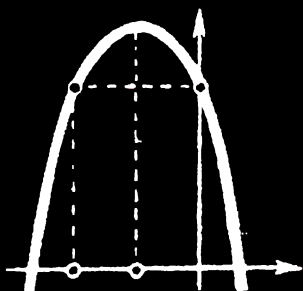
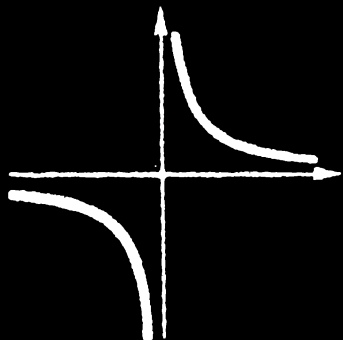


НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

О. С. ИВАШЕВ-
МУСАТОВ



О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве
учебного пособия для студентов высших
учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.161
И24
УДК 517(075.8)

Ивашев-Мусатов О. С. Начала математического анализа: Учеб. пособие. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 288 с. — ISBN 5—02—013741—3.

Учебное пособие по курсу высшей математики для студентов первых курсов вузов с небольшой программой по математике (до 200 часов).

В пятом издании в книгу включены простейшие сведения по аналитической геометрии и линейной алгебре, теории функций нескольких переменных и теории функций комплексной переменной. 4-е изд. — 1981 г.

Для студентов биологических, географических, геологических, медицинских и сельскохозяйственных специальностей вузов.

Рецензент

доктор физико-математических наук профессор В. А. Зорич

Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Редактор Г. В. Дорофеев
Художественный редактор Т. Н. Кольченко
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректоры О. М. Березина, М. Л. Медведская

ИБ № 32501

Сдано в набор 23.04.87. Подписано к печати 09.11.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,33. Уч.-изд. л. 16,23. Тираж 39 000 экз. Заказ 561. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы 1981; 1988,
переработанное и дополненное

И $\frac{1702050000-028}{053(02)-88}$ 73-88

ISBN 5—02—013741—3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Введение	7
§ 1. Понятие функции	7
§ 2. Предел и непрерывность функции в точке	18
Глава II. Дифференциальное исчисление (функции одной переменной)	47
§ 1. Производная	47
§ 2. Исследование функций	60
§ 3. Дифференциал функции	73
Глава III. Функции нескольких переменных	80
§ 1. Введение	80
§ 2. Дифференциальное исчисление	86
§ 3. Приложения дифференциального исчисления	100
Глава IV. Интегральное исчисление (функции одной переменной)	112
§ 1. Неопределенный интеграл	112
§ 2. Определенный интеграл	122
§ 3. Приложения интегрального исчисления	135
§ 4. Обобщения	148
Глава V. Дифференциальные уравнения	153
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	153
§ 2. Некоторые общие сведения из теории	165
§ 3. Дифференциальные уравнения второго порядка	172
Глава VI. Ряды	190
§ 1. Общие факты	190
§ 2. Достаточные признаки сходимости рядов	195
§ 3. Степенные ряды	208

Приложение	222
1. Основные элементарные функции	222
2. Второй замечательный предел	232
3. Действительные числа	234
4. Непрерывные функции	238
5. Функциональные ряды и ряды Фурье	249
6. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры	260
7. Вектор-функция	276
8. Линии второго порядка	277
9. Комплексные числа и функции	284

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта редакция книги, первое издание которой вышло в 1970 г., сформировалась в результате тридцатилетнего обдумывания и преподавания курса «Математический анализ» («Высшая математика») студентам самого разного математического уровня — от студентов механико-математического факультета МГУ до студентов вечернего отделения географического факультета МГУ (у которых на весь курс высшей математики отводилось около ста часов).

При этом надо было считаться еще и с тем, что значительная часть аудитории имеет большой перерыв в учебе и существенные пробелы в знании школьной математики. Поэтому наглядность изложения и естественность введения новых понятий приобретала первостепенное значение. Однако наряду с этим нельзя было поступаться и строгостью в проводимых доказательствах, поскольку на курс математики возложено также формирование культуры логического мышления.

Все это наложило определенный отпечаток на изложение. В нем я не стремился к излишней общности, чтобы за ней не пропала суть дела. Так, вначале читатель может предполагать, что рассматриваемые функции определены на некотором промежутке, за исключением, быть может, нескольких точек. Нет в книге и ряда терминов: по моим наблюдениям, обилие терминов при первом знакомстве тормозит восприятие.

Предлагаемый курс рассчитан на студентов, изучающих малый «курс высшей математики» — от ста до двухсот часов. Поэтому ряд вопросов и доказательств вынесен в приложение. При первом

знакомстве с математическим анализом этот материал можно безболезненно опустить. В тех случаях, когда разговор может коснуться крупных разделов, читатель отсылается к курсам математического анализа (или высшей математики), написанным для более обширной программы, — это коротко в тексте помечено так: (см. КМА). При этом никакой конкретный курс в виду не имеется — можно взять любое руководство.

При проведении цепочки вычислений (см., например, с. 29), требующих попутных разъяснений, я не считал целесообразным разрывать эту цепочку. Те равенства, которые требуют разъяснений или дополнительных доказательств, имеют сверху номер, а ниже под этим номером проведены необходимые рассуждения, обосновывающие это равенство.

Все изложение строится на основе понятия функции, а не переменной величины. Термин «переменная величина» также употребляется как интуитивно всем понятный, а в изложении удобнее иметь дело с более простым понятием функции.

Изложение строится в основном традиционно. Однако при введении понятий предела функции и ее непрерывности автор считает необходимым начинать с понятия непрерывности, как более знакомого из повседневной жизни. Всем понятно без каких-либо объяснений, что при малом изменении ребра куба его объем изменится мало, что за малый промежуток времени температура нагреваемого тела изменится мало и т. п. Это и есть непосредственное, житейское понимание непрерывности функции.

Простейшее представление о непрерывной на промежутке функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, подводит к общепринятому определению непрерывности функции в точке (и это делается до знакомства с пределом функции и даже с пределом последовательности). Понятие предела функции в точке появляется при обсуждении практических задач как естественное обобщение понятия непрерывности.

При подготовке этой редакции книги была учтена реформа преподавания в школе и соответствующие изменения в программе высшей школы.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие функции

Даже при поверхностном взгляде видно, что все вокруг нас находится в постоянном изменении. Меняются температура и влажность воздуха, атмосферное давление, сила ветра, скорость движения машин и т. д. Меняется — это значит, что при измерениях одной и той же величины в разное время и в разных местах будут получаться разные числа.

Постоянные (не меняющиеся) величины встречаются чрезвычайно редко. Примером постоянной может служить отношение длины окружности к ее диаметру: какую окружность ни взять, это отношение равно π . Другой пример — сумма углов в треугольнике: какой треугольник ни взять, сумма его углов равна двум прямым. Еще пример — произведение давления газа в цилиндре с поршнем на объем газа: оно тоже не меняется, но здесь уже нужна оговорка — температура при этом должна сохраняться постоянной.

В математическом анализе изучаются переменные величины. При этом для потребностей практики особенно важно изучать изменение переменных величин в их взаимосвязи. Например, для разных окружностей их радиус R и длина C различны — это переменные величины. Но для одной и той же окружности они между собой жестко связаны: если радиус R известен, то длина C этим вполне определена (как известно из школьного курса, $C = 2\pi R$, но сейчас это не главное). С изменением радиуса R будет вполне определенным образом меняться и длина окружности C . Про такую связь между переменными величинами принято говорить, что C есть функция от R , а R — аргумент этой функции. Записывают это так: $C = f(R)$ или $C = C(R)$ и т. п.

Аналогично, площадь круга S есть функция от его радиуса R (аргумента этой функции): $S = g(R)$ или $S = S(R)$ и т. п. То, что это иная функция, нежели $C(R)$, отмечено в записи — эта функция обозначена другой буквой. Также и давление p в цилиндре с поршнем есть функция от объема V , занимаемого газом (V — аргумент этой функции): $p = F(V)$, или $p = p(V)$ и т. п.

Основное, на что надо обратить внимание во всех этих примерах, состоит в том, что каждому значению аргумента соответствует (по некоторому закону) определенное значение функции. При этом не существенно, знаем мы формулу, описывающую эту зависимость, или нет. Например, давление в комнате меняется со временем, т. е. давление p есть функция времени t : $p = p(t)$. Однако вряд ли кто может написать формулу для этой зависимости.

Итак, мы подошли к определению понятия числовой функции — основного понятия математического анализа.

Определение 1. Если каждому числу x из множества чисел D поставлено в соответствие единственное число y , то говорят, что *на множестве D задана функция f* . Число y называют значением функции f в точке x и пишут $y = f(x)$, x — аргументом этой функции, а множество D — областью определения этой функции.

Обычно говорят проще — переменная y есть функция от переменной x , или задана функция $y = f(x)$, или просто $f(x)$. Вместо буквы f можно пользоваться любой другой буквой и писать: задана функция $y = y(x)$ или $y = \alpha(x)$ и т. п. При этом обозначения выбираются так, чтобы в данном рассуждении разные функции обозначались по-разному, а одна и та же функция обозначалась одним и тем же способом.

В приведенных выше примерах с длиной окружности $C(R)$ и площадью круга $S(R)$ областью определения этих функций будет множество D всех положительных действительных чисел. В примере с давлением газа в цилиндре с поршнем аргумент V не может быть отрицательным, нулем и больше объема V_0 цилиндра, т. е. областью определения этой функции будет множество D всех действительных чисел V , удовлетворяющих неравенству $0 < V \leq V_0$.

Выше мы рассматривали переменную y как функцию от одной переменной x . На практике переменная y часто зависит от нескольких переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда y называют функцией от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n — аргументов этой функции — и записывают это так: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и т. п.

Первое знакомство с анализом начинается с изучения более простых функций от одного аргумента.

Области определения функций могут быть устроены весьма сложно. Из них принято выделять простейшие множества — *промежутки*. Напомним основное определение.

Определение 2. Отрезок $[a, b]$ (a и b — действительные числа, $a < b$) есть множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$. Числа a и b называют концами отрезка (соответственно левым и правым). Все действительные числа x , удовлетворяющие неравенству $a < x < b$, называют внутренними точками отрезка $[a, b]$ и их множество называется *интервалом* (a, b) (или $]a, b[$).

Название «отрезок» связано с изображением действительных чисел точками прямой. Вспомним, что каждое действительное число изображается точкой на координатной прямой и каждая точка координатной прямой изображает некоторое действительное число, так что в дальнейшем мы не будем различать действительные числа и точки на координатной прямой: говоря «число», представляем себе соответствующую точку и, говоря «точка», представляем себе соответствующее число.

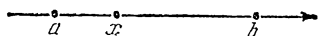


Рис. 1

Возьмем два числа a и b , $a < b$, — это точки на прямой. Отрезок (какого принято понимать в геометрии) с концами a и b (рис. 1) состоит из точек прямой, расположенных между точками a и b (концами этого отрезка) и самих этих точек a и b . Если точка (число) x лежит на отрезке, то она или расположена между точками a и b , и тогда $a < x < b$, или совпадает с концом a , и тогда $x = a$, или совпадает с концом b , и тогда $x = b$.

Переходим к функциям. В определении функции ничего не сказано о том, как устанавливается соответствие между числами x и y . В зависимости от

того, как задано это соответствие, различаются три основных способа задания функции: табличный, аналитический (при помощи формул) и графический (при помощи чертежа). Разберем эти способы, их достоинства и недостатки.

Табличный способ задания функции состоит в том, что для каждого значения аргумента x (из области определения функции) рядом выписывается соответствующее значение y , — получается таблица. Например:

x	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	2,78	2,96	3,31	3,85	4,63

(при этом, конечно, все x из области определения функции выписать нельзя, и уже поэтому такое задание функции весьма неполно). Из приведенной таблицы легко себе представить, как ведет себя функция. Пусть, например, x — это время, а y — это температура. Ясно, что температура со временем повышается, причем чем дальше, тем быстрее, и в определенные моменты времени известны точные значения температуры. Это достоинство табличного способа. Но вот совершенно неизвестно, определена ли эта функция при $x = 1,37$? А если определена, то чему равен y при $x = 1,37$? Таким образом, при табличном способе задания функции почти ничего не известно об области определения этой функции. Для ответа на этот вопрос нужна, помимо этой таблицы, дополнительная информация.

Допустим теперь, что нам известно дополнительно, что функция определена для всех промежуточных значений x . Но как она там изменяется? В приведенном примере как будет изменяться y при x , меняющемся от 1,3 до 1,4, какая здесь будет таблица? Такая:

x	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40
y	2,78	2,81	2,84	2,88	2,92	2,96

или такая:

x	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40
y	2,78	2,95	3,17	2,62	2,74	2,96

В первом случае ясно, что нагревание идет постепенно, «нормально». А во втором случае с прибором творится что-то странное, явно «что-то не то». Но по первоначальной таблице, ничего не зная о том, откуда эта таблица взялась, выбрать из этих двух возможностей одну, соответствующую действительности, невозможно: оба случая равноправны. В этом большой недостаток табличного задания функций.

Однако в ряде случаев это единственный способ экспериментального изучения окружающих нас закономерностей. В самом деле, что делается, когда ставят опыт? С точки зрения математика здесь изучается зависимость между определенными переменными, другими словами, изучается некоторая функция. При опыте ведутся записи, в простейшем случае отмечается время (аргумент функции) и записывается показание прибора (соответствующее значение функции), т. е. функция задается таблицей. А задача исследователя состоит в том, чтобы по полученной таблице изучить эту функцию.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что соответствие между x и y задается при помощи формулы. Например:

$$y = \frac{\sin 2x}{x^2 + \lg(x+6)}, \quad y = \begin{cases} x^2 + 2, & x > -3, \\ \sin x - 1, & x \leq -3. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что второе равенство каждому числу x ставит в соответствие единственное число y и поэтому тоже задает y как функцию от x . Область определения данной функции состоит из всех действительных чисел x . Подчеркнем особо, что здесь две формулы задают одну функцию (каждая для своих x), но, как мы видим, для задания функции это не существенно.

При аналитическом способе задания функции и область определения ясна (по крайней мере теоретически), и точные значения можно вычислить, и

работать с такой функцией несложно. Это — достоинства аналитического способа задания.

Но как ведет себя функция, заданная той или иной формулой? Если y — это температура, то при x , изменяющемся от 1,3 до 1,4, она повышается или понижается? А может быть, она то повышается, то понижается? Если формула сложна, то ответы на эти вопросы получить нелегко (хотя теоретически они решаются полностью и трудности возникают только из-за решения уравнений и неравенств). Недостаток аналитического способа задания функции — его малая наглядность.

Отметим еще, что две функции естественно считать равными только в том случае, когда их области определения совпадают и при равных аргументах они имеют равные значения. Так, функции $\lg x^2$ и $2 \lg x$ не равны, так как первая определена для всех $x \neq 0$, а вторая — только для $x > 0$. Эти функции равны только на множестве $x > 0$. Аналогично функции

$$f(x) = x + 1 \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

не равны, так как функция f определена при всех x , а функция g при $x = 1$ не определена (хотя при любом $x \neq 1$ эти функции принимают равные значения).

Прежде чем перейти к графическому способу задания функции, введем важное понятие графика функции:

Определение 3. *Графиком функции f называется множество точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x пробегает всю область определения функции f .*

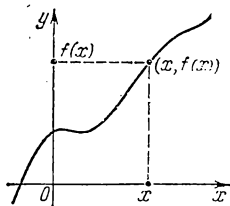


Рис. 2

График обычно представляет собой линию (рис. 2), состоящую из одного или нескольких кусков. Из школы известно (см. Приложение), что графиком функции $y = kx + b$ служит прямая (линия состоит из одного куска), а графиком функции $y = 1/x$ служит гипербола (линия состоит из двух кусков).

Описательно можно сказать, что график функции f есть такая линия, координаты любой точки которой связаны равенством $y = f(x)$.

Итак, с каждой функцией (в простейшем и для практики наиболее важном случае) связана некоторая линия — график этой функции. Сказать «и обратно» было бы неосторожно — из рис. 3 видно, что с начерченной линией никакая функция не связана, так как точке x_0 на линии соответствуют три числа y_1 , y_2 и y_3 , что противоречит определению функции. Если же линия пересекается с каждой прямой, параллельной оси ординат, не более чем в одной точке, то она задает некоторую функцию.

В самом деле, рассмотрим на рис. 4 отрезок $[a, b]$, полученный при проектировании линии L параллельно оси Oy на ось Ox . Возьмем любую точку x из отрезка $[a, b]$ и проведем через нее прямую, парал-

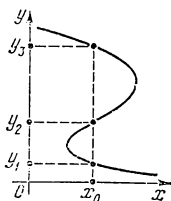


Рис. 3

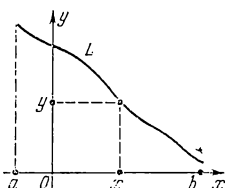


Рис. 4

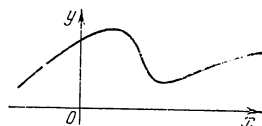


Рис. 5

лельную оси Oy . Эта прямая пересекает линию L в единственной точке. Ординату y точки пересечения поставим в соответствие взятому числу x . Следовательно, при помощи линии L каждому x из отрезка $[a, b]$ ставится в соответствие единственное число y , т. е. на $[a, b]$ задана функция, а линия L есть график этой функции.

Задать функцию графически — значит нарисовать ее график. Это делают все самопишущие приборы — они вычерчивают графики изучаемых функций. В дальнейшем, говоря «функция», мы тут же будем представлять себе ее график, а рисуя график, мы тут же будем говорить «функция» (подобно тому как мы часто не различаем точки прямой и числа).

Пусть график (рис. 5) задает изменение температуры y в зависимости от времени x . Хорошо видно, что температура сначала росла, потом стала убывать, потом опять росла (но медленнее, чем в начале), т. е. графическое задание функции чрезвычайно наглядно. Но вот в точности оно проигрывает. Из чертежа можно получить любое значение функции (см. рис. 2),

измерив ординату соответствующей точки графика. Это измерение можно сделать, однако, только с некоторой погрешностью, зависящей от чертежа и измерительных приборов, — в этом недостаток графического задания функции.

Удобнее всего изучать функцию, заданную и аналитически, и графически. При переходе от аналитического задания функции к графическому (при этом говорят, что по заданной формуле строится график), в простейших случаях составляют таблицу

x	x_1	x_2	x_3	\dots
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	\dots

наносят на плоскости точки с координатами $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ и т. д. и «соединяют их плавной линией». При этом, однако, характерные особенности поведения функции могут исказиться или совсем утеряться. Например, по точкам рис. 6 график можно провести по-разному (рис. 7, 8, 9, 10), и какой из них будет верным — неизвестно. Ниже будут даны правила, позволяющие уловить основные особенности поведения функции (по крайней мере теоретически).

Итак, определим основные особенности поведения функции.

Определение 4. Функция f возрастает на множестве D , если для любых чисел x_1 и x_2 из множества D выполнено условие

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция f убывает на множестве D , если для любых чисел x_1 и x_2 из множества D выполнено условие

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными на множестве D* .

Рис. 11 и 12 иллюстрируют определение 4.

Если в этом определении при любых x_1 и x_2 из D для значений функции выполнены строгие неравенства, то говорят о строгом возрастании (соответственно строгом убывании, строгой монотонности) функции.

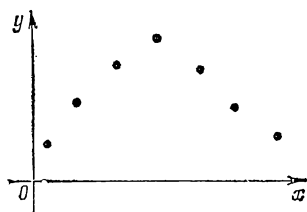


Рис. 6

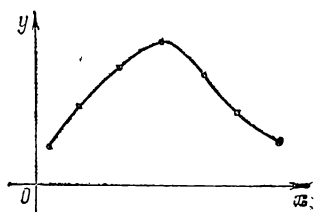


Рис. 7

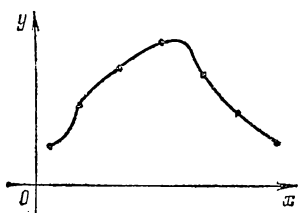


Рис. 8



Рис. 9

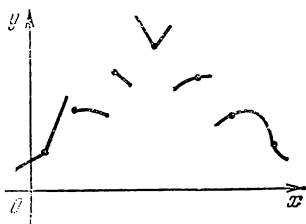


Рис 10

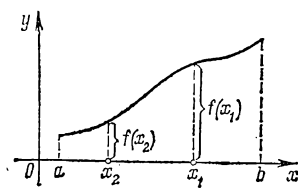


Рис. 11

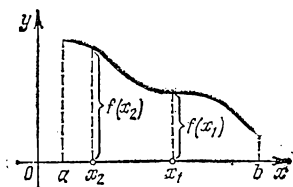


Рис. 12

Про возрастающую функцию описательно можно сказать так: чем больше значение аргумента, тем больше значение функции, или иначе: с ростом аргумента растет значение функции.

Определение 5. Всякий интервал, содержащий точку p , называется *окрестностью точки p* .

Окрестность точки p обозначается $U(p)$ или просто U (рис. 13). Если из окрестности точки p эта точка p удалена, то получается *проколота окрестность* точки p — ее обозначают $\dot{U}(p)$ или просто \dot{U} (сверху ставится точка, рис. 14).

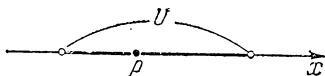


Рис. 13

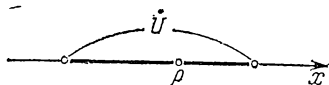


Рис. 14

Определение 6. Точка x_0 называется *точкой максимума функции f* (рис. 15, коротко пишут *max*), если можно найти такую окрестность U точки x_0 , что для любого числа x из этой окрестности $f(x) \leq f(x_0)$. Точка x_0 называется *точкой минимума функции f*

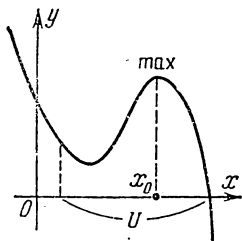


Рис. 15

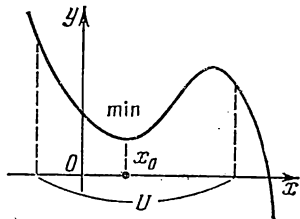


Рис. 16

(рис. 16, коротко пишут *min*), если можно найти такую окрестность U точки x_0 , что для любого числа x из этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$. Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Про точку максимума описательно можно сказать так: в этой точке функция имеет наибольшее значение из всех близких (но не обязательно из всех вообще). На рис. 15 видно, что слева от точки x_0 имеются значения функции большие, чем $f(x_0)$, но для близких значений аргумента (расположенных около точки x_0 , т. е. попавших в достаточно малую

окрестность U этой точки) $f(x_0)$ — наибольшее значение функции f .

Введем еще несколько терминов. Пусть задана пара функций

$$\begin{cases} y = f(t), \\ t = g(x). \end{cases}$$

Эти равенства задают y как функцию от x . Действительно, если x — любое число (для простоты будем предполагать, что функции f и g определены всюду), то ему поставлено в соответствие единственное число $t = g(x)$, а этому числу t поставлено в соответствие единственное число $y = f(t)$. Таким образом, каждому числу x поставлено в соответствие единственное число y , $y = F(x)$. Функция F называется *сложной функцией*, составленной из функций f и g , и обозначается $f \circ g$ или $f(g(x))$. Переменная t — промежуточная переменная. Например, пара функций

$$\begin{cases} y = t^2, \\ t = \sin x \end{cases}$$

задает сложную функцию $y = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Если функции f и g определены не всюду, то надо рассматривать только допустимые значения t и x . Например, пара функций

$$\begin{cases} y = \sqrt{t}, \\ t = 1 - \lg x \end{cases}$$

задает сложную функцию $y = \sqrt{1 - \lg x}$, но на каком множестве? Прежде всего, $x > 0$, иначе $\lg x$ не имеет смысла. Но, кроме того, функция $y = \sqrt{t}$ определена для $t \geq 0$; поэтому годятся не все $x > 0$, а только такие, для которых $1 - \lg x \geq 0$, т. е. x из промежутка $(0, 10]$. Этот промежуток и есть область определения рассматриваемой функции.

Область определения функции f будем обозначать через $D(f)$, а множество всех значений функции f обозначать через $E(f)$.

Определение 7. Функция g называется *обратной к функции f* , если:

$$1) D(g) = E(f), E(g) = D(f),$$

2) $f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$ при любых числах $a \in D(f)$ и $b \in D(g)$.

Поскольку выписанные условия симметричны относительно f и g , то и f обратна к функции g ; говорят, что f и g — *взаимно обратные функции* (см. Приложение, с. 241). Например, функции x^3 и $\sqrt[3]{x}$ взаимно обратны, так как у них область определения и множество значений есть \mathbf{R} и $a^3 = b \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{b}$ для любых чисел по определению кубического корня.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Действительно, если точка (a, b) лежит на графике функции f , то $b = f(a)$, и потому $a = g(b)$, т. е. точка (b, a) лежит на графике функции g , а точки (a, b) и (b, a) симметричны относительно прямой $y = x$. Из условия 2) для взаимно обратных функций получаем: $g(f(x)) = x$ при любом $x \in D(f)$ и $f(g(x)) = x$ при любом $x \in D(g)$.

§ 2. Предел и непрерывность функции в точке

Наблюдая происходящие вокруг изменения, прежде всего можно отметить, что они происходят (в основном) постепенно. Например, если поставили кипятить воду, то время идет и температура воды повышается, но как? — постепенно, без скачков, т. е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математики, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало меняются значения функции (температура).

Но что значит мало? Вот 1 мм — это мало или много? Если ошибка в 1 мм сделана при изготовлении стола, то это мало. Но если эта же ошибка в 1 мм сделана при изготовлении шарикоподшипника диаметром в 1 см, то это очень много. Таким образом, ответ на вопрос о том, будет ли взятая величина малой, зависит от обстоятельств.

Приведем еще и такие наблюдения. Вы уже знаете графики ряда функций. Одни из них можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, — это графики функций $kx + b$, $\sin x$, $\cos x$, a^x и $\log_a x$. А графики других функций так нарисовать нельзя — это графики функций $1/x$, $\operatorname{tg} x$, $[x]$ (целая часть x). Графики этих функций представляют собой разорванные линии. Это название сохраняется и за функциями — говорят: разрывные функции. А графики функций

$kx + b$, $\sin x$, $\cos x$, a^x и $\log_a x$ — линии неразорванные, они идут непрерывно. Это название сохраняется и за функциями — говорят: непрерывные функции.

Все высказанные соображения надо учесть при изучении функции. Это приводит (как это делается, показано подробно в Приложении, с. 238) к двум важным понятиям математического анализа — предел функции в точке и непрерывность функции в точке.

Определение 8. Число b называют *пределом функции f в точке a* (или при x стремящемся к a , при $x \rightarrow a$) и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ , что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (1)$$

Определение 9. Функция f *непрерывна в точке a* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2)$$

Если воспользоваться определением 8, то определение непрерывности функции в точке примет вид:

Определение 10. Функция f называется *непрерывной в точке a* , если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ , что

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Как видите, определения 8 и 10 почти дословно совпадают. Только вместо числа b (в формуле (1)) стоит число $f(a)$ (в формуле (3)). Но есть в этих определениях еще одно существенное (но мало заметное) отличие: в условиях (1) есть неравенство $0 < |x - a|$, а в (3) его нет. Это неравенство говорит о том, что мы не рассматриваем значение $x = a$, когда говорим о пределе функции в точке a , в частности, функция может быть и не определена в точке a . Для непрерывности же функции требуется, чтобы она обязательно была определена в точке a , так как в самом определении (см. (2) и (3)) фигурирует значение функции в точке a .

Кроме того, для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - a| \leq \delta$, функция должна быть

определена. Множество этих точек есть окрестность точки a (в определении 8 — проколота окрестность). Поэтому о пределе функции f в точке a можно говорить только тогда, когда существует проколота окрестность точки a , содержащаяся в области определения функции f . Так, нельзя говорить о пределе функции \sqrt{x} при $x \rightarrow 0$, так как любая окрестность точки 0 содержит отрицательные числа, для которых эта функция не определена. Подробнее об этом говорится ниже.

Смысл приведенных определений постепенно раскроется при разборе решений примеров и доказательств теорем.

Пример 1. Функции $\sin t$ и $\cos t$ непрерывны в любой точке, т. е. $\lim_{t \rightarrow a} \sin t = \sin a$ и $\lim_{t \rightarrow a} \cos t = \cos a$ для любого числа a .

Докажем непрерывность синуса. В этом примере $f(t) = \sin t$. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Пользуясь определением синуса, имеем

$$|f(t) - f(a)| = |\sin t - \sin a| \stackrel{(1)}{\leq} |SQ| \stackrel{(2)}{\leq} \widetilde{SQ} \stackrel{(3)}{=} |t - a|. \quad (4)$$

(1) $|\sin t - \sin a|$ есть длина отрезка, отмеченного на оси ординат (рис. 17); этот отрезок есть проекция отрезка SQ на ось ординат и потому его длина меньше длины отрезка SQ ;

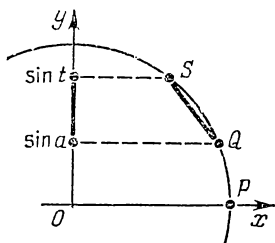


Рис. 17

(2) хорда SQ короче дуги SQ ;

(3) по определению синуса число $t = \overline{SP}$, $a = \overline{QP}$, и потому $\widetilde{SQ} = \overline{SP} - \overline{QP} = t - a = |t - a|$ при $t > a$ и $\widetilde{SQ} = \overline{QP} - \overline{SP} = a - t = |t - a|$ при $t < a$.

Из неравенства (4) видно, что для выполнения условий (3) достаточно взять $\delta = \varepsilon$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ указано число $\delta > 0$ (в нашем решении $\delta = \varepsilon$) такое, что выполнены условия (3). Этим доказана непрерывность функции синус в любой точке. Непрерывность функции косинус доказывается аналогично.

Пример 2. Докажем, что функция x непрерывна в любой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{для любого числа } a.$$

В этом примере $f(x) = x$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|f(x) - f(a)| = |x - a|$, то, положив $\delta = \varepsilon$, видим, что условия (3) выполнены. Непрерывность функции x в любой точке доказана.

Пример 3. Пусть C — постоянная функция (число). Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C \quad \text{для любого числа } a.$$

Коротко говорят: предел постоянной равен этой постоянной.

В этом примере $f(x) = C$. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Поскольку $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ при любом x , то число δ можно взять произвольно, на пример положить $\delta = 1$.

Пример 4. Докажем, что функция x^2 непрерывна в любой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 \quad \text{для любого числа } a.$$

В этом примере $f(x) = x^2$, $f(a) = a^2$. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \delta |x + a| \quad (5)$$

для любого числа x , удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$. Подбор числа δ проведем в два шага. Прежде всего, ограничимся при выборе только числами δ , удовлетворяющими неравенству $0 < \delta \leq 1$. Это позволит ограничить множитель $|x + a|$ в неравенстве (5):

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |x + a| = |(x - a) + 2a| \leq \\ &\leq |x - a| + 2|a| < \delta + 2|a| \leq 1 + 2|a|. \end{aligned}$$

В силу этого неравенство (5) при условии $|x - a| < \delta$ примет вид

$$|f(x) - f(a)| < \delta(1 + 2|a|).$$

Отсюда видно, что для выполнения условий (3) достаточно взять число δ удовлетворяющим неравен-

ству $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись условия (3). Этим непрерывность функции x^2 в любой точке доказана.

Заметим, что в приведенном решении число δ можно взять наименьшим из чисел 1 и $\varepsilon/(1+2|a|)$. Это коротко записывается так: $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$.

Пример 5. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в любой точке $a \neq 0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad \text{для любого числа } a \neq 0.$$

Берем любое число $\varepsilon > 0$. В этом примере $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(a) = \frac{1}{a}$ и

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|x| \cdot |a|} < \frac{\delta}{|x| \cdot |a|} \quad (6)$$

для любого числа $x \neq 0$ и удовлетворяющего условию $|x-a| < \delta$. Подбор числа δ тоже проведем в два шага. Прежде всего, ограничимся числами δ , удовлетворяющими неравенству $0 < \delta \leq \frac{1}{2}|a|$. Это позволяет в неравенстве (6) ограничить множитель $\frac{1}{|x|}$:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow |x| = |(x-a) + a| \geq \\ &\geq |a| - |x-a| > |a| - \delta \geq |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a| \end{aligned}$$

(см. Приложение, с. 232), таким образом,

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|} \quad \text{и } x \neq 0.$$

В силу этого неравенство (6) при условии $|x-a| < \delta$ принимает вид

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2\delta}{|a|^2}.$$

Отсюда видно, что для выполнения условий (3) достаточно взять число $\delta = \min\left(\frac{1}{2}|a|, \frac{\varepsilon}{2|a|^2}\right)$. Итак, выяснено, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подо-

брать число $\delta > 0$ такое, что выполнены условия (3). Этим утверждение примера 5 доказано.

Из решения этих примеров видно, что в каждом случае подбор числа δ по числу ε происходит по-своему — все зависит и от той функции, непрерывность которой доказывается, и от точки.

Докажем теперь основные теоремы о пределе (и непрерывности) функции в точке.

Теорема 1 (единственность предела). *Функция не может иметь в данной точке два разных предела.*

Из этой теоремы следует, что для заданной функции в заданной точке или нет предела, или есть единственное число, являющееся пределом этой функции в этой точке.

Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предполо-

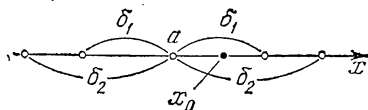


Рис. 18

жим, что функция f в точке a имеет два разных предела — числа b и c , $b \neq c$.

Для положительного числа $\varepsilon = \frac{1}{4}|b - c|$ подбираем (по определению предела) числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ \text{и} \\ 0 < |x - a| < \delta_2 &\Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Возьмем число x_0 так, что выполняются неравенства $0 < |x_0 - a| < \delta_1$ и $0 < |x_0 - a| < \delta_2$ (см. рис. 18). Тогда

$$|f(x_0) - b| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_0) - c| < \varepsilon \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |b - c| &= |b - c - f(x_0) + f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x_0) - b| + |f(x_0) - c| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|b - c|. \end{aligned}$$

Таким образом, $|b - c| < \frac{1}{2}|b - c|$, т. е. $1 < \frac{1}{2}$. Мы получили неверное неравенство. Это показывает, что сделанное предположение «функция f в точке a имеет два разных предела» неверно. Этим теорема доказана.

Теорема 2 (сохранение неравенств). Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > p (< q)$, то существует такая проколотая окрестность \dot{U} точки a , что $f(x) > p (< q)$ для любого числа $x \in \dot{U}$.

Положим $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Тогда число $\varepsilon = b - p > 0$, и по определению предела можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Но

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow f(x) - b > -\varepsilon = p - b \Rightarrow f(x) > p.$$

Таким образом,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > p.$$

Но множество всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, есть (рис. 19) проколотая окрестность \dot{U} точки a . Этим первая часть теоремы доказана. Вторая часть доказывается аналогично.

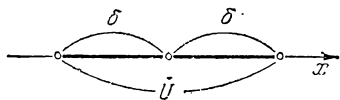


Рис. 19

Следствие 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, то существует

такая проколотая окрестность \dot{U} точки a , что $f(x) \neq 0$ для любого числа $x \in \dot{U}$.

Следствие 2. Пусть функция f непрерывна в точке a .

Если $f(a) > p (< q)$, то существует такая окрестность U точки a , что $f(x) > p (< q)$ для любого числа $x \in U$.

Если $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность U точки a , что $f(x) \neq 0$ при любом $x \in U$.

Теорема 3. Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то существует

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Коротко говорят: «предел суммы равен сумме пределов». Для доказательства положим $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ и возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, и по определению предела можно по-

добрать такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

и

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$. Тогда для любого x , удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнены условия (9), и потому

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) + g(x) - (b + c)| \leq \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается, что «предел разности равен разности пределов». Теорема справедлива и для n слагаемых.

Следствие. *Алгебраическая сумма непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой же точке.*

Действительно, если функции f и g непрерывны в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$,

и потому

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a).$$

Непрерывность функции $f + g$ в точке a доказана.

Теорема 4. *Если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и C — постоянная функция (число), то*

$$\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Коротко говорят: «постоянный множитель можно выносить за знак предела». Для доказательства возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда число $\frac{\varepsilon}{|C| + 1} > 0$ и можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|C| + 1},$$

где $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Но

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|C| + 1} \Rightarrow |Cf(x) - Cb| < \frac{|C|\varepsilon}{|C| + 1} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |Cf(x) - Cb| < \varepsilon,$$

т. е. доказано, что $\lim_{x \rightarrow 0} Cf(x) = Cb = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция непрерывна в точке a и C — постоянная (число), то функция Cf тоже непрерывна в точке a .

Пример 6. Функции $kx + b$ и $ax^2 + bx + c$ непрерывны в любой точке. Действительно, функция x непрерывна в любой точке (см. пример 2), поэтому функция kx тоже непрерывна в любой точке. Функция $y = b$ (постоянная) непрерывна в любой точке (см. пример 3). Следовательно, сумма этих функций $kx + b$ непрерывна в любой точке.

Функция x^2 непрерывна в любой точке (см. пример 4), поэтому функция ax^2 непрерывна в любой точке и сумма $ax^2 + bx + c$ ($= ax^2 + (bx + c)$) тоже непрерывна в любой точке.

Теорема 5 (перестановочность знаков предела и непрерывной функции). *Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и функция g непрерывна в точке b , то*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)),$$

или иначе

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b).$$

Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как функция g непрерывна в точке b , то можно подобрать такое число $\delta_1 > 0$, что

$$|t - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(t) - g(b)| < \varepsilon. \quad (10)$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то для положительного числа δ_1 можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta_1. \quad (11)$$

Таким образом,

$$0 < |x - a| < \delta \stackrel{(11)}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta_1 \stackrel{(10)}{\Rightarrow} |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 (непрерывность сложной функции). Если функция f непрерывна в точке a и функ-

ция g непрерывна в точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке a .

Так как функция f непрерывна в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$, и потому (в силу теоремы 5)

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b) = g(f(a)).$$

Коротко говорят: «сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна».

С л е д с т в и е 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = p$, то $\lim_{x \rightarrow a} h^2(x) = p^2$.

Если, кроме того, $p \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{p}$.

Для доказательства первого утверждения заметим, что функцию $y = h^2(x)$ можно представить как сложную функцию: $y = t^2$ и $t = h(x)$. Так как функция t^2 непрерывна в точке p (пример 4), то $\lim_{x \rightarrow a} h^2(x) = p^2$ (применяем теорему 5 с $g(t) = t^2$ и $b = p$).

Для доказательства второй части заметим, что функцию $y = \frac{1}{h(x)}$ можно представить как сложную функцию: $y = \frac{1}{t}$ и $t = h(x)$. Так как функция $\frac{1}{t}$ непрерывна в точке p (пример 5, $p \neq 0$ по условию), то (применяя теорему 5 с $g(t) = \frac{1}{t}$ и $b = p$)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{p}.$$

Т е о р е м а 6 (предел произведения и частного)
Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Если, кроме того, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Коротко говорят: «предел произведения равен произведению пределов», «предел частного равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если последний не нуль». Отметим еще, что теорема о пределе произведения по индукции распространяется на n множителей.

Для доказательства теоремы положим $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Так как $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, а (по следствию 2 из теоремы 5) $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = b^2$, $\lim_{x \rightarrow a} g^2(x) = c^2$ и $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))^2 = (b+c)^2$, то (по теоремам 3 и 4)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \frac{1}{2}((b+c)^2 - b^2 - c^2) =$$

$$= bc = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Для доказательства второго утверждения мы уже можем пользоваться доказанным правилом о пределе произведения и следствием 2 для функции g (поскольку $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Следствие 1. Произведение непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой же точке. Частное двух непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой же точке, если знаменатель в этой точке отличен от нуля.

Действительно, если функция f и g непрерывны в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, и потому $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = f(a) g(a)$. Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Следствие 2. Любая рациональная функция, функции тангенс и котангенс непрерывны в области своего определения.

Рациональная функция по определению образуется из непрерывных функций x (пример 2) и C — постоянной (пример 3) при помощи действий сложения, умножения и деления. По следствию 1 получившаяся функция непрерывна в каждой точке, в которой де-

литель не нуль, — это точки области определения функции.

Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны всюду (пример 1), то функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в каждой точке, где косинус не нуль, т. е. в своей области определения. Непрерывность функции $\operatorname{ctg} x$ доказывается аналогично.

Рассмотрим, как применяются эти теоремы при вычислении пределов.

Пример 7.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 5} \stackrel{(1)}{=} \frac{3^3 - 2 \cdot 3^2 - 1}{3^2 - 5} = \frac{8}{4} = 2.$$

- (1) Под знаком предела стоит рациональная функция. Она определена при $x = 3$ и потому непрерывна в точке 3.

Пример 8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-2} \stackrel{(3)}{=} \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- (1) Под знаком предела стоит рациональная функция. Она не определена при $x = -1$. Поэтому для вычисления предела сделано тождественное преобразование — разложение на множители.
- (2) При вычислении предела при $x \rightarrow -1$ значение $x = -1$ не рассматривается (см. объяснения на с. 19). Поэтому общий множитель числителя и знаменателя $(x+1) \neq 0$ и на него можно сокращать — это тождественное преобразование на множестве $x \neq -1$.
- (3) После сокращения под знаком предела получена непрерывная в точке -1 функция: вычисляем по формуле (2).

З а м е ч а н и е. Функции a^x , $\log_a x$, x^p (p — любое действительное число) и обратные тригонометрические непрерывны в любой точке области своего определения (за исключением граничных точек, если они есть). Доказательство этого факта сложно, и мы его опускаем.

Пример 9. Функция $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ имеет область определения $[0, +\infty)$, точка 0 — граница этой области.

Во всех точках $a > 0$ функция $\sqrt[4]{x}$ непрерывна, и поэтому $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a}$.

Пример 10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-27} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)(x^3-27)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(\sqrt{x+1}+2)(x^3-3^3)} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)(x^2+3x+9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)(x^2+3x+9)} \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3+1}+2)(3^2+3 \cdot 3+9)} = \frac{1}{108}. \end{aligned}$$

(1) Функция, стоящая под знаком предела, не определена в точке 3. Делаем тождественное преобразование: умножаем и делим эту дробь на $\sqrt{x+1}+2$ — выражение, сопряженное числителю.

(2) Пользуемся формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

(3) Пользуемся формулой $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

(4) Под знаком предела получилась непрерывная функция: $\sqrt{x+1}$ — непрерывная функция, так как составлена из непрерывных функций $y = \sqrt{t}$ и $t = x+1$ (следствие 1 из теоремы 5), $\sqrt{x+1}+2$ — непрерывная функция как сумма двух непрерывных функций, второй множитель в знаменателе — квадратный трехчлен — непрерывная функция; произведение непрерывных функций есть функция непрерывная и она не обращается в нуль при $x=3$ — вычисляем по формуле (2).

Теорема 7. Если существует $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$,

то существует

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Положим $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Поскольку $b > 0$, то существует проколота окрестность \dot{U} точки a

такая, что $f > 0$ на \dot{U} . Поэтому на \dot{U} определена функция $f^g = 10^{g \lg f}$ (по основному логарифмическому тождеству). Тогда, пользуясь непрерывностью функции 10^t , по теореме 5 получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} 10^{g(x) \lg f(x)} = \\ &= 10^{c \lg b} = b^c = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}. \end{aligned}$$

Пример 11. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} \right)^{2x} = \left(\lim_{x \rightarrow 3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 3} 2x} =$
 $= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)^6 = (\sqrt{3})^6 = 27.$

Теорема 8 (переход к пределу в неравенстве). Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ и в некоторой проколотой окрестности \dot{U} точки a выполнено неравенство $f \geq g$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Доказательство сначала проведем для частного случая $g = 0$, и потому $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$. Тогда (по теореме 2) существует

такая проколотая окрестность \dot{U}_1 точки a , что $f < 0$ в \dot{U}_1 . Возьмем число $x_0 \in \dot{U} \cap \dot{U}_1$ (рис. 20); $f(x_0) < 0$, так как $x_0 \in \dot{U}_1$, и $f(x_0) \geq 0$ так как $x_0 \in \dot{U}$,

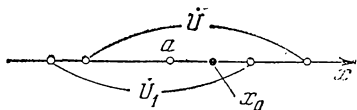


Рис. 20

т. е. получено противоречие. Оно показывает, что сделанное предположение неверно. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

Для доказательства общего случая заметим, что $f - g \geq 0$ на \dot{U} . Поэтому в силу доказанного частного случая $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) \geq 0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq 0$, а тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Теорема 9 (оценочный признак существования предела). Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

и в некоторой проколотой окрестности \dot{U} точки a выполнено неравенство $f(x) \leq p(x) \leq g(x)$ при всех $x \in \dot{U}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = b.$$

Берем любое число $\varepsilon > 0$ и подбираем числа δ_1 и δ_2 так, чтобы были выполнены условия

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

и

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon. \quad (12)$$

Расстояния точки a до концов \dot{U} обозначим h_1 и h_2 (рис. 21) и положим $\delta = \min(h_1, h_2, \delta_1, \delta_2)$. Тогда

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \in \dot{U} \Rightarrow f(x) \leq p(x) \leq g(x) \\ 12 \Rightarrow (-\varepsilon < f(x) - b \text{ и } g(x) - b < \varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - b \leq p(x) - b \leq g(x) - b < \varepsilon \Rightarrow |p(x) - b| < \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема доказана.

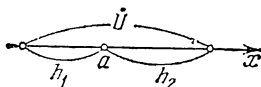


Рис. 21

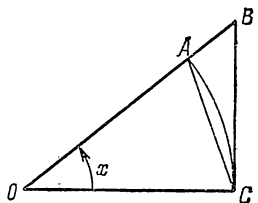


Рис. 22

В качестве примера применения теоремы 9 докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (13)$$

Эту формулу называют *первым замечательным пределом*.

Возьмем сначала $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (рис. 22), где дуга AC лежит на единичной окружности с центром в точке O , $BC \perp OC$. Тогда $S_{\triangle OAC} < S_{\text{сек. } OAC} < S_{\triangle OBC}$, откуда

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

и поскольку $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 — четные, то полученное неравенство выполнено не только для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, но и для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Но $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \dot{U}$ есть проколота окрестность точки 0. А так как $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то в силу теоремы 9 формула (13) доказана.

Пример 12.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2.$$

Теорема 10 (замена переменной). Пусть выполнены три условия:

1) существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,

2) существует $\lim_{t \rightarrow b} g(t)$,

3) существует такая проколота окрестность \dot{U} точки a , что $f(x) \neq b$ при любом $x \in \dot{U}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow b} g(t).$$

При этом говорят, что в пределе слева сделана замена переменной по формуле $t = f(x)$, или (читая эту формулу справа налево) — в пределе справа сделана подстановка по формуле $t = f(x)$. Заметим еще, что если условие 3) не выполнено, то заключение теоремы не может быть сделано. Это показывает пример таких функций: $f(x) = 1$ при любых x , тогда $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$; $g(1) = 3$ и $g(t) = 0$ при любом $t \neq 1$, тогда $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = 0$. Сложная функция $g(f(x)) = 3$ при любом x и потому $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 3 \neq 0 = \lim_{t \rightarrow 1} g(t)$.

Для доказательства теоремы положим $c = \lim_{t \rightarrow b} g(t)$ и возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Из условия 2)

следует: можно подобрать такое число $\delta_1 > 0$, что

$$0 < |t - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(t) - c| < \varepsilon. \quad (14)$$

Из условия 1) следует: для числа $\delta_1 > 0$ можно подобрать такое число $\delta_2 > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \delta_1. \quad (15)$$

Обозначим через h_1 и h_2 расстояния точки a до концов \bar{U} (см. рис. 21) и положим $\delta = \min(h_1, h_2, \delta_2)$. Тогда

$$0 < |x - a| < \delta \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \delta_1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} |g(f(x)) - c| < \varepsilon.$$

(1) Так как $\delta \leq \delta_2$, то для этих x выполнены условия (15). Кроме того, $\delta \leq h_1$ и $\delta \leq h_2$, и потому $x \in \bar{U}$, следовательно, $f(x) \neq b$ по условию 3) теоремы.

(2) В силу условия (14).

Доказательство теоремы закончено.

Пример 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} 7 \cdot \frac{\sin t}{t} = 7.$

(1) Делаем замену $t = 7x$, тогда $x = \frac{1}{7}t$ и $b = \lim_{x \rightarrow 0} 7x = 0$.

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Для доказательства достаточно сделать замену $t = \alpha(x)$.

Пример 14. Так как $\lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{1-x} - 2) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(\sqrt{1-x} - 2)}{\sqrt{1-x} - 2} = 1.$$

Определение 11. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$ (или в точке a), если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции принято обозначать греческими буквами α , β , γ и т. д.

Теорема 11 (связь бесконечно малых с пределом). Для того чтобы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - b$ была бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Замечание. Из условий теоремы 11 следует, что $f(x) = b + \alpha(x)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Докажем необходимость указанного условия теоремы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = b - b = 0. \end{aligned}$$

Докажем достаточность указанного условия. Так как $f(x) = b + \alpha(x)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} b + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = b + 0 = b. \end{aligned}$$

В дальнейшем часто будут встречаться разности $x_1 - x$ и $f(x_1) - f(x)$; они называются соответственно приращением аргумента и приращением функции $y = f(x)$ и обозначаются

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x, \\ \Delta f(x) &= f(x_1) - f(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Вместо $\Delta f(x)$ часто пишут короче: Δf , Δy и т. п. (рис. 23). Из этих обозначений получаются формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \Delta x, \\ \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f.$$

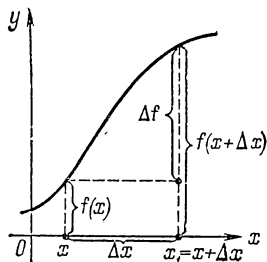


Рис. 23

Пользуясь этой терминологией, удобно говорить, что функция непрерывна в точке a , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Действительно, из равенства $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f$ и теоремы 11 следует: для того чтобы функция f была непрерывной

в точке a , т. е. чтобы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a + \Delta x) = f(a)$, необходимо и достаточно, чтобы приращение Δf было бесконечно малым при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение 12. Функцию f называют *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$ (или в точке a) и пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если функция $1/f$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$.

Особо подчеркнем, что бесконечно большая функция предела (в определении 8) не имеет — символ ∞ не есть число.

Пример 15. Функция $f(x) = \frac{1}{x+2}$ бесконечно большая при $x \rightarrow -2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} = \infty.$$

В ряде задач приходится исследовать функцию при «очень больших» x . Для этого вводится понятие предела функции при x , стремящемся к бесконечности ($x \rightarrow \infty$).

Определение 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Пример 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$.

Очевидно, что вместо второй степени в примере 16 можно поставить любое положительное число p , лишь бы x^p было определено всюду.

Поскольку для предела, стоящего в правой части определения 13, теоремы о пределе суммы, произведения и т. п. уже доказаны, то все эти теоремы сохраняются и для предела функции при $x \rightarrow \infty$.

Пример 17.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x-2x^2}{4-2x+5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} - 2}{\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} + 5} \stackrel{(1)}{=} -\frac{2}{5}.$$

(1) Поскольку $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ — бесконечно малые при $x \rightarrow \infty$, то предел числителя равен -2 , предел знаменателя равен 5 и пользуемся теоремой о пределе дроби,

Пример 18.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} - x^2) &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 1 - x^4}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} + x^2} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(1) Умножаем и делим на сопряженное выражение.

(2) Делим числитель и знаменатель на x^2 ; при делении корня x^2 подводим под знак корня — под знаком корня тогда деление на x^4 .

В задачах биологии и экономики часто возникают значения функции $(1+x)^{1/x}$ при «очень малых» x , т. е. ставится вопрос о поведении этой функции при $x \rightarrow 0$.

Доказано (см. Приложение, с. 232), что существует предел функции $(1+x)^{1/x}$ при $x \rightarrow 0$. Этот предел (число) обозначают буквой e и называют «число e » в честь открывшего его петербургского математика Леонарда Эйлера. Установлено, что число это иррационально и что $e = 2,71828\dots$ Формулу

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \quad (18)$$

называют *вторым замечательным пределом*.

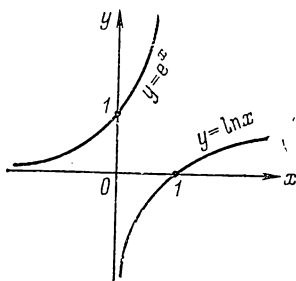


Рис. 24

Пример 19. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1-2x)^{-\frac{1}{-2x}} \right)^{-2} = e^{-2}.$

Пример 20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + t \right)^{\frac{1}{t}} = e.$

Часто приходится иметь дело с логарифмами при основании e ; они называются натуральными логарифмами и обозначаются \ln :

$$\ln x = \log_e x. \quad (19)$$

Для них основное логарифмическое тождество принимает вид:

$$e^{\ln x} = x. \quad (20)$$

Приведем еще графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ (рис. 24).

Пример 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$
 $= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

Пример 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln a}{\ln(1+t)} \stackrel{(2)}{=} \ln a.$

(1) Делаем замену $t = a^x - 1$, $b = \lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = 0$,

$x \ln a = \ln(1+t)$ и $x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}.$

(2) Пользуемся примером 21.

Вычисление пределов облегчается, если ввести понятие эквивалентных при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) функций.

Определение 14. Функции f и g называют эквивалентными при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) и пишут $f \sim g$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right).$$

Пример 23. $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ — см. формулу (13).

Пример 24. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$ — см. пример 21.

Пример 25. $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \rightarrow 0$ — см. пример 22.

Теорема 12. Если α — бесконечно малая функция при $x \rightarrow q$ и $\alpha \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки q (при $x \rightarrow \infty$ и $\alpha \neq 0$ вне некоторого отрезка), то при $x \rightarrow q$ ($x \rightarrow \infty$): 1) $\sin \alpha \sim \alpha$, 2) $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$, 3) $\arcsin \alpha \sim \alpha$, 4) $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$, 5) $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, 6) $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$, 7) $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha$, p — любое число, 8) $1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2$.

Формула 1) доказана в следствии из теоремы 10. Тогда в силу формулы 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow q} \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow q} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{1}{\cos \alpha(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow q} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \rightarrow q} \frac{1}{\cos \alpha(x)} = 1. \end{aligned}$$

Формула 2) доказана.

Для доказательства формул 5) и 6) делаем замену $t = \alpha(x)$:

$$5) \lim_{x \rightarrow q} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1 \text{ (см. пример 21),}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow q} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x) \ln a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t \ln a} = 1 \text{ (см. пример 22).}$$

Доказательство формулы 8) опирается на формулу 1):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow q} \frac{1 - \cos \alpha(x)}{\frac{1}{2} \alpha^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow q} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{1}{2} \alpha^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow q} \left(\frac{\sin \frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{\alpha(x)}{2}} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow q} \frac{\sin \frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{\alpha(x)}{2}} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

При доказательстве формулы 7) опираемся на формулы 5) и 6):

$$\lim_{x \rightarrow q} \frac{(1 + \alpha(x))^p - 1}{p \alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow q} \frac{e^{p \ln(1 + \alpha(x))} - 1}{p \ln(1 + \alpha(x))} \cdot \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = 1,$$

поскольку $p \ln(1 + \alpha(x))$ — бесконечно малая при $x \rightarrow q$ и $\ln e = 1$. При доказательстве формулы 3) делаем замену $t = \arcsin \alpha(x)$, тогда $\alpha(x) = \sin t$ и $b = \lim_{x \rightarrow q} \arcsin \alpha(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow q} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

При доказательстве формулы 4) делаем замену $t = \operatorname{arctg} \alpha(x)$, тогда $\alpha(x) = \operatorname{tg} t$ и $b = \lim_{x \rightarrow q} \operatorname{arctg} \alpha(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow q} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1 \text{ (по формуле 2)).}$$

Применение эквивалентных функций к вычислению пределов основано на следующей теореме:

Теорема 13 (замена на эквивалентную в пределе). Если $f \sim g$ при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) p(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) p(x)$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{p(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{p(x)}{f(x)},$$

если существует предел в одной из частей равенства.

Из определения эквивалентных функций следует, что в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено неравенство $g \neq 0$ (так как дробь должна быть определена) и $f \neq 0$ (теорема 2, следствие 2). Пусть существуют пределы, стоящие справа. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) p(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) p(x) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} g(x) p(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) p(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)}{f(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{f(x)}.\end{aligned}$$

Доказательство для случая $x \rightarrow \infty$ повторяется дословно.

Пример 26.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Пример 27.
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt[5]{1 + \sin x} - 1}{2^{\sin x} - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{5} \sin x}{\sin x \ln 2} = \frac{1}{5 \ln 2}.$$

Пример 28.
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[7]{x^7 + 3x^5 + 2} - x \right) &= \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[7]{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^7}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{7} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^7} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7x^5} \right) &= \frac{3}{7}.\end{aligned}$$

Выше уже отмечалось, что говорить о непрерывности функции \sqrt{x} в точке 0 нельзя. Однако график этой функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги (рис. 25), начиная с точки 0 (и двигаясь вправо). Это побудило ввести понятие предела и непрерывности функции в точке справа и слева (из аналогичных наблюдений, например — для графика функции $\sqrt{-x}$).

Определение 15. Число b называют *пределом функции f в точке a справа* и пишут $b = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$,

если для любого положительного числа ε можно подобрать число $\delta > 0$ такое, что

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение 16. Число b называют *пределом функции f в точке a слева* и пишут $b = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

На рис. 26 приведен график функции f , для которой $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$.

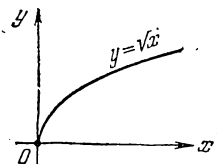


Рис. 25

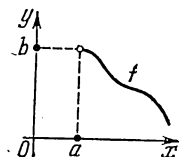


Рис. 26

Определение 17. Функция f называется *непрерывной в точке a справа (слева)*, если

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) \right).$$

Пример 29. Покажем, что функция \sqrt{x} непрерывна в точке 0 справа, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда

$$0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon,$$

откуда видно, что можно взять $\delta = \varepsilon^2$. Утверждение доказано.

Доказано (см. КМА), что все установленные выше теоремы о пределах сохраняются и для односторонних пределов и непрерывности.

Теорема 14 (связь односторонних пределов с пределом). Для того чтобы выполнялось равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, необходимо и достаточно выполнение одновременно двух равенств:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b \text{ и } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b.$$

Докажем необходимость. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Но тогда для любого x получаем следующее:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$, и

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

Докажем достаточность. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$, то можно подобрать такое число $\delta_1 > 0$, что

$$0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (21)$$

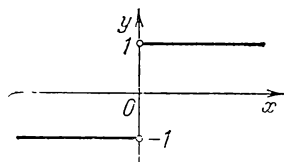


Рис. 27

И так как $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$, то можно подобрать такое число $\delta_2 > 0$, что

$$0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (22)$$

Положим $\delta = \lim (\delta_1, \delta_2)$. Тогда для любого x имеем

$$0 < |x - a| < \delta \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

(1) Выполнены условия (21) при $x > a$ и условия (22) при $x < a$.

Пример 30. Докажем, что не имеет предела при $x \rightarrow 0$ функция (рис. 27)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Действительно, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$, и потому не существует $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Наглядно это утверждение ясно (см. Приложение, с. 241)— для того чтобы превратить линию на рис. 27 в непрерывную (любым способом, даже не обращая внимания на то, что при этом не получится график функции), требуется добавить целый кусок линии — одной точки недостаточно.

Теорема 15 (локальность предела). *Если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и в некоторой проколотой окрестности точки a функция $g = f$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

Положим $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Подберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (23)$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, h_1, h_2)$, где h_1 и h_2 — расстояния от точки a до концов ее окрестности \dot{U} , на которой $g = f$. Тогда для любого x имеем

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \dot{U} \Rightarrow g(x) = f(x) \\ (23) \end{cases} \Rightarrow |g(x) - b| = |f(x) - b| < \varepsilon,$$

т. е. $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$, и потому $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке a и функция $g = f$ в некоторой окрестности точки a , то g тоже непрерывна в точке a .*

Пример 31. Докажем непрерывность функции $|x|$ (рис. 28) в любой точке. Если точка $a > 0$, то в ее окрестности $(0, \infty)$ $|x| = x$. Но функция x непрерывна в точке a (пример 2), и потому функция $|x|$ тоже непрерывна в точке a . Если точка $a < 0$, то в ее окрестности $(-\infty, 0)$ $|x| = -x$. Но функция $-x$ непрерывна в точке a , и потому функция $|x|$ тоже непрерывна в точке a . В точке 0 имеем

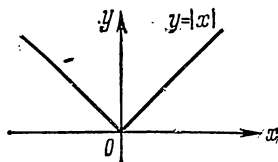


Рис. 28

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+} x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Следовательно (теорема 14), существует $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$, чем доказана непрерывность функции $|x|$ в точке 0.

Функция 2^x при $x \rightarrow \infty$ и положительных — бесконечно большая, а при $x \rightarrow \infty$ и отрицательных — бесконечно малая. И в общем случае приходится различать эти два вида стремления x к бесконечности.

Определение 18.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0-} f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Проверено (см. КМА), что для этих пределов сохраняются все теоремы о пределах, которые мы рассматривали.

$$\begin{aligned} \text{Пример 32. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 2 + \sqrt{x^2 + 1}}{5 - 2x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 2 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{5 - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 2 - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{5 - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 + \frac{2}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\frac{5}{x} - 2} = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 33. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Пример 34. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \text{ (см. Приложение).}$$

Отметим еще следующие формулы: при $p > 0$ и $a > 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a^x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow 0+} x^p \ln x &= 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Наглядно эти формулы означают, что при очень больших положительных x дроби $\frac{x^p}{a^x}$, $\frac{\ln x}{x^p}$ и $\frac{\ln x}{a^x}$ очень малы, т. е. их знаменатели много больше их числителей. Коротко об этом говорят так: на бесконечности быстрее всего растет экспонента (т. е. функция a^x), медленнее всего растет логарифм, а степенная функция занимает промежуточное положение.

Первая формула будет доказана на стр. 65. Остальные следуют из нее:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{a^t} = 0.$$

(1) Делаем замену $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $x^p = e^{pt} = (e^p)^t$ и $a = e^p > 1$, так как $p > 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, т. е. $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^p \ln x \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^p} = 0.$$

(1) Делаем замену $t = \frac{1}{x}$, тогда $x^p = \frac{1}{t^p}$, $\ln x = -\ln t$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Определение 19. Функция f , определенная на множестве натуральных чисел, называется *последовательностью*. Ее значения называются *членами последовательности* и обозначаются буквой с индексом: $a_n = f(n)$ (или b_n, z_n и т. п.). При этом говорят: «задана последовательность (a_n) (или просто a_n)».

Определение 20. Число a называют *пределом последовательности* a_n и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (или $\lim a_n = a$, или $a_n \rightarrow a$), если для любого числа $\varepsilon >$

≥ 0 можно подобрать такой номер N , что

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Доказано (см. КМА), что все теоремы о пределах сохраняются и для пределов последовательности.

Пример 35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} = 0, \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Пример 36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n - n^3}{7 + n^2 + 2n^3} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{n^3} + \frac{1}{n^2} - 1}{\frac{7}{n^3} + \frac{1}{n} + 2} = -\frac{1}{2}.$

Пример 37. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(5^{\frac{1}{n}} - 1) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} \ln 5 = \ln 5.$

Подытожим материал этого параграфа. Его можно тематически сгруппировать следующим образом:

1) правила, связывающие переход к пределу и арифметические действия: теоремы 3, 4, 6, 7;

2) правила, связывающие переход к пределу и неравенства: теоремы 2, 8 и 9;

3) свойства непрерывных функций: следствия из теорем 2, 3, 4, 5, 6.

Понятие эквивалентности функций введено для упрощения вычисления пределов и будет еще использовано в гл. VI.

Обобщения понятия предела функции в точке (определение 8), возникшие из практических потребностей — односторонние пределы (определения 15 и 16) и непрерывность (определение 17), предел функции на бесконечности (определения 13 и 18) и предел последовательности (определение 20).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Различные задачи естествознания — такие, как определение скорости, ускорения, силы тока, плотности вещества и многие другие — приводят к одним и тем же математическим вычислениям. В результате оформилось важнейшее для математического анализа понятие производной. В этой главе изучается понятие производной и на примере ряда задач показывается, как оно возникает и как при помощи производной и родственных понятий решаются задачи.

§ 1. Производная

Определение 1. *Производной* функции f в точке x называют число

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Если для любого числа x из множества D существует $f'(x)$, то этим на D определена функция — ее называют *производной* функции f и обозначают f' . Саму же функцию f называют первообразной для функции f' (об этом подробнее см. гл. IV). Число $f'(x)$ есть значение функции f' в точке x . Нахождение производной функции f называется дифференцированием функции f .

Для предела (1) очень удобна более короткая запись и более короткое обозначение для производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2)$$

Пример 1. Вычислим производную функции $y = x^2$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Коротко полученный результат записывают так:
 $(x^2)' = 2x$.

Пример 2. Вычислим производную функции
 $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \stackrel{(2)}{=} \cos x. \end{aligned}$$

(1) По теоремам 12 и 13 гл. I;

(2) в силу непрерывности функции косинус.

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 3. Докажем, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ при любом $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Пример 4. Докажем, что $C' = 0$ (C — постоянная).

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Пример 5. Докажем, что $x' = 1$.

$$x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Пример 6. Докажем, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ при любом $x > 0$.

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(1) По теоремам 12 и 13 гл. 1,

Пример 7. Докажем, что $(a^x)' = a^x \ln a$ и $(e^x)' = e^x$ (так как $\ln e = 1$).

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.\end{aligned}$$

(1) По теоремам 12 и 13 гл. I.

Пример 8 (физический смысл производной). Скорость есть производная от пути по времени, а производная от скорости по времени есть ускорение.

Пусть точка M движется по прямой. Координата x этой точки зависит от времени t , т. е. x есть функция от времени t : $x = x(t)$. Чтобы вычислить скорость v точки, надо

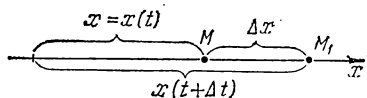


Рис. 29

взять два ее положения M и M_1 (рис. 29) в моменты времени t и $t + \Delta t$. Тогда $v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$, причем это равенство тем точнее, чем короче промежуток времени Δt . В пределе же, при $\Delta t \rightarrow 0$, получим точное равенство

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t,$$

где правая часть написана в силу определения производной. Индекс t у производной x'_t коротко указывает на то, что x есть функция от времени t .

Чтобы подсчитать ускорение a , надо подсчитать изменение скорости v за единицу времени. Сама скорость есть функция времени: $v = v(t)$. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ скорость изменится на величину $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$, и потому $a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Так же, как и при вычислении скорости, это равенство переходит в точное, если перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'_t.$$

Пример 9 (геометрический смысл производной). Угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной этой функции, вычисленной в

точке касания. Прежде всего надо дать определение касательной к произвольной линии. Возьмем на линии точки M и M_1 (рис. 30) и проведем прямую MM_1 — ее называют секущей. Если точку M_1 двигать по линии к точке M , то секущая поворачивается вокруг точки M . При этом может оказаться, что существует такая прямая MT , что $\angle M_1MT$ стремится к нулю, когда точка M_1 неограниченно приближается к точке M . Тогда прямую MT называют касательной к линии в точке M и говорят, что прямая MT есть предельное положение секущей MM_1 . Итак, *касательная к линии* есть предельное положение MT секущей MM_1 , когда точка M_1 стремится по линии к точке M (рис. 30). Точка M называется *точкой касания*.

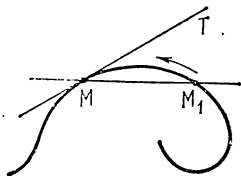


Рис. 30

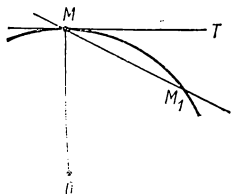


Рис. 31

Из школьного курса известно определение касательной к окружности. Теперь мы дали определение касательной к любой линии, в частности, и для окружности. Таким образом, для окружности получилось два определения — школьное и новое. Покажем, что они совпадают. Возьмем на окружности радиуса R с центром в точке O (рис. 31) точку M и проведем $MT \perp OM$ (это касательная к окружности в школьном определении). Проведем секущую MM_1 . Так как $\widehat{TMM_1} = \frac{1}{2R} \widehat{MM_1}$, то при $M_1 \rightarrow M$ (по окружности) $\widehat{MM_1} \rightarrow 0$ и потому $\widehat{TMM_1} \rightarrow 0$, а это и означает, что MT есть предельное положение MM_1 .

Докажем теперь, что угловым коэффициентом касательной к графику функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ равен $f'(x_0)$.

Прежде чем вести доказательство, надо придать точный смысл выражению «касательная есть предельное положение секущей». Мы это сделаем для линии, являющейся графиком функции f . Возьмем на этом графике точку $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (рис. 32).

Угловой коэффициент секущей M_0M_1 есть функция от Δx , т. е. $k = k(\Delta x)$. Если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = k_0$, то говорят, что прямая M_0T с угловым коэффициентом k_0 есть предельное положение секущей MM_0 . Но в разбираемом случае

$$k(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Поэтому существование касательной равносильно существованию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

И это число $f'(x_0)$ есть, по определению касательной к графику функции f , угловой коэффициент этой касательной.

Уравнение касательной к графику функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

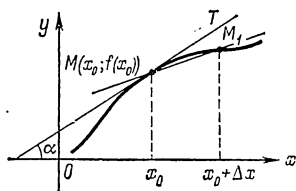


Рис. 32

Действительно, координаты точки M_0 удовлетворяют этому уравнению, так что точка M_0 лежит на прямой (3) и ее угловой коэффициент равен $f'(x_0)$.

Напишем для примера уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$: $f(x_0) = 3^2 = 9$, $(x^2)' = 2x$ (пример 1) и потому $f'(x_0) = 2x_0 = 6$. Следовательно, уравнение касательной будет $y = 9 + 6(x - 3)$, или $y = 6x - 9$.

Отметим еще следующие обстоятельства.

а) Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то

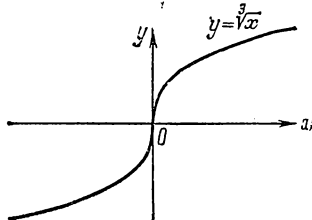


Рис. 33

говорят, что $y' = \infty$. В этом случае касательная расположена вертикально. Например, для функции $y = \sqrt[3]{x}$ имеем $y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\Delta x} / \Delta x = \infty$, и график имеет вертикальную касательную, совпадающую с осью Oy (рис. 33).

Наглядно это можно себе представить так: $y' = \infty$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, но тогда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

б) Покажем, что функция $f(x) = |x|$ при $x = 0$ не имеет производной.

Действительно,

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta x > 0, \\ -1 & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Поэтому (см. пример 30 гл. I) не существует предела

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x},$$

т. е. функция $|x|$ в нуле не имеет производной.

Геометрически это означает, что график функции $y = |x|$ не имеет касательной в точке $O(0, 0)$.

Особо подчеркнем, что $|x|$ — пример функции, которая непрерывна в нуле, а производной в нуле не имеет. График $|x|$ имеет в нуле «угловую точку». И в общем случае (см. КМА) наличие «угловой точки» у графика f говорит об отсутствии производной f' в соответствующей точке.

Пример 10. Производная — это скорость изменения функции. Из определения производной (2) следует приближенное равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y',$$

точность которого тем больше, чем меньше $|\Delta x|$. Таким образом, y' есть приближенно коэффициент пропорциональности между Δy и Δx . Если $y' = 2$, то Δy в 2 раза больше Δx ; если $y' = 0,1$, то Δy в 10 раз меньше Δx ; если $y' = -3$, то Δy имеет знак, противоположный знаку Δx , и по модулю в 3 раза больше Δx (т. е. с увеличением Δx уменьшается Δy). Это и имеется в виду, когда говорят, что производная — это скорость изменения функции.

Мы рассмотрели ряд задач из геометрии и физики, при решении которых появляется производная. Число подобных задач будет увеличиваться по мере изучения математики, физики и техники: всюду, где надо будет охарактеризовать скорость изменения функции, будет появляться производная.

Перейдем теперь к доказательству теорем о производных.

Теорема 1. Если функция имеет производную в точке, то эта функция непрерывна в этой точке.

Для доказательства достаточно проверить, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ (см. с. 35):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Утверждение, обратное к этой теореме, неверно: функция $|x|$ непрерывна в нуле, но не имеет производной в нуле (см. с. 52).

Теорема 2 (правила вычисления производных). Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то:

1) функция $h = Cf$ (C — постоянная) имеет производную $h'(x) = Cf'(x)$,

2) функция $F = f + g$ имеет производную $F'(x) = f'(x) + g'(x)$,

3) функция $G = f - g$ имеет производную $G'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Коротко говорят: 1) постоянный множитель выносится за знак производной, 2) производная суммы равна сумме производных, 3) производная разности равна разности производных.

Доказательство теоремы 2 (правил вычисления производных) опирается на определение 1 и правила вычисления пределов:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Cf(x + \Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = \\ &= C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Cf'(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Производная функция G вычисляется аналогично.

Заметим, что правило 2) распространяется на алгебраическую сумму n слагаемых.

Пример 11. Пользуясь теоремой 2 и примерами 1, 2 и 6, имеем

$$\begin{aligned}(5x^2 + 3 \sin x - 7 \ln x)' &= 5(x^2)' + 3(\sin x)' - 7(\ln x)' = \\ &= 5 \cdot 2x + 3 \cos x - 7 \cdot \frac{1}{x} = 10x + 3 \cos x - \frac{7}{x}.\end{aligned}$$

Теорема 3 (производная сложной функции). Пусть функция g имеет производную в точке p , а функция f имеет производную в точке $q = g(p)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет в точке p производную

$$F'(p) = f'(q) g'(p). \quad (4)$$

По условию теоремы существует

$$f'(q) = \lim_{t \rightarrow q} \frac{f(t) - f(q)}{t - q}.$$

Тогда в точке q непрерывна вспомогательная функция

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(q)}{t - q} & \text{при } t \neq q, \\ f'(q) & \text{при } t = q. \end{cases}$$

Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow q} h(t) = \lim_{t \rightarrow q} \frac{f(t) - f(q)}{t - q} = f'(q) = h(q).$$

Из определения $h(t)$ при $t \neq q$ получаем

$$f(t) - f(q) = (t - q) h(t). \quad (5)$$

Но это равенство сохраняется и при $t = q$, так как его левая и правая части обращаются в нуль, т. е. равенство (5) верно при любом t .

Вычислим теперь $F'(p)$:

$$\begin{aligned}F'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x - p} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \cdot h(g(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \lim_{x \rightarrow p} h(g(x)) \stackrel{(2)}{=} g'(p) h(g(p)) \stackrel{(3)}{=} \\ &= g'(p) f'(q).\end{aligned}$$

(1) Пользуемся формулой (5) при $t = g(x)$, так как $g(p) = q$ по условию;

(2) функция $h(g(x))$ непрерывна в точке p , так как функция g непрерывна в точке p (поскольку существует $g'(p)$ — теорема 1), а функция h непрерывна в точке $q = g(p)$ (гл. I, теорема 5, следствие 1);

(3) $h(g(p)) = h(q) = f'(q)$ по определению q и функции h .

Если сложная функция составлена из функций, которые имеют производные в любой точке, то формулу (4) пишут короче:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u. \quad (6)$$

В этой записи символически (на это указывают буквы — индексы внизу) записано следующее: 1) переменная y есть функция от переменной u , т. е. $y = y(u)$, 2) переменная u есть функция от переменной x , т. е. $u = u(x)$, 3) тогда переменная y есть сложная функция от переменной x , 4) если составляющие функции имеют производные y'_u (y как функция от u — это указано индексом) и u'_x (u как функция от x — это указано индексом), то сложная функция имеет производную y'_x (здесь y рассматривается уже как функция от x и это указано индексом), которая вычисляется по формуле (6).

Пример 12. Докажем, что $(\cos x)' = -\sin x$. Поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то функцию $y = \cos x$ можно рассматривать как сложную функцию, составленную из функций $y = \sin u$ и $u = x + \frac{\pi}{2}$, которые имеют производные в любой точке: $y'_u = \cos u$ (пример 2) и $u'_x = (x)' + \left(\frac{\pi}{2}\right)' = 1$ (пример 4 и 5). Тогда по формуле (6) $(\cos x)' = y'_x = u'_x \cdot y'_u = 1 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. Обычно все это пишут короче:

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

Пример 13. $(x^p)' = px^{p-1}$ (p — любое действительное число). Действительно,

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x} (p \ln x)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

Это доказательство проведено при $x > 0$. Если x^p определено и при $x < 0$, то формула сохраняется в силу четности (или нечетности) этой функции. Сохраняется формула и при $x = 0$.

Пример 14. Если функция g имеет производную в точке p , то ее квадрат имеет производную в точке p и эта производная равна $2g(p)g'(p)$. Если, кроме того, $g(p) \neq 0$, то и функция $\frac{1}{g}$ имеет производную в точке p и эта производная равна $-g'(p)/g^2(p)$.

Для доказательства рассмотрим функцию $F = g^2$ как сложную функцию: $F(x) = f(g(x))$, где $f(u) = u^2$. Так как $f'(u) = 2u$ (пример 1), то $F'(p) = 2g(p) \cdot g'(p)$ (теорема 3). Функцию $G = \frac{1}{g}$ тоже рассмотрим как сложную функцию: $G(x) = f(g(x))$, где $f(u) = \frac{1}{u}$. Так как $f'(u) = \frac{-1}{u^2}$ (пример 3), то $F'(p) = g'(p) \cdot \frac{-1}{g^2(p)}$ (теорема 3).

Докажем теперь правила для вычисления производной произведения и частного.

Теорема 4. Если функции f и g имеют производные в точке x , то функция $F = fg$ имеет в точке x производную

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Если, кроме того, $g(x) \neq 0$, то функция $G = \frac{f}{g}$ в точке x имеет производную

$$G'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Для доказательства заметим, что $F = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, и тогда, пользуясь примером 14 и теоремой 2, получаем:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}(2(f(x) + g(x))(f'(x) + g'(x)) - 2f'(x)f(x) - \\ &\quad - 2g'(x)g(x)) = f(x)f'(x) + f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + \\ &\quad + g(x)g'(x) - f'(x)f(x) - g'(x)g(x) = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Формула для производной произведения получена. А так как $G = f \cdot \frac{1}{g}$, то

$$G'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Пример 15. Докажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Действительно,

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Пример 16. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$; вывод аналогичен с примером 15.

Теорема 5 (производная обратной функции). Если f и g — взаимно обратные функции, $f'(q) \neq 0$ и $p = f(q)$, то

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

Графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$. Так как $f'(q) \neq 0$, то график функции f в точке $(q, f(q))$ имеет касательную — это прямая $l \nparallel Oх$. После симметрии относительно прямой $y = x$ график функции f переходит в график функции g , точка $(q, f(q))$ переходит в точку $(f(q), q) = (p, g(p))$ (по обозначению в теореме), а прямая l переходит в прямую, которая, очевидно, касается графика функции g в точке $(p, g(p))$ (рис. 34). Таким образом, график функции g в точке $(p, g(p))$ имеет касательную и потому существует $g'(p)$.

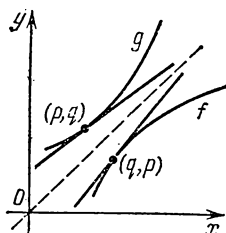


Рис. 34

Поскольку $f(g(x)) = x$, то производные в точке p левой и правой части равны, т. е. $1 = g'(p)f'(g(p))$, откуда следует формула.

Пример 17. Докажем, что $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$. Функции $g(x) = \operatorname{arctg} x$ и $f(x) = \operatorname{tg} x$ взаимно обрат-

ны и $f'(x) = 1/\cos^2 x$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} x)' = g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1/\cos^2 g(x)} = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 g(x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{tg} g(x) = f(g(x)) = x$.

Пример 18. Докажем, что $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$. Функции $g(x) = \arcsin x$ и $f(x) = \sin x$ взаимно обратны (с необходимой оговоркой) и $f'(x) = \cos x$. Поэтому $(\arcsin x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos g(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так как $\cos g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 g(x)} = \sqrt{1 - x^2}$, поскольку $\sin g(x) = f(g(x)) = x$, а знак перед корнем берем «+», так как $-\pi/2 \leq \arcsin x = g(x) \leq \pi/2$, и потому $\cos g(x) \geq 0$.

Пример 19. Аналогично получают производные

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Все производные основных элементарных функций, выведенные выше, составляют таблицу основных производных:

I. $(C)' = 0$,	VIII. $(\cos x)' = -\sin x$,
II. $(x^p)' = px^{p-1}$,	IX. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
III. $(x)' = 1$,	X. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
IV. $(a^x)' = a^x \ln a$,	XI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
V. $(e^x)' = e^x$,	XII. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
VI. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	XIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
VII. $(\sin x)' = \cos x$,	XIV. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Пользуясь этой таблицей и правилами вычисления производных (теоремы 2—4), вычисляют производные более сложных функций. Для этого удобнее всю

таблицу производных переписать, пользуясь формулой (6):

$$\text{II. } (u^p)' = pu^{p-1}u', \dots,$$

$$\text{VI. } (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \dots,$$

$$\text{VIII. } (\cos u)' = -\sin u \cdot u', \dots$$

Пример 20. Вычислим производную функции $y = \sqrt[3]{(\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x))^2}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3} (\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x))^{-\frac{1}{3}} \cdot (\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x))' = \\ &= \frac{2}{3} (\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x))^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 \cos 5x} \cdot (\ln \cos 5x)' = \\ &= \frac{2}{3 \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x)}} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 \cos 5x} \cdot \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x} = \\ &= \frac{2(-\sin 5x)(5x)'}{3 \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x)} \cdot (1 + \ln^2 \cos 5x) \cdot \cos 5x} = \\ &= \frac{-2 \sin 5x \cdot 5}{3 \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x)} (1 + \ln^2 \cos 5x) \cos 5x} = \\ &= \frac{-10 \sin 5x}{3 \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln \cos 5x)} (1 + \ln^2 \cos 5x) \cos 5x}. \end{aligned}$$

Может оказаться, что функция f' (ее называют первой производной) тоже имеет производную — эта производная называется второй производной функции f и обозначается f'' :

$$f'' = (f')'.$$

Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, а $y'' = (5x^4)' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3$. Если x есть координата движущейся точки, то x есть функция от времени t , т. е. $x = x(t)$ (пример 8). Тогда скорость $v = x'$, а ускорение $a = v' = (x')'$, т. е. $a = x''$ — ускорение есть вторая производная от координаты по времени.

Вторая производная f'' тоже есть функция от x . Если эта функция имеет производную, то она называется третьей производной функции f и обозначается f''' :

$$f''' = (f'')'.$$

Например, если $y = x^5$, то $y'' = 20x^3$, а $y''' = (20x^3)' = 20 \cdot (x^3)' = 20 \cdot 3 \cdot x^2 = 60x^2$.

Этот процесс может быть описан следующим образом: первая производная f' функции f определяется равенством (1); если уже определена n -я производная $f^{(n)}$, то $(n+1)$ -я производная $f^{(n+1)}$ определяется равенством

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Например, для функции $y = x^5$ последовательно получаем:

$$y^{IV} = (y''')' = (60x^2)' = 60(x^2)' = 60 \cdot 2x = 120x,$$

$$y^{IV} = (y^{IV})' = (120x)' = 120(x)' = 120 \cdot 1 = 120,$$

$$y^{VI} = (y^V)' = (120)' = 0.$$

Ясно, что здесь $y^{(n)} = 0$ при любом $n > 5$.

Для функции $y = e^x$ имеем: $y' = e^x$, $y'' = e^x$ и, очевидно,

$$y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \quad \text{при любом } n.$$

Для функции $y = \cos x$

$$y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \quad y^{IV} = \cos x$$

и далее все опять повторяется. Заметив это, легко вычислить $y^{(n)}$ при любом n . Например, так как $235 = 4 \cdot 58 + 3$, а $y^{(4 \cdot 58)} = \cos x$, то $y^{(235)} = y''' = \sin x$.

Все производные, начиная со второй, называются старшими производными, или производными высших порядков.

§ 2. Исследование функций

В этом параграфе будет показано, как при помощи производных решается следующая задача: для заданной функции найти основные особенности

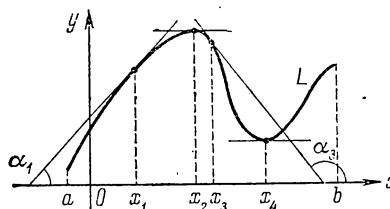


Рис. 35

ее поведения, т. е. будут даны правила для отыскания точек экстремума и промежутков монотонности.

Прежде чем переходить к точным доказательствам, поясним на простейшем примере эти правила. На рис. 35 нарисован график L функции f , всюду имеющей производную. В точке x_1 касательная к L имеет положительный угловой коэффициент и потому $f'(x_1) > 0$

(пример 9). И так будет в любой точке интервала (a, x_2) , где функция f возрастает. Сразу напрашивается правило: если на некотором интервале $f' > 0$, то на этом интервале функция f возрастает. Это правило, подмеченное на простом примере, потом будет доказано строго, без ссылок на наглядные представления и чертежи.

Далее, в точке x_3 касательная к L имеет отрицательный угловой коэффициент и потому $f'(x_3) < 0$ (пример 9). И так будет в каждой точке интервала (x_2, x_4) . Опять напрашивается правило: если на интервале $f' < 0$, то на этом интервале функция f убывает.

В точке x_2 функция f имеет максимум. Из чертежа ясно, что в этой точке касательная к L параллельна оси Ox и потому ее угловой коэффициент равен нулю, так что $f'(x_2) = 0$. При этом слева от этой точки $f' > 0$, а справа $f' < 0$.

В точке x_4 у функции минимум. Касательная к L горизонтальна — ее угловой коэффициент равен нулю, и потому $f'(x_4) = 0$. При этом слева от этой точки $f' < 0$, а справа $f' > 0$.

Эти простые и наглядные соображения, ясно видные на простом примере, сохраняются и в общем случае и будут доказаны ниже. Для этого нам требуется теорема и формула Лагранжа. Введем предварительно три определения.

Определение 2. Функция f непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 3. Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) , в точке a непрерывна справа и в точке b непрерывна слева.

Определение 4. Функция f дифференцируема на интервале, если она имеет производную в каждой точке этого интервала.

Теорема 6 (Лагранжа). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то можно найти такую точку c $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой Лагранжа*. Здесь мы приведем только наглядное обоснование

этой формулы (доказательство см. в Приложении, с. 247).

Возьмем на графике L функции f точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (рис. 36) и проведем прямую $l \parallel AB$, l не пересекает L . Будем «надвигать» l на линию L , со-

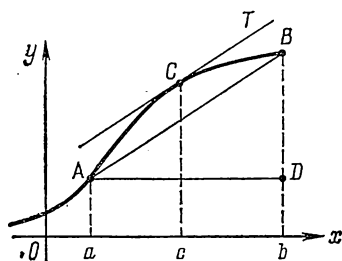


Рис. 36

храняя параллельность $l \parallel AB$. В некоторый момент l коснется линии L — это положение CT на рис. 36. Ясно, что CT — касательная к L в точке C . Поскольку $CT \parallel AB$, то угловые коэффициенты этих прямых равны. Угловой коэффициент CT равен $f'(c)$ (где c — абсцисса точки C (пример 9), и

потому $a < c < b$). Другими словами,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

что равносильно равенству (7).

Теорема 7 (достаточный признак монотонности).

1) Если $f' > 0$ на интервале (a, b) , то на (a, b) функция f возрастает.

2) Если $f' < 0$ на интервале (a, b) , то на (a, b) функция f убывает.

Пусть x_1 и x_2 — любые числа из интервала (a, b) . Тогда по формуле Лагранжа можно указать такое число c между x_1 и x_2 , что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Число c принадлежит интервалу (a, b) , так как c между x_1 и x_2 .

Если $f' > 0$ на (a, b) , то $f'(c) > 0$ и

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

и возрастание f на (a, b) доказано.

Если $f' < 0$ на (a, b) , то $f'(c) < 0$ и

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

и убывание f на (a, b) доказано.

Замечание. Если в условиях теоремы 7 функция f непрерывна в точке a справа, то f монотонна

на промежутке $[a, b)$. Действительно, в этом случае можно пользоваться теоремой Лагранжа и при $x_1 = a$. Аналогичное замечание относится и к точке b , если функция f непрерывна в точке b слева.

Пример 21. Исследуем на монотонность функцию $y = x^4 - 2x^2$. Так как $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, то: 1) $y' > 0$ на $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ и в точках $-1, 0$ и 1 функция непрерывна, поэтому функция возрастает на промежутках $[-1, 0]$ и $[1, +\infty)$; 2) $y' < 0$ на $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ и в точках $-1, 0$ и 1 функция непрерывна, поэтому функция убывает на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[0, 1]$.

Теорема 8 (необходимый признак экстремума). Если в точке экстремума существует производная, то она равна нулю.

Пусть p — точка минимума функции f и существует

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Этому же числу $f'(p)$ равны и односторонние пределы (гл. I, теорема 14). Так как p — точка минимума f , то в некоторой окрестности U точки p числитель дроби $f(x) - f(p) \geq 0$. Поэтому при $x \in U$ и большем p

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0,$$

и следовательно (теорема 8 из гл. I),

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0.$$

Аналогично, рассматривая $x \in U$, меньшие p , получаем:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0.$$

Таким образом, $f'(p) \geq 0$ и $f'(p) \leq 0$. Следовательно, $f'(p) = 0$.

Если p — точка максимума f , то рассуждения аналогичны.

Итак, точки экстремума функции надо искать только там, где $f' = 0$ или f' не существует (например, функция $|x|$ в точке 0 имеет минимум, а производной в этой точке не имеет). Однако надо иметь в

виду, что там, где $f' = 0$, экстремума может и не быть. Например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, равную нулю при $x = 0$, но эта функция (рис. 37) в нуле не имеет экстремума. Поэтому условие $f' = 0$ только необходимое. Для того чтобы выяснить, есть ли в данной точке экстремум и будет ли это максимум или минимум, докажем следующую теорему:

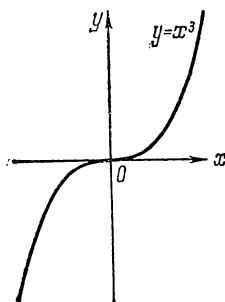


Рис. 37

Теорема 9 (достаточный признак экстремума). Пусть функция f непрерывна в точке p . Тогда:

1) если $f' < 0$ на (a, p) и $f' > 0$ на (p, b) , то в точке p функция f имеет минимум;

2) если $f' > 0$ на (a, p) и $f' < 0$ на (p, b) , то функция f в точке p имеет максимум.

Коротко эту теорему формулируют так: если в точке p производная меняет знак с минуса на плюс, то p — точка минимума; если в точке p производная меняет знак с плюса на минус, то p — точка максимума.

Докажем первое утверждение теоремы. Так как $f' < 0$ на (a, p) и f непрерывна в точке p , то f убывает на $(a, p]$, и потому для любого $x \in (a, p)$ выполнено неравенство $f(x) > f(p)$. Так как $f' > 0$ на (p, b) и f непрерывна в точке p , то f возрастает на $[p, b)$, и потому для любого $x \in (p, b)$ выполнено неравенство $f(x) > f(p)$. Итак, доказано, что при любом $x \neq p$ из (a, b) выполнено неравенство $f(x) > f(p)$, т. е. функция f в точке p имеет минимум.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Пример 22. Построим график функции $y = \sqrt[3]{x^2} (5 - x)$. Она всюду непрерывна, $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 5$; $y' = 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3} x^{2/3} = \frac{5}{3 \sqrt[3]{x}} (2 - x)$ и $y' = 0$ при $x = 2$ и y' не существует (бесконечна) при $x = 0$. На интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ производная $y' < 0$, следовательно, на промежутках $(-\infty, 0]$ и $[2, +\infty)$ (в точках 0 и 2 функция непрерывна) функция убывает; на интервале $(0, 2)$ производная $y' > 0$, следовательно, функция возрастает на

$[0, 2]$. При исследовании полезно изобразить «схему знаков y' » (рис. 38). По этой схеме видно, что производная в точке 0 меняет знак с минуса на плюс: в точке 0 — минимум, а в точке 2 производная меняет знак с плюса на минус: точка 2 — точка максимума. Для построения графика надо вычислить $y(0)=0$, $y(2)=3\sqrt[3]{4} \approx 4,8$ и учесть, что $y'(0)=\infty$, т. е. график функции касается оси ординат (рис. 39).

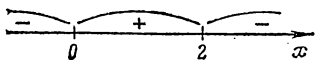


Рис. 38

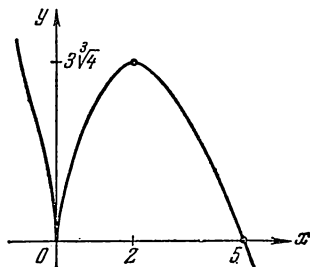


Рис. 39

Пример 23. Докажем теперь, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ при $a > 1$ и $p > 0$. Для этого рассмотрим на промежутке $(0, +\infty)$ функцию

$$y = \frac{x^{p+1}}{a^x}.$$

Она непрерывна и положительна при всех $x \in (0, +\infty)$. Исследуем эту функцию на экстремум:

$$y' = x^p a^{-x} \ln a \left(\frac{p+1}{\ln a} - x \right).$$

Отсюда видно, что на промежутке $(0, (p+1)/\ln a]$ функция возрастает, на промежутке $[(p+1)/\ln a, +\infty)$ — убывает. Следовательно, в точке $(p+1)/\ln a$ эта функция имеет наибольшее значение — обозначим его буквой M . Тогда для всех $x > 0$ выполнено неравенство

$$0 < x^{p+1}/a^x \leq M, \quad \text{т. е.} \quad 0 < x^p/a^x \leq M/x.$$

Отсюда в силу теоремы 9 из гл. I следует наше утверждение.

Теорема 10 (признак постоянства функции). Для того чтобы функция f была постоянной на интервале I , необходимо и достаточно, чтобы $f' = 0$ на I .

Докажем необходимость: если $f = C$ на I , то $f' = (C)' = 0$.

Докажем достаточность. Пусть $f' = 0$ на I . Зафиксируем точку $p \in I$. Тогда для любого $x \in I$ по формуле Лагранжа имеем

$$f(x) - f(p) = f'(c)(x - p) = 0,$$

поскольку $f'(c) = 0$, так как c между x и p , и потому $c \in I$. Таким образом, $f(x) = f(p) = C$.

К теореме 10 справедливо замечание, аналогичное замечанию к теореме 7.

Подытожим доказанное: с помощью первой производной можно найти интервалы монотонности и постоянства функции, ее точки максимума и минимума.

Рассмотрим еще один пример, в котором объясняется закон преломления света из принципа Гюйгенса — «путь света таков, что свет на него затрачивает минимальное время». В школе эта задача решалась для случая, когда граница между средами плоская. Здесь мы рассмотрим общий случай и заодно углубим понимание физической роли касательной к линии.

Пример 24. Пусть график положительной функции f , имеющей всюду производную, разбивает первую четверть координатной плоскости на две части — «верхнюю» и «нижнюю» (рис. 40). Точка движется из начала координат (оно находится в «нижней» части) в точку $Q(a, b)$, принадлежащую «верхней» части. При этом в «нижней» части ее скорость постоянна и

равна v_1 и в «верхней» части ее скорость тоже постоянна и равна v_2 ($v_1 \neq v_2$). По какому пути должна двигаться точка, чтобы на весь путь затратить минимум времени?

Путь точки есть ломаная OMQ , где положение точки $M(x, f(x))$ определяется тем, что на путь OMQ затрачивается минимальное время. Запишем время t , затраченное точкой на путь:

$$t = \frac{|OM|}{v_1} + \frac{|MQ|}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + f^2(x)}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2}}{v_2}.$$

Мы получили функцию от x — абсциссы точки M . Нас интересует минимум этой функции. Так как эта функ-

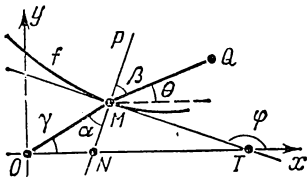


Рис. 40

ция всюду имеет производную, то минимум может быть только в той точке, где $t' = 0$ (теорема 8):

$$t' = \frac{x + f(x) f'(x)}{v_1 \sqrt{x^2 + f^2(x)}} + \frac{x - a + (f(x) - b) f'(x)}{v_2 \sqrt{(x - a)^2 + (f(x) - b)^2}} = 0. \quad (8)$$

На рис. 40 прямая MT — касательная к графику функции f в точке касания M , φ — угол ее наклона; так что $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$; $MN \perp MT$ и $ML \parallel Ox$. Тогда

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{f(x)}{|OM|}, & \cos \gamma &= \frac{x}{|OM|}, \\ \cos \theta &= \frac{a - x}{|MQ|}, & \sin \theta &= \frac{b - f(x)}{|MQ|} \end{aligned}$$

и формулу (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{v} (\cos \gamma + \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi) - \frac{1}{v_2} (\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi) = 0,$$

откуда после умножения на $\cos \varphi$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} (\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi) - \\ - \frac{1}{v_2} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\cos(\varphi - \gamma)}{\cos(\varphi - \theta)} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (9)$$

Угол φ — внешний для $\triangle OMT$, и потому $\varphi = \gamma + \alpha + \frac{\pi}{2}$, откуда $\varphi - \gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$ и

$$\cos(\varphi - \gamma) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha. \quad (10)$$

Кроме того, угол φ — внешний для $\triangle NMT$, и потому $\widehat{MNT} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Но $\widehat{MNT} = \widehat{PML}$ как соответственные углы и потому $\beta + \theta = \widehat{PML} = \widehat{MNT} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\varphi - \theta = -\beta - \frac{\pi}{2}$ и

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \beta. \quad (11)$$

Подставляя из (10) и (11) в (9), получаем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

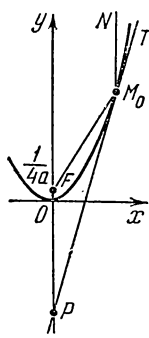
т. е. известный из физики закон преломления.

Аналогично можно получить и закон отражения.

Подчеркнем один важный вывод: преломление и отражение света происходят так, как будто на некотором промежутке, содержащем точку падения луча, зеркало заменили на отрезок касательной. С таким положением, когда на некотором промежутке кривая заменяется отрезком ее касательной, вы еще неоднократно встретитесь.

Приведем еще пример, показывающий, что зеркало для прожектора можно брать в виде поверхности, получающейся при вращении параболы $y = ax^2$ вокруг оси ординат. При этом точечный источник света надо поместить в точке $F(0, \frac{1}{4a})$ — она называется фокусом параболы.

Пример 25. К параболе $y = ax^2$ ($a > 0$) в произвольной точке M_0 проведена касательная M_0T и взята точка $F(0, \frac{1}{4a})$ (рис. 41). Докажем, что из равенства $\widehat{FM_0P} = \widehat{NM_0T}$ следует, что $M_0N \parallel Oy$.



Точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на параболы и потому $y_0 = ax_0^2$ и $x_0^2 = y_0/a$. Напишем уравнение касательной M_0T :

$$y = y_0 + 2ax_0(x - x_0) \quad \text{или} \\ y = 2ax_0x - y_0.$$

Рис. 41

Следовательно, ордината точки P равна $-y_0$ и $|FP| = y_0 + \frac{1}{4a}$. Покажем, что $|FP| = |FM_0|$, т. е. $\triangle FPM_0$ — равнобедренный. Действительно,

$$\begin{aligned} |FM_0| &= \sqrt{x_0^2 + \left(y_0 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{y_0}{a} + y_0^2 - \frac{y_0}{2a} + \left(\frac{y_0}{4a}\right)^2} = \\ &= \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} = y_0 + \frac{1}{4a}. \end{aligned}$$

Но тогда $\widehat{FPM_0} = \widehat{FM_0P}$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны) и $\widehat{NM_0T} = \widehat{FM_0P}$ по условию. Следовательно, $\widehat{NM_0T} = \widehat{FPM_0}$, и потому $M_0N \parallel Oy$, так как равны соответственные углы.

В ряде случаев полезно более детальное исследование функции — эти вопросы связаны со второй производной. Терминология здесь принята следующая: если на интервале I график функции f расположен выше любой касательной, то функция f и ее график называются *выпуклыми вверх* на I (рис. 42);

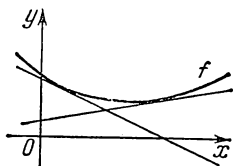


Рис. 42

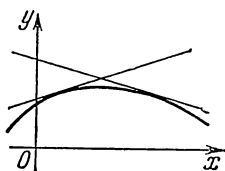


Рис. 43

если на интервале I график функции f расположен ниже любой своей касательной, то функция f и ее график называются *выпуклыми вниз* на I (рис. 43); точка p называется *точкой перегиба* функции f и ее графика, если график функции f имеет касательную в этой точке, а на интервалах (a, p) и (p, b) функция f выпукла — на одном вверх, а на другом вниз (рис. 44). Докажем две теоремы о выпуклых функциях.

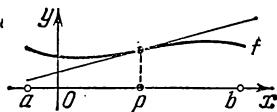


Рис. 44

Теорема 11 (достаточный признак выпуклости).

Если $f'' > 0$ на интервале I , то функция f выпукла вниз на I ; если $f'' < 0$ на интервале I , то функция f выпукла вверх на I .

Возьмем любую точку p из интервала I и напишем уравнение касательной к графику функции f в этой точке:

$$y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Рассмотрим разность ординат точек на касательной и на графике функции f при одном и том же x (рис. 45):

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) \stackrel{(1)}{=} \\ &= f'(c_1)(x - p) - f'(p)(x - p) = (f'(c_1) - f'(p))(x - p) \stackrel{(2)}{=} \\ &= f''(c)(c_1 - p)(x - p). \end{aligned}$$

- (1) По формуле Лагранжа $f(x) - f(p) = f'(c_1)(x - p)$, где c_1 между x и p (рис. 46 и 47); формулой можно пользоваться, так как на большем интервале I существует производная (и даже f'');
- (2) по формуле Лагранжа $f'(c_1) - f'(p) = f''(c)(c_1 - p)$, где c находится между c_1 и p ; этой формулой

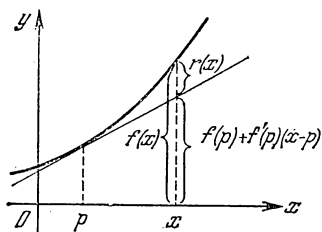


Рис. 45

для функции f' можно пользоваться, так как на большем интервале I у функции f' есть производная: $(f')' = f''$.

Поскольку $(c_1 - p)(x - p) > 0$ и при $x > p$, и при $x < p$ (см. рис. 46, 47), то знак разности $r(x)$ совпадает со знаком $f''(c)$. Если $f'' > 0$ на I , то $r > 0$, т. е.

график f расположен выше касательной (рис. 45), а так как это произвольно взятая касательная, то функ-

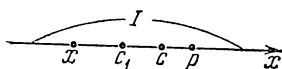


Рис. 46

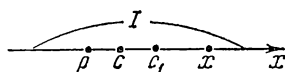


Рис. 47

ция f выпукла вниз на I . Если $f'' < 0$ на I , то $r < 0$ и график f расположен ниже касательной, а так как это произвольно взятая касательная, то функция f выпукла вверх на I .

Теорема 12. Если функция f выпукла вниз на интервале I , то любая дуга графика f лежит под своей хордой.

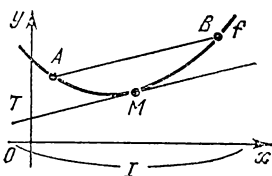


Рис. 48

Если функция f выпукла вверх на интервале I , то любая дуга графика f лежит над своей хордой.

Пусть функция f выпукла вниз на интервале I ; A и B — две любые точки на графике f (рис. 48). Берем на дуге AB любую точку M и проводим касательную MT к графику f (M — точка касания). Так как функция f выпукла вниз, то ее график расположен над MT . В частности, точки A и B тоже расположены над MT и потому отрезок AB тоже расположен над

МТ, а в частности, и над точкой М. Итак, точка М лежит под хордой АВ. Но М — любая точка дуги АВ. Следовательно, дуга АВ лежит под хордой АВ.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 26. Построим график функции $y = e^{-x^2}$. Это непрерывная четная функция, определенная всюду и всюду большая нуля, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$. Находим $y' = -2xe^{-x^2}$; $y' > 0$ на $(-\infty, 0)$ — функция возрастает на $(-\infty, 0]$, $y' < 0$ на $(0, +\infty)$ — функция убывает на $[0; +\infty)$, в нуле y' меняет знак с плюса на минус, т. е. 0 — точка максимума и $y(0) = 1$. Далее, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $y'' < 0$ на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ — здесь функция выпукла вверх, $y'' > 0$ на $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ — здесь функция выпукла вниз, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегиба, в них $y = e^{-1/2} \approx 0,6$ и $y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{1/2} \approx -0,8$ (рис. 49).

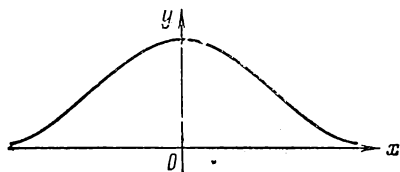


Рис. 49

Пример 27. Построим график функции $y = x^2 \ln x$. Эта функция определена и непрерывна на $(0, +\infty)$; $y = 0$ при $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} y = 0$ (формула (24) из гл. I). Далее, $y' = 2x \ln x + x$, откуда видим, что $y' < 0$ на $(0, e^{-1/2})$ — функция убывает на $(0, e^{-1/2})$, $y' > 0$ на $(e^{-1/2}, +\infty)$ — функция возрастает на $[e^{-1/2}, +\infty)$, а в точке $x = e^{-1/2} \approx 0,6$ функция имеет минимум, $y(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \ln e^{-1/2} = -1/2e \approx -0,2$. Вторая производная $y'' = 2 \ln x + 3$; $y'' > 0$ на $(e^{-3/2}, +\infty)$ — здесь график выпуклый вниз, $y'' < 0$ на $(0, e^{-3/2})$ — здесь график выпуклый вверх; точка $x = e^{-3/2} \approx 0,2$ есть точка перегиба, $y(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3} \approx -0,08$ и

$y' (e^{-3/2}) = -2e^{-3/2} \approx -0,45$. Кроме того, для построения графика следует заметить, что $\lim_{x \rightarrow 0+} y' = 0$ (формула (24) из гл. I), и потому график надо рисовать так, чтобы он «подходил к началу координат, касаясь оси абсцисс» (рис. 50).

Пример 28. Докажем, что $\ln(1+x) \leq x$ при $x > -1$. Функция $y = \ln(1+x)$ выпукла вверх на $(-1, +\infty)$, так как $y'' = -1/(1+x)^2$. Поэтому ее

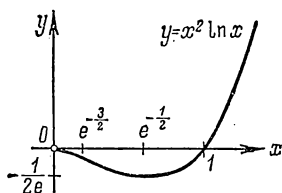


Рис. 50

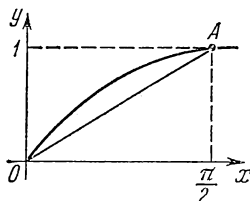


Рис. 51

график расположен под касательной, проведенной в нуле, — ее уравнение $y = x$. Этим неравенство доказано.

Пример 29. Докажем, что $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Функция $y = \sin x$ выпукла вверх на $(0, \pi)$, так как $y'' = -\sin x < 0$ на $(0, \pi)$. Поэтому дуга OA синусоиды (рис. 51) расположена над хордой OA . Уравнение этой хорды $y = \frac{2x}{\pi}$. Неравенство доказано.

Пример 30. Докажем, что при любом натуральном n и любых числах a и b имеет место формула — «бином Ньютона»:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n.$$

Функция $f(x) = (a+x)^n$ есть многочлен степени n , т. е.

$$f(x) = (a+x)^n = \\ = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_kx^k + \dots + A_nx^n.$$

Положив $x=0$, получаем $A_0 = a^n$. Поскольку это тождество, то производные правой и левой частей

равны:

$$n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + \dots + kA_kx^{k-1} + \dots + nA_nx^{n-1}.$$

Положив $x=0$, получаем $A_1 = na^{n-1}$. Беря производные еще раз, получаем

$$\begin{aligned} n(n-1)(a+x)^{n-2} &= \\ &= 2A_2 + \dots + k(k-1)A_kx^{k-2} + \dots + n(n-1)A_nx^{n-2}, \end{aligned}$$

откуда при $x=0$ получаем $n(n-1)a^{n-2} = 2A_2$, т. е. $A_2 = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. Продолжая этот процесс вычисления производных, на k -ом шаге получим

$$\begin{aligned} n(n-1)\dots(n-k+1)(a+x)^{n-k} &= \\ &= k!A_k + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)A_nx^{n-k}, \end{aligned}$$

откуда, положив $x=0$, приходим к формуле $A_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}$. После n шагов получим $n! = n!A_n$, $A_n = 1$. Подставив найденные значения A_k в выражение для f и положив $x=b$, получаем требуемую формулу.

§ 3. Дифференциал функции

Наряду с производной, особенно в интегральном исчислении и его приложениях (см. гл. IV и V), большую роль играет дифференциал функции.

Определение 5. Функция f называется *дифференцируемой в точке x_0* , если для ее приращения выполняется равенство

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (12)$$

где A — число, а α — функция от Δx , бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$. Произведение $A\Delta x$ называется *дифференциалом функции f в точке x_0* и обозначается $df(x_0)$, т. е.

$$df(x_0) = A\Delta x. \quad (13)$$

Дифференциал независимой переменной x принимают равным Δx , т. е. $dx = \Delta x$.

Для дифференциала функции $y = f(x)$ пользуются и более короткими обозначениями: df , dy . Определение 5 коротко формулируют так: «дифференциал

есть главная часть приращения функции, линейная относительно приращения ее аргумента».

Пример 31. Вычислим дифференциал функции $y = x^3$. Ее приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$. Таким образом, мы получили разложение вида (12) с $A = 3x^2$, не зависящим от Δx , и $\alpha = 3x\Delta x + (\Delta x)^2$ — это, очевидно, бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$ функция от Δx . Следовательно, функция x^3 дифференцируема и ее дифференциал в точке x есть $3x^2 dx$. Обычно пишут $d(x^3) = 3x^2 dx$.

Оказывается, что дифференциал функции тесно связан с ее производной: имеет место следующая теорема.

Теорема 13 (связь производной с дифференциалом). *Для того чтобы функция f имела дифференциал в точке x , необходимо и достаточно, чтобы в точке x существовала производная f' . При этом*

$$df(x) = f'(x) dx. \quad (14)$$

Часто пишут короче: $df = f' dx$.

Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x , тогда имеет место разложение (12) и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x + \alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A,$$

т. е. существует $f'(x)$. Равенство (14) следует из (13).

Достаточность. Пусть существует

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Тогда по теореме 11 из гл. I

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где α — функция от Δx , бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\Delta f(x) = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x,$$

и мы получили разложение (12) с $A = f'(x)$. Теорема доказана.

Таким образом, действия нахождения дифференциала и нахождения производной равносильны.

Формула (14) была выведена в предположении, что x — независимая переменная, так как полагали $dx = \Delta x$. Если же x — функция от некоторой переменной, то $\Delta x \neq dx$, однако формула (14) сохраняется неизменной. Это доказывается в следующей теореме.

Теорема 14 (инвариантность первого дифференциала). *Формула $dy = y' dx$ справедлива, если x есть функция.*

Пусть $y = f(x)$, а $x = g(z)$, где z — независимая переменная. Тогда y есть сложная функция от независимой переменной z и

$$dy = y'_z dz.$$

Но так как, по теореме 3, $y'_z = y'_x \cdot x'_z$, а по теореме 13 $x'_z dz = dx$, то

$$dy = y'_z dz = y'_x \cdot x'_z dz = y'_x \cdot (x'_z dz) = y'_x dx,$$

т. е.

$$dy = y' dx,$$

что и требовалось доказать.

Ввиду особой важности этого факта подчеркнем еще раз: формула (14) имеет место во всех случаях — и когда x независимая переменная, и когда x — функция.

Есть и еще одно важное следствие из формулы (14) и теоремы 14: деля обе части формулы (14) на dx , получаем

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad (15)$$

т. е. первая производная функции равна частному от деления дифференциала этой функции на дифференциал ее аргумента.

В силу теоремы 13 все правила вычисления дифференциалов очень похожи на соответствующие правила вычисления производных.

Теорема 15 (правила вычисления дифференциалов). *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то*

- 1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- 2) $d(uv) = u dv + v du$;
- 3) $d(Cu) = C du$, где C — постоянная;

$$4) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Все правила доказываются одинаково — при помощи формулы (14). Докажем, например, второе правило:

$$\begin{aligned} d(uv) &= (uv)' dx = (uv' + vu') dx = \\ &= u(v' dx) + v(u' dx) = u dv + v du. \end{aligned}$$

Теорема 16 (геометрический смысл дифференциала). *Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции.*

Запишем уравнение касательной к графику функции f в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Так как $x - x_0 = dx$, то правая часть этой формулы есть $df(x_0)$, а ее левая часть — приращение ординаты касательной (на рис. 52 $CT = df(x_0)$).

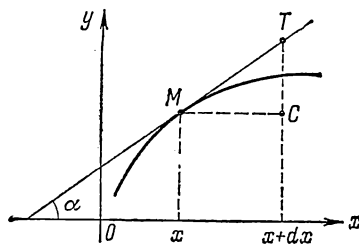


Рис. 52

В качестве приложений понятия дифференциала рассмотрим приближенные вычисления. Основой всех простейших приближенных вычислений является формула

$$\Delta f \approx df, \quad (16)$$

которая получается из формулы (12) при отбрасывании второго слагаемого $\alpha \Delta x$. Мы воспользуемся этой формулой, переписав ее в виде

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) dx. \quad (17)$$

(Вспомним, что $\Delta f(x_0) = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ и $df(x_0) = f'(x_0) dx$.)

Пример 32. Вычислим приближенно $\sqrt[10]{1000}$. Заметим, что

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \sqrt[10]{1 - 24 \cdot 2^{-10}} = 2 \sqrt[10]{1 - 3 \cdot 2^{-7}}.$$

Возьмем $f(x) = \sqrt[10]{x}$. Из написанного выше видно, что нам надо вычислить $f(1 - 3 \cdot 2^{-7})$, а $f(1) = \sqrt[10]{1} = 1$.

Положив в формуле (17) $x_0 = 1$, $x_0 + dx = 1 - 3 \cdot 2^{-7}$, так что $dx = -3 \cdot 2^{-7}$, и учтя то, что $f'(x_0) = -\frac{1}{10} x_0^{-9/10} = -\frac{1}{10}$, получаем

$$\sqrt[10]{1 - 3 \cdot 2^{-7}} = f(1 - 3 \cdot 2^{-7}) \approx 1 + \frac{1}{10} (-3 \cdot 2^{-7}).$$

Следовательно,

$$\sqrt[10]{1000} = 2 \sqrt[10]{1 - 3 \cdot 2^{-7}} \approx 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot 2^{-7}\right) \approx 1,995.$$

Посмотрим, какова точность равенства (16), т. е. сколь велика разность:

$$\Delta y - dy,$$

где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ (x — независимая переменная, и следовательно, $dx = \Delta x = x - x_0$). Тогда (см. доказательство теоремы 11) между точками x и x_0 есть такие точки c и c_1 , что

$$\begin{aligned} \Delta y - dy &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= (x - x_0)(c_1 - x_0)f''(c). \end{aligned}$$

Поскольку $|c_1 - x_0| < |x - x_0|$, то из последнего равенства получаем

$$|\Delta y - dy| < |x - x_0|^2 |f''(c)|.$$

При этом коротко говорят, что равенства (16) и (17) написаны с точностью порядка $(dx)^2$, т. е. при уменьшении dx , например в 2 раза, точность этих формул увеличивается в 4 раза.

Есть еще один вид приложений дифференциала, которым мы в основном будем пользоваться в интегральном исчислении.

Пример 33. На рис. 53 изображен график непрерывной функции f . Рассмотрим площадь S фигуры, ограниченной этим графиком и опирающейся на отрезок $[a, x]$ оси абсцисс (на рис. 53 эта фигура заштрихована). Этим каждому числу x (из некоторого промежутка (a, b)) поставлено в соответствие число S — площадь указанной фигуры, т. е.

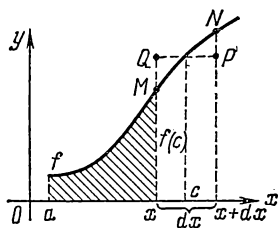


Рис. 53

мы имеем дело с функцией $S = S(x)$. Докажем, что это дифференцируемая функция, и найдем ее дифференциал.

Приращение этой функции

$$\Delta S = S(x + dx) - S(x)$$

при $dx > 0$ равно площади полосы $xMN(x + dx)$.

Возьмем прямоугольник $xQP(x + dx)$ той же площади ΔS . Его верхнее основание QP пересекает график функции f в некоторой точке с абсциссой c , $x < c < x + dx$. Действительно, если предположить, что отрезок QP не пересекает график f , то $[QP]$ или выше точки N , или ниже точки M (в силу непрерывности функции f). Но тогда площадь этого прямоугольника не равна площади ΔS полосы.

Итак, площадь прямоугольника $\Delta S = f(c)dx$. А так как функция f непрерывна, то $\alpha = f(c) - f(x)$ есть бесконечно малая функция при $dx \rightarrow 0$, и потому

$$\Delta S = f(x)dx + \alpha dx.$$

Следовательно (см. определение 5), функция S дифференцируема и

$$dS = f(x)dx. \quad (18)$$

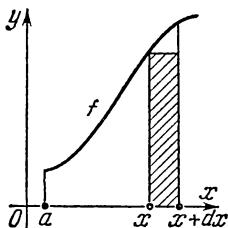


Рис. 54

На рис. 54 заштрихован прямоугольник, площадь которого равна dS .

В гл. IV будет показано, как по дифференциалу функции находить саму эту функцию.

Пусть аргумент функции f есть независимая переменная x . Тогда дифференциал $df(x) = f'(x)dx$ при фиксированном dx можно рассматривать как функцию от x . Может оказаться, что эта функция тоже дифференцируема. При вычислении ее дифференциала приращение x придется обозначить не dx (так как сейчас dx зафиксировано — это некоторое число), а иначе — например, δx :

$$\begin{aligned} d(df(x)) &= d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = \\ &= dx \cdot (f'(x))' \delta x = f''(x) \delta x dx. \end{aligned}$$

Однако на практике значения $d(df(x))$ встречаются только при $\delta x = dx$, т. е. в виде $f''(x)(dx)^2$. Это выра-

жение называют вторым дифференциалом функции f и обозначают $d^2f(x)$, или d^2f , или d^2y . Таким образом, по определению

$$d^2f(x) = f''(x) dx^2, \quad (19)$$

где dx^2 есть сокращенная запись для выражения $(dx)^2$.

Коротко говорят, что второй дифференциал есть дифференциал от первого дифференциала, и пишут

$$d^2y = d(dy).$$

Из формулы (19), деля на dx^2 , получаем:

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

т. е. вторая производная равна частному от деления второго дифференциала функции на квадрат дифференциала ее аргумента.

К сожалению, эта формула, в отличие от формулы (15) для первой производной, не сохраняется, если x есть функция от некоторого аргумента. Однако такие обозначения исторически приняты.

Аналогично определяется третий дифференциал:

$$d^3y = d(d^2y)$$

и получаются формулы (если x — независимая переменная)

$$d^3y = y''' dx^3 \quad \text{и} \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Наконец, определяется n -й дифференциал

$$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

и получаются формулы (если x — независимая переменная)

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Все дифференциалы, начиная со второго, называются старшими, или дифференциалами высших порядков. Дифференциал dy называют первым дифференциалом.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение

В § 1 гл. I уже говорилось о том, что на практике обычно приходится встречаться со случаем, когда в рассматриваемой задаче фигурирует несколько переменных, связанных между собой. Например, площадь S прямоугольника и длины его сторон x и y — это три переменные (для разных прямоугольников это разные числа). Но они между собой связаны: $S = xy$. Задавая произвольно стороны прямоугольника, т. е. числа x и y , для переменной S получается уже единственное, вполне определенное значение. Говорят, что S есть функция от двух переменных x и y , а эти переменные x и y называют аргументами этой функции.

В общем случае при решении задачи могут возникнуть $n + 1$ переменная x_1, x_2, \dots, x_n и y , которые между собой связаны так, что каждому набору числовых значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n соответствует единственное значение переменной y . Тогда говорят, что задана функция f от n переменных. Число y , поставленное в соответствие набору чисел x_1, x_2, \dots, x_n , называют значением функции f в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) и пишут

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ или } y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и т. п.}$$

Переменные x_1, x_2, \dots, x_n называют аргументами этой функции, а переменную y называют функцией от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . При этом совершенно безразлично (как и для функций одной переменной), каким именно образом это соответствие установлено. В частности, нет никакой необходимости в том, чтобы это соответствие задавалось формулой (хотя в упражнениях это бывает чаще всего и для приложений тоже удобнее),

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим температуру в комнате. В каждой точке $M(x, y, z)$ (в комнате ввели систему координат) и для каждого момента времени t определена температура θ . Здесь пять переменных: x, y, z — координаты точки (они от точки к точке меняются), t и θ . В каждый момент времени t (в прошлом и в будущем) в каждой точке $M(x, y, z)$ будет определенная температура θ . Следовательно, температура θ есть функция от четырех переменных x, y, z, t . Но записать эту функцию в виде формулы (особенно на будущее) никто не сможет.

Далее мы будем в основном говорить о функциях двух переменных, поскольку для них можно привести наглядные иллюстрации доказанных фактов, да и формулы менее громоздки. Для функций большего числа переменных все факты (о которых будет идти речь) или аналогичны, или сохраняются без всяких изменений.

По традиции аргументы функций двух переменных обозначают буквами x и y , а значения функций — буквой z . Таким образом, утверждение «задана функция f двух переменных» означает следующее: для любой пары чисел (x, y) из некоторого множества D таких пар поставлено в соответствие единственное число z , которое обозначается $f(x, y)$ и называется значением функции f в точке (x, y) . Множество D называется областью определения функции f .

Например, формула

$$z = \ln(y - x^2)$$

задает z как функцию от переменных x и y . Но эта функция определена не для любых значений x и y — должно выполняться неравенство $y - x^2 > 0$. Те пары чисел (x, y) , для которых это неравенство выполнено, и образуют область определения функции — множество D .

Этим соображениям можно придать наглядность, если вспомнить, что каждую пару (x, y) мы можем рассматривать как координаты точки на плоскости. Тогда неравенство $y - x^2 > 0$ определяет множество точек плоскости (рис. 55) — оно и изображает наглядно область определения функции. На рис. 55 парабола изображена пунктиром, это указывает на то,

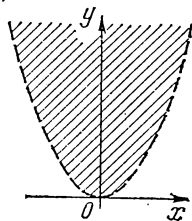


Рис. 55

что эта линия — граница области определения функции, не принадлежит D (равенство $y - x^2 = 0$ не допускается).

Поскольку любую пару чисел (x, y) можно рассматривать как координаты точки M на плоскости, то и функцию двух переменных можно рассматривать как функцию от точки M на плоскости и писать $z = f(M)$. При этом аргументами f будут координаты точки $M(x, y)$. Поэтому мы будем пользоваться то записью $z = f(M)$, то записью $z = f(x, y)$ — когда какой удобнее.

Заметим еще, что пару чисел (x, y) можно рассматривать и как координаты вектора (см. Приложение, с. 260) $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектора точки $M(x, y)$. Поэтому иногда удобнее считать функцию двух переменных функцией радиус-вектора \mathbf{r} и писать $z = f(\mathbf{r})$, координаты \mathbf{r} есть аргументы этой функции.

Как и для функции одной переменной, рассматривается *график функции двух переменных*: множество точек в пространстве $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, называется графиком функции f (определенной на множестве D). График — это множество в трехмерном пространстве и в простейших случаях есть некоторая поверхность. Например, $z = ax + by + c$ есть плоскость (см. Приложение, с. 268); $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ — верхняя полусфера радиуса 3 с центром в начале координат.

В общем случае можно себе представить такую картину. Берем любую точку $M(x, y)$ из области определения D функции f (рис. 56). Точка $P(x, y, z)$,

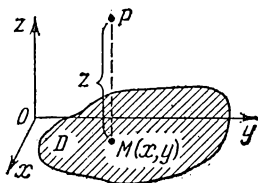


Рис. 56

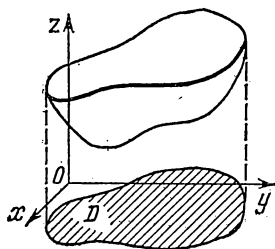


Рис. 57

где $z = f(x, y)$, лежит на графике функции f . Представим теперь себе, что точка M начинает двигаться по области D . Тогда точка P тоже движется в пространстве (при этом длина PM изменяется). Если

точка M «зачерчивает D », то точка P «зачерчивает» в пространстве некоторую поверхность (рис. 57).

Таким образом, с каждой функцией двух переменных связана некоторая поверхность — ее график (подобно тому как с каждой функцией одной переменной связана линия — ее график). Говоря о функции двух переменных, мы всегда будем одновременно представлять себе некоторую поверхность — график этой функции. Как и для функций одной переменной, с каждой поверхностью (которая с любой прямой, параллельной оси Oz , имеет не более одной общей точки) связана функция, графиком которой эта поверхность является.

Мы видели, что определение функции двух переменных вполне аналогично определению функции одной переменной. Подобная аналогия выявилась и с графиком функции и проявится еще во многом далее. Наша задача — познакомиться с исследованием функций двух (нескольких) переменных (повторяя аналогичный путь, пройденный для функций одной переменной). При этом кое в чем будет повторение, а кое в чем появятся новые факты.

Первое существенное отличие от функций одного переменного: для функций нескольких переменных нет понятия монотонной функции. Можно только говорить: в точке M_0 функция f в таком-то направлении растет, а в таком-то направлении — убывает. Это означает, что для точек M , лежащих на луче l_1 (с началом в точке M_0 — этот луч задает направление) и достаточно близких к M_0 , выполнено неравенство $f(M) > f(M_0)$ (возрастание f в направлении l_1 , рис. 58). А для точек M , принадлежащих лучу l_2 (с началом в точке M_0) и достаточно близких к M_0 , выполнено неравенство $f(M) < f(M_0)$ (убывание f в направлении l_2).

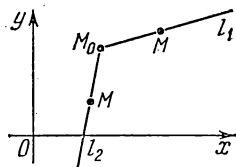


Рис. 58

Первоначальное исследование функции делается при помощи линий уровня. При этом основную роль должно играть геометрическое представление о графике функции как о поверхности. Особенно наглядно — представлять эту поверхность географически, как рельеф некоторой местности — горы, впадины, овраги и т. п., а себя представлять туристом на этой

местности (рис. 59). Тогда в одном направлении для вас будет подъем, т. е. z будет расти — функция в этом направлении растет. При движении в противоположном направлении вы будете спускаться — в этом направлении функция убывает. Вершины гор этого рельефа есть точки максимума функции (точки A и B), а самая низкая точка котлована (точка C) — точка минимума. Точное же определение точек экстремума дословно повторяет аналогичное определение для функции одной переменной.

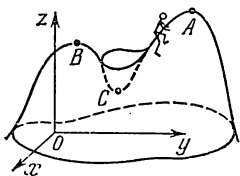


Рис. 59

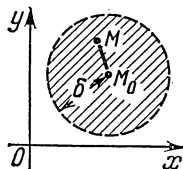


Рис. 60

Определение 1. Точка M_0 называется *точкой максимума функции* f , если существует такое число $\delta > 0$, что $|MM_0| < \delta \Rightarrow f(M) \leq f(M_0)$.

Точка M_0 называется *точкой минимума функции* f , если существует такое число $\delta > 0$, что $|MM_0| < \delta \Rightarrow f(M) \geq f(M_0)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Все точки M , для которых $|MM_0| < \delta$, заполняют круг с центром в точке M_0 и радиусом δ (без окружности, рис. 60). Этот круг называется *окрестностью точки* M_0 (радиусом δ) и обозначается U .

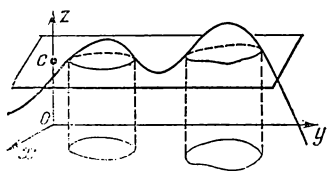


Рис. 61

Продолжая географические аналогии, введем топографическую карту графика функции f . Для этого рассмотрим сечение графика функции f плоскостью $z = C$ (рис. 61) и спроектируем линию пересечения на плоскость xOy . Результат этого проектирования называют *линией уровня* C функции f . Эта линия есть множество точек (x, y) плоскости xOy , для которых выполнено равенство $f(x, y) = C$. Давая C раз-

личные значения, получаем различные линии уровня функции f . Они образуют топографическую карту графика функции f , по которой можно проводить первоначальное исследование функции.

Например, по линиям уровня f (рис. 62) видим: в отметке 4 — точка максимума, в отметке 1,3 — точка минимума, линия уровня 2 — ребро котловины; от отметки 4 вправо — склон крутой, влево — пологий.

Более полное исследование проводится, как и для функций одной переменной, с привлечением понятий предела, непрерывности и производных (которые, как мы увидим, почти не изменились).

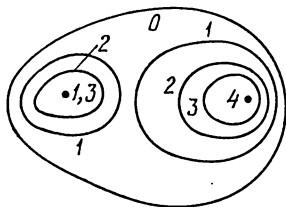


Рис. 62

Определение 2. Число A называют *пределом функции* f в точке $M_0(x_0, y_0)$ и пишут

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для любых точек $M(x, y) \neq M_0$ выполнено условие

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |A - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Определение 3. Функция f называется *непрерывной в точке* M_0 , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Эти определения почти дословно повторяют определения непрерывности и предела функции одной переменной. Поэтому все теоремы и наглядные представления из гл. I сохраняются (мы этого проверять не будем — см. КМА). В приведенных ниже примерах вычисления ведутся на основе аналогов теорем из гл. I.

Примеры:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow e}} \frac{x^2 - \ln y}{\sin \frac{\pi}{x}} = \frac{2^2 - \ln e}{\sin \frac{\pi}{2}} = 3,$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(|x| + |y|)}{|x| + |y|} = 1,$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + 3y^2)^{\frac{2}{x^2 + 3y^2}} = e^2,$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt[3]{\frac{\ln(1 + 2x^4 + 3y^6)}{x^4 + 1,5y^6}} = \\ = \sqrt[3]{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2 \cdot \frac{\ln(1 + 2x^4 + 3y^6)}{2x^4 + 3y^6}} = \sqrt[3]{2 \cdot 1} = \sqrt[3]{2}.$$

§ 2. Дифференциальное исчисление

Понятие производных функций нескольких переменных вводится следующим образом.

Определение 4. *Частной производной по x* функции f в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется число

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частной производной по y функции f в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется число

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Наглядно это определение означает следующее. Когда вычисляется производная по x , то аргумент y зафиксирован — получается функция уже только одной переменной x , и производная этой функции одной переменной и называется частной производной по x . Аналогичное положение с производной по y .

Пример 5. Вычислим $\frac{\partial f(\pi, 4)}{\partial x}$ для функции

$$f(x, y) = \sqrt{y} \sin 3x - 9\pi \ln\left(\frac{x}{\pi} + 2y\right).$$

Здесь $x_0 = \pi$, $y_0 = 4$,

$$f(x, y_0) = f(x, 4) = 2 \sin 3x - 9\pi \ln\left(\frac{x}{\pi} + 8\right)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\pi, 4)}{\partial x} &= \left(2 \sin 3x - 9\pi \ln\left(\frac{x}{\pi} + 8\right)\right)' \Big|_{x=\pi} = \\ &= \left(6 \cos 3x - 9\pi \frac{1}{\frac{x}{\pi} + 8} \cdot \frac{1}{\pi}\right) \Big|_{x=\pi} = \\ &= 6 \cos 3\pi - \frac{9}{1+8} = -6 - 1 = -7. \end{aligned}$$

Если вспомнить наглядный смысл производной функции одной переменной (который здесь сохраняется в силу определения 4), то сделанный подсчет показывает, что функция f в точке $(\pi, 4)$ убывает в положительном направлении оси абсцисс (рис. 63), причем смещение в этом направлении на 0,01 ведет к уменьшению функции приблизительно на 0,07 (так как $\frac{\partial f(\pi, 4)}{\partial x} = -7$).

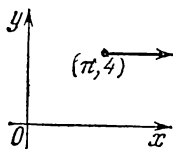


Рис. 63

Если частные производные функции существуют на некотором множестве, а точка, в которой вычисляется частная производная, несущественна, то пользуются более короткими обозначениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{и т. п.}$$

Кроме того, сами частные производные оказываются функциями от нескольких переменных на этом множестве. У этих функций тоже могут существовать производные по x и по y — они называются *вторыми частными производными* заданной функции. Например,

$$z = x^3 e^{2x+5y}, \quad z'_x = 3x^2 e^{2x+5y} + 2x^3 e^{2x+5y}, \\ z'_y = 5x^3 e^{2x+5y}.$$

От этих функций берем еще раз частные производные — получаем вторые частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= (z'_x)'_x = (3x^2 e^{2x+5y} + 2x^3 e^{2x+5y})'_x = \\ &= 6x e^{2x+5y} + 2 \cdot 6x^2 e^{2x+5y} + 4x^3 e^{2x+5y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (z'_y)'_y = (5x^3 e^{2x+5y})'_y = 25x^3 e^{2x+5y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (z'_y)'_x = (5x^3 e^{2x+5y})'_x = 5(3x^2 e^{2x+5y} + 2x^3 e^{2x+5y}), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= (z'_x)'_y = (3x^2 + 2x^3) 5e^{2x+5y}. \end{aligned}$$

Далее получаем третьи, четвертые и т. д. частные производные. Частная производная порядка n обозначается $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$. Так, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^5 \partial y^3}$ означает, что про-

изводная функции по переменной x бралась 5 раз, а по переменной y — 3 раза (всего 8 раз); это частная производная 8-го порядка. При этом не безразлично, в какой последовательности вычислялись частные производные по x и по y . Однако если эти частные производные (говорят смешанные, так как производные берутся и по x , и по y) непрерывны, то они не зависят от того порядка, в котором велись дифференцирования по x и по y (как это видно из приведенного выше примера, где *смешанные вторые производные* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$). Доказательство отмеченного свойства смешанных производных см. КМА.

Приведем пример функции, для которой $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

По определению второй части производной

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x}.$$

Поэтому сначала надо вычислить $f'_y(0, 0)$ и $f'_y(\Delta x, 0)$ при $\Delta x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'_y(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0, \\ f'_y(\Delta x, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(\Delta x, 0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0, \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y},$$

так что сначала надо вычислить $f'_x(0, 0)$ и $f'_x(0, \Delta y)$ при $\Delta y \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'_x(0, \Delta y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, \Delta y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2} = \Delta y, \end{aligned}$$

а то, что $f'_x(0, 0) = 0$, подсчитывается, как и для f'_y . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Итак, $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 0$, а $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = 1$ — смешанные производные не равны.

Очень важное отличие от функций одной переменной: существование первых частных производных в точке не гарантирует непрерывности функции в этой точке (сравните с теоремой 1 из гл. II). Это показывает пример такой функции:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } xy = 0, \\ 1 & \text{при } xy \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично показывается, что $f'_y(0, 0) = 0$, т. е. в точке $O(0, 0)$ функция f имеет обе первые частные производные. Однако f в точке O имеет разрыв, так как в любой окрестности точки O есть точки M (например, $M(h, h)$, $h \neq 0$, рис. 64) такие, что $f(M) = 1$, в то время как $f(O) = 0$. График этой функции — вся плоскость xOy , кроме осей координат, поднятая на 1.

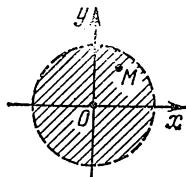


Рис. 64

Понятие дифференциала тоже переносится на функции нескольких переменных почти без всяких изменений (но в его свойствах тоже появляется нечто новое по сравнению с функциями одной переменной).

Определение 5. Функция f называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если ее приращение $\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$

$$= A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (3)$$

где A и B — числа, α и β — функции от Δx и Δy ($\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$), бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Выражение $A \Delta x + B \Delta y$ называется *дифференциалом функции f в точке M_0* и обозначается $df(M_0)$, т. е.

$$df(M_0) = A \Delta x + B \Delta y. \quad (4)$$

Дифференциалы независимых переменных x и y полагаются равными Δx и Δy , т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда формула (4) принимает вид

$$df(M_0) = A dx + B dy. \quad (4')$$

Для дифференциала функции $z = f(x, y)$ пользуются и более короткими обозначениями: df , dz . Определение 5 коротко формулируют так: «дифференциал есть главная часть приращения функции, линейная относительно приращений ее аргументов».

До сих пор все повторялось по аналогии с функциями одной переменной. Но теперь появятся и новые факты.

Из формулы (3) видно, что для дифференцируемой в точке M_0 функции $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(M_0) = 0$, а это (как

и для функций одной переменной) означает непрерывность f в точке M_0 . Это позволяет отметить следующий важный факт: существование дифференциала функции в точке и существование первых частных производных в точке — разные вещи: это показывает пример функции (2) — у нее разрыв в точке O , и потому она не дифференцируема в точке O , хотя первые частные производные в O у этой функции существуют. Это существенное отличие от функций одной переменной (см. теорему 13 из гл. II). Поэтому термин «дифференцируемая функция нескольких переменных» относится только к функциям, имеющим дифференциал. Итак, отметим первое

Теорема 1 (первый необходимый признак дифференцируемости). *Дифференцируемая в точке функция непрерывна в этой точке.*

Теорема 2 (второй необходимый признак дифференцируемости). Если функция f дифференцируема в точке M_0 , то в этой точке существуют обе первые частные производные f_x и

$$df(M_0) = f'_x(M_0) dx + f'_y(M_0) dy. \quad (5)$$

Действительно, пользуясь формулой (3) (при $\Delta y = 0$), имеем

$$\begin{aligned} f'_x(M_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x + \alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что $f'_y(M_0) = B$. Подставляя найденные значения A и B в (4'), получаем (5).

Если функция f дифференцируема в любой точке некоторой области и в рассуждениях нет необходимости указывать точку, в которой происходит дифференцирование, то пишут короче:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{или} \quad dz = z'_x dx + z'_y dy. \quad (6)$$

Мы видели (пример функции (2)), что наличие первых частных производных еще недостаточно для существования дифференциала. Приведенная ниже теорема дает простейшие достаточные условия существования дифференциала.

Теорема 3. Если все первые частные производные функции f непрерывны в точке M_0 , то f дифференцируема в точке M_0 .

Непрерывность первых частных производных f'_x и f'_y в точке M_0 означает, что эти частные производные определены в некоторой окрестности U точки M_0 . Пользуясь этим, преобразуем приращение функции f в точке $M_0(x_0, y_0)$ при точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$ (рис. 65):

$$\begin{aligned} \Delta f(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \stackrel{(1)}{=} \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + \\ &\quad + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \stackrel{(2)}{=} \end{aligned}$$

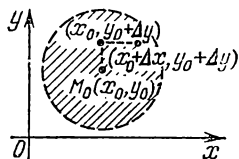


Рис. 65

$$\begin{aligned}
&= f'_x(x_0 + p \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + q \cdot \Delta y) \cdot \Delta y \stackrel{(3)}{=} \\
&= (f'_x(M_0) + \alpha) \cdot \Delta x + (f'_y(M_0) + \beta) \cdot \Delta y \stackrel{(4)}{=} \\
&= f'_x(M_0) \Delta x + f'_y(M_0) \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.
\end{aligned}$$

- (1) Прибавим и вычтем число $f(x_0, y_0 + \Delta y)$; на рис. 65 заштрихована окрестность U , в которой существуют f'_x и f'_y ;
- (2) разность $r = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$ рассматриваем как разность значений функции одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$; тогда $r = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$; по формуле Лагранжа (ее можно применять, так как $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y)$ существует при $(x, y_0 + \Delta y) \in U$) между x_0 и $x_0 + \Delta x$ существует такое число c , что $\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c) \Delta x = f'_x(c, y_0 + \Delta y) \Delta x$; так как c между x_0 и $x_0 + \Delta x$, то $c = x_0 + p \cdot \Delta x$, где $0 < p < 1$; таким образом, $r = f'_x(x_0 + p \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x$; равенство $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + q \cdot \Delta y) \cdot \Delta y$, $0 < q < 1$, объясняется аналогично;
- (3) так как f'_x непрерывна в точке M_0 , то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x_0 + p \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) = f'_x(M_0),$$

и потому $f'_x(x_0 + p \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(M_0) + \alpha$, где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$; аналогично объясняется равенство $f'_y(x_0, y_0 + q \cdot \Delta y) = f'_y(M_0) + \beta$, где $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$;

- 4) раскрываем скобки и переставляем слагаемые.

Итак, пользуясь условиями теоремы, мы получили разложение типа (3) (где $A = f'_x(M_0)$ и $B = f'_y(M_0)$). Следовательно, функция f дифференцируема в точке M_0 , а ее дифференциал записывается по формуле (5).

Пример 6. У функции $z = 2^{x-y} \cos 3y$ первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{x-y} \cos 3y \ln 2$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2^{x-y} \cos 3y \ln 2 - 3 \cdot 2^{x-y} \sin 3y$$

непрерывны в любой точке. Следовательно, она дифференцируема в любой точке и (по формуле (5))

$$dz = 2^{x-y} \cos 3y \ln 2 dx - \\ - (2^{x-y} \cos 3y \ln 2 + 3 \cdot 2^{x-y} \sin 3y) dy.$$

Как и для функций одной переменной, очень важно понятие сложной функции нескольких переменных. Пусть заданы функции

$$z = f(u, v), \quad u = p(x, y), \quad v = q(x, t)$$

(чтобы не усложнять рассуждений, будем считать, что они определены всюду). Тогда эта тройка функций задает переменную z как функцию F от трех переменных x, y, t (при промежуточных переменных u, v). Действительно, любой тройке чисел (x, y, t) поставлена в соответствие единственная пара чисел (u, v) , где $u = p(x, y)$, а $v = q(x, t)$, которой соответствует единственное число $z = f(u, v)$, т. е. любой тройке чисел (x, y, t) поставлено в соответствие единственное число z . Функцию F называют сложной функцией, составленной из функций f, p и q , и подробнее записывают в виде

$$z = f(p(x, y), q(x, t)).$$

Наглядное представление о сложной функции состоит в том, что аргументы функции f в свою очередь есть функции других переменных.

Теоремы о пределах и непрерывности сложных функций сохраняются (мы это проверять не будем — см. КМА). Докажем две теоремы о дифференцировании сложных функций.

Теорема 4. Пусть функции $u = g(t)$ и $v = h(t)$ имеют производные $g'(t_0)$ и $h'(t_0)$, а функция $z = f(u, v)$ дифференцируема в точке $Q_0(u_0, v_0)$, где $u_0 = g(t_0)$ и $v_0 = h(t_0)$. Тогда сложная функция $z = f(g(t), h(t)) = F(t)$ имеет в точке t_0 производную

$$F'(t_0) = f'_u(Q_0) g'(t_0) + f'_v(Q_0) h'(t_0). \quad (7)$$

Если условия этой теоремы выполнены в любой точке некоторой области, то формулу (7) записы-

вают короче:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (8)$$

Доказательство следует из определения производной:

$$F'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.$$

Преобразуем числитель, пользуясь условиями теоремы:

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(g(t), h(t)) - f(g(t_0), h(t_0)) \stackrel{(1)}{=} \\ &= f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{\partial f(Q_0)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f(Q_0)}{\partial v} \Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v. \end{aligned}$$

(1) Положим, как обычно, $\Delta u = g(t) - g(t_0)$ и $\Delta v = h(t) - h(t_0)$, тогда $g(t) = g(t_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u$, $h(t) = h(t_0) + \Delta v = v_0 + \Delta v$;

(2) так как функция f дифференцируема в точке $Q_0(u_0, v_0)$, то $\alpha = \alpha(\Delta u, \Delta v)$ и $\beta = \beta(\Delta u, \Delta v)$ — бесконечно малые при $\Delta u \rightarrow 0$ и $\Delta v \rightarrow 0$. При этом надо учесть, что α и β могут быть не определены при $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, а в этом доказательстве такой случай не исключен. Поэтому придется доопределить α и β в точке $(0, 0)$ — положим $\alpha(0, 0) = 0$ и $\beta(0, 0) = 0$. Тогда написанное равенство не нарушится, так как его левая и правая части обращаются в нуль при $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$ (какое бы значение ни придать $\alpha(0, 0)$ и $\beta(0, 0)$). Кроме того, α и β теперь оказываются непрерывными в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \alpha(\Delta u, \Delta v) = 0 = \alpha(0, 0)$$

и

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \beta(\Delta u, \Delta v) = 0 = \beta(0, 0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\partial f(Q_0)}{\partial u} \cdot \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial f(Q_0)}{\partial v} \cdot \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \beta \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \right) = \frac{\partial f(Q_0)}{\partial u} \cdot g'(t_0) + \\ &\quad + \frac{\partial f(Q_0)}{\partial v} \cdot h'(t_0) + 0 \cdot g'(t_0) + 0 \cdot h'(t_0), \end{aligned}$$

поскольку α и β как сложные функции от t оказываются бесконечно малыми при $t \rightarrow t_0$. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(\Delta u, \Delta v) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(g(t) - g(t_0), h(t) - h(t_0)) \stackrel{(1)}{=} \alpha(0, 0) = 0.$$

- (1) Пользуемся теоремой о перестановочности знака непрерывной функции и предела: функция $\alpha = \alpha(\Delta u, \Delta v)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, а функции g и h непрерывны в точке t_0 (так как существуют $g'(t_0)$ и $h'(t_0)$), и потому $\lim_{t \rightarrow t_0} (g(t) - g(t_0)) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} (h(t) - h(t_0)) = 0$.

Доказательство равенства $\lim_{t \rightarrow t_0} \beta(\Delta u, \Delta v) = 0$ аналогично.

Формула (7) и теорема полностью доказаны.

Теорема 5. Пусть функции $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$ имеют в точке $M_0(x_0, y_0)$ частные производные $g'_x(M_0)$ и $h'_x(M_0)$, а функция $z = f(u, v)$ дифференцируема в точке $Q_0(u_0, v_0)$, где $u_0 = g(M_0)$ и $v_0 = h(M_0)$. Тогда сложная функция $z = f(g(x, y), h(x, y)) = F(x, y)$ имеет в точке M_0 частную производную

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(Q_0)}{\partial u} \cdot \frac{\partial g(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(Q_0)}{\partial v} \cdot \frac{\partial h(M_0)}{\partial x}. \quad (9)$$

Коротко (как и в теореме 4) эту формулу записывают так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (10)$$

Аналогичная теорема и формула верны и для частной производной по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (11)$$

Отметим еще, что структура полученных формул очень похожа на структуру аналогичной формулы для функции одной переменной: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, только здесь число слагаемых равно числу аргументов функции $z = f(u, v)$.

Доказательство теоремы 5 сводится к теореме 4. Действительно, производная $F'_x(M_0)$ получается так: фиксируется $y = y_0$, получается функция от одной переменной x : $z = F(x, y_0)$, и надо найти производную этой функции в точке x_0 . Но при $y = y_0$ $u = g(x, y_0)$ и $v = h(x, y_0)$ будут функциями от одной переменной x , и мы оказываемся в условиях теоремы 4 (роль переменной t играет переменная x). Остается проверить, что и остальные условия теоремы 4 выполнены. Функция f по-прежнему дифференцируема в точке Q_0 , а производные $g'_x(M_0)$, $h'_x(M_0)$ и $F'_x(M_0)$ — это производные функций одной переменной $g(x, y_0)$, $h(x, y_0)$ и $F(x, y_0)$ в точке x_0 . Подставляя эти производные в формулу (7), получаем формулу (9).

Пример 7. Найти частные производные функции

$$z = f(x^3 \cos 5y, \operatorname{arctg}(2x - y)).$$

Здесь задана сложная функция:

$$z = f(u, v), \quad u = x^3 \cos 5y, \quad v = \operatorname{arctg}(2x - y).$$

Производные этой сложной функции вычисляем по формулам (10) и (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 3x^2 \cos 5y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{2}{1 + (2x - y)^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x^3 (-5 \sin 5y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-1}{1 + (2x - y)^2}. \end{aligned}$$

Вычисление вторых и следующих производных ведется по тем же формулам. Надо только помнить, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ — это тоже сложные функции от x и y при тех же промежуточных переменных u и v .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (-5 \sin 5y \cdot x^3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{-1}{1 + (2x - y)^2} \right) (3x^2 \cos 5y) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u} (3x^2 (-5 \sin 5y)) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot (-5 \sin 5y \cdot x^3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{-1}{1 + (2x - y)^2} \right) \frac{2}{1 + (2x - y)^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{2 \cdot 2 (2x - y)}{(1 + (2x - y)^2)^2} \end{aligned}$$

и т. д.

Пользуясь доказанными теоремами, можно установить инвариантность первого дифференциала (как и для функций одной переменной).

Теорема 6. *Дифференциал функции инвариантен, т. е. формула*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

сохраняется и в том случае, когда x и y не являются независимыми переменными.

Пусть $x = g(t, s)$ и $y = h(t, s)$, где t и s — независимые переменные. Мы будем доказывать эту теорему в простейших предположениях: $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial s}$, $\frac{\partial h}{\partial t}$ и $\frac{\partial h}{\partial s}$ непрерывны во всех точках некоторой области D , и потому в них существуют дифференциалы dg и dh , а $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в соответствующих точках, и потому в них существует дифференциал df . Тогда сложная функция $z = f(g(t, s), h(t, s))$ имеет непрерывные $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ в D (см. формулы (10) и (11)), и потому в D существует

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial s} ds.$$

Вычислим $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ по формулам (10) и (11) и подставим сюда:

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt + \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial s} ds \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial s} ds \right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Для того чтобы охарактеризовать скорость изменения функции по выбранному направлению (возрастает или убывает функция в этом направлении и как быстро это происходит), вводится понятие производной функции по направлению. При этом направление задается, как обычно, при помощи вектора.

Определение 6. Производной функции f в точке M_0 по направлению l называется число

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(r_0 + tl^0) - f(r_0)}{t}, \quad (12)$$

где $r_0 = \overline{OM_0}$ и $l^0 = \frac{l}{|l|}$.

Здесь функцию удобнее рассматривать от векторного аргумента $r(x, y)$, а x и y — числовые аргументы f . Наглядный смысл этого определения следующий: если $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = 3$, то, отступив от точки M_0 по направлению вектора l (например) на расстояние 0,02, получим значение функции большее, чем $f(M_0)$, приблизительно на 0,06. Если $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$, то по направлению l функция f возрастает; если $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$, то по направлению l функция f убывает. Выведем формулу для вычисления производной по направлению.

Теорема 7. Если функция f дифференцируема в точке M_0 , то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \sin \alpha, \quad (13)$$

где $l^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Для доказательства введем координаты точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда в формуле (12) $f(r_0 + tl^0) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) = F(t)$, $f(r_0) = F(0)$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(M_0)}{\partial l} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) = \\ &= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \sin \alpha \end{aligned}$$

по теореме 4 — формула (7).

Посмотрим, как меняется производная функции f в точке M_0 в зависимости от направления l , по которому эта производная берется. Для этого введем вектор, который называется *градиентом функции f в точке M_0* :

$$\text{grad } f(M_0) = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right). \quad (14)$$

С помощью этого вектора формулу (13) можно записать в виде

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = l^0 \cdot \text{grad } f(M_0), \quad (15)$$

или, по определению скалярного произведения (см. рис. 66),

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = |\operatorname{grad} f(M_0)| \cos \varphi, \quad (16)$$

так как $|l^0| = 1$. С помощью этой формулы поставленная задача полностью решается.

Изменение направления l равносильно изменению угла φ . Наибольшее значение $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ имеет при $\varphi = 0$, т. е. по направлению градиента функции; в этом направлении функция растет быстрее всего и скорость роста равна $|\operatorname{grad} f(M_0)|$. Наименьшее значение производной при $\varphi = \pi$, т. е. по направлению, противоположному градиенту; в этом направлении функция убывает со скоростью $-|\operatorname{grad} f(M_0)|$. Для всех остальных направлений

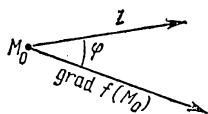


Рис. 66

$$-|\operatorname{grad} f(M_0)| \leq \frac{\partial f(M_0)}{\partial l} \leq |\operatorname{grad} f(M_0)|, \quad (17)$$

причем $\frac{\partial f}{\partial l}$ постепенно убывает от максимального значения до минимального в соответствии с формулой (16).

Пример 8. $f(x, y) = \ln(6x + 7y)$, $M_0(-2, 2)$; а) найдем $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$, где $l = \overline{M_0A}$ и $A(2, -1)$; б) может ли $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = -5$ по какому-нибудь направлению l ?

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} &= \frac{6}{6x + 7y} \Big|_{M_0} = \frac{6}{2} = 3, \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} &= \frac{7}{6x + 7y} \Big|_{M_0} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = \overline{M_0A} &= (4, -3), \quad l^0 = \frac{l}{|l|} = \\ &= \frac{(4, -3)}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \end{aligned}$$

т. е. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ и $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. По формуле (13) получаем

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = 3 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0,3,$$

т. е. в этом направлении функция растет со скоростью 0,3.

б) Из решения пункта а) получаем: $\text{grad } f(M_0) = (3; 3,5)$ и

$$|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{3^2 + (3,5)^2} = \sqrt{21,25} < 5,$$

откуда $-5 < -|\text{grad } f(M_0)|$, и потому нет такого направления l , по которому выполнялось бы равенство $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = -5$.

Пример 9. Докажем, что: а) $\text{grad}(f \pm g) = \text{grad } f \pm \text{grad } g$, б) $\text{grad}|\mathbf{r}| = \mathbf{r}^0$ (\mathbf{r} — радиус-вектор точки, \mathbf{r}^0 — его единичный вектор).

$$\begin{aligned} 1) \text{ grad}(f \pm g) &= (f'_x \pm g'_x)\mathbf{i} + (f'_y \pm g'_y)\mathbf{j} = \\ &= (f'_x\mathbf{i} + f'_y\mathbf{j}) \pm (g'_x\mathbf{i} + g'_y\mathbf{j}) = \text{grad } f \pm \text{grad } g; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) |\mathbf{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{grad}|\mathbf{r}| = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \\ &+ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{r}^0. \end{aligned}$$

§ 3. Приложения дифференциального исчисления

Рассмотрим поверхность S , являющуюся графиком функции f , и точку на этой поверхности $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Если функция f дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0 называется плоскость

$$z = z_0 + f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0). \quad (18)$$

Точка P_0 называется *точкой касания*. Прямая, проходящая через точку P_0 и перпендикулярная к этой касательной плоскости, называется *нормалью к поверхности S в точке P_0* . Ее уравнение имеет вид (см. Приложение, с. 269)

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (19)$$

Поясним это определение. Проведем через точку P_0 линию L на поверхности S — это график некоторой вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (см. Приложение, с. 276). То, что L проходит через точку

P_0 , означает, что $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. А то, что L лежит на поверхности S , означает, что $z(t) = f(x(t), y(t))$ для всех t . Дифференцируя это тождество, получаем

$$z'(t_0) = f'_x(M_0)x'(t_0) + f'_y(M_0)y'(t_0),$$

т. е. вектор $\mathbf{n} = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1)$ и касательный к L в точке P_0 вектор $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ перпендикулярны. Это верно для любой линии L , проходящей на S через P_0 , т. е. касательные ко всем таким линиям в точке P_0 перпендикулярны одному и тому же вектору \mathbf{n} и потому располагаются в одной плоскости — ее уравнение (18).

На плоскости аналогом интервала на прямой служит множество, которое называется областью. Примерами областей могут служить круг без окружности (т. е. окрестность точки), прямоугольник без границы, открытая полуплоскость, вся плоскость и т. п.

Определение 7. Множество G точек плоскости называется *областью*, если выполнены два условия: 1) у любой точки $M \in G$ существует окрестность $U \subset G$;

2) любые две точки G можно соединить гладкой кривой $L \subset G$.

В перечисленных выше примерах любые две точки можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве. А условие 1) выполнено потому, что границы фигур выкинуты. На рис. 67 приведены еще примеры областей.

Докажем признак постоянства функции в области (он аналогичен признаку постоянства функции на интервале).

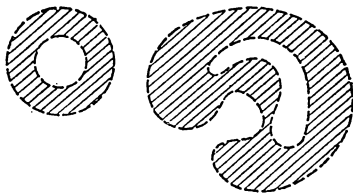


Рис. 67

Теорема 8. Для того чтобы функция f была постоянной в области G , необходимо и достаточно, чтобы $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ на G .

Коротко это формулируют так: на $G: f = \text{const} \Leftrightarrow df = 0$.

Возьмем фиксированную точку $M_0 \in G$ и произвольную точку $M \in G$. Соединим их гладкой кривой $L \subset G$, которая есть график вектор-функции $\mathbf{r}(t)$,

$t \in I$, имеющей производную на I ; $\mathbf{r}(t_0) = \overline{OM_0}$, $t_0 \in I$, (т. е. точка $M_0 \in L$) и $\mathbf{r}(t_1) = \overline{OM}$, $t_1 \in I$ (т. е. $M \in L$). Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, то функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные на I , и потому сложная функция $f(x(t), y(t)) = g(t)$ имеет производную

$$g'(t) = f'_x(x(t), y(t)) x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) y'(t) = 0 \quad (t \in I),$$

так как точка $(x(t), y(t)) \in L \subset G$ при любом $t \in I$, а $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ на G . Следовательно, функция g постоянна на I и потому $g(t_0) = g(t_1)$, т. е. $f(M_0) = g(t_0) = g(t_1) = f(M)$. Этим доказано, что все значения функции f равны числу $f(M_0)$. Обратное следует из того, что производная постоянной равна нулю.

Перейдем теперь к исследованию функции на экстремум. И здесь будет много общего со случаем функции одного переменного.

Теорема 9 (необходимое условие экстремума). Если в точке экстремума существует первая частная производная (по некоторому аргументу), то она равна нулю.

Пусть функция f в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум и существует $f'_x(M_0)$. Тогда существует такая окрестность U точки M_0 , что

$$M \in U \Rightarrow f(M) \leq f(M_0). \quad (20)$$

Функция $g(x) = f(x, y_0)$ от одной переменной x имеет производную $g'(x_0) = f'_x(M_0)$. Точка x_0 есть точка максимума функции g , так как при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ точки $M(x, y_0) \in U$ (рис. 68) и в силу (20) $g(x) = f(x, y_0) \leq f(M_0) = g(x_0)$. Но для функции одной переменной необходимое условие экстремума уже было доказано (теорема 8 из гл. II). Следовательно, $g'(x_0) = 0$, т. е. $f'_x(M_0) = 0$.

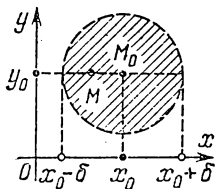


Рис. 68

Таким образом, точки экстремума дифференцируемой функции надо искать только там, где все первые частные производные равны нулю (как и для функции одной переменной). Часто это необходимое условие экстремума записывают так: $df=0$ (см. формулу (5)).

Однако там, где выполнено необходимое условие, экстремума может и не быть (как и для функции одной переменной). Это видно на примере функции $f(x, y) = xy$: $f'_x = y$, $f'_y = x$ и $f'_x(0, 0) = 0$ и $f'_y(0, 0) = 0$. Но точка $O(0, 0)$ — не точка экстремума для f , так как $f(0, 0) = 0$, а в любой окрестности точки O имеются как положительные значения f , так и отрицательные.

Сформулируем теперь достаточные условия экстремума.

Теорема 10. Пусть $f'_x(M_0) = 0$ и $f'_y(M_0) = 0$, а вторые частные производные функции f непрерывны в некоторой окрестности точки M_0 . Введем обозначения: $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$, $D = AC - B^2$. Тогда:

- 1) если $D < 0$, то в точке M_0 нет экстремума f ;
- 2) если $D > 0$, то в точке M_0 — строгий экстремум f : максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$.

Если $D = 0$, то надо проводить исследования с третьими и т. д. частными производными f .

Доказательство этой теоремы сложно (см. Приложение, с. 258).

Пример 10. Исследуем на экстремум функцию

$$z = y^4 - 4y^2 \sqrt{x} + y^2 + 4x + 4y.$$

Она определена и дифференцируема при всех $x > 0$. Поэтому решение начинается с того, что выписывается необходимое условие экстремума:

$$z'_x = -\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + 4 = 0, \quad z'_y = 4y^3 - 8y\sqrt{x} + 2y + 4 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем одно решение $x = 4$, $y = -2$. Следовательно, экстремум может быть только в точке $M_0(4; -2)$. Вычисляем вторые частные производные:

$$z''_{xx} = \frac{y^2}{x\sqrt{x}}, \quad z''_{xy} = -\frac{4y}{\sqrt{x}}, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 8\sqrt{x} + 2.$$

Они непрерывны в окрестности точки M_0 — пользуемся достаточным признаком экстремума (тео-

ремой 10):

$$A = z''_{xx}(M_0) = \frac{(-2)^2}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

$$B = z''_{xy}(M_0) = -\frac{4(-2)}{\sqrt{4}} = 4,$$

$$C = z''_{yy}(M_0) = 12(-2)^2 - 8\sqrt{4} + 2 = 34,$$

$$D = AC - B^2 = \frac{1}{2} \cdot 34 - 4^2 = 1 > 0,$$

следовательно, экстремум есть, $A = 1/2 > 0$ — это минимум.

В примере 24 на с. 66 была рассмотрена плоская задача преломления света. Теперь можно рассмотреть общий случай: некоторая поверхность в пространстве разделяет две среды, скорость света в этих средах разная, требуется найти путь света.

Пример 11. Пусть график положительной и дифференцируемой функции f разбивает первый октант на две части — «верхнюю» и «нижнюю». Точка движется из начала координат (оно принадлежит «нижней» части) в точку $Q(a, b, c)$, принадлежащую «верхней» части. Скорость движущейся точки в «нижней» части постоянна и равна v_1 , и в «верхней» части ее скорость тоже постоянна и равна v_2 , $v_2 \neq v_1$. По какому пути должна двигаться точка, чтобы на весь путь затратить минимум времени?

Путь точки есть ломаная OMQ , где положение точки $M(x, y, f(x, y))$ определяется тем, что на путь затрачивается минимальное время. Запишем время t , затраченное точкой на путь OMQ :

$$t = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + y^2 + f^2(x, y)} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (f(x, y) - c)^2}. \quad (21)$$

Это функция двух переменных, и нас интересует ее минимум. Поскольку она дифференцируема, то в точке минимума ее первые частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x + f \cdot f'_x}{v_1 \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} + \frac{x - a + (f - c) f'_x}{v_2 \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (f-c)^2}} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y + f \cdot f'_y}{v_1 \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} + \frac{y - b + (f - c) \cdot f'_y}{v_2 \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (f-c)^2}} = 0. \quad (23)$$

Пользуясь этими равенствами, докажем, что векторы $\overline{MO}(-x, -y, -f)$, $\overline{MQ}(a-x, b-y, c-f)$ и $N(f'_x, f'_y, -1)$ (нормаль к поверхности в точке M) компланарны. Для этого воспользуемся условием компланарности трех векторов (см. Приложение с. 262):

$$\begin{aligned} (\overline{OM}, \overline{MQ}, N) &= \begin{vmatrix} -x & -y & -f \\ a-x & b-y & c-f \\ f'_x & f'_y & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \begin{vmatrix} x+f \cdot f'_x & y+f \cdot f'_y & 0 \\ x-a+(f-c)f'_x & y-b+(f-c)f'_y & 0 \\ f'_x & f'_y & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (x-a+(f-c)f'_x)(y+f \cdot f'_y) - \\ &\quad - (x+f \cdot f'_x)(y-b+(f-c)f'_y) \stackrel{(2)}{=} 0. \end{aligned}$$

(1) Из первой и второй строчек вынесли общий множитель (-1) ; к первой строке прибавили третью, умноженную на f ; ко второй строке прибавили третью, умноженную на $f-c$;

(2) из (22) и (23) находим числители вторых дробей и подставляем в полученное выражение.

Таким образом, вектор нормали к поверхности (проведенный в точке M) лежит в плоскости точек O , M и Q , т. е. задача сводится к плоскому случаю, который уже решен на с. 66.

Аналогично проводится решение и для отражения света.

Отметим важный вывод: преломление и отражение света происходит так, как будто в некоторой окрестности точки падения света поверхность разделя сред (соответственно — зеркала) заменяется касательной плоскостью к этой поверхности (сравните это с аналогичным фактором для кривых!). С подобными ситуациями вы еще неоднократно встретитесь.

Вы уже встречались с тем, что одно уравнение с двумя переменными задает кривую на плоскости. Например, $x^2 + y^2 = R^2$ — окружность, $x^2 - y^2 = 4$ — гипербола и т. п. Части этих кривых могут рассматриваться как графики функций: верхняя полуокружность есть график функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, нижняя полуокружность есть график функции $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Про эти функции говорят, что они заданы неявно уравнением $x^2 + y^2 = R^2$.

Рассмотрим эту ситуацию в общем случае. Пусть L — множество всех точек (x, y) на плоскости таких, что

$$f(x, y) = 0, \quad (24)$$

где f — некоторая функция двух переменных (простейший случай изображен на рис. 69 и 70). В простейших случаях (практически наиболее важных) L оказывается некоторой линией на плоскости, которую можно разбить на части, являющиеся графиками функций вида $y = g(x)$ или $x = h(y)$ (рис. 71, 72). Эти функции называются неявными, задаваемыми уравнением (24). Если f дифференцируема во всех точках L , то эти неявные функции тоже дифференцируемы (см. КМА). Найти производные этих неявных

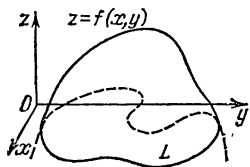


Рис. 69

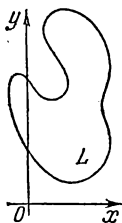


Рис. 70

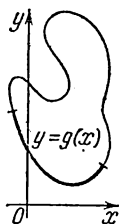


Рис. 71



Рис. 72

функций можно так: во всех точках на графике неявной функции выполнено тождество

$$f(x, y) = 0.$$

Дифференцируя его — это можно делать в силу инвариантности первого дифференциала (здесь нам безразлично — будет ли $y = g(x)$ или $x = h(y)$), — получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \quad (25)$$

откуда находим производную интересующей нас неявной функции:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

(в тех точках, где знаменатель не равен нулю).

Пример 12. Уравнение $y^3x + \sin(x - 2y) = 3$ задает y как функцию от x . Найдём y' . Дифференцируя тождество, получаем

$$(y^3 + \cos(x - 2y)) dx + (3y^2x - 2 \cos(x - 2y)) dy = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x - 2y) + y^3}{2 \cos(x - 2y) - 3y^2x}.$$

Покажем теперь, что $\text{grad } f$ перпендикулярен линии уровня $f = C$. Для этого сначала покажем, что прямая $ax + by + c = 0$ и вектор $\mathbf{n} = (a, b)$ перпендикулярны. Действительно, прямая $ax + by = 0$ параллельна заданной прямой l (так как их угловые коэффициенты равны $-a/b$). На второй прямой лежат точки $O(0, 0)$ и $M(b, -a)$. Поэтому вектор $\overline{OM} = (b, -a)$ параллелен l . Но

$\mathbf{n} \cdot \overline{OM} = ab + b(-a) = 0$, т. е. $\mathbf{n} \perp \overline{OM}$, и потому $\mathbf{n} \perp l$.

Возьмем точку $M_0(x_0, y_0)$ на линии уровня $f = C$, т. е. $f(x_0, y_0) = C$. Некоторая окрестность точки M_0 этой линии уровня рассматривается как график неявной функции (например, y как функция от x). Тогда $y'(x_0) = -f'_x(M_0)/f'_y(M_0)$, и уравнение касательной к линии уровня в точке M_0 имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}(x - x_0),$$

или

$$f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) = 0.$$

Заметим, что это же уравнение получилось бы, если бы мы предположили, что x есть функция от y . Таким образом, получено уравнение касательной к линии уровня $f = C$ в любой точке M_0 . А по доказанному выше эта касательная перпендикулярна вектору $(f'_x(M_0), f'_y(M_0)) = \text{grad } f(M_0)$.

На доказанном факте основан графический способ нахождения точек экстремума — он называется «спуск по градиенту» (поскольку наиболее распространенная задача — отыскание точек минимума). Для исследуемой функции f в окрестности каждой точки можно построить линию уровня и, следовательно, направление $\text{grad } f$ (по перпендикуляру к этой линии). По направлению $-\text{grad } f$ функция убывает быстрее всего. Продвинувшись на некоторое расстояние в этом направлении, мы получаем точку, в которой повторяем описанное выше построение. Этот процесс дает нам последовательность точек (и ломаную с вершинами в этих точках), подводящую (при соблюдении определенных правил) к точке минимума. Для отыскания точек максимума при построении надо продвигаться по направлению $\text{grad } f$.

Пояснить это построение можно таким «географическим» рассуждением. Представим себе график функции f как рельеф местности. Искомая точка минимума — это «дно котловины». Если в некоторой точке на местности находится родник, то ручей из него течет по направлению наиболее крутого склона, т. е. по $-\text{grad } f$, и стекает на «дно котловины». Построение, которое описано выше, дает приблизительно путь ручья.

Как и для функций одной переменной, так и для функций нескольких переменных простейшие приближенные вычисления основаны на приближенном равенстве $\Delta f \approx df$, следующем из формул (3) и (4).

Пример 13. Вычислим приближенно

$$A = \frac{\sqrt[3]{8,06}}{5 - \sqrt[7]{0,93^2}}.$$

При округлении чисел получаем приближенное равенство

$$A \approx \frac{\sqrt[3]{8}}{5 - \sqrt[7]{1^2}} = \frac{1}{2},$$

погрешность которого $\delta = A - \frac{1}{2}$. Введем функцию

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{5 - \sqrt[7]{y^2}}.$$

Тогда $f(8, 1) = \frac{1}{2}$, $f(8,06, 0,93) = A$, и потому

$\delta = \Delta f(8, 1) \approx df(8, 1)$ при $dx = 8,06 - 8 = 0,06$ и $dy = 0,93 - 1 = -0,07$. Вычислим дифференциал:

$$\begin{aligned} df(8, 1) &= \frac{\partial f(8, 1)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(8, 1)}{\partial y} dy = \\ &= \frac{0,06}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2} (5 - \sqrt[7]{1^2})} + \frac{2 \cdot \sqrt[3]{8} (-0,07)}{7 \cdot (5 - \sqrt[7]{1^2})^2 \cdot \sqrt[7]{1^5}} = \\ &= -\frac{0,01}{8} \approx -0,001. \end{aligned}$$

Таким образом, интересующая нас погрешность δ приблизительно равна $-0,001$, т. е. приближенное равенство $A \approx \frac{1}{2}$ написано с точностью до $0,001$ с избытком.

Скажем еще несколько слов о простейших приемах обработки результатов наблюдений. Пусть в определенные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n измерена некоторая величина — получены числа x_1, x_2, \dots, x_n . С математической точки зрения здесь изучается некоторая функция $x = f(t)$. Как подыскать приближенную формулу для этой функции?

Начнем с простейшего случая, когда точки с координатами $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$ расположены на плоскости так, как это показано на рис. 73, т. е. группируются около некоторой

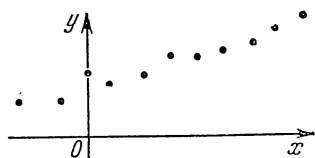


Рис. 73

прямой. Как найти коэффициенты уравнения этой прямой? Самое простое — берется нитка и в натянутом виде прикладывается к рисунку так, чтобы получающаяся прямая «наилучшим образом приближала нарисованные точки». Прочертив получившееся положение прямой, уже с графика снимают значения коэффициентов.

Для начала этого достаточно. Но может случиться, что коэффициенты нужны с большей точностью. Тогда придется обращаться к более точным математическим методам. Для этого прежде всего надо придать точный математический смысл словам, которые выше взяты в кавычки. Это было сделано в начале прошлого века знаменитым немецким математиком К. Ф. Гауссом. Если предполагается получить пря-

мую с уравнением $x = kt + b = l(t)$, то ее положение зависит от коэффициентов k и b . В качестве признака наилучшего положения этой прямой Гаусс предложил считать минимум функции

$$\sum (x_i - l(t_i))^2 = f(k, b). \quad (26)$$

Это функция от двух переменных k и b , и минимум этой функции можно искать с помощью частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \sum 2(x_i - l(t_i))(-t_i) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum 2(x_i - l(t_i))(-1) = 0.$$

Получилась система двух уравнений относительно двух неизвестных k и b :

$$\begin{cases} k \sum t_i^2 + b \sum t_i = \sum x_i t_i \\ k \sum t_i + bn = \sum x_i. \end{cases}$$

Отсюда уже можно найти коэффициенты k и b с любой (разумной в рамках проводимого эксперимента) точностью. Найденные значения обеспечивают выполнение необходимого условия экстремума. Надо, пользуясь достаточным условием, проверить, что найденные значения k и b дают минимум функции f .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = 2 \sum t_i^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial b} = 2 \sum t_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2n.$$

Остается доказать (см. теорему 10), что

$$D = 2 \sum t_i^2 \cdot 2n - (2 \sum t_i)^2 > 0.$$

Для доказательства заметим, что

$$\sum (t_i - u)^2 = \sum t_i^2 - 2u \sum t_i + nu^2$$

есть квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней, и потому его дискриминант

$$(2 \sum t_i)^2 - 4n \cdot \sum t_i^2 < 0, \quad \text{т. е. } D > 0.$$

А так как $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} > 0$, то мы нашли минимум f .

Если расположение точек сложнее, чем на рис. 73, то подбирают подходящую формулу $l(t)$ с параметрами, подставляют ее в выражение (26) и ищут мини-

мум получившейся функции при помощи частных производных по параметрам. Подставив найденные значения параметров в $l(t)$, получаем приближенную формулу для функции, которая изучается в эксперименте.

Самое сложное здесь — подобрать формулу $l(t)$. Для этого существует ряд вспомогательных приемов. Один из них — специальные бумаги. Например, если есть основание подозревать зависимость вида $x = at^p$, то, логарифмируя, получаем $\ln x = p \ln t + \ln a$ — линейную зависимость между $\ln x$ и $\ln t$. Поэтому если по осям координат откладывать $\ln x$ и $\ln t$ (вместо x и t), то точки, полученные в результате эксперимента, будут группироваться около некоторой прямой, т. е. мы оказались в условиях разобранного выше простейшего случая. Поэтому выпускается логарифмическая бумага, на ней по осям координат уже отложены логарифмы чисел (чтобы облегчить работу экспериментатора).

Если есть основание предполагать зависимость вида $x = ae^{kt}$, то после логарифмирования получаем $\ln x = kt + \ln a$, т. е. линейную зависимость между $\ln x$ и t . Поэтому если откладывать по оси абсцисс t , а по оси ординат $\ln x$, то точки, полученные в результате эксперимента, будут группироваться около некоторой прямой — опять мы приходим к уже разобранному ранее случаю. Поэтому выпускается полуполулогарифмическая бумага.

Если и другие специальные бумаги. С ними вы встретитесь в процессе обработки результатов конкретных наблюдений.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

С первых классов школы все привыкли к тому, что в математике все действия в основном парные — прямое и обратное: сложение и вычитание (действие, обратное сложению), умножение и деление (действие, обратное умножению) и т. д. При этом именно наличие обратных действий дает возможность решать наиболее содержательные задачи. Во второй главе рассматривалось действие дифференцирования. Обратное к дифференцированию действие называется интегрированием. Это действие и его приложения изучаются в данной главе.

§ 1. Неопределенный интеграл

Что такое действие дифференцирования? При помощи дифференцирования ищется производная от заданной функции. Следовательно, обратное действие — интегрирование — должно заключаться в следующем: задана производная, требуется найти функцию.

Определение 1. Функция F называется *первообразной* для функции f на интервале I , если для всех $x \in I$ выполнено равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Пример 1. Для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для всех x . В этом случае $I = \mathbf{R}$.

Пример 2. Для функции x^2 первообразной будет функция $\frac{1}{3}x^3$, так как $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ для всех x ; здесь $I = \mathbf{R}$. Для функции $1/\sqrt{1-x^2}$ первообразной будет функция $\arcsin x$, так как $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ для любого $x \in (-1, 1)$.

Пример 3. Пусть точка движется по прямой. Для ее скорости v первообразной будет координата x точки, так как $x'_t = v$.

Заметим еще, что если для функции F установлено равенство

$$dF(x) = f(x) dx, \quad (2)$$

то F — первообразная для f . Действительно, поделив обе части равенства (2) на dx , получаем (см. теорему 13 из гл. II)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

И обратно, из (1), умножая обе его части на dx , получаем (2). Таким образом, при помощи интегрирования функция находится по ее дифференциалу.

Так как первообразная имеет производную на интервале I , то она непрерывна на I . Но верно и обратное утверждение: если функция f непрерывна на интервале I , то она имеет первообразную на I (см. КМА). Далее, в интегральном исчислении, мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Естественно возникает вопрос: как найти все первообразные для заданной функции? Частично ответ дает теорема 1 об общем виде первообразных, а полностью вопрос решается в § 2 (свойство III).

Теорема 1. Если F — первообразная для f на I , то при любой постоянной C сумма

$$F + C \quad (3)$$

есть первообразная для f на I . Любая первообразная для f на I записывается по формуле (3).

Первое утверждение теоремы доказывается проверкой: $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$ на I . Докажем второе утверждение. Пусть Φ — любая первообразная для f на I . Тогда $\Phi'(x) = f(x)$ при любом $x \in I$ и

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

В силу признака постоянства (теорема 10 из гл. II) $\Phi(x) - F(x) = C$ (C — постоянная), откуда следует, что $\Phi(x) = F(x) + C$ при любом $x \in I$.

Определение 2. Любая первообразная для функции f (на интервале I) называется *неопределенным*

интегралом функции f и обозначается так:

$$\int f(x) dx$$

(читается «интеграл эф от икс дэ икс»); $f(x)$ называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, \int — знаком интеграла, x — переменной интегрирования.

Если F — первообразная для f , то в силу теоремы 1

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C — произвольная постоянная). \quad (4)$$

Пример 4. $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$; при этом говорят, что проинтегрирована функция $\cos x$, соответственно — функция x^2 (или: взяты интегралы от $\cos x$ или от x^2).

Вычисление интеграла заданной функции называется *интегрированием* этой функции. Таким образом, интегрирование функции f — это отыскание ее первообразной F . А так как $f = F'$, то интегрирование заключается в том, что по производной F' находят саму функцию F , а с этой задачи и начинается этот параграф.

Из определения неопределенного интеграла следует (в силу формулы (4)), что каждой формуле дифференциального исчисления

$$F'(x) = f(x) \text{ соответствует формула } \int f(x) dx = F(x) + C$$

в интегральном исчислении, так что, в частности, вся таблица производных I—XIV из гл. II может быть переписана в виде таблицы интегралов:

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$\text{III. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\text{IV. } \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\text{V. } \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\text{VI. } \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases}$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = \ln |x + \sqrt{x^2+q}| + C.$$

В этой таблице надо только объяснить знак модуля в формуле II и формулу XI. Так как при $x > 0$ по определению $|x| = x$, то $(\ln |x|)' = (\ln x)' = 1/x$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и

$$\begin{aligned} (\ln |x|)' &= (\ln (-x))' = (1/(-x))(-x)' = \\ &= (1/(-x))(-1) = 1/x. \end{aligned}$$

Этим формула II доказана (для любого интервала, не содержащего 0).

Для доказательства формулы XI достаточно вычислить производную (пользуясь уже доказанной формулой $(\ln |x|)' = 1/x$):

$$\begin{aligned} (\ln |x + \sqrt{x^2+q}|)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+q}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+q}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+q}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+q}}{\sqrt{x^2+q}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+q}}. \end{aligned}$$

Этим формула XI доказана на любом интервале, содержащемся в области определения функции, стоящей под знаком интеграла.

Займемся теперь основными свойствами неопределенных интегралов и правилами их вычисления.

Теорема 2 (свойства неопределенного интеграла).

$$1. \left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x), \quad 3. d \left(\int f(x) \, dx \right) = f(x) \, dx,$$

$$2. \int f'(x) \, dx = f(x) + C, \quad 4. \int df(x) = f(x) + C.$$

Символ $\int g(x) dh(x)$ по определению понимается как $\int g(x) h'(x) dx$, так что 2 и 4, по существу, одно и то же свойство.

Свойство 1 есть непосредственное следствие из определения неопределенного интеграла. В нем утверждается, что какую бы первообразную для f ни взять (см. определение 2), ее производная равна f , а это и есть определение первообразной (определение 1).

Для доказательства второго свойства достаточно заметить, что f есть первообразная для f' (по определению первообразной), а затем сослаться на формулу (4).

После этого, используя свойство 1, доказываем свойство 3:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = \left(\int f(x) dx\right)' dx = f(x) dx.$$

Теорема 3 (правила вычисления неопределенных интегралов).

I. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, k — постоянная;

II. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$;

III. интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции;

IV. замена переменной (подстановка): если f и φ' непрерывны, то

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx, \quad \text{где } x = \varphi(t).$$

При этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) по формуле $x = \varphi(t)$.

Подчеркнем, что равенства типа I—IV, содержащие неопределенные интегралы, пишутся с точностью до постоянного слагаемого, т. е. они означают, что разность между правой и левой частью постоянна на некотором интервале (и не обязательно равна нулю, как для обычных равенств функций).

Для доказательства этих правил достаточно проверить, что справа в формулах I—IV стоят первообразные для подынтегральных функций (выражений) левой части. В силу теоремы 3 имеем:

$$\text{I. } \left(k \int f(x) dx\right)' = k \left(\int f(x) dx\right)' = kf(x);$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx\right)' &= \\ &= \left(\int f(x) dx\right)' \pm \left(\int g(x) dx\right)' = f(x) \pm g(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } d(uv - \int v du) &= d(uv) - d\left(\int v du\right) = \\ &= u dv + v du - v du = u dv. \end{aligned}$$

При доказательстве правила IV надо учесть, что справа стоит сложная функция от t и потому производная правой части по t берется по правилу вычисления производной сложной функции:

$$\left(\int f(x) dx\right)'_t = \left(\int f(x) dx\right)'_x \cdot x'_t = f(x) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Обычно (в простых случаях) не делают подстановку, а пользуются *инвариантностью формул интегрирования*:

$$\text{если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции φ . Действительно,

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) &= \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int f(y) dy = \\ &= F(y) + C = F(\varphi(x)) + C; \end{aligned}$$

(1) делаем замену переменной по формуле $y = \varphi(x)$.

Для вычисления интегралов это свойство имеет основное значение. В силу него с каждой табличной формулой появляется бесконечно много формул интегрирования. Так, наряду с формулой VI в силу инвариантности формул интегрирования верны формулы

$$\int \cos(x^5) d(x^5) = \sin(x^5) + C,$$

$$\int \cos\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) d\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) = \sin\left(\frac{3^x}{\ln x}\right) + C \text{ и т. п.}$$

При вычислении интегралов этим пользуются так:

Пример 5. $\int \frac{4x^3 dx}{1+x^8} = \int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \operatorname{arctg}(x^4) + C.$

При этом говорят, что $4x^3$ подвели под знак дифференциала, а заданный интеграл свели к табличному интегралу для арктангенса.

Подведение под знак дифференциала облегчается таблицей интегралов (с. 114), так как для любой формулы из этой таблицы дифференциал правой части равен подынтегральному выражению в левой части (в силу свойства 3 из теоремы 2). Кроме того, для интегрирования полезны два таких равенства: $dx = d(x+a)$ и $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, a — постоянная. Действительно, $d(x+a) = dx + da = dx$, так как $da = 0$; и $\frac{1}{a} d(ax) = \frac{1}{a} \cdot a dx = dx.$

Пример 6. $\int \frac{dx}{x+7} = \int \frac{d(x+7)}{x+7} = \ln|x+7| + C$
(в силу II).

Пример 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$
 $= \arcsin(x-2) + C$ (в силу X).

Пример 8. $\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{1}{5} d(5x) =$
 $= \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5} \sin 5x + C.$

Пример 9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} =$
 $= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Пример 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$
 $= \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

Пример 11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(a+x) + (a-x)}{(a+x)(a-x)} dx =$

$$= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(x+a)}{x+a} - \int \frac{d(x-a)}{x-a} \right) = \\ = \frac{1}{2a} (\ln|x+a| - \ln|x-a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$$

К явной подстановке же прибегают обычно только тогда, когда производят сложные вычисления.

Пример 12. $\int \frac{x dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-1}} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{dz}{z^2+4} =$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + C.$

(1) Делаем замену переменной по формуле $z = \sqrt{x^2-1}$, тогда $dz = \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $z^2 = x^2-1$, $x^2+3 = z^2+4$, и затем пользуемся примером 9.

Иногда при вычислении интегралов применяются искусственные приемы.

Пример 13. Покажем, что при $a > 0$ верна следующая формула:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Для ее вывода обозначим интеграл, стоящий в левой части равенства, буквой I . Тогда

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{(1)}{=} x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ \stackrel{(2)}{=} x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \\ - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \stackrel{(3)}{=} x \sqrt{a^2 - x^2} - \\ - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(1) Интегрируем по частям: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$,
 $v = x$, $du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

(2) под знаком интеграла в числителе прибавили и вычли a^2 ;

(3) третье слагаемое вычислили, опираясь на пример 10.

Таким образом, получено равенство

$$I = x \sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

откуда

$$2I = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

т. е.

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 14. Аналогично получается формула

$$\int \sqrt{x^2 + q} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + q} + \frac{q}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + q}| + C.$$

Интегралы в примерах 6, 9 и 10 — это обобщение табличных интегралов II, IX и X, обычно и их считают табличными. Интегралы примеров 11, 13 и 14 тоже принято считать табличными. Тем же методом, что и в примере 13, вычисляются интегралы вида

$$\int a^x \sin bx dx \quad \text{и} \quad \int a^x \cos bx dx.$$

Мы не будем углубляться в теорию неопределенного интегрирования, оставив это для практики. Продемонстрируем только несколько приемов интегрирования.

$$\begin{aligned} \text{Пример 15.} \quad & \int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 4} dx = \\ &= \int \frac{x^2 + 2x + 4 - x - 2}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \left(1 - \frac{x + 2}{(x + 1)^2 + 3} \right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{(x + 1) dx}{(x + 1)^2 + 3} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 3} = \\ &= x - \int \frac{(x + 1) d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 3} - \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 3} = \\ &= x - \frac{1}{2} \int \frac{d((x + 1)^2 + 3)}{(x + 1)^2 + 3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{3}} = \\ &= x - \frac{1}{2} \ln((x + 1)^2 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 16.} \quad & \int x \sqrt{x^2 + 3x + 1} dx = \stackrel{(1)}{\int} x \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} dt = \\ &= \int \left(t - \frac{3}{2} \right) \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} dt = \int \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} t dt - \\ &- \frac{3}{2} \int \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \left(t^2 - \frac{5}{4} \right)^{1/2} d \left(t^2 - \frac{5}{4} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{4} \right) \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} \right| \right) = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\left(t^2 - \frac{5}{4} \right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{3t}{4} \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} + \frac{15}{16} \ln \left| t + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}} \right| + C = \frac{1}{3} (x^2 + 3x + 1)^{3/2} - \\
& - \frac{3}{4} \left(x + \frac{3}{2} \right) \sqrt{x^2 + 3x + 1} + \frac{15}{16} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{x^2 + 3x + 1} \right| + C;
\end{aligned}$$

(1) так как $x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}$, делаем подстановку $t = x + \frac{3}{2}$; возвращаемся к переменной x .

Пример 17. $\int \cos^3 x \sin^6 x dx =$

$$\begin{aligned}
& = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cos x dx \stackrel{(1)}{=} \\
& = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\
& = \int \sin^6 x d(\sin x) - \int \sin^8 x d(\sin x) = \\
& = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C;
\end{aligned}$$

(1) подводим $\cos x$ под знак дифференциала, пользуясь тем, что $\cos x dx = d(\sin x)$, и инвариантностью формул интегрирования.

Пример 18. $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{4} \left(\int dx - 2 \int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx \right) = \\
& = \frac{1}{4} \left(x - \int \cos 2x d(2x) + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \\
& = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \int \cos 4x d(4x) \right) = \\
& = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Используют и другие тригонометрические тождества.

Пример 19. $\int \sin 5x \cos 7x dx =$

$$\begin{aligned}
& = \int \frac{1}{2} (\sin 12x - \sin 2x) dx = \\
& = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 12x + C.
\end{aligned}$$

§ 2. Определенный интеграл

При решении многих задач геометрии, естествознания и техники часто встречаются пределы особого рода сумм (интегральных сумм) — интегралы. Познакомимся с самым простым из интегралов — определенным интегралом.

Определение 3. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f . Разобьем отрезок $[a, b]$ точками деления x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на n более мелких отрезков $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$. На каждом из этих отрезков выберем по точке: c_1 — на первом ($a \leq c_1 \leq x_1$), c_2 — на втором ($x_1 \leq c_2 \leq x_2$), c_3 — на третьем ($x_2 \leq c_3 \leq x_3$) и т. д., c_n — на n -ом ($x_{n-1} \leq c_n \leq b$). Длину наибольшего отрезка обозначим λ .

Определенным интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ называется

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1})) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

Выражение, стоящее под знаком предела (сумма слагаемых), называется *интегральной суммой* для функции f по отрезку $[a, b]$.

Коротко говорят: определенный интеграл есть предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$. Числа a и b называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, остальная терминология — как у неопределенного интеграла.

Определение равенства (5) следующее (сравните с определением на с. 19): число I (это интеграл в (5)) называется пределом интегральных сумм — обозначим их короче буквой σ , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|I - \sigma| < \varepsilon$ для каждой интегральной суммы, у которой $\lambda < \delta$.

Если существует интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$, то функция f называется *интегрируемой* на $[a, b]$. Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ (см. «Приложение», с. 248).

Чтобы в формуле (5) не выписывать громоздкие суммы, введено сокращенное обозначение: $x_m - x_{m-1} = \Delta x_m$ (при этом полагают $x_0 = a$ и $x_n = b$), а инте-

гральную сумму записывают так!

$$\sum_{m=1}^n f(c_m) \Delta x_m,$$

читается «сумма по эм от 1 до n эф от c_m умножить на Δx_m ». Символ \sum называется знаком суммы и указывает на то, что надо сложить выписанные за ним слагаемые, давая номеру m последовательно значения 1, 2, 3, ..., n . Если по контексту ясно, для каких номеров m надо складывать слагаемые, то пишут просто $\sum f(c_m) \Delta x_m$.

В этих обозначениях формула (5) записывается проще:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n f(c_m) \Delta x_m. \quad (5')$$

Ниже приведены некоторые задачи (и их решения), на которых сформировалось исторически понятие определенного интеграла.

Пример 20. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции f , отрезком $[a, b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 74). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Покажем, что ее площадь

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

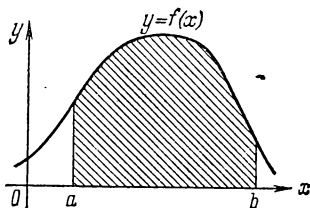


Рис. 74

Прежде чем выводить формулу (6), заметим, что на отрезке $[a, b]$ можно указать такую точку c , что

$$S = f(c)(b - a). \quad (7)$$

Действительно, пусть M — наибольшее значение функции f на $[a, b]$, а m — наименьшее. Проведем прямые $y=M$ и $y=m$ (рис. 75). Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDb$. Поэтому

$$\text{пл. } aABb \geq S \geq \text{пл. } aCDb,$$

или

$$m(b-a) \leq S \leq M(b-a), \text{ т. е. } m \leq \frac{S}{b-a} \leq M.$$

Так как число $S/(b-a)$ заключено между наибольшим и наименьшим значением f на отрезке $[a, b]$ и функция f непрерывна на этом отрезке, то существует такая точка $c \in [a, b]$ (см. «Приложение», с. 247, теорема 6 и рис. 76), что $f(c) = S/(b-a)$, т. е. $S = f(c)(b-a)$.

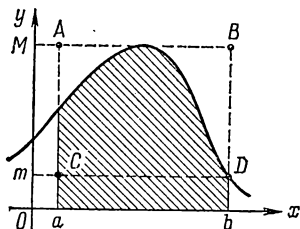


Рис. 75

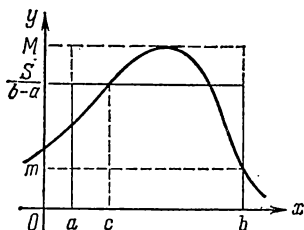


Рис. 76

Геометрически это означает, что у прямоугольника с основанием на отрезке $[a, b]$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции, верхнее основание пересекает график функции.

Перейдем теперь к выводу формулы (6). Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 77. При этом на отрезке $[a, b]$ появятся

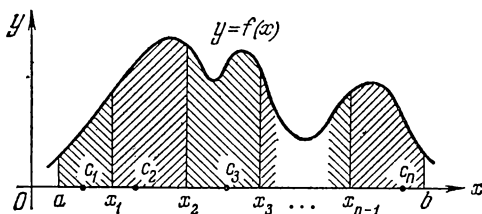


Рис. 77

точки x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . В соответствии с формулой (7), найдем для первой полосы точку $c_1 (a \leq c_1 \leq x_1)$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$. Для второй полосы найдем точку $c_2 (x_1 \leq c_2 \leq x_2)$ такую, что площадь второй полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$, и т. д. — для m -ой полосы най-

дем точку $c_m (x_{m-1} \leq c_m \leq x_m)$, $m = 1, 2, \dots, n$, такую, что площадь m -ой полосы равна $f(c_m)(x_m - x_{m-1}) = f(c_m)\Delta x_m$. Так как площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которые она разбита, то

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots \\ \dots + f(c_n)(b - x_{n-1}) = \sum_{m=1}^n f(c_m)\Delta x_m.$$

Это равенство верно, как бы мы ни разбивали криволинейную трапецию на полосы. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ — получим формулу (6), так как S постоянная и потому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = S$, так что

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n f(c_m)\Delta x_m = \int_a^b f(x) dx,$$

где правая часть написана в силу формулы (5'). Формула (6) доказана.

Пример 21. Покажем, что путь s , пройденный точкой, скорость v которой есть непрерывная функция времени t , т. е. $v = v(t)$, за промежуток времени от t_0 до T , можно записать по формуле (если $v(t) > 0$ на этом промежутке времени)

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt. \quad (8)$$

Прежде чем доказывать формулу (8), заметим, что между моментами времени t_0 и T можно указать такой момент времени τ (греческая буква «тау»), что $s = v(\tau)(T - t_0)$. Действительно, пусть \bar{v} — наибольшая скорость точки за промежуток времени от t_0 до T , а \underline{v} — наименьшая. Тогда

$$\underline{v}(T - t_0) < s < \bar{v}(T - t_0), \text{ т. е. } \underline{v} < \frac{s}{T - t_0} < \bar{v},$$

и поскольку скорость меняется непрерывно (по условию), между t_0 и T найдется момент времени τ такой, что $v(\tau) = \frac{s}{T - t_0}$, откуда следует $s = v(\tau)(T - t_0)$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (8). Разобьем промежуток времени от t_0 до T на n более коротких промежутков: от t_0 до t_1 , от t_1 до t_2 , ...,

от t_{m-1} до t_m ($m = 1, 2, \dots, n$), $t_n = T$. В силу предыдущих рассуждений в каждом промежутке времени от t_{m-1} до t_m можно указать момент времени τ_m такой, что путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_{m-1} до t_m , равен $v(\tau_m)(t_m - t_{m-1}) = v(\tau_m)\Delta t_m$. Тогда

$$s = \sum_{m=1}^n v(\tau_m) \Delta t_m.$$

Это равенство верно, как бы мы ни разбивали промежутки времени от t_0 до T на более короткие промежутки времени. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ (λ — это длина наибольшего промежутка времени, т. е. наибольшее из чисел Δt_m). Поскольку s — постоянная, то $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = s$ и

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n v(\tau_m) \Delta t_m = \int_{t_0}^T v(t) dt,$$

где правая часть написана по формуле (5'). Формула (8) доказана.

В следующем параграфе будет решено еще много задач при помощи определенного интеграла. А сейчас докажем очень простое правило вычисления определенных интегралов.

Теорема 4 (Ньютона — Лейбница). Если $F' = f$ на (a, b) и F непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (9)$$

Для доказательства разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_m , $m = 0, 1, 2, \dots, n$, как в определении 3. Тогда

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \\ &+ F(x_{n-2}) - \dots + F(x_m) - F(x_{m-1}) + \dots \\ &\dots + F(x_1) - F(x_0). \end{aligned}$$

По формуле Лагранжа (гл. II, формула (7)) для каждого $m = 1, 2, \dots, n$ существует точка c_m ($x_{m-1} < c_m < x_m$) такая, что

$$F(x_m) - F(x_{m-1}) = F'(c_m)(x_m - x_{m-1}) = f(c_m)\Delta x_m.$$

Поэтому

$$F(b) - F(a) = \sum_{m=1}^n f(c_m) \Delta x_m$$

при любом выборе точек разбиения x_m . Перейдем в этом равенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$. Так как $F(b) - F(a)$ — постоянная, то $F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (F(b) - F(a))$, и потому

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n f(c_m) \Delta x_m = \int_a^b f(x) dx,$$

где правая часть написана в силу формулы (5'). Теорема доказана.

Для вычислений удобна сокращенная запись

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

С помощью этого обозначения формулу (9) записