} m\,dx'\delta x+m\,dy'\delta y+m\,dz'\delta z-dE\,\delta t+$$

$$+mx'd(\delta x)+my'd(\delta y)+mz'd(\delta z)-E\,d(\delta t)$$

или, изменяя порядок диференцирований d и δ и интегрируя по частям,

$$dI = [mx'dx + my'dy + mz'dz - E\,dt]_{\sigma} + \\ + \int_{(C)} (m\,dx'\delta x + m\,dy'\delta y + m\,dz'\delta z - dE\,\delta t - \\ - m\,dx\,\delta x' - m\,dy\,\delta y' - m\,dz\,\delta z' + dt\,\delta E).$$

Члены, полностью проинтегрированные, очевидно, равны нулю, *так как контур интегрирования замкнутый*. Что же касается интеграла, который остается в правой части, то для того, чтобы $\int \omega_\delta$ был интегральным инвариантом рассматриваемой системы диференциальных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл обращался в нуль, если в нем заменить

$$dx,\ dy,\ dz,\ dx',\ dy',\ dz',\ dt$$

значениями

$$\varrho X,\ \varrho Y,\ \varrho Z,\ \varrho X',\ \varrho Y',\ \varrho Z',\ \varrho T,$$

каков бы ни был замкнутый контур (C) и какова бы ни была функция ϱ. Отсюда легко вывести, что коэфициенты при

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta x',\ \delta y',\ \delta z',\ \delta t$$

должны тождественно равняться нулю. Следовательно, для того, чтобы система диференциальных уравнений допускала интегральный инвариант $\int \omega_\delta$, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$\begin{aligned} m\,dx' + \frac{\partial E}{\partial x}\,dt = 0; &\quad -m\,dx + \frac{\partial E}{\partial x'}\,dt = 0; \\ m\,dy' + \frac{\partial E}{\partial y}\,dt = 0; &\quad -m\,dy + \frac{\partial E}{\partial y'}\,dt = 0; \\ m\,dz' + \frac{\partial E}{\partial z}\,dt = 0; &\quad -m\,dz + \frac{\partial E}{\partial z'}\,dt = 0; \\ -dE + \frac{\partial E}{\partial t}\,dt = 0, & \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} m\,dx' - \frac{\partial U}{\partial x}\,dt = 0; &\quad -m\,dx + mx'dt = 0; \\ m\,dy' - \frac{\partial U}{\partial y}\,dt = 0; &\quad -m\,dy + my'dt = 0; \\ m\,dz' - \frac{\partial U}{\partial z}\,dt = 0; &\quad -m\,dz + mz'dt = 0; \\ -m(x'dx' + y'dy' + z'dz') + dU - \frac{\partial U}{\partial t}\,dt = 0, & \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

были следствиями диференциальных уравнений системы.

Первые шесть из этих уравнений представляют не что иное, как классические диференциальные уравнения движения; седьмое уравнение дает в качестве своего следствия теорему живых сил.

6. Из предыдущего очевидна важная роль, которую играет тензор „количество движения — энергии". *Если допустить, что траектория определена как последовательность состояний, образующих решение системы обыкновенных диференциальных уравнений, то эта система среди всех возможных систем диференциальных уравнений характеризуется тем, что допускает в качестве интегрального инварианта криволинейный интеграл от тензора „количество движения — энергии", распространенный по любому замкнутому контуру состояний.*

Отсюда получаем новый принцип, который может быть назван *принципом сохранения количества движения и энергии.* Как мы видели в предыдущем параграфе, теорема живых сил есть одно из следствий этого принципа.

Общий случай.

7. Все предыдущие рассуждения можно распространить на материальные системы, какие обыкновенно рассматривают в аналитической механике. Предположим, что эти системы удовлетворяют трем условиям.

1) *Связи, которым они подчинены, являются совершенными,* т. е. в каждый момент t сумма элементарных работ сил связи равна нулю при любом виртуальном перемещении, совместном с теми связями, которые существуют в этот момент t. При этих условиях имеет силу принцип Даламбера (d'Alembert), выраженный в такой форме:

Принцип Даламбера. *Если рассматривать движение, под действием заданных сил, некоторой материальной системы, подчиненной совершенным связям,* то в каждый момент времени сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции равна нулю — *при всяком виртуальном перемещении системы, совместном со связями, существующими в этот момент.*

Принцип Даламбера выражается формулой

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0, \qquad (7)$$

где X, Y, Z обозначают компоненты данной силы, приложенной к точке (x, y, z) массы m, а δx, δy, δz обозначают компоненты самого общего элементарного перемещения, совместного со связями.

Из всех систем с совершенными связями мы будем далее рассматривать только те, связи которых *голономны,* т. е.

2) *Мы предположим, что связи могут быть выражены конечными уравнениями между координатами точек системы и временем t.* Это значит, что координаты различных точек системы могут быть выражены формулами вида:

$$\left.\begin{aligned} x_i&=f_i(q_1, \ldots, q_n, t),\\ y_i&=g_i(q_1, \ldots, q_n, t),\\ z_i&=h_i(q_1, \ldots, q_n, t) \end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots),$$

куда входят n произвольных параметров q. Каждой совокупности значений q и t соответствует положение системы, и притом единственное, совместное со связями, которые существуют в момент t. Всякое виртуальное перемещение, совместное со связями, существующими в момент t, получается, если $q_1, \ldots, q_n$ дать произвольные приращения

$$\delta q_1, \ldots, \delta q_n.$$

Сделаем, наконец, последнее предположение:

3) *Сумма элементарных работ данных сил при любом виртуальном перемещении, совместном со связями, существующими в момент t, равна полному диференциалу некоторой функции U* от q и t, т. е.

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n;$$

во второй части отсутствует член $\frac{\partial U}{\partial t}dt$, так как виртуальные перемещения, о которых идет речь в принципе Даламбера, предполагают, что t остается постоянным.

8. Принцип наименьшего действия Гамильтона распространяется без труда на системы такого рода. Положим

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] dt.$$

Будем рассматривать параметры $q_1, \ldots, q_n$ как функции t и параметра α, причем нижний и верхний пределы интеграла могут зависеть от α. Если α получает вариацию $\delta\alpha$, то вычисление, тождественное проведенному выше (п. 2), дает нам вариацию *действия* δW:

$$\delta W = [\omega_\delta]_1 - [\omega_\delta]_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta U - \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right]\right] dt, \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\omega_\delta = &\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \\
&\qquad - \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t;\\
[\omega_\delta]_1 = &\sum m(x_1'\delta x_1 + y_1'\delta y_1 + z_1'\delta z_1) - \\
&\qquad - \left[\frac{1}{2}\sum m(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - U_1\right]\delta t_1;\\
[\omega_\delta]_0 = &\sum m(x_0'\delta x_0 + y_0'\delta y_0 + z_0'\delta z_0) - \\
&\qquad - \left[\frac{1}{2}\sum m(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) - U_0\right]\delta t_0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

На основании принципа Даламбера отсюда непосредственно следует, что данное реальное движение системы, рассматриваемое за некоторый промежуток времени (t_0, t_1), дает *экстремум* действия W по сравнению со всеми возможными бесконечно близкими движениями, соответствующими одному и тому же *начальному* положению и одному и тому же конечному положению системы. Обратно, единственные движения, которые обладают этим свойством, это — реальные движения системы; в *этом состоит принцип наименьшего действия Гамильтона.*

Более того, формула (8) показывает, что интеграл $\int \omega_\delta$ — распространенный на замкнутый контур *состояний* системы (совместных со связями), не изменяется, если деформировать этот замкнутый контур, переместив каким-либо способом каждое из состояний, его составляющих, вдоль соответствующей траектории системы. Иначе говоря, *интеграл $\int \omega_\delta$ есть интегральный инвариант для диференциальных уравнений движения.*

Диференциальная форма ω_δ, если мы условимся рассматривать только состояния системы, совместные со связями, также может быть названа тензором „количество движения — энергии" системы.

9. Диференциалы $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$, которые входят в выражение ω_δ, вообще говоря, не произвольны, так как они должны удовлетворять уравнениям, полученным путем полного диференцирования уравнений связи системы. Если ввести n параметров положения системы, то эти диференциалы можно выразить также при помощи величин

$$\delta q_1, \quad \delta q_2, \quad \ldots, \quad \delta q_n, \quad \delta t.$$

Станем на эту точку зрения и определим, с одной стороны, диференциальные уравнения движения, а с другой, — тензор „количество движения — энергии". Для этого нам достаточно вычислить δW, предполагая, что элементарное действие выражено посредством параметров q и времени t. Положим

$$T = \sum \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

T, кинетическая энергия, есть функция второй степени относительно производных $\frac{dq_i}{dt}$; обозначим эти производные через q'_i и будем рассматривать их как аргументы, независящие от q_i и от t. Положим:

$$F = T + U, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} F dt.$$

Простое вычисление дает

$$\delta W = F_1 \delta t_1 - F_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial q'_i} \delta q'_i \right) dt;$$

но

$$\delta q_i' \, dt = \delta \frac{\partial q_i}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} (\delta q_i) \, dt = d(\delta q_i);$$

интегрируя по частям, получим

$$\delta W = F_1 \delta t_1 - F_0 \delta t_0 + \left[\sum \frac{\partial F}{\partial q_i'} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right) \right] \delta q_i \, dt.$$

Заметим, наконец, что

$$[\delta q_i]_{t_0} = \frac{\partial}{\partial a} q_i(t_0, a) \, \delta a \quad \text{и} \quad \delta(q_i^0) = \frac{\partial q_i(t_0, a)}{\partial t} \delta t_0 + \frac{\partial q_i(t_0, a)}{\partial a} \delta a,$$

откуда

$$[\delta q_i]_{t_0} = \delta(q_i^0) - q_i'^0 \, \delta t_0 \quad \text{и} \quad [\delta q_i]_{t_1} = \delta(q_i^{(1)}) - q_i'^{(1)} \, \delta t_1.$$

Окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} \delta W = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right)_1 \delta(q_i^{(1)}) - \left(\sum q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right)_1 \delta t_1 - \\ - \left[\sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right)_0 \delta(q_i^0) - \left(\sum q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right)_0 \delta t_0 \right] + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i'} \right) \right] dt. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Принцип Гамильтона приводит нас тогда к следующим уравнениям движения —к *уравнениям Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Сравнение двух значений (8) и (10), найденных для δW, приводит к следующему выражению для тензора ω_δ:

$$\omega_\delta = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i - H \, \delta t, \tag{12}$$

где

$$H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U. \tag{13}$$

Величины $\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}$ суть обобщенные количества движения (отнесенные к выбранной системе координат); величина H есть *обобщенная энергия*.

10. Простое замечание позволяет упростить вычисление обобщенной энергии H. Кинетическая энергия T содержит, вообще говоря, члены второй, первой и нулевой степени относительно $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$; пусть

$$T = T_2 + T_1 + T_0;$$

тогда применение теоремы Эйлера об однородных функциях непосредственно дает

$$H = T_2 - T_0 - U.$$

В обобщенной энергии член T_2 можно рассматривать, как имеющий кинетическое происхождение, а член $-T_0 - U$ — как имеющий динамическое происхождение.

Возьмем, например, случай свободной материальной точки, отнесенной к осям, вращающимся вокруг Oz с угловой скоростью r. Получим

$$2T = m\,[(x' - ry)^2 + (y' + rx)^2 + z'^2],$$

а следовательно, энергия, *отнесенная к выбранной системе референции*, будет

$$H = \frac{1}{2}\,m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{2}\,mr^2\,(x^2 + y^2) - U;$$

часть энергии динамического происхождения разлагается на два члена, из которых один происходит от данных сил, а другой — от центробежных сил. Что касается компонент количества движения, то они суть

$$m\,(x' - ry), \quad m\,(y' + rx), \quad mz',$$

т. е. они являются проекциями абсолютного количества движения на выбранные координатные оси.

11. *Канонические переменные Гамильтона.* Уравнения движения, рассматриваемые как диференциальные уравнения первого порядка между q_i, q'_i и t, принимают исключительно простую форму, если в них ввести переменные

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}. \tag{14}$$

Новые переменные, которые мы вводим вместо q'_i, являются просто компонентами количества движения системы. Тензор ω_δ принимает тогда простой вид:

$$\omega_\delta = \sum p_i\,\delta q_i - H\,\delta t, \tag{15}$$

где H следует рассматривать как функцию q_i, p_i и t.

Будем непосредственно искать уравнения движения, *используя тот факт, что они допускают в качестве интегрального инварианта интеграл* $\int \omega_\delta$, *взятый вдоль произвольной замкнутой кривой состояний системы.*

Пусть

$$\frac{dq_1}{Q_1}=\frac{dq_2}{Q_2}=\ldots=\frac{dp_n}{P_n}=\frac{dt}{T} \tag{16}$$

— некоторая система диференциальных уравнений. Чтобы выразить, что она допускает интегральный инвариант $\int \omega_\delta$, будем только повторять слово в слово рассуждения п. 5. Мы рассматриваем трубку интегральных кривых системы (16) и выражаем $2n+1$ координат p_i, q_i, t состояния трубки как функции двух параметров a и u, причем первый параметр остается постоянным на интегральной кривой и изменяется в интервале $(0;\ l)$, так что интегральная кривая, соответствующая $a=l$, совпадает с интегральной кривой, соответствующей $a=0$.

Обозначая через d символ диференцирования, относящийся к переменной u, и полагая

$$I=\int\limits_{(C)}\omega_\delta,$$

посредством интегрирования по частям получаем:

$$dI=\int\limits_{(C)}\sum(dp_i\,\delta q_i-dq_i\,\delta p_i)-dH\,\delta t+dt\,\delta H.$$

Для того чтобы система (16) допускала интегральный инвариант $\int\omega_\delta$, необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты при

$$\delta q_1,\quad \delta q_2,\quad \ldots,\quad \delta q_n,\quad \delta t$$

в подинтегральном выражении обращались все в нуль в силу уравнений системы. Приравнивая нулю эти коэфициенты, мы получаем $2n+1$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt&=0;\\ -dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt&=0;\\ -dH+\frac{\partial H}{\partial t}\,dt&=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Это доказывает, что *существует единственная система диференциальных уравнений, допускающая интегральный инвариант* $\int\omega_\delta$, и в то же время дает нам уравнения движения в *канонической* форме Гамильтона:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_i};\\ \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Последнее уравнение

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt = 0$$

представляет собою аналитическое выражение теоремы живых сил; оно является следствием $2n$ первых уравнений.

12. Итак, в общем случае материальных систем аналитической механики мы приходим к *обобщенному принципу сохранения количества движения и энергии*:

Если допустить, что всякое движение системы, находящейся под действием данных сил, есть непрерывная последовательность состояний, удовлетворяющая системе диференциальных уравнений первого порядка, то эти диференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что они допускают в качестве интегрального инварианта интеграл тензора „количества движения — энергии", взятый по произвольному замкнутому контуру состояний.

Тензор „количества движения — энергии" имеет одну из форм:

$$\omega_\delta = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\sum \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t,$$

$$\omega_\delta = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i - H\,\delta t \qquad \left(H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U\right),$$

$$\omega_\delta = \sum p_i\,\delta q_i - H\,\delta t.$$

Если перемещаться в пространстве состояний так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\delta q_i = q_i'\,\delta t,$$

то выражение ω_δ обращается в элементарное действие Гамильтона $(T+U)\,\delta t$; наоборот, если рассматривать только последовательность одновременных состояний $(\delta t = 0)$, то получим выражение

$$\sum p_i\,\delta q_i,$$

т. е. подинтегральное выражение в интегральном инварианте А. Пуанкаре.

13. Принцип сохранения количества движения и энергии позволяет составить уравнения движения, каким бы способом мы ни выбрали параметры $q_1, \ldots, q_n, t$, служащие для определения состояния системы в пространстве и времени. Иначе говоря, он дает законам механики, как это делает, впрочем, неявно и принцип Гамильтона, форму, не зависящую от выбора пространственно-временных координат. Это свойство делается аналитически ясным, если вместо того, чтобы вводить производные $q_1', \ldots, q_n'$, от пространственных параметров по параметру временному, мы введем $n+1$ величин

$$\dot q_1, \quad \dot q_2, \quad \ldots, \quad \dot q_n, \quad \dot t,$$

взаимные отношения которых определяются равенствами

$$\frac{\dot q_1}{q_1'} = \frac{\dot q_2}{q_2'} = \ldots = \frac{\dot q_n}{q_n'} = \frac{\dot t}{1}.$$

Полагая

$$F = \dot{t}\,(T + U),$$

где правая часть, однородная первой степени относительно $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \dot{t}$, выражена через q_i, t, $\dot{q}_i$, $\dot{t}$, мы убеждаемся, что тензор „количества движения — энергии“ принимает форму

$$\omega_\delta = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\,\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n}\,\delta q_n + \frac{\partial F}{\partial \dot{t}}\,\delta t.$$

Движение точки, находящейся под действием сил притяжения, в общей теории относительности подчиняется предыдущему принципу: функция F имеет здесь вид

$$F = \sqrt{\sum a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}$$

с четырьмя переменными $\dot{q}_i$, служащими для локализации точки в пространстве и времени.

Преобразование канонических уравнений. Теорема Якоби.

14. Важным применением предыдущих исследований является приложение их к преобразованию канонических уравнений и к методу Якоби интегрирования уравнений динамики.

Интеграл $\int \omega_\delta$, взятый по замкнутому контуру, очевидно, не изменяется, если к ω_δ прибавить любой полный диференциал; обратно, если интеграл от какой-нибудь другой линейной диференциальной формы $\overline{\omega}_\delta$, взятый по любому замкнутому контуру, равен соответствующему интегралу от ω_δ, то $\overline{\omega}_\delta$ отличается от ω_δ только на полный диференциал.

Предположим теперь, что можно найти $2n$ новых переменных r_i, s_i и одну функцию K так, чтобы два выражения

$$\omega_\delta = \sum p_i\,\delta q_i - H\,\delta t,$$

$$\overline{\omega}_\delta = \sum r_i\,\delta s_i - K\,\delta t,$$

отличались только на полный диференциал. Диференциальные уравнения движения характеризуются свойством допускать интегральный инвариант $\int \overline{\omega}_\delta$; и, следовательно, их можно записать в виде:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial r_i},$$

$$\frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial s_i},$$

т. е. *каноническая форма уравнений сохраняется.*

Принятое предположение выражается тождеством вида

$$\sum p_i \delta q_i - \sum r_i \delta s_i - (H - K)\,\delta t = \delta V. \tag{19}$$

Подобное тождество нетрудно осуществить. В самом деле, будем исходить из произвольной функции V от $2n+1$ аргументов q_i, s_i и t, и положим

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i}, \\ r_i &= -\frac{\partial V}{\partial s_i}, \\ K &= \frac{\partial V}{\partial t} + H. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Если эти уравнения определяют замену переменных, т. е. если n первых уравнений разрешимы относительно $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то n последующих дают $r_1, r_2, \ldots, r_n$, последнее же определяет функцию K, и при вновь полученных переменных сохраняется каноническая форма уравнений механики. Важно заметить, что если уравнения (20) разрешимы относительно r_i и s_i, то, обратно, они разрешимы относительно p_i и q_i; действительно, в обоих случаях условие разрешимости состоит в том, чтобы определитель

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial s_j} \right|$$

не был тождественно равен нулю.

Полученное из тождества (19) решение не есть наиболее общее решение вопроса; действительно, оно не обнимает случаев, когда $2n+1$ величин q_i, s_i, t связаны одним или несколькими соотношениями; эти особые случаи легко, впрочем, исследовать непосредственно, задавая *a priori* соотношения, связывающие q_i, s_i и t.

15. Предыдущая общая теория становится особенно интересной с точки зрения приложений в двух случаях.

Первый случай — когда функция K тождественно равна нулю. Канонические уравнения тогда принимают вид:

$$\frac{ds_i}{dt} = 0,$$

$$\frac{dr_i}{dt} = 0;$$

уравнения траекторий обращаются в следующие:

$$s_i = a_i,$$

$$r_i = b_i,$$

где a_i и b_i суть $2n$ произвольных постоянных. Согласно уравнениям (20), для того, чтобы этот случай имел место, достаточно найти функцию

$V(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющую уравнению с частными производными

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0; \tag{21}$$

если эта функция V, в которую входит n произвольных постоянных $a_1, \ldots, a_n$, такова, что определитель

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i\, \partial a_j} \right|$$

не равен тождественно нулю, то уравнения движения имеют вид:

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

$$b_i = \frac{\partial V}{\partial a_i}:$$

это — *теорема Якоби*. Условие, относящееся к детерминанту, указывает, что функция V есть *полный интеграл* уравнения с частными производными первого порядка (21) (уравнения Якоби).

Второе приложение, на которое следует указать, относится к теории *возмущений*. Предположим, что функция H есть сумма двух членов H_1 и H_2, из которых второй очень мал сравнительно с первым; это сводится к тому, что данные силы можно разделить на две группы, из которых одна, незначительная по сравнению с другой, представляет собою то, что обычно называют возмущающими силами. Метод, применяемый в этом случае в небесной механике, состоит в отыскании полного интеграла V уравнения Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1 = 0,$$

в которое входит только главный член функции H. $2n$ новых переменных r_i, s_i, которые таким образом вводятся, были бы постоянными, *если бы не было возмущающих сил*; следовательно, это — параметры траекторий, не подвергшихся возмущению. *Введение этих новых переменных сохраняет каноническую форму уравнений с новой функцией $K = H_2$, т. е. частью H, относящейся только к возмущающим силам.*

Мы не будем сейчас останавливаться на теории канонических уравнений и на теоремах Якоби. В частности, связь, существующая между интегрированием уравнений динамики и интегрированием уравнений с частными производными первого порядка, *не содержащими явно неизвестной функции*, предстанет в новом свете, когда мы покажем, что всякому уравнению с частными производными этого рода — или, вообще, всякому уравнению с частными производными первого порядка, допускающему известное бесконечно малое преобразование — *можно поставить в соответствие линейный интегральный инвариант.*

Глава II.

ДВУМЕРНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ДИНАМИКИ.

Построение двумерного интегрального инварианта динамики.

16. Мы видели, что элементарное действие Гамильтона получается из выражения

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - H\,\delta t,$$

если в нем положить

$$\delta q_i = q_i'\,\delta t.$$

Замечательно, что *траектории материальной системы осуществляют экстремум интеграла*

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum p_i\,dq_i - H\,dt,$$

если *предположить просто, что q_i и q_i' представляют некоторые функции t, подчиненные единственному условию: q_i принимают на концах интервала заранее данные значения.* Значит, мы уже не предполагаем, как в принципе Гамильтона, что q_i' суть производные от q_i по времени. Можно даже сделать более общее предположение, что q_i, q_i' и t являются функциями одного и того же параметра u, изменяющегося от 0 до 1, причем величины q_i и t принимают заданные начальные и конечные значения.

Вычисление легко дает:

$$\delta W = \left[\sum p_i\,\delta q_i - H\delta t\right]_{u=0}^{u=1} + \int_{u=0}^{u=1} \left(\sum (\delta p_i\,dq_i - \delta q_i\,dp_i) - \delta H\,dt + \delta t\,dH\right).$$

Часть, полностью проинтегрированная, по предположению равна нулю; уравнения экстремалей получатся, если в подинтегральном выражении приравнять нулю коэфициенты при

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta p_n,\ \delta t.$$

Это вычисление было сделано в п. 11; оно дало нам как-раз уравнения движения в канонической форме.

17. Выражение

$$\sum (dp_i\,\delta q_i - dq_i\,\delta p_i) - dH\,\delta t + dt\,\delta H,$$

которое мы дважды встречали, является линейным относительно двух рядов диференциалов; его можно записать в более простой форме

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d,$$

допуская, что два символа диференцирования переместительны *между собою*. Это выражение, которое мы обозначим $\omega'(d, \delta)$, обладает тем свойством, что оно равняется нулю всякий раз, когда символ d определяет в пространстве состояний элементарное перемещение в направлении траектории, тогда как символ δ определяет *произвольное* элементарное перемещение. Впрочем, выражая это свойство, мы и получили соотношения между $dq_1, dq_2, \ldots, dp_n, dt$, определяющие диференциальные уравнения траекторий или, с другой точки зрения, диференциальные уравнения, допускающие интегральный инвариант $\int \omega_\delta$.

Рассмотрим теперь более общий случай: пусть имеются два любых элементарных перемещения, определяемых двумя символами диференцирования δ и δ'; попытаемся найти значение билинейной формы $\omega'(\delta, \delta')$. Для этого представим себе непрерывную двумерную совокупность состояний; такую совокупность можно осуществить, взяв q_i, p_i и t как функции двух параметров α и β; каждое состояние совокупности может быть изображено на плоскости точкой с координатами (α, β), а вся совокупность изображается некоторой площадью. Символы δ и δ' будут соответствовать приращениям одного α и одного β, соответственно. Рассмотрим, далее, в пространстве состояний четыре состояния A, B, C, D, соответствующие значениям параметров

$$\begin{array}{rl} \alpha, & \beta, \\ \alpha+\delta\alpha, & \beta, \\ \alpha, & \beta+\delta'\beta, \\ \alpha+\delta\alpha, & \beta+\delta'\beta, \end{array}$$

и составим интеграл $\int \omega$, взятый по замкнутому контуру $ABDC$.

Очевидно, имеем

$$\int\limits_{AB} = \omega_\delta; \quad \int\limits_{AC} = \omega_{\delta'}; \quad \int\limits_{CD} = \omega_\delta + \delta'\omega_\delta; \quad \int\limits_{BD} = \omega_{\delta'} + \delta\omega_{\delta'}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{ABDC} = \delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = \omega'(\delta, \delta').$$

18. Билинейная форма $\omega'(\delta, \delta')$, которая в итоге зависит от произвольного состояния и от двух состояний бесконечно близких, дает, на основании предыдущего, значение интеграла $\int \omega$, взятого по замкнутому контуру; поэтому она является инвариантом для системы диференциальных уравнений траекторий, в том смысле, что она не меняет значения при перемещении каждого из состояний вдоль соответствующей траектории. Эта форма является также элементом двойного интеграла: если, например, рассматривать p_1 и q_1 как координаты точки на плоскости (зависящие от двух параметров α и β), то выражение $\delta p_1 \delta' q_1 - \delta q_1 \delta' p_1$ даст элемент площади на этой плоскости, отнесенный к криволинейным координатам α, β, т. е. то, что обычно записывают так:

$$dp_1 dq_1 \quad \text{или} \quad \delta p_1 \delta q_1.$$

Это приводит нас к новому интегральному инварианту:

$$\int\int \omega' = \int\int \sum \delta p_i \delta q_i - \delta H \delta t; \tag{1}$$

этот двойной интеграл, распространенный на некоторую двумерную площадь в пространстве состояний, не меняется, если каждое из состояний этой площади перемещать вдоль соответствующей траектории. Впрочем, этот двойной интеграл, в силу обобщенной формулы Стокса, можно получить из криволинейного интеграла

$$\int \omega = \int \left(\sum p_i \delta q_i - H \delta t \right),$$

взятого по контуру, ограничивающему площадь.

В концепции Пуанкаре рассматриваются лишь такие области интегрирования, которые образованы *одновременными* состояниями. При этом полученный только что результат можно сформулировать следующим образом:

Если дано двумерное многообразие траекторий и на каждой траектории состояние, соответствующее определенному моменту времени t, то двойной интеграл

$$\int\int \sum \delta p_i \delta q_i,$$

распространенный по всем этим состояниям, не зависит от t.

Очевидно, эта теорема выражает только частный вид доказанного выше свойства.

19. Пуанкаре называет двумерный интегральный инвариант $\int\int \omega'$ *абсолютным*, в противоположность *относительному* инварианту $\int \omega$. Это значит, что двойной интеграл $\int\int \omega'$ обладает свойством инвариантности независимо от того, будет ли область интегрирования *замкнутой* или нет, тогда как интеграл $\int \omega$ является инвариантом лишь в том случае, если контур интегрирования *замкнут*.

Интеграл $\int\int \omega'$ тождественно равняется интегралу $\int \omega$, взятому по замкнутому контуру; поэтому можно утверждать, что диференциальные *уравнения движения являются единственными, допускающими интегральный инвариант* $\int\int \omega'$. Инвариантность интеграла $\int\int \omega'$ является, таким образом, лишь новой аналитической трактовкой обобщенного принципа сохранения количества движения и энергии.

Приложения к теории вихрей.

20. Совокупности траекторий, которые мы рассматривали до сих пор, являлись лишь воображаемыми объектами. Имеется, однако, случай, когда подобные совокупности существуют реально. Это — случай совершенной жидкости, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию U. В гидродинамике выводятся следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x},\\ \gamma_y &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial y},\\ \gamma_z &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial z};\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

здесь символами γ_x, γ_y, γ_z обозначены компоненты ускорения частицы, занимающей в момент времени t положение (x, y, z), а p и ϱ обозначают, соответственно, давление и плотность в этой точке.

Будем считать, что p и ϱ связаны данным заранее соотношением, что наверное имеет место, если процесс протекает изотермически.

Рассматривая некоторое определенное движение жидкости, мы можем считать p данной функцией переменных x, y, z, t; полагая

$$q = \int \frac{dp}{\varrho},$$

мы видим, что *каждая частица ведет себя как материальная точка массы* 1, *помещенная в силовое поле, зависящее от силовой функции* $U - q$.

Здесь мы встречаемся с конкретным осуществлением бесконечной совокупности траекторий подвижной точки, подверженной действию данных сил. Заметим, что член $-q$ силовой функции обусловлен действием частиц, окружающих рассматриваемую частицу.

21. Траектория каждой частицы может рассматриваться как частное решение системы диференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u, & \frac{du}{dt} &= \frac{\partial(U-q)}{\partial x},\\ \frac{dy}{dt} &= v, & \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial(U-q)}{\partial y},\\ \frac{dz}{dt} &= w, & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial(U-q)}{\partial z};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

значит, если рассматривать непрерывную замкнутую последовательность частиц жидкости (взятых, каждая, в какой-нибудь момент времени), то интеграл

$$\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t, \tag{4}$$

взятый вдоль этой последовательности, не будет менять значения при смещении каждой частицы по ее траектории. В выражении (4) положено

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + q; \tag{5}$$

E есть энергия (на единицу массы) жидкости; эта энергия складывается из кинетической энергии $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, потенциальной энергии $-U$ и внутренней гидродинамической энергии q.

В частности, если взять замкнутую последовательность частиц, рассматриваемых в некоторый — один и тот же для всех данных частиц — момент времени t, то *интеграл* $\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z$ *будет сохранять одно и то же значение, если его брать вдоль линии, образованной теми же частицами в любой другой момент времени.* Это — классическая теорема *сохранения циркуляции* (интеграл $\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z$ обычно называют циркуляцией).

22. Взглянем теперь на эти вещи с несколько иной точки зрения. Попрежнему будем рассматривать некоторое определенное движение жидкой массы; при этом компоненты u, v, w скорости будут определенными функциями переменных x, y, z, t, а траектории различных частиц можно рассматривать как решения системы диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \tag{6}$$

где предполагается, что u, v, w являются известными функциями от x, y, z, t. Интеграл

$$\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t$$

будет, очевидно, относительным интегральным инвариантом для этой новой системы диференциальных уравнений. Преобразуя его в двойной интеграл, мы получим абсолютный интегральный инвариант системы (6).

Составляя выражение $\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta$, получим:

$$\omega'(\delta, \delta') = \delta u\,\delta' x - \delta x\,\delta' u + \delta v\,\delta' y - \\ - \delta y\,\delta' v + \delta w\,\delta' z - \delta z\,\delta' w - \delta E\,\delta' t + \delta t\,\delta' E.$$

Правая часть линейна относительно следующих шести выражений:

$$\delta y\,\delta' z - \delta z\,\delta' y, \quad \delta z\,\delta' x - \delta x\,\delta' z, \quad \delta x\,\delta' y - \delta y\,\delta' x,$$
$$\delta x\,\delta' t - \delta t\,\delta' x, \quad \delta y\,\delta' t - \delta t\,\delta' y, \quad \delta z\,\delta' t - \delta t\,\delta' z.$$

Простое вычисление, являющееся, по существу, лишь применением формулы Стокса, дает для коэфициентов первых трех членов следующие выражения:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Это — компоненты вихря. Чтобы вычислить остальные три коэфициента, воспользуемся следующим замечанием. Так как выражение ω' инвариантно в силу уравнений (6), то уравнения, полученные приравниванием нулю коэфициентов при δx, δy, δz, δt в $\omega'(d, \delta)$, должны быть следствиями уравнений (6). Итак, положим

$$\begin{aligned}\omega'(d, \delta) = \xi(dy\,\delta z - dz\,\delta y) + \eta(dz\,\delta x - dx\,\delta z) + \\ + \zeta(dx\,\delta y - dy\,\delta x) + P(dx\,\delta t - dt\,\delta x) + \\ + Q(dy\,\delta t - dt\,\delta y) + R(dz\,\delta t - dt\,\delta z).\end{aligned}$$

Уравнения, о которых шла речь, суть:

$$\left.\begin{aligned}\eta\,dz - \zeta\,dy - P\,dt = 0,\\ \zeta\,dx - \xi\,dz - Q\,dt = 0,\\ \xi\,dy - \eta\,dx - R\,dt = 0,\\ P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Записав, что они являются следствиями уравнений (6), получим:

$$P = \eta w - \zeta v,$$
$$Q = \zeta u - \xi w,$$
$$R = \xi v - \eta u.$$

Следовательно, искомый двумерный интегральный инвариант имеет вид

$$\begin{aligned}\int\int \xi\,\delta y\,\delta z + \eta\,\delta z\,\delta x + \zeta\,\delta x\,\delta y + (\eta w - \zeta v)\,\delta x\,\delta t + \\ + (\zeta u - \xi w)\,\delta y\,\delta t + (\xi v - \eta u)\,\delta z\,\delta t.\end{aligned} \tag{8}$$

Будучи распространен на площадь, образованную частицами, взятыми в один и тот же момент времени t, этот интеграл дает *поток вихря* сквозь эту площадь. Мы приходим, таким образом, к теореме сохранения потока вихря сквозь площадку жидкости.

23. Выражение $\omega'(d, \delta)$ можно было бы вычислить непосредственно. В частности, коэфициент P при $dx\,\delta t$, очевидно, имеет вид

$$P = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial v}{\partial x} - w\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x};$$

записываем, что он равен выражению, найденному выше,

$$P = \eta w - \zeta v = w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

и получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

представляющее собою не что иное, как первое уравнение гидродинамики; действительно, левая часть представляет собою развернутое выражение для γ_x.

Этот результат напоминает нам, что интеграл $\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t$ инвариантен по отношению к уравнениям (6) лишь в том случае, если u, v, w представляют собою компоненты. скорости частицы совершенной жидкости, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию, или, иными словами, если существует *потенциал ускорений*.

24. Уравнения (7), которые также могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \eta(dz - w\,dt) - \zeta(dy - v\,dt) = 0, \\ \zeta(dx - u\,dt) - \xi(dz - w\,dt) = 0, \\ \xi(dy - v\,dt) - \eta(dx - u\,dt) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7a)$$

являются следствием системы (6), но не *эквивалентны* ей; иными словами, *уравнения* (6) *траекторий не являются единственными, допускающими интегральный инвариант* $\int \omega$. В частности, этим свойством обладают уравнения

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}, \qquad (9)$$

очевидным следствием которых является система (7). Решениями системы (9) определяются кривые, называемые *линиями вихря. Тот факт, что диференциальные уравнения траекторий и диференциальные уравнения вихревых линий допускают один и тот же интегральный инвариант, приведет нас к основным теоремам теории вихрей.*

Действительно, элементарное смещение $(dx, dy, dz, 0)$ [в четырехмерном мире (x, y, z, t)] в направлении вихревой линии может быть характеризовано тем, что билинейная форма $\omega'(d, \delta)$ равняется нулю, *каково бы ни было смещение* δ: это немедленно вытекает из уравнений (7). Установив это, рассмотрим в некоторый данный момент t вихревую линию (Γ); составляющие ее частицы образуют в некоторый другой момент t' кривую (Γ'); *докажем, что* (Γ') *является вихревой линией для момента времени* t'. В самом деле, пусть $(dx', dy', dz', 0)$ будет элементарное смещение вдоль (Γ'); рассмотрим наряду с ним *произвольное* смещение $(\delta x', \delta y', \delta z', \delta t')$. Сместим три состояния

$$(x', y', z', t'), \quad (x' + dx', y' + dy', z' + dz', t'),$$
$$(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z', t' + \delta t')$$

вдоль соответствующих им траекторий, первые два до момента времени t, последний до момента $t + \delta t$; мы получим двумерный элемент, для которого $(dx, dy, dz, 0)$ служит смещением вдоль вихревой линии (Γ); следовательно, значение формы $\omega'(d, \delta)$ равно нулю; следовательно, она равна нулю и для первоначального элемента, а это и значит, что (Γ') является вихревой линией. Это — знаменитая теорема Гельмгольца.

25. Рассмотрим в момент времени t вихревую трубку и две замкнутые кривые (C) и (C_1), ее охватывающие. *Циркуляция* вдоль обеих этих замкнутых кривых одинакова, потому что $\int \omega$ является интегральным инвариантом по отношению к диференциальным уравнениям (9) вихревых линий. В последующий момент времени t' вихревая трубка займет другое положение в пространстве, но циркуляция вдоль любой замкнутой линии, окружающей новую трубку, все же не изменится, потому что $\int \omega$ является интегральным инвариантом и для диференциальных уравнений траекторий. Мы приходим к понятию, которое в гидродинамике называют *моментом*, или *напряжением* вихревой трубки, к величине, сохраняющейся при вихревом движении жидкости. Это свойство является лишь частным следствием инвариантности интеграла

$$\int u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t$$

как относительно диференциальных уравнений траекторий, так и относительно диференциальных уравнений вихревых линий.

Впрочем, мы получим все эти результаты как частный случай одной весьма общей теоремы о диференциальных формах, инвариантных одновременно относительно нескольких систем диференциальных уравнений.

Ясно, что во всем предшествующем существенно предположение о том, что ξ, η, ζ не равны нулю одновременно, т. е. что движение жидкости является *вихревым*.

Глава III.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ.

Общее понятие интегрального инварианта.

26. В предыдущих главах показана важность понятия интегрального инварианта для механики. Теперь мы приступим к изучению этого понятия во всей его общности.

Рассмотрим какую-нибудь систему обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка (известно, что любую систему можно свести к этому случаю). Мы ее запишем так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Мы выделили независимое переменное t и зависимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но, как мы увидим, это не существенно. Попрежнему мы будем говорить, что t обозначает время. Совокупность значений $x_1, \ldots, x_n, t$, соответствующую некоторому решению, будем попрежнему называть *траекторией* и будем рассматривать ее как кривую в пространстве $n+1$ измерений $(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Пуанкаре называет *интегральным инвариантом* интеграл (простой или кратный), распространенный на некоторое множество точек, соответствующих одному и тому же значению независимой переменной t („одновременные" точки), который не меняет своего значения, если точки этого множества перемещаются вдоль соответствующих траекторий до некоторого другого значения t' независимой переменной. Интегральный инвариант называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место, какова бы ни была область интегрирования; он называется *относительным*, если свойство инвариантности имеет место только для *замкнутых* областей интегрирования. Линейный интегральный инвариант механики

$$\int \sum p_i \,\delta q_i$$

является относительным интегральным инвариантом; примером абсолютного интегрального инварианта может служить двойной интеграл

$$\int \int \sum \delta p_i \,\delta q_i.$$

Простейшими видами интегральных инвариантов являются следующие:

$$\int a_1 \,\delta x_1 + a_2 \,\delta x_2 + \ldots + a_n \,\delta x_n;$$

$$\int \sqrt{a_{11}\,\delta x_1^2 + a_{22}\,\delta x_2^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta x_1\,\delta x_2 + \ldots};$$

$$\int \int a_{12}\,\delta x_1\,\delta x_2 + a_{13}\,\delta x_1\,\delta x_3 + \ldots + a_{n-1,n}\,\delta x_{n-1}\,\delta x_n;$$

$$\int \int \int a_{123}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3 + \ldots$$

27. Подинтегральное выражение интегрального инварианта представляет собой диференциальную форму, в которую входят зависимые и независимая переменные и их диференциалы (или даже несколько рядов диференциалов). Эта форма F может рассматриваться сама по себе. Она обладает следующим свойством: ее значение, вычисленное для некоторой точки и одной или нескольких бесконечно близких точек, соответствующих тому же значению независимого переменного (*одновременных*), не меняется, если перемещать эти точки вдоль соответствующих траекторий, *однако, так, чтобы они оставались одновременными.* Ясно, что с этой точки зрения можно рассматривать формы F более общего вида, нежели те, которые могут встретиться под знаком интеграла, например, любые рациональные (однородные) функции от $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$.

Как показывают примеры, изученные в первых двух главах, *интересно рассматривать не только одновременные состояния.* Мы увидим, что любой элементарный интегральный инвариант в смысле Пуанкаре может рассматриваться, как результат вычеркивания из элементарного интегрального инварианта более общего вида всех членов, содержащих диференциал (или диференциалы) независимой переменной t.

Но чтобы получить этот существенный результат, который послужит ключом почти ко всем свойствам интегральных инвариантов, необходимо сначала вспомнить классические свойства первых интегралов системы диференциальных уравнений.

Первые интегралы.

28. Как известно, первым интегралом системы (1) называют функцию $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, обладающую следующим свойством: если заменить в ней $x_1, \ldots, x_n$ их выражениями через t, соответствующими любой траектории, то функция u от t, полученная таким образом, обращается в постоянную. Эти первые интегралы являются решениями линейного диференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{2}$$

Представим себе, что уравнения (1) проинтегрированы и зависимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ выражены как функции времени t и начальных значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ при $t = 0$, именно, путь

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(t;\ x_1^0, \ldots, x_n^0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = f_n(t;\ x_1^0, \ldots, x_n^0); \end{array}\right\}$$

если эти уравнения разрешить относительно $x_1^0, \ldots, x_n^0$, то последние n величин выразятся в виде функций от $x_1, \ldots, x_n, t$, которые и будут, очевидно, первыми интегралами. Таким путем получается система n первых интегралов, очевидно, независимых, т. е. таких, которые не связаны никаким соотношением, тождественным относительно $x_1, \ldots, x_n, t$.

Ясно, что любая функция первых интегралов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ является сама первым интегралом. *И обратно,* если u — некоторый первый интеграл, то его численное значение *для любой* траектории равно, в силу основного свойства первых интегралов, значению $u(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0)$.

Полный диференциал любой функции u от $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ может быть, очевидно, представлен в форме

$$du = \lambda_1 (dx_1 - X_1\, dt) + \lambda_2 (dx_2 - X_2\, dt) + \ldots + \lambda_n (dx_n - X_n\, dt) + \lambda\, dt.$$

Для того чтобы u было первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы коэфициент λ тождественно равнялся нулю; это легко доказать непосредственно; в этом можно также убедиться, заметив, что λ представляет собой не что иное, как левую часть уравнения (2).

Следовательно, *диференциал любого первого интеграла представляет собой линейную комбинацию n линейных диференциальных форм*

$$dx_1 - X_1\,dt, \quad dx_2 - X_2\,dt, \ldots, dx_n - X_n\,dt,$$

и обратно, каждая из этих форм является линейной комбинацией диференциалов данных n независимых первых интегралов.

Абсолютные интегральные инварианты и инвариантные диференциальные формы.

29. Сделав эти общие замечания, займемся абсолютными интегральными инвариантами. Элементом любого абсолютного интегрального инварианта является диференциальная форма $F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, не изменяющаяся при таком перемещении бесконечно близких точек $(x_1, \ldots, x_n, t)$ и $(x_1+\delta x_1, \ldots, x_n+\delta x_n, t)$ соответственно по их траекториям, когда рассматриваются лишь одновременные положения точек на траекториях. Рассмотрим, в частности, момент $t=0$; получим

$$F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = F(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0;\ \delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0).$$

Будем теперь рассматривать x_i^0 в правой части равенства как первые интегралы системы (1); заменим x_i^0 их выражениями через $x_1, \ldots, x_n, t$; мы получим новое тождество:

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, 0;\ \delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t).$$

Правая часть этого тождества представляет собою, очевидно, величину, численное значение которой обусловлено лишь траекторией, соответствующей начальным значениям $x_1^0, \ldots, x_n^0$, и бесконечно близкой траекторией. Это значение не зависит, таким образом, от специального выбора точки $(x_1, \ldots, x_n, t)$ на первой траектории и точки $(x_1+\delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n, t+\delta t)$ на второй. Мы получаем снова элемент интегрального инварианта, но инварианта более полного, чем тот, из которого мы исходили, *потому что теперь мы не обязаны ограничиваться рассмотрением точек, соответствующих одному и тому же моменту времени.*

Заметим, далее, что от начальной формы F весьма легко перейти к конечной форме Φ. В самом деле, если при вычислении $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $\delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0$ рассматривать t как постоянную, то из Φ получается снова форма F. Следовательно, имеем

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0) = F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n).$$

Но δt входит в наши выкладки только через посредство выражений $\delta x_1^0, \ldots, \delta x_n^0$, которые являются линейными комбинациями форм

$$\delta x_1 - X_1\,\delta t, \quad \delta x_2 - X_2\,\delta t, \ldots, \delta x_n - X_n\,\delta t;$$

следовательно, Φ зависит только от этих n линейных комбинаций; поэтому, чтобы получить значение Φ при любом δt, достаточно в его выражении при $\delta t=0$ заменить δx_1 через $\delta x_1 - X_1 \delta t$ и т. д.

Окончательно получаем:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, t; \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t) = \\ = F(x_1, \ldots, x_n, t; \delta x_1 - X_1 \delta t, \ldots, \delta x_n - X_n \delta t). \quad (3)$$

30. Резюмируем только что полученные результаты. Их два.

1) Форма F, представляющая собою *элемент* абсолютного интегрального инварианта в смысле Пуанкаре — форма, в которую входят диференциалы одних лишь зависимых переменных, — связана с более полной формой Φ, в которую входит, кроме того, и диференциал (или диференциалы) независимой переменной t. От формы Φ можно перейти к форме F, опуская в Φ все члены, содержащие δt; и обратно, от F к Φ можно перейти, заменяя в F выражения

$$\delta x_1, \quad \delta x_2, \quad \ldots, \quad \delta x_n$$

выражениями

$$\delta x_1 - X_1 \delta t, \quad \delta x_2 - X_2 \delta t, \quad \ldots, \quad \delta x_n - X_n \delta t.$$

2) Форма Φ может быть выражена через первые интегралы системы (1) и их диференциалы.

Последнее свойство делает очевидным инвариантный характер формы Φ.

На простом примере легко понять взаимную связь форм F и Φ. Если исходить из некоторого интеграла u, то полный диференциал δu будет, очевидно, формой Φ; ей соответствует форма F:

$$F = \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \delta x_n,$$

и ясно, что

$$\Phi = \delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} (\delta x_1 - X_1 \delta t) + \frac{\partial u}{\partial x_2} (\delta x_2 - X_2 \delta t) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} (\delta x_n - X_n \delta t).$$

31. Мы условимся говорить, что диференциальная форма, которая может быть выражена с помощью первых интегралов системы (1) и их диференциалов, является *инвариантной* для системы (1).

Подинтегральное выражение абсолютного интегрального инварианта получается, если приравнять нулю δt в инвариантной форме. Так, двойной интегральный инвариант динамики связан с инвариантной формой

$$\sum \delta p_i \, \delta q_i - \delta H \, \delta t,$$

или, если предпочитаем ввести два ряда диференциалов, с формой

$$\Phi = \sum (\delta p_i \, \delta' q_i - \delta q_i \, \delta' p_i) - \delta H \, \delta' t + \delta t \, \delta' H.$$

Ее выражение через первые интегралы p_i^0, q_i^0 будет, очевидно, таким:

$$\Phi = \sum (\delta p_i^0 \, \delta' q_i^0 - \delta q_i^0 \, \delta' p_i^0).$$

Относительные интегральные инварианты. Функция Гамильтона.

32. Часть предыдущих результатов распространяется и на относительные интегральные инварианты. Так, например, линейный интегральный инвариант динамики, введенный Пуанкаре,

$$\int \sum p_i \, \delta q_i,$$

не меняющий своего значения при перемещении каждого состояния вдоль соответствующей траектории от момента t_0 до некоторого иного момента t_1, равняется интегралу

$$\int \sum p_i^0 \, \delta q_i^0.$$

Любой относительный интегральный инвариант может быть преобразован так, что в подинтегральное выражение войдут лишь первые интегралы и их диференциалы; этот преобразованный интеграл сохраняет инвариантный характер, если его распространить на любую замкнутую область, состоящую из одновременных или неодновременных состояний.

Но если в полученных таким образом выражениях заменить первые интегралы их выражениями через зависимые и независимую переменные, то под знаком интеграла получится форма Φ, *которую нельзя получить из формы F с помощью рассмотренного выше приема.* Действительно, хотя равенство

$$\int F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = \int \Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0)$$

сохраняет силу для любой замкнутой области интегрирования, состоящей из одновременных точек, но отсюда не следует почленного равенства подинтегральных выражений, а потому не будет, вообще говоря, иметь места тождество

$$F(x_1, \ldots, x_n, t; \delta x_1, \ldots, \delta x_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, t; \delta x_1, \ldots, \delta x_n, 0),$$

необходимое для вывода соотношения, аналогичного формуле (3):

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta t) =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_n, t;\ \delta x_1 - X_1 \delta t, \ldots, \delta x_n - X_n \delta t).$$

Так, например, в простейшем случае одной свободной материальной точки элемент

$$F = m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z),$$

находящийся под знаком линейного интегрального инварианта Пуанкаре, привел бы при таком вычислении к форме

$$m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,\delta t,$$

которая не является элементом интегрирования полного интегрального инварианта, и разность между нею и формой

$$\omega_\delta = m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t$$

не является полным диференциалом.

Нужно заметить, что трудность, возникающая здесь в связи с переходом от относительного интегрального инварианта в смысле Пуанкаре к полному интегральному инварианту, не имеет большого практического значения, потому что всякий относительный интегральный инвариант может быть приведен к абсолютному. В самом деле, мы знаем, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, по замкнутой поверхности и т. д. может быть преобразован в интеграл, распространенный на поверхность, ограниченную данным замкнутым контуром, на объем, ограниченный данной замкнутой поверхностью и т. д.

33. Несколько примеров пояснят предыдущие рассуждения.

Рассмотрим снова полный линейный интегральный инвариант динамики, т. е. тензор „количество двнжения —энергии"

$$\omega_\delta = \sum p_i\, \delta q_i - H\, \delta t.$$

Имеем равенство

$$\int\limits_{(C)} \sum p_i\, \delta q_i - H\, \delta t = \int\limits_{(C_0)} \sum p_i^0\, \delta q_i^0,$$

в котором предполагается, что замкнутый контур (C_0) состоит из тех же состояний, которые составляли (C), но смещенных вдоль их траекторий до момента $t = 0$. Можно также считать интеграл в правой части равенства распространенным на тот же контур (C), что и левый интеграл, но при условии, что p_i^0 и q_i^0 рассматриваются как функции p_i, q_i и t. С этой точки зрения оба выражения

$$\sum p_i\, \delta q_i - H\, \delta t \quad \text{и} \quad \sum p_i^0\, \delta q_i^0,$$

дающие тот же самый интеграл вдоль любого замкнутого контура, могут отличаться друг от друга только на полный диференциал; следовательно,

$$\sum p_i\, \delta q_i - H\, \delta t = \delta S + \sum p_i^0\, \delta q_i^0. \tag{4}$$

Функцию S обычно называют функцией Гамильтона; оиа имеет весьма простой физический смысл. Если мы обратнмся к формуле (10) главы I, дающей вариацию действия вдоль переменной траектории, то увидим, что *функция S может быть истолкована как выражение действия между моментами времени* 0 *и* t *вдоль траектории, оканчивающейся в точке* (p, q, t).

С точки зрения исторической эта функция S, введенная впервые Гамильтоном, представляет собой известную ценность, так как замечания Гамильтона относительно нее указали Якоби путь к открытиям, связанным с интегрированием уравнений динамики. Действительно, Гамильтон замечает, что если бы удалось выразить S не как функцию p_i, q_i, t, а через q_i, q_i^0 и t, то тем самым были бы проинтегрированы уравнения движения. Тождество (4), представленное в форме

$$\delta S = \sum p_i\,\delta q_i - H\,\delta t - \sum p_i^0\,\delta q_i^0,$$

дало бы, в самом деле:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad -p_i^0 = \frac{\partial S}{\partial q_i^0}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \tag{5}$$

Вторая группа уравнений дала бы q_i как функцни от t и от $2n$ начальных значений; первая группа дала бы количества движения p_i. Наконец, последнее уравнение показывает, что функция S является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\ q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{6}$$

При этом главную трудность представляло не столько само интегрирование этого уравнения в частных производных, сколько разыскание именно такого решения, для которого *произвольные постоянные* q_i^0 *были бы как раз начальными значениями величин* q_i. Якоби устранил трудность, показав, что и без этого условия можно использовать решение уравнения в частных производных (6) для интегрирования уравнений движения; мы уже изложили это, вкратце, в п. 14.

34. Весьма поучительно провести фактическое вычисление Гамильтоновой функции S в каком-нибудь простом случае, например, в случае свободной материальной точки массы 1, не находящейся под действием сил. Уравнения движения имеют в этом случае вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0't + x_0, & x' &= x_0'; \\ y &= y_0't + y_0, & y' &= y_0'; \\ z &= z_0't + z_0, & z' &= z_0'. \end{aligned}$$

Разность

$$\begin{aligned} \delta S = \omega_\delta - (\omega_\delta)_0 &= x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - \\ &- \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,\delta t - (x_0'\,\delta x_0 + y_0'\,\delta y_0 + z_0'\,\delta z_0) \end{aligned}$$

равна здесь

$$\begin{aligned} \delta S &= x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,\delta t - \\ &- x'\delta(x - tx') - y'\delta(y - ty') - z'\delta(z - tz') = \\ &= \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,\delta t + t\,(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z'); \end{aligned}$$

отсюда, учитывая, что S должно обращаться в нуль одновременно с t, получаем

$$S=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\,t.$$

Выражая S через x, y, z, x_0, y_0, z_0, t, получим

$$S=\frac{1}{2}\,\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{t}.$$

Используя гамильтоновы формулы (5), можем вывести отсюда уравнения движения:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial S}{\partial x}=\frac{x-x_0}{t}; & -x_0' &= \frac{\partial S}{\partial x_0}=-\frac{x-x_0}{t};\\
y' &= \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{y-y_0}{t}; & -y_0' &= \frac{\partial S}{\partial y_0}=-\frac{y-y_0}{t};\\
z' &= \frac{\partial S}{\partial z}=\frac{z-z_0}{t}; & -z_0' &= \frac{\partial S}{\partial z_0}=-\frac{z-z_0}{t}.
\end{aligned}$$

Примеры. Форма „элемент материи".

35. После этих замечаний вернемся снова к *абсолютным* интегральным инвариантам.

В простейших случаях весьма полезно непосредственно убедиться в инвариантном характере диференциальных форм Φ, получаемых, как было указано выше, из форм F путем замены δx_i выражениями $\delta x_i - X_i\,\delta t$.

Для простоты рассмотрим систему двух диференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y,$$

и будем исходить из линейного абсолютного интегрального инварианта

$$I=\int a(x,\ y,\ t)\,\delta x+b(x,\ y,\ t)\,\delta y;$$

связанный с ним полный интегральный инвариант имеет вид

$$J=\int a(x,\ y,\ t)\,(\delta x-X\delta t)+b(x,\ y,\ t)\,(\delta y-Y\delta t).$$

Возьмем в плоскости xy дугу кривой A_0B_0 и проведем через все точки этой дуги соответствующие траектории; получим своего рода цилиндрическую поверхность, образующими которой (не прямолинейными!) служат траектории. Проведем на этой поверхности дуги кривых MN и $M'N'$, соединяющие траекторию, выходящую из A_0, с траекторией, выходящей из B_0 (см. черт. 1). Мы хотим доказать, что

$$J_{MN}=J_{M'N'}.$$

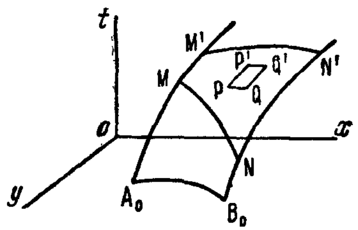
Дуги кривых MN и $M'N'$ вместе с дугами траекторий MM' и NN' ограничивают на поверхности некоторую площадь; с другой стороны, интеграл J, взятый вдоль каждой из двух последних дуг, очевидно, равен нулю, потому что вдоль этих дуг имеем

$$\delta x = X\delta t; \quad \delta y = Y\delta t.$$

Следовательно, интеграл J, взятый по замкнутому контуру $MNN'M'$, равен

$$J_{MNN'M'} = J_{MN} - J_{M'N'},$$

и все сводится к тому, чтобы доказать, что этот интеграл равняется нулю. По формуле Стокса этот интеграл приводится к двойному интегралу, распространенному по площади $MNN'M'$. *Докажем, что этот двойной интеграл имеет элементом интегрирования тождественный нуль.* Для этого разложим площадь $MNN'M'$ на элементы с помощью маленьких параллелограмов, образованных дугами траекторий и *сечениями нашей поверхности плоскостями* $t = \text{const}$. Пусть $PQQ'P'$ один из этих элементов поверхности. Элемент двойного интегрирования равен при этом



Черт. 1.

$$J_{PQ} - J_{P'Q'};$$

но в силу того, что точки PQ *соответствуют одному моменту времени,* так же как и точки $P'Q'$, — интеграл J_{PQ} сводится к I_{PQ}, а $J_{P'Q'}$ — к $I_{P'Q'}$. Но последние два интеграла, I_{PQ} и $I_{P'Q'}$, равны, в силу предположения, что I является интегральным инвариантом.

Значит, элементом двойного интегрирования служит тождественный нуль; теорема, таким образом, доказана.

36. Аналогичное рассуждение можно провести и в случае двойного интегрального инварианта

$$I = \int\int a(x, y, t)\, \delta x\, \delta y.$$

Здесь переход от формы F к форме Φ несколько сложнее, чем в предыдущем случае. Мы осуществим его, сопоставляя элемент поверхности $\delta x\, \delta y$ с билинейной формой $\delta x\, \delta' y - \delta y\, \delta' x$; для этого достаточно представить себе некоторую систему криволинейных координат (α, β) и рассматривать δx, δy как элементарное перемещение, соответствующее приращению $\delta\alpha$ первой координаты α, а $\delta' x$, $\delta' y$ — как элементарное перемещение, соответствующее приращению $\delta\beta$ второй координаты β. Имеем при этом

$$F = a \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta' x & \delta' y \end{vmatrix}.$$

Отсюда выводим:

$$\Phi = a \begin{vmatrix} \delta x - X\delta t & \delta y - Y\delta t \\ \delta' x - X\delta' t & \delta' y - Y\delta' t \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta' x & \delta' y \end{vmatrix} + aX \begin{vmatrix} \delta y & \delta t \\ \delta' y & \delta' t \end{vmatrix} + aY \begin{vmatrix} \delta t & \delta x \\ \delta' t & \delta' x \end{vmatrix},$$

или, возвращаясь к обозначениям, употребительным в теории интегралов, распространенных по поверхности,

$$\Phi = a\,\delta x\,\delta y + aX\,\delta y\,\delta t + aY\,\delta t\,\delta x.$$

Итак, рассмотрим поверхностный интеграл

$$J = \int\int a\,\delta x\,\delta y + aX\,\delta y\,\delta t + aY\,\delta t\,\delta x$$

и постараемся непосредственно отдать себе отчет в его инвариантности. Для этого представим себе некоторую площадь S_0 в плоскости xy и построим траектории, выходящие из всех точек этой площадки. Мы получим, таким образом, неограниченное трехмерное образование („трубку"), имеющее в качестве боковой поверхности своего рода цилиндрическую поверхность, образующими которой служат траектории, выходящие из контура, ограничивающего S_0. Пересечем трубку двумя произвольными поверхностями S и S'. Цилиндрическая поверхность и поверхности S и S' будут ограничивать некоторый объем (см. черт. 2). Докажем, что $J_S = J_{S'}$.

Черт. 2.

Поверхности S и S' вместе с цилиндрической поверхностью ограничивают объем V; с другой стороны, интеграл J, распространенный по цилиндрической поверхности, ограничивающей этот объем, равен, очевидно, нулю, потому что, обозначив $d\sigma$ элемент поверхности, α, β, γ — направляющие косинусы нормали, мы получим

$$J = \int\int a\,(\gamma + X\alpha + Y\beta)\,d\sigma,$$

а направление $(X, Y, 1)$, будучи направлением касательных к траекториям, образующим боковую поверхность, ортогонально направлению (α, β, γ). Отсюда следует, что разность $J_{S'} - J_S$ может рассматриваться как поверхностный интеграл J, распространенный по замкнутой поверхности, ограничивающей объем V. Все сводится к доказательству того, что соответствующий объемный интеграл тождественно равен нулю. Но элемент этого объемного интеграла, очевидно, равен нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве элемента интегрирования взять объем, ограниченный с боков маленькими дугами траекторий, а сверху и снизу плоскостями, *параллельными плоскости* xy; при этом интеграл J, распространенный на каждое из оснований, сводится к интегралу I, а значение интеграла I — одно и то же для обоих оснований.

37. Кинематика сплошной среды дает нам хорошую иллюстрацию к рассуждениям, изложенным в этой главе.

В движущейся непрерывной среде траектория каждой частицы может рассматриваться как решение системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w,$$

где предполагается, что u, v, w, компоненты скорости, выражены как функции переменных x, y, z, t. Далее, пусть $\varrho(x, y, z, t)$ будет плотность в момент времени t в точке (x, y, z). Масса, наполняющая в момент t некоторый объем V, дается тройным интегралом

$$\iiint_V \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z;$$

этот интеграл представляет собой, очевидно, абсолютный интегральный инвариант в смысле Пуанкаре: это как раз первый пример интегрального инварианта, данный Пуанкаре. Если частицы, заполняющие объем V в момент времени t, заполняют объем V' в некоторый иной момент времени t', то, очевидно, будет иметь место равенство:

$$\iiint_V \varrho(x, y, z, t)\, \delta x\, \delta y\, \delta z = \iiint_{V'} \varrho(x', y', z', t')\, \delta x' \delta y' \delta z'.$$

Чтобы вычислить форму Φ, связанную с формой $F=\varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z$, представим, как и в предыдущем примере, F в виде определителя:

$$F=\varrho \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta' x & \delta' y & \delta' z \\ \delta'' x & \delta'' y & \delta'' z \end{vmatrix};$$

отсюда следует

$$\Phi=\varrho \begin{vmatrix} \delta x - u\,\delta t & \delta y - v\,\delta t & \delta z - w\,\delta t \\ \delta' x - u\,\delta' t & \delta' y - v\,\delta' t & \delta' z - w\,\delta' t \\ \delta'' x - u\,\delta'' t & \delta'' y - v\,\delta'' t & \delta'' z - w\,\delta'' t \end{vmatrix},$$

а отсюда, в свою очередь, легко получается

$$\Phi=\varrho\,(\delta x\, \delta y\, \delta z - u\, \delta y\, \delta z\, \delta t - v\, \delta z\, \delta x\, \delta t - w\, \delta x\, \delta y\, \delta t).$$

Эта форма Φ представляет собою *элемент материи*, охарактеризованный наиболее полно с кинематической точки зрения. Если рассматривать некоторую трехмерную совокупность частиц, и если каждую частицу рассматривать в определенный момент ее движения, то в четырехмерном мире (x, y, z, t) получится трехмерная область. Тройной интеграл от Φ, распространенный на эту область, будет равен общей массе совокупности рассматриваемых частиц. Если все частицы рассматриваются в один и тот же момент времени t, они заполнят определенный (трехмерный) объем V и интеграл от Φ обратится в интеграл

$$\iiint_V \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Рассмотрим, например, для определенности площадку S в пространстве и совокупность всех частиц, пересекающих S в течение промежутка времени между моментами t_0 и t_1. Каждую из этих частиц рассматриваем в *момент, когда она пересекает* S. Мы получим, таким образом, трехмерную область четырехмерного мира. Состояния, соответствующие этой области, легко выражаются посредством трех параметров α, β, γ: для этого достаточно выразить координаты точки на поверхности в функции двух параметров α, β и положить $t=\gamma$. Таким путем получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta), \\ y &= g(\alpha, \beta), \\ z &= h(\alpha, \beta), \\ t &= \gamma; \end{aligned}$$

параметры α и β принимают все значения, соответствующие различным точкам площадки S, а γ принимает все значения в интервале $|t_0, t_1|$. Интеграл от Φ, распространенный по этой области, будет, очевидно, равен (с точностью до знака)

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta t \left[\iint_{(S)} \varrho u\, \delta y\, \delta z + \varrho v\, \delta z\, \delta x + \varrho w\, \delta x\, \delta y\right].$$

Поверхностный интеграл в прямых скобках представляет собою *поток материи* в момент t через поверхность S; помноженный на δt, он дает количество материи, проходящей через S в промежуток времени $(t, t+\delta t)$. Весь интеграл дает, таким образом, как и следовало ожидать, полную массу, прошедшую через S за время от t_0 до t_1.

38. Аналогичные замечания можно сделать и по поводу двойного интегрального инварианта, с которым мы встречались в гидродинамике [гл. II, формула (8)]:

$$\begin{aligned} J = \iint \xi\, \delta y\, \delta z + \eta\, \delta z\, \delta x + \zeta\, \delta x\, \delta y + (\eta w - \zeta v)\, \delta x\, \delta t + \\ + (\zeta u - \xi w)\, \delta y\, \delta t + (\xi v - \eta u)\, \delta z\, \delta t. \end{aligned}$$

Мы видели (п. 25), что этот интеграл, распространенный на двумерную совокупность частиц, взятых в один и тот же момент времени t, представляет собою момент, или напряжение, вихревой трубки, составленной из вихревых линий, выходящих из этих частиц. Рассмотрим теперь совокупность частиц, пересекающих дугу кривой C в промежуток времени (t_0, t_1). Вместо того, чтобы рассматривать эти частицы в один и тот же момент t, возьмем каждую из них в момент, когда она пересекает дугу C. Момент вихревой трубки, в состав которой они входят, в любой момент времени t равен интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_{(C)} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Глава IV.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ.

Класс диференциальной формы.

39. Во всей этой главе мы будем рассматривать системы диференциальных уравнений с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не выделяя независимой переменной специальным обозначением: это будет одна какая-нибудь из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Иными словами, мы будем рассматривать системы диференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{1}$$

Одной из первых проблем, представляющихся в теории интегральных инвариантов, является следующая: *узнать, будет ли данная диференциальная форма инвариантной по отношению к данной системе диференциальных уравнений, и — более общая проблема — определить все системы диференциальных уравнений, по отношению к которым данная диференциальная форма является инвариантной формой.*

Прежде чем приступить к решению этой проблемы для тех диференциальных форм, которые особенно часто встречаются в приложениях, сделаем несколько общих замечаний; эти замечания приведут нас к теореме исключительной важности.

Для того чтобы форма Φ была инвариантной по отношению к системе (1), необходимо и достаточно, чтобы она могла быть выражена посредством первых интегралов системы (1) и их диференциалов. Следовательно, *необходимым* условием для того, чтобы данная форма Φ могла быть инвариантной по отношению к некоторой, соответственно подобранной, системе диференциальных уравнений, является возможность выражения этой формы с помощью *не более чем* $(n-1)$ *функций* и их диференциалов.

40. Предположим теперь, что данная форма Φ может быть выражена с помощью $r < n$ величин $y_1, \ldots, y_r$ (функций от x_i) и их диференциалов; предположим, кроме того, что она *не может* быть выражена аналогичным образом с помощью величин в числе меньшем r. При этих условиях мы докажем следующую теорему:

Для того чтобы система диференциальных уравнений допускала форму Φ в качестве инвариантной формы, необходимо и достаточно, чтобы функции $y_1, \ldots, y_r$ были первыми интегралами этой системы.

Достаточность условия очевидна. Чтобы доказать его необходимость, рассмотрим систему диференциальных уравнений, для которых Φ служит инвариантной формой, и напишем уравнения этой системы, взяв в качестве новых переменных $y_1, \ldots, y_r$ и $n-r$ иных независимых величин $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Пусть будут

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_r}{Y_r} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} \tag{2}$$

уравнения преобразованной системы. Если бы $y_1, \ldots, y_r$ не были все первыми интегралами, то первые r знаменателей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ не были бы одновременно нулями; пусть, например $Y_r \neq 0$. Тогда y_r можно взять в качестве независимой переменной, и форма Φ не будет менять значения, если заменить y_r и δy_r нулями, далее, функции

$$y_1, \ \ldots, \ y_{r-1}, \ y_{r+1}, \ \ldots, \ y_n$$

— их начальными значениями

$$y_1^0, \ \ldots, \ y_{r-1}^0, \ y_{r+1}^0, \ \ldots, \ y_n^0,$$

рассматриваемыми как первые интегралы системы (2); и, наконец, диференциалы

$$\delta y_1, \ \ldots, \ \delta y_n$$

— диференциалами

$$\delta y_1^0, \ \ldots, \ \delta y_n^0.$$

Но тогда, поскольку Φ не содержит ни $y_{r+1}, \ldots, y_n$, ни их диференциалов, и вновь полученная форма Ψ будет зависеть только от $y_1^0, \ldots, y_{r-1}^0$ и их диференциалов. Иными словами, при этих условиях можно будет найти $r-1$ таких функций $z_1, \ldots, z_{r-1}$ от x_i, что форма Φ выразится с помощью этих $r-1$ функций и их диференциалов. Но этот результат противоречит сделанному предположению. Число r назовем *классом* формы Φ.

Характеристическая система диференциальной формы.

41. Доказанная исключительно общая теорема имеет важные следствия, которые помогут лучше понять ее значение.

Наиболее общей системой диференциальных уравнений, для которой форма Φ является инвариантной формой, будет (в переменных $y_1, \ldots, y_n$), на основании предыдущего, следующая:

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_r}{0} = \frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}, \tag{3}$$

где $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ — *произвольные* функции.

Отсюда немедленно следует, что всякий первый интеграл, общий всем этим системам, является функцией от $y_1, \ldots, y_r$. *Если, следовательно, форма Φ может быть выражена иным способом через r величин $z_1, \ldots, z_r$ и их диференциалы, то z_i будут функциями y_i, и обратно*, потому что z_i будут первыми интегралами, общими всем системам, имеющим Φ своей инвариантной формой. Иначе говоря, *возможно лишь существенно одним способом выразить форму Φ с помощью наименьшего числа переменных и их диференциалов*, в том смысле, что если имеется одно выражение, содержащее минимальное число переменных $y_1, \ldots, y_r$, то все остальные получатся из него путем произвольной замены переменных. Это заключение не будет, естественно, справедливым, если r не будет наименьшим числом переменных.

42. Отметим еще одно следствие. Условимся говорить, что некоторое число систем диференциальных уравнений с n переменными, например, три:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n};$$

$$\frac{dx_1}{X'_1} = \frac{dx_2}{X'_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n};$$

$$\frac{dx_1}{X''_1} = \frac{dx_2}{X''_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X''_n};$$

линейно независимы, если невозможно найти такие коэфициенты $\lambda, \lambda', \lambda''$, *не все равные нулю*, чтобы имели место тождества:

$$\lambda X_1 + \lambda' X'_1 + \lambda'' X''_1 = 0;$$

$$\lambda X_2 + \lambda' X'_2 + \lambda'' X''_2 = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda X_n + \lambda' X'_n + \lambda'' X''_n = 0.$$

В противном случае мы скажем, что системы *линейно зависимы*.

Свойство линейной зависимости или независимости нескольких систем диференциальных уравнений, очевидно, сохраняется при любой замене переменных.

Среди систем (3), для которых Φ служит инвариантной формой, можно, очевидно, найти $n-r$ линейно независимых систем, именно те, которые получаются, если все знаменатели $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$, *кроме одного*, полагать равными нулю. При этом все системы (3) линейно зависят от этих $n-r$ частных систем.

Мы видим, таким образом, что *если Φ является инвариантной формой для $n-r$ и только для $n-r$ линейно независимых систем диференциальных уравнений, то она инвариантна и для любой системы, линейно от них зависящей; кроме того, все эти системы имеют r общих независимых первых интегралов.*

43. Положим, например, $n-r=2$. Существуют две системы диференциальных уравнений, пусть это будут

$$\frac{dx_1}{X_1}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n},$$

$$\frac{dx_1}{X_1'}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n'},$$

имеющих в качестве инвариантной формы форму Φ, и всякая иная система, допускающая эту же форму, линейно зависит от этих двух систем. Обозначим через (C) траектории первой системы, через (Γ) — траектории второй. Проведем через некоторую точку M n-мерного пространства траектории (C) и (Γ); возьмем на (C) какую-нибудь точку P, на (Γ) — точку Q; наконец, построим траектории: (Γ') — проходящую через P и (C') — проходящую через Q. *Эти новые траектории пересекаются.* Действительно, если $y_1, \ldots, y_{n-2}$ суть общие первые интегралы обеих рассмотренных систем, а $a_1, \ldots, a_{n-2}$ — числовые значения этих интегралов в точке M, то их числовые значения в точках P и Q будут те же самые, следовательно, кривые (C), (Γ), (Γ'), (C') все будут расположены на одном двумерном многообразии

$$y_1=a_1, \quad y_2=a_2, \quad \ldots, \quad y_{n-2}=a_{n-2},$$

а это и показывает, что (C') и (Γ') пересекаются.

44. С предыдущим случаем мы как раз встречаемся при изучении двойного интегрального инварианта теории вихрей, соответствующего диференциальной форме

$$\begin{aligned}\Phi=\xi\,\delta y\,\delta z+\eta\,\delta z\,\delta x+\zeta\,\delta x\,\delta y+(\eta w-\zeta v)\,\delta x\,\delta t+\\+(\zeta u-\xi w)\,\delta y\,\delta t+(\xi v-\eta u)\,\delta\ \ \delta t.\end{aligned} \tag{4}$$

Мы видели (п. 24), что системами диференциальных уравнений, имеющими форму Φ инвариантной формой, будут такие, следствием которых является система

$$\left.\begin{aligned}\eta(dz-w\,dt)-\zeta(dy-v\,dt)=0,\\ \zeta(dx-u\,dt)-\xi(dz-w\,dt)=0,\\ \xi(dy-v\,dt)-\eta(dx-u\,dt)=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Наиболее общей системой такого рода будет следующая:

$$\frac{dx}{\lambda u+\mu\xi}=\frac{dy}{\lambda v+\mu\eta}=\frac{dz}{\lambda w+\mu\zeta}=\frac{dt}{\lambda},$$

являющаяся линейным следствием систем

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{dt}{1},$$

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}=\frac{dt}{0},$$

определяющих траектории частиц жидкости и линии вихрей. Первые представляют собою кривые (C), вторые — кривые (Γ) предыдущего случая; общие свойства, сформулированные выше, выразятся теперь так: *частицы, образующие в момент t вихревую линию (Γ), образуют в момент t' вихревую линию (Γ')*. Теорема Гельмгольца является, таким образом, весьма частным случаем общей теоремы, доказанной в начале этой главы.

45. В двух предыдущих параграфах мы предполагали, что $n-r=2$. Аналогичные геометрические рассуждения можно провести для любых чисел n и r; они основываются на существовании таких многообразий, определенных r уравнениями вида

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \quad \ldots, \quad y_r = a_r,$$

что всякая траектория системы (3), имеющая с одним из этих многообразий общую точку, лежит на нем целиком. Любое из этих $(n-r)$-мерных многообразий может быть получено следующим путем. Отправляемся от произвольной точки M, проводим через эту точку траекторию одной из систем, имеющей Φ инвариантной формой, затем через любую точку P этой траектории проводим траекторию какой-либо другой из этих систем и т. д. Эти операции позволяют построить все $(n-r)$-мерное многообразие и никогда не выведут из него.

Эти многообразия мы будем называть *характеристическими многообразиями* формы Φ.

Характеристические многообразия могут рассматриваться как результат интегрирования уравнений

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \quad dy_r = 0;$$

эти уравнения, если вернуться к первоначальным переменным $x_1, \ldots, x_n$, *представляют собой совокупность соотношений, линейных относительно $dx_1, \ldots, dx_n$ и являющихся следствием уравнений любой системы, допускающей Φ в качестве инвариантной формы.*

Можно сказать проще. *Необходимое и достаточное условие того, что элементарное смещение $(dx_1, \ldots, dx_n)$ осуществляется в направлении траектории некоторой системы диференциальных уравнений, допускающих Φ в качестве инвариантной формы, выражается аналитически посредством некоторого числа уравнений, линейных относительно $dx_1, \ldots, dx_n$. Эти уравнения, если предположить, что среди них имеется ровно r независимых, определяют многообразия $n-r$ измерений, зависящие от r произвольных постоянных, такие, что через каждую точку пространства проходит одно и только одно из этих многообразий: это и будут характеристические многообразия. Систему линейных уравнений в полных диференциалах, о которой идет речь, называют характеристической системой формы Φ.*

46. Назовем, для краткости, *уравнением Пфаффа* уравнение, линейное относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, а *пфаффовой системой* — систему уравнений Пфаффа. Систему r пфаффовых уравнений с n переменными можно всегда рассматривать как такую систему, которая определяет r

переменных, рассматриваемых как зависимые переменные, в функциях от $n-r$ остальных, рассматриваемых как переменные независимые. *Вообще говоря, такая система несовместна.* Классическим примером является пфаффово уравнение с тремя переменными

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

в котором z рассматривается как функция x и y, и которое допускает решение, соответствующее произвольно выбранным начальным данным, только тогда, когда выполняется известное условие интегрируемости, именно

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

В этом случае говорят, что уравнение *вполне интегрируемо.*

Точно также говорят, что пфаффова система из r уравнений с r неизвестными функциями, зависящими от $n-r$ независимых переменных, *вполне интегрируема*, если она всегда допускает решение, соответствующее произвольно выбранным начальным значениям переменных. *Это свойство имеет место для характеристической пфаффовой системы диференциальной формы Ф.*

Основную теорему этой главы можно, значит, сформулировать так:

Пфаффова характеристическая система некоторой диференциальной формы Ф всегда вполне интегрируема.

47. Возвратимся в последний раз к форме Φ теории вихрей. Характеристическая пфаффова система этой формы определяется уравнениями (5) или, что́ то же, уравнениями

$$\frac{dx - u\,dt}{\xi} = \frac{dy - v\,dt}{\eta} = \frac{dz - w\,dt}{\zeta};$$

если мы сумеем выразить, что эта система вполне интегрируема, то необходимо получим аналитическую интерпретацию теоремы Гельмгольца. Что касается характеристических многообразий, то каждое из них представляет собою совокупность *состояний* частиц, образующих одну и ту же вихревую линию.

Для двойного интегрального инварианта динамики характеристическая пфаффова система сводится к уравнениям движения, а характеристические многообразия — к траекториям.

Могло бы быть и иначе, если бы, как это было в теории вихрей, мы ограничились рассмотрением лишь части траекторий, например, лишь тех траекторий, которые удовлетворяют некоторой системе соотношений между переменными.

Глава V.

ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА И ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.

Понятие инвариантной системы Пфаффа.

48. Вместо *форм*, инвариантных по отношению к системам диференциальных уравнений, можно рассматривать инвариантные *уравнения*. Пуанкаре использовал, в частности, инвариантные системы *конечных* уравнений: они обладают тем свойством, что если некоторая точка удовлетворяет такой системе, то и все точки, полученные при ее движении вдоль соответствующей траектории, будут удовлетворять этой системе. Пользуясь геометрическим языком, скажем, что *многообразие, определенное системой инвариантных уравнений, представляет собою геометрическое место траекторий.*

Точно так же можно рассматривать и инвариантные диференциальные уравнения. Рассмотрим сначала простой случай системы двух диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y. \tag{1}$$

Уравнение

$$\delta y-m(x,\ y,\ t)\,\delta x=0 \tag{2}$$

мы назовем *инвариантным в смысле Пуанкаре*, если при переходе от любых двух *одновременных* бесконечно близких точек $(x,\ y,\ t)$, $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ t)$, удовлетворяющих соотношению (2), к точкам $(x',\ y',\ t')$ и $(x'+\delta x',\ y'+\delta y',\ t')$, лежащим на соответствующих траекториях, уравнение (2) сохраняет силу, т. е. если будет справедливым соотношение

$$\delta y'-m(x',\ y',\ t')\,\delta x'=0.$$

Если уравнение (2) инвариантно в установленном только что смысле, то оно должно быть эквивалентно уравнению

$$\delta y_0-m(x_0,\ y_0,\ 0)\,\delta x_0=0, \tag{3}$$

в котором x_0, y_0 обозначают начальные значения x, y на траектории, проходящей через точку $(x,\ y,\ t)$. Если теперь в этом уравнении (3) рассматривать x_0, y_0 как функции $(x,\ y,\ t)$ и заменить x_0, y_0 их выражениями через эти переменные, то уравнение примет, очевидно, вид

$$\delta y-Y\delta t-m(\delta x-X\delta t)=0. \tag{4}$$

Новое уравнение (4), в силу самого своего происхождения, имеет *инвариантный* характер в полном смысле этого слова, так как оно выражает *внутреннее* свойство двух траекторий, соответствующих точкам $(x,\ y,\ t)$ и $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ t+\delta t)$.

Геометрически уравнение (4) каждой точке $M(x,\ y,\ t)$ пространства ставит в соответствие плоскость, проходящую через эту точку.

Свойство инвариантности выражает тот факт, что прямая MM_1, соединяющая точку M с бесконечно близкой точкой M_1, расположена в плоскости (P), соответствующей точке M, и что если переместить M и M_1 вдоль их траекторий (оставляя их все время бесконечно близкими) до положений M' и M'_1, получится прямая $M'M'_1$, расположенная в плоскости (P'), соответствующей точке M'. Следует заметить, что плоскость (P) *является касательной к траектории, проходящей через точку* M.

В силу того, что сказано выше, ясно, что если кривая (C) удовлетворяет в каждой из своих точек уравнению (4), т. е. является его *интегральной кривой*, то поверхность, образованная траекториями, проходящими через различные точки кривой (C), будет интегральной поверхностью уравнения (4). Это вытекает также чисто аналитически из формы (3) уравнения (4).

49. Предыдущие соображения легко обобщаются. Пусть дана система диференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n); \tag{5}$$

пфаффова система

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,\delta x_1 + \ldots + a_{1n}\,\delta x_n + a_1\,\delta t = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{h1}\,\delta x_1 + \ldots + a_{hn}\,\delta x_n + a_h\,\delta t = 0, \end{array}\right\} \tag{6}$$

является инвариантной для системы (5), если уравнения (6) могут быть выражены исключительно с помощью первых интегралов системы (5) и их диференциалов, например, в виде

$$\left.\begin{array}{l} a^0_{11}\,\delta x^0_1 + \ldots + a^0_{1n}\,\delta x^0_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^0_{h1}\delta x^0_1 + \ldots + a^0_{hn}\delta x^0_n = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Это требует, прежде всего, чтобы уравнения (6) удовлетворялись тождественно при замене δx_i на $X_i\,\delta t$; но это условие, очевидно, недостаточно. Как бы то ни было, если пфаффова система (6) инвариантна, то она обладает важным геометрическим свойством, именно: *если дано некоторое интегральное многообразие системы* (6), *то многообразие, которое получится, если через каждую его точку провести траекторию системы* (5), *будет опять интегральным многообразием*. В самом деле, при перемещении по этому многообразию в любую его точку координаты этой точки продолжают удовлетворять уравнениям (7).

[При этом под интегральным многообразием понимается такое многообразие, что при перемещении по этому многообразию в любом направлении $(\delta x_1, \ldots, \delta t)$ удовлетворяются уравнения (6)].

Отсюда следует, что *любое интегральное многообразие инвариантной пфаффовой системы* (6) *либо образовано траекториями данной системы диференциальных уравнений* (5), *либо составляет часть интегрального многообразия более высокого числа измерений, образованного, в свою очередь, траекториями этой системы.*

Характеристическая система системы Пфаффа.

50. Если дана пфаффова система с n переменными $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\delta x_1 + \ldots + a_{1n}\delta x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{h1}\delta x_1 + \ldots + a_{hn}\delta x_n = 0, \end{array}\right\} \tag{8}$$

то можно поставить следующую задачу: найти все системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{9}$$

для которых система (8) инвариантна. Эту задачу мы в дальнейшем решим; но и независимо от ее решения можно доказать важную теорему, касающуюся таких систем (тождественную, впрочем, с той, которая была доказана в предыдущей главе в связи с изучением одной данной диференциальной формы).

Предположим, что данные уравнения (8) могут быть записаны с помощью r величин $y_1, \ldots, y_r$, являющихся функциями от $x_1, \ldots, x_n$, и их диференциалов в виде

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}(y)\,\delta y_1 + \ldots + b_{1r}(y)\,\delta y_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{h1}(y)\,\delta y_1 + \ldots + b_{hr}(y)\,\delta y_r = 0; \end{array}\right\} \tag{10}$$

предположим, кроме того, что они не могут быть записаны с помощью меньшего чем r числа переменных и их диференциалов. Число r будем называть *классом* системы. *Для того чтобы система Пфаффа* (8) *была инвариантна по отношению к уравнениям* (9), *необходимо и достаточно, чтобы* $y_1, \ldots, y_r$ *были первыми интегралами системы* (9).

Доказательство точно то же, что и в предыдущей главе, и следствия, из него вытекающие, подобны следствиям, изложенным выше. В частности, условия, выражающие, что данная система Пфаффа (8) инвариантна по отношению к системе диференциальных уравнений (9), представляются в виде r уравнений, линейных относительно $X_1, \ldots, X_n$ или, что в сущности сводится к тому же, в виде r уравнений, линейных относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, и образующих пфаффову систему, эквивалентную системе

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_r = 0,$$

т. е. *вполне интегрируемую*.

Эта пфаффова система называется *характеристической системой* данной пфаффовой системы (8); впрочем, уравнения характеристической системы могут быть получены путем прибавления к h уравнениям (8) данной системы $r - h$ других уравнений.

Необходимым и достаточным условием полной интегрируемости пфаффовой системы (8) *является, очевидно, ее эквивалентность с* *собственной характеристической системой*; таким образом, уменье составить характеристическую систему любой пфаффовой системы дает возможность записать условия ее полной интегрируемости.

51. Ясно, что пфаффова система (8) может рассматриваться как инвариантная по отношению к собственной характеристической системе. *Любое интегральное многообразие системы* (8) *либо состоит из характеристических многообразий, либо составляет часть интегрального многообразия более высокого числа измерений, в свою очередь состоящего из характеристических многообразий.*

Если рассматривается какая-нибудь диференциальная форма и если эта форма инвариантна по отношению к некоторой системе диференциальных уравнений, то и характеристическая пфаффова система формы будет инвариантна для этой же системы диференциальных уравнений.

Так, например, в гидродинамике пфаффова система

$$\frac{\delta x - u\,\delta t}{\xi} = \frac{\delta y - v\,\delta t}{\eta} = \frac{\delta z - w\,\delta t}{\zeta}$$

инвариантна по отношению к диференциальным уравнениям траекторий жидких частиц (так же, как и по отношению к диференциальным уравнениям вихревых линий).

Все эти теоремы, а также ряд других, которые нетрудно себе представить, являются непосредственными следствиями характерного свойства инвариантной системы: в нее входят первые интегралы тех диференциальных уравнений, для которых она инвариантна.

52. Рассмотрим либо диференциальную форму, либо систему Пфаффа, либо, наконец, совокупность нескольких диференциальных форм и пфаффовой системы; обозначим через $y_1, \ldots, y_r$ первые интегралы пфаффовой системы, характеристической либо по отношению к данной диференциальной форме, либо по отношению к данной пфаффовой системе и т. д. Ясно, что *если обратить внимание исключительно на то, как диференциалы* $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ *входят* в диференциальную форму, пфаффову систему и т. д., не обращая внимания на коэфициенты, то окажется, что *эти диференциалы входят только в виде комбинаций* $\delta y_1, \ldots, \delta y_r$. Может, однако, случиться, что они входят в виде линейных комбинаций, число которых меньше r. Во всех случаях, если известно наименьшее число линейных комбинаций δx_i, с помощью которых может быть выражена форма (или система Пфаффа и т. д.), *то уравнения, которые получатся путем приравнивания нулю этих линейных комбинаций, войдут в состав характеристической системы.*

Ранг алгебраической формы и ассоциированная с ней система.

53. Предыдущие рассуждения выиграют в ясности, если теорему, аналогичную той, которая привела нас к понятию характеристической системы, мы докажем применительно к алгебраическим формам.

Если алгебраическая форма с n переменными $u_1, \ldots, u_n$ *может быть выражена с помощью r независимых линейных комбинаций* $v_1, \ldots, v_r$ *переменных* u_i, *но не может быть выражена с помощью меньшего их числа; и если, кроме того, найдено иное выражение для формы с помощью r иных линейных комбинаций* $w_1, \ldots, w_r$ *переменных* u_i, *то* w_i *являются независимыми линейными комбинациями* v_i.

В самом деле, рассмотрим $2r$ линейных форм

$$v_1, \ \ldots, \ v_r; \ w_1, \ \ldots, \ w_r$$

от данных переменных. Предположим, что среди этих форм имеется $2r-\varrho$ независимых $(0 \leqslant \varrho \leqslant r)$; это значит, что существует ϱ независимых линейных комбинаций величин v, которые одновременно являются линейными комбинациями w; обозначим их $t_1, \ldots, t_\varrho$. Предположим еще — это всегда возможно, — что $t_1, \ldots, t_\varrho$ являются независимыми линейными комбинациями как переменных $v_1, \ldots, v_\varrho$, так и переменных $w_1, \ldots, w_\varrho$. Тогда получим двойное равенство вида:

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \Phi(t_1, \ldots, t_\varrho; v_{\varrho+1}, \ldots, v_r) = \Psi(t_1, \ldots, t_\varrho, w_{\varrho+1}, \ldots, w_r).$$

Величины $t_1, \ldots, t_\varrho, v_{\varrho+1}, \ldots, v_r, w_{\varrho+1}, \ldots, w_r$ — независимы, а это возможно лишь в этом случае, если, например, Φ не зависит от $v_{\varrho+1}, \ldots, v_r$. Но это совместно с нашими предпосылками лишь в том случае, если $\varrho = r$. Теорема, таким образом, доказана.

Система линейных уравнений

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_r = 0$$

называется *ассоциированной* системой по отношению к данной форме. Понятие ассоциированной системы распространяется, очевидно, и на совокупность форм, и на систему алгебраических уравнений. Назовем целое число *r рангом* формы.

В силу изложенного, *характеристическая* система диференциальной формы с необходимостью включает в себя *ассоциированную* систему этой формы, рассматриваемой как алгебраическая форма относительно $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$. *Но, помимо уравнений ассоциированной системы, она может содержать и иные уравнения.*

ГЛАВА VI.

ФОРМЫ С ВНЕШНИМ УМНОЖЕНИЕМ.

Ассоциированная система квадратичной формы.

54. Мы скажем всего несколько слов об обычных алгебраических формах квадратичных, кубичных и т. д.

Любая квадратичная форма

$$F(u) = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} a_{ij} u_i u_j = a_{11} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + \ldots + 2a_{12} u_1 u_2 + \ldots \quad (1)$$

может быть, как известно, представлена в виде суммы квадратов; таких квадратов (независимых) имеется n, если дискриминант формы отличен от нуля. Определим наименьшее число переменных, с помощью которых (путем подходящей линейной подстановки) может быть выражена форма. Для того чтобы найти эти переменные, достаточно рассмотреть систему линейных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial u_n}=0. \tag{2}$$

Прежде всего ясно, что эта система не зависит от выбора переменных. Предположим, что она сводится к r независимым уравнениям, которые всегда можно привести к виду

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad \ldots, \quad x_r=0.$$

После этого можно утверждать, что *форма F может быть выражена с помощью r переменных $x_1, \ldots, x_r$ и не может быть выражена с помощью меньшего числа переменных.*

Действительно, выразим F с помощью $x_1, \ldots, x_r$ и $n-r$ других независимых форм $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Переменная x_{r+1}, например, не войдет в F, потому что, если бы она там была, то был бы член вида $Ax_{r+1}x_a$, и уравнение $\frac{\partial F}{\partial x_a}=0$ содержало бы x_{r+1}, что противоречит предположению.

С другой стороны, предположим, что форма F может быть выражена с помощью $\varrho\leqslant r$ переменных $y_1, \ldots, y_\varrho$; система (2), которую мы получим, исходя из переменных $y_1, \ldots, y_\varrho, \ldots, y_n$, будет, очевидно, содержать только переменные $y_1, \ldots, y_\varrho$; необходимо, стало быть, чтобы ϱ равнялось r, и система (2) сводится к системе

$$y_1=y_2=\ldots=y_r=0;$$

$y_1, y_2, \ldots, y_r$ являются, следовательно, независимыми линейными комбинациями форм $x_1, \ldots, x_r$.

Заключительная часть доказательства показывает — и это нам уже было известно, — что выражение F с помощью наименьшего числа переменных возможно *по существу* лишь одним способом (с точностью до линейной подстановки относительно этой минимальной системы переменных).

Система (2) является *ассоциированной* системой по отношению к форме F.

Все сказанное распространяется на форму какой угодно степени. Если, например, F — кубичная форма, то ассоциированная система линейных уравнений получится путем приравнивания нулю *вторых* производных от F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i\,\partial u_j}=0;$$

эта система даст ту минимальную систему переменных, с помощью которых может быть выражена F.

Билинейные кососимметрические и внешние квадратичные формы.

55. Формы, которыми мы будем теперь заниматься, это — выражения, стоящие под знаком кратного интегрирования, причем в этих выражениях диференциалы рассматриваются как переменные. К этим формам применимы правила специального исчисления, заслуживающие того, чтобы на них остановиться.

Будем исходить из билинейной формы

$$f(u, v) = \sum a_{ij} u_i v_j$$

от двух рядов переменных:

$$u_1, \ldots, u_n; \quad v_1, \ldots, v_n.$$

Такая форма называется *симметрической*, если она не меняется при перестановке двух рядов переменных:

$$f(v, u) = f(u, v)$$

и *кососимметрической*, если при этих условиях она меняет только знак:

$$f(v, u) = -f(u, v).$$

Условия, которым должны удовлетворять коэфициенты формы, для того, чтобы она была симметрической, имеют вид

$$a_{ij} = a_{ji};$$

условия косой симметрии формы суть

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \quad a_{ii} = 0.$$

Если подвергнуть оба ряда переменных u_i, v_i *одной и той же* линейной подстановке, то форма $f(u, v)$ перейдет в новую билинейную форму $F(U, V)$ от новых переменных U_i, V_i, причем очевидно, что $F(U, V)$ будет симметрической или кососимметрической вместе с формой f: это обусловлено тем, что перестановка двух рядов переменных U и V сводится к перестановке двух рядов первоначальных переменных u и v.

Каждой билинейной симметрической форме $f(u, v)$ можно поставить в соответствие квадратичную форму, именно $f(u, u)$, причем это соответствие взаимно. Если положить

$$f(u, u) = F(u),$$

то будем иметь:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right).$$

Аналогичное соответствие не может быть установлено для кососимметрических форм, так как в этом случае $f(u, u)$ тождественно равно нулю. Но мы сейчас устраним это неудобство.

56. Заметим, прежде всего, что в билинейной кососимметрической форме коэфициенты при $u_i v_i$ равны все нулю, а коэфициенты при $u_i v_j$ и $u_j v_i$ отличаются только знаком. Поэтому можно писать

$$f(u, v) = \sum_{(ij)} a_{ij}(u_i v_j - u_j v_i),$$

причем сумма в правой части равенства распространена на все *сочетания* из n индексов по два, так что в правой части получается всего $\frac{n(n-1)}{2}$ членов. Выражение $u_i v_j - u_j v_i$ является определителем

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix};$$

условимся обозначать его сокращенно так:

$$u_i v_j - u_j v_i = [u_i\, u_j],$$

выписывая один за другим элементы первой строки и заключая их в прямые скобки. В этой системе записи получим:

$$f(u, v) = \sum a_{ij}[u_i\, u_j].$$

Условимся также понимать под символом $[f(u)\, f'(u)]$ билинейную кососимметрическую форму, определенную детерминантом

$$\begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix},$$

где f и f' обозначают две произвольные линейные формы

$$f(u) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n,$$
$$f'(u) = a'_1 u_1 + a'_2 u_2 + \ldots + a'_n u_n.$$

Вычислив предыдущий определитель, получим немедленно:

$$[f(u)\, f'(u)] = \begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j a_i a'_j \begin{vmatrix} u_i u_j \\ v_i v_j \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j a_i a'_j [u_i\, u_j].$$

Сравнение первого и последнего выражений показывает, что *разложение определителя* $[f(u)\, f'(u)]$ *можно получить, рассматривая его как произведение и преобразуя это произведение по обычным правилам алгебры, остерегаясь, однако, менять порядок множителей в каждом из членов; при этом каждый член, содержащий два переменных с одинаковыми индексами, следует считать равным нулю, а каждый член, содержащий различные переменные, меняет знак при перестановке индексов.*

Умножением, правила которого были только что изложены, мы обязаны Грассману, который назвал его *внешним умножением*.

Используя эту операцию, мы видим, что *любой кососимметрической билинейной форме можно поставить в соответствие форму второй степени от одного единственного ряда переменных, но такую, которая является результатом внешнего произведения линейных форм; и обратно, любому внешнему произведению двух линейных форм соответствует билинейная кососимметрическая форма.*

Вместо того чтобы говорить „форма, полученная в результате внешнего произведения двух линейных форм", мы будем для краткости говорить „внешняя форма".

57. Если во внешней форме $F(u)$ осуществить линейную подстановку, то новая форма получится просто путем раскрытия каждого члена $[u_i u_j]$ как функции новых переменных.

Частная производная $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ внешней квадратичной формы определится просто как сумма частных производных ее членов; члены, не содержащие u_1, будут, естественно, иметь частную производную, равную нулю; что касается членов, содержащих u_1, то всегда можно предполагать, что u_1 стоит в них на первом месте; частная производная от $A[u_1 u_i]$ будет тогда равна Au_i. Так, например, будем иметь:

$$\frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_1} = u_2, \quad \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_2} = -u_1, \quad \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_3} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial [u_1 u_2]}{\partial u_n} = 0.$$

Если принять эти правила, то будем иметь:

$$2F(u) = \left[u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1}\right] + \left[u_2 \frac{\partial F}{\partial u_2}\right] + \ldots + \left[u_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right],$$

где выражения в прямых скобках представляют собой внешние произведения.

Если $F(u)$ соответствует кососимметрической форме $f(u, v)$, то имеем, очевидно,

$$f(u, v) = -\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial F}{\partial u_n}\right),$$

где каждое произведение внутри круглой скобки представляет собою обыкновенное произведение.

Заметим, наконец, что если подвергнуть переменные u_i линейной подстановке

$$u_i = h_{i1} U_1 + \ldots + h_{in} U_n \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

и если $F(u)$ переходит при этой подстановке в $\Phi(U)$, то будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U_k} = h_{1k} \frac{\partial F}{\partial u_1} + h_{2k} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + h_{nk} \frac{\partial F}{\partial u_n},$$

как и в случае обыкновенных алгебраических форм.

58. Система линейных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial u_n}=0, \tag{3}$$

где F — данная внешняя квадратичная форма, не зависит, очевидно, от выбора переменных. Поэтому можно предположить, что она сводится к уравнениям:

$$u_1=0, \quad u_2=0, \ldots, u_r=0 \qquad (r \leqslant n).$$

Если это имеет место, то *форма F не зависит* от $u_{r+1}, \ldots, u_n$. Действительно, если бы она содержала член вида $A[u_{r+1}u_\alpha]$, то уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}=0$$

не было бы следствием уравнений (3). Форма F может быть, следовательно, выражена с помощью левых частей уравнения (3).

Обратно, предположим, что форма F может быть выражена с помощью $\varrho \leqslant r$ переменных $v_1, \ldots, v_\varrho$; левые части уравнений системы

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial v_n}=0$$

зависели бы в этом случае только от $v_1, \ldots, v_\varrho$; эта система содержала бы, таким образом, не более ϱ независимых уравнений. Следовательно, ϱ должно быть равно r, а v_i должны быть линейными комбинациями u_i.

Следовательно, *ассоциированная система внешней квадратичной формы получается путем приравнивания нулю всех ее частных производных первого порядка.*

59. Этот результат может быть уточнен; мы покажем, что *ранг r — всегда четное число*; кроме того, для внешних квадратичных форм мы найдем приведенный вид, играющий ту же роль, что сумма квадратов в случае обыкновенных квадратичных форм.

Положим, для определенности, что коэфициент a_{12} формы $F(u)$ отличен от нуля и рассмотрим форму

$$\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\,\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]=\frac{1}{a_{12}}\left[(a_{12}u_2+a_{13}u_3+\ldots+a_{1n}u_n)(a_{21}u_1+a_{23}u_3+\ldots+a_{2n}u_n)\right];$$

эта форма имеет те же коэфициенты, что и F, у членов, содержащих

$$[u_1\,u_2], \quad [u_1\,u_3], \quad \ldots, \quad [u_1\,u_n], \quad [u_2\,u_3], \quad \ldots, \quad [u_2\,u_n],$$

т. е. у членов, содержащих по крайней мере одну из двух переменных u_1, u_2. Следовательно, форма

$$F(u)-\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\,\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]=F'(u)$$

содержит только переменные $u_3, u_4, \ldots, u_n$. Предположим теперь, что коэфициент a'_{34} этой формы отличен от нуля; повторяя предыдущее рассуждение, убедимся, что форма

$$F'(u) - \frac{1}{a'_{34}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_3}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}\right] = F''(u)$$

содержит только переменные $u_5, u_6, \ldots, u_n$. Повторяя шаг за шагом этот процесс, придем в конце концов к форме, тождественно равной нулю. Допустим, например, что имеем

$$F(u) = \frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\,\frac{\partial F}{\partial u_2}\right] + \frac{1}{a'_{34}}\left[\frac{\partial F'}{\partial u_3}\,\frac{\partial F'}{\partial u_4}\right] + \frac{1}{a''_{56}}\left[\frac{\partial F''}{\partial u_5}\,\frac{\partial F''}{\partial u_6}\right].$$

Шесть линейных форм

$$\frac{\partial F}{\partial u_1},\quad \frac{\partial F}{\partial u_2},\quad \frac{\partial F'}{\partial u_3},\quad \frac{\partial F'}{\partial u_4},\quad \frac{\partial F''}{\partial u_5},\quad \frac{\partial F''}{\partial u_6},$$

очевидно, независимы. Полагая

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_1} &= U_1, & \frac{\partial F}{\partial u_2} &= a_{12}U_2, \\ \frac{\partial F'}{\partial u_3} &= U_3, & \frac{\partial F'}{\partial u_4} &= a'_{34}U_4, \\ \frac{\partial F''}{\partial u_5} &= U_5, & \frac{\partial F''}{\partial u_6} &= a''_{56}U_6, \end{aligned}$$

убедимся, что форма F приводится к искомой канонической форме

$$F(U) = [u_1\,u_2] + [u_3\,u_4] + [u_5\,u_6].$$

Рассуждение носит, очевидно, вполне общий характер и приводит всегда к канонической форме

$$F(U) = [U_1\,U_2] + \ldots + [U_{2s-1}\,U_{2s}] \qquad (2s \leqslant n).$$

Ассоциированная система имеет, очевидно, вид

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_{2s} = 0.$$

Этот результат весьма важен для дальнейшего

60. Приведение внешней квадратичной формы к каноническому виду возможно, очевидно, бесконечным числом способов; совокупность линейных подстановок, с помощью которых осуществляется переход от одной канонической формы к другой, образует важную группу, зависящую от $s(2s+1)$ произвольных параметров. Если $s = 1$, то эти подстановки двух переменных будут характеризоваться равенством нулю их определителя.

Внешние формы степени выше второй.

61. Можно представить себе внешние формы какой угодно степени. Естественнее всего к ним приводит рассмотрение полилинейных форм от p рядов переменных $u_i, v_i, \ldots, w_i$:

$$f(u, v, \ldots, w),$$

удовлетворяющих следующему условию: если поменять местами два ряда переменных, то форма изменит только знак. В случае $p = 3$, например, это условие имеет следствием то, что каждый член, в котором имеются одинаковые индексы, имеет коэфициентом нуль, а совокупность членов, все три индекса которых различны, например, равны 1, 2, 3, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Система записи, использованная уже выше, приводит здесь к своеобразному умножению, распределительному, но *некоммутативному*, так как каждый член произведения меняет знак, если в нем переставить пару сомножителей. Имеем, следовательно,

$$[u_1\, u_2\, u_3] = -[u_2\, u_1\, u_3] = -[u_1\, u_3\, u_2] = -[u_3\, u_2\, u_1] =$$
$$= [u_2\, u_3\, u_1] = [u_3\, u_1\, u_2].$$

На основе этого можно определить внешнее произведение вида

$$[F\, \Phi\, \Psi],$$

где F, Φ, Ψ суть внешние формы любой степени; степень произведения равняется сумме степеней сомножителей. Произведение необходимо равно нулю, если сумма степеней превышает n. Легко убедиться, что если в этом произведении поменять местами два множителя, то произведение не изменится, если хотя бы один из этих множителей является формой четной степени; оно меняет только знак, если оба множителя нечетной степени. Аналогичным путем можно определить сумму произведений такого рода.

В частности, произведение формы на самое себя равно нулю, если эта форма нечетной степени; в случае четной степени оно может и не равняться нулю. Возьмем, например, квадратичную форму, приведенную к каноническому виду

$$F = [u_1\, u_2] + [u_3\, u_4] + \ldots + [u_{2s-1}\, u_{2s}];$$

имеем:

$$\frac{1}{2!}[F^2] = [u_1\, u_2\, u_3\, u_4] + [u_1\, u_2\, u_5\, u_6] + \ldots + [u_{2s-3}\, u_{2s-2}\, u_{2s-1}\, u_{2s}],$$

$$\frac{1}{3!}[F^3] = [u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5\, u_6] + \ldots,$$

$$\frac{1}{s!}[F^s] = [u_1\, u_2\, u_3\, u_4 \ldots u_{2s-1}\, u_{2s}],$$

$$\frac{1}{(s+1)!}[F^{s+1}] = 0.$$

Значит, ранг $2s$ квадратичной формы F равняется удвоенному наибольшему показателю степени, в которую можно возвести форму F, при условии, что результат (т. е. степень) не должен обращаться в нуль.

Вот простое приложение этих понятий к теории определителей. Пусть

$$F = a_{12}[u_1 u_2] + a_{13}[u_1 u_3] + a_{14}[u_1 u_4] + a_{23}[u_2 u_3] + \\ + a_{24}[u_2 u_4] + a_{34}[u_3 u_4]$$

— форма с четырьмя переменными; имеем:

$$\frac{1}{2}[F^2] = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})[u_1 u_2 u_3 u_4];$$

с другой стороны, система, ассоциированная с F, имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 &= 0, \\ a_{21}u_1 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 &= 0, \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{34}u_4 &= 0, \\ a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Условием того, что форма может быть выражена с помощью меньше чем четырех переменных, является, с одной стороны, равенство нулю квадрата формы $[F^2]$, т. е.

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0;$$

с другой — равенство нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти два уравнения эквивалентны, несмотря на кажущееся различие; действительно, можно доказать, что полученный определитель — кососимметрический и четного порядка — представляет собою квадрат выражения $a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

62. Всякая внешняя форма степени n (равной числу переменных) имеет вид

$$A[u_1 u_2 \ldots u_n].$$

Можно получить канонические формы, когда степень равна $n-1$ или $n-2$. К ним легко притти, используя понятие формы, *сопряженной* с данной.

Рассмотрим форму F степени p и обозначим через $\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-p-1)}$ линейные формы с неопределенными коэфициентами:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n, \\ \xi' &= \xi'_1 u_1 + \ldots + \xi'_n u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Степень внешнего произведения $[F\,\xi\,\xi'\ldots\xi^{(n-p-1)}]$ равна n и, стало быть, оно имеет вид

$$\Phi\,[u_1\,u_2\ldots u_n];$$

коэфициент Φ является линейным по отношению к каждому ряду коэфициентов ξ, кроме того, он кососимметричен; стало быть, ему соответствует внешняя форма степени $n-p$ с переменными $\xi_1,\ldots,\xi_n$: это, по определению, и будет форма, сопряженная с F.

Если подвергнуть переменные u некоторому линейному преобразованию и если одновременно с этим переменные ξ подвергнуть такому линейному преобразованию, чтобы не менялось выражение $\xi_1 u_1+\ldots+\xi_n u_n$, то, очевидно, выражение $\Phi\,[u_1\ldots u_n]$ сохранится; иными словами, *сопряженная форма воспроизводится, умноженная на определитель линейного преобразования, которому подвергаются переменные u.*

Форма, сопряженная с формой $F=F_1+F_2$, равна, очевидно, сумме сопряженных форм Φ_1 и Φ_2. Точно так же форма, сопряженная с aF, где a — числовой множитель, равна $a\Phi$. В силу этого, для того, чтобы вычислять формы, сопряженные с любыми данными, достаточно научиться вычислять формы, сопряженные с одночленными формами вида

$$F=[u_{\alpha_1}\,u_{\alpha_2}\ldots u_{\alpha_p}].$$

Используя данное определение, находим

$$\Phi=[\xi_{\alpha_{p+1}}\ldots\xi_{\alpha_n}],$$

где индексы $\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_n$ суть те из индексов $1, 2,\ldots, n$, которые не встречаются в последовательности $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p$; эти индексы должны быть расположены в таком порядке, чтобы вся последовательность

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p,\ \alpha_{p+1},\ \ldots,\ \alpha_n$$

была четной.

63. Предположим теперь, что F — форма степени $n-1$; сопряженная форма будет первой степени; ее всегда можно предположить равной, например, ξ_n, так что *форма F всегда может быть приведена к виду*

$$F=[u_1\,u_2\ldots u_{n-1}].$$

Далее, предположим, что степень F равна $n-2$; форма Φ будет второй степени; ее всегда можно представить в виде

$$\Phi=[\xi_1\,\xi_2]+\ldots+[\xi_{2s-1}\,\xi_{2s}];$$

следовательно, будем иметь:

$$F=[u_3\,u_4\,u_5\ldots u_n]+[u_1\,u_2\,u_5\,u_6\ldots u_n]+[u_1\,u_2\ldots u_{2s-2}\,u_{2s+1}\ldots u_n].$$

Если $s=1$, то F сводится к одночленной форме. Например, если

$n=5$, любая форма F степени $5-2=3$ может быть приведена к одному из канонических видов

$$F=[u_3\,u_4\,u_5],$$
$$F=[u_1\,u_2\,u_5]+[u_3\,u_4\,u_5];$$

если $n=6$, то любая форма F четвертой степени приводится к одному из следующих видов:

$$F=[u_3\,u_4\,u_5\,u_6],$$
$$F=[u_3\,u_4\,u_5\,u_6]+[u_1\,u_2\,u_5\,u_6]=\Big[([u_1\,u_2]+[u_3\,u_4])\,u_5\,u_6\Big],$$
$$F=[u_3\,u_4\,u_5\,u_6]+[u_1\,u_2\,u_5\,u_6]+[u_1\,u_2\,u_3\,u_4]=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[[u_1\,u_2]+[u_3\,u_4]+[u_5\,u_6]\Big]^2.$$

С помощью понятия сопряженной формы можно было бы определить произведение двух форм, сумма степеней которых превосходит n; это — операция, названная Грассманом *регрессивным внешним умножением*; мы нигде ее не используем.

64. Отметим еще несколько приложений внешнего умножения. Пусть будут $f_1, f_2, \ldots, f_h$ *независимые* линейные формы. Уравнение

$$[F\,f_1\,f_2\ldots f_h]=0,$$

где F — некоторая внешняя форма, дает необходимое и достаточное условие того, что F обращается в нуль, если переменные связать соотношениями

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \ldots,\quad f_h=0.$$

Действительно, можно сначала привести задачу к случаю, когда $f_i=u_i$. Если после этого каждый член F содержит по крайней мере одну из переменных $u_1, \ldots, u_h$, то, очевидно, произведение $[Fu_1\ldots u_h]$ равно нулю. Обратно, если это произведение равно нулю, то любой член F содержит в качестве множителя по крайней мере одну из переменных $u_1, \ldots, u_h$, так как в противном случае умножение этого члена на $[u_1\ldots u_h]$ дало бы отличное от нуля произведение, которое не сократилось бы ни с каким другим.

Ассоциированная система внешней формы.

65. Определение ассоциированной системы для внешней формы любой степени осуществляется так же легко, как и для квадратичной. Если степень формы равна p, то ассоциированная система получится путем приравнивания нулю всех частных производных порядка $p-1$ от F. Производную первого порядка, например $\frac{\partial F}{\partial u_1}$, определяют, как коэфициент при u_1 в совокупности членов F, содержащих эту переменную, если предварительно эта переменная переведена во всех членах на первое место. Нужно заметить, что эта производная $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ уже не зависит от u_1. Производная $\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}$ определяется как производная от $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ по u_2; значит, ее можно получить, взяв совокупность членов F, содержащих сразу оба переменные u_1 и u_2, переведя в каждом из этих членов u_1 на первое, u_2 на второе место и вычеркивая затем в каждом из этих членов u_1 и u_2. В силу этого имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1}.$$

Частные производные высших порядков определяются таким же путем; отличны от нуля лишь те из них, которые не включают двух диференцирований по одному и тому же переменному.

Ранг формы, не равной тождественно нулю и имеющей степень n, равен, очевидно, n. Ранг формы степени $n-1$ равен $n-1$. Ранг формы степени $n-2$ равен $n-2$, если она может быть приведена к одночленной форме; во всех иных случаях он равен n. Если степень формы меньше, чем $n-2$, то *a priori* ничего нельзя сказать о ее ранге.

Формулы, относящиеся к внешним квадратичным формам.

66. Возвратимся к случаю внешней квадратичной формы F от n переменных $u_1, \ldots, u_n$. Может случиться, что переменные u_i связаны между собою линейной зависимостью

$$f \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0.$$

Форма F, если в ней какую-нибудь из переменных, например, u_n, выразить в функции остальных, будет иметь некоторый ранг, соответствующий числу линейно независимых уравнений ее ассоциированной системы. Эта система состоит, очевидно, из следующих уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{a_1}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \quad f = 0;$$

ее можно записать так:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u_1}}{a_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_2}}{a_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_n}}{a_n}, \quad f = 0.$$

Можно предположить — и это будет более общим случаем, — что переменные связаны несколькими линейными соотношениями.

$$\begin{aligned} f &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0, \\ g &\equiv b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h &\equiv l_1 u_1 + l_2 u_2 + \ldots + l_n u_n = 0. \end{aligned}$$

Ассоциированная система будет при этом определяться формулами:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \frac{\partial F}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial u_n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{matrix} \right\| = 0, \quad f=0, \quad g=0, \quad \dots, \quad h=0;$$

равенство нулю матрицы следует здесь понимать в том смысле, что должны равняться нулю все ее определители наивысшего возможного порядка.

Можно заметить, что ранг $2s'$ формы F, *в предположении, что переменные связаны данными соотношениями, равняется удвоенному наибольшему показателю, при котором форма*

$$[fg \dots hF^{s'}]$$

не равняется нулю.

67. Предположим, в частности, что $n = 2s$ и что ранг формы F равняется n. Если связать переменные одним соотношением, то, очевидно, ранг формы не превзойдет $n-1 = 2s-1$ и, *будучи четным числом*, не превзойдет $2s-2$. Впрочем, нетрудно убедиться, что он не может быть и меньше указанного числа.

Отсюда следует, что если связать переменные p независимыми линейными соотношениями, то ранг F уменьшится *не более* чем на $2p$ единиц. Посмотрим, в каком случае будет иметь место максимально возможное понижение ранга. Если данные соотношения имеют вид

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_p = 0,$$

то необходимое и достаточное условие максимального понижения ранга есть выполнение равенства

$$[f_1 f_2 \dots f_p F^{s-p+1}] = 0. \tag{4}$$

Это условие можно заменить другими, более простыми. Действительно, заметим, что если взять два какие-нибудь из p данных соотношений, то эти два соотношения необходимо понизят ранг F на 4 единицы; следовательно,

$$[f_i f_j F^{s-1}] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p). \tag{5}$$

Докажем, что эти *необходимые условия* $\left(\textit{в форме } \frac{p(p-1)}{2} \textit{ уравнений}\right)$ *являются также и достаточными.*

Для доказательства предположим, что эти условия выполнены и сделаем такую замену переменных, чтобы f_i обратились в u_i. Тогда получим

$$[u_i u_j F^{s-1}] = 0,$$

а это показывает, что *форма* $\Phi(\xi)$, *сопряженная* с $F^{s-1}(u)$, не содержит членов, в которые входило бы $[\xi_i \xi_j]$. Но формой, сопряженной по отношению к форме F^{s-q}, является Φ^q; в этом легко убедиться, приведя F к каноническому виду. Следовательно, каждый член формы Φ^{p-1}, сопряженной с формой F^{s-p+1}, содержит *по меньшей мере* $p-1$ из переменных $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$, потому что каждый член Φ содержит по крайней мере одну из этих переменных. Значит, каждый из членов формы Φ^{p-1} содержит *не более* $p-1$ переменных $\xi_1, \ldots, \xi_p$. Следовательно, форма, сопряженная с Φ^{p-1}, содержит *по крайней мере* одну из переменных $u_1, \ldots, u_n$. А это как раз показывает, что

$$[u_1 u_2 \ldots u_p F^{s-p+1}] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Легко выяснить значение этой теоремы. Действительно, так как формы $[f_i f_j F^{s-1}]$ имеют степень n, то условия их обращения в нуль сводятся к $\frac{p(p-1)}{2}$ уравнениям. Условие же обращения в нуль формы $[f_1 f_2 \ldots f_p F^{s-p+1}]$, степень которой равна $n-p+2$, выражается при помощи C_n^{p-2} уравнений, при этом каждое из них будет содержать коэфициенты *всех* данных соотношений f_i.

Если, например,

$$\begin{aligned} F &= [u_1 u_2] + [u_3 u_4] + [u_5 u_6], \\ f_1 &= a_1 u_1 + \ldots + a_6 u_6, \\ f_2 &= b_1 u_1 + \ldots + b_6 u_6, \\ f_3 &= c_1 u_1 + \ldots + c_6 u_6, \end{aligned}$$

то условием того, что, при наличии соотношений $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, форма F имеет ранг $6-6=0$, по первому способу будет

$$[f_1 f_2 f_3 F] = 0;$$

это дает:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_5 & b_6 \\ c_2 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_5 & a_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_5 & a_1 & a_2 \\ b_5 & b_1 & b_2 \\ c_5 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_4 \\ b_5 & b_3 & b_4 \\ c_5 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_6 & a_1 & a_2 \\ b_6 & b_1 & b_2 \\ c_6 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_6 & a_3 & a_4 \\ b_6 & b_3 & b_4 \\ c_6 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Напротив, если используем только что доказанную теорему, то искомые условия примут несравненно более простую форму:

$$b_1c_2 - c_1b_2 + b_3c_4 - c_3b_4 + b_5c_6 - c_5b_6 = 0,$$
$$c_1a_2 - a_1c_2 + c_3a_4 - a_3c_4 + c_5a_6 - a_5c_6 = 0,$$
$$a_1b_2 - b_1a_2 + a_3b_4 - b_3a_4 + a_5b_6 - b_5a_6 = 0.$$

68. Можно указать теорему, уточняющую предыдущую и позволяющую найти наиболее простым путем ранг формы, в которую обращается форма F в предположении, что входящие в нее переменные связаны p данными соотношениями. Определим билинейную кососимметрическую форму

$$\Phi(\xi, \xi') = \sum a_{ij}\, \xi_i\, \xi'_j$$

равенством

$$s\,[F^{s-1}(\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n)(\xi'_1 u_1 + \ldots + \xi'_n u_n)] = \Phi(\xi, \xi')\,[F^s];$$

внешняя квадратичная форма

$$\Phi(\xi) = \sum a_{ij}\,[\xi_i \xi_j]$$

будет (с точностью до числового множителя) сопряженной по отношению к форме $\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}$. Она является *абсолютным ковариантом* формы F в том смысле, что если подвергнуть переменные $u_1, \ldots, u_n$ любому линейному преобразованию, а переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ линейному преобразованию, не меняющему выражения $\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$, и если в результате этих преобразований формы $F(u)$ и $\Phi(\xi)$ перейдут, соответственно, в $\overline{F}(\overline{u})$ и $\overline{\Phi}(\overline{\xi})$, то и для преобразованных форм сохранится в силе соотношение

$$s\,[\overline{F}^{s-1}(\overline{\xi}_1 \overline{u}_1 + \ldots + \overline{\xi}_n \overline{u}_n)(\overline{\xi}'_1 \overline{u}_1 + \ldots + \overline{\xi}'_n \overline{u}_n)] = \overline{\Phi}(\overline{\xi}, \overline{\xi}')\,[\overline{F}^s].$$

Если, в частности, F имела канонический вид

$$F = [u_1 u_2] + \ldots + [u_{2s-1} u_{2s}],$$

то и Φ получится в канонической форме:

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2s-1} \xi_{2s}].$$

Отсюда легко получается общее тождество:

$$\left[\frac{F^{s-p}}{(s-p)!}(\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n)(\xi'_1 u_1 + \ldots + \xi'_n u_n) \ldots (\xi_1^{(2p-1)} u_1 + \ldots + \xi_n^{(2p-1)} u_n)\right] =$$
$$= \frac{\Phi^{(p)}(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(2p-1)})}{p!}\left[\frac{F^s}{s!}\right], \qquad (6)$$

в котором внешняя форма степени p, соответствующая полилинейной альтернированной форме $\Phi^{(p)}$, равняется $[\Phi^p(\xi)]$. Это тождество очевидно, если F приведена к каноническому виду; значит, оно справедливо и в общем случае. Это сводится, по существу, к тому, что форма, сопряженная с $[F^{s-p}]$ равна $[\Phi^p]$ (с точностью до скалярного множителя).

Положив, в частности, $p=2$ и взяв в тождестве (6) члены, содержащие $[\xi_i\, \xi'_j\, \xi''_k\, \xi'''_l]$, получим

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}u_iu_ju_ku_l\right]=(a_{ij}a_{kl}+a_{ik}a_{lj}+a_{il}a_{jk})\left[\frac{F^s}{s!}\right]; \tag{7}$$

здесь коэфициенты a_{ij} определяются соотношениями

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}u_iu_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right].$$

Отсюда можно вывести еще одно тождество, которое будет нам полезно в дальнейшем. Рассмотрим форму

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}u_iu_ju_k\right]-\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}(a_{ij}u_k+a_{jk}u_i+a_{ki}u_j)\right];$$

степень ее равна $2s-1$; если ее умножить внешним образом на одну из переменных $u_1, \ldots, u_{2s}$, например, на u_l, то легко видеть, что произведение, в силу (7), будет равно нулю. Следовательно, и сама форма тождественно равна нулю. Но u_i, u_j, u_k могут быть заменены тремя любыми линейными формами; поэтому можно сформулировать следующую теорему:

Если рассматривать некоторое число линейных форм $f_1, f_2, \ldots, f_p$ и если положить

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}f_if_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right] \qquad (i,\ j=1,\ 2, \ldots,\ p),$$

то будет иметь место тождество:

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}f_if_jf_k\right]=\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}(a_{ij}f_k+a_{jk}f_i+a_{ki}f_j)\right]. \tag{8}$$

69. Вернемся теперь к задаче, сформулированной выше, именно, к разысканию ранга формы, которая получается из F, если предположить, что входящие в нее переменные связаны p независимыми линейными соотношениями:

$$f_1=0, \quad f_2=0, \quad \ldots, \quad f_p=0.$$

Мы можем всегда предположить, что эти соотношения приведены к виду.

$$u_1=0, \quad u_2=0, \ldots, \quad u_p=0.$$

В дальнейшем нам можно будет воспользоваться любым линейным преобразованием над переменными u при единственном условии, что первые p переменных $u_1, \ldots, u_p$ при этом могут лишь переходить друг в друга. Отсюда следует, что над переменными ξ можно производить любые линейные преобразования, при условии, что эти преобразования лишь переводят друг в друга $2s-p$ *последних переменных* $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$. Положим, наконец,

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!} u_i u_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right] \qquad (i, j=1, 2, \ldots, p).$$

Если в Φ опустить члены, содержащие $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$, то, очевидно, получится

$$\overline{\Phi} = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,p} a_{ij}[\xi_i \xi_j].$$

Пусть $2q$ будет рангом формы $\overline{\Phi}$; путем подходящего линейного преобразования над переменными $\xi_1, \ldots, \xi_p$ можно будет привести форму $\overline{\Phi}$ к виду

$$\overline{\Phi} = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1} \xi_{2q}];$$

следовательно, вычитая, если нужно, из $\xi_1, \ldots, \xi_p$ линейные комбинации переменных $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{2s}$, *на что мы имеем право*, мы приведем форму Φ к виду

$$\Phi = [\xi_1\xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1} \xi_{2q}] + [\xi_{2q+1} \xi_{p+1}] + \ldots +$$
$$+ [\xi_p \xi_{2p-2q}] + [\xi_{2p-2q+1} \xi_{2p-2q+2}] + \ldots + [\xi_{2s-1} \xi_{2s}].$$

Но тогда форма F примет вид

$$F = [u_1 u_2] + \ldots + [u_{2q-1} u_{2q}] + [u_{2q+1} u_{p+1}] + \ldots +$$
$$+ [u_p u_{2p-2q}] + \ldots + [u_{2s-1} u_{2s}].$$

Мы видим, что если учесть теперь соотношения

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_p = 0,$$

то ранг формы F уменьшится на $2p-2q$ единиц.

Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Рассмотрим линейные независимые формы $f_1, f_2, \ldots, f_p$; *затем величины* a_{ij} $\left(\text{в числе } \frac{p(p-1)}{2}\right)$, *определенные равенствами*

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!} f_i f_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right],$$

и, наконец, внешнюю квадратичную форму с p *переменными* $\xi_1, \ldots, \xi_p$:

$$\Phi(\xi) = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,p} a_{ij}[\xi_i \xi_j].$$

Если эта форма имеет ранг $2q$, то ранг формы F уменьшается на $2p-2q$ единиц, если предположить, что переменные в этой форме связаны соотношениями

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_p = 0.$$

Кроме того, если p данных линейных форм подвергнуть линейному преобразованию, с помощью которого форма Φ приводится к каноническому виду

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2q-1} \xi_{2q}],$$

то и форма F приведется к каноническому виду

$$F = [f_1 f_2] + \ldots + [f_{2q-1} f_{2q}] + [f_{2q+1} f_{p+1}] + \ldots +$$
$$+ [f_p f_{2p-2q}] + \ldots + [f_{2s-1} f_{2s}],$$

где через $f_{p+1}, \ldots, f_{2s}$ обозначены новые линейные формы, соответственным образом подобранные, независимые между собою и независимые по отношению к данным формам.

В частности, при $q=0$ получаем теорему, сформулированную и доказанную в п. 67.

Глава VII.

ВНЕШНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ ФОРМЫ.

Билинейный ковариант пфаффовой формы.

70. Рассмотрим теперь линейную диференциальную форму (форму Пфаффа):

$$\omega_\delta = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n.$$

Исходя из этой формы, можно построить билинейную кососимметрическую форму с двумя рядами диференциалов, именно

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = \sum a_i (\delta\delta' x_i - \delta'\delta x_i) + \sum (\delta a_i \, \delta' x_i - \delta' a_i \delta x_i).$$

Предположим, что оба символа диференцирования переместительны, т. е. что

$$\delta\delta' x_i = \delta'\delta x_i;$$

правой части равенства, носящей название *билинейного коварианта* формы ω, можно поставить в соответствие внешнюю квадратичную диференциальную форму, которая, если воспользоваться символикой, введенной выше, запишется так:

$$\omega'_\delta = \sum_i \left[\delta a_i \, \delta x_i\right] = \sum_{(ij)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) [\delta x_i \, \delta x_j];$$

эту форму будем называть *внешней производной* формы ω.

Эта операция взятия производной *не зависит от выбора независимых переменных*; кроме того, эта операция позволяет перейти от криволинейного интеграла, взятого по замкнутому контуру, к двойному интегралу, распространенному на площадь, ограниченную этим контуром. Например, в случае трех переменных x, y, z, если положим

$$\omega_\delta = P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z,$$

то получим

$$\omega'_\delta = [\delta P\,\delta x] + [\delta Q\,\delta y] + [\delta R\,\delta z] =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}[\delta x\,\delta x] + \frac{\partial P}{\partial y}[\delta y\,\delta x] + \frac{\partial P}{\partial z}[\delta z\,\delta x] + \frac{\partial Q}{\partial x}[\delta x\,\delta y] + \frac{\partial Q}{\partial y}[\delta y\,\delta y] +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial z}[\delta z\,\delta y] + \frac{\partial R}{\partial x}[\delta x\,\delta z] + \frac{\partial R}{\partial y}[\delta y\,\delta z] + \frac{\partial R}{\partial z}[\delta z\,\delta z] =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)[\delta y\,\delta z] + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)[\delta z\,\delta x] + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[\delta x\,\delta y];$$

формулу Стокса можем, очевидно, записать так:

$$\int_C \omega_\delta = \int\!\!\int_S \omega'_\delta;$$

через S обозначена площадь, ограниченная контуром C.

Для того чтобы ω' тождественно равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы ω было полным диференциалом.

Замечание. Переместительность двух символов диференцирования δ и δ' должна иметь место, когда диференцирования прилагаются к совершенно произвольной функции y независимых переменных; *иначе определенная только что операция не будет обладать свойством ковариантности.* В этом нетрудно убедиться. Если положить

$$\omega_\delta = \delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\delta x_n,$$

то ω_δ будет полным диференциалом и, следовательно,

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = 0,$$

то есть

$$\delta\delta' y = \delta'\delta y.$$

Внешнее диференцирование.

71. Ту же операцию внешнего диференцирования можно применить к внешней диференциальной форме любой степени. Пусть, например, дана квадратичная форма

$$\Omega = \sum a_{ij}\,[\delta x_i\,\delta x_j];$$

рассмотрим соответствующую ей билинейную кососимметрическую форму

$$\Omega(\delta, \delta') = \sum a_{ij}(\delta x_i \delta' x_j - \delta x_j \delta' x_i),$$

и введем три символа диференцирования δ, δ', δ'', которые будем полагать переместительными. Рассмотрим, наконец, выражение

$$\delta\Omega(\delta', \delta'') - \delta'\Omega(\delta, \delta'') + \delta''\Omega(\delta, \delta'),$$

которое, очевидно, инвариантно по отношению к выбору независимых переменных. Сделав вычисления, убедимся без труда, что оно сводится к кососимметрической (альтернированной) трилинейной форме

$$\Omega'(\delta, \delta', \delta'') = \sum [\delta a_{ij}(\delta' x_i \delta'' x_j - \delta' x_j \delta'' x_i) -$$
$$- \delta' a_{ij}(\delta x_i \delta'' x_j - \delta x_j \delta'' x_i) + \delta'' a_{ij}(\delta x_i \delta' x_j - \delta x_j \delta' x_i)].$$

Этой трилинейной форме соответствует внешняя кубическая диференциальная форма

$$\Omega'_\delta = \sum [\delta a_{ij}\, \delta x_i\, \delta x_j] = \sum \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)[\delta x_i\, \delta x_j\, \delta x_k],$$

которую мы будем называть *производной* от Ω.

72. В рассматриваемом случае важно отдать себе отчет в той связи, которая существует между диференцированием внешней квадратичной диференциальной формы и операцией перехода от двойного интеграла, распространенного по *замкнутой* поверхности, к тройному, распространенному по объему, ограниченному этой поверхностью.

Представим себе, что координаты $x_1, \ldots, x_n$ являются функциями трех параметров α, β, γ, и представим себе в n-мерном пространстве элементарный параллелепипед, ребрами которого служат отрезки координатных линий, а вершины A, B, C, D, E, F, G, H имеют криволинейные координаты:

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha + \delta\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta, \gamma + \delta''\gamma),$$
$$(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma), \quad (\alpha + \delta\alpha, \beta, \gamma + \delta''\gamma), \quad (\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma + \delta''\gamma),$$
$$(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta'\beta, \gamma + \delta''\gamma).$$

Символы δ, δ', δ'' относятся, таким образом, к диференцированиям по трем параметрам α, β, γ, соответственно.

Рассмотрим теперь поверхностный интеграл $\int\int \Omega$, распространенный по поверхности этого параллелепипеда.

Интегралы, распространенные по трем граням, сходящимся в вершине A, равняются, соответственно (с точностью до знака),

$$\Omega(\delta', \delta''), \quad \Omega(\delta'', \delta), \quad \Omega(\delta, \delta');$$

чтобы эти интегралы были распространены все либо на внутреннюю, либо на внешнюю поверхность, их надо взять либо равными написанным выражениям, либо равнопротивоположными им. Если мы возьмем их равнопротивоположными, то для суммы интегралов, распространенных по шести граням, получим

$$-\Omega(\delta', \delta'') - \Omega(\delta'', \delta) - \Omega(\delta, \delta') + [\Omega(\delta', \delta'') + \delta\Omega(\delta', \delta'')] +$$
$$+ [\Omega(\delta'', \delta) + \delta'\Omega(\delta'', \delta)] + [\Omega(\delta, \delta') + \delta''\Omega(\delta, \delta')] =$$
$$= \delta\Omega(\delta', \delta'') + \delta'\Omega(\delta'', \delta) + \delta''\Omega(\delta, \delta') = \Omega'(\delta, \delta', \delta'').$$

Поверхностный интеграл $\int\int \Omega$ преобразуется, таким образом, в объемный $\int\int\int \Omega'$.

В случае трех переменных, если положить

$$\Omega = P[\delta y\,\delta z] + Q[\delta z\,\delta x] + R[\delta x\,\delta y],$$

то получится

$$\Omega' = [\delta P\,\delta y\,\delta z] + [\delta Q\,\delta z\,\delta x] + [\delta R\,\delta x\,\delta y] = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)[\delta x\,\delta y\,\delta z].$$

73. Эти рассуждения можно распространить на внешние формы любой степени. Любая внешняя форма допускает производную, степень которой на единицу выше степени исходной формы; вычисляется она исключительно легко, потому что каждый член исходной формы

$$A[\delta x_i\,\delta x_j \ldots \delta x_l]$$

порождает член производной формы

$$[\delta A\,\delta x_i\,\delta x_j \ldots \delta x_l].$$

Отметим несколько полезных и легко выводимых формул. *Если m — коэфициент (конечная функция наших переменных), а Ω — произвольная внешняя форма, то справедлива формула*

$$(m\Omega)' = [dm\,\Omega] + m\Omega'.$$

Если Ω и π две произвольные внешние диференциальные формы, то

$$[\Omega\pi]' = [\Omega'\pi] \pm [\Omega\pi'],$$

причем знак + соответствует четной степени формы Ω, а знак — нечетной. В частности, если степень Ω четная, то формула для производной от степени $[\Omega^p]$ аналогична обыкновенной формуле диференцирования:

$$[\Omega^p]' = p\,[\Omega^{p-1}\,\Omega'].$$

74. Во всем предшествующем мы предполагали, что коэфициентами форм служат непрерывные функции, допускающие частные производные первого порядка. *Встречаются, однако, случаи, когда коэфициенты* *формы Ω не имеют производных, и все же можно определить внешнюю производную форму Ω'.* Классический пример дает нам теория потенциала.

Рассмотрим материальный объем V, ограниченный поверхностью S; пусть ϱ — плотность материи в произвольной точке объема V; мы предположим, что функция ϱ непрерывна. Потенциал U этой массы представляет собой функцию, непрерывную во всем пространстве и всюду допускающую непрерывные производные первого порядка. Существует теорема, касающаяся этой функции (теорема Гаусса), которую можно выразить формулой:

$$\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial U}{\partial y}\, dz\, dx + \frac{\partial U}{\partial z}\, dx\, dy = \int\int\int -4\pi\varrho\, dx\, dy\, dz,$$

причем двойной интеграл распространяется по любой замкнутой поверхности, а тройной — по объему, ограниченному этой поверхностью.

Отсюда следует, что если положить

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial x}\,[dy\, dz] + \frac{\partial U}{\partial y}\,[dz\, dx] + \frac{\partial U}{\partial z}\,[dx\, dy],$$

то можно определить внешнюю производную Ω' от Ω так:

$$\Omega' = -4\pi\varrho\,[dx\, dy\, dz].$$

Если функция U допускает частные производные второго порядка, то это равенство будет следствием классической формулы Пуассона, потому что операция диференцирования, определенная выше, дает непосредственно

$$\Omega' = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)[dx\, dy\, dz].$$

Но если функция U не имеет частных производных второго порядка, — *а в общем случае это так, если не делать дополнительных предположений относительно функции ϱ,* — то и тогда оказывается возможным определить производную Ω'.

Таким образом, возникает возможность определить внешнее диференцирование как операцию *самостоятельную,* не связанную с классическим диференцированием. При этом можно было бы доказать непосредственно формулу предыдущего пункта

$$[\Omega\pi]' = [\Omega'\pi] \pm [\Omega\pi'],$$

где относительно Ω и π предполагается лишь, что они имеют внешние производные.

75. Рассмотрим простейший случай линейной формы от двух переменных

$$\omega = P\,\delta x + Q\,\delta y,$$

допускающей внешнюю производную

$$\omega' = R\,[\delta x\, \delta y].$$

Будем предполагать, что функции P и Q непрерывны; рассмотрим еще функцию m, допускающую непрерывные частные производные первого порядка. Формула

$$(m\omega)' = m\omega' + [\delta m\, \omega]$$

сводится здесь к

$$\int m(P\,\delta x + Q\,\delta y) = \int\int \left(mR + Q\,\frac{\partial m}{\partial x} - P\,\frac{\partial m}{\partial y}\right)\delta x\,\delta y.$$

Доказательство справедливости этой формулы можно провести довольно просто. Пусть A — область интегрирования, C — контур, ее ограничивающий. Разобьем A на весьма большое число частичных площадей, например, с помощью параллелей к осям. Возьмем в каждой из частичных областей по точке (x_0, y_0) и обозначим через

$$m_0,\quad P_0,\quad Q_0,\quad \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0$$

значения функций m, P, Q, $\dfrac{\partial m}{\partial x}$, $\dfrac{\partial m}{\partial y}$ в этих точках. Внутри и на границе частичной области можно положить

$$m = m_0 + (x - x_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon_1\right] + (y - y_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0 + \varepsilon_2\right],$$

$$P = P_0 + \varepsilon_3,\quad Q = Q_0 + \varepsilon_4;$$

интеграл $\int m(P\,\delta x + Q\,\delta y)$, взятый по контуру этой частичной области, будет равен

$$\int m_0(P\,\delta x + Q\,\delta y) + \int\left[(x - x_0)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right](P_0\,\delta x + Q_0\,\delta y)$$

плюс некоторая величина, меньшая $\varepsilon M \Delta l$, где ε — верхняя граница чисел ε_1, ε_2, ε_3, ε_4; M — постоянное число; Δ — диаметр области; l — длина ограничивающего ее контура. Эта добавочная величина может быть сделана сколь угодно малой, потому что $\sum \Delta l$ имеет порядок всей площади A. Что касается суммы двух интегралов, написанной выше, то она равняется

$$\sum \int\int \left[m_0 R + Q_0\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0 - P_0\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right]\delta x\,\delta y;$$

отсюда легко выводится интересующая нас формула.

Это доказательство можно было бы легко распространить (при соответствующих предположениях) и на случай квадратичной формы

$$\Omega = P\,[\delta y\,\delta z] + Q\,[\delta z\,\delta x] + R\,[\delta x\,\delta y];$$

справедливость равенства

$$\int\int P\,\delta y\,\delta z + Q\,\delta z\,\delta x + R\,\delta x\,\delta y = \int\int\int H\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

влечет за собой следующее:

$$\int\int m(P\,\delta y\,\delta z+Q\,\delta z\,\delta x+R\,\delta x\,\delta y)=$$

$$=\int\int\int\left(mH+P\,\frac{\partial m}{\partial x}+Q\,\frac{\partial m}{\partial y}+R\,\frac{\partial m}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Доказательство оказывается более сложным в случае двух линейных форм с тремя переменными

$$\omega=A\,\delta x+B\,\delta y+C\delta z,$$

$$\omega_1=A'\delta x+B'\delta y+C'\delta z.$$

Предположим, что эти две формы имеют внешние производные и что справедливы поэтому равенства

$$\int A\,\delta x+B\,\delta y+C\,\delta z=\int\int P\delta y\,\delta z+Q\,\delta z\,\delta x+R\,\delta x\,\delta y,$$

$$\int A'\delta x+B'\delta y+C'\delta z=\int\int P'\delta y\,\delta z+Q'\delta z\,\delta x+R'\delta x\,\delta y;$$

формула (1) будет иметь в этом случае вид

$$\int\int(BC'-CB')\,\delta y\,\delta z+(CA'-AC')\,\delta z\,\delta x+(AB'-BA')\,\delta x\,\delta y=$$

$$=\int\int\int(PA'+QB'+RC'-P'A-Q'B-R'C)\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Повидимому, она не может быть доказана методом, примененным в предыдущем случае, если не сделать некоторых дополнительных предположений; например, можно потребовать, чтобы функции A, B, C, A', B', C' удовлетворяли условию, аналогичному условию Липшица. Было бы интересно изучить этот вопрос и выяснить, вытекает ли в самом деле *из диференцируемости сомножителей диференцируемость их внешнего произведения.*

Что касается вопроса о том, при каких условиях внешняя диференциальная форма имеет производную, то он связан, по крайней мере для форм степени $n-1$ от n переменных, с теорией аддитивных функций множеств Валле-Пуссена (C. de la Vallée Poussin) [1]. Так, например, форма

$$\Omega=P\,[\delta y\,\delta z]+Q\,[\delta z\,\delta x]+R\,[\delta x\,\delta y]$$

диференцируема, если сумма интегралов $\int\int\Omega$, распространенных по поверхностям, ограничивающим конечное число кубов, образованных плоскостями, параллельными координатным плоскостям, стремится к нулю,

[1] См. работу: Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire; Paris, Gauthier-Villars, 1916.

когда сумма объемов этих кубов стремится к нулю. Функция H, входящая в выражение производной

$$\Omega' = H\,[\delta x\,\delta y\,\delta z],$$

естественно, в общем случае не будет непрерывной.

Во всем дальнейшем мы будем предполагать допустимость выполняемых нами операций.

Внешние формы и полные диференциалы.

76. Вот важная теорема:

Производная от производной Ω' любой внешней диференциальной формы Ω тождественно равна нулю.

В самом деле, возьмем в Ω какой-нибудь член, например,

$$a\,[\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p];$$

ему в Ω' соответствует член

$$[\delta a\,\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_p].$$

Если a зависит только от $x_1, \ldots, x_p$, то этот последний член равен нулю; значит, равна нулю и его производная. Если, напротив, a не зависит от $x_1, \ldots, x_p$, то путем замены переменных можно сделать a равным x_{p+1}; производная члена

$$[\delta x_{p+1}\,\delta x_1\,\delta x_2 \ldots \delta x_p]$$

будет тогда нулем, потому что его коэфициент равен единице, и этот член ничего не дает при составлении производной формы.

Справедлива и обратная теорема, именно:

Если производная некоторой диференциальной формы Ω равна нулю, то форму Ω можно рассматривать как производную другой формы π, степень которой на единицу ниже степени Ω.

Для доказательства мы используем следующую лемму, которая, впрочем, пригодится нам и в других случаях.

Если производная некоторой формы Ω равна нулю, и если эта форма не содержит диференциала δx_n, то все ее коэфициенты не зависят от x_n.

Возьмем какой-нибудь член формы Ω, например

$$A\,[\delta x_1\,\delta x_2 \ldots \delta x_p];$$

при диференцировании он дает член

$$[\delta A\,\delta x_1\,\delta x_2 \ldots \delta x_p];$$

представив его в развернутом виде, получим несколько членов, один из которых будет

$$\frac{\partial A}{\partial x_n}\,[\delta x_n\,\delta x_1\,\delta x_2 \ldots \delta x_p].$$

Этот член не может сократиться ни с одним из членов производной формы, потому что ни один из членов формы Ω не содержит δx_n. Но $\Omega' = 0$, поэтому необходимо должно быть

$$\frac{\partial A}{\partial x_n} = 0.$$

Итак, лемма доказана; возвращаемся к нашей теореме. Обозначим через Ω_0 то, во что обратится Ω, если положить $x_n = x_n^0$ и $\delta x_n = 0$. Производная от Ω_0, очевидно, равна нулю, если равна нулю производная от Ω. Предположим теперь, что теорема доказана для $n-1$ переменных; тогда возможно подобрать такую форму π_0, построенную с помощью переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, для которой Ω_0 служит производной

$$\pi_0' = \Omega_0.$$

После этого сгруппируем в данной форме Ω и в искомой π отдельно члены, содержащие δx_n, и отдельно члены, не содержащие этого диференциала; можно будет написать

$$\Omega = \Omega_1 + [\delta x_n \Omega_2]; \quad \pi = \pi_1 + [\delta x_n \pi_2].$$

Если мы вычислим в π' члены, содержащие δx_n, то получим

$$\pi' = \left[\delta x_n \frac{\partial \pi_1}{\partial x_n}\right] - [\delta x_n \pi_2'] + \ldots$$

Форму π_2 выберем *произвольно*, а форму π_1 определим из условий:

1° при $x_n = x_n^0$ форма π_1 превращается в π_0;

2° $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_n} = \pi_2' + \Omega_2$;

таким образом, π_1 можно получить квадратурами.

Определенная таким образом форма π обладает следующими свойствами:

1° разность $\pi' - \Omega$, после приведения подобных членов, не содержит больше δx_n;

2° она обращается в нуль, если во всех ее коэфициентах положить $x_n = x_n^0$.

Заметим теперь, что производная этой формы (т. е. разности $\pi' - \Omega$) равна нулю и, следовательно, в силу леммы, все ее коэфициенты не зависят от x_n; стало быть, она равна нулю тождественно; теорема, таким образом, доказана.

Ход доказательства показывает, что в форме π можно взять произвольно члены, содержащие δx_n; выбрать произвольно значения при $x_n = x_n^0$ тех членов, которые не содержат δx_n, но содержат δx_{n-1}, выбрать произвольно значения $x_n = x_n^0$, $x_{n-1} = x_{n-1}^0$ тех членов, которые не содержат ни δx_n, ни δx_{n-1}, но содержат δx_{n-2} и т. д.

Впрочем, ясно, что если имеется одно решение проблемы, то все остальные получатся из него путем прибавления к π производной произвольной формы (степени на 2 единицы меньшей, чем степень Ω).

77. Если Ω представляет собой линейную форму, то предположение, что ее внешняя производная равна нулю, приводит, в силу предыдущей теоремы, к заключению (уже отмеченному ранее), что форма эта представляет собой полный диференциал. Если Ω' — квадратичная форма с тремя переменными

$$\Omega = P\,[\delta y\,\delta z] + Q\,[\delta z\,\delta x] + R\,[\delta x\,\delta y],$$

то условие

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы Ω была производной от некоторой линейной формы, т. е. для того, чтобы можно было найти три функции A, B, C, удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = P,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = Q,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = R.$$

Замечание. Если коэфициенты формы Ω однозначны в некоторой области, то и тогда условие $\Omega' = 0$ не всегда достаточно для того, чтобы обеспечить существование формы π, *однозначной в этой области*, для которой Ω служила бы внешней производной. Рассмотрим, например, двумерную область (замкнутую, без границ), образованную точками сферы $\sum$, и пусть Ω — форма второй степени, однозначная в этой области (с коэфициентами, допускающими непрерывные частные производные первого порядка). Производная Ω', очевидно, равна нулю. Тем не менее, если бы существовала линейная форма ω, производная от которой ω' была бы равна Ω, то, интегрируя дважды $\int \omega$ вдоль одного и того же большого круга в противоположных направлениях, мы получили бы

$$\int\int_{\Sigma} \Omega = 0,$$

причем интеграл был бы распространен на всю поверхность сферы. *Предыдущее уравнение дает добавочное условие для того, чтобы Ω могла рассматриваться как точная производная от формы ω, однозначной на всей сфере.*

ГЛАВА VIII.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ВНЕШНЕЙ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ.

Характеристическая система внешней диференциальной формы.

78. Результаты предыдущей главы позволяют нам без труда находить *характеристическую* пфаффову систему данной внешней диференциальной формы.

Для этого заметим, что если Ω инвариантна относительно системы диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{1}$$

то ее можно выразить с помощью $n-1$ независимых первых интегралов этой системы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, и их диференциалов; *то же справедливо и относительно ее производной Ω'*. Следовательно, система линейных уравнений (в полных диференциалах), ассоциированная с двумя внешними формами Ω и Ω', должна быть следствием уравнений

$$dy_1 = 0, \ \ldots, \ dy_{n-1} = 0, \tag{2}$$

и, следовательно, уравнений (1).

Иначе говоря, *для того чтобы система* (1) *имела в качестве инвариантной формы форму $\Omega(\delta)$, необходимо, чтобы система, ассоциированная с Ω и Ω', удовлетворялась при замене переменных $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ функциями $X_1, \ldots, X_n$.*

Обратно, предположим, что указанное условие выполнено. Раз система, ассоциированная с $\Omega(d)$, удовлетворяется в силу уравнений (1), то она остается справедливой и при учете эквивалентной системы (2); следовательно, $\Omega(d)$, рассматриваемая как внешняя форма относительно величин dx_i, может быть выражена только через диференциалы $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$, причем ее коэфициенты, которые являются функциями переменных x, всегда можно выразить через $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и x_n (если $X_n \neq 0$). Стало быть, будем иметь

$$\Omega = \sum A_{i_1, \ldots, i_p} [dy_{i_1} \ldots dy_{i_p}].$$

Составляя Ω', мы видим, что единственный член, содержащий $[dx_n dy_{i_1} \ldots dy_{i_p}]$, имеет коэфициентом $\dfrac{\partial A_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_n}$; но, по предположению, Ω' может быть выражена с помощью одних диференциалов dy_i; значит, имеем

$$\frac{\partial A_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_n} = 0;$$

следовательно, Ω может быть выражена с помощью одних первых интегралов данной системы и их полных диференциалов; значит, это — инвариантная форма.

Отсюда немедленно следует, что *уравнения характеристической системы формы Ω состоят из уравнений системы, ассоциированной с Ω, к которым присоединены уравнения системы, ассоциированной с Ω'.*

79. Рассмотрим несколько важных частных случаев.

Предположим, что Ω является точной производной, т. е. что $\Omega' = 0$. В том случае *характеристическая система диференциальной формы Ω совпадает с ее ассоциированной системой.*

В качестве приложения разыщем характеристическую систему *относительного* интегрального инварианта (полного) $\int \Omega$. Этот относительный инвариант сводится к абсолютному, именно к $\int \Omega'$; но Ω' — точная производная. Следовательно, *характеристическая система относительного интегрального инварианта $\int \Omega$ совпадает с системой, ассоциированной по отношению к производной форме Ω'.*

Именно это обстоятельство имеет место в случае линейного интегрального инварианта динамики

$$\int \omega_\delta = \int \sum p_i \, \delta q_i - H \, \delta t.$$

Здесь

$$\omega_\delta = \sum [\delta p_i \, \delta q_i] - [\delta H \, \delta t].$$

Система, ассоциированная с формой ω', имеет вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial (\delta q_i)} = 0; \quad \frac{\partial \omega'}{\partial (\delta p_i)} = 0; \quad \frac{\partial \omega'}{\partial (\delta t)} = 0;$$

т. е. если провести вычисления и заменить символ δ символом d:

$$-dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \, dt = 0,$$

$$dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dt = 0,$$

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t} \, dt = 0;$$

это — как раз та выкладка, которую мы проделали в главе I (п. 11).

Здесь диференциальная форма ω' — квадратичная. Значит, мы заранее знаем, что число независимых уравнений ассоциированной системы *четно*; этим объясняется, что $2n+1$ уравнений характеристической системы сводятся к $2n$ уравнений. Мы получим также объяснение фактов, имеющих место в динамике, в связи с инвариантной формой

$$\xi \, [\delta y \, \delta z] + \eta \, [\delta z \, \delta x] + \zeta \, [\delta x \, \delta y] + (\eta w - \zeta v) \, [\delta x \, \delta t] +$$
$$+ (\zeta u - \xi w) \, [\delta y \, \delta t] + (\xi v - \eta u) \, [\delta z \, \delta t].$$

Здесь $n=4$. Значит, характеристическая система содержит 4, или 2, или 0 независимых уравнений. Она не может содержать 4 независимых уравнения, потому что форма инвариантна по отношению к диференциальным уравнениям траекторий частиц; значит, число этих уравнений два, или нуль. Оно равно нулю, если $\xi=\eta=\zeta=0$, т. е. в случае невращательного движения. В противном случае можно предвидеть *a priori*, что траектории не будут единственными характеристическими кривыми формы.

80. Последним важным случаем будет тот, когда форма Ω имеет степень, равную $n-1$. Если она инвариантна для некоторой системы диференциальных уравнений, то эта система необходимо будет единственной, потому что пфаффова система, ассоциированная с Ω, состоит из $n-1$ независимых уравнений. Для того чтобы система, ассоциированная с Ω', содержала не более $n-1$ независимых уравнений, нужно, очевидно, чтобы Ω' равнялась нулю. Следовательно, *для того чтобы форма Ω степени $n-1$ могла быть инвариантной по отношению к некоторой системе диференциальных уравнений, необходимо и достаточно, чтоб ее производная форма тождественно равнялась нулю.*

Хорошую иллюстрацию дает интегральный инвариант кинематики сплошных сред,

$$\int\int\int \varrho\,(\delta x-u\,\delta t)(\delta y-v\,\delta t)(\delta z-w\,\delta t).$$

В этом случае форма Ω имеет вид

$$\Omega=\varrho\,[\delta x\,\delta y\,\delta z]-\varrho u\,[\delta y\,\delta z\,\delta t]-\varrho v\,[\delta z\,\delta x\,\delta t]-\varrho w\,[\delta x\,\delta y\,\delta t].$$

Условие $\Omega'=0$ дает здесь

$$\Omega'\equiv\left[\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right][\delta t\,\delta x\,\delta y\,\delta z]=0;$$

это — условие непрерывности, или закон сохранения материи:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0.$$

Мы видим, что *этот закон сохранения материи может быть выражен равенством нулю производной от формы, определяющей элементарное количество материи.*

81. Законы сохранения, или постоянства, той или иной физической величины часто выражаются подобными же условиями. Так, например, закон сохранения силового потока для поля сил X, Y, Z выражается с помощью равенства нулю *дивергенции* этого поля, т. е. равенством

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0;$$

но это и значит, что внешняя производная элементарного силового потока

$$\Omega=X[\delta y\,\delta z]+Y[\delta z\,\delta x]+Z[\delta x\,\delta y]$$

равна нулю.

Любое магнитное (статическое) поле удовлетворяет этому условию. Электромагнитное поле, определенное с помощью внешней формы

$$\Omega = H_x [\delta y\, \delta z] + H_y [\delta z\, \delta x] + H_z [\delta x\, \delta y] + E_x [\delta x\, \delta t] + E_y [\delta y\, \delta t] + E_z [\delta z\, \delta t],$$

тоже удовлетворяет условию $\Omega' = 0$. Имеем:

$$\Omega' = \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) [\delta x\, \delta y\, \delta z] + \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) [\delta y\, \delta z\, \delta t] +$$
$$+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) [\delta z\, \delta x\, \delta t] + \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) [\delta x\, \delta y\, \delta t].$$

Приравнивая нулю четыре коэфициента формы Ω', получим классические уравнения электродинамики, которые в векторной символике записываются так:

$$\operatorname{div} H = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0.$$

Рассматривая задачи гидродинамики, мы уже встречались с формой

$$\Omega = \xi\, [\delta y \delta z] + \eta\, [\delta z \delta x] + \zeta\, [\delta x \delta y] + (\eta w - \zeta v)\, [\delta x \delta t] +$$
$$+ (\zeta u - \xi w)\, [\delta y \delta t] + (\xi v - \eta u)\, [\delta z \delta t];$$

ее производная равна нулю, потому что сама Ω является производной от линейной формы „количество движения — энергии"; значит, векторы (ξ, η, ζ) и $(\eta w - \zeta v,\ \zeta u - \xi w,\ \xi v - \eta u)$ удовлетворяют тем же условиям, что векторы электрического и магнитного поля. Один из них, вектор вихря, играет роль магнитной силы; другой, векторное произведение вихря и скорости, играет роль электрической силы.

Нужно заметить, что электромагнитное поле (лучше сказать: связанная с ним форма Ω) не может быть инвариантным ни для какой системы диференциальных уравнений, потому что $[\Omega^2]$, вообще говоря, не равна нулю. Исключение возможно лишь в том случае, если магнитное поле перпендикулярно электрическому. Характеристическая система будет при этом определена уравнениями:

$$H_z\, dy - H_y\, dz + E_x\, dt = 0,$$
$$H_x\, dz - H_z\, dx + E_y\, dt = 0,$$
$$H_y\, dx - H_x\, dy + E_z\, dt = 0,$$
$$-E_x\, dx - E_y\, dy - E_z\, dz = 0,$$

которые сводятся к трем. При этом одна из систем диференциальных уравнений, допускающих Ω в качестве инвариантной формы, будет иметь вид

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} = \frac{dt}{0};$$

эта система определяет в каждый момент линии магнитного поля. Другая система имеет вид

$$\frac{dx}{E_yH_z - E_zH_y} = \frac{dy}{E_zH_x - E_xH_z} = \frac{dz}{E_xH_y - E_yH_x} = \frac{dt}{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}.$$

Если бы магнитное поле равнялось нулю, то характеристические многообразия определялись бы из уравнений:

$$dt = 0; \quad E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz = 0;$$

это были бы эквипотенциальные поверхности, рассматриваемые в данный момент времени t.

Построение интегральных инвариантов.

82. Ясно, что внешнее произведение двух инвариантных внешних форм само будет инвариантной формой.

В силу этого, знание одной инвариантной внешней формы позволяет найти целый ряд инвариантных форм, именно Ω' и все формы, которые получаются путем внешнего умножения из форм Ω и Ω'.

Предположим сначала, что Ω представляет собой *абсолютную* инвариантную форму *четной* степени. Тогда получим два ряда абсолютных инвариантных форм:

$$[\Omega^p] \quad \text{и} \quad [\Omega^{p-1}\Omega'] \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

производная от формы первого ряда представляет собой форму второго ряда, производная от любой формы второго ряда равняется нулю.

Далее, предположим, что Ω — *абсолютная* инвариантная форма *нечетной* степени. Получим два ряда:

$$[\Omega'^p] \quad \text{и} \quad [\Omega\Omega'^{p-1}] \qquad (p = 1, 2, \ldots):$$

производная от формы второго ряда дает форму первого ряда, производная любой формы первого ряда равна нулю.

Предположим теперь, что имеется *относительный* интегральный инвариант $\int \Omega$ и допустим, что степень Ω — четная; отсюда можно вывести только один новый инвариант — абсолютный инвариант $\int \Omega'$.

Если, напротив, степень Ω нечетная, то получится ряд относительных интегральных инвариантов $\int \Omega\Omega'^{p-1}$ и ряд абсолютных интегральных инвариантов $\int \Omega'^p$. Впрочем, относительный инвариант $\int \Omega\Omega'^{p-1}$ сводится путем диференцирования (внешнего) к абсолютному инварианту $\int \Omega'^p$.

Так обстоит дело, например, с относительным инвариантом динамики

$$\int \omega = \int \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i - H\,\delta t;$$

относительные интегральные инварианты, которые отсюда выводятся, имеют вид

$$\int \omega \omega'^{p-1} \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

а абсолютные:

$$\int \omega'^{p} \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Существует, стало быть, инвариант (абсолютный, или относительный) любой данной степени, меньшей или равной $2n$.

83. Не следует думать, что новые интегральные инварианты, существование которых мы сейчас отметили, являются единственными, которые могут быть выведены (без интегрирования), исходя из данного инварианта. Предположим, например, что известна инвариантная форма Ω, приводимая к виду:

$$\Omega = [\omega_1\omega_2\omega_3] + [\omega_4\omega_5\omega_6],$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ — шесть независимых линейных (пфаффовых) форм. Введем шесть вспомогательных переменных $\xi_1, \ldots, \xi_6$ и построим квадратичную форму

$$\pi = \xi_1 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_1} + \xi_2 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_2} + \ldots + \xi_6 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_6}.$$

Ясно, что если считать ξ переменными, ковариантными переменным ω, то π будет ковариантна Ω. Запишем, что эта форма имеет ранг 2; получим условия:

$$\xi_i\xi_\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 4, 5, 6);$$

имеется два возможных решения: либо

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

либо

$$\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0.$$

Отсюда следует существование двух систем, каждая из трех ковариантных пфаффовых уравнений, именно:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0;$$
$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0.$$

Значит, формы $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ и $[\omega_4\omega_5\omega_6]$ — тоже ковариантны. Первая получается, если связать переменные, от которых зависит форма Ω, уравнениями второй ковариантной системы. Вторая — если их связать уравнениями первой ковариантной системы.

Предположим теперь, что Ω выражена с помощью первых интегралов системы уравнений, для которых она инвариантна, и их диференциалов. Построение двух ковариантных систем осуществляется здесь так же легко, как и в предыдущем случае приведенной формы; и каждая из этих систем будет содержать только первые интегралы и их диференциалы; то же можно сказать о формах $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ и $[\omega_4\omega_5\omega_6]$; *значит, эти формы тоже инвариантны.*

Таким образом, *существование интегрального инварианта* $\int \Omega$ *влечет за собою существование каждого из интегральных инвариантов* $\int \omega_1\omega_2\omega_3$ и $\int \omega_4\omega_5\omega_6$.

С помощью аналогичного рассуждения убедимся, что *существование инвариантной формы степени* $p > 2$, *приводимой к сумме* h *одночленных форм, таких, что* hp *множителей, входящих в эти формы, линейно независимы,—влечет за собою инвариантность каждой из этих одночленных форм.*

При $p = 2$ теорема неверна.

84. В некоторых случаях существование инвариантной формы влечет за собой существование инвариантного *уравнения*. Рассмотрим, например, форму

$$\Omega = [\omega_1\omega_2\omega_5] + [\omega_3\omega_4\omega_5],$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_5$ — пять независимых пфаффовых форм. Единственным линейным соотношением между этими формами, в силу которого Ω обращается в нуль, будет, очевидно,

$$\omega_5 = 0.$$

Значит, это уравнение *инвариантно*: левая часть его может быть выражена с помощью первых интегралов диференциальных уравнений, допускающих Ω в качестве инвариантной формы.

В общем случае, *если* Ω — *инвариантная форма и если ассоциированная с* Ω *система не совпадает с ее характеристической системой, то эта ассоциированная система будет инвариантна.*

Эти рассуждения можно видоизменять различным образом.

85. Рассмотрим еще случай двух инвариантных квадратичных форм Ω_1 и Ω_2, имеющих одну и ту же ассоциированную систему; пусть ранг каждой из них равен $2s$. Уравнение степени s относительно λ

$$[(\Omega_1 - \lambda\Omega_2)^s] = 0,$$

указывающее, что ранг формы $\Omega_1 - \lambda\Omega_2$ меньше $2s$, имеет, очевидно, инвариантный смысл. *Значения* λ, *удовлетворяющие этому уравнению, являются, следовательно, первыми интегралами системы диференциальных уравнений, допускающей* Ω_1 *и* Ω_2 *в качестве инвариантных форм.* Можно доказать, что *в общем случае* Ω_1 и Ω_2 могут быть приведены к виду

$$\Omega_1 = \lambda_1[\omega_1\omega_2] + \lambda_2[\omega_3\omega_4] + \ldots + \lambda_s[\omega_{2s-1}\omega_{2s}],$$
$$\Omega_2 = [\omega_1\omega_2] + [\omega_3\omega_4] + \ldots + [\omega_{2s-1}\omega_{2s}].$$

Каждая из одночленных форм: $[\omega_1\omega_2], [\omega_3\omega_4], \ldots, [\omega_{2s-1}\omega_{2s}]$ *инвариантна.*

Глава IX.

СИСТЕМЫ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

Понятие бесконечно малого преобразования.

86. *Преобразование* с n переменными определяется системой уравнений

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

разрешимых относительно $x_1, \ldots, x_n$. Геометрически, если рассматривать $x_1, \ldots, x_n$ как координаты точки M в n-мерном пространстве, то преобразование (1) будет переводить каждую точку M пространства в некоторую иную точку M'. В геометрии постоянно приходится иметь дело с различными преобразованиями (гомотетия, подобие, инверсия, или, еще проще, вращение, перенос и т. д.).

Преобразование (1) называется *тождественным*, если правые части равны, соответственно, $x_1, \ldots, x_n$. Каждая точка преобразуется тогда сама в себя.

Если дана система диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{2}$$

то говорят, что она *допускает преобразование* (1), если это преобразование переводит все точки *любой* интегральной кривой системы (2) в точки, расположенные снова на некоторой интегральной кривой.

Рассмотрим преобразование, зависящее от одного параметра a и обращающееся в тождественное преобразование при некотором значении параметра $a = a_0$. Положим $a - a_0 = \varepsilon$ и представим себе, что правые части (1) расположены по степеням ε:

$$x_i' = x_i + \varepsilon\xi_i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$$

Мы придем к тому, чтó называют *бесконечно малым преобразованием*, если ограничимся рассмотрением только членов первого порядка относительно ε. Значит, бесконечно малое преобразование вполне определяется n функциями ξ_i от $x_1, \ldots, x_n$; мы получим то же самое бесконечно малое преобразование, если помножим все эти функции на один и тот же постоянный множитель. Будем говорить, что функция ξ_i представляет собою приращение переменной x_i под действием бесконечно малого преобразования (на самом деле приращение равно $\varepsilon\xi_i$, но коэфициент ε не играет существенной роли).

Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$; приращение, которое она получает под действием бесконечно малого преобразования, равно первому члену разложения

$$f(x_1', \ldots, x_n') - f(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f(x_1 + \varepsilon\xi_1, \ldots, x_n\varepsilon\xi_n) - f(x_1, \ldots, x_n);$$

значит, оно равно, с точностью до множителя ε,

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

будем обозначать это выражение символом Af:

$$Af = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{3}$$

Условимся говорить, что Af *есть символ рассматриваемого бесконечно малого преобразования.*

87. Формула (3) аналогична формуле, дающей выражение полного диференциала функции f:

$$\delta f = \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Вся разница в том, что δ представляет собой символ *неопределенной* операции, тогда как A обозначает операцию вполне *определенную.* Символ диференцирования становится символом бесконечно малого преобразования, как только $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ получают определенные значения (становятся данными функциями переменных).

Операцию, обозначенную символом A, можно применять не только к конечным функциям, но и к диференциальным формам. Будем понимать под $A(dx_i)$ главную часть приращения dx_i (деленную на ε). Имеем

$$dx_i' - dx_i = \varepsilon\, d\xi_i + \ldots;$$

следовательно, нужно положить

$$A(dx_i) = d\xi_i = d(Ax_i).$$

Мы видим, что *операцию A следует считать переместительной с операцией диференцирования.*

88. Вернемся к системе диференциальных уравнений (2). Скажем, что эта система допускает бесконечно малое преобразование (3), если, применяя это преобразование к различным точкам любой интегральной кривой, мы получим точки, расположенные, с *точностью до бесконечно малых второго порядка,* снова на некоторой интегральной кривой

Ясно, что если уравнения (2) допускают преобразование, зависящее от параметра a, при любом значении параметра, то они будут допускать бесконечно малое преобразование и при значениях a, бесконечно близких к значению a_0 (если таковое существует) — значению, которому соответствует тождественное преобразование.

Если y — первый интеграл системы (2), и если эта система допускает бесконечно малое преобразование Af, то ясно, что и $A(y)$ будет первым интегралом. Действительно, в каждой точке M некоторой интегральной кривой (C) y имеет одно и то же числовое значение c, в точке M', в которую переходит точка M, функция y возрастает на $\varepsilon A(y)$; это приращение должно быть одним и тем же, какова бы ни была точка M кривой (C); следовательно, $A(y)$ должно иметь одно и то же числовое значение во всех точках кривой (C); а это и значит, что $A(y)$ представляет собой первый интеграл.

Обратно, если под действием операции A любой первый интеграл переходит снова в первый интеграл, то система (2) допускает бесконечно малое преобразование Af. Действительно, если

$$c_1, \ldots, c_{n-1}$$

суть постоянные значения, которые принимают $n-1$ независимых первых интегралов

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$$

в точках M интегральной кривой (C), то значения этих интегралов в преобразованных точках M' будут равны значениям функций

$$y_1 + \varepsilon A(y_1), \quad y_2 + \varepsilon A(y_2), \quad \ldots, \quad y_{n-1} + \varepsilon A(y_{n-1})$$

в исходных точках M, т. е. будут *постоянными* — в силу того, что мы опять получаем, согласно предположению, первые интегралы. Следовательно, точки M' расположатся на интегральной кривой.

Построение интегральных инвариантов в связи с бесконечно малыми преобразованиями.

89. Предыдущее свойство показывает нам, что *если известно бесконечно малое преобразование, допускаемое системой* (2), *то из каждой инвариантной диференциальной формы Ω можно получить новую инвариантную форму, именно $A(\Omega)$*. Если Ω — внешняя форма, то и $A(\Omega)$ будет внешней формой, притом той же степени, что Ω.

Существует другая операция, позволяющая из данной инвариантной внешней формы Ω получить новую инвариантную форму. Положим, для определенности, что форма Ω — третьей степени, и рассмотрим соответствующую трилинейную диференциальную форму $\Omega(\delta, \delta', \delta'')$. Заменим в этой форме неопределенный символ диференцирования δ символом бесконечно малого преобразования; мы получим билинейную кососимметрическую форму $\Omega(A, \delta', \delta'')$ с двумя рядами диференциалов δ', δ'', которой, в свою очередь, соответствует внешняя квадратичная форма. Эту последнюю мы обозначим $\Omega(A, \delta)$. Эта новая форма получается из первоначальной с помощью операции, смысл которой не зависит от выбора независимых переменных. Если Ω выражена с помощью первых интегралов y_i уравнений (2) и их диференциалов, то и выражение $\Omega(A, \delta)$ выразится через y_i и dy_i. Следовательно, *определенная сейчас операция позволяет из любой инвариантной формы вывести новую инвариантную форму, степень которой на единицу меньше.*

В силу определения мы имеем следующее выражение для этой новой формы:

$$\Omega(A, \delta) = \xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial (\delta x_1)} + \xi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial (\delta x_2)} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega}{\partial (\delta x_n)}. \tag{4}$$

90. Обе введенные сейчас операции не являются независимыми друг от друга. Допустим, для определенности, что Ω — форма второй степени, и рассмотрим формулу, определяющую внешнюю производную Ω'. Имеем (п. 71):

$$\Omega'(\delta, \delta', \delta'') = \delta\Omega(\delta', \delta'') - \delta'\Omega(\delta, \delta'') + \delta''\Omega(\delta, \delta'),$$

при единственном условии, что три символа δ, δ', δ'' переместительны. Заменим символ δ символом бесконечно малого преобразования Af. Получим

$$\Omega'(A, \delta', \delta'') = A(\Omega(\delta', \delta'')) - \delta'\Omega(A, \delta'') + \delta''\Omega(A, \delta'),$$

т. е., переходя к внешним формам,

$$\Omega'(A, \delta) = A(\Omega(\delta)) - [\Omega(A, \delta)]',$$

или, наконец,

$$A(\Omega(\delta)) = \Omega'(A, \delta) + [\Omega(A, \delta)]'. \tag{5}$$

Эта фундаментальная формула содержит в левой части результат первой операции, выполненной над формой Ω. Что касается двух членов правой части, то первый из них получается в результате действия на Ω сначала операции внешнего диференцирования, затем второй операции, связанной с Af; а второй член $[\Omega(A, \delta)]'$ получается из Ω в результате применения тех же операций, но в обратном порядке.

Окончательно, *известное бесконечно малое преобразование Af, допускаемое уравнениями* (2), *дает существенно новую операцию, определенную формулой* (4) *и позволяющую из одной инвариантной формы $\Omega(\delta)$ получить другую форму $\Omega(A, \delta)$, тоже инвариантную.*

Заметим, в частности, что если y — один из первых интегралов, то первый интеграл $A(y)$ может быть получен в результате применения к y сперва диференцирования, что дает $\omega(\delta) = \delta y$, а затем операции (4), которая дает

$$\omega(A) = A(y).$$

Примеры.

91. Рассмотрим движущуюся непрерывную материальную среду, плотность которой выражается функцией ϱ, а компоненты скорости суть u, v, w. Диференциальные уравнения движения частицы

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w, \tag{6}$$

допускают, как мы видели (п. 37), интегральный инвариант

$$\int\int\int \varrho(\delta x\,\delta y\,\delta z - u\,\delta y\,\delta z\,\delta t - v\,\delta z\,\delta x\,\delta t - w\,\delta x\,\delta y\,\delta t),$$

который соответствует инвариантной форме

$$\Omega = \varrho\,[\delta x\,\delta y\,\delta z] - \varrho u\,[\delta y\,\delta z\,\delta t] - \varrho v\,[\delta z\,\delta x\,\delta t] - \varrho w[\delta x\,\delta y\,\delta t].$$

Допустим, что движение *стационарно*, т. е. что ϱ, u, v, w не зависят от t. Уравнения (6), как не содержащие явно времени, т. е. не меняющиеся при замене t на $t+\varepsilon$, допускают бесконечно малое преобразование

$$Af = \frac{df}{dt}.$$

Следовательно, они допускают инвариантную форму

$$\Omega(A,\ \delta) = \frac{\partial\Omega}{\partial(\delta t)} = -\varrho u\,[\delta y\,\delta z] - \varrho v\,[\delta z\,\delta x] - \varrho w\,[\delta x\,\delta y].$$

Свойство этой формы быть инвариантной ясно физически. Рассмотрим, в самом деле, *трубку* траекторий и пересечем эту трубку какими-либо двумя поверхностями, из которых трубка вырезает площади S и S'. Количество материи, находящейся внутри объема, ограниченного поверхностью трубки и поверхностями S, S', неизменно; следовательно, поток материи сквозь поверхность, ограничивающую этот объем, равен нулю. Но поток сквозь боковую поверхность трубки, очевидно, равен нулю. Значит,

$$\iint_S \varrho\,(u\,\delta y\,\delta z + v\,\delta z\,\delta x + w\,\delta x\,\delta y) =$$

$$= \iint_{S'} \varrho\,(u\,\delta y\,\delta z + v\,\delta z\,\delta x + w\,\delta x\,\delta y).$$

Заметим, что инвариантная форма $\Omega(A,\ \delta)$ является точной производной; действительно, ее производная, если бы она была отлична от нуля, могла бы отличаться от Ω только конечным множителем *). Но эта производная не может содержать δt. Значит,

$$[\Omega(A,\ \delta)]' = 0.$$

Характеристическая система формы $\Omega(A,\ \delta)$ сводится, таким образом, к ее ассоциированной системе. Она дается уравнениями

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w};$$

она определяет траектории частиц, но не указывает, как эти траектории пробегаются частицами в зависимости от времени.

Формула (5) также выражает то свойство, что форма $\Omega(A,\ \delta)$ имеет внешнюю производную, равную нулю; действительно, в рассматриваемом случае форма Ω' тождественно равна нулю **). С другой стороны, раз Ω не содержит явно t, значит, она не меняется при замене t на $t+\varepsilon$ и, следовательно, $A(\Omega)$ равна нулю. Это замечание пригодится при изучении последующих примеров.

---

*) Т. к. производная от $\Omega(A,\ \delta)$ будет, так же как и Ω, формой 3-й степени, т. е. степени $n-1$ (см. п. 80). *Прим. ред.*

**) См. п. 80. *Прим. ред.*

92. Рассмотрим теперь идеальную жидкость, находящуюся в движении под действием сил, имеющих потенциал. Мы видели (п. 22), что существует абсолютная инвариантная форма

$$\omega' = \xi\,[\delta y\,\delta z] + \eta\,[\delta z\,\delta x] + \zeta\,[\delta x\,\delta y] + (\eta w - \zeta v)\,[\delta x\,\delta t] + \\ + (\zeta u - \xi w)\,[\delta y\,\delta t] + (\xi v - \eta u)\,[\delta z\,\delta t];$$

она является результатом внешнего диференцирования линейной формы

$$\omega = u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t,$$

где коэфициент E, энергия единицы массы, выражается так:

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + \int \frac{dp}{\varrho}.$$

Предположим, что движение стационарно, т. е. что u, v, w, p, ϱ не зависят от времени. Здесь мы тоже получим новую инвариантную форму:

$$\omega'(A, \delta) = \frac{\partial\omega'}{\partial(\delta t)} = (v\zeta - w\eta)\,\delta x + (w\xi - u\zeta)\,\delta y + (u\eta - v\xi)\,\delta z = \\ = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, исходя из выражения

$$\omega' = [\delta u\,\delta x] + [\delta v\,\delta y] + [\delta w\,\delta z] - [\delta E\,\delta t],$$

получим

$$\omega'(A, \delta) = \delta E.$$

Значит, E является первым интегралом уравнений движения; мы получаем *теорему Бернулли*, которая гласит, что в случае стационарного движения идеальной жидкости величина

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - U + \int \frac{dp}{\varrho}$$

остается постоянной вдоль линий тока.

Но форма δE инвариантна не только по отношению к диференциальным уравнениям движения частиц жидкости. Она инвариантна также и по отношению к диференциальным уравнениям вихревых линий, которые тоже допускают инвариантную форму ω'; следовательно, *величина E инвариантна не только вдоль каждой из линий тока, но она инвариантна также и вдоль каждой из вихревых линий.*

В случае безвихревого движения форма $\omega'(A, \delta)$ равна нулю, что становится очевидным, если рассмотреть ее первое выражение; в этом случае энергия единицы массы постоянна во всей жидкой массе и в любой момент времени.

Равенство

$$\delta E = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

позволяет представить приращение (пространственное) энергии в каждой точке M вектором MH, имеющим начало в этой точке и равным векторному произведению вектора скорости (u, v, w) и вектора вихря (ξ, η, ζ); производная от энергии в любом данном направлении будет равна проекции вектора MH на это направление.

93. Другое весьма важное приложение относится к динамике, именно к случаю, когда данные связи и силы не зависят от времени. Бесконечно малое преобразование $Af = \frac{\partial f}{\partial t}$, которое допускают в этом случае уравнения движения, позволяет вывести из основного интегрального инварианта динамики

$$\int\int \omega' = \int\int \sum \delta p_i \, \delta q_i - \delta H \, \delta t$$

новый интегральный инвариант

$$\int \delta H,$$

который получается путем частного диференцирования по отношению к δt. Так получается *интеграл обобщенной энергии*

$$H = h,$$

при единственном условии: функция H не должна зависеть от времени.

Рассмотрим более общее предположение; пусть функция H не содержит одной из переменных p_i, q_i, например, q_n. В этом случае уравнения движения допускают бесконечно малое преобразование $\frac{\partial f}{\partial q_n}$, откуда можно вывести следующую линейную инвариантную форму:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial (\delta q_n)} = -\delta p_n;$$

следовательно, *если функция H не содержит одной из канонических переменных, то сопряженная ей каноническая переменная является первым интегралом уравнений движения.*

Приложения к проблеме n тел.

94. Рассмотрим n материальных точек, взаимно притягивающих друг друга с силами, пропорциональными их массам и обратно пропорциональными данной степени расстояния. При этом существует силовая функция

$$U = f \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^p},$$

где p — данное число (в небесной механике равное единице), а r_{ij} — расстояние между точками M_i и M_j с массами m_i и m_j.

Уравнения движения системы допускают известное число очевидных бесконечно малых преобразований. Прежде всего, время не входит явно в эти уравнения. Кроме того, из любого решения проблемы можно получить другое решение, перемещая всю систему в пространстве, а также сообщая каждой из n точек дополнительное прямолинейное равномерное движение (одинаковое для всех точек). Отсюда немедленно следует существование следующих бесконечно малых преобразований:

$$A_0f = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad A_1f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad A_2f = \sum \frac{\partial f}{\partial y_i}; \quad A_3f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i};$$

$$A_4f = \sum y_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + y_i' \frac{\partial f}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'}; \quad A_5f = \ldots, \quad A_6f = \ldots,$$

$$A_7f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i'} + t\frac{\partial f}{\partial x_i}\right); \quad A_8f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} + t\frac{\partial f}{\partial y_i}\right);$$

$$A_9f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z_i'} + t\frac{\partial f}{\partial z_i}\right).$$

Преобразование A_1f соответствует параллельному переносу вдоль оси Ox, преобразование A_4f — повороту около Ox, преобразование A_7f — добавочному движению с постоянной скоростью ε параллельно оси Ox.

Можно, наконец, указать еще одно бесконечно малое преобразование, основанное на однородности изучаемых уравнений. Действительно, уравнения

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

не изменяются, если все переменные x_i, y_i, z_i умножить на один и тот же постоянный множитель λ, при условии, что t умножается на $\lambda^{1+\frac{p}{2}}$; компоненты скорости x_i', y_i', z_i' умножаются при этом на $\lambda^{-\frac{p}{2}}$. Взяв $\lambda = 1+\varepsilon$, получаем новое бесконечно малое преобразование

$$A_{10}f = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - $$
$$- \frac{p}{2}\left(x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'} + y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'} + z_i' \frac{\partial f}{\partial z_i'}\right) + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Заметим, что, в силу самого определения U, имеем

$$A_0U = A_1U = \ldots = A_9U = 0; \quad A_{10}U = -pU.$$

95. Вспомним основной интегральный инвариант второй степени:

$$\omega' = \sum m_i [\delta x_i' \, \delta x_i] + m_i [\delta y_i' \, \delta y_i] + m_i [\delta z_i' \, \delta z_i] -$$
$$- \left[\sum m_i (x_i' \, \delta x_i' + y_i' \, \delta y_i' + z_i' \, \delta z_i') \, \delta t \right] + [\delta U \, \delta t].$$

Обозначим через ω_i линейную форму $\omega'(A_i, \delta)$. Существует одиннадцать инвариантных линейных форм $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{10}$. Нетрудно видеть *a priori*, в силу формулы (5), что первые десять из них являются полными диференциалами, потому что ω' не меняется при любом из десяти первых бесконечно малых преобразований. Что касается ω_{10}, то формула (5) дает

$$(\omega_{10})' = A_{10}(\omega');$$

но ω' имеет степень однородности (в смысле, установленном выше) равную $1 - \frac{p}{2}$; значит, имеем

$$(\omega_{10})' = \left(1 - \frac{p}{2}\right) \omega',$$

и ω_{10} будет полным диференциалом лишь при $p = 2$, т. е. в случае *притяжения, обратно пропорционального кубу расстояния.*

Вычисление одиннадцати форм ω_i не представляет никаких трудностей и дает:

$$\omega_0 = \sum m_i (x_i' \, \delta x_i' + y_i' \, \delta y_i' + z_i' \, \delta z_i') - \delta U = \delta H;$$
$$\omega_1 = - \sum m_i \, \delta x_i' = \delta H_1;$$
$$\omega_2 = - \sum m_i \, \delta y_i' = \delta H_2;$$
$$\omega_3 = - \sum m_i \, \delta z_i' = \delta H_3;$$
$$\omega_4 = \sum m_i (z_i \, \delta y_i' - y_i \, \delta z_i' + y_i' \, \delta z_i - z_i' \, \delta y_i) = \delta H_4;$$
$$\omega_5 = \sum m_i (x_i \, \delta z_i' - z_i \, \delta x_i' + z_i' \, \delta x_i - x_i' \, \delta z_i) = \delta H_5;$$
$$\omega_6 = \sum m_i (y_i \, \delta x_i' - x_i \, \delta y_i' + x_i' \, \delta y_i - y_i' \, \delta x_i) = \delta H_6;$$
$$\omega_7 = \sum m_i (\delta x_i - t \, \delta x_i' - x_i' \, \delta t) = \delta H_7;$$
$$\omega_8 = \sum m_i (\delta y_i - t \, \delta y_i' - y_i' \, \delta t) = \delta H_8;$$
$$\omega_9 = \sum m_i (\delta z_i - t \, \delta z_i' - z_i' \, \delta t) = \delta H_9;$$
$$\omega_{10} = - \sum m_i \left(x_i \, \delta x_i' + y_i \, \delta y_i' + z_i \, \delta z_i' + \frac{p}{2} x_i' \, \delta x_i + \right.$$
$$\left. + \frac{p}{2} y_i' \, \delta y_i + \frac{p}{2} z_i' \, \delta z_i \right) + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \, \delta H + pH \, \delta t;$$

здесь введены обозначения:

$$H = \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U;$$

$$H_1 = -\sum m_i x_i';$$

$$H_2 = -\sum m_i y_i';$$

$$H_3 = -\sum m_i z_i';$$

$$H_4 = -\sum m_i(y_i z_i' - z_i y_i');$$

$$H_5 = -\sum m_i(z_i x_i' - x_i z_i');$$

$$H_6 = -\sum m_i(x_i y_i' - y_i x_i');$$

$$H_7 = \sum m_i(x_i - t x_i');$$

$$H_8 = \sum m_i(y_i - t y_i');$$

$$H_9 = \sum m_i(z_i - t z_i').$$

Нетрудно проверить, что билинейный ковариант формы ω_{10} равняется $\left(1 - \frac{p}{2}\right)\omega'$. Если $p = 2$, то получаем еще один первый интеграл:

$$\sum m_i(x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') - 2Ht = C,$$

откуда, интегрируя еще раз, находим:

$$\sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2Ht^2 + 2Ct + C';$$

это — *интеграл Якоби.*

Первые интегралы H_1, H_2, H_3, H_7, H_8, H_9 выражают теорему о центре тяжести; первые интегралы H_4, H_5, H_6 дают закон площадей.

96. В предыдущем параграфе мы получили *непосредственно* лишь *диференциалы* первых интегралов H_i, а не сами эти интегралы. Сами интегралы можно получить, если к каждой из инвариантных форм ω_i применить операцию, соответствующую бесконечно малому преобразованию $A_j f$. Таким путем мы получим инвариантные *функции*, т. е. первые интегралы

$$a_{ij} = \omega_i(A_j) = \omega'(A_i, A_j) = -a_{ji},$$

которые запишем в виде таблицы (см. табл. 1); очевидно, эта таблица будет кососимметрична. Вычисления не представят никаких трудностей: величина a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца. Буквою M обозначена сумма масс всех n тел.

Таблица 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-pH$
1	0	0	0	0	0	H	$-H_2$	$-M$	0	0	$-\frac{p}{2}H_1$
2	0	0	0	0	$-H_3$	0	H_1	0	$-M$	0	$-\frac{p}{2}H_2$
3	0	0	0	0	H_2	$-H_1$	0	0	0	$-M$	$-\frac{p}{2}H_3$
4	0	0	H_3	$-H_2$	0	H_6	$-H_5$	0	H_9	$-H_8$	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_4$
5	0	$-H_3$	0	H_1	$-H_6$	0	H_4	$-H_9$	0	H_7	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_5$
6	0	H_2	$-H_1$	0	H_5	$-H_4$	0	H_8	$-H_7$	0	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_6$
7	0	M	0	0	0	H_9	$-H_8$	0	0	0	H_7
8	0	0	M	0	$-H_9$	0	H_7	0	0	0	H_8
9	0	0	0	M	H_8	$-H_7$	0	0	0	0	H_9
10	pH	$\frac{p}{2}H_1$	$\frac{p}{2}H_2$	$\frac{p}{2}H_3$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_4$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_5$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_6$	$-H_7$	$-H_8$	$-H_9$	0

Заметим, что определитель, составленный из элементов этой таблицы, равен нулю, потому что он кососимметричен и нечетного порядка. Следовательно, существуют такие 11 коэфициентов, не все равные нулю, что выражение $\sum \lambda_i \omega_i$ обращается в нуль, если к нему применить операцию, соответствующую любому из преобразований $A_i f$. Легко видеть, что λ_{10} равно нулю. Вычисление дает для $\sum \lambda_i \omega_i$ выражение, которое определяется лишь с точностью до числового множителя, именно

$$\frac{\delta K}{K} + \frac{2-p}{p}\,\frac{\delta H}{H},$$

где

$$K = (MH_4 + H_2H_9 - H_3H_8)^2 + (MH_5 + H_3H_7 - H_1H_9)^2 + \\ + (MH_6 + H_1H_8 - H_2H_7)^2.$$

В небесной механике $p = 1$; выражение $\frac{\delta K}{K} + \frac{\delta H}{H}$ представляет собою логарифмический диференциал произведения HK. Значит, эта величина HK инвариантна при всех преобразованиях $A_i f$. Благодаря этому легко получить ее физическую интерпретацию, выбрав надлежащим образом координатные оси. Взяв в качестве начала координат центр тяжести, — что́ сделать можно, потому что он движется прямолинейно и равномерно, — мы увидим, что функции H_1, H_2, H_3, H_7, H_8, H_9 обратятся в нуль. Инвариантное выражение будет тогда, с точностью до числового множителя, равняться $H(H_4^2 + H_5^2 + H_6^2)$, *т. е. произведению квадрата кинетического момента системы при ее движении от-*

носительно ее центра тяжести на полную энергию системы при этом движении. Эта величина, очевидно, не зависит ни от выбора координатных осей, ни от выбора единиц измерения.

Приложение к кинематике твердого тела.

97. Рассмотрим движение твердого тела, отнесенного к трем неподвижным взаимно ортогональным осям. Известно, что в каждый момент оно определяется системой векторов, а именно, результирующим вектором мгновенной угловой скорости (p, q, r) и вектором поступательного движения — моментом относительно начала (ξ, η, ζ). Предположим, что эти шесть величин являются данными функциями времени. Диференциальные уравнения движения любой точки твердого тела имеют при этом вид:

$$\frac{dx}{dt} = \xi + qz - ry = X,$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta + rx - pz = Y,$$

$$\frac{dz}{dt} = \zeta + py - qx = Z.$$

Эти уравнения допускают очевидный интегральный инвариант. Действительно, если взять в момент времени t две бесконечно близкие точки

$$(x,\ y,\ z) \quad \text{и} \quad (x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$$

твердого тела, то расстояние между ними не будет меняться с течением времени. Значит, имеется диференциальная форма

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2,$$

инвариантная, если рассматривать только одновременные точки; она станет абсолютным инвариантом, если ее дополнить, заменив

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

соответственно через

$$\delta x - X\,\delta t, \quad \delta y - Y\delta t, \quad \delta z - Z\,\delta t.$$

Пусть будет

$$F = (\delta x - X\,\delta t)^2 + (\delta y - Y\delta t)^2 + (\delta z - Z\,\delta t)^2$$

эта инвариантная форма; ей соответствует билинейная инвариантная форма

$$F(\delta, \delta') = (\delta x - X\,\delta t)(\delta' x - X\,\delta' t) + (\delta y - Y\delta t)(\delta' y - Y\delta' t) +$$
$$+ (\delta z - Z\,\delta t)(\delta' z - Z\,\delta' t).$$

Это билинейная форма *симметрическая,* а не кососимметрическая; тем не менее рассуждения п. 89 сохраняют силу.

Допустим, что ξ, η, ζ, p, q, r — *постоянны*; в этом случае диференциальные уравнения движения допускают бесконечно малое преобразование

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t};$$

следовательно, из формы F можно получить новую инвариантную форму

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial(\delta t)} = -X(\delta x - X\delta t) - Y(\delta y - Y\delta t) - Z(\delta z - Z\delta t).$$

Тот же процесс может быть повторен и дает на этот раз первый интеграл

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial(\delta t)^2} = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Этот первый интеграл очевиден с геометрической точки зрения. Движение твердого тела при наших условиях происходит по винтовой линии, а предыдущий интеграл равен квадрату скорости рассматриваемой точки, скорости, которая сохраняет при нашем движении постоянное значение.

Диференциальные уравнения, допускающие бесконечно малое преобразование.

98. В предыдущих примерах мы предполагали, что известен интегральный инвариант. Предположим теперь, что известно только инвариантное *уравнение*, например:

$$\omega(\delta) \equiv a_1\,\delta x_1 + a_2\,\delta x_2 + \ldots + a_n\,\delta x_n = 0.$$

Назвать уравнение инвариантным, это значит утверждать, что оно может быть записано с помощью первых интегралов данной системы диференциальных уравнений и их диференциалов. Иными словами,

$$\omega(\delta) \equiv \varrho\,[b_1(y)\,\delta y_1 + b_2(y)\,\delta y_2 + \ldots + b_{n-1}(y)\,\delta y_{n-1}],$$

причем b_i зависят только от $y_1, \ldots, y_{n-1}$, а ϱ — произвольная функция. Заменим неопределенный символ диференцирования δ символом бесконечно малого преобразования Af. Непосредственно получим:

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)} = \frac{b_1(y)\,\delta y_1 + b_2(y)\,\delta y_2 + \ldots + b_{n-1}(y)\,\delta y_{n-1}}{b_1(y)\,Ay_1 + b_2(y)\,Ay_2 + \ldots + b_{n-1}(y)\,Ay_{n-1}},$$

и выражение в правой части представляет собою, очевидно, *инвариантную линейную форму*.

Если известны: бесконечно малое преобразование Af, допускаемое данной системой диференциальных уравнений, и пфаффово уравнение $\omega(\delta) = 0$, инвариантное для этой системы, то непосредственно получается линейный интегральный инвариант $\int \frac{\omega(\delta)}{\omega(A)}$.

Допустим, например, что имеем дело с одним обыкновенным диференциальным уравнением

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y};$$

оно инвариантно по отношению к самому себе; следовательно, если оно допускает бесконечно малое преобразование

$$Af=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

то оно тем самым допускает линейную инвариантную форму

$$\frac{X\delta y-Y\delta x}{X\eta-Y\xi}.$$

Так как здесь имеется только один первый интеграл, то эта форма необходимо является полным диференциалом. Иными словами, мы нашли интегрирующий множитель уравнения. Это — классический результат.

Большинство диференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, могут быть связаны с предыдущим замечанием. Так обстоит дело в случае уравнений

$$\frac{dy}{dx}=f(x);\quad \frac{dy}{dx}=f(y);\quad \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Последнее из этих уравнений, например, не меняется при умножении x и y на один и тот же постоянный множитель $1+\varepsilon$; значит, оно допускает бесконечно малое преобразование

$$Af=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y};$$

следовательно, выражение

$$\frac{dy-f\left(\frac{y}{x}\right)dx}{y-f\left(\frac{y}{x}\right)x}$$

является полным диференциалом. Это становится очевидным, если положить

$$y=ux,$$

потому что при этом наше выражение принимает вид

$$\frac{du}{u-f(u)}+\frac{dx}{x}.$$

Интегрирование этого диференциала приводит к тем же выкладкам, что и классический метод интегрирования однородных уравнений.

99. Если, наконец, относительно данной системы диференциальных уравнений *a priopi* ничего не известно, то знание бесконечно малого преобразования, допускаемого этой системой, дает возможность найти ее инвариантную пфаффову систему. В самом деле, будем искать все пфаффовы уравнения $\omega = 0$, которые являются следствием данных диференциальных уравнений и для которых, кроме того, $\omega(A) = 0$. Если положим

$$\omega(\delta) = \lambda_1 \delta x_1 + \lambda_2 \delta x_2 + \ldots + \lambda_n \delta x_n,$$

то коэфициенты λ_i должны будут удовлетворять условиям

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0,$$
$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n = 0.$$

Совокупность искомых уравнений образует, таким образом, систему Пфаффа, которая получится в результате приравнивания нулю всех определителей третьего порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} \delta x_1 & \delta x_2 & \ldots & \delta x_n \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{Vmatrix}.$$

Эта система имеет значение, не зависящее от выбора переменных. Если в качестве переменных взять $n-1$ первых интегралов $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и какую-нибудь n-ю переменную, например x_n, то уравнения примут вид:

$$\frac{\delta y_1}{\eta_1} = \frac{\delta y_2}{\eta_2} = \ldots = \frac{\delta y_{n-1}}{\eta_{n-1}} \qquad (\eta_i = A y_i).$$

Значит, рассматриваемая система Пфаффа инвариантна; кроме того она, очевидно, вполне интегрируема, потому что сводится к системе обыкновенных уравнений (в переменных y_i).

Так, например, если система

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

допускает бесконечно малое преобразование

$$Af = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

то уравнение в полных диференциалах

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

будет вполне интегрируемо. Интегрируя его, получим первый интеграл данной системы. Приравнивая, наконец, этот первый интеграл постоянной, получим обыкновенное диференциальное уравнение, притом допускающее известное бесконечно малое преобразование; такое уравнение интегрируется квадратурой.

Условия, при которых данная система диференциальных уравнений допускает данное бесконечно малое преобразование.

100. Мы не указали еще аналитических условий того, что данная система диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{2}$$

допускает данное бесконечно малое преобразование

$$Af = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{3}$$

Положим

$$Xf = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Дело сводится, в сущности, к тому, чтобы показать, что если f — первый интеграл, т. е. удовлетворяет уравнению

$$Xf = 0,$$

то и Af будет первым интегралом. Иными словами, нужно выразить, что уравнение

$$X(Af) = 0$$

является следствием уравнения

$$Xf = 0.$$

Первое из написанных уравнений, *содержащее частные производные второго порядка от функции* f, можно заменить уравнением

$$X(Af) - A(Xf) = 0,$$

которое, как показывает простое вычисление, является линейным и однородным относительно $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Искомым условием является, таким образом, существование тождества вида

$$X(Af) - A(Xf) = \varrho Xf, \tag{7}$$

где ϱ — *соответственно подобранный коэфициент.*

Это условие, очевидно, выполняется в случае бесконечно малого преобразования, символом которого является Xf — преобразования, смещающего каждую точку M пространства вдоль соответствующей интегральной кривой, следовательно, оставляющего инвариантной каждую интегральную кривую. Если на интегральные кривые смотреть как на неделимые сущности, то это специальное бесконечно малое преобразование будет играть роль *тождественного* преобразования. Легко убедиться, что приложения бесконечно малых преобразований, о которых шла речь в этой главе, *не могут иметь места* в этом частном случае. То же замечание относится и к бесконечно малому преобразованию λXf, где λ — произвольно заданный множитель.

Уравнения в вариациях.

101. Понятием уравнения в вариациях мы обязаны Пуанкаре; его можно связать с понятием бесконечно малого преобразования.

Рассмотрим систему диференциальных уравнений, которую запишем так:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n; \tag{8}$$

правые части являются данными функциями от $x_1, \ldots, x_n, t$. Пусть

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(t) \tag{9}$$

какое-нибудь частное решение этой системы. Возьмем бесконечно близкое решение

$$x_1 = f_1(t) + \varepsilon\xi_1, \quad x_2 = f_2(t) + \varepsilon\xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = f_n(t) + \varepsilon\xi_n,$$

где ε обозначает бесконечно малое постоянное, а ξ — неизвестные функции от t. Пренебрегая бесконечно малыми второго и высших порядков, получим для определения этих функций уравнения

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\xi_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{10}$$

это и будут уравнения в вариациях *относительно рассматриваемого частного решения.*

Может случиться, что известно частное решение уравнения в вариациях, *независимо от частного решения данной системы, послужившего для составления этих уравнений в вариациях.* При этом величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ фактически являются определенными функциями от $x_1, \ldots, x_n, t$, удовлетворяющими уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial t} + X_1\frac{\partial\xi_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial\xi_i}{\partial x_n} = \xi_1\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n\frac{\partial X_i}{\partial x_n}. \tag{11}$$

В этом случае уравнения данной нам системы допускают, очевидно, бесконечно малое преобразование

$$Af = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n};$$

действительно, это преобразование может быть выражено уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \varepsilon\xi_1, \\ &\ldots\ldots \\ x_n' &= x_n + \varepsilon\xi_n, \\ t' &= t; \end{aligned}$$

уравнения кривой, полученной из интегральной кривой (9), будут иметь вид

$$x_i+\varepsilon\xi_i=f_i(t),$$

или

$$x_i=f_i(t)-\varepsilon\xi_i;$$

это — снова интегральная кривая, потому что функции $(-\xi_1, \ldots, -\xi_n)$ являются решением уравнения в вариациях.

Вообще *каждому решению уравнений* (11) *соответствует бесконечное множество бесконечно малых преобразований, относительно которых система* (8) *инвариантна*, именно семейство

$$Bf=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+ \\ +\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial t}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \quad (12)$$

зависящее от произвольной функции λ.

Предположим, обратно, что известно бесконечно малое преобразование, относительно которого данная система инвариантна. Это преобразование всегда можно представить в форме (12). Интегральная кривая (9) перейдет при этом преобразовании в кривую

$$x_i+\varepsilon\xi_i+\varepsilon\lambda X_i=f_i(t+\varepsilon\lambda)$$

или

$$x_i=f_i(t)-\varepsilon\xi_i+\varepsilon\lambda\,[f_i'(t)-X_i]=f_i(t)-\varepsilon\xi_i;$$

следовательно, уравнения в вариациях (11) допускают решение $|\xi_1, \ldots, \xi_n|$.

Впрочем, все эти свойства вытекают из того, что уравнения (11) представляют собою лишь соотношение (7) в развернутом виде, при условии, что в Af коэфициент при $\frac{\partial f}{\partial t}$ равен нулю.

Глава X.

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА.

Теорема Фробениуса (Frobenius).

102. Система, состоящая из h уравнений Пфаффа:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1\equiv a_{11}\,dx_1+a_{12}\,dx_2+\ldots+a_{1n}\,dx_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \omega_h\equiv a_{h1}\,dx_1+a_{h2}\,dx_2+\ldots+a_{hn}\,dx_n=0\end{array}\right\} \quad (1)$$

называется вполне интегрируемой, если ее можно привести к виду

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_h = 0. \tag{2}$$

Если это имеет место, то каждая из форм ω_i выражается линейно через $dy_1, \ldots, dy_n$, и, следовательно, ее производная ω_i' обращается в нуль в силу уравнений (2) или, что то же, (1).

Чтобы доказать обратное предложение, заметим прежде всего, что установленное нами сейчас свойство не зависит ни от выбора переменных, ни от вида h левых частей уравнений. Иными словами, если напишем уравнения системы в виде:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &\equiv a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1h}\omega_h = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\omega}_h &\equiv a_{h1}\omega_1 + a_{h2}\omega_2 + \ldots + a_{hh}\omega_h = 0,
\end{aligned}$$

то производные $\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_2', \ldots, \bar{\omega}_h'$ тоже будут обращаться в нуль в силу уравнений системы. Действительно, имеем

$$\bar{\omega}_i' = a_{i1}\omega_1' + a_{i2}\omega_2' + \ldots + a_{ih}\omega_h' + [da_{i1}\omega_1] + [da_{i2}\omega_2] + \ldots + [da_{ih}\omega_h'];$$

а каждый член правой части обращается в нуль, если учесть указанные условия.

Заметив это, предположим, что обратное предложение доказано для $n-1$ переменных, и докажем его для n переменных. Так как формы ω_i' обращаются в нуль при учете уравнений (1), то они подавно обратятся в нуль, если положить еще $dx_n = 0$. Следовательно, *если рассматривать x_n как фиксированный параметр*, то система (1), согласно предположению, сводится к виду

$$\begin{aligned}
dy_1 &= 0,\\
&\ldots\\
dy_h &= 0,
\end{aligned}$$

где $y_1, \ldots, y_h$ — система h независимых функций от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, которые могут также содержать параметр x_n.

Если теперь не считать более x_n постоянным, то система, очевидно, сведется к виду

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &\equiv dy_1 + b_1\,dx_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\omega}_h &\equiv dy_h + b_h\,dx_n = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $b_1, \ldots, b_h$ — функции от $y_1, \ldots, y_h$ и, например, от $x_{h+1}, \ldots, x_n$.

Далее,

$$\overline{\omega}_1' = [db_1 dx_n], \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_h' = [db_h dx_n];$$

т. е., учитывая уравнения (3), имеем

$$\overline{\omega}_i' = \frac{\partial b_i}{\partial x_{h+1}} [dx_{h+1} dx_n] + \ldots + \frac{\partial b_i}{\partial x_{n-1}} [dx_{n-1} dx_n].$$

Следовательно, из нашего предположения — что внешние производные обращаются в нуль в силу уравнений системы — вытекает, что коэфициенты b_i зависят только от $y_1, \ldots, y_h, x_n$. Но тогда уравнения (3) представляют собою систему обыкновенных диференциальных уравнений и могут быть приведены к виду

$$dz_1 = 0, \quad \ldots, \quad dz_h = 0,$$

где буквами $z_1, \ldots, z_h$ обозначены h независимых первых интегралов.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Для того, чтобы система Пфаффа была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы внешние производные от левых частей ее уравнений обращались все в нуль в силу самих этих уравнений.

103. Предыдущая теорема, принадлежащая Фробениусу, позволяет (п. 64) выразить условия, необходимые и достаточные для полной интегрируемости данной системы, следующими соотношениями:

$$[\omega_1, \ldots, \omega_h \omega_1'] = 0, \quad \ldots, \quad [\omega_1, \ldots, \omega_h \omega_h'] = 0.$$

Рассмотрим в качестве примера пфаффово уравнение с тремя переменными:

$$\omega \equiv P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Условие полной интегрируемости имеет вид:

$$[\omega\omega'] \equiv \left[(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\right\}\right] \equiv$$

$$\equiv \left\{P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} [dx\,dy\,dz] = 0.$$

Построение характеристической системы для системы Пфаффа.

104. Изложенным выше рассуждениям можно придать иную форму, поставив следующую задачу: найти общий прием, который позволил бы по данной системе (1) построить ее характеристическую пфаффову систему.

Чтобы система (1) была инвариантна по отношению к диференциальным уравнениям

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы уравнения (1) могли быть выражены с помощью первых интегралов системы (4) и их диференциалов. Следовательно, прежде всего необходимо, чтобы $\omega_1, \ldots, \omega_h$ обращались в нуль при учете соотношений (4); далее, нужно, чтобы формы

$$[\omega_1\omega_2 \ldots \omega_h\omega_1'], \quad \ldots, \quad [\omega_1\omega_2 \ldots \omega_h\omega_h']$$

могли быть выражены через диференциалы первых интегралов системы (4); иными словами, *необходимо, чтобы система, ассоциированная по отношению к формам*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_h, \quad [\omega_1 \ldots \omega_h\omega_1'], \quad \ldots, \quad [\omega_1 \ldots \omega_h\omega_h']$$

была следствием уравнений (4).

Обратно, если это условие выполнено и если $y_1, \ldots, y_{n-1}$ суть первые интегралы системы (4), то уравнения (1) можно привести к виду:

$$\bar{\omega}_1 \equiv dy_1 + b_{1,\,h+1}\,dy_{h+1} + \ldots + b_{1,\,n-1}\,dy_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\omega}_h \equiv dy_h + b_{h,\,h+1}\,dy_{h+1} + \ldots + b_{h,\,n-1}\,dy_{n-1} = 0;$$

так как форма $[\bar{\omega}_1 \ldots \bar{\omega}_h\bar{\omega}_i']$ не должна вводить dx_n *), то все производные $\frac{\partial b_{i,\,h+1}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial b_{i,\,n-1}}{\partial x_n}$ будут равны нулю; следовательно, уравнения (1) можно будет записать так, чтобы в них вошли исключительно первые интегралы системы (4) и их диференциалы. Значит, система (1) действительно инвариантна по отношению к уравнениям (4).

Из этого следует, что *характеристическая система уравнений* (1) *представляет собою не что иное, как систему, ассоциированную с формами*

$$\omega_1, \quad \ldots, \quad \omega_h, \quad [\omega_1 \ldots \omega_h\omega_1'], \quad \ldots, \quad [\omega_1 \ldots \omega_h\omega_h'].$$

В частности, для полной интегрируемости системы необходимо и достаточно, чтобы эта ассоциированная система совпадала с системой (1), т. е. чтобы формы

$$[\omega_1 \ldots \omega_h\omega_1'], \quad \ldots, \quad [\omega_1 \ldots \omega_h\omega_h']$$

тождественно равнялись нулю.

---

*) Предполагается, что в качестве независимых переменных выбраны $y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n$. *Прим. ред.*

105. Уравнения системы, характеристической для системы (1), можно представить и в такой форме:

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1=0, & \omega_2=0, & \ldots, & \omega_h=0, \\ \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_1)} & \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_2)} & \ldots & \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_n)} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hn} \end{array} \right\| = 0. \ ^{*)} \end{array}\right\}$$

В частности, характеристическая система единственного пфаффова уравнения

$$\omega \equiv a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_n\,dx_n = 0$$

дается уравнениями:

$$a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_n\,dx_n = 0,$$

$$\frac{a_{12}\,dx_2 + a_{13}\,dx_3 + \ldots + a_{1n}\,dx_n}{a_1} = \frac{a_{21}\,dx_1 + a_{23}\,dx_3 + \ldots + a_{2n}dx_n}{a_2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{a_{n1}dx_1 + \ldots + a_{n,\,n-1}dx_{n-1}}{a_n},$$

где положено

$$a_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

В дальнейшем мы еще вернемся к этой системе (в главе XIV).

Интеграция вполне интегрируемой системы Пфаффа.

106. Возвратимся к вполне интегрируемой системе Пфаффа, которую запишем так:

$$\left.\begin{array}{l} dz_1 = a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1q}\,dx_q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dz_h = a_{h1}\,dx_1 + \ldots + a_{hq}\,dx_q. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Интегрирование этой системы сводится к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений с h неизвестными функциями $z_1, \ldots, z_h$ от одной независимой переменной x_1.

Действительно, мы знаем, что система имеет решение, соответствующее начальным значениям (x_i^0; z_j^0) и притом единственное. Чтобы по-

---

*) Равенство матрицы нулю понимается, как равенство нулю всех ее миноров порядка h. *Прим. ред.*

лучить значения искомых функций $z_1, \ldots, z_h$, соответствующие данной системе числовых значений $x'_1, \ldots, x'_q$ независимых переменных, — переместимся по интегральному многообразию от точки (x^0_i) до точки (x'_i) и проследим за изменениями z_j; каковы бы ни были промежуточные значения независимых переменных, результат будет всегда один и тот же Положим, например,

$$x_2 - x^0_2 = m_2 (x_1 - x^0_1), \ \ldots, \ x_q - x^0_q = m_q (x_1 - x^0_1),$$

обозначая через $m_2, \ldots, m_q$ величины

$$m_i = \frac{x'_i - x^0_i}{x'_1 - x^0_1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, q).$$

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} dz_1 &= (a_{11} + a_{12} m_2 + \ldots + a_{1q} m_q)\, dx_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dz_h &= (a_{h1} + a_{h2} m_2 + \ldots + a_{hq} m_q)\, dx_1. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Остается проинтегрировать эту систему обыкновенных диференциальных уравнений и определить то решение, которое при $x_1 = x^0_1$ соответствует значениям $z^0_1, \ldots, z^0_h$ неизвестных функций. Когда это решение найдено, мы получаем $z'_1, \ldots, z'_h$, заменяя параметрические величины $m_2, \ldots, m_q$ указанными выше их значениями.

Практически верхние индексы 1 не пишут. В полученном решении обыкновенной системы заменяют m_i их значениями $\dfrac{x_i - x^0_i}{x_1 - x^0_1}$ и получают таким образом выражения для искомых функций $z_1, \ldots, z_h$.

Следует заметить, что *значение одного первого интеграла системы обыкновенных диференциальных уравнений* (6) *с* $q-1$ *параметрами* m_i *не дает еще возможности определить первый интеграл пфаффовой системы* (5).

Полные системы.

107. Возвратимся к вполне интегрируемой системе (1) и обозначим через $y_1, \ldots, y_h$ систему ее h независимых первых интегралов. Выберем произвольно $n-h$ линейных диференциальных форм

$$\omega_{h+1}, \ \ldots, \ \omega_n,$$

независимых между собой и независимых по отношению к формам $\omega_1, \ldots, \omega_h$. Любая форма, линейная относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, может быть выражена, и притом единственным образом, в виде линейной функции от $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Возьмем теперь *неопределенную* функцию f и рассмотрим ее полный диференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n;$$

его можно выразить линейно через $\omega_1, \ldots, \omega_n$, причем коэфициенты будут, очевидно, линейными и однородными функциями от $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Пусть

$$df = X_1 f \cdot \omega_1 + X_2 f \cdot \omega_2 + \ldots + X_n f \cdot \omega_n.$$

Выражения $X_i f$ (числом n) линейно независимы относительно $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

В силу сказанного, любой первый интеграл вполне интегрируемой системы (1) характеризуется тем, что его диференциал, рассматриваемый как форма, линейная относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, обращается в нуль при единственном условии, что удовлетворяются уравнения (1); иначе говоря, тем, что он (интеграл) обращает в нуль выражения

$$X_{h+1} f, \quad \ldots, \quad X_n f.$$

Система из $n-h$ независимых линейных уравнений в частных производных

$$X_{h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0 \tag{8}$$

допускает, таким образом, h независимых решений $y_1, \ldots, y_h$.

Обратно, предположим, что система (8) допускает h независимых решений (большего числа она, очевидно, не может допускать).

Тождество (7) дает нам

$$dy_i = X_1 y_i \cdot \omega_1 + X_2 y_i \cdot \omega_2 + \ldots + X_h \cdot y_i \cdot \omega_h \, (i = 1, 2, \ldots, h). \tag{9}$$

Так как y_i — независимые функции, то правые части уравнений (9) являются независимыми линейными комбинациями форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$. Значит, *система* (1) эквивалентна (2); следовательно, она *вполне интегрируема*.

Условимся говорить, что уравнения (8) образуют *полную систему*, если они допускают наибольшее возможное число h независимых решений. Мы видим, что *каждой вполне интегрируемой системе Пфаффа соответствует некоторая полная система, и обратно*. Соответствие таково, что если уравнениями пфаффовой системы являются

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_h = 0,$$

то уравнениями полной системы будут

$$X_{h+1} f = X_{h+2} f = \ldots = X_n f = 0.$$

108. Нетрудно найти условия того, чтобы данная система линейных уравнений в частных производных первого порядка была полной системой.

Будем исходить из тождества (7) и возьмем внешнюю производную от обеих его частей. Без труда найдем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k f \cdot \omega_k' + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} X_i (X_j f) \, [\omega_i \omega_j] = 0. \tag{10}$$

n ковариантов ω_k' можно представить как внешние квадратичные формы от $\omega_1, \ldots, \omega_n$; пусть

$$\omega_k' = \sum_{(ij)}^{1, \ldots, n} c_{ijk} \, [\omega_i \omega_j]. \tag{11}$$

Приравняв в тождестве (10) нулю совокупность членов, содержащих $[\omega_i \omega_j]$, найдем

$$X_i (X_j f) - X_j (X_i f) + \sum_{k=1}^{k=n} c_{ijk} X_k f = 0. \tag{12}$$

Обратим внимание на двойственность формул (11) и (12).

Предположим теперь, что система (1) вполне интегрируема. Это значит, на основании теоремы Фробениуса, что $\omega_1', \ldots, \omega_h'$ обращаются в нуль одновременно с $\omega_1, \ldots, \omega_h$; иначе говоря, это значит, что

$$c_{h+i, h+j, k} = 0 \qquad (i, \; j = 1, \; \ldots, \; n - h; \; k = 1, \; \ldots, \; h).$$

Следовательно, в силу (12), выражения

$$X_{h+i} (X_{h+j} f) - X_{h+j} (X_{h+i} f)$$

выражаются линейно только через $X_{h+1} f, \ldots, X_n f$. Обратное предложение очевидно.

Условимся обозначать через (XY) выражение $X(Yf) - Y(Xf)$. Мы видим, что *необходимым и достаточным условием полноты системы является следующее: все скобки, образованные из взятых попарно левых частей уравнений системы, должны линейно выражаться через эти левые части.*

Глава XI.

ТЕОРИЯ ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ.

Определение и свойства.

109. Рассмотрим систему диференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{1}$$

допускающую интегральный инвариант наивысшей возможной степени n:

$$\Omega = M \left[(\delta x_1 - X_1 \delta t) (\delta x_2 - X_2 \delta t) \ldots (\delta x_n - X_n \delta t) \right].$$

Как мы уже видели (п. 80), условием того, чтобы Ω было инвариантом, является равенство нулю внешней производной Ω', что дает, после легкого вычисления:

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n}=0. \qquad (2)$$

Коэфициент M известен под именем *множителя Якоби.*

Как мы знаем, условие (2) выражает собой, что форма Ω может быть выражена с помощью n независимых первых интегралов

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

системы (1) и их диференциалов; иными словами, это значит, что существует тождество

$$M\,[(\delta x_1-X_1\delta t)\ldots(\delta x_n-X_n\,\delta t)]=H\,(y_1,\ldots,y_n)\,[\delta y_1\,\delta y_2\ldots\delta y_n]. \qquad (3)$$

Мы можем теперь получить классические теоремы, относящиеся к множителю Якоби.

Теорема I. *Частное двух множителей M и M' является первым интегралом.* Действительно, два тождества вида (3), относящиеся к двум множителям, дают

$$\frac{M}{M'}=\frac{H\,(y_1,\ldots,y_n)}{H'\,(y_1,\ldots,y_n)}.$$

Теорема II. *Если известны p независимых первых интегралов системы* (1), *то можно найти множитель системы $n-p$ диференциальных уравнений, к которой приводится интегрирование данной системы.*

Предположим, что известны p независимых первых интегралов y_1, $y_2, \ldots, y_p$; предположим, кроме того (это всегда возможно), что эти первые интегралы являются независимыми функциями p переменных $x_1, \ldots, x_p$, т. е. что определитель

$$\frac{D\,(y_1,\ldots,y_p)}{D\,(x_1,\ldots,x_p)}$$

отличен от нуля.

Тогда уравнения (1) можно переписать так:

$$\frac{dy_1}{dt}=0, \quad \ldots, \quad \frac{dy_p}{dt}=0, \qquad (4)$$

$$\frac{dx_{p+1}}{dt}=X_{p+1}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}=X_n; \qquad (5)$$

если теперь приравнять $y_1, \ldots, y_p$ произвольным постоянным $C_1, \ldots, C_p$, то интегрирование системы (1) сведется к интегрированию системы (5), причем предполагается, что в правых частях уравнений этой системы $x_1, \ldots, x_p$ заменены их выражениями в функциях $x_{p+1}, \ldots, x_n$, t, $C_1, \ldots, C_p$.

После этого форму Ω, которая инвариантна относительно уравнений (4) и (5), можно будет, очевидно, записать так:

$$\Omega = N\,[\delta y_1 \ldots \delta y_p\,(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\,\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n\,\delta t)],$$

чтобы найти коэфициент N, достаточно отождествить это выражение с первоначальным; приравнивая, например, члены с $[\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n]$, получим

$$M = N\,\frac{D(y_1, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}\,.$$

Определив таким образом величину N, получаем тождество:

$$N\,[\delta y_1 \ldots \delta y_p\,(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n \delta t)] =$$
$$= H\,[\delta y_1 \ldots \delta y_p\,\delta y_{p+1} \ldots \delta y_n],$$

т. е.

$$[\delta y_1\,\delta y_2 \ldots \delta y_p\,\{N\,(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\,\delta t) \ldots (\delta X_n - X_n \delta t) -$$
$$- H\,\delta y_{p+1} \ldots \delta y_n\}] = 0.$$

Это тождество показывает (п. 64), что *если принять во внимание линейные соотношения*

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta y_p = 0,$$

то получим

$$N\,[(\delta x_{p+1} - X_{p+1}\,\delta t) \ldots (\delta x_n - X_n\,\delta t)] =$$
$$= H\,(y_1, \ldots, y_n)\,[\delta y_{p+1} \ldots \delta y_n]. \tag{6}$$

Значит, левая часть этого равенства представляет собою инвариантную форму относительно системы диференциальных уравнений (5); *иными словами, система* (5) *допускает множитель*

$$N = \frac{M}{\dfrac{D(y_1, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}}\,.$$

Теорема III. *Если известны $n-1$ независимых первых интегралов системы уравнений* (1), *то интегрирование заканчивается квадратурой.*

Достаточно применить теорему (II) в случае $p = n-1$; тогда увидим, что диференциальная линейная форма

$$\frac{M}{\dfrac{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}}\,(\delta x_n - X_n\,\delta t)$$

представляет собой полный диференциал, если предположить, что переменные связаны соотношениями

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \ldots, \quad y_{n-1} = C_{n-1}.$$

Общее решение системы (1) получим, приравнивая постоянной C_n интеграл от полного диференциала

$$\int \frac{M}{\frac{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}} (dx_n - X_n\,dt).$$

Обобщения.

110. Теорема о последнем множителе может быть распространена на значительно более общий случай, именно на случай, когда известна инвариантная форма Ω любой степени $r < n$. Предположим, что известны $n-1$ независимых первых интегралов $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Составим всеми возможными способами группы по $n-r$ этих интегралов

$$y_{\alpha_1}, \quad y_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad y_{\alpha_{n-r}}$$

и рассмотрим формы

$$[\delta y_{\alpha_1}, \ \delta y_{\alpha_2}, \ \ldots, \ \delta y_{\alpha_{n-r}} \Omega],$$

степени n, которые *очевидно будут инвариантными. Если они не все равны нулю*, то приходим к уже изученному случаю: *находим множитель*, или даже несколько множителей, и в некоторых случаях теорема I может дать последний из первых интегралов путем деления этих множителей.

Исключительным случаем будет тот, когда все написанные выше формы равны нулю. Предположим, что Ω выражена с помощью $\delta y_1, \ldots, \delta y_{n-1}$ и диференциала n-го первого интеграла (неизвестного) δy_n. Наше предположение сводится, в сущности, к тому, что Ω *не содержит* δy_n, потому что, если бы в Ω входил отличный от нуля член, например, такого вида:

$$A\,[\delta y_1 \ldots \delta y_{r-1}\,\delta y_n],$$

то внешнее произведение Ω на $\delta y_{r+1}, \delta y_{r+2}, \ldots, \delta y_{n-1}$ не было бы равно нулю.

Значит, Ω представляет собой внешнюю форму относительно $\delta y_1, \ldots, \delta y_{n-1}$ — форму, коэфициенты которой могут быть вычислены.

Каждый из этих коэфициентов является первым интегралом. Если хотя бы один из этих коэфициентов не зависит от $y_1, \ldots, y_{n-1}$, то приравнивая его произвольной постоянной, мы заканчиваем интегрирование. Единственным сомнительным случаем остается тот, когда все эти коэфициенты являются функциями от $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Ясно, однако, что в этом случае знание инвариантной формы Ω ничем не может помочь завершению интегрирования. Заметим только, что в этом случае данные уравнения *не образуют* характеристической системы формы Ω.

Мы можем, следовательно, сформулировать следующую общую теорему:

Знание инвариантной диференциальной формы Ω, для которой данная система диференциальных уравнений (1) *является характе-*

ристической системой, позволяет, даже в самом неблагоприятном случае, закончить интегрирование этой системы квадратурой, если известны уже ее $n-1$ независимых первых интегралов.

111. Другое обобщение теории последнего множителя Якоби относится к вполне интегрируемым пфаффовым системам. Пусть

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_r = 0$$

вполне интегрируемая система, для которой известна инвариантная форма наивысшей возможной степени r:

$$\Omega = M\,[\omega_1\omega_2\ldots\omega_r].$$

Знание $r-1$ независимых первых интегралов системы $y_1, \ldots, y_{r-1}$ позволяет закончить интегрирование квадратурой. Действительно, если приравнять $y_1, \ldots, y_{r-1}$ произвольным постоянным, то данная система сведется к единственному уравнению, например к $\omega_r = 0$; при этом получим форму вида:

$$\Omega = N\,[\delta y_1 \ldots \delta y_r \omega_r];$$

коэфициент N легко получается из M, если приравнять (тождественно) два выражения для Ω. Отсюда следует, что $N\omega_r$ является инвариантной формой для единственного уравнения $\omega_r = 0$, которое еще осталось проинтегрировать. А это, в свою очередь, показывает, что $N\omega_r$ является полным диференциалом. Значит и в этом случае интегрирование заканчивается квадратурой.

В заключение — вполне общая теорема, подводящая итог всем рассмотренным случаям:

Знание диференциальной формы Ω позволяет, в самом неблагоприятном случае, закончить квадратурой интегрирование характеристической системы этой формы, если уже известны $r-1$ независимых первых интегралов (r обозначает класс формы).

Случай, когда выбор независимой переменной не предрешен.

112. Если система диференциальных уравнений дана в форме

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

то каждый интегральный инвариант степени $n-1$ имеет вид

$$\Omega = MX_1\,[dx_2\,dx_3\ldots dx_n] - MX_2\,[dx_1\,dx_3\ldots dx_n] + \\ + \ldots - (-1)^n MX_n\,[dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}],$$

и условие $\Omega' = 0$ сводится к

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Если не считать этой разницы в записи, вся теория, относящаяся к рассматриваемому случаю, тождественна изложенной выше.

Случай, когда данные уравнения допускают бесконечно малое преобразование.

113. Возьмем общий случай вполне интегрируемой системы

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_r = 0, \tag{7}$$

допускающей инвариантную форму степени r, относительно которой всегда можно предположить, что она приведена к виду

$$\Omega = [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r].$$

Предположим, что эта система допускает известное бесконечно малое преобразование Af; составим выражения

$$\omega_1(A), \quad \omega_2(A), \quad \ldots, \quad \omega_r(A),$$

и предположим, что они не все равны нулю. Всегда можно предполагать уравнения системы преобразованными так, чтобы выполнялись соотношения

$$\omega_1(A) = 1, \quad \omega_2(A) = \omega_3(A) = \ldots = \omega_r(A) = 0, \tag{8}$$

а Ω не изменила своего вида.

Как мы уже видели выше (п. 89), знание бесконечно малого преобразования Af позволяет получить из формы $\Omega(\delta)$ другую инвариантную форму $\Omega(A, \delta)$, которая при наших предположениях сводится к

$$\Omega(A, \delta) = [\omega_2 \ldots \omega_r].$$

Обозначим буквой π эту новую инвариантную форму. Имеем

$$\Omega = [\omega_1 \pi].$$

Системой *ассоциированной* (не характеристической) по отношению к π будет

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_r = 0; \tag{9}$$

она вполне интегрируема. Это вытекает из одной из доказанных теорем (п. 99); но это следует также из того, что, поскольку Ω выражается с помощью r первых интегралов $y_1, \ldots, y_r$ данной системы и их диференциалов, постольку и ассоциированная с $\Omega(A, \delta)$ система будет содержать только $y_1, \ldots, y_r$ и их диференциалы. Это будет, таким образом, система обыкновенных диференциальных уравнений, значит,— вполне интегрируемая.

Составим теперь внешнюю производную π' формы π. Это будет снова инвариантная форма степени r; значит, будем иметь

$$\pi' = m\Omega = m[\omega_1 \pi].$$

Коэфициент m будет первым интегралом. Впрочем, здесь следует провести небольшое исследование.

1°. $m = 0$. В этом случае π' равно нулю, и система (9), ассоциированная с π, является ее характеристической системой. Значит, известен множитель системы (9); следовательно, если известны $r-2$ независимых первых интегралов этой системы, то интегрирование закончится квадратурой. Вторая квадратура завершит интегрирование данной системы (7); этой квадратурой будет, очевидно, $\int \omega_1$.

Здесь, очевидно, π и Ω могут быть приведены к виду

$$\pi = [\delta y_2 \delta y_3 \ldots \delta y_r], \quad \Omega = [\delta y_1 \delta y_2 \ldots \delta y_r];$$

преобразование Af, приложенное к первым интегралам данной системы, сводится к

$$Af = \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Можно бесконечным числом способов выбирать первые интегралы, не меняя исходных данных, т. е. формы Ω и преобразования Af; можно выполнить над $y_2, y_3, \ldots, y_n$ любую подстановку с функциональным определителем равным единице, можно прибавить к y_1 произвольную функцию от $y_2, \ldots, y_r$. Это дает указания на те упрощения, которые могут встретиться при интегрировании.

2°. *m есть константа, отличная от нуля.* В этом случае предположим, что мы проинтегрировали систему (9), и пусть $y_2, y_3, \ldots, y_r$ — система $r-1$ независимых интегралов. Получим

$$\pi = H [\delta y_2 \delta y_3 \ldots \delta y_r],$$

причем коэфициент H будет *независим* от $y_2, \ldots, y_r$ (иначе π' равнялось бы нулю); кроме того, он будет первым интегралом данной системы. Мы получаем таким образом r-й интеграл данной системы простыми диференцированиями.

Написав y_1 вместо H, получим

$$\Omega = \frac{1}{m} [\delta y_1 \delta y_2 \ldots \delta y_r], \quad \pi = y_1 [\delta y_2 \ldots \delta y_r], \quad Af = m y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Наиболее общим преобразованием переменных $y_1, \ldots, y_r$, сохраняющим исходные данные, является совершенно произвольное преобразование $y_2, \ldots, y_r$, при условии, что

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{\dfrac{D(\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_r)}{D(y_2, \ldots, y_r)}}.$$

Этим объясняется, почему интегрирование системы (9) не может быть упрощено, а также и то, почему если это интегрирование выполнено, то с его помощью осуществляется и интегрирование данной системы (7).

3°. *Коэфициент m не является константой, но $A(m)$ равно нулю.* В этом случае функция m является первым интегралом системы (9). Интегрирование этой системы сводится к интегрированию системы диференциальных уравнений с $r-2$ неизвестными функциями; интегрирование данной системы получается отсюда так же, как и в предыдущем случае.

Форма π может быть сведена к виду

$$\pi = y_1\,[\delta m\,\delta y_3 \ldots \delta y_r],$$

причем получим:

$$\Omega = \frac{1}{m}\,[\delta y_1\,\delta m\,\delta y_3 \ldots \delta y_r], \quad Af = m y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Преобразования, сохраняющие исходные данные, суть:

$$\bar{m} = m, \quad \bar{y}_3 = f_3(m_1 y_3, \ldots, y_r), \quad \ldots, \bar{y}_r = f_r(m_1 y_3, \ldots, y_r),$$

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{\dfrac{D(f_3 \ldots f_r)}{D(y_3 \ldots y_r)}}.$$

Они указывают на упрощения, возможные при интегрировании.

4°. *Коэфициент* m *не является константой* и $A(m) = m_1 \neq 0$. Возьмем сейчас же общий случай:

$$Am = m_1, \quad Am_1 = m_2, \quad \ldots, \quad Am_{i-1} = m_i;$$

и предположим, что $m, m_1, \ldots, m_{i-1}$ суть i независимых первых интегралов данной системы, а m_i —функция от $m, \ldots, m_{i-1}$.

В этом случае известны i независимых первых интегралов системы и *ее интегрирование сводится к интегрированию системы диференциальных уравнений с* $r-i$ *неизвестными функциями, множитель которой известен.*

Найдем приведенные формы для Ω и Af. Всегда можно положить

$$\Omega = H\,[\delta m\,\delta m_1 \ldots \delta m_{i-1}\,\delta y_{i+1} \ldots \delta y_r],$$

где $y_{i+1}, \ldots, y_r$ —первые интегралы системы (9), а H функция от $m, m_1, \ldots, m_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r$. Очевидно, имеем

$$Af = m_1 \frac{\partial f}{\partial m} + m_2 \frac{\partial f}{\partial m_1} + \ldots + m_i \frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}.$$

Запишем, что внешняя производная от $\pi = \Omega(A, \delta)$ равняется $m\Omega$, или, что то же

$$A(\Omega) = m\Omega.$$

Имеем

$$A(\Omega) = \left\{A(H) + \frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}} H\right\} [\delta m\,\delta m_1, \ldots, \delta m_{i-1}\,\delta y_{i+1} \ldots \delta y_r];$$

значит, должно быть

$$A(H) + \frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}} H = mH.$$

Пусть $h(m, m_1, \ldots, m_{i-1})$ — *частное* решение этого уравнения в частных производных; последнее может быть записано так:

$$A\left(\frac{H}{h}\right)=0;$$

иными словами, $\frac{H}{h}$ является интегралом системы (9). Можно так выбрать $y_{i+1}, \ldots, y_r$, чтобы сделать эту функцию равной единице. Тогда получим

$$\Omega = h(m, \ldots, m_{i-1})\,[\delta m\,\delta m_1 \ldots \delta m_{i-1}\,\delta y_{i+1} \ldots \delta y_r],$$

$$Af = m_1\frac{\partial f}{\partial m} + m_2\frac{\partial f}{\partial m_1} + \ldots + m_i\frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}.$$

Преобразованиями, сохраняющими исходные данные, будут, очевидно:

$$\overline{m} = m, \quad \overline{m}_1 = m_1, \quad \ldots, \quad \overline{m}_{i-1} = m_{i-1},$$

$$\overline{y}_{i+1} = f_{i+1}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r), \ldots,$$

$$\overline{y}_r = f_r(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_r),$$

с функциональным определителем

$$\frac{D(\overline{y}_{i+1}, \ldots, \overline{y}_r)}{D(y_{i+1}, \ldots, y_r)} = 1.$$

Буквами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{i-1}$ обозначены независимые функции от m, $m_1, \ldots, m_{i-1}$, удовлетворяющие условию $A\mu = 0$. Природа указанных преобразований указывает на возможные упрощения при интегрировании.

Может случиться, что $i = r$; тогда решение получается без всяких интегрирований, потому что одними диференцированиями можно найти r независимых первых интегралов.

Приложения.

114. Теорию последнего множителя можно приложить ко всем указанным выше примерам, где встречалась инвариантная форма степени, равной числу неизвестных функций. Вспомним эти примеры.

1°. Уравнения движения частиц непрерывной среды, когда плотность ϱ и компоненты u, v, w скорости даны как функции от x, y, z, t:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Интегральный инвариант имеет вид:

$$\Omega = \varrho\,[(\delta x - u\,\delta t)\,(\delta y - v\,\delta t)\,(\delta z - w\,\delta t)];$$

значит, множителем будет ϱ. Следовательно, если известны два независимых первых интеграла, то интегрирование заканчивается квадратурой.

Если движение *стационарно*, то инвариантная форма

$$\pi = \Omega(A, \delta) = -\varrho u\,[\delta y\,\delta z] - \varrho v\,[\delta z\,\delta x] - \varrho w\,[\delta x\,\delta y]$$

имеет производную, равную нулю. Уравнения

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

дающие геометрические траектории, допускают множитель ϱ; значит, если известен один первый интеграл, то определение траекторий потребует одной квадратуры, а вторая квадратура даст t.

2°. Уравнения, дающие вихревые линии данного поля векторов (X, Y, Z), представляют собою характеристические уравнения формы

$$[\delta X\,\delta x] + [\delta Y \delta y] + [\delta Z\,\delta z] =$$
$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)[\delta y\,\delta z] + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)[\delta z\,\delta x] + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)[\delta x\,\delta y];$$

значит, уравнения

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}}$$

допускают известный множитель, равный единице.

3°. Уравнения динамики в канонической форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

допускают множитель 1: в этом можно убедиться путем непосредственного вычисления; это следует также из того, что существование инвариантной формы

$$\Omega = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t\right)\left(\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta t\right)\right]$$

влечет за собою наличие инвариантной формы Ω^n:

$$\frac{1}{n!}\Omega^n = \prod_{i=1}^{i=n}\left[\left(\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta t\right)\left(\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta t\right)\right].$$

115. Но теория последнего множителя прилагается не только к таким материальным системам, которые допускают канонические уравнения, но и к любой системе с *совершенными голономными связями и с заданными силами, зависящими только от положения системы.*

В случае такой системы имеют место уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Если бы величины Q были нулями, то введение канонических переменных Гамильтона привело бы к уравнениям

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Отсюда следует, что уравнения движения при Q_i отличных от нуля могут быть приведены к виду

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i.$$

Они допускают множитель 1; значит, они допускают инвариантную форму

$$\Omega=\left[\left(\delta q_1-\frac{\partial H}{\partial p_1}\delta t\right)\ldots\left(\delta q_n-\frac{\partial H}{\partial p_n}\delta t\right)\left\{\delta p_1+\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}-Q_1\right)\delta t\right\}\ldots\left\{\delta p_n+\left(\frac{\partial H}{\partial q_n}-Q_n\right)\delta t\right\}\right],$$

которая в лагранжевых переменных запишется так:

$$\Omega=\prod_{i=1}^{i=n}\left[(\delta q_i-q_i'\,\delta t)\left\{\delta\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i\right)\delta t\right\}\right].$$

Если связи не зависят от времени, так же как и данные силы, то уравнения движения допускают бесконечно малое преобразование

$$Af=\frac{\partial f}{\partial t}$$

и, следовательно, инвариантную форму $\pi=\Omega(A,\delta)$, производная которой равна нулю. Общая теория позволяет утверждать, что интегрирование уравнений движения сводится к интегрированию уравнений траекторий (геометрических)

$$\frac{dq_i}{q_i'}=\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_i'}}{\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i}\quad\text{или}\quad \frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}=\frac{dp_i}{-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i},$$

к которым приложима теория последнего множителя, и к квадратуре, дающей время. Действительно, имеем, например,

$$\Omega=\left[\left(\delta t-\frac{\delta q_1}{q_1'}\right)\pi\right],$$

потому что $\Omega(A,\delta)$ равна π.

116. В качестве примера сил, *зависящих от времени*, но допускающих известное бесконечно малое преобразование, рассмотрим простой случай точки, движущейся по фиксированной прямой под действием притяжения некоторой определенной точки этой прямой; при этом сила притяжения пропорциональна расстоянию между точками, а коэфициент пропорциональности есть известная функция времени. Движение задается или диференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(t)\,x,$$

или системой

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} + k(t)\,x = 0. \tag{10}$$

Уравнение второго порядка не изменится при замене x на λx (λ — произвольный ностоянный множитель); следовательно, система, эквивалентная этому уравнению, допускает бесконечно малое преобразование, переводящее

$$x,\ x',\ t$$

соответственно в

$$(1+\varepsilon)\,x, \quad (1+\varepsilon)\,x', \ t;$$

символом этого преобразования будет

$$Af = x\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial x'}.$$

Система (10) допускает инвариантную форму

$$\Omega = [(\delta x - x'\delta t)\,(\delta x' + kx\,\delta t)],$$

соответствующую множителю 1. Производная форма $\Omega(A, \delta)$ имеет здесь вид

$$\overline{\omega} = x(\delta x' + kx\,\delta t) - x'(\delta x - x'\delta t) = x\,\delta x' - x'\delta x + (x'^2 + kx^2)\,\delta t;$$

это — инвариантная форма. Ее внешняя производная равна

$$\overline{\omega'} = 2\,[\delta x\,\delta x'] + 2x'\,[\delta x'\delta t] + 2kx\,[\delta x\,\delta t] = 2\Omega.$$

Коэфициент при Ω в правой части постоянен; это значит, как мы знаем (п. 113), что достаточно проинтегрировать *вполне интегрируемое* уравнение $\overline{\omega} = 0$, чтобы получить из него диференцированиями общее решение данной системы; действительно, форма $\overline{\omega}$ может быть приведена к виду $y_1\,\delta y_2$. Эту форму $\overline{\omega}$ можно, заменяя δ на d, записать так:

$$\overline{\omega} = x^2\left[d\frac{x'}{x} + \left(\frac{x'^2}{x^2} + k\right)dt\right].$$

Полагая

$$\frac{x'}{x} = u,$$

приходим к интегрированию уравнения Риккати (Riccati):

$$\frac{du}{dt} + u^2 + k = 0.$$

Предположим, что это уравнение проинтегрировано; имеем первый интеграл вида

$$y_2 = \frac{\alpha(t)\,u + \beta(t)}{\gamma(t)\,u + \delta(t)} = \frac{\alpha(t)\,x' + \beta(t)\,x}{\gamma(t)\,x' + \delta(t)\,x}.$$

Отождествляя $\overline{\omega}$ с $y_1\,dy_2$, находим, взяв, например, члены, содержащие dx',

$$x = y_1 x \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x' + \delta x)^2},$$

откуда

$$y_1 = \frac{(\gamma x' + \delta x)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Если предположить (а это всегда возможно), что определитель $\alpha\delta - \beta\gamma$ равен 1 (или вообще постоянной), то общее решение системы дается уравнениями

$$\alpha x' + \beta x = C_1, \quad \gamma x' + \delta x = C_2,$$

откуда

$$x = C_2 \alpha(t) - C_1 \gamma(t).$$

Иными словами, функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, входящие в общий интеграл уравнения Риккати, образуют систему фундаментальных решений данного уравнения второго порядка.

Можно изложить эти вещи иначе. Предположим, что известно общее решение u уравнения Риккати, выраженное через t и постоянную интеграции y_2. Тождество

$$y_1\,dy_2 = x^2\,[du + (u^2 + k)\,dt]$$

дает

$$y_1 = x^2 \frac{\partial u}{\partial y_2},$$

откуда x может быть выражен в функции y_1, y_2, t. Поскольку мы имеем

$$u = \frac{\delta y_2 - \beta}{-\gamma y_2 + \alpha},$$

получаем

$$x^2 = y_1(\alpha - \gamma y_2)^2,$$

откуда

$$x = C_1\alpha + C_2\gamma.$$

117. Замечание. Теория последнего множителя Якоби прилагается не только к указанным проблемам механики, но и к ряду других. Рассмотрим, например, движение материальной точки под действием силы, зависящей только от положения точки в пространстве, но при условии, что система референции равномерно вращается вокруг оси Oz. Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} - X = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} - Y = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} \qquad\quad - Z = 0,$$

где X, Y, Z — данные функции от x, y, z, t. Записав эти уравнения в виде:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dx'}{dt}=-2ay'+X;$$

$$\frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dy'}{dt}=2ax'+Y;$$

$$\frac{dz}{dt}=z', \quad \frac{dz'}{dt}= \qquad Z,$$

получим систему, допускающую, очевидно, множитель 1.

118. Последнее приложение, которое мы здесь рассмотрим, связано с интегральным инвариантом гидродинамики:

$$\Omega=\xi\,[\delta y\,\delta z]+\eta\,[\delta z\,\delta x]+\zeta\,[\delta x\,\delta y]+(\eta w-\zeta v)\,[\delta x\,\delta t]+$$
$$+(\zeta u-\xi w)\,[\delta y\,\delta t]+(\xi v-\eta u)\,[\delta z\,\delta t].$$

Характеристическая система этого инварианта состоит из двух уравнений Пфаффа:

$$\frac{dx-u\,dt}{\xi}=\frac{dy-v\,dt}{\eta}=\frac{dz-w\,dt}{\zeta}.$$

Интегральными многообразиями в четырехмерном мире (x, y, z, t) будут двумерные многообразия, образованные, например, различными последовательными положениями вихревой линии.

Интегрирование этой системы сводится к интегрированию системы из двух диференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями, множитель которой известен. Разыскание траекторий частиц требует, кроме того, интегрирования обыкновенного диференциального уравнения, которое может быть задано произвольно.

Если движение стационарно, то характеристические многообразия даются двумя квадратурами, а именно, во-первых,

$$\int\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}=C;$$

затем, учитывая предыдущее равенство, разрешенное относительно z,

$$t+\int\frac{\eta\,dx-\xi\,dy}{\xi v-\eta u}=C'.$$

Глава XII.

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ.

Общий метод интегрирования.

119. Рассмотрим пфаффову форму ω и характеристическую систему *относительного* интегрального инварианта $\int\omega$. Это — система, ассоциированная с формой ω'.

Предположим сначала, что ω зависит от $2n+1$ переменных; тогда характеристическая система формы ω' будет состоять, вообще говоря, из $2n$ уравнений, так как ω' *четного* ранга (п. 59). Следовательно, *существует, вообще говоря, единственная система диференциальных уравнений, допускающая относительный интегральный инвариант* $\int \omega$, *где ω — произвольная пфаффова форма* от $2n+1$ *переменных*. Этот случай имеет место для интегрального инварианта динамики.

Пусть вообще $2n$ — ранг (или класс) формы ω'. Нетрудно указать метод интегрирования характеристических уравнений формы ω'.

Действительно, пусть y_1 — один из первых интегралов этой системы (он получен с помощью операции порядка $2n$). Если связать переменные соотношением $y_1=C_1$, т. е. диференциалы — соотношением $dy_1=0$, то ранг ω' понизится, и так как он всегда должен быть четным, то он сведется к $2n-2$. Пусть y_2 — первый интеграл новой характеристической системы; полагая

$$y_1=C_1, \quad y_2=C_2,$$

сведем ранг ω' к $2n-4$ и т. д. Значит, с помощью последовательных операций порядка

$$2n, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad 4, 2,$$

можно будет найти n первых интегралов

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

таких, что если связать переменные соотношениями

$$y_1=C_1, \quad y_2=C_2, \quad \ldots, \quad y_n=C_n,$$

то ранг ω' станет равен нулю. Тогда, поскольку ω' — тождественный нуль, форма ω будет полным диференциалом; квадратура приводит ее к виду

$$\omega=dS.$$

Функция S зависит от n постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Если теперь отказаться от предположения, что переменные связаны n тождественными соотношениями, то, очевидно, получим

$$\omega=dS+z_1\,dy_1+z_2\,dy_2+\ldots+z_n\,dy_n$$

и, следовательно,

$$\omega'=[dz_1\,dy_1]+[dz_2\,dy_2]+\ldots+[dz_n\,dy_n].$$

Форма ω' имеет ранг $2n$, значит, диференциалы dy_i и dz_i линейно независимы; следовательно, $2n$ *функций* y_i, z_i *образуют систему независимых первых интегралов данных уравнений*, интегрирование которых можно, таким образом, считать законченным.

Итак, интегрирование потребовало $n+1$ операций порядка

$$2n, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad 4, \quad 2, \quad 0,$$

а также диференцирований.

Замечание I. Функция S играет здесь чисто вспомогательную роль; она не является, вообще говоря, первым интегралом характеристической системы инварианта $\int \omega$.

Замечание II. Полученный результат показывает, что *любая внешняя квадратичная форма с внешней производной, равной нулю, может быть приведена* к виду

$$[dz_1\, dy_1] + [dz_2\, dy_2] + \ldots + [dz_n\, dy_n].$$

120. Важно отдать себе отчет в неопределенности выбора функций y_i и z_i, входящих в каноническое представление формы. Равенство

$$[dz_1'\, dy_1'] + [dz_2'\, dy_2'] + \ldots + [dz_n'\, dy_n'] = [dz_1\, dy_1] + \ldots + [dz_n\, dy_n]$$

влечет за собой то, что разность

$$z_1'\, dy_1' + z_2'\, dy_2' + \ldots + z_n'\, dy_n' - (z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2 + \ldots + z_n\, dy_n)$$

является полным деференциалом dV. Допустим, — и это будет общий случай, — что y_1', $\ldots$, y_n' являются независимыми функциями от z_1, $\ldots$, z_n; тогда y_i и y_i' не будут связаны никаким соотношением. Выражая V в функции y_i и y_i', получаем

$$z_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i'}, \quad z = -\frac{\partial V}{\partial y_i}.$$

Эти уравнения, куда входит произвольная функция $2n$ аргументов, позволяют выразить y' и z' в функциях от y и z; действительно, n последних дают y_1', $\ldots$, y_n', а затем n первых дадут z_1', $\ldots$, z_n'. При этом предполагается, что определитель

$$\frac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \dfrac{\partial V}{\partial y_2}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}$$

отличен от нуля.

При этом же условии можно найти переменные y как функции y' и z' с помощью первых n уравнений, а затем получить z с помощью n последних.

Таким же путем исследуется случай, когда между y и y' существует одна или несколько зависимостей.

Совокупность определенных таким образом преобразований над переменными y и z, т. е. над *интегральными кривыми данной системы*, образует бесконечную группу, которая играет в этой теории ту же роль, что группа преобразований с функциональным определителем, равным 1, в теории множителя Якоби.

121. Возвратимся к интегрированию характеристических уравнений формы ω'. Положим, что каким-либо путем нам удалось найти $N>n$ таких независимых первых интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_N$, что в результате приравнивания их произвольным постоянным ранг формы ω' становится нулем, т. е. ω становится полным диференциалом. Тогда квадратура, а затем диференцирования дают нам

$$\omega = dS + z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_N\,dy_N.$$

Легко видеть, что $z_1, z_2, \ldots, z_N$ являются *первыми интегралами*. Действительно, предположим, что среди функций y_i и z_i имеется $N+r$ независимых. В таком случае функции z_i можно будет выразить с помощью r из них, которые мы обозначим $t_1, \ldots, t_r$ и с помощью функций y_i. Имеем

$$\omega' = [dz_1\,dy_1] + [dz_2\,dy_2] + \ldots + [dz_N\,dy_N].$$

Характеристическая система формы ω' включает, согласно предположению, уравнения

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \quad dy_N = 0.$$

В ее состав войдет также уравнение

$$\frac{\partial\omega'}{\partial[dy_i]} \equiv -dz_i + \frac{\partial z_1}{\partial y_i}dy_1 + \frac{\partial z_2}{\partial y_i}dy_2 + \ldots + \frac{\partial z_N}{\partial y_i}dy_N = 0.$$

Значит, ее следствием будет

$$dz_i = 0.$$

Отсюда видно, с одной стороны, что z_i являются первыми интегралами, а с другой стороны, что $N+r=2n$.

Окончательно *знание N первых интегралов, приравнивание которых произвольным постоянным превращает ω в полный диференциал, позволяет закончить интегрирование квадратурой и диференцированиями.*

122. На практике может случиться, что разыскиваются не все решения данной системы диференциальных уравнений, но лишь такие, для которых N первых интегралов $y_1, \ldots, y_N$ принимают *данные числовые значения*. В этом случае можно поступать так. Форма ω' обращается в нуль, если приравнять нулю $dy_1, \ldots, dy_N$; значит, ее можно (и притом бесконечным числом способов) представить в виде

$$\omega' = [dy_1\overline{\omega}_1] + [dy_2\overline{\omega}_2] + \ldots + [dy_N\overline{\omega}_N],$$

где $\overline{\omega}_i$ — соответственно подобранные линейные формы. Среди N этих форм $\overline{\omega}_i$ имеется $2n-N$ независимых и между собой и по отношению к dy_i; положим, что это $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{2n-N}$. Характеристическая система формы ω', очевидно, дается уравнениями

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_N = 0,$$
$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \ldots = \overline{\omega}_{2n-N} = 0.$$

Запишем, что внешняя производная от ω' равна нулю:

$$[dy_1\,\overline{\omega}_1'] + [dy_2\,\overline{\omega}_2'] + \ldots + [dy_N\,\overline{\omega}_N'] = 0,$$

откуда получим, в частности, помножая внешним образом иа $[dy_2\,dy_3 \ldots dy_N]$:

$$[dy_1\,dy_2 \ldots dy_N \overline{\omega}_1'] = 0.$$

Значит, форма $\overline{\omega}_1$ — а также формы $\overline{\omega}_2, \ldots, \omega_{2n-N}$ — становятся полными диференциалами, когда y_i принимают определенные числовые значения. Следовательно, *искомые решения получатся в результате $2n-N$ независимых квадратур*

$$\int \overline{\omega}_1 = \gamma_1, \ldots, \int \overline{\omega}_{2n-N} = \gamma_{2n-N}.$$

Не следует удивляться, что здесь приходится выполнить $2n-N$ квадратур, тогда как при разыскании общего решения достаточно было одной квадратуры. В самом деле, $2n-N$ указанных квадратур по существу сводятся к *единственной* квадратуре

$$\int \lambda_1\overline{\omega}_1 + \lambda_2\overline{\omega}_2 + \ldots + \lambda_{2n-N}\overline{\omega}_{2n-N} = C$$

с $2n-N$ произвольными *параметрами* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-N}$.

Изложенный процесс интегрирования использует только инвариантную форму ω' и не вводит форму ω. Значит, *существенно здесь знание абсолютного интегрального инварианта второй степени* $\int \omega'$ *и свойство форм* ω' *быть точной производной*. Форма ω (или формы ω), производная которой равна ω', играет лишь вспомогательную роль.

Скобки Пуассона и тождество Якоби.

123. Пусть $2n$ будет рангом внешней производной ω' и пусть f и g — два первых интеграла ее характеристической системы. Две диференциальные формы

$$[\omega'^{\,n-1} df\, dg] \quad \text{и} \quad [\omega'^{\,n}]$$

будут инвариантами наивысшей возможной степени $2n$; значит, они отличаются только множителем, и этот множитель является первым интегралом. Положим

$$\frac{1}{(n-1)!}\,[\omega'^{\,n-1} df\, dg] = \frac{1}{n!}\,(fg)\,[\omega'^{\,n}],$$

или

$$(fg)\,[\omega'^{\,n}] = n\,[\omega'^{\,n-1} df\, dg].$$

Определенное таким образом выражение (fg) носит наименование *скобки Пуассона*; это билинейная кососимметрическая форма от частных производных функций f и g.

Скобка от двух первых интегралов сама является первым интегралом.

Эта теорема была установлена Пуассоном для случая канонических уравнений; в общем случае ее значение показал Якоби.

Прежде чем перейти к приложениям этой теоремы, сделаем несколько замечаний.

Условие $(fg)=0$ выражает, что ранг ω' равен $2n-4$; в этом случае говорят, что интегралы f и g находятся в *инволюции*.

Если это условие не выполнено, то формула, определяющая (fg), показывает, что форма

$$\omega' - \frac{[df\,dg]}{(fg)}$$

имеет ранг $2n-2$; действительно, n-я степень этой формы равна нулю:

$$[\omega'^n] - \frac{n}{(fg)}[\omega'^{n-1}df\,dg] = 0.$$

Заметим еще, что если привести ω' к нормальному виду

$$\omega' = [\omega_1\omega_2] + [\omega_3\omega_4] + \ldots + [\omega_{2n-1}\omega_{2n}]$$

и если положить

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + \ldots + f_{2n}\omega_{2n},$$
$$dg = g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \ldots + g_{2n}\omega_{2n},$$

то получим

$$(fg) = f_1g_2 - f_2g_1 + f_3g_4 - f_4g_3 + \ldots + f_{2n-1}g_{2n} - f_{2n}g_{2n-1}.$$

Заметим, наконец, на основании результатов п. 119, что всегда можно предполагать ω_i полными диференциалами. Простое вычисление приведет к следующему тождеству, полученному впервые Якоби

$$\big((fg)\,h\big) + \big((gh)\,f\big) + \big((hf)\,g\big) = 0,$$

которое прилагается к любым трем первым интегралам f, g, h. Впрочем, справедливость его может быть установлена без каких бы то ни было предположений относительно форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$. Она основывается на тождестве

$$\frac{1}{(n-1)!}\Big[\omega'^{n-1}\big((fg)\,dh + (gh)\,df + (hf)\,dg\big)\Big] = \frac{1}{(n-2)!}\Big[\omega'^{n-2}\,df\,dg\,dh\Big], \quad (1)$$

которое не отличается от тождества (8), доказанного в п. 68. Диференцируя его внешним образом и замечая, что внешняя производная правой части равна нулю, получим

$$[\omega'^{n-1} d(fg)\,dh] + [\omega'^{n-1} d(gh)\,df] + [\omega'^{n-1} d(hf)\,dg] = 0,$$

а это и есть тождество Якоби.

124. Способ интегрирования, указанный в начале главы, может быть изложен короче, если использовать скобки Пауссона. Пусть

$$Xf = 0$$

— уравнение, выражающее, что f — первый интеграл. Ищем сначала частное решение y_1 этого уравнения; затем ищем частное решение y_2 системы

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0,$$

затем частное решение y_3 системы

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0, \quad (y_2 f) = 0$$

и т. д. до частного решения y_n системы

$$Xf = 0, \quad (y_1 f) = 0, \quad (y_2 f) = 0, \quad \ldots, \quad (y_{n-1} f) = 0.$$

В случае канонических уравнений динамики

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

соответствующих инвариантной форме

$$\omega' = \sum_{i=1}^{i=n} [\delta p_i\, \delta q_i] - [\delta H\, \delta t],$$

уравнение в частных производных, дающее первые интегралы данной системы, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Что касается скобки Пуассона (fg) двух первых интегралов, то она определяется равенством

$$n\,[\omega'^{n-1} \delta f\, \delta g] = (fg)\,[\omega'^n];$$

приравняв в обеих частях равенства члены, содержащие

$$[\delta p_1 \delta q_1 \delta p_2 \ldots \delta p_n \delta q_n],$$

получим

$$(fg) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Распространяя теперь понятие скобки (fg) на какие угодно две функции переменных q_i, p_i, t, мы сможем записать уравнение в частных производных, определяющее первые интегралы, так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - (Hf) = 0.$$

Использование известных первых интегралов.

125. Возвратимся теперь к проблеме интегрирования характеристических уравнений диференциальной формы ω', предполагая известными некоторое число первых интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Приравнивая эти интегралы произвольным постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_p$, мы понизим ранг формы ω' на некоторое четное число $2p' \leqslant 2p$ единиц. Тогда достаточно будет проинтегрировать характеристические уравнения этой новой формы или, точнее, определить $n - p'$ их первых интегралов, находящихся в инволюции; мы придем к задаче п. 121.

При указанном методе, вообще говоря, не используются полностью известные первые интегралы. Действительно, в силу теоремы Пуассона-Якоби, скобки от этих интегралов, взятых попарно, являются, в свою очередь, первыми интегралами исходной системы. Значит, нужно образовать скобки $(y_i y_j)$; далее, если среди этих скобок будут новые первые интегралы, нужно образовать скобки, сочетая эти интегралы между собой и с ранее известными; продолжаем этот процесс до тех пор, пока очередная операция не даст ничего нового. Это, в сущности, значит, *что скобки* $(y_i y_j)$ *всегда можно считать функциями первых интегралов* $y_1, \ldots, y_p$; *нужные для этого вычисления требуют только диференцирований.*

Теперь для того чтобы узнать, на сколько единиц понизится ранг ω', если предположить, что переменные связаны соотношениями

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \ldots, \quad y_p = C_p,$$

достаточно приложить теорему п. 69 к внешней квадратичной форме ω' с переменными $\delta x_1, \ldots, \delta x_{2n+1}$, связанными соотношениями

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta y_p = 0.$$

Коэфициентами a_{ij} п. 69 будут здесь скобки $(y_i y_j)$, и квадратичная форма Φ будет иметь вид

$$\Phi = \sum (y_i y_j) [\xi_i \xi_j];$$

число единиц, на которое понижается ранг ω', *будет равно максимальному возможному числу* $2p$, *уменьшенному на ранг формы* Φ.

126. Мы можем следующим образом отдать себе отчет в том, что данные первые интегралы использованы полностью.

Выполним над p переменными $\xi_1, \ldots, \xi_p$ линейную подстановку (с коэфициентами — функциями от $y_1, \ldots, y_p$), приводящую Φ к нормальному виду

$$\overline{\Phi} = [\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2] + \ldots + [\bar{\xi}_{2q-1} \bar{\xi}_{2q}] \qquad (2q \leqslant p).$$

Это сводится к тому, что линейные формы $\delta y_1, \ldots, \delta y_p$ заменяются новыми диференциальными формами

$$\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_p,$$

линейными относительно $\delta y_1, \ldots, \delta y_p$, с коэфициентами — функциями от $y_1, \ldots, y_p$; формы эти должны быть таковы, чтобы осуществлялось тождество

$$\xi_1 \delta y_1 + \xi_2 \delta y_2 + \ldots + \xi_p \delta y_p = \bar{\xi}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{\xi}_2 \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\xi}_p \bar{\omega}_p.$$

Внешняя квадратичная форма ω' примет при этом вид

$$\omega' = [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2] + \ldots + [\bar{\omega}_{2q-1} \bar{\omega}_{2q}] + [\bar{\omega}_{2q+1} \omega_1] + \ldots + [\bar{\omega}_p \omega_{p-2q}] +$$
$$+ [\omega_{p-2q+1} \omega_{p-2q+2}] + \ldots + [\omega_{2n-p-1} \omega_{2n-p}];$$

здесь введены $2n - p$ новых линейных форм $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-p}$.

Обозначим через π форму

$$\pi = [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2] + \ldots + [\bar{\omega}_{2q-1} \bar{\omega}_{2q}]$$

и запишем, что внешняя производиая от ω' равна нулю. Если отбросить члены, которые содержат одну из линейных форм

$$\bar{\omega}_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \bar{\omega}_p; \quad \omega_{p-2q+1}, \quad \ldots, \quad \omega_{2n-p},$$

то получится

$$\pi' + [\bar{\omega}'_{2q+1} \omega_1] + \ldots + [\bar{\omega}'_p \omega_{p-2q}] = 0. \qquad (2)$$

Форма π составлена только из функций y_i и их диференциалов, значит, то же можно сказать и про форму π'; поэтому в левой части равенства (2) невозможно никакое приведение подобных членов.

Отсюда, в частности, следует, что каждая из форм

$$\bar{\omega}'_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \bar{\omega}'_p$$

равна нулю (в предположении, что равны нулю формы $\bar{\omega}_{2q+1}, \ldots, \bar{\omega}_p$); следовательно, *пфаффова система*

$$\bar{\omega}_{2q+1} = \ldots = \bar{\omega}_p = 0$$

вполне интегрируема. Обозначим через

$$\bar{y}_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \bar{y}_p$$

систему первых интегралов этих уравнений. Далее, предполагая опять, что $\bar{\omega}_{2q+1}, \ldots, \bar{\omega}_p$ равны нулю, будем иметь

$$\pi' = 0.$$

Значит, если считать $\bar{y}_{2q+1}, \ldots, \bar{y}_p$ постоянными, то форма π становится полным диференциалом и, следовательно (п. 119), ее можно привести к виду

$$\pi = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}].$$

В результате, как легко усмотреть, форма ω' может быть представлена в виде

$$\omega' = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}] + [d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_1] + \ldots + \\ + [d\bar{y}_p \bar{\omega}_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}] + \ldots \tag{3}$$

В сущности, этим выражается следующая теорема:

Можно найти p функций

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad \ldots, \quad \bar{y}_p$$

от p данных первых интегралов, удовлетворяющих условиям:

$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = \ldots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = 1,$$

все остальные скобки $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ равны нулю.

127. Эта теорема интересна не только сама по себе; она еще показывает, что изложенный метод интегрирования полностью использует данные первые интегралы. Действительно, форма (3), найденная для ω', позволяет написать

$$\omega = dS + \bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q} + w_1 d\bar{y}_{2q+1} + \ldots + w_{p-2q} d\bar{y}_p + \\ + v_1 du_1 + \ldots + v_{n-p+q} du_{n-p+q},$$

$$\omega' = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \ldots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}] + [dw_1 d\bar{y}_{2q+1}] + \ldots + \\ + [dw_{p-2q} d\bar{y}_p] + [dv_1 du_1] + \ldots + [dv_{n-p+q} du_{n-p+q}].$$

Наиболее общая группа преобразований, *сохраняющая исходные данные*, т. е. оставляющая инвариантными ω', $y_1, \ldots, y_p$, определяется следующими уравнениями, в которых буквы со штрихами обозначают преобразованные переменные, а V — произвольную функцию аргументов u_i, u'_i, $\bar{y}_{2q+1}, \ldots, \bar{y}_p$:

$$\bar{y}'_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

$$v'_1 = \frac{\partial V}{\partial u'_1}, \quad \ldots, \quad v'_{n-p+q} = \frac{\partial V}{\partial u'_{n-p+q}};$$

$$v_1 = \frac{\partial' V}{\partial u_1}, \quad \ldots, \quad v_{n-p+q} = \frac{\partial V}{\partial u_{n-p+q}};$$

$$w'_1 = w_1 + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_{2q+1}}, \qquad w'_{p-2q} = w_{p-2q} + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_{p-2q}}.$$

Всякий однозначный процесс, позволяющий, исходя из ω' и p первых интегралов $y_1, \ldots, y_p$, получить новый первый интеграл посредством операций, *имеющих смысл независимо от выбора переменных*, необходимо приводит к первому интегралу, инвариантному по отношению к наиболее общей группе преобразований, сохраняющих ω', $y_1, \ldots, y_p$. Но единственными функциями, инвариантными по отношению к этой группе, будут, очевидно, произвольные функции от $y_1, \ldots, y_p$.

Обобщение теоремы Пуассона-Якоби.

128. Теорема Пуассона-Якоби немедленно обобщается, если вместо двух первых интегралов известны две линейные инвариантные формы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$. Функция a, определенная равенством

$$n\,[\omega'^{n-1}\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2] = a\,[\omega'^n], \tag{4}$$

очевидно, будет первым интегралом; она сводится к $(y_1 y_2)$, если $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ являются диференциалами двух первых интегралов y_1, y_2.

Применим это замечание к случаю, когда характеристические уравнения формы ω' допускают два бесконечно малых преобразования $A_1 f$ и $A_2 f$, а потому имеют место соотношения

$$\overline{\omega}_1 = \omega'(A_1, \delta), \quad \overline{\omega}_2 = \omega'(A_2, \delta).$$

Чтобы вычислить в этом случае функцию a, применим к обеим частям равенства (4) операцию, которая переводит инвариантную форму $\Omega(\delta)$ в форму $\Omega(A_1, \delta)$. Получим

$$n(n-1)\,[\omega'^{n-2}\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2] - n\,[\omega'^{n-1}\overline{\omega}_1]\,\overline{\omega}_2(A_1) = na\,[\omega'^{n-1}\overline{\omega}_1],$$

откуда, в силу того, что форма $[\omega'^{n-1}\overline{\omega}_1]$ заведомо не является нулем, получим

$$a = -\overline{\omega}_2(A_1) = \omega'(A_1, A_2) = \overline{\omega}_1(A_2).$$

Обобщенная теорема Пуассона-Якоби, приложенная к двум инвариантным формам $\omega'(A_1, \delta)$ и $\omega'(A_2, \delta)$, приводит, таким образом, к первому интегралу $\omega'(A_1, A_2)$, который получается в результате двукратного применения к форме ω' операции, соответствующей бесконечно малым преобразованиям $A_1 f$ и $A_2 f$.

Глава XIII.

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЙ АБСОЛЮТНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ.

Общий метод интегрирования.

129. Пусть ω — линейная диференциальная форма; ее билинейный ковариант ω' имеет четный ранг $2n$. Возможны два случая, в зависимости от того, будет ли уравнение $\omega = 0$ следствием характеристической системы формы ω', или нет. Рассмотрим сначала первый случай.

1) Очевидно, можно положить

$$\omega' = [\omega_1\omega_2] + \ldots + [\omega_{2n-1}\omega_{2n}],$$

причем $2n+1$ форм $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ — линейно независимы. В этом случае характеристическими уравнениями формы ω будут (п. 78)

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0.$$

Нетрудно указать приведенную форму для ω. Действительно, операции порядков

$$2n, \ 2n-2, \ \ldots, \ 2$$

позволяют найти последовательно n первых интегралов

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n$$

характеристических уравнений формы ω', понижающих ее ранг до нуля, если их приравнять произвольным постоянным. При помощи квадратуры форма ω приводится тогда к виду

$$\omega = du + z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_n\,dy_n.$$

Такова искомая приведенная форма, получаемая с помощью операций порядка

$$2n, \ 2n-2, \ \ldots, \ 2, \ 0$$

и дающая общее решение характеристических уравнений формы ω.

Мы видим, что в этом случае интегрирование характеристической системы ω' и интегрирование характеристической системы ω — задачи эквивалентные, а потому тот факт, что $\int\omega$ является *абсолютным* интегральным инвариантом, даст для интегрирования системы не больше, чем если бы $\int\omega$ был *относительным* интегральным инвариантом. Так будет обстоять дело, по крайней мере, в том случае, когда для интегрирования характеристической системы ω' используется метод, изложенный в п. 119; если применить метод п. 122, то это уже не будет иметь места.

2) Во втором случае (т. е. когда уравнение $\omega = 0$ не является следствием характеристической системы формы ω') можно положить

$$\omega' = [\omega\omega_1] + [\omega_2\omega_3] + \ldots + [\omega_{2n-2}\omega_{2n-1}],$$

причем $2n$ форм $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{2n-1}$ являются линейно независимыми. Уравнения

$$\omega = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{2n-1} = 0,$$

которые состоят из уравнения $\omega = 0$ и из системы, ассоциированной с формой ω', где *предположено, что диференциалы связаны соотношением* $\omega = 0$, — эти уравнения имеют внутренний смысл. Они представляют собой ассоциированную систему двух форм: ω и $[\omega\omega']$ и, следовательно (п. 104), — *характеристическую систему пфаффова урав-*

нения $\omega=0$. Мы назовем ее системой (Σ), а характеристическую систему формы ω назовем системой (S); эта последняя содержит еще уравнение $\omega_1=0$.

С помощью операции порядка $2n-1$ можно получить первый интеграл y_1 системы (Σ). Если приравнять его произвольной постоянной, то система (Σ) новой формы ω, т. е. характеристическая система нового уравнения $\omega=0$, будет содержать двумя уравнениями меньше. Значит, с помощью операций порядка

$$2n-3, \quad \ldots, \quad 3$$

можно будет найти новые интегралы

$$y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1},$$

такие, что если их приравнять произвольным постоянным, то новая система (Σ), соответствующая ω, сведется к одному единственному уравнению, именно к уравнению $\omega=0$. Это означает, что последнее уравнение будет вполне интегрируемо, и новая операция порядка 1 даст еще один интеграл y_n, после чего можно будет написать

$$\omega=z_1\,dy_1+z_2\,dy_2+\ldots+z_n\,dy_n.$$

Так получают *приведенный вид* формы ω, содержащий минимальное число $2n$ переменных, где $2n$ есть число уравнений системы (S), характеристической по отношению к ω, т. е. класс формы ω.

Можно без труда найти наиболее общее преобразование характеристических переменных y_i и z_i, которое сохраняет форму ω; равенство

$$z'dy'_1+\ldots+z'_n dy'_n=z_1 dy_1+\ldots+z_n\,dy_n$$

дает, если ограничиться общим случаем,

$$V(y'_1, \ldots, y'_n, y_1, \ldots, y_n)=0,$$

$$\frac{z'_1}{\frac{\partial V}{\partial y'_1}}=\frac{z'_2}{\frac{\partial V}{\partial y'_2}}=\ldots=\frac{z'_n}{\frac{\partial V}{\partial y'_n}}=\frac{-z_1}{\frac{\partial V}{\partial y_1}}=\ldots=\frac{-z_n}{\frac{\partial V}{\partial y_n}}.$$

Эти формулы показывают, что переменные $y_1, \ldots, y_n, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}$ преобразуются в аналогичные переменные. Это переменные в наименьшем числе, с помощью которых может быть записано уравнение $\omega=0$; они являются первыми интегралами характеристической системы (Σ) этого уравнения.

Если существует p независимых соотношений между y_i и y'_i:

$$V_1=0, \quad V_2=0, \quad \ldots, \quad V_p=0,$$

то формулы, определяющие преобразование, имеют вид:

$$z_i' = \lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_i'} + \lambda_2 \frac{\partial V_2}{\partial y_i'} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial V_p}{\partial y_i'},$$

$$-z_i = \lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial V_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial V_p}{\partial y_i};$$

они содержат p вспомогательных переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

130. Обратим внимание на разницу между нечетными $2n+1$ и четными $2n$ характеристическими системами, с точки зрения их интегрирования: в первом случае интегрирование выполняется с помощью операций порядка

$$2n, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad 2, \quad 0;$$

во втором — с помощью операций порядка

$$2n-1, \quad 2n-3, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1.$$

Заметим еще, что оба случая практически различаются следующим образом. Пусть $2n$ — ранг формы ω', т. е. пусть n — наибольший показатель степени, при котором форма $[\omega'^n]$ не обращается в нуль. Тогда *в первом случае* $[\omega\omega'^n]$ *не равно нулю, а во втором* $[\omega\omega'^n]$ *равно нулю.*

Обобщение формул Пуассона-Якоби.

131. *Предположим, что форма* ω — *первого типа.* Пусть f — какой-нибудь первый интеграл ее характеристической системы; форма $[\omega'^n df]$ — инвариантная форма максимального порядка $2n+1$. Значит, можно положить

$$[\omega'^n df] = \{f\}[\omega\omega'^n],$$

где $\{f\}$ — конечное выражение, линейное по отношению к частным производным первого порядка функции f. Это *выражение* $\{f\}$ *либо равно постоянной, либо является первым интегралом характеристической системы формы* ω.

Пусть теперь f и g — два первых интеграла характеристической системы формы ω. Определим с помощью соотношения

$$n\,[\omega\omega'^{n-1} df\, dg] = (fg)\,[\omega\omega'^n]$$

выражение (fg). *Это выражение опять является либо постоянной, либо первым интегралом.*

Если форма ω приведенная,

$$\omega = du + z_1\, dy_1 + \ldots + z_n\, dy_n,$$

то будем иметь:

$$\{f\} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$(fg) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} - z_i \frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{\partial g}{\partial z_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial u}\right).$$

Отсюда без труда можно вывести важные тождества

$$\{(fg)\} = (\{f\}g) + (f\{g\}),$$
$$\big((fg)h\big) + \big((gh)f\big) + \big((hf)g\big) = (fg)\{h\} + (gh)\{f\} + (hf)\{g\}.$$

132. Чтобы дать прямое доказательство этих тождеств, заметим, что форма $df - \{f\}\omega$ представляет собою линейную комбинацию $2n$ линейно независимых форм, с помощью которых может быть выражена ω'; это следует из того, что

$$[\omega'^n(df - \{f\}\omega)] = 0.$$

Отсюда непосредственно выводится тождество вида

$$n\,[\omega'^{n-1}(df - \{f\}\omega)(dg - \{g\}\omega)] = \lambda\,[\omega'^n],$$

а внешнее умножение на ω дает $\lambda = (fg)$. Значит, имеем

$$n\,[\omega'^{n-1}df\,dg] - n\{f\}\,[\omega\omega'^{n-1}dg] + n\{g\}\,[\omega\omega'^{n-1}df] = (fg)\,[\omega'^n]. \qquad (1)$$

Тождество (8) п. 68, приложенное к трем линейным формам

$$df - \{f\}\omega, \quad dg - \{g\}\omega, \quad dh - \{h\}\omega$$

дает

$$(fg)\,[\omega'^{n-1}(dh - \{h\}\omega)] + (gh)\,[\omega'^{n-1}(df - \{f\}\omega)] + \\ + (hf)\,[\omega'^{n-1}(dg - \{g\}\omega)] = \\ = (n-1)\,[\omega'^{n-2}(df - \{f\}\omega)(dg - \{g\}\omega)(dh - \{h\}\omega)],$$

откуда, путем внешнего умножения на ω, получаем

$$\Big[\omega\omega'^{n-1}\big((fg)\,dh + (gh)\,df + (hf)\,dg\big)\Big] = (n-1)\,[\omega\omega'^{n-2}df\,dg\,dh]. \qquad (2)$$

Теперь внешнее диференцирование тождества (1) дает

$$n\,[\omega\omega'^{n-1}d\{f\}\,dg] + n\,[\omega\omega'^{n-1}df\,d\{g\}] = [\omega'^n d(fg)],$$

т. е. первое тождество, которое нам нужно было доказать:

$$(\{f\}g) + (f\{g\}) = \{(fg)\}.$$

Внешнее диференцирование тождества (2) даст

$$\Big[\omega'^n\big((fg)dh + (gh)df + (hf)dg\big)\Big] - [\omega\omega'^{n-1}d(fg)\,dh] - [\omega\omega'^{n-1}d(gh)df] - \\ - [\omega\omega'^{n-1}d(hf)\,dg] = (n-1)\,[\omega'^{n-1}df\,dg\,dh];$$

но, с другой стороны, внешнее умножение (1) на dh дает

$$n\,[\omega'^{n-1}df\,dg\,dh] - n\,\{f\}\,[\omega\omega'^{n-1}dg\,dh] + n\,\{g\}\,[\omega\omega'^{n-1}df\,dh] = \\ = (fg)\,[\omega'^n dh];$$

из этой последней формулы получаем:

$$n[\omega'^{n-1} df\, dg\, dh] = [\{f\}(gh) + \{g\}(hf) + \{h\}(fg)]\,[\omega\omega'^{n}],$$

а затем из предшествующей выводим то-соотношение, которое нужно было доказать:

$$(fg)\{h\} + (gh)\{f\} + (hf)\{g\} = \big((fg)\,h\big) + \big((gh)\,f\big) + \big((hf)\,g\big).$$

133. *Предположим теперь, что форма ω — второго типа.* Пусть f и g — два первых интеграла характеристических уравнений формы ω; как и выше, определим выражения $\{f\}$ и (fg) формулами

$$n[\omega\omega'^{n-1} df] = \{f\}\,[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1} df\, dg] = (fg)\,[\omega'^{n}].$$

Если ω — приведенная форма:

$$\omega = z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2 + \ldots + z_n\, dy_n,$$

то

$$\{f\} = -\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$

$$(fg) = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}\right).$$

Без труда установим справедливость следующих формул:

$$\{(fg)\} = (fg) + (\{f\}\,g) + (f\,\{g\}); \tag{3}$$

$$\big((fg)\,h\big) + \big((gh)\,f\big) + \big((hf)\,g\big) = 0; \tag{4}$$

вторая из них — не что иное, как тождество Якоби, потому что f, g, h — первые интегралы характеристических уравнений формы ω'.

Чтобы доказать непосредственно первое тождество, применим тождество (8) п. 68 к трем линейным формам: ω, df, dg; соотношения

$$n[\omega'^{n-1}\omega\, df] = \{f\}\,[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1} df\, dg] = (fg)\,[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1} dg\,\omega] = -\{g\}\,[\omega'^{n}]$$

приводят к тождеству

$$[\omega'^{n-1}(\{f\}\,dg + (fg)\,\omega - \{g\}\,df)] = (n-1)\,[\omega'^{n-2}\omega\, df\, dg],$$

которое, будучи продиференцировано внешним образом, дает

$$[\omega'^{n-1} d\{f\}\, dg] + [\omega'^{n-1} df\; d\{g\}] + (fg)\,[\omega'^{n}] - $$
$$- [\omega\omega'^{n-1} d(fg)] = (n-1)\,[\omega'^{n-1} df\, dg];$$

заменяя каждый член его значением и упрощая, получим тождество, которое мы хотели доказать.

Использование известных первых интегралов.

134. *Предположим, что форма ω первого типа* и что мы знаем p независимых первых интегралов $y_1, \ldots, y_p$ ее характеристической системы. Составим выражения $\{y_i\}$, $(y_i y_j)$; если среди них будут новые интегралы, то прибавим их к данным и начнем процесс сначала; будем повторять эту операцию до тех пор, пока она уже не даст ничего нового. Будем считать, что все это уже проделано, т. е. что все выражения $\{y_i\} = a_i$, $(y_i y_j) = a_{ij}$ являются функциями от $y_1, \ldots, y_p$.

Введем теперь вспомогательные переменные $\xi_1, \ldots, \xi_p$ и построим две формы: одну линейную

$$\varphi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_p\xi_p,$$

вторую — внешнюю квадратичную

$$\Phi = \sum a_{ij} [\xi_i \xi_j];$$

первая дает значение выражения $\{f\}$, когда f — произвольная функция от $y_1, \ldots, y_p$, частными производными которой служат $\xi_1, \ldots, \xi_p$, вторая, или, вернее, соответствующая ей кососимметрическая билинейная форма

$$\sum a_{ij}\, \xi_i \xi_j$$

дает значение скобки (fg).

Теперь с помощью подходящей линейной подстановки над переменными ξ_i приведем обе формы к простейшему виду.

Возможны три случая: если Φ приведена к виду

$$\Phi = [\xi'_1 \xi'_2] + \ldots + [\xi'_{2q-1} \xi'_{2q}],$$

то может иметь место:

a) $\varphi = 0$;

b) $\varphi = \xi'_1$;

c) $\varphi = \xi'_{2q+1}$.

В результате линейной подстановки с коэфициентами — функциями от y_i — диференциалы δy_i перейдут в p линейных диференциальных форм $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_p$, удовлетворяющих тождеству

$$\xi'_1 \overline{\omega}_1 + \xi'_2 \overline{\omega}_2 + \ldots + \xi'_p \overline{\omega}_p = \xi_1\, \delta y_1 + \xi_2\, \delta y_2 + \ldots + \xi_p\, \delta y_p.$$

Сделав это, убедимся, что:

В случае a) все формы

$$[\omega'^n \overline{\omega}_i], \quad [\omega \omega'^{n-1} \overline{\omega}_i \overline{\omega}_j]$$

будут нулями, за исключением

$$n\,[\omega \omega'^{n-1} \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] = \ldots = n\omega'^{n-1} [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] = [\omega \omega'^n].$$

Отсюда легко выводим

$$\omega' = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] + [\overline{\omega}_{2q+1} \omega_1] + \ldots +$$
$$+ [\overline{\omega}_p \omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1} \omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

Если приравнять все y_i произвольным постоянным, то форма ω попрежнему будет первого типа, а ранг формы ω' уменьшится на $2p-2q$ единиц. Случай этот тождественен изученному в предыдущей главе, поскольку данные первые интегралы являются интегралами характеристической системы формы ω'.

В случае b) имеем

$$[\omega'^n (\overline{\omega}_1 - \omega)] = [\omega'^n \overline{\omega}_2] = \ldots = [\omega'^n \overline{\omega}_p] = 0,$$

и ω' можно привести к виду

$$\omega' = [(\overline{\omega}_1 - \omega) \overline{\omega}_2] + [\overline{\omega}_3 \overline{\omega}_4] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] +$$
$$+ [\overline{\omega}_{2q+1} \omega_1] + \ldots + [\overline{\omega}_p \omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1} \omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

Если приравнять все y_i произвольным постоянным, то форма ω останется формой первого типа, а ранг ω' уменьшится на $2p-2q$ единиц.

В случае c) имеем

$$[\omega'^n \overline{\omega}_1] = \ldots = [\omega'^n \overline{\omega}_{2q}] = [\omega'^n (\overline{\omega}_{2q+1} - \omega)] = \ldots = [\omega'^n \overline{\omega}_p] = 0;$$

форму ω' можно привести к виду

$$\omega' = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] + [(\overline{\omega}_{2q+1} - \omega) \omega_1] + \ldots +$$
$$+ [\overline{\omega}_p \omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1} \omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

Если приравнять y_i произвольным постояиным, то ω станет формой второго типа, а ранг ω' понизится на $2p-2q-2$ единицы; характеристическая система нового уравнения $\omega = 0$ будет состоять из $2n-2p+2q+1$ уравнений. В этом случае для интегрирования потребуются операции порядка

$$2n-2p+2q+1, \ \ldots, \ 3, \ 1,$$

тогда как в случаях a) и b) требуются операции порядка

$$2n-2p+2q, \ \ldots, \ 2, \ 0.$$

Итак, форма ω остается формой первого типа, если внешнее произведение $[\varphi \Phi]$ равно нулю, и становится формой второго типа в противном случае.

135. *Предположим теперь, что форма ω — второго типа.* Здесь мы тоже рассмотрим две формы

$$\varphi = a_1 \xi_1 + \ldots + a_p \xi_p$$

и

$$\Phi = \sum a_{ij} [\xi_i \xi_j].$$

Коэфициенты a_{ij} даются уравнениями

$$n[\omega'^{n-1}\,dy_i\,dy_j] = a_{ij}[\omega'^n],$$

поэтому, приравняв все y_i произвольным постоянным, мы понизим ранг ω' на $2p-2q$, если $2q$ обозначает ранг формы Φ.

Если Φ приведена к нормальному виду

$$\Phi = [\xi'_1\xi'_2] + \ldots + [\xi'_{2q-1}\,\xi'_{2q}],$$

то можно предположить, что в то же время φ имеет одну из следующих трех форм:

a) $\varphi = 0$;

b) $\varphi = \xi'_1$:

c) $\varphi = \xi'_{2q+1}$.

Случай a) выражает, в силу тождеств (3), что все скобки (y_iy_j) равны нулю, т. е. что форма Φ — тождественный нуль. Следовательно, $q=0$. В этом случае, очевидно, имеем:

$$\omega' = [\omega\omega_1] + [\bar\omega_1\,\omega_2] + \ldots + [\bar\omega_p\omega_{p+1}] + [\omega_{p+2}\,\omega_{p+3}] + \ldots$$

ω остается формой второго типа, число n уменьшается на p единиц.

В случае b) имеем:

$$n[\omega'^{n-1}\,\omega\bar\omega_1] = n[\omega'^{n-1}\,\bar\omega_1\,\bar\omega_2] = \ldots = n[\omega'^{n-1}\,\bar\omega_{2q-1}\,\bar\omega_{2q}] = [\omega'^n],$$

и ω' может быть приведена к виду

$$\omega' = [\bar\omega_1\,\bar\omega_2] + \ldots + [\bar\omega_{2q-1}\,\bar\omega_{2q}] + [(\omega+\bar\omega_2)\,\omega_1] +$$
$$+ [\bar\omega_{2q+1}\,\omega_2] + \ldots + [\bar\omega_p\,\omega_{p-2q+1}] + [\omega_{p-2q+2}\,\omega_{p-2q+3}] + \ldots$$

Если приравнять функции y_i произвольным постоянным, то ω останется формой второго типа, а ранг формы ω' уменьшится на $2p-2q$ единиц.

В случае c) ω' может быть приведена к виду

$$\omega' = [\bar\omega_1\,\bar\omega_2] + \ldots + [\bar\omega_{2q-1}\,\bar\omega_{2q}] + [\omega\bar\omega_{2q+1}] + [\bar\omega_{2q+2}\,\omega_1] +$$
$$+ \ldots + [\bar\omega_p\,\omega_{p-2q-1}] + [\omega_{p-2q}\,\omega_{p-2q+1}] + \ldots$$

Если приравнять функции y_i произвольным постоянным, то ω станет формой 1-го типа, а ранг ω' уменьшится на $2p-2q$ единиц.

Подводя итоги, скажем, что ω' остается формою второго типа, если произведение $[\varphi\Phi]$ равно нулю, и становится формой первого типа в противном случае.

136. Мы свели дело к четырем существенно различным проблемам, если оставить в стороне два случая a), один из которых был изучен в предыдущей главе, а второй сводится к тому, что для характеристической системы уравнения $\omega=0$ известны p первых интегралов в инволюции.

Рассмотрим несколько ближе эти четыре приведенные проблемы и выясним, полностью ли были использованы известные первые интегралы. Метод исследования этого вопроса не будет отличаться от того, который был применен в предыдущей главе; он основан на приведении формы ω к каноническому виду путем введения p соответственно подобранных функций от $y_1, \ldots, y_p$ и от других независимых первых интегралов. Когда получена эта каноническая форма, тогда можно вывести уравнения наиболее широкой группы преобразований интегральных кривых, сохраняющей исходные данные.

Укажем кратко канонический вид форм ω и ω' в каждом из четырех случаев, используя вычисления, аналогичные выкладкам предыдущей главы (п. 126).

1°. *Форма ω — первого типа, формы φ и Φ могут быть приведены к виду*:

$$\varphi=\xi_1', \quad \Phi=[\xi_1'\xi_2']+\ldots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}'].$$

В этом случае имеем:

$$\omega'=[(\bar\omega_1-\omega)\,\bar\omega_2]+[\bar\omega_3\,\bar\omega_4]+\ldots+[\bar\omega_{2q-1}\,\bar\omega_{2q}]+$$
$$+[\bar\omega_{2q+1}\,\omega_1]+\ldots+[\bar\omega_p\,\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\,\omega_{p-2q+2}]+\ldots$$

Положим

$$\pi=[\bar\omega_1\,\bar\omega_2]+\ldots+[\bar\omega_{2q-1}\,\bar\omega_{2q}],$$

тогда внешнее диференцирование формы ω' даст, если отвлечься от членов, содержащих

$$\bar\omega_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \bar\omega_p, \quad \omega_{p-2q+1}, \ldots, \omega_{2n-p},$$

тождество

$$\pi'-[\pi\bar\omega_2]+[\omega\bar\omega_2']+[\bar\omega_{2q+1}'\,\omega_1]+\ldots+[\bar\omega_p'\,\omega_{p-2q}]=0.$$

Если теперь положить

$$\bar\omega_2=\frac{d\bar y_2}{\bar y_2}, \quad \bar\omega_{2q+1}=d\bar y_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \bar\omega_p=d\bar y_p,$$

то, поскольку внешняя производная форма $\frac{1}{\bar y_2}\pi$ равна нулю, получим

$$\pi=\bar y_2\,([d\bar y_1\,d\bar y_2]+\ldots+[d\bar y_{2q-1}\,d\bar y_{2q}]).$$

Значит, окончательно:

$$\omega'=\left[\frac{d\bar y_2}{\bar y_2}\,\omega\right]+\bar y_2\,[d\bar y_1\,d\bar y_2]+\ldots+\bar y_2\,[d\bar y_{2q-1}\,d\bar y_{2q}]+$$
$$+[d\bar y_{2q+1}\,\omega_1]+\ldots+[d\bar y_p\,\omega_{p-2q}]+\ldots$$

Этому результату можно придать более наглядную форму, если положить

$$\overline{\omega} = \frac{1}{\overline{y}_2}\,\omega - \overline{y}_1\,d\overline{y}_2 - \ldots - \overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q}.$$

Действительно, мы получим тогда:

$$\overline{\omega}' = [d\overline{y}_{2q+1}\,\overline{\omega}_1] + \ldots + [d\overline{y}_p\,\overline{\omega}_{p-2q}] + [\overline{\omega}_{p-2q+1}\overline{\omega}_{p-2q+2}] + \\ + \ldots + [\overline{\omega}_{2n-p-1}\,\overline{\omega}_{2n-p}].$$

Теперь сразу видно, что известные первые интегралы были использованы полностью.

Кроме того, получены канонические соотношения:

$$\{\overline{y}_1\} = 1, \quad \{\overline{y}_i\} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, p);$$
$$(\overline{y}_1\,\overline{y}_2) = (\overline{y}_3\,\overline{y}_4) = \ldots = (\overline{y}_{2q-1}\,\overline{y}_{2q}) = \overline{y}_2,$$

все же остальные скобки равны нулю.

2°. *Форма ω — первого типа, формы φ и Φ приводятся к*

$$\varphi = \xi'_{2q+1}, \qquad \Phi = [\xi'_1\,\xi'_2] + \ldots + [\xi'_{2q-1}\,\xi'_{2q}].$$

В этом случае имеем

$$\omega' = [\overline{\omega}_1\,\overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1}\,\overline{\omega}_{2q}] + [(\overline{\omega}_{2q+1} - \omega)\,\omega_1] + \\ + \ldots + [\overline{\omega}_p\,\omega_{p-2q}] + [\omega_{p-2q+1}\,\omega_{p-2q+2}] + \ldots$$

Внешнее диференцирование правой части показывает, что можно положить

$$\overline{\omega}_{2q+2} = d\overline{y}_{2q+2}, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_p = d\overline{y}_p,$$
$$\overline{\omega}_{2q+1} = d\overline{y}_{2q+1} + \overline{y}_1\,d\overline{y}_2 + \ldots + \overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q},$$
$$\pi = [d\overline{y}_1\,d\overline{y}_2] + [d\overline{y}_3\,d\overline{y}_4] + \ldots + [d\overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q}].$$

Полагая, далее,

$$\overline{\omega} = -\omega + d\overline{y}_{2q+1} + \overline{y}_1 d\overline{y}_2 + \ldots + \overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q},$$

получим

$$\overline{\omega}' = [\overline{\omega}\,\omega_1] + [d\overline{y}_{2q+2}\,\overline{\omega}_2] + \ldots + [d\overline{y}_p\,\overline{\omega}_{p-2q}] + [\overline{\omega}_{p-2q+1}\,\overline{\omega}_{p-2q+2}] + \ldots$$

Эта формула показывает, что данные интегралы были использованы полностью.

Кроме того, получены канонические соотношения:

$$\{\overline{y}_{2q+1}\} = 1;$$
$$(\overline{y}_1\,\overline{y}_2) = \ldots = (\overline{y}_{2q-1}\,\overline{y}_{2q}) = 1;$$
$$(\overline{y}_1\,\overline{y}_{2q+1}) = -\overline{y}_1, \quad (\overline{y}_3\,\overline{y}_{2q+1}) = -\overline{y}_3, \quad \ldots, \quad (\overline{y}_{2q-1}\,\overline{y}_{2q+1}) = -\overline{y}_{2q-1};$$

все остальные скобки $\{\overline{y}_i\}$ и $(\overline{y}_i\,\overline{y}_j)$ равны нулю.

3°. *Форма ω — второго типа, а формы φ и Φ приводятся к*

$$\varphi = \xi_1', \quad \Phi = [\xi_1' \xi_2'] + \ldots + [\xi_{2q-1}' \xi_{2q}'].$$

В этом случае имеем

$$\omega' = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] + [(\omega + \overline{\omega}_2)\omega_1] +$$
$$+ [\overline{\omega}_{2q+1} \omega_2] + \ldots + [\overline{\omega}_p \omega_{p-2q+1}] + \ldots$$

Положим снова

$$\pi = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}]$$

и, продиференцировав внешним образом форму ω', оставим без внимания члены, содержащие

$$\omega + \overline{\omega}_2, \quad \overline{\omega}_{2q+1}, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_p, \quad \omega_{p-2q+2}, \quad \ldots$$

Получим

$$\pi' + [\pi\omega_1] + [\overline{\omega}_2' \omega_1] + [\overline{\omega}_{2q+1}' \omega_2] + \ldots + [\overline{\omega}_p' \omega_{p-2q+1}] = 0.$$

В силу этого тождества можно положить

$$\overline{\omega}_{2q+1} = d\overline{y}_{2q+1}, \quad \ldots, \overline{\omega}_p = d\overline{y}_p,$$

отсюда видно, что, рассматривая $\overline{y}_{2q+1}, \ldots, \overline{y}_p$ как постоянные, мы получим $\overline{\omega}_2' = -\pi$; эта форма будет ранга $2q$, так как уравнение $\overline{\omega}_2 = 0$ входит в состав системы, ассоциированной с $\overline{\omega}_2'$. Значит, можно положить

$$\overline{\omega}_2 = -(\overline{y}_1 d\overline{y}_2 + \ldots + \overline{y}_{2q-1} d\overline{y}_{2q}).$$

Пусть, наконец,

$$\overline{\omega} = \omega + \overline{\omega}_2 = \omega - \overline{y}_1 d\overline{y}_2 - \ldots - \overline{y}_{2q-1} d\overline{y}_{2q};$$

тогда

$$\overline{\omega}' = [\overline{\omega}\,\overline{\omega}_1] + [d\overline{y}_{2q+1} \overline{\omega}_2] + \ldots + [d\overline{y}_p \overline{\omega}_{p-2q+1}] + \ldots$$

Мы видим, что известные первые интегралы были использованы полностью, и приходим, кроме того, к следующим каноническим соотношениям:

$$\{\overline{y}_1\} = -\overline{y}_1, \quad \{\overline{y}_3\} = -\overline{y}_3, \quad \ldots, \quad \{\overline{y}_{2q-1}\} = -\overline{y}_{2q-1};$$
$$(\overline{y}_1 \overline{y}_2) = (\overline{y}_3 \overline{y}_4) = \ldots = (\overline{y}_{2q-1} \overline{y}_{2q}) = 1,$$

все остальные скобки $\{\overline{y}_i\}$ и $(\overline{y}_i \overline{y}_j)$ равны нулю.

4°. *Форма ω — второго типа, а формы φ и Φ приводятся к*

$$\varphi = \xi_{2q+1}', \quad \Phi = [\xi_1' \xi_2'] + \ldots + [\xi_{2q-1}' \xi_{2q}'].$$

В этом случае имеем

$$\omega' = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] + \ldots + [\overline{\omega}_{2q-1} \overline{\omega}_{2q}] + [\omega\overline{\omega}_{2q+1}] +$$
$$+ [\overline{\omega}_{2q+2} \omega_1] + \ldots + [\overline{\omega}_p \omega_{p-2q-1}] + \ldots$$

Сохраняя за буквой π прежнее значение и оставляя без внимания члены, содержащие

$$\overline{\omega}_{2q+2}, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_p, \quad \omega_{p-2q}, \quad \ldots, \quad \omega_{2n-1-p},$$

получим тождество:

$$\pi' + [\pi\overline{\omega}_{2q+1}] - [\omega\overline{\omega}'_{2q+1}] + [\overline{\omega}'_{2q+2}\,\omega_1] + \ldots + [\overline{\omega}'_p\,\omega_{p-2q-1}] = 0.$$

Внешние производные $\overline{\omega}'_{2q+1}, \overline{\omega}'_{2q+2}, \ldots, \overline{\omega}'_p$ равны нулю вместе с $\overline{\omega}_{2q+1}, \ldots, \overline{\omega}_p$, значит, можно положить

$$\overline{\omega}_{2q+1} = \frac{d\overline{y}_{2q+1}}{\overline{y}_{2q+1}}, \quad \overline{\omega}_{2q+2} = d\overline{y}_{2q+2}, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_p = d\overline{y}_p.$$

Если теперь рассматривать $\overline{y}_{2q+2}, \ldots, \overline{y}_p$ как постоянные, то внешняя производная формы $\overline{y}_{2p+1}\pi$ будет равна нулю. Поэтому можно положить:

$$\overline{y}_{2q+1}\,\pi = [d\overline{y}_1\,d\overline{y}_2] + \ldots + [d\overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q}].$$

Наконец, полагая

$$\overline{\omega} = \overline{y}_{2q+1}\,\omega - \overline{y}_1\,d\overline{y}_2 - \ldots - \overline{y}_{2q-1}\,d\overline{y}_{2q},$$

получим

$$\overline{\omega}' = [d\overline{y}_{2q+2}\overline{\omega}_1] + \ldots + [d\overline{y}_p\,\omega_{p-2q-1}] + \ldots$$

И в этом случае мы видим, что данные интегралы использованы полностью; и здесь мы получаем канонические соотношения:

$$\{\overline{y}_{2q+1}\} = \overline{y}_{2q+1};$$

$$(\overline{y}_1\,\overline{y}_2) = (\overline{y}_3\,\overline{y}_4) = \ldots = (\overline{y}_{2q-1}\,\overline{y}_{2q}) = \overline{y}_{2q+1};$$

все остальные скобки $\{\overline{y}_i\}$, $(\overline{y}_i\,\overline{y}_j)$ равны нулю.

Глава XIV.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИНВАРИАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПФАФФА.

Общий метод интегрирования.

137. Мы уже встречались (п. 105) с характеристической системой уравнения Пфаффа

$$\omega \equiv a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_r\,dx_r = 0; \tag{1}$$

она состоит из уравнений

$$\omega = 0, \quad \frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_1)}}{a_1} = \frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_2)}}{a_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_r)}}{a_r}, \tag{2}$$

из которых последние $r-1$ образуют систему, ассоциированную с внешней квадратичной формой ω', если предположить, что переменные в них связаны соотношением $\omega=0$.

И эта характеристическая система встречалась уже в предыдущей главе (п. 129) в связи с пфаффовым выражением ω второго типа.

Число независимых уравнений характеристической системы (2) всегда нечетно; действительно, учитывая соотношение $\omega=0$, всегда можно представить ω' в виде

$$\omega' = [\omega_1\omega_2] + \ldots + [\omega_{2n-1}\,\omega_{2n}] \quad (\mathrm{mod}\cdot\omega),$$

где символами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ обозначены линейные диференциальные формы, независимые между собой и независимые от ω. Тогда характеристическая система уравнения (1) будет определяться уравнениями

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0.$$

Как видим, n представляет собой наименьшее целое число, такое, что форма $[\omega\,\omega'^n]$ не равна нулю. Класс уравнения $\omega=0$ равен степени этой формы.

138. Нетрудно найти каноническую форму уравнения (1). Действительно, пусть y_1 будет каким-нибудь первым интегралом характеристической системы (2); если приравнять y_1 произвольной постоянной C_1, а dy_1 нулю, то ранг характеристической системы нового уравнения (1) уменьшится по крайней мере на единицу, и *так как он должен быть нечетным*, то он уменьшится по крайней мере на две единицы. Пусть y_2 — первый интеграл новой характеристической системы. Полагая

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0,$$

понизим ранг характеристической системы данного уравнения по крайней мере на 4 единицы и т. д. В конце концов, после не более $n+1$ операций, уравнение $\omega=0$ будет удовлетворяться тождественно; иными словами, это уравнение должно иметь вид

$$z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_q\,dy_q + dy_{q+1} = 0 \quad (q \leqslant n).$$

Число q, впрочем, должно равняться n, потому что в противном случае уравнение (1) могло бы быть записано с помощью числа переменных меньшего, чем $2n+1$.

Значит, *если характеристическая система уравнения* (1) *имеет ранг* $2n+1$, *то это уравнение может быть приведено к виду*

$$dy_{n+1} + z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_n\,dy_n = 0,$$

а функции

$$y_1, \ \ldots, \ y_{n+1}, \ z_1, \ \ldots, \ z_n$$

образуют систему независимых первых интегралов характеристических уравнений.

Мы видим, что *этот метод приведения уравнения* (1) *к каноническому виду и, следовательно, интегрирования его характеристи-*

ческой системы, требует применения $n+1$ последовательных операций порядков

$$2n+1, \quad 2n-1, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1$$

и диференцирований.

139. Можно заметить, как и в главе XII (п. 121), что знание $N \geqslant n+1$ первых интегралов

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_N,$$

таких, что уравнение (1) тождественно удовлетворяется, если их приравнять произвольным постоянным, позволяет закончить интегрирование характеристических уравнений с помощью только диференцирований. В самом деле, уравнение (1) может быть представлено, и притом единственным образом, в виде

$$dy_N + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \ldots + z_{N-1} dy_{N-1} = 0,$$

причем можно доказать, что коэфициенты $z_1, \ldots, z_{N-1}$ будут, в свою очередь, первыми интегралами характеристических уравнений.

Став на более общую точку зрения, можно поставить вопрос так: к чему приводится интегрирование характеристической системы, когда известно некоторое число r независимых первых интегралов этой системы?

140. *Первые интегралы в инволюции.* Мы скажем, что два первых интеграла f и g характеристической системы уравнения (1) находятся *в инволюции*, если

$$[\omega\omega'^{n-1} df\, dg] = 0; \tag{3}$$

это определение, очевидно, независимо от выбора переменных, а также от произвольного множителя, на который может быть умножена левая часть уравнения (1).

Из того, что два первых интеграла находятся в инволюции, вытекает важное следствие: *ранг характеристической системы уменьшается на четыре единицы, если предположить, что переменные связаны соотношениями*

$$f = C, \quad g = C',$$

где C и C' — две произвольные постоянные. Действительно, условие (3) показывает, что если предположить $df = dg = 0$ и $\omega = 0$, то ранг ω' будет меньше $2n-2$ и, следовательно, равен $2n-4$.

Использование известных интегралов.

141. *Случай, когда известны p независимых первых интегралов $y_1, \ldots, y_p$, находящихся попарно в инволюции.* В этом случае из рассуждений главы VI (п. 67) вытекает, что если связать диференциалы соотношениями

$$\omega = 0, \quad dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_p = 0.$$

то ранг формы ω' сведется к $2n-2p$. Характеристическая система уравнения (1), в предположении, что переменные связаны соотношениями

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \ldots, \quad y_p = C_p,$$

будет, стало быть, ранга $2n-2p+1$, и ее интегрирование потребует операций порядка

$$2n-2p+1, \quad 2n-2p-1, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1,$$

а также диференцирований.

В указанном случае ранг характеристической системы сразу уменьшается на максимальное число 20 единиц.

142. *Случай, когда не все данные первые интегралы находятся попарно в инволюции.* Здесь уменьшение ранга характеристической системы, когда данные первые интегралы приравниваются постоянным, не достигает наибольшего возможного числа $2p$. Но зато *можно определить абсолютный линейный интегральный инвариант характеристических уравнений*, что в некоторых случаях позволяет продвинуть решение проблемы интегрирования значительно дальше, чем в первом случае, который может казаться самым благоприятным.

Действительно, предположим, что y_1 и y_2 — два первых интеграла характеристических уравнений, не находящиеся в инволюции; будем иметь

$$n\,[\omega\omega'^{n-1}\,dy_1\,dy_2] = A\,[\omega\omega'^n],$$

где коэфициент A отличен от нуля. Существует бесконечное множество функций m (неизвестных), таких, что форма

$$\bar{\omega} = m\omega$$

будет инвариантной, т. е. будет выражаться через первые интегралы характеристических уравнений и их диференциалы. Для такой формы имеем

$$\bar{\omega}' = m\omega' + [dm\,\omega]$$

и, следовательно,

$$[\bar{\omega}\,\bar{\omega}'^{\,n-1}dy_1\,dy_2] = m^n\,[\omega\omega'^{\,n-1}dy_1\,dy_2],$$

$$[\bar{\omega}\,\bar{\omega}'^{\,n}] = m^{n+1}\,[\omega\omega'^n].$$

Путем сравнения получим

$$n\,[\bar{\omega}\,\bar{\omega}'^{\,n-1}dy_1 dy_2] = \frac{A}{m}\,[\bar{\omega}\,\bar{\omega}'^{\,n}].$$

Обе формы в прямых скобках, очевидно, инвариантны; следовательно, $\frac{A}{m}$ будет первым интегралом; значит,

$$\frac{A}{m}\,\bar{\omega} = A\omega$$

есть инвариантная форма. Этот результат нам и нужно было получить.

Если известны два первых интеграла y_1, y_2, *таких,* что *функция* A, *определенная равенством*

$$n\,[\omega\omega'^{n-1} dy_1\, dy_2] = A\, [\omega\omega'^{n}],$$

отлична от нуля, то линейная форма $A\omega$ *будет абсолютной инвариантной формой.*

Заметим, кроме того, что переменными в наименьшем числе, с помощью которых может быть выражена форма $A\omega$, будут, очевидно, $2n+1$ первых интегралов данных характеристических уравнений; *характеристическая система формы* $A\omega$ *тождественна с характеристической системой уравнения* (1), следовательно, имеет нечетный ранг. Итак, форма $A\omega$ — первого типа.

143. Предыдущую теорему можно связать с методом интегрирования, допускающим весьма широкое обобщение и состоящим в интегрировании характеристических уравнений *формы* $u\omega$, где u — некоторая *вспомогательная* переменная. Ясно, что всякому решению этой системы будет соответствовать решение характеристической системы *уравнения* $\omega=0$, именно то, которое получится при исключении вспомогательной переменной u из соотношений, определяющих это решение.

Очевидно, форма $u\omega$ — второго типа; общий метод интегрирования ее характеристической системы, изложенный в п. 129, не будет отличаться от изложенного в п. 138 применительно к характеристической системе уравнения $\omega=0$. *Значит, если об интегралах a priori ничего не известно,* то изучение формы $u\omega$ вместо уравнения $\omega=0$ никакой выгоды не принесет. Но если *a priori* известны первые интегралы характеристической системы, то преимущество исследования формы $u\omega$ становится очевидным, потому что к интегрированию характеристической системы этой формы можно приложить метод, изложенный в п. 135. В частности, если известны два первых интеграла y_1 и y_2 характеристической системы уравнения $\omega=0$, то

$$\{y_1\}=0, \quad \{y_2\}=0,$$

и вычисление скобок $(y_1 y_2)$, определенных (п. 133) соотношением

$$(n+1)[(u\omega)'^{n} dy_1 dy_2] = (y_1 y_2)(u\omega)'^{n+1},$$

дает, если развернуть обе части и приравнять члены, содержащие du,

$$(y_1 y_2) = \frac{A}{u},$$

где A — выражение, определенное в предыдущем пункте. Можно продолжать применение общего метода, сохраняя вспомогательную переменную u, составляя выражение $\left\{\frac{A}{u}\right\}$, далее, составляя скобки этого выражения с y_1, y_2 и т. д. Можно также использовать то обстоятельство, что $\frac{A}{u}$ является первым интегралом характеристической системы формы $u\omega$, значит, форма $A\omega$ сама является инвариантной.

Приложение к уравнениям в частных производных первого порядка.

144. Проблема интегрирования характеристической системы уравнения Пфаффа находит себе непосредственное приложение в теории уравнений в частных производных первого порядка. Действительно, интегрировать уравнение

$$F\left(z,\ x_1, \ldots, x_n;\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{4}$$

или, употребляя классическую систему обозначений,

$$F(z,\ x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n) = 0$$

—это значит определить $n+1$ функций $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих уравнению (4) и уравнению Пфаффа:

$$\omega \equiv dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0. \tag{5}$$

Если представим себе, что один из $2n+1$ аргументов z, x_i, p_i выражен с помощью уравнения (4) через $2n$ других, то пфаффово уравнение (5) будет содержать только $2n$ переменных, а потому его характеристическая система необходимо будет *нечетного* ранга $2n-1$. Следовательно, если учесть уравнение (4), то пфаффово уравнение (5) может быть приведено к каноническому виду

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_{n-1} dX_{n-1} = 0, \tag{6}$$

где $Z, X_1, \ldots, X_{n-1}, P_1, \ldots, P_{n-1}$ суть $2n-1$ независимых функций; это первые интегралы характеристической системы уравнения (5).

Предположим теперь, что мы умеем привести уравнение (5) к каноническому виду (6). Интегрирование уравнения (4) сводится, в сущности, к определению $n+1$ независимых соотношений [в число которых входит данное соотношение (4)] между переменными $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, следствием которых было бы уравнение (5); чтобы достигнуть этого, достаточно установить между $Z, X_1, \ldots, X_{n-1}, P_1, \ldots, P_{n-1}$ n независимых соотношений, следствием которых было бы уравнение (6). Этого можно добиться достаточно общим приемом, положив

$$Z = f(X_1, \ldots, X_{n-1}),$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad \ldots, \quad P_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial X_{n-1}},$$

где f — произвольная функция $n-1$ аргументов. Еще более общий прием состоит в том, что между $Z, X_1, \ldots, X_{n-1}$ устанавливается некоторое число $h \leqslant n$ независимых соотношений

$$\Phi_1(Z,\ X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_h = 0$$

и к ним присоединяются соотношения, получаемые в результате исключения однородных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ из $n-1$ уравнений:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z}\right) + \ldots + \lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right) + \ldots + \lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right) = 0.$$

145. Уравнения

$$\begin{aligned} &X_1 = a_1, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = a_{n-1}; \\ &P_1 = b_1, \quad \ldots, \quad P_{n-1} = b_{n-1}; \\ &Z = c \end{aligned}$$

определяют одномерные многообразия, именно, характеристические многообразия уравнения Пфаффа (5) [относительно которого предположено, что переменные связаны соотношением (4)]. *Их называют характеристиками уравнения в частных производных* (4). Сразу видно, что любая интегральная поверхность представляет собой геометрическое место характеристик.

Нетрудно составить диференциальные уравнения характеристик; в самом деле, они представляют собой уравнения системы, ассоциированной с ω', причем предполагается, что диференциалы переменных связаны соотношением $\omega = 0$ и, *кроме того, соотношением* $dF = 0$. Значит, их можно получить (п. 105), присоединяя к уравнению (5) уравнения

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \omega'}{\partial (dz)} & \frac{\partial \omega'}{\partial (dx_1)} & \ldots & \frac{\partial \omega'}{\partial (dx_n)} & \frac{\partial \omega'}{\partial (dp_1)} & \ldots & \frac{\partial \omega'}{\partial (dp_n)} \\ 1 & -p_1 & \ldots & -p_n & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial F}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \end{matrix} \right\| = 0,$$

которые могут быть записаны в виде

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Это — классические уравнения характеристик.

Метод Коши.

146. Изложенный только что метод сводится, в сущности, к интегрированию характеристической системы и приведению уравнения (5) к каноническому виду (6), причем это приведение будет следствием интегрирования системы, если последнее провести надлежащим образом (п. 138). Нетрудно видеть, что, каков бы ни был процесс интегрирования характеристической системы, раз это интегрирование выполнено, то и приведение уравнения (5) к нормальной форме наверняка возможно. Действительно, для этого достаточно определить такие первые интегралы, которые при заданном численном значении x_n^0 переменной x_n обращаются соответственно в

$$z, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_n.$$

Если эти первые интегралы обозначить через

$$Z, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \quad P_1, \quad \ldots, \quad P_n$$

и учесть, что они необходимо должны быть связаны соотношением

$$F(Z, X_1, \ldots, X_{n-1}, x_n^0; P_1, \ldots, P_n) = 0,$$

то соотношение (5), которое, как известно, может быть выражено с помощью первых интегралов, сведется, очевидно, к

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_{n-1}\,dX_{n-1} = 0.$$

Именно в этом состоит сущность *метода Коши.*

Метод Лагранжа.

147. Метод *полного интеграла* Лагранжа тоже легко связывается с нашей точкой зрения. Уравнение

$$V(z, x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{8}$$

определяет полный интеграл, если оно определяет функцию z, удовлетворяющую уравнению (4), каковы бы ни были n произвольных *постоянных* $a_1, \ldots, a_n$. Уравнение (4) является, впрочем, единственным, которому удовлетворяют все функции z, определенные соотношением (8), потому что исключение $a_1, \ldots, a_n$ из уравнения (8) и вытекающих из него уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

приводит, вообще говоря (мы будем считать, что именно этот общий случай имеет место), к единственному соотношению, которое, естественно, и будет уравнением (4).

Раз уравнение (4) является результатом исключения $a_1, \ldots, a_n$ из $n+1$ уравнений (8) и (9), — значит, интегрирование уравнения (4) сводится к решению уравнения Пфаффа (5), в предположении, что $3n+1$ переменных z, x_i, p_i, a_i связаны $n+1$ соотношениями (8) и (9). Учитывая эти соотношения, получим:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial z} (dz - p_1 \, dx_1 - \ldots - p_n \, dx_n) + \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n.$$

Значит, пфаффово уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0;$$

но это последнее само собой приводится к нормальной форме, если положить

$$X_1 = a_1, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = a_{n-1}, \quad Z = a_n,$$

$$P_1 = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}, \quad \ldots, \quad P_{n-1} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_{n-1}}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}.$$

Мы видим, что характеристики определяются уравнениями:

$$V = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + b_1 \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} + b_{n-1} \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Это — классический результат.

148. Приложим теорему п. 142 к частному случаю одного уравнения с двумя независимыми переменными:

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{10}$$

Знание двух независимых первых интегралов u и v характеристической системы, если эти интегралы не находятся в инволюции, приводит к определению линейного интегрального инварианта характеристической системы. Этот интегральный инвариант равен $A\omega$, причем A определяется равенством

$$[\omega \, du \, dv] = A [\omega\omega'],$$

или, лучше, поскольку здесь предполагается, что переменные связаны соотношением (10), — равенством

$$[dF \omega \, du \, dv] = A [dF \omega\omega'].$$

Выделив, в частности, члены, содержащие $[dx\,dz\,dp\,dq]$, найдем:

$$A = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial q}} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}.$$

Значит, если определитель в правой части этого равенства отличен от нуля, то выражение $A(dz - p\,dx - q\,dy)$ есть инвариантная форма для уравнений характеристик.

Уравнения в частных производных первого порядка, допускающие бесконечно малое преобразование.

149. Если уравнение в частных производных первого порядка

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{4}$$

допускает бесконечно малое преобразование Af над переменными $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, то это значит, что любая система из $n+1$ соотношений, связывающих эти $2n+1$ переменных, которая определяет интегральное многообразие, переходит в результате преобразования в другую систему из $n+1$ соотношений, снова определяющих некоторое интегральное многообразие. Значит, при учете уравнения (4), пфаффово уравнение

$$\omega \equiv dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0$$

допускает бесконечно малое преобразование Af. Отсюда немедленно следует (п. 98), что линейная форма

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)} = \frac{\delta z - p_1\,\delta x_1 - p_2\,\delta x_2 - \ldots - p_n\,\delta x_n}{A(z) - p_1 A(x_1) - p_2 A(x_2) - \ldots - p_n A(x_n)}$$

инвариантна по отношению к диференциальным уравнениям характеристик.

Таким образом, знание бесконечно малого преобразования позволяет найти линейный интегральный инвариант уравнений характеристик, а это, в свою очередь, сводит интегрирование данного уравнения, которое было проблемой второго типа и требовало применения операций порядков

$$2n+1, \quad 2n-1, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1,$$

к проблеме первого типа, требующей применения операций порядков

$$2n, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad 2, \quad 0.$$

150. Классическим примером является случай уравнения (1), не содержащего явно z: в этом случае очевидно, что из любого решения уравнения можно получить другое решение, прибавляя к первому произвольное постоянное. Иными словами, данное уравнение допускает бесконечно малое преобразование

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Абсолютный интегральный инвариант уравнений характеристик будет иметь вид

$$\int \omega_\delta = \int \delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n.$$

Способ интегрирования уравнений этого рода вытекает из теории, изложенной в главе XII. Характеристическими уравнениями формы ω' будут здесь

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Если определены $n-1$ первых интегралов, находящихся попарно в инволюции, то интегрирование характеристических уравнений формы ω сводится к квадратуре, потому что ω становится полным диференциалом, если приравнять $n-1$ первых интегралов произвольным постоянны

Первый метод Якоби.

151. Первый метод Якоби интегрирования уравнений в частных производных первого порядка связан с только что изложенными соображениями. Якоби сводит произвольное уравнение (4) к уравнению, не содержащему явно неизвестной функции, именно

$$F\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) = 0.$$

Диференциальные уравнения, которые нужно проинтегрировать, являются характеристическими уравнениями абсолютной инвариантной формы

$$\delta V - u(\delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n),$$

где положено

$$u = \frac{\partial V}{\partial z};$$

при этом $2n+3$ переменных этой формы связаны соотношением (4); эти диференциальные уравнения допускают *относительный* интегральный инвариант

$$\int u(\delta z - p_1 \delta x_1 - \ldots - p_n \delta x_n); \qquad (11)$$

поэтому прежде всего нужно проинтегрировать характеристические уравнения этого инварианта (что́ делается по методу, изложенному в главе XII).

Метод Якоби приближается к методу, указанному в п. 143, с той разницей, что последний использует интеграл (11) как *абсолютный* интегральный инвариант; в методе же Якоби он используется как *относительный* интегральный инвариант. Впрочем, метод Якоби приводит к операциям порядка

$$2n+2, \quad 2n, \quad \ldots, \quad 2, \quad 0$$

вместо

$$2n+1, \quad 2n-1, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1.$$

Его преимущество состоит в том, что он позволяет использовать все первые интегралы, полученные в результате применения теоремы Пуассона-Якоби. Но это же преимущество сохраняется и при методе п. 143, который полностью использует данные первые интегралы.

Приведение некоторых диференциальных уравнений к уравнению в частных производных первого порядка.

152. Теперь можно стать на точку зрения, противоположную той, которая проведена в предыдущих пунктах.

Возьмем сначала уравнение Пфаффа с четным числом $2s$ переменных, но предположим, что только $s+1$ коэфициентов отличны от нуля:

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_{s+1} dx_{s+1} = 0.$$

Это уравнение Пфаффа будет, очевидно, иметь ту же характеристическую систему, что уравнение в частных производных первого порядка, содержащее s независимых переменных $x_1, \ldots, x_s$, которое получится, если положить

$$x_{s+1} = z, \quad a_1 + p_1 a_{s+1} = 0, \quad \ldots, \quad a_s + p_s a_{s+1} = 0$$

и исключить $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{2s}$ из этих $s+1$ уравнений. Нужно, конечно, заранее предположить, что исключение возможно и приводит к единственному соотношению.

153. Рассмотрим, далее, систему диференциальных уравнений, допускающую линейный относительный интегральный инвариант $\int \omega$, где форма ω зависит от $2s+1$ переменных, а $[\omega'^s]$ не равно нулю. Рассматриваемые диференциальные уравнения образуют характеристическую систему формы ω'. Их интегрирование может быть сведено к интегрированию одного уравнения в частных производных первого порядка, не содержащего явно неизвестной функции, если только в выражении ω часть коэфициентов при диференциалах (именно s) равна нулю, т. е. если

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_{s+1} dx_{s+1}.$$

Действительно, рассмотрим уравнение Пфаффа

$$dV - \omega \equiv dV - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 - \ldots - a_{s+1} dx_{s+1} = 0$$

и положим

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \quad \ldots, \quad p_{s+1} = a_{s+1};$$

исключая $x_{s+2}, \ldots, x_{2s+1}$ из этих $s+1$ уравнений, приходим к соотношению

$$F(x_1, \ldots, x_{s+1}; p_1, \ldots, p_{s+1}) = 0, \tag{12}$$

т. е. как раз к тому уравнению в частных производных, о котором шла речь. Диференциальные уравнения характеристик этого уравнения состоят из характеристических уравнений формы ω', к которым прибавлено соотношение

$$dV - \omega = 0.$$

Нетрудно отдать себе отчет в том, что метод интегрирования характеристических уравнений формы ω', указанный в главе XII, приводит к тем же вычислениям, что и разыскание характеристик уравнения в частных производных (12).

Интегральному инварианту динамики $\int \omega$, где

$$\omega = p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n - H\delta t,$$

соответствует в качестве уравнения (12) уравнение Якоби:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0.$$

154. Таким образом, метод Якоби интегрирования уравнений динамики основывается на тождестве двух проблем интегрирования: проблемы интегрирования характеристической системы линейного относительного интегрального инварианта $\int \omega$ и проблемы интегрирования уравнений характеристик уравнения в частных производных первого порядка, допускающего бесконечно малое преобразование (например, не содержащего явно неизвестной функции). В обоих случаях характер проблемы определяется существованием интегрального инварианта $\int \omega$.

Этот метод приведения к уравнению в частных производных первого порядка удается лишь в том случае, если форма ω с $2s+1$ переменными имеет s коэфициентов, равных нулю. Но не следует думать, что в случае, когда эта особенность не имеет места, интегрирование характеристических уравнений формы ω' представляет более трудную проблему, чем разыскание характеристик уравнения в частных производных первого порядка, не содержащего явно неизвестной функции, или, что в сущности то же, чем интегрирование *канонической* системы диференциальных уравнений. В сущности, *важность канонических уравнений связана единственно с тем их свойством, что они допускают интегральный инвариант* $\int \omega$, *а вовсе не с их простым видом*; существование интегрального инварианта является основным свойством, из которого вытекают все остальные.

Замечания о характере важнейших приложеиий метода Якоби.

155. Большинство плодотворных приложений метода Якоби в динамике фактически связано с упрощениями, возможными при разыскании полного интеграла уравнения в частных производных Якоби, левая часть которого имеет вид суммы функций, содержащих, каждая, лишь часть переменных $q_1, \ldots, q_n$, отличных от t. Но эти упрощения можно обнаружить и независимо от теории уравнений в частных производных первого порядка и полного интеграла.

Пусть, в самом деле, ω — линейная диференциальная форма от $2s+1$ переменных, которые мы обозначим

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_{2s}, \quad t.$$

Предположим, что ω может быть представлена как сумма p членов,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p,$$

каждый из которых содержит некоторое число $2h_i$ переменных x и переменную t, причем переменные x, входящие в две какие-нибудь из форм $\omega_1, \ldots, \omega_p$, различны; следовательно,

$$s = h_1 + h_2 + \ldots + h_p.$$

Если предположить, что внешняя квадратичная форма ω' имеет ранг $2s$, то необходимо, чтобы формы $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_p'$ имели, соответственно, ранг $2h_1, 2h_2, \ldots, 2h_p$. Приведение всех этих форм к каноническому виду влечет за собой приведение к каноническому виду формы ω'. Следовательно, *интегрирование характеристической системы формы ω' сводится к интегрированию характеристических систем форм $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_p'$*, и p соответствующих проблем могут быть решены независимо друг от друга.

Еще бо́льшее упрощение будет иметь место в том случае, если число k_i переменных x (различное для различных форм ω_i), которые входят, вместе с t, в состав этих форм, не всегда будет четным. В этом случае переменная t будет первым интегралом характеристических уравнений формы ω'; действительно, если дать t произвольное постоянное значение, то ранг квадратичной формы ω_i' сведется к

$$k_i \text{ (или меньшему числу) для } k_i \text{ четного,}$$
$$k_i - 1 \text{ (или меньшему числу) для } k_i \text{ нечетного;}$$

но $2s$ равно сумме всех k_i; значит, при t постоянном ранг ω' будет меньше $2s$, что и требовалось доказать. Кроме того, мы видим, что могут быть только *два* нечетных числа среди k_i, и приведение ω' к нормальной форме, если положить t равным постоянной, дается путем приведения к нормальным формам $\omega_1', \ldots, \omega_p'$, если в этих последних также положить $t = \text{const}$.

Глава XV.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ НЕСКОЛЬКО ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ.

Случай, когда известно столько же интегральных инвариантов, сколько имеется неизвестных функций.

156. В этом курсе мы не будем рассматривать общей проблемы интегрирования диференциальных уравнений, допускающих любое число интегральных инвариантов. Ограничимся наиболее простым случаем, когда система из n обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями допускает n линейных инвариантных форм (независимых)

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

т. е. n линейных абсолютных интегральных инвариантов

$$\int \omega_1, \quad \int \omega_2, \quad \ldots, \quad \int \omega_n.$$

В этом частном случае данные диференциальные уравнения могут быть записаны так:

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0. \tag{1}$$

Так как внешние квадратичные формы $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n'$ являются инвариантными, то они могут быть выражены через $\omega_1, \ldots, \omega_n$ формулами вида

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{1, \ldots, n} c_{iks} [\omega_i \omega_k] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Коэфициенты c_{iks} являются, очевидно, первыми интегралами данной системы диференциальных уравнений. Мы сейчас увидим, что задачу всегда можно привести к случаю, когда c_{iks} постоянны.

Действительно, предположим, что среди интегралов c_{iks} имеется некоторое число r независимых, которые мы обозначим

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_r;$$

коэфициенты c_{iks} будут определенными функциями этих r интегралов. Каждый диференциал dy_i, в свою очередь, является инвариантной формой, которую можно линейно выразить через $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$dy_i = b_{i1}\omega_1 + b_{i2}\omega_2 + \ldots + b_{in}\omega_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Коэфициенты b_{ik}, в свою очередь, будут первыми интегралами; если среди них имеется r' независимых между собой и независимых от y_i, то их диференциалы $dy_{r+1}, \ldots, dy_{r+r'}$ также можно выразить в виде функций, линейных относительно ω_i, и новые коэфициенты дадут новые первые интегралы и т. д. Наступит момент, когда этот процесс закончится, и мы придем к некоторому числу $\varrho \leqslant n$ первых интегралов $y_1, \ldots, y_\varrho$, таких, что коэфициенты c_{iks} формул (2) и коэфициенты b_{ik} формул

$$dy_i = b_{i1}\omega_1 + \ldots + b_{in}\omega_n \qquad (i = 1, \ldots, \varrho)$$

будут определенными функциями от $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$.

После этого допустим, для определенности, что определитель, составленный из первых ϱ столбцов матрицы коэфициентов b_{ik}, отличен от нуля. Тогда можно заменить ϱ инвариантных форм $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ инвариантными формами $dy_1, \ldots, dy_r$. Если приравнять $y_1, \ldots, y_\varrho$ произвольным постоянным, то новая система уравнений будет иметь $n-\varrho$ инвариантных форм $\omega_{\varrho+1}, \ldots, \omega_n$, и мы получим

$$\omega'_s = \sum_{(ik)}^{\varrho+1, \ldots, n} c_{iks} [\omega_i \omega_k] \qquad (s = \varrho+1, \varrho+2, \ldots, n),$$

причем все коэфициенты c_{iks} *будут теперь константами.*

157. Итак, рассмотрим случай, когда все коэфициенты c_{iks} в формулах (2) являются постоянными. Легко усмотреть, что, обратно, существование соотношений вида (2) имеет следствием инвариантность форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$ по отношению к диференциальным уравнениям (1): в самом деле, характеристическая система совокупности форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$ получается, если к уравнениям (1) прибавить уравнения систем, ассоциированных с $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ (п. 78); но все эти уравнения являются следствием уравнений (1).

Если подвергнуть формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейному преобразованию *с постоянными коэфициентами*

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1n}\omega_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\omega}_n &= a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \ldots + a_{nn}\omega_n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то и эти новые формы $\overline{\omega}_i$ будут инвариантными; значит, будут иметь место соотношения

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(ik)}^{1, \ldots, n} \overline{c}_{iks} [\overline{\omega}_i \overline{\omega}_k]$$

с новыми *константами* $\overline{c}_{iks}$. Условимся говорить, что таблица коэфициентов $\overline{c}_{iks}$ имеет ту же структуру, что и таблица c_{iks}.

Может случиться, что постоянные коэфициенты a_{ij} линейной подстановки (4) можно будет выбрать так, чтобы в выражения первых производных $\overline{\omega}'_1, \ldots, \overline{\omega}'_\nu$ в числе $\nu < n$ входили только $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_\nu$, т. е. так, чтобы имели место соотношения:

$$\overline{c}_{\nu+i, k, s} = \overline{c}_{k, \nu+i, s} = c_{\nu+i, \nu+j, s} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k, s = 1, 2, \ldots, \nu; \\ i, j = 1, 2, \ldots, n-\nu \end{pmatrix}.$$

В этом случае формы $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_\nu$ будут инвариантны по отношению к *вполне интегрируемой* системе Пфаффа

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \ldots = \overline{\omega}_\nu = 0.$$

Если проинтегрировать эту систему и приравнять ее первые интегралы произвольным постоянным, то данная система сведется к аналогичной, но состоящей уже из $n - \nu$ уравнений с $n - \nu$ неизвестными функциями.

Назовем таблицу коэфициентов c_{iks} *простой*, если нельзя найти такую линейную подстановку (4) с постоянными коэфициентами, которая позволила бы осуществить указанное приведение. Мы видим, что *данная система диференциальных уравнений может быть сведена к последовательным системам, у каждой из которых таблица* c_{iks} — *простая.* Каждой простой таблице соответствует отдельная задача интегрирования.

158. Оставляя пока в стороне этот метод приведения, представим себе другую систему диференциальных уравнений

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \ldots = \overline{\omega}_n = 0, \tag{1'}$$

допускающую n инвариантных форм $\overline{\omega}_i$, а стало быть, и соотношения

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks} [\overline{\omega}_i \overline{\omega}_k], \tag{2'}$$

в которых коэфициенты c_{iks} имеют те же численные значения, что и в формулах (2). Пусть

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$
$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

будут две системы независимых первых интегралов: одна для уравнений (1), другая для уравнений (1'). Тогда $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ могут быть выражены через y_i и их диференциалы, а $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n$ — через z_i и их диференциалы. *Всегда можно так выбрать первые интегралы* z_i, *чтобы* $\overline{\omega}_i$ *выражались через* z_i *и* dz_i *так же, как* ω_i *выражаются через* y_i *и* dy_i. Иными словами, если это условие и не выполнено, то во всяком случае можно найти такие функции

$$f_1(y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad f_n(y_1, \ldots, y_n),$$

чтобы при

$$z_1 = f_1(y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad z_n = f_n(y_1, \ldots, y_n)$$

$\overline{\omega}_i$ стали соответственно равны ω_i. Для этого достаточно проинтегрировать уравнения в полных диференциалах

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\omega}_1 - \omega_1 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\omega}_n - \omega_n = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

в которых z_i являются искомыми функциями независимых переменных y_i. Эта пфаффова система (5) *вполне интегрируема* (п. 102), потому что внешние производные

$$\overline{\omega}'_s - \omega'_s = \sum c_{iks}[\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k] - \sum c_{iks}[\omega_i\omega_k]$$

левых частей входящих в ее состав уравнений обращаются в нуль в силу самих уравнений (5).

В частности, это показывает, что интегрирование систем (1) и (1′) — проблемы *существенно* одной природы, в том смысле, что любой прием интегрирования, *использующий лишь то обстоятельство, что данные формы* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — *инвариантны*, может быть приложен параллельно к системам (1) и (1′); всякому продвижению в интегрировании системы (1) будет соответствовать такое же продвижение в интегрировании системы (1′).

Группа, сохраняющая данные инварианты.

159. Вернемся к системе (1) и представим себе, что выбраны n независимых первых интегралов

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n.$$

Можно найти бесконечное число иных систем из n первых интегралов

$$\overline{y}_1, \quad \overline{y}_2, \quad \ldots, \quad \overline{y}_n,$$

таких, что формы ω_s выразятся через $\overline{y}_i$ и их диференциалы так же, как они выражаются через y_i и их диференциалы. Для этого достаточно проинтегрировать систему Пфаффа

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\omega}_1 - \omega_1 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\omega}_n - \omega_n = 0, \end{array}\right\} \tag{6}$$

где через $\overline{\omega}_s$ обозначены такие же функции от $\overline{y}_i$ и $d\overline{y}_i$, какими являются ω_s по отношению к y_i и dy_i. В этой пфаффовой системе будем смотреть на переменные $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$, как на искомые функции независимых переменных $y_1, \ldots, y_n$. Эта система будет вполне интегрируемой в силу тех же соображений, которые были сделаны по поводу системы (5). Значит, существуют функции

$$\overline{y}_s = f_s(y_1, \ldots, y_n;\ C_1, \ldots, C_n) \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

зависящие от n *произвольных постоянных* и удовлетворяющие указанным выше условиям.

Уравнения (7) определяют бесконечное множество преобразований над первыми интегралами $y_1, \ldots, y_n$, *сохраняющих исходные данные* *нашей проблемы*, т. е. оставляющих инвариантными формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Эти преобразования образуют группу G, так как, выполняя последовательно два преобразования вида (7), мы получим результирующее преобразование того же вида. Эта группа G — конечная группа с n параметрами: *это наиболее широкая группа преобразований первых интегралов данной системы, сохраняющая данные инвариантные формы*. Ясно, что польза, которую можно извлечь из знания этих n инвариантных форм, зависит от природы этой группы. Здесь мы снова встречаемся с общим явлением, имеющим место во всех случаях, когда *a priori* известны интегральные инварианты, системы инвариантных уравнений, бесконечно малые преобразования и т. п. Природа наиболее широкой группы преобразований первых интегралов данной системы (или, что́ в сущности то же, ее интегральных кривых, рассматриваемых как неделимые объекты), преобразований, сохраняющих эти известные *a priori* данные, имеет исключительно важное значение для интегрирования системы.

В частности, в нашем случае мы видим, что, исходя только из инвариантности форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$, нельзя получить без интегрирования [1]) ни одного первого интеграла данной системы. Действительно, в противном случае инвариантность форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$ позволила бы *выделить* некоторый первый интеграл, например y_1, который в силу этого должен был бы равняться $\overline{y}_1$ — одному из интегралов, определенных формулами (7); но это, очевидно, невозможно, потому что уравнения (6) всегда допускают такое решение, при котором данным численным значениям $y_1, \ldots, y_n$ соответствуют *произвольные* численные значения $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$.

160. Постоянные c_{iks} играют важную роль по отношению к группе G: они представляют собой то, что в теории непрерывных групп называют *структурными константами* группы. Метод редукции, указанный выше (п. 157), основывается как раз на разложении группы G в нормальный ряд подгрупп. Случай *простой* таблицы коэфициентов c_{iks} соответствует *простым* группам.

Известно, что структурные константы группы не могут быть выбраны произвольно; в нашем случае это легко проверить, записав, что внешние производные от $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ равны нулю. Внешняя производная от ω'_s, если использовать выражения (2) для $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, будет иметь вид (п. 73):

$$\sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks}\left([\omega'_i\omega_k] - [\omega_i\omega'_k]\right) =$$

$$= \sum_{(\alpha\beta\gamma)}^{1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}c_{i\gamma s} + c_{\beta\gamma i}c_{i\alpha s} + c_{\gamma\alpha i}c_{i\beta s}\right)[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma].$$

---

[1]) Т. е. с помощью последовательности *однозначных* операций над формами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые были бы выполнимы при любой природе коэфициентов этих форм.

Значит, необходимыми являются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}c_{i\gamma s} + c_{\beta\gamma i}c_{i\alpha s} + c_{\gamma\alpha i}c_{i\beta s} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma, s = 1, 2, \ldots, n).$$

В теории групп доказывается, что эти условия достаточны для того, чтобы существовала группа, допускающая c_{iks} в качестве структурных констант.

Примеры.

161. Предположим, что все константы c_{iks} равны нулю. В этом случае ясно, что интегрирование сводится к n независимым квадратурам, так как все формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ представляют собой полные диференциалы. Но раз формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ сводимы к виду

$$\omega_1 = dy_1, \quad \omega_2 = dy_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = dy_n,$$

то, значит, группа G выразится уравнениями

$$y'_s = y_s + C_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Этот случай всегда имеет место, если $n = 1$.

Исследуем все возможные случаи при $n = 2$. Кроме только что разобранного случая, возможен еще один:

$$\omega'_1 = a\,[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega'_2 = b\,[\omega_1\omega_2],$$

причем коэфициенты a и b не равны нулю одновременно. Предположим, например, что $b \neq 0$. Взяв в качестве новой формы $\overline{\omega}_1$ форму $a\omega_2 - b\omega_1$, очевидно, получим

$$\overline{\omega}'_1 = 0,$$
$$\omega'_2 = [\overline{\omega}_1\omega_2].$$

Первая квадратура дает

$$\overline{\omega}_1 = dy_1;$$

если теперь приравнять y_1 произвольной постоянной, то ω_2 станет полным диференциалом, и вторая квадратура закончит интегрирование. Изменив несколько обозначения, можем написать

$$\omega_1 = \frac{dy_1}{y_1},$$
$$\omega_2 = \frac{dy_2}{y_1}.$$

Группа G определится уравнениями:

$$y'_1 = C_1 y_1,$$
$$y'_2 = C_1 y_2 + C_2.$$

162. Не будем делать общего исследования при $n=3$. Отметим только наиболее интересный случай, когда формулы (2) можно привести к виду

$$\omega_1' = [\omega_1 \omega_2],$$
$$\omega_2' = [\omega_1 \omega_3],$$
$$\omega_3' = [\omega_2 \omega_3].$$

В этом случае *интегрирование системы* (1) *сводится к интегрированию одного уравнения Риккати.*

Действительно, рассмотрим уравнение Пфаффа

$$dt + \omega_1 + t\omega_2 + \frac{1}{2} t^2 \omega_3 = 0, \tag{8}$$

в котором t рассматривается как искомая функция от переменных, зависимых и независимых, входящих в диференциальные уравнения данной системы. *Уравнение* (8) *вполне интегрируемо*; в этом нетрудно убедиться, взяв внешнюю производную левой части: она будет равна нулю, если принять во внимание выражения для ω_1', ω_2', ω_3' и само уравнение (8). Значит, его интегрирование можно свести к интегрированию обыкновенного диференциального уравнения, которое в нашем случае будет, очевидно, уравнением Риккати. Если через y_1, y_2, y_3 обозначить систему независимых первых интегралов данных уравнений (1), то ω_1, ω_2, ω_3 можно будет выразить с помощью функций y_1, y_2, y_3 и их диференциалов; значит, общее решение t уравнения (1) будет функцией от y_1, y_2, y_3 (и произвольной постоянной C). Если записать общее решение уравнения Риккати (8) в классической форме

$$t = \frac{\alpha + C\beta}{\gamma + C\delta},$$

то отношения функций α, β, γ, δ дают три первых интеграла данных уравнений. и легко доказать, что эти интегралы независимы.

Обобщения.

163. Мы не можем задерживаться дольше на этой теории, обстоятельное изложение которой требует довольно широких сведений из теории непрерывных групп. Последняя, как мы видели, необходимо входит в рассуждения, если нужно исследовать до конца методы интегрирования диференциальных уравнений, допускающих данные интегральные инварианты. Отметим только, что метод п. 143 может быть распространен на любую систему диференциальных уравнений, допускающую инвариантные формы, инвариантные пфаффовы уравнения и т. д. Он состоит в том, что *с помощью введения вспомогательных переменных* строится столько линейных интегральных инвариантов, сколько данная система допускает независимых первых интегралов. Чтобы понять дух метода, достаточно рассмотреть один пример.

Предположим, что нужно проинтегрировать систему диференциальных уравнений (S) с 4 переменными:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

причем каждое из уравнений $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ инвариантно для данной системы. Введем три новых вспомогательных переменных u_1, u_2, u_3 и рассмотрим три формы:

$$\overline{\omega}_1 = u_1\omega_1; \quad \overline{\omega}_2 = u_2\omega_2; \quad \overline{\omega}_3 = u_3\omega_3.$$

Интегрирование характеристической системы (Σ) этих трех форм приведет к интегрированию данной системы, если исключить u_1, u_2, u_3 из соотношений, определяющих какое-нибудь решение (Σ). Построим теперь внешние производные $\overline{\omega}_1'$, $\overline{\omega}_2'$, $\overline{\omega}_3'$, предполагая, что

$$\begin{aligned}
\omega_1' &\equiv a_1 [\omega_2 \omega_3] && (\mathrm{mod}\ \omega_1),\\
\omega_2' &\equiv a_2 [\omega_3 \omega_1] && (\mathrm{mod}\ \omega_2),\\
\omega_3' &\equiv a_3 [\omega_1 \omega_2] && (\mathrm{mod}\ \omega_3),
\end{aligned}$$

где a_1, a_2, a_3 — функции первоначальных переменных; получим:

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_1' &\equiv \frac{a_1 u_1}{u_2 u_3} [\overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3] && (\mathrm{mod}\ \overline{\omega}_1),\\
\overline{\omega}_2' &\equiv \frac{a_2 u_2}{u_3 u_1} [\overline{\omega}_3 \overline{\omega}_1] && (\mathrm{mod}\ \overline{\omega}_2),\\
\overline{\omega}_3' &\equiv \frac{a_3 u_3}{u_1 u_2} [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2] && (\mathrm{mod}\ \overline{\omega}_3).
\end{aligned}$$

Коэфициенты

$$\overline{a}_1 = \frac{a_1 u_1}{u_2 u_3}, \quad \overline{a}_2 = \frac{a_2 u_2}{u_3 u_1}, \quad \overline{a}_3 = \frac{a_3 u_3}{u_1 u_2}$$

являются, следовательно, первыми интегралами системы (Σ), характеристической по отношению к *формам* $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$. Значит, то же справедливо и относительно

$$\sqrt{\overline{a}_2\, \overline{a}_3} = \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{u_1},$$

и форма

$$\sqrt{\overline{a}_2\, \overline{a}_3}\, \overline{\omega}_1 = \sqrt{a_2 a_3}\, \omega_1$$

будет инвариантной формой. Но она не содержит вспомогательных переменных u_1, u_2, u_3; значит, это — инвариантная форма по отношению к данной системе (S). То же, конечно, можно сказать и про формы $\sqrt{a_3 a_1}\, \omega_2$, $\sqrt{a_1 a_2}\, \omega_3$. Итак, *если ни один из коэфициентов* a_1, a_2, a_3 *не равен нулю, то данная система уравнений допускает три линейные инвариантные формы;* все сводится к проблеме, уже рассмотренной в этой главе.

Так дело будет обстоять, конечно, не всегда; *но во всех случаях найдется та или иная возможность полностью использовать сведения об инвариантах данной системы уравнений.*

ГЛАВА XVI.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ДАННЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Редукция проблемы.

164. Нам уже приходилось рассматривать диференциальные уравнения, допускающие бесконечно малые преобразования, но при этом всегда предполагалось, что эти уравнения допускают, кроме того, интегральный инвариант, или инвариантное уравнение Пфаффа. Взглянем теперь на все это с более общей точки зрения; этот более широкий взгляд на вещи даст нам новые иллюстрации к теориям, намеченным в предыдущей главе.

Рассмотрим систему из n обыкновенных диференциальных уравнений (или вполне интегрируемую систему n уравнений Пфаффа)

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0 \tag{1}$$

и предположим, что эта система допускает некоторое число $r \leqslant n$ бесконечно малых преобразований:

$$A_1 f, \quad A_2 f, \quad \ldots, \quad A_r f.$$

Посмотрим, что́ дает для интегрирования знание указанных r бесконечно малых преобразований. Эта проблема была решена Софусом Ли. Мы ограничимся важнейшими общими замечаниями.

Рассмотрим матрицу выражений $\omega_i(A_k)$, которые получаются, если в форме ω_i заменить символ неопределенного диференцирования символом бесконечно малого преобразования $A_k f$. Предположим, что в этой матрице

$$\begin{Vmatrix} \omega_1(A_1) & \omega_1(A_2) & \ldots & \omega_1(A_r) \\ \omega_2(A_1) & \omega_2(A_2) & \ldots & \omega_2(A_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_n(A_1) & \omega_n(A_2) & \ldots & \omega_n(A_r) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

детерминант, составленный из r первых строк и r столбцов, отличен от нуля. Тогда можно заменить левые части уравнений (1) их линейными комбинациями с таким расчетом, чтобы матрица (2) преобразованной системы приняла вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

т. е. чтобы все $\omega_i(A_j)$ стали нулями за исключением

$$\omega_1(A_1) = \omega_2(A_2) = \ldots = \omega_r(A_r) = 1.$$

Ясно, что, если n больше r, то новые формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ еще не вполне определены: формы

$$\omega_{r+1}, \quad \ldots, \quad \omega_n$$

можно подвергнуть любому линейному преобразованию, а к каждой из форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$ можно прибавить любую линейную комбинацию форм $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$.

Если бы уравнения (1) были приведены к виду

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_n = 0,$$

то ясно, что выражения $\omega_i(A_j) = A_j(y_i)$ были бы первыми интегралами, и новые формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$, полученные в результате приведения матрицы $\|\omega_i(A_j)\|$ к каноническому виду, могли бы быть выражены через y_i и их диференциалы. Отсюда (и из того, что было сказано выше) вытекают два следствия:

1°. *Если матрица* $\|\omega_i(A_k)\|$ *приведена к нормальному виду* (3), *то пфаффова система*

$$\omega_{r+1} = \ldots = \omega_n = 0 \tag{4}$$

представляет собой инвариантную систему.

2°. *Каждая из линейных форм* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *инвариантна с точностью до линейной комбинации из левых частей уравнений предыдущей инвариантной системы.*

165. Прежде чем итти дальше, заметим, что если система (1) допускает два бесконечно малых преобразования Af и Bf, то она допускает и бесконечно малое преобразование Cf, определяемое равенством

$$Cf = A(Bf) - B(Af).$$

Допустим — это не уменьшит общности, — что символы бесконечно малых преобразований, которые получаются при комбинировании r данных бесконечно малых преобразований попарно, являются линейными комбинациями выражений $A_1f, \ldots, A_rf$. Иными словами, положим, что

$$A_i(A_kf) - A_k(A_if) = \sum_{s=1}^{s=r} \gamma_{iks} A_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r). \tag{5}$$

Докажем, что при этих предположениях *пфаффова система* (4) *вполне интегрируема.*

Для доказательства нам придется вернуться к определению билинейного коварианта $\omega'(\delta, \delta')$ линейной формы ω в случае, которого мы до сих пор не рассматривали, именно, когда два символа диференцирования δ, δ' *не переместительны*. Если положить

$$\omega(\delta) = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \ldots + a_n \delta x_n,$$

то будем иметь

$$\delta\omega(\delta') - \delta'\omega(\delta) = a_1(\delta\delta' x_1 - \delta'\delta x_1) + \ldots +$$

$$+ a_n(\delta\delta' x_n - \delta'\delta x_n) + \sum \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(\delta x_i \delta' x_k - \delta x_k \delta' x_i);$$

или, если условиться писать δ'' вместо $\delta\delta' - \delta'\delta$,

$$\delta\omega(\delta') - \delta'\omega(\delta) = \omega(\delta'') + \omega'(\delta, \delta'). \tag{6}$$

Приложим эту формулу к случаю, когда δ и δ' заменены символами $A_i f$ и $A_k f$; тогда символу δ'' будет соответствовать выражение

$$A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = \sum \gamma_{iks} A_s f.$$

Предположим, наконец, что в качестве ω берется одна из форм $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$, относительно которых, как мы видели, можно предполагать, что они выражены через $y_1, \ldots, y_n$ и их диференциалы. Будем иметь

$$\omega'_{r+\alpha} = \sum c_{\lambda,\,\mu,\,r+\alpha}[\omega_\lambda \omega_\mu].$$

Но

$$\omega_{r+\alpha}(A_i) = \omega_{r+\alpha}(A_k) = \omega_{r+\alpha}(A_s) = 0;$$

следовательно, получим соотношение:

$$\sum c_{\lambda,\,\mu,\,r+\alpha}[\omega_\lambda(A_i)\,\omega_\mu(A_k) - \omega_\mu(A_i)\,\omega_\lambda(A_k)] = 0.$$

Отсюда следует, что коэфициенты $c_{\lambda,\,\mu,\,r+\alpha}$ равны нулю, если только индексы λ, μ оба меньше или равны r, потому что предыдущее соотношение обращается при этом в

$$c_{i,\,k,\,r+\alpha} = 0 \qquad (i,\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

Следовательно, внешние производные $\omega'_{r+1}, \ldots, \omega'_n$ все равны нулю, если учесть уравнения (4), а отсюда следует, что система (4) вполне интегрируема (п. 102).

Случай, когда число бесконечно малых преобразований равно числу неизвестных функций.

166. Предположим теперь, что система (4), представляющая собой совершенно произвольную вполне интегрируемую систему Пфаффа, проинтегрирована; предположим даже, что известно хотя бы одно решение этой системы: этому решению соответствует бесконечное множество решений данной системы, которые получаются при интегрировании уравнений

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0. \tag{7}$$

Для этой системы известны r инвариантных форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Вопрос сводится к проблеме, изученной в предыдущей главе.

В этом случае нетрудно определить *a priori* коэфициенты c_{iks}, входящие в выражения $\omega_1', \ldots, \omega_r'$:

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} c_{iks}[\omega_i\omega_k].$$

Действительно, применим формулу (6), заменив в ней символ δ символом A_α, символ δ' символом A_β, а символ δ'' выражением $\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\gamma_{\alpha\beta\varrho}A_\varrho$. Но все $\omega_i(A_k)$ равны либо нулю, либо единице, т. е. равны постоянным, а потому формула (6) сводится к

$$0 = \gamma_{\alpha\beta s} + c_{\alpha\beta s}.$$

Итак, получаем

$$c_{iks} = -\gamma_{iks}.$$

167. Ограничимся теперь случаем, когда все коэфициенты γ_{iks} постоянны. Можно доказать, что в этом случае данные *бесконечно малые преобразования $A_1f, \ldots, A_rf$ порождают группу Γ с r параметрами*, структурными коэфициентами которой будут γ_{iks}. Ясно, что система (7) входит при этом в категорию систем, изученных в предыдущей главе (п. 157), и соответствующая последним группа G имеет ту же структуру, что и группа Γ, которую допускает данная диференциальная система (7). *Эта группа G представляет собой наиболее широкую группу преобразований первых интегралов $y_1, \ldots, y_r$, сохраняющую закон, по которому преобразуются эти интегралы под действием данных бесконечно малых преобразований.* Действительно, обозначим через f произвольную функцию от $y_1, \ldots, y_r$. Очевидно, можно определить, и притом единственным образом, r пфаффовых выражений $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_r$, тождественно удовлетворяющих соотношению

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_r}dy_r = \overline{\omega}_1A_1f + \ldots + \overline{\omega}_rA_rf$$

(тождественно в том смысле, что оно должно удовлетворяться, каковы бы ни были аргументы $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_r}$ и диференциалы $dy_1, \ldots, dy_r$). Если в этом тождестве заменить неопределенный символ диференцирования d символом A_kf, то получится

$$A_kf\,\overline{\omega}_1(A_k)A_1f + \ldots + \overline{\omega}_r(A_k)A_rf.$$

Значит, все $\overline{\omega}_i(A_k)$ равны нулю, за исключением

$$\overline{\omega}_1(A_1) = \overline{\omega}_2(A_2) = \ldots = \overline{\omega}_r(A_r) = 1;$$

а отсюда, наконец, следует, что *все формы $\overline{\omega}_i$ тождественны с формами ω_i*. Применим теперь к $y_1, \ldots, y_r$ некоторое преобразование группы G; эти величины обратятся в $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_r$; функция $f(y_1, \ldots, y_r)$

станет функцией $\bar{f}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$; символы $A_1 f, \ldots, A_r f$ перейдут в $\bar{A}_1\bar{f}, \ldots, \bar{A}_r\bar{f}$, и мы получим

$$d\bar{f} = \bar{\omega}_1\bar{A}_1\bar{f} + \ldots + \bar{\omega}_r\bar{A}_r\bar{f}.$$

Но $\bar{\omega}_i$ построены с помощью $\bar{y}_i$ и их диференциалов точно таким же образом, как ω_i построены с помощью y_i и dy_i; поэтому коэфициент при $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}_k}$ в $\bar{A}_i\bar{f}$ будет той же самой функцией от $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$, какой был коэфициент при $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ в $A_i f$ относительно $y_1, \ldots, y_r$. Иными словами, данные бесконечно малые преобразования преобразуют $\bar{y}_i$ таким же образом, как и y_i.

Кроме того, мы видим здесь, что группа G представляет собой наиболее широкую группу преобразований первых интегралов, сохраняющую данные инвариантные свойства системы.

Приложение к диференциальным уравнениям второго порядка.

168. Мы уже исследовали непосредственно случай $n = r = 1$. Возьмем еще несколько примеров.

Уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

эквивалентно системе

$$\begin{aligned} dy - y'dx &= 0, \\ dy' - F(y')\,dx &= 0, \end{aligned}$$

допускающей два бесконечно малых преобразования:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Bf = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Чтобы привести матрицу $\|\omega_i(A_k)\|$ к нормальному виду, нужно положить

$$\omega_1 = dx - \frac{dy'}{F(y')},$$

$$\omega_2 = dy - \frac{y'dy'}{F(y')}.$$

Обе эти инвариантные формы являются полными диференциалами, а потому искомое общее решение получается двумя независимыми квадратурами:

$$x - \int \frac{dy'}{F(y')} = C_1, \quad y - \int \frac{y'dy'}{F(y')} = C_2.$$

Рассмотрим теперь диференциальное уравнение второго порядка вида

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

оно допускает параллельный перенос в направлении оси Ox и преобразование подобия с центром в O, что́ соответствует бесконечно малым преобразованиям:

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x},\quad Bf=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Наше уравнение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} dy-y'dx\qquad &=0,\\ y\,dy'-F(y')\,dx&=0.\end{aligned}$$

Чтобы привести матрицу $\|\omega_i(A_k)\|$ к нормальному виду, нужно положить

$$\begin{aligned}\omega_1&=dx-\frac{x}{y}\,dy-\frac{y-xy'}{F(y')}\,dy',\\ \omega_2&=\frac{dy}{y}-\frac{y'}{F(y')}\,dy'.\end{aligned}$$

В данном случае имеем

$$A(Bf)-B(Af)=Af;$$

в силу этого легко получаем

$$\begin{aligned}\omega_1'&=-[\omega_1\omega_2],\\ \omega_2'&=0.\end{aligned}$$

Значит, интегрирование осуществится с помощью двух квадратур:

$$\begin{aligned} y&=C_1e^{\int\frac{y'dy'}{F(y')}},\\ x&=C_1\int\frac{1}{F(y')}\,e^{\int\frac{y'dy'}{F(y')}}\,dy'+C_2.\end{aligned}$$

Обобщения. Примеры.

169. При исследовании системы (1), состоящей из n уравнений Пфаффа, допускающих r бесконечно малых преобразований

$$A_1f,\ \ldots,\ A_rf,$$

мо́жет случиться, что ранг матрицы $\|\omega_i(A_k)\|$ меньше r (это всегда имеет место при $r>n$); обозначим этот ранг через ϱ. Мы можем, не уменьшая общности, считать, что детерминант, составленный из ϱ первых строк и ϱ первых столбцов, отличен от нуля. Тогда, каков бы ни был индекс s, получим $(r-\varrho)$ соотношений:

$$\begin{aligned}\omega_s(A_{\varrho+1})&=\lambda_{11}\omega_s(A_1)+\ldots+\lambda_{1\varrho}\omega_s(A_\varrho),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \omega_s(A_r)&=\lambda_{r-\varrho,1}\omega_s(A_1)+\ldots+\lambda_{r-\varrho,\varrho}\omega_s(A_\varrho).\end{aligned}$$

Коэфициенты λ_{ij}, входящие в эти соотношения, будут первыми интегралами; действительно, для любой линейной комбинации ω форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$, в частности, для диференциалов $dy_1, \ldots, dy_n$ независимых первых интегралов, будут иметь место те же соотношения

$$A_{\varrho+1}(y_s) = \lambda_{11}A_1(y_s) + \ldots + \lambda_{1\varrho}A_\varrho(y_s),$$

откуда следует, что $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1\varrho}$ зависят только от $A_i(y_k)$, т. е. от $y_1, \ldots, y_n$.

В этом общем случае исследование основывается на тех же принципах, что и предыдущее; мы не будем развивать его дальше.

170. Пример I. Рассмотрим диференциальное уравнение

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = Ry'',$$

определяющее плоские кривые данного радиуса кривизны.

Оно эквивалентно системе

$$\omega_1 \equiv dy - y'dx = 0,$$

$$\omega_2 \equiv R\,dy' - (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}dx = 0.$$

Эта система допускает три бесконечно малых преобразования, соответствующие параллельному переносу вдоль Ox, параллельному переносу вдоль Oy и вращению вокруг O. Эти преобразования должны быть вычислены с учетом их действия не только на x и y, но и на y'. Получим без труда

$$A_1f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$A_2f = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$A_3f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1 + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Матрица $\|\omega_i(A_k)\|$ в данном случае такова:

$$\left\| \begin{matrix} -y' & 1 & x + yy' \\ -(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} & 0 & y(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} + R(1 + y'^2) \end{matrix} \right\|;$$

значит, имеем

$$\omega_s(A_3) = -\left(y + \frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)\omega_s(A_1) + \left(x - \frac{Ry'}{\sqrt{1 + y'^3}}\right)\omega_s(A_2).$$

Отсюда нетрудно получить два первых интеграла нашей системы одними диференцированиями, а это, в свою очередь, даст нам общее решение данного уравнения второго порядка:

$$x = \frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}} + C_1,$$

$$y = \frac{-R}{\sqrt{1+y'^2}} + C_2,$$

или

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2.$$

171. Пример II. Рассмотрим диференциальное уравнеие третьего порядка

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}:$$

определяющее плоские кривые постоянной кривизны. Оно эквивалентно системе

$$\omega_1 \equiv dy - y'dx = 0,$$

$$\omega_2 \equiv dy' - y''dx = 0,$$

$$\omega_3 \equiv dy'' - \frac{3y'y''}{1+y'^2} dy' = 0.$$

Эта система допускает четыре бесконечно малых преобразования, соответствующие параллельным переносам вдоль осей Ox и Oy, вращению вокруг O и преобразованию подобия с центром в O. Символы этих преобразований над переменными x, y, y', y'' имеют вид

$$A_1f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$A_2f = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$A_3f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1 + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''},$$

$$A_4f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - y''\frac{\partial f}{\partial y''}.$$

Составляем матрицу $\| \omega_i(A_k) \|$

$$\begin{Vmatrix} -y' & 1 & x + yy' & y - xy' \\ -y'' & 0 & 1 + y'^2 + yy'' & -xy'' \\ 0 & 0 & 0 & -y'' \end{Vmatrix}.$$

Она — третьего ранга, так как, например, определитель, составленный из первого, второго и четвертого столбцов, отличен от нуля. Отсюда получаем соотношение

$$\omega_s(A_3) = -\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_1) + \left(x - y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_2),$$

которое дает два первых интеграла:

$$u = x - y' \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$v = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Чтобы довести интегрирование до конца, составим такие линейные комбинации $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, которые приводят главный определитель матрицы $\| \bar{\omega}_i(A_k) \|$ к нормальному виду. Для этого нужно положить

$$\bar{\omega}_1 = dx - \left(\frac{1}{y''} + \frac{3xy'}{1+y'^2}\right) dy' + x \frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_2 = dy - \left(\frac{y'}{y''} + \frac{3yy'}{1+y'^2}\right) dy' + y \frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{3y'dy'}{1+y'^2} - \frac{dy''}{y''}.$$

С другой стороны, имеем:

$$du = \bar{\omega}_1 + u\bar{\omega}_3,$$

$$dv = \bar{\omega}_2 + v\bar{\omega}_3$$

и

$$\bar{\omega}_1' = -[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_2' = -[\bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_3' = 0.$$

Значит, $\bar{\omega}_3$ — полный диференциал, а потому недостающий первый интеграл получается *квадратурой*. Общее решение данного уравнения третьего порядка выразится формулами:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = C_3,$$

$$x = \frac{C_3 y'}{\sqrt{1+y'^2}} + C_1,$$

$$y = -\frac{C_3}{\sqrt{1+y'^2}} + C_2.$$

Мы видим, что группа G, сохраняющая данные, будет здесь: $\bar{C}_1 = C_1$, $\bar{C}_2 = C_2$, $\bar{C}_3 = aC_3$ $\left(\text{потому что } \bar{\omega}_3 = \frac{dC_3}{C_3}\right)$; она содержит произвольную постоянную a. Интегрирование сводится к квадратуре именно потому, что это группа однопараметрическая. В предыдущем примере группа G состояла только из тождественного преобразования; в связи с этим решение было получено без всякого интегрирования.

172. Замечание. Во всех случаях, когда имеются n линейных инвариантных форм, имеются и интегральные инварианты всех степеней, которые получаются путем образования из $\omega_1, \ldots, \omega_n$ внешних форм с постоянными коэфициентами. Так, в предыдущем примере имеется интегральный инвариант $\int\int\int \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3$, который сводится к

$$\int\int\int \frac{dy\, dy'\, dy''}{y''^2},$$

если ограничиться совокупностями состояний, соответствующих одному и тому же значению x.

Значит, если рассмотрим в плоскости xy семейство окружностей, зависящее от трех параметров, и если пересечем круги этого семейства какой-нибудь прямой, параллельной оси Oy, то интеграл

$$\int\int\int \frac{dy\, dy'\, dy''}{y''^2},$$

распространенный на все это семейство кругов, не будет зависеть от x. Впрочем, этот интеграл равен

$$\int\int\int \frac{dC_1 dC_2 dC_3}{C_3},$$

где через C_1 и C_2 обозначены координаты центра, а через C_3 — радиус.

Глава XVII.

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗЛОЖЕННЫХ ТЕОРИЙ К ПРОБЛЕМЕ n ТЕЛ.

Уменьшение числа степеней свободы.

173. Мы уже видели (п. 124), как метод интегрирования, изложенный в главе XII, прилагается к каноническим уравнениям динамики:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Там мы предполагали, что функция H произвольна. Если эта функция не зависит от времени, то она является первым интегралом (п. 93), и задача сводится к интегрированию системы

$$\frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial H}{\partial q_i}},$$

первые интегралы которой являются решениями уравнения

$$(Hf) = 0,$$

и к квадратуре.

174. Изучим несколько подробнее упрощения, которые можно сделать при интегрировании уравнений проблемы n тел, учитывая бесконечно малые преобразования (о которых говорилось в п. 94), допускаемые уравнениями движения. Предположим — это не уменьшит общности, — что система n тел отнесена к своему центру тяжести, т. е. что $3n$ координат x_i, y_i, z_i и $3n$ компонент скорости x'_i, y'_i, z'_i связаны соотношениями:

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0, \quad \sum m_i z_i = 0,$$
$$\sum m_i x'_i = 0, \quad \sum m_i y'_i = 0, \quad \sum m_i z'_i = 0.$$

Пусть U — силовая функция, однородная по отношению к координатам, с показателем однородности $-p$. Уравнения движения допускают пять бесконечно малых преобразований:

$$A_0 f = \frac{\partial f}{\partial t},$$
$$A_1 f = \sum \left(y_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial f}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right),$$
$$A_2 f = \sum \left(z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + z'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} - x'_i \frac{\partial f}{\partial z'_i} \right),$$
$$A_3 f = \sum \left(x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + x'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} - y'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right),$$
$$A_4 f = \sum \left[x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{p}{2} \left(x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} + y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} + z'_i \frac{\partial f}{\partial z'_i} \right) \right] + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \frac{\partial f}{\partial t}.$$

С другой стороны, имеем

$$\omega' = \sum \{ m_i [\delta x'_i \, \delta x_i] + m_i [\delta y'_i \, \delta y_i] + m_i [\delta z'_i \, \delta z_i] \} - [\delta H \, \delta t],$$

где положено

$$H = \frac{1}{2} \sum m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) - U.$$

175. Пять линейных инвариантных форм

$$\omega_i = \omega' (A_i, \delta)$$

имеют в нашем случае вид:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \delta H, \\ \omega_1 &= \delta H_1, \\ \omega_2 &= \delta H_2, \\ \omega_3 &= \delta H_3, \\ \omega_4 &= -\sum m_i \Big(x_i \, \delta x'_i + y_i \, \delta y'_i + z_i \, \delta z'_i + \frac{p}{2} x'_i \, \delta x_i + \\ &\quad + \frac{p}{2} y'_i \, \delta y_i + \frac{p}{2} z'_i \, \delta z_i \Big) + \left(1 + \frac{p}{2}\right) t \, \delta H + pH \, \delta t; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \sum m_i (y_i' z_i - z_i' y_i), \\ H_2 &= \sum m_i (z_i' x_i - x_i' z_i), \\ H_3 &= \sum m_i (x_i' y_i - y_i' x_i). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Наконец, имеем

$$\omega_4' = A_4(\omega') = \left(1 - \frac{p}{2}\right)\omega'.$$

Таблицу выражений $a_{ij} = \omega'(A_i, A_j)$ мы уже приводили (п. 96) для более общего случая. Поместим ее еще раз, применительно к нашему случаю (см. табл. 2).

Таблица 2.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	$-pH$
1	0	0	H_3	$-H_2$	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_1$
2	0	$-H_3$	0	H_1	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_2$
3	0	H_2	$-H_1$	0	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_3$
4	pH	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_1$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_2$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_3$	0

176. Итак, нам известны пять линейных инвариантных форм и таблица коэфициентов a_{ij}, определенных с помощью обобщенных скобок Пуассона:

$$N\left[\omega'^{N-1}\dot{\omega}_i \omega_j\right] = a_{ij}\left[\omega'^N\right].$$

Применим теорию главы XII (п. 126). Построим вспомогательную форму

$$\Phi(\xi) = \sum_{(ij)}^{0,1,\ldots,4} a_{ij}\left[\xi_i \xi_j\right];$$

она имеет выражение:

$$\Phi(\xi) = pH\left[\xi_4 \xi_0\right] + \frac{p-2}{2}\left[\xi_4(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3)\right] + \\ + H_1\left[\xi_2\xi_3\right] + H_2\left[\xi_3\xi_1\right] + H_3\left[\xi_1\xi_2\right].$$

Ранг ее равен 4. Она приводится к нормальному виду

$$\Phi = [\xi_4'\xi_0'] + [\xi_1\xi_2'],$$

если положить

$$\begin{aligned}
\xi_0' &= pH\xi_0 + \frac{p-2}{2}(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3),\\
\xi_4' &= \xi_4,\\
\xi_1' &= \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3,\\
\xi_2' &= \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3,\\
\xi_3' &= \xi_0,
\end{aligned}$$

где α_i и β_i выбраны так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 = H_1, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = H_2, \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = H_3;$$

этот выбор всегда возможен; можно еще прибавить дополнительные условия:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}.$$

Определяя пять линейных форм

$$\bar\omega_0,\ \bar\omega_1,\ \bar\omega_2,\ \bar\omega_3,\ \bar\omega_4$$

с помощью тождества

$$\xi_0\omega_0 + \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2 + \xi_3\omega_3 + \xi_4\omega_4 = \\ = \xi_0'\bar\omega_0 + \xi_1'\bar\omega_1 + \xi_2'\bar\omega_2 + \xi_3'\bar\omega_3 + \xi_4'\bar\omega_4,$$

получим без труда:

$$\begin{aligned}
\bar\omega_4 &= \omega_4,\\
\bar\omega_0 &= \frac{2}{p-2}\,\frac{H_1\,dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2},\\
\bar\omega_3 &= dH - \frac{2pH}{p-2}\,\frac{H_1\,dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2},\\
\bar\omega_1 &= \frac{\alpha_1\,dH_1 + \alpha_2\,dH_2 + \alpha_3\,dH_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}},\\
\bar\omega_2 &= \frac{\beta_1\,dH_1 + \beta_2\,dH_2 + \beta_3\,dH_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}.
\end{aligned}$$

Т. к. вспомогательная форма Φ приведена к нормальному виду $[\xi_4'\xi_0'] + [\xi_1'\xi_2']$, имеем

$$\omega' = [\bar\omega_4\bar\omega_0] + [\bar\omega_1\bar\omega_2] + [\omega_5\bar\omega_3] + [\omega_6\omega_7] + \ldots;$$

выполнив вычисления, получим

$$\omega' = \frac{2}{p-2}\left[\omega_4 \frac{H_1\,dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right] +$$

$$+ \frac{H_1[dH_2\,dH_3] + H_2[dH_3\,dH_1] + H_3[dH_1\,dH_2]}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2} + \Omega, \qquad (3)$$

где положено

$$\Omega = \left[\omega_5\left(dH - \frac{2pH}{p-2}\frac{H_1\,dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right)\right] + [\omega_6\omega_7] + \ldots \qquad (4)$$

177. Если приравнять четыре первых интеграла H, H_1, H_2, H_3 произвольным постоянным, то ранг формы ω' уменьшится на 6; следовательно, с $6n-6$ он понизится до $6n-12$, т. е. до числа, соответствующего проблеме с $3n-6$ степенями свободы (3 в случае проблемы трех тел). Но соответствующая характеристическая система будет содержать произвольные параметры.

Существует процесс (осуществимый лишь в теории), позволяющий уменьшить число степеней свободы, избегая вовсе введения произвольных параметров. Приравнивая нулю внешнюю производную правой части равенства (3) и учитывая соотношение

$$\omega_4' = \frac{2-p}{2}\,\omega',$$

получим

$$\Omega' = \left[\frac{H_1\,dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\,\Omega\right].$$

Это соотношение показывает, что внешняя производная квадратичной формы

$$\frac{1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}\,\Omega = \frac{1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}\,\omega' - \frac{2}{p-2}\left[\omega_4 \frac{H_1 dH_1 + H_2\,dH_2 + H_3\,dH_3}{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right] -$$

$$- \frac{H_1[dH_2\,dH_3] + H_2[dH_3\,dH_1] + H_3[dH_1\,dH_2]}{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{2-p}\left(\frac{1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}\,\omega_4\right)' - \frac{H_1[dH_2\,dH_3] + H_2[dH_3\,dH_1] + H_3[dH_1\,dH_2]}{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

равна нулю. Впрочем, это можно усмотреть из последней части этого равенства; в самом деле, первый ее член, как точная внешняя производная, дает при внешнем диференцировании нуль. Мы сейчас увидим, что то же имеет место и для второго члена.

Чтобы дать истолкование этого второго члена, рассмотрим вектор OS длины $\gamma = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}$, изображающий кинетический момент системы относительно начала, проекции которого равны H_1, H_2, H_3. Если представить себе элемент поверхности $d\sigma$, описываемый точкой S, и если через α_1, α_2, α_3 обозначить направляющие косинусы нормали к этому элементу, то получится

$$[dH_2\, dH_3] = \alpha_1\, d\sigma, \quad [dH_3\, dH_1] = \alpha_2\, d\sigma, \quad [dH_1 dH_2] = \alpha_3\, d\sigma$$

и, следовательно,

$$\frac{H_1 [dH_2\, dH_3] + H_2 [dH_3\, dH_1] + H_3 [dH_1\, dH_2]}{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3}{\gamma^3}\, d\sigma = \frac{\cos\psi\, d\sigma}{\gamma^2} = d\omega,$$

где через ψ обозначен угол между вектором OS и нормалью, а $d\omega$ обозначает телесный угол, под которым виден из начала координат элемент поверхности $d\sigma$. Обозначая через θ угол между вектором OS и осью Oz, через φ долготу, т. е. угол между плоскостями zOS и xOz, получим

$$d\omega = \sin\theta\, [d\theta\, d\varphi];$$

значит, эту форму можно рассматривать как внешнюю производную линейной формы $-\cos\theta\, d\varphi$.

Положим теперь

$$\overline{\omega} = \frac{2}{2-p}\,\frac{\omega_4}{\gamma} + \cos\theta\, d\varphi; \tag{5}$$

мы видим, что *характеристические уравнения относительного интегрального инварианта* $\int \overline{\omega}$ *имеют вид*:

$$\left.\begin{aligned} &dH - \frac{2p}{p-2} H \frac{d\gamma}{\gamma} = 0, \\ &\omega_5 = 0, \quad \omega_6 = 0, \quad \omega_7 = 0, \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Уравнения движения, отнесенные к подвижной системе референции.

178. Нетрудно дать истолкование этой системы. Ограничимся, для определенности, проблемой трех тел небесной механики ($p = 1$). Вычислим сначала выражения $\omega_5\,(A_i)$, $\omega_6\,(A_i)$ и т. д. Для этого применим к обеим частям равенства (3) оператор $A_1 f$; написав только члены, содержащие dH, ω_6, ω_7, ..., ω_{11}, получим:

$$\begin{aligned} dH &= \omega_5 (A_0)\, dH - \omega_7 (A_0)\, \omega_6 + \omega_6 (A_0)\, \omega_7 + \ldots + \omega_{10} (A_0)\, \omega_{11}, \\ 0 &= \omega_5 (A_1)\, dH - \omega_7 (A_1)\, \omega_6 + \omega_6 (A_1)\, \omega_7 + \ldots + \omega_{10} (A_1)\, \omega_{11}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= \omega_5 (A_4)\, dH - \omega_7 (A_4)\, \omega_6 + \omega_6 (A_4)\, \omega_7 + \ldots + \omega_{10} (A_4)\, \omega_{11}. \end{aligned}$$

Таким образом мы находим, что при $\alpha \geqslant 5$ все $\omega_\alpha(A_i)$ равны нулю, за исключением $\omega_5(A_0)$, равного 1.

Заметим, кроме того, что выражения $A_iH + 2H\frac{A_i\gamma}{\gamma}$ все равны нулю, потому что функция $K = H\gamma^2$ инвариантна по отношению к каждому из рассматриваемых бесконечно малых преобразований. Мы видим, что *система* (6), *характеристическая по отношению к форме* $\frac{1}{\gamma}\ \Omega$, *может быть определена как система всех линейных комбинаций уравнений движения, обладающих свойством обращаться в тождества при замене в них символа неопределенного диференцирования символом любого из бесконечно малых преобразований* A_1f, A_2f, A_3f, A_4f.

179. Этот результат позволит нам дать геометрическую интерпретацию системы (6).

С этой целью представим себе различные возможные системы референции, каждая из которых определяется тремя взаимно перпендикулярными координатными осями, началом отсчета времени и единицами длины, массы и времени. Выберем раз навсегда единицу массы, а выбор остальных единиц измерения подчиним условию, чтобы универсальная константа тяготения имела определенное числовое значение. Единица длины остается еще произвольной. Наконец, фиксируем начало координат, в качестве которого будем всегда брать центр тяжести системы трех тел, и начало отсчета времени.

Допустимые системы референции зависят от четырех произвольных параметров: три из них определяют направление осей, а четвертый — выбор единиц.

Каждому *состоянию* трех тел (определяемому их положениями, скоростями и временем и зависящему от 13 переменных) можно поставить в соответствие, по некоторому данному заранее закону, подвижную систему референции таким образом, чтобы уменьшить на четыре единицы число величин, определяющих состояние трех тел по отношению к этой системе референции. Можно, *например*, взять: в качестве оси Ox—прямую, соединяющую центр тяжести системы с телом A_1; в качестве плоскости xy — плоскость трех тел; в качестве единицы длины — расстояние OA_1. Состояние трех тел будет тогда определяться двумя координатами A_2, шестью проекциями на 3 координатные оси скоростей A_1 и A_2 и, наконец, временем t. Можно было бы и иначе выбрать подвижную систему референции, соответствующую данному состоянию, например, сохранить Oz перпендикулярной к плоскости трех тел, но в качестве Ox взять параллель к A_1A_2, а в качестве единицы длины A_1A_2. Можно было бы также выбрать систему координат по одному из двух указанных способов, но единицу длины выбрать так, чтобы кинетический момент OS системы равнялся единице. Можно было бы, наконец, провести Oz перпендикулярно к плоскости трех тел, в качестве плоскости xz взять плоскость zOS, а единицу длины выбрать так, чтобы OS равнялось 1. В этом последнем случае девятью величинами, определяющими состояние трех тел по отношению к подвижной системе референции, будут две координаты A_1, две координаты A_2, время и, наконец, шесть компонент скорости A_1 и A_2, что составит 11 величин, но связанных двумя соотношениями: $\gamma = 1$, $\varphi = 0$.

Предположим теперь, что мы выбрали какой-либо из указанных, или иной закон, устанавливающий соответствие между состоянием трех тел и подвижной системой референции. Пусть будут

$$q_1, q_2, \ldots, q_9$$

девять величин, определяющих состояние трех тел по отношению к соответствующей подвижной системе референции. Состояние трех тел будет определено по отношению к фиксированной системе референции, если кроме $q_1, \ldots, q_9$ будут известны 4 параметра u_1, u_2, u_3, u_4, определяющих положение подвижной системы референции относительно неподвижной. Этими четырьмя параметрами могут быть, например, три параметра, определяющие девять направляющих косинусов, и отношение единицы длины подвижной системы к фиксированной единице длины. В конце концов мы видим, что величины (число их равно 19, но среди них только 13 независимых)

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i, \quad x_i', \quad y_i', \quad z_i', \quad t,$$

определяющие состояние трех тел по отношению к фиксированной системе референции, являются определенными функциями 13 величин

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_9; \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4.$$

Эти последние, в свою очередь, являются определенными функциями первых. *Очевидно*, 9 *величин* $q_1, \ldots, q_9$, *рассматриваемых как функции* от x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', t, *будут инвариантны по отношению к каждому из бесконечно малых преобразований* $A_1 f, \ldots, A_4 f$, потому что эти преобразования сводятся к тому, что меняется фиксированная система референции, т. е. величины u_1, u_2, u_3, u_4, определяющие связь между подвижной и фиксированной системами референций, но не меняются величины q_i, определяющие состояние трех тел по отношению к подвижной системе.

Можно еще сказать, что если искать все диференциальные формы, линейные относительно dx_i, dy_i, $\ldots$, dz_i', dt, обладающие свойством обращаться в нуль при замене символа d любым из символов $A_1 f, \ldots, A_4 f$, то мы получим все линейные комбинации $dq_1, \ldots, dq_9$ и только их.

В частности, левые части уравнений (6) характеристической системы формы Ω линейны относительно $dq_1, \ldots, dq_9$. Таких уравнений имеется 8, значит, они могут быть приведены к виду

$$dq_i - C_i \, dq_9 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 8);$$

и так как они вполне интегрируемы, то C_i будут зависеть только от q_i. Иными словами, система (6) будет системой обыкновенных диференциальных уравнений относительно $q_1, \ldots, q_9$; *значит, она определяет движение трех тел по отношению к подвижной системе референции.*

180. Теперь нетрудно фактически написать уравнения системы (6). Будем исходить из относительного интегрального инварианта $\int \overline{\omega}$, где мы положили

$$\overline{\omega} = \frac{2}{\gamma}\, \omega_4 + \cos\theta\, d\varphi,$$

и представим себе, что все величины x_i, y_i, ..., z_i', t выражены через q_1 ..., q_9, u_1, ..., u_4. Прежде всего мы знаем, что диференциалы du_1, du_2, du_3, du_4 не войдут в окончательное выражение для $\overline{\omega}'$, так как последнее должно быть линейной комбинацией форм $dq_i - C_i\, dq_9$. Значит, при вычислении $\overline{\omega}'$ можно смотреть на u_1, u_2, u_3, u_4, как на фиксированные параметры. Далее, коэфициенты формы $\overline{\omega}'$, выраженной через dq_1, ..., dq_9, не должны содержать переменных u_1, ..., u_4, так как в противном случае внешняя производная от $\overline{\omega}'$ не обращалась бы в нуль; значит, при вычислениях не только можно считать u_1, ..., u_4 постоянными параметрами, но *можно дать им произвольные числовые значения*; в частности, им можно дать и такие числовые значения, которые соответствуют совпадению фиксированной и подвижной систем референции. Иными словами, *чтобы построить* $\overline{\omega}'$, *можно* в *выражении* $\overline{\omega}$ *дать величинам* x_i, y_i, ..., z_i', t *значения* X_i, Y_i, ..., Z_i', T, *определяющие состояние трех тел по отношению к подвижной системе референции*; эти тринадцать величин X_i, ..., T сводятся, как мы видели, к девяти.

181. Рассмотрим, в частности, случай, когда подвижная единица длины выбрана так, чтобы γ равнялось единице (тогда подвижная единица длины будет фиксирована). В этом случае имеем

$$\overline{\omega} = 2\omega_4 + \cos\theta\, d\varphi;$$

прибавляя полный диференциал, получим относительный интегральный инвариант $\int \omega + \cos\theta\, d\varphi$ искомой системы диференциальных уравнений.

Если предположить, что ось z направлена перпендикулярно к плоскости трех тел, ось x, например, параллельно A_1A_2, то положение треугольника определяется тремя величинами ξ_1, ξ_2, ξ_3. Полагая еще

$$\xi_4 = \varphi, \quad \eta_4 = \cos\theta,$$

получим

$$\omega + \cos\theta\, d\varphi = \sum m_i (X_i'\, dX_i + Y_i' dY_i) - H\, dT + \cos\theta\, d\varphi =$$
$$= \eta_1\, d\xi_1 + \eta_2\, d\xi_2 + \eta_3\, \xi_3 + \eta_4 \xi_4 - H\, dT.$$

Искомые уравнения относительного движения будут тогда

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

это — канонические уравнения, допускающие первый интеграл $H = \mathrm{const}$.

В качестве ξ_1, ξ_2, ξ_3 можно взять, например, длины трех сторон треугольника $A_1A_2A_3$.

В случае плоского движения $\theta=0$ остается только шесть неизвестных функций ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3.

182. Если известно движение трех тел относительно подвижной системы референции, то абсолютное движение определится с помощью квадратуры. Прежде всего, зная проекции на подвижные оси кинетического момента OS и задавая постоянную C, измеряющую OS в фиксированной системе референции, найдем отношение единиц длины фиксированной и подвижной систем. Тогда можно взять направление OS в качестве оси z (фиксированной), а положение двух других осей будет зависеть от неизвестного угла. Этот угол можно найти с помощью квадратуры. Для этого достаточно заметить, что инвариантная форма ω_4 (выраженная с помощью *фиксированных* координат) будет полным диференциалом, если учесть соотношения, определяющие относительное движение, которые предполагаются известными. Действительно, формула

$$2\omega_4'=\omega'=2\left[\frac{d\gamma}{\gamma}\omega_4\right]+\frac{H_1[dH_2dH_3]+H_2[dH_3\,dH_1]+H_3[dH_1\,dH_2]}{\gamma^2}+\Omega$$

показывает, что при этих условиях ω_4' равна нулю (H_1 и H_2 равны нулю). Значит, интегрирование заканчивается квадратурой

$$\int\omega_4=\text{const}.$$

Следует заметить, что можно выполнить эту квадратуру сразу после геометрического определения относительного движения, т. е. до того, как в этом относительном движении определено (квадратурой) время. Иными словами, две квадратуры, дающие время (в относительном движении) и положение фиксированных осей по отношению к подвижным, *могут быть выполнены независимо одна от другой.*

Случай, когда постоянные площадей все равны нулю.

183. В изложенной теории существенно предполагается, что $H_1^2+H_2^2+H_3^2\neq 0$. Изучим теперь движение такого рода, когда все три постоянные площадей равны нулю. В этом случае приходится предположить, что 18 величин

$$x_i,\quad y_i,\quad z_i,\qquad x_i',\ y_i',\ z_i'$$

связаны не только соотношениями

$$\sum m_ix_i=0,\quad \sum m_iy_i=0,\quad \sum m_iz_i=0,$$

$$\sum m_ix_i'=0,\quad \sum m_iy_i'=0,\quad \sum m_iz_i'=0,$$

но еще и следующими:

$$\sum m_i (y_i' z_i - z_i' y_i) = 0, \quad \sum m_i (z_i' x_i - x_i' z_i) = 0,$$

$$\sum m_i (x_i' y_i - y_i' x_i) = 0.$$

Нетрудно видеть, что плоскость треугольника, вершинами которого служат три тела, при этом не меняется, потому что компоненты трех скоростей, нормальные к этой плоскости, все равны нулю, по крайней мере тогда, когда тела не лежат на одной прямой.

Поэтому мы можем положить все z_i и z_i' равными нулю, и между двенадцатью величинами x_i, y_i, x_i', y_i' остаются пять соотношений:

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0,$$

$$\sum m_i x_i' = 0, \quad \sum m_i y_i' = 0,$$

$$\sum m_i (x_i' y_i - y_i' x_i) = 0.$$

Значит, всего имеются 7 зависимых переменных и одна независимая (время). Но ω' — форма четного ранга, поэтому ее ранг не может равняться числу диференциальных уравнений движения. *Характеристическая система формы ω' не совпадает с системой диференциальных уравнений движения.*

Мы имеем здесь три бесконечно малых преобразования $A_0 f$, $A_3 f$, $A_4 f$, удовлетворяющих условиям:

$$\omega'(A_0, \delta) = \delta H, \quad \omega'(A_3, \delta) = 0, \quad \omega'(A_4, \delta) = \omega_4.$$

Семь уравнений движения можно представить в виде системы Пфаффа:

$$\overline{\omega}_1 = 0, \quad \overline{\omega}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_7 = 0,$$

причем можно положить

$$\overline{\omega}_1 (A_3) = \ldots = \overline{\omega}_6 (A_3) = 0, \quad \overline{\omega}_7 (A_3) = 1.$$

Форма ω', представляющая собой линейную комбинацию $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_7$, *наверное не содержит* $\overline{\omega}_7$, потому что в противном случае форма $\omega'(A_3, \delta)$ не была бы тождественным нулем. Значит, *характеристической системой формы ω' является вполне интегрируемая система*

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \ldots = \overline{\omega}_6 = 0.$$

Она дает движение трех тел *независимо от расположения треугольника трех тел по отношению к их центру тяжести.* Если эта система проинтегрирована, то *положение треугольника по отношению к центру тяжести находится квадратурой.* Действительно, соотношение $\bar{\omega}_7(A_3)=1$ обеспечивает инвариантность формы $\bar{\omega}_7$ по отношению к диференциальному уравнению $\bar{\omega}_7=0$.

Вернемся теперь к форме ω' ранга 6. Ее характеристическая система допускает два бесконечно малых преобразования A_0f и A_4f, порождающие, в свою очередь, две линейные инвариантные формы: $\omega_0 = \delta H$, которую мы обозначим $\bar{\omega}_1$, и ω_4, которую мы обозначим $\bar{\omega}_2$. Мы предположим — это не уменьшит общности, — что для каждой из форм $\bar{\omega}_3, \ldots, \bar{\omega}_6$ имеют место соотношения $\bar{\omega}(A_0) = \bar{\omega}(A_4) = 0$. Вычисление, подобное тому, которое было проведено в общем случае, дает

$$\omega' = -\frac{1}{H}[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2] + \Omega = -\frac{1}{H}[\delta H\bar{\omega}_2] + \Omega,$$

где Ω — форма четвертого ранга, построенная с помощью $\bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_4$, $\bar{\omega}_5$, $\bar{\omega}_6$.

Как мы уже видели, $\omega' = 2\omega_4' = 2\omega_2'$; следовательно,

$$\Omega = 2\bar{\omega}_2' + \left[\frac{\delta H}{H}\ \bar{\omega}_2\right] = \frac{2}{\sqrt{H}}(\sqrt{H}\,\bar{\omega}_2)'.$$

Таким образом, форма $\frac{1}{2}\sqrt{H}\,\Omega$ представляет собой точную производную; поэтому она допускает в качестве характеристической системы уравнения

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_6 = 0. \tag{7}$$

Эта система интегрируется с помощью операций порядка

4, 2, 0.

В итоге уравнения движения будут даны операциями порядка 4 и 2 и двумя квадратурами.

Заметим, что форма $\sqrt{H}\,\bar{\omega}_2$, играющая роль относительного инварианта системы (7), согласно выражению (1) формы $\omega_4 = \bar{\omega}_2$ равна

$$\sqrt{H}\,\bar{\omega}_2 = -\sqrt{H}\sum m_i\left(x_i\,\delta x_i' + y_i\,\delta y_i' + \frac{1}{2}x_i'\,\delta x_i + \frac{1}{2}y_i'\,\delta y_i\right) + \delta\left(H^{\frac{3}{2}}t\right).$$

Систему (7) легко интерпретировать: она дает движение трех тел относительно подвижной системы референции, которая по определенному закону соответствует каждому состоянию трех тел, *причем начало отсчета времени может и не быть фиксированным.* Так, например, в качестве подвижного начала отсчета времени можно взять текущий момент, а единицу длины выбрать так, чтобы энергия H имела данное фиксированное числовое значение. Уравнения системы получатся из формы $\sqrt{H}\,\bar{\omega}_2$, если в нее ввести *подвижные* координаты: при сделанных нами предположениях ее, очевидно, можно заменить формой

$$\sum m_i(x_i'\,\delta x_i + y_i'\,\delta y_i).$$

Здесь количества движения трех тел образуют систему векторов, эквивалентную нулю. Значит, количество движения тела A_i можно рассматривать как равнодействующую векторов u_j и u_k, направленных по сторонам A_iA_k и A_iA_j, причем положительным направлением должно быть принято направление A_kA_i и A_jA_i. Тогда, обозначая через r_1, r_2, r_3 три стороны треугольника, имеем

$$\omega = u_1\delta r_1 + u_2\delta r_2 + u_3\delta r_3.$$

Далее, имеем

$$H = \frac{1}{2m_1}\left(u_2^2 + u_3^2 + u_2u_3\,\frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2r_3}\right) + \ldots -$$

$$- f\left(\frac{m_2m_3}{r_1} + \frac{m_3m_1}{r_2} + \frac{m_1m_2}{r_3}\right) = h.$$

Значит, уравнения относительного движения будут иметь вид

$$\frac{dr_1}{\frac{\partial H}{\partial u_1}} = \frac{dr_2}{\frac{\partial H}{\partial u_2}} = \frac{dr_3}{\frac{\partial H}{\partial u_3}} = \frac{-du_1}{\frac{\partial H}{\partial r_1}} = \frac{-du_2}{\frac{\partial H}{\partial r_2}} = \frac{-du_3}{\frac{\partial H}{\partial r_3}}.$$

Случай, когда постоянная живых сил равна нулю.

184. В изложенных рассуждениях неявно предполагается, что постоянная живых сил отлична от нуля. Если мы предположим, что она равна нулю, то переменные будут связаны еще одним соотношением, именно

$$\frac{1}{2}\sum m_i\,(x_i^2 + y_i^2) - U = 0.$$

Остаются только шесть зависимых и одна независимая переменная. Инвариантная форма ω' (A_0, δ) будет здесь тождественно равна нулю, равно как и форма ω' (A_3, δ).

Система уравнений движения может быть приведена к виду

$$\bar\omega_1 = \bar\omega_2 = \ldots = \bar\omega_6 = 0,$$

причем можно считать (п. 164):

$$\bar\omega_1(A_0) = \bar\omega_2(A_0) = \ldots = \bar\omega_4(A_0) = 0, \quad \bar\omega_5(A_0) = 1, \quad \bar\omega_6(A_0) = 0,$$

$$\bar\omega_1(A_3) = \bar\omega_2(A_3) = \ldots = \bar\omega_4(A_3) = 0, \quad \bar\omega_5(A_3) = 0, \quad \bar\omega_6(A_3) = 1.$$

Форма ω', выраженная через $\bar\omega_i$, очевидно, не содержит ни $\bar\omega_5$, ни $\bar\omega_6$. Положим, наконец,

$$\bar\omega_2(A_4) = \bar\omega_3(A_4) = \bar\omega_4(A_4) = 0, \quad \bar\omega_1(A_4) = 1$$

и $\omega'(A_4, \delta) = \overline{\omega}_2$. Тогда будем иметь

$$\omega' = 2\overline{\omega}_2' = [\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2] + [\overline{\omega}_3\overline{\omega}_4].$$

Форма $\overline{\omega}_2$ — второго типа, и уравнения

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_4 = 0$$

образуют вполне интегрируемую систему, характеристическую по отношению к уравнению $\overline{\omega}_2 = 0$. Эта система определяет движение трех тел относительно подвижной системы референции, причем начало отсчета времени может быть переменным. Здесь можно, например, в качестве единицы длины взять сторону r_3 треугольника. Уравнения, которые нужно проинтегрировать, составят тогда характеристическую систему пфаффова *уравнения*

$$2d(u_1r_1 + u_2r_2 + u_3) - u_1\,dr_1 - u_2\,dr_2 = 0,$$

причем величины u_1, u_2, u_3, r_1, r_2 будут связаны соотношением:

$$\frac{1}{2m_1}(u_2^2 + u_3^2 + 2u_2u_3\cos A_1) + \ldots -$$
$$- f\left(\frac{m_2m_3}{r_1} + \frac{m_3m_1}{r_2} + m_1m_2\right) = 0.$$

Полагая

$$r_1 = x, \quad r_2 = y,$$
$$u_1r_1 + u_2r_2 + u_3 = z, \quad u_1 = 2p, \quad u_2 = 2q.$$

придем к интегрированию уравнения в частных производных первого порядка:

$$2\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)p^2 + 2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right) + \frac{2}{m_3}\,\frac{x^2 + y^2 - 1}{xy}\,pq +$$
$$+ (z - 2px - 2qy)\left(\frac{p}{m_3}\,\frac{x^2 + 1 - y^2}{x} + \frac{q}{m_1}\,\frac{y^2 + 1 - x^2}{y}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(z - 2px - 2qy)^2 - f\left(\frac{m_2m_3}{x} + \frac{m_1m_3}{y} + m_1m_2\right) = 0.$$

Если это уравнение проинтегрировано, то путем диференцирований можно получить общее решение характеристической системы формы ω', потому что, приведя $\overline{\omega}_2$ к виду $Z_1\,dY_1 + Z_2dY_2$, найдем диференцированиями первые интегралы системы Y_1, Y_2, Z_1, Z_2.

Но уравнения движения не будут еще полностью проинтегрированы; остается проинтегрировать уравнения

$$\overline{\omega}_5 = \overline{\omega}_6 = 0.$$

Они образуют систему диференциальных уравнений, допускающих два бесконечно малых преобразования A_0f, A_3f, причем матрица

$$\left\| \begin{matrix} \overline{\omega}_5(A_0) & \overline{\omega}_5(A_3) \\ \overline{\omega}_6(A_0) & \overline{\omega}_6(A_3) \end{matrix} \right\|$$

уже приведена к нормальному виду

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Но так как, с другой стороны, преобразования A_0f и A_3f переместительны, потому что

$$A_0(A_3f) - A_3(A_0f) = 0,$$

то получим

$$\overline{\omega}'_5 = 0,$$
$$\overline{\omega}'_6 = 0.$$

Значит, интегрирование осуществляется с помощью двух независимых квадратур; одна дает положение треугольника $A_1A_2A_3$, другая — время.

Глава XVIII.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Экстремали, связанные с относительным интегральным инвариантом.

185. Мы видели уже в главе I (п. 9), что диференциальные уравнения экстремалей интеграла

$$I = \int F(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n, t)\,dt$$

совпадают с характеристическими уравнениями относительного интегрального инварианта $\int \omega$, где форма ω имеет следующее выражение:

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F}{\partial q'_i}\,\delta q_i - \left(\sum_{i=1}^{i=n} q'_i\,\frac{\partial F}{\partial q'_i} - F\right)\delta t;$$

здесь $q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n, t$ рассматриваются как $2n+1$ независимых переменных.

В вариационном исчислении величины $q_1, \ldots, q_n$ являются произвольными функциями t, а $q'_1, \ldots, q'_n$ — их производными. В $(n+1)$-мерном пространстве $(q_1, \ldots, q_n, t)$ любая экстремаль характеризуется тем, что интеграл I, взятый вдоль некоторой дуги этой кривой, стационарен по отношению ко всем бесконечно близким дугам, имеющим те же концы. Но можно рассматривать и $(2n+1)$-мерное пространство $(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n, t)$. В этом случае экстремаль характеризуется тем, что интеграл I, взятый вдоль некоторой ее дуги, стационарен по отношению ко всем бесконечно близким кривым, имеющими общими с экстремалью начальные и конечные значения только координат $q_1, \ldots, q_n, t$. Если стать на последнюю точку зрения, то $q'_1, \ldots, q'_n$ будут функциями t, не имеющими *a priori* никакой связи с производными от $q_1, \ldots, q_n$ по t.

186. Будем теперь вообще исходить из линейной диференциальной формы ω от $2n+1$ переменных. Предположим, что форма ω' имеет ранг $2n$, и допустим, наконец, что n из коэфициентов при диференциалах в ω тождественно равны нулю. Тогда можно положить

$$\omega = a_1\,\delta x_1 + a_2\,\delta x_2 + \ldots + a_n\,\delta x_n - b\,\delta t,$$

причем $a_1, \ldots, a_n, b$ будут функциями от $2n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t$.

Характеристики относительного интегрального инварианта ω, или, что то же, внешней квадратичной формы ω', даются системой обыкновенных диференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = Y_i, \tag{1}$$

причем мы будем предполагать, что t не является первым интегралом характеристических уравнений.

Рассмотрим теперь в $(2n+1)$-мерном пространстве дугу кривой, идущую от точки $M_0(x_i^0, y_i^0, t^0)$ к точке $M_1(x_i^1, y_i^1, t^1)$, и интеграл

$$I = \int_{M_0}^{M_1} a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots - b\,dt.$$

Вычислим вариацию этого интеграла при переходе от рассматриваемой дуги кривой к бесконечно близкой, идущей от точки $(x_i^0 + \delta x_i^0, y_i^0 + \delta y_i^0, t^0 + \delta t^0)$ к точке $(x_i^1 + \delta x_i^1, y_i^1 + \delta y_i^1, t^1 + \delta t^1)$. Получим

$$\delta I = [\omega_\delta]_0^1 + \int_{M_0}^{M_1} (\delta\omega_d - d\omega_\delta) = [\omega_\delta]_0^1 - \int_{M_0}^{M_1} \omega'(d, \delta).$$

Если мы хотим, чтобы интеграл был стационарным по отношению ко всем кривым, бесконечно близким к данной, то необходимо, чтобы при перемещениях вдоль данной дуги имело место равенство

$$\omega'(d, \delta) = 0,$$

каковы бы ни были δx_i, δy_i, δt. Иными словами, *необходимо, чтобы дуга принадлежала характеристике формы ω'*. Значение интеграла будет стационарным по отношению ко всем бесконечно близким дугам кривых, на концах которых $\omega_\delta = 0$, т. е. на концах которых $x_1, \ldots, x_n$ и t будут иметь те же значения, что и у данной дуги.

187. Предположим теперь, что поле кривых, бесконечно близких к данной, состоит лишь из таких кривых, у которых функции x_i, y_i от t удовлетворяют n первым характеристическим уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i. \tag{2}$$

Будем считать функции $X_1, \ldots, X_n$ независимыми по отношению к $y_1, \ldots, y_n$, что позволит взять в качестве x_i *произвольные* функции от t. Далее, мы будем считать, что начальные и конечные значения $x_1, \ldots, x_n$, t у варьированных кривых те же, что и у исходной. При этих условиях будем иметь

$$\delta I = -\int \omega'(d, \delta).$$

Нетрудно видеть, что $\omega'(\delta, d)$ не содержит $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$. Действительно, коэфициент при δy_1 имел бы вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y_1} dx_2 + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial y_1} dx_n - \frac{\partial b}{\partial y_1} dt;$$

этот коэфициент необходимо обращается в нуль, если принять во внимание характеристические уравнения (1), следовательно, если учесть уравнения (2); значит, он будет равен нулю при перемещениях вдоль экстремали. Таким образом, в выражение δI под знаком интеграла входят только диференциалы $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, δt; поэтому коэфициенты при $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, δt должны равняться нулю. Следовательно, *экстремали будут даны характеристическими уравнениями формы ω'.*

Принцип наименьшего действия Мопертюи (Maupertuis).

188. Предположим, что функция H Гамильтона не зависит от времени. Рассмотрим совокупность движений, которым соответствует данное постоянное значение h функции H. Соответствующими траекториями будут характеристики линейного интегрального инварианта $\int \omega$, где

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i - h\,\delta t,$$

или, что в сущности то же, интегрального инварианта $\int \overline{\omega}$, где

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, \delta q_i;$$

$\bar{\omega}$ отличается от ω только на полный диференциал. Эта форма $\bar{\omega}$ содержит $2n$ переменных, связанных соотношением

$$H = h,$$

и только n из ее коэфициентов отличны от нуля. Характеристические уравнения имеют здесь вид

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial q_n}}.$$

Следовательно, в $(2n-1)$-мерном пространстве (q_i, p_i) траекториями являются экстремали интеграла

$$\int p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n,$$

причем можно рассматривать либо все кривые, у которых даны начальные и конечные значения $q_1, \ldots, q_n$, либо только те из указанных кривых, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}$$

и, конечно, условию $H = h$.

189. Станем, например, на вторую точку зрения. Пусть q_i будут параметрами, определяющими положение системы, а p_i — компонентами количества движения. Обозначим через $2T$ кинетическую энергию и выделим в ней члены нулевого, первого и второго измерения относительно $q'_1, \ldots, q'_n$; тогда получим

$$H = \sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} - T - U = T_2 - T_0 - U.$$

Заменим переменные p_i переменными q'_i. В силу сделанных предположений имеем

$$T_2(q') = T_0 + U + h,$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} \delta q_i + T_1(\delta q_i).$$

Наконец, предположим, что

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_n}{q'_n} = \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_2(q')}} = \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0 + U + h}}.$$

Подинтегральное выражение интеграла I будет иметь вид

$$\bar{\omega}_d = \sum q'_i \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} \frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0 + U + h}} + T_1(dq) = \sqrt{2(T_0 + U + h)\, 2T_2(dq)} + T_1(dq).$$

Если теперь положим

$$2T=\sum a_{ij}q_i'q_j'+2\sum b_iq_i'+2T_0,$$

то придем к следующей теореме, составляющей содержание *принципа наименьшего действия в смысле Мопертюи:*

Траектории суть экстремали интеграла

$$\int\left(\sqrt{2(T_0+U+h)\sum a_{ij}\,dq_i\,dq_j}+\sum b_i\,dq_i\right)$$

по отношению ко всем бесконечно близким траекториям, соответствующим тому же начальному и тому же конечному положению системы и удовлетворяющим теореме живых сил $H=h$ при заданном значении константы h.

Положив $T_1=T_0=0$, получим классическую формулировку принципа Мопертюи.

190. Пример. В случае свободной материальной точки, отнесенной к неподвижным осям, траекториями будут экстремали интеграла

$$\int\sqrt{2(U+h)}\,ds.$$

Если точка отнесена к осям, вращающимся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью a, и если, кроме того, силовое поле, не зависящее от времени, вращается вместе с осями, то будем иметь

$$\begin{aligned}2T&=m\left[(x'+ay)^2+(y'-ax)^2+z'^2\right]=\\&=m(x'^2+y'^2+z'^2)-2ma(xy'-yx')+ma^2(x^2+y^2).\end{aligned}$$

В случае точки, масса которой равна 1, траекториями будут экстремали интеграла

$$\int\sqrt{a^2(x^2+y^2)+2U+2h}\,ds-a(x\,dy-y\,dx).$$

Обобщения.

191. Рассуждения, проведенные только что в случае, когда время не входит явно в H, могут быть проведены и тогда, когда H не содержит одной из остальных переменных q_i или p_i. Для определенности рассмотрим случай свободной материальной точки массы 1, подверженной действию центральной силы, являющейся функцией расстояния между точкой и центром притяжения. Рассмотрим все движения, происходящие в данной плоскости, которую мы возьмем в качестве плоскости xy, подчиняющиеся закону площадей с данной константой C. Фактические движения будут даны системой диференциальных уравнений, допускающей относительный интегральный инвариант

$$\int\omega=\int\left[r'\delta r+r^2\vartheta'\delta\vartheta-\left(\frac{1}{2}r'^2+\frac{1}{2}r^2\vartheta'^2-U\right)\right]\delta t,$$

который в данном случае, очевидно, сведется к

$$\int \bar{\omega} = \int r'\delta r - \left(\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - U\right)\delta t.$$

Форма $\bar{\omega}$ зависит только от переменных r, r' и t; одно из ее характеристических уравнений есть

$$\frac{dr}{dt} = r'.$$

Отсюда следует, что если в качестве начальных условий взять значения r_0 и t_0, в качестве конечных условий — значения r_1 и t_1, то фактическим движением, удовлетворяющим этим условиям, будет то, которому соответствует стационарное значение интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_1} r'dr - \left(\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - U\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - U\right]dt$$

относительно всех достаточно близких движений, удовлетворяющих тем же граничным условиям и закону площадей с константой C.

Приложение к распространению света в изотропной среде.

192. Рассмотрим изотропную среду, показатель преломления которой n задан в каждой точке.

На основании принципа Ферма (Fermat) можем утверждать, что световые лучи будут экстремалями интеграла

$$\int n\, ds = \int n\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Вводя вспомогательное переменное t, приходим к интегралу вида

$$\int F(x, y, z; x', y', z'; t)\, dt,$$

в котором

$$F = n\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Линейный относительный интегральный инвариант $\int \omega$, характеристиками которого служат лучи света, определяется формулой

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z -$$

$$-\left(x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} - F\right)\delta t,$$

которая в нашем случае принимает вид:

$$\omega = n\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,\delta x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,\delta y + \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,\delta z\right),$$

или

$$\omega = n\,(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z),$$

если через α, β, γ обозначить направляющие косинусы произвольного направления. Значит, форма ω зависит на самом деле от 5 переменных. Нетрудно составить ее характеристическую систему и показать, что она включает, в частности, уравнения

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Направление (α, β, γ) представляет собой, очевидно, не что иное, как направление касательной к рассматриваемому световому лучу.

193. Тот факт, что интеграл $\int \omega$ является относительным инвариантом, приводит к следующему свойству пучка световых лучей. Если описать замкнутую кривую (C), окружающую этот пучок, то интеграл $\int n \cos\vartheta\,\delta s$, в котором ϑ обозначает угол между касательной к (C) в точке M и касательной к световому лучу, проходящему через M, — этот интеграл не будет зависеть от выбора кривой (C). Нетрудно доказать, что необходимым и достаточным условием того, что все лучи конгруэнции нормальны одной и той же поверхности, будет равенство нулю указанного интеграла для любого пучка лучей, принадлежащих конгруэнции. Это соответствует теореме Малюса (Malus), в силу которой лучи некоторой конгруэнции, нормальные к одной поверхности, будут нормальны к бесконечному множеству поверхностей. Условием того, чтобы это имело место, является равенство нулю внешней квадратичной формы ω', или, точнее, равенство нулю билинейной кососимметрической формы $\omega'(\delta, \delta')$, в которой δ представляет собой символ диференцирования по одному из параметров конгруэнции, а δ' — символ диференцирования по другому параметру.

Световые лучи, распространяющиеся в рассматриваемой среде, зависят от четырех параметров u_1, u_2, u_3, u_4. Преобразование этих параметров, переводящее всякую конгруэнцию, лучи которой нормальны некоторой поверхности, в другую, обладающую тем же свойством, называют *преобразованием Малюса*. Форма ω' может быть выражена, как это нам известно, через переменные u_i и их диференциалы. Наиболее общее преобразование Малюса определяется, очевидно, уравнением

$$\omega'(u', du') = k\omega'(u, du),$$

где k — некоторая неизвестная функция. Внешнее диференцирование обеих частей равенства дает немедленно

$$[dk\omega'] = 0;$$

но ω' — форма ранга 4, значит, последнее равенство возможно только в том случае, если $dk=0$, т. е. если k — *постоянная*. Следовательно, мы разыщем искомые преобразования, если запишем, что линейная форма

$$\omega(u', du') - k\omega(u, du)$$

представляет собой полный диференциал:

$$n(x', y', z')(\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') = kn(x, y, z)(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) + dV.$$

Определим, например, световой луч координатами (x_0, y_0) точки его пересечения с плоскостью xy и направляющими косинусами $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ касательной в этой точке. Получим

$$n(x_0', y_0', 0)(\alpha_0' dx_0' + \beta_0' dy_0') - kn(x_0, y_0, 0)(\alpha_0\, dx_0 + \beta_0\, dy_0) = dV.$$

1-й случай. *Между x_0', y_0', x_0, y_0 нет никакого соотношения.* В этом случае V является вполне определенной функцией от x_0, y_0, x_0', y_0'; имеют место следующие соотношения:

$$-kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 = \frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad -kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 = \frac{\partial V}{\partial y_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\alpha_0' = \frac{\partial V}{\partial x_0'}, \quad n(x_0', y_0', 0)\beta_0' = \frac{\partial V}{\partial y_0'}.$$

Первые два уравнения дадут x_0' и y_0'. Затем вторые два дадут α_0' и β_0'.

2-й случай. *Существует одно и только одно соотношение* между x_0, y_0, x_0', y_0'. Пусть будет

$$F(x_0, y_0, x_0', y_0') = 0$$

это соотношение. Обозначив через V произвольную функцию от x_0, y_0, x_0', y_0' и введя вспомогательный параметр λ, получим

$$-kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 = \frac{\partial V}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad -kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 = \frac{\partial V}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\alpha_0' = \frac{\partial V}{\partial x_0'} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_0'}, \quad n(x_0', y_0', 0)\beta_0' = \frac{\partial V}{\partial y_0'} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y_0'}.$$

Два первых уравнения вместе с уравнением $F=0$ дадут x_0', y_0' и λ; затем два последних дадут α_0' и β_0'.

3-й случай. *Переменные x_0' и y_0' являются определенными функциями* от x_0 и y_0:

$$x_0' = f(x_0, y_0), \quad y_0' = g(x_0, y_0);$$

тогда V будет функцией от x_0 и y_0, и мы получим

$$n(x_0', y_0', 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta_0'\frac{\partial g}{\partial x_0}\right) = kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial x_0},$$
$$n(x_0', y_0', 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial y_0} + \beta_0'\frac{\partial g}{\partial y_0}\right) = kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0};$$

из этих уравнений определяются α_0' и β_0'.

194. Выше мы рассмотрели характерное свойство конгруэнций лучей, для которых инвариантная форма ω' тождественно равна нулю. Инвариантная форма $\frac{1}{2}\omega'^2$ тоже находит себе применение в оптике. В развернутом виде эта форма запишется так:

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n\,[\delta n\,(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)\,(\delta\alpha\,\delta x + \delta\beta\,\delta y + \delta\gamma\,\delta z)] - \\ - n^2\,([\delta\beta\,\delta\gamma\,\delta y\,\delta z] + [\delta\gamma\,\delta\alpha\,\delta z\,\delta x] + [\delta\alpha\,\delta\beta\,\delta x\,\delta y]).$$

Возьмем, например, все световые лучи, пересекающие данный элемент поверхности $d\sigma$, касательные к которым в точках пересечения с поверхностью параллельны прямым, лежащим внутри бесконечно узкого конуса с телесным углом $d\omega$. Лучи эти зависят от четырех параметров u_1, u_2, u_3, u_4, из которых два первые, например, определяют положение точки пересечения луча с элементом $d\sigma$, а два другие — направление касательной в этой точке. На каждом луче возьмем *состояние*, характеризуемое соответствующей точкой пересечения (x, y, z) и направляющими косинусами касательной в этой точке (α, β, γ). Так как три первые величины x, y, z зависят только от двух переменных u_1 и u_2, то любая внешняя кубическая форма с переменными δx, δy, δz равна нулю. Поэтому инвариант $\frac{1}{2}\omega'^2$ сводится (с точностью до знака) к

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n^2\,([\delta\beta\,\delta\gamma\,\delta y\,\delta z] + [\delta\gamma\,\delta\alpha\,\delta z\,\delta x] + [\delta\alpha\,\delta\beta\,\delta x\,\delta y]).$$

Обозначив через λ, μ, ν направляющие косинусы нормали к элементу $d\sigma$, получим

$$[\delta y\,\delta z] = \lambda\,d\sigma,\quad [\delta z\,\delta x] = \mu\,d\sigma,\quad [\delta x\,\delta y] = \nu\,d\sigma,$$
$$[\delta\beta\,\delta\gamma] = \alpha\,d\omega,\quad [\delta\gamma\,\delta\alpha] = \beta\,d\omega,\quad [\delta\alpha\,\delta\beta] = \gamma\,d\omega;$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\omega'^2 = n^2\,(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,d\sigma\,d\omega = n^2\cos\vartheta\,d\sigma\,d\omega;$$

ϑ обозначает здесь угол между нормалью к поверхности и (средним) направлением лучей, пересекающих поверхность.

Рассмотрим теперь любую совокупность лучей, зависящую от четырех параметров; на каждом луче возьмем его точку пересечения с некоторой данной поверхностью S. Все лучи, проходящие через одну и ту же точку поверхности, образуют телесный конус; интегральный инвариант $\int \frac{1}{2}\omega'^2$, соответствующий этой совокупности, может быть дан формулой

$$I = \int n^2\cos\vartheta\,d\sigma\,d\omega.$$

где $d\sigma$ обозначает элемент поверхности S, $d\omega$ — телесный угол элементарного конуса лучей, исходящих из точки поверхности S и образующих угол ϑ с нормалью к S.

Возьмем, например, совокупность всех лучей, пересекающих объем, ограниченный замкнутой поверхностью S, и на каждом луче возьмем точку, соответствующую *выходу* луча из объема. Для этой совокупности получим

$$I = \int n^2\, d\sigma \int \cos\vartheta\, d\omega.$$

Но интеграл $\int \cos\vartheta\, d\omega$, если в качестве координат взять долготу φ и дополнение широты до прямого угла ϑ на единичной сфере, равен интегралу

$$\int\int \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

распространенному на полусферу $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. равен π. Значит, имеем

$$I = \pi \int\int n^2\, d\sigma.$$

Если показатель преломления среды равен 1, то лучи будут прямыми линиями, а интеграл I будет равен произведению π на площадь поверхности.

195. В качестве приложения общих методов интегрирования, изложенных в главе XVI, решим задачу о форме световых лучей в изотропной среде с показателем преломления n, зависящим только от одной из прямолинейных координат, например, от z. В этом случае известна инвариантная форма ω', а также три бесконечно малых преобразования, соответствующих параллельному переносу вдоль Ox, параллельному переносу вдоль Oy и вращению вокруг Oz:

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad A_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad A_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Форма

$$\omega_\delta = n(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)$$

инвариантна по отношению к этим преобразованиям; поэтому три инвариантные формы $\omega'(\delta, A_i)$ сведутся к

$$\begin{aligned} \delta\omega(A_1) &= \delta(n\alpha), \\ \delta\omega(A_2) &= \delta(n\beta), \\ \delta\omega(A_3) &= \delta[n(\beta x - \alpha y)]. \end{aligned}$$

Значит, имеем три первых интеграла

$$n\alpha, \quad n\beta, \quad n(\beta x - \alpha y).$$

Положим

$$n\alpha = a, \quad n\beta = b, \quad bx - ay = c;$$

последнее соотношение показывает, что каждый световой луч лежит в некоторой плоскости, параллельной оси Oz. Далее, имеем

$$\omega_\delta = \delta\left(ax + by + \int \sqrt{n^2 - a^2 - b^2}\, dz\right) - \\ - \left(x - a\int \frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}\right)\delta a - \left(y - b\int \frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}\right)\delta b.$$

Следовательно, уравнения световых лучей имеют вид

$$x = a\int \frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}} + a', \quad y = b\int \frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}} + b'.$$

Глава XIX.

ПРИНЦИП ФЕРМА И ИНВАРИАНТНОЕ ПФАФФОВО УРАВНЕНИЕ ОПТИКИ.

Принцип Ферма.

196. В предыдущей главе мы рассмотрели интегральный инвариант оптики изотропной среды, предполагая, что показатель преломления n *не зависит от времени.*

Возьмем теперь некоторую среду и рассмотрим распространение в этой среде световых волн, определенное уравнением Монжа (Monge)

$$F(x,\ y,\ z,\ t,\ dx,\ dy,\ dz,\ dt) = 0, \tag{1}$$

однородным относительно dx, dy, dz, dt. Это означает, что волна, порожденная световым сигналом, данным в точке $(x,\ y,\ z)$ в момент времени t, будет в момент времени $(t + dt)$ определяться уравнением

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z,\ dt) = 0.$$

Поверхность волны, соответствующей точке $(x,\ y,\ z)$ и моменту времени t, определяется, как известно, уравнением

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z,\ 1) = 0.$$

В подобной среде световой луч определяется тремя функциями x, y, z от t, удовлетворяющими уравнению (1) и, кроме того, некоторому дополнительному условию, содержание которого выражается так называемым *принципом Ферма.* Из всех кривых, удовлетворяющих уравнению (1) или, как говорят, из всех *интегральных кривых* уравнения Монжа (1), световой луч, вышедший в момент t_0 из точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и идущий в точку $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, совпадает с той, по которой он дойдет до этой последней в кратчайшее время $t_1 - t_0$. Иными словами, *световые лучи являются экстремалями проблемы Майера* (Mayer), *определенной уравнением Монжа* (1).

197. Напомним кратко, как с помощью принципа Ферма выводятся диференциальные уравнения, определяющие световые лучи. Представим себе световой луч, выходящий в момент t_0 из точки (x_0, y_0, z_0) и проходящий через точку (x_1, y_1, z_1) в момент времени t_1. Если дана какая-нибудь интегральная кривая уравнения (1), бесконечно близкая к световому лучу, то всегда можно предположить, что x, y, z и t как для светового луча, так и для интегральной кривой являются функциями параметра u, причем значения 0 и 1 этого параметра соответствуют, для светового луча, моментам t_0 и t_1. Пусть будут

$$x+\delta x, \quad y+\delta y, \quad z+\delta z, \quad t+\delta t$$

функции от u, соответствующие варьированной кривой. Обозначим через x', y', z', t' производные от x, y, z, t по параметру u. Написав уравнение (1) в виде

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ x',\ y',\ z',\ t')=0 \tag{2}$$

и проварьировав его, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t}\delta t+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z'+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t'=0.$$

Помножим левую часть этого уравнения на $\lambda\,du$, где λ — некоторая, пока неопределенная, функция от u, и проинтегрируем в пределах от 0 до 1; получим

$$\int_0^1\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}\delta t+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\delta\frac{dx}{du}+\right.$$
$$\left.+\lambda\frac{\partial F}{\partial y'}\delta\frac{dy}{du}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z'}\delta\frac{dz}{du}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t'}\delta\frac{dt}{du}\right]du=0;$$

интегрирование по частям даст:

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t\right)\right]_0^1+$$
$$+\int_0^1\left\{\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\delta x+\ldots+\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right]\delta t\right\}du=0. \tag{3}$$

Если интегральная кривая, соседняя с световым лучом, удовлетворяет начальным и конечным условиям, то будем иметь

$$(\delta x)_0=(\delta y)_0=(\delta z)_0=(\delta t)_0=(\delta x)_1=(\delta y)_1=(\delta z)_1=0;$$

следовательно:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_1 (\delta t)_1 + \int_0^1 \left\{ \left[\lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] \delta x + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left[\lambda \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right] \delta t \right\} du = 0.$$

Можно выбрать произвольно функции δx, δy, δz, обращающиеся в нуль на концах интервала; распорядимся теперь функцией λ так, чтобы коэфициент при δt в подинтегральном выражении тоже стал равен нулю. Для того чтобы $(\delta t)_1$ равнялось нулю, какова бы ни была варьированная интегральная кривая, необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты при δx, δy, δz в подинтегральном выражении тоже равнялись нулю.

Иными словами, если ввести вспомогательное переменное λ, то световые лучи будут даны системой, состоящей из уравнения (2) и из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0, \\ &\lambda \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \\ &\lambda \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0, \\ &\lambda \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{du}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial t'}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если исключить λ, то наряду с уравнением (2) получим три уравнения:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z'}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)}{\frac{\partial F}{\partial t'}}, \tag{4'}$$

к которым следует добавить соотношения:

$$\frac{dx}{du} = x', \quad \frac{dy}{du} = y', \quad \frac{dz}{du} = z', \quad \frac{dt}{du} = t'.$$

Непосредственно можно заметить, что, продиференцировав уравнение (2) по u и присоединив к нему уравнения (4'), получим систему четырех линейных уравнений для определения $\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$, $\frac{dt'}{du}$, причем полученные значения не будут зависеть от u. Значит, параметр u по существу не войдет в окончательные уравнения, которые имеют вид

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dt}{t'} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y} = \frac{dz'}{Z} = \frac{dt'}{T};$$

здесь X, Y, Z, T — определенные функции от x, y, z, t, x', y', z', t', однородные второй степени относительно x', y', z', t' и удовлетворяющие уравнению

$$x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z}+t'\frac{\partial F}{\partial t}+X\frac{\partial F}{\partial x'}+Y\frac{\partial F}{\partial y'}+Z\frac{\partial F}{\partial z'}+T\frac{\partial F}{\partial t'}=0.$$

Итак, *диференциальные уравнения световых лучей, это — обыкновенные диференциальные уравнения первого порядка между величинами* x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$, *причем эти семь величин должны быть связаны соотношением* (2).

Инвариантное пфаффово уравнение оптики.

198. Рассмотрим теперь семейство световых лучей, зависящее от параметра α, причем на каждом луче возьмем отрезок, соответствующий промежутку времени (t_0, t_1), начальной точке (x_0, y_0, z_0) и конечной точке (x_1, y_1, z_1); будем предполагать, что t_0, t_1; x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 тоже зависят от α. Обозначив для каждого луча через λ вспомогательную функцию, которая входит в уравнения (4), и применяя формулу (3), получим:

$$\lambda_1\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1\delta x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\delta y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_1\delta z_1+\left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_1\delta t_1\right]=$$
$$=\lambda_0\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0\delta x_0+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\delta y_0+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0\delta z_0+\left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_0\delta t_0\right].$$

Отсюда следует, что *система диференциальных уравнений световых лучей*, рассматриваемая как система диференциальных уравнений первого порядка между величинами x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$, связанными соотношением (2), *допускает инвариантное уравнение Пфаффа*

$$\omega_\delta\equiv\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t=0.$$

Это пфаффово уравнение, зависящее только от взаимных отношений величин x', y', z', t', содержит, в сущности, лишь шесть переменных; характеристической системой его будет система обыкновенных диференциальных уравнений, которые должны совпадать с уравнениями световых лучей.

Мы приходим, таким образом, к заключению: *световые лучи являются характеристиками уравнения Пфаффа:*

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t=0; \qquad (5)$$

это — инвариантное пфаффово уравнение оптики.

199. Практически уравнение Монжа (1) записывается так:

$$\Omega\left(x,\ y,\ z,\ t;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\equiv F\left(x,\ y,\ z,\ t;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ 1\right)=0.$$

Полагая

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}, \quad \frac{dy}{dt}=\dot{y}, \quad \frac{dz}{dt}=\dot{z},$$

составим инвариантное уравнение Пфаффа. Имеем

$$x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial z'}+t'\frac{\partial F}{\partial t'}=0;$$

следовательно, уравнение (5) можно переписать так:

$$t'\frac{\partial F}{\partial x'}\,\delta x+t'\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y+t'\frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z-\left(x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta t=0.$$

Левая часть уравнения однородна относительно x', y', z', t'; поэтому эти аргументы можно заменить соответственно через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, 1. Пфаффово инвариантное уравнение принимает при этом вид

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}\,\delta x+\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}}\,\delta y+\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\,\delta z-\left(\dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\right)\delta t=0. \tag{6}$$

Возьмем, например, среду, в которой волновая поверхность представляет собой сферу; пусть $\frac{c}{n}$ — скорость распространения света в среде, c — скорость света в пустоте, n — показатель преломления среды (функция x, y, z, t). Уравнение Монжа имеет в этом случае вид:

$$n^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-c^2=0,$$

а инвариантное уравнение Пфаффа есть

$$n^2(\dot{x}\,\delta x+\dot{y}\,\delta y+\dot{z}\,\delta z)-c^2\,\delta t=0.$$

Если положить

$$\alpha=\frac{n\dot{x}}{c}, \quad \beta=\frac{n\dot{y}}{c}, \quad \gamma=\frac{n\dot{z}}{c},$$

то оно принимает вид

$$n(\alpha\,\delta x+\beta\,\delta y+\gamma\,\delta z)-c\,\delta t=0;$$

здесь α, β, γ — направляющие косинусы касательной к световому лучу.

Если n не зависит от времени, то уравнения распространения света допускают бесконечно малое преобразование $\frac{\partial f}{\partial t}$; поэтому дифференциальные уравнения световых лучей будут допускать инвариантную *форму*

$$\delta t-\frac{n}{c}(\alpha\,\delta x+\beta\,\delta y+\gamma\,\delta z).$$

Следовательно, дифференциальные уравнения, которые дают кривые (геометрические), описанные световыми лучами, будут допускать *относительный* интегральный инвариант

$$\int n(\alpha\,\delta x+\beta\,\delta y+\gamma\,\delta z);$$

мы приходим к точке зрения, изложенной в предыдущей главе (п. 192).

200. Характеристическая система инвариантного пфаффова уравнения оптики может быть сведена, как известно (п. 153), к характеристическим уравнениям уравнения в частных производных первого порядка (впрочем, справедливо и обратное, но мы на этом не будем останавливаться).

Существование интегрального инварианта будет обеспечено всякий раз, когда закон распространения света допускает бесконечно малое преобразование; во всех этих случаях разыскание световых лучей может быть сведено ***к обыкновенной*** задаче вариационного исчисления.

Рассмотрим, например, случай, когда закон распространения света дается уравнением Монжа

$$n^2(dx^2+dy^2+dz^2)-c^2\,dt^2=0,$$

причем показатель преломления может зависеть от x, y, t, но *не зависит* от z. В этом случае закон распространения света допускает бесконечно малое преобразование $Af=\frac{\partial f}{\partial z}$ и форма

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)}=\frac{n(\alpha\,\delta x+\beta\,\delta y+\gamma\,\delta z)}{n\gamma}=\delta z+\frac{\alpha}{\gamma}\,\delta x+\frac{\beta}{\gamma}\,\delta y-\frac{c}{n\gamma}\,\delta t$$

будет инвариантной формой. Если координаты x и y в функции от t известны, то z получается одной квадратурой. Что касается диференциальных уравнений, дающих x и y в функции от t, то они допускают относительный интегральный инвариант

$$\int\frac{\alpha}{\gamma}\,\delta x+\frac{\beta}{\gamma}\,\delta y-\frac{c}{n\gamma}\,\delta t$$

или, что то же, интегральный инвариант

$$\int\xi\,\delta x+\eta\,\delta y-\zeta\,\delta t,$$

где ξ, η, ζ — три величины, связанные соотношением

$$1+\xi^2+\eta^2=\frac{n^2}{c^2}\zeta^2.$$

Уравнения характеристик включают, в частности, следующие уравнения:

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dt}{\frac{n^2}{c^2}\zeta}=\frac{\sqrt{dt^2-\frac{n^2}{c^2}(dx^2+dy^2)}}{\frac{n}{c}}.$$

Значит, световые лучи соответствуют стационарному значению интеграла

$$\int-\xi\,dx-\eta\,dy+\zeta\,dt=\int\sqrt{\frac{c^2}{n^2}dt^2-dx^2-dy^2}.$$

Принцип Ферма в форме, не зависящей от выбора системы референции в пространстве — времени.

201. Важно отметить, что инвариантное пфаффово уравнение оптики связано с уравнением Монжа, определяющим закон распространения света так, что *эта связь не зависит от выбора системы референции в пространстве и времени*. Иными словами, уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\,\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z+\frac{\partial F}{\partial t'}\,\delta t=0$$

ковариантно с уравнением

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ x',\ y',\ z',\ t')=0$$

относительно любого преобразования переменных x, y, z, t. В сущности, это вытекает из самого принципа Ферма; но можно получить это уравнение и другим путем, не выделяя ни одного из переменных x, y, z, t.

Рассмотрим систему Пфаффа

$$\frac{dx}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dz}{z'}=\frac{dt}{t'},\tag{7}$$

в которой относительно переменных x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ предполагается, что они связаны соотношением (2), и найдем *производную* систему системы (7). Так называют систему пфаффовых уравнений, являющихся линейными комбинациями уравнений системы (7) и обладающих тем свойством, что внешние производные их левых частей обращаются в нуль в силу уравнений (7). Если, как и выше, положить

$$\frac{x'}{\dot x}=\frac{y'}{\dot y}=\frac{z'}{\dot z}=\frac{t'}{1},$$

то любую линейную комбинацию уравнений (7) можно представить в виде

$$u(dx-\dot x\,dt)+v(dy-\dot y\,dt)+w(dz-\dot z\,dt)=0.$$

Если принять во внимание уравнения (7), то внешняя производная левой части последнего уравнения сведется к

$$[dt\,(u\,d\dot x+v\,d\dot y+w\,d\dot z)];$$

условием равенства нулю этого выражения, при учете уравнений (7) и продиференцированного уравнения (2), будет

$$[dt\,(u\,d\dot x+v\,d\dot y+w\,d\dot z)\,(dx-\dot x\,dt)\,(dy-\dot y\,dt)\,(dz-\dot z\,dt)\,dF]=0,$$

или, проще,

$$\left[dx\,dy\,dz\,dt\,(u\,d\dot x+v\,d\dot y+w\,d\dot z)\left(\frac{\partial F}{\partial \dot x}d\dot x+\frac{\partial F}{\partial \dot y}d\dot y+\frac{\partial F}{\partial \dot z}d\dot z\right)\right]=0.$$

Это дает

$$\frac{u}{\frac{\partial F}{\partial \dot x}}=\frac{v}{\frac{\partial F}{\partial \dot y}}=\frac{w}{\frac{\partial F}{\partial \dot z}}.$$

Производной системой по отношению к системе (7) является, таким образом, одно уравнение Пфаффа

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(dx-\dot{x}\,dt)+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(dy-\dot{y}\,dt)+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}(dz-\dot{z}\,dt)=0,$$

характеристиками которого служат световые лучи.

Отсюда следует, что и в оптике временная координата не играет существенно особой роли по сравнению с пространственными координатами. Основные законы оптики не связаны существенно с классическими представлениями о пространстве и времени и переносятся без изменения в теорию относительности.

202. Если, например, в мире (пространство — время) выбрать подходящую систему референции, то закон распространения света в поле тяготения, вызванном одной массой (сведенной в точку), будет выражаться уравнением Шварцшильда (Schwarzschild):

$$\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2=0.$$

Это уравнение допускает бесконечно малое преобразование $\frac{\partial f}{\partial t}$; значит, световые лучи, рассматриваемые только с точки зрения пространства, определяются как кривые, вдоль которых имеет место экстремум интеграла

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}+\frac{r^2\,(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2)}{1-\frac{2m}{r}}}.$$

Распространение света происходит в плоскости, проходящей через центр притяжения, и, если предположить, что эта плоскость определена уравнением $\varphi=0$, происходит так, что осуществляется экстремум интеграла

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}+\frac{r^2d\vartheta^2}{1-\frac{2m}{r}}}.$$

Используя существование бесконечно малого преобразования $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$, легко заканчиваем интегрирование и получаем

$$\vartheta=\int\frac{c\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r^2}}}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

H. Poincaré. — Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. III, Paris Gauthier — Villars, 1899.

P. Appell. — Traité de Mécanique rationnelle, t. II, chap. XXV, Paris, Gauthier — Villars.

H. Poincaré. — Sur les résidus des intégrales doubles; Acta Mathem., IX, 1887, стр. 321—380.

— Analysis situs; Journal Ec. Polyt., 1895.

Th. de Donder. — Etude sur les invariants intégraux; Rend. Circ. Mat. Palermo, XV (1901), стр. 66—131; XVI (1902), стр. 155—179.

— Sur les invariants intégraux; Atti del IV° Congresso internationale dei Matematici, II, Roma, 1909, стр. 129—137.

— Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé; Bulletin de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), 1908, стр. 795—811.

— Sur les invariants intégraux relatifs; ibid., 1909, стр. 66—83.

— Applications du multiplicateur généralisé; ibid., 1909, стр. 610—621.

— Sur le multiplicateur généralisé; ibid., стр. 268—286.

— Sur les invariants intégraux relatifs et leurs applications à la Physique mathématique; ibid., 1911, стр. 50—70.

— Quelques remarques sur le multiplicateur de Jacobi et le multiplicateur généralisé; ibid., 1911, стр. 740—749.

— Introduction à la théorie des invariants intégraux; ibid., 1913, стр. 1043—1073.

— Application à la théorie des invariants intégraux; Mémoires de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences) (2), 1, (1904).

— Sur les équations canoniques de Hamilton-Volterra; ibid. (2), III.

G. Koenigs. — Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles; C. R. Acad. des Sc. Paris, CXXI (1895), стр. 875—878.

— Sur les invariants intégraux; ibid., CXXII (1896), стр. 25—27.

S. Lie. — Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen; Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania. 1902, N. 1 (73 стр.).

K. Zorawski. — Ueber gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale; Bull. Acad. des sciences de Cracovie (sc. math. et natur.), 1909, стр. 483—542.

R. Hargreaves. — Integralforms and their connexion with physical equations; Trans. Cambridge Philosoph. Society; XXI (1912), стр. 107—122.

R. Dontot. — Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes; Bull. Soc. Math. de France, XLII (1914), стр. 53—91.

E. Vessiot. — Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géometrique; Bull. Soc. Math. de France, XLII (1914), стр. 142—167.

— Sur un invariant intégral de l'Hydrodynamique et son application à la relativité; C. R. Acad. des Sc. de Paris, 30 déc. 1918.

E. Goursat. — Sur les invariants intégraux; Journal Math. pures et appliquées (5), IV (1908), стр. 331—365

— Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux; ibid. (7), 1 (1915), стр. 241—259.

— Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff; Ann. Fac. Sc. Toulouse, VII (1915).

E. Cartan. — Sur l'intégration des systèmes différentiels complétement intégrales; C. R. Acad. des S. Paris, CXXXV (1902), стр. 1415—1417; 1564—1566.
T. Chella. — Vantaggie che si possono trarre da noti invarianti integrali e differenziali in alcuni problemi d'integrazione; Annali R. Scuola norm. sup. Pisa (sc. fis.-mat.), XI (1910), стр. 1—137.

По вопросу о так называемом символическом исчислении внешних диференциальных форм и некоторых других, связанных с этим, исчислениях — можно использовать, кроме вышеуказанных мемуаров, следующие:

E. Cartan. — Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff; Ann. Ec. Norm. (3), XVI (1899), стр. 239—332.
A. Buhl. — Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes; Ann. Fac. Sc. Toulouse IV (1912); VI (1914); VII (1915).

Наконец, по вопросу об интегральных инвариантах непрерывных групп преобразований можно указать следующие работы, где авторы стоят на точке зрения, несколько отличной от точки зрения Пуанкаре:

S. Lie. — Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten; Ber. Sächs. Gesellsch., Leipzig. 1897, стр. 342—357
— Ueber die Integralinvarianten und ihre Verwertung für die Theorie der Differentialgleichungen; ibid., 1897, стр. 369—410.
K. Zorawski. — Ueber Integralinvarianten der continuierlichen Transformationsgruppen; Bull. Acad. Sc. Cracovie (sc. math. et nat.), 1895, стр. 127—130.
E. Cartan. — Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé; Bull. Soc. Math. France, XXIV (1896), стр. 140—177.
Th. de Donder. — Sur un problème relatif aux invariants intégraux; Bull. Acad. royale de Belgique (classe des sc.), 1912, стр. 583—590.
R. Deltheil. — Sur la théorie des probabilités géométriques; thèse; Toulouse, Ed. Privat, 1920.

Редактор М. Г. Фрейдина. Технический редактор Е. Шпак.

Т 21-5-4 Прот. ТКК № 11
Сдано в производство 4/I 1939 г.
Подписано к печати 7/IV 1939 г.
Тираж 9000 экз.
Печ. л. 13,5 Уч.-авт. л. 16.

Формат 60×92¹/₁₆.
Изд. № 165. Учетный № 4710.
Печ. зн. в 1 бум. листе 101376
Уполвом. Главлита № А 2165
Заказ № 44.

Тип. «Красный Печатник», Ленинград, Международный пр., 75а.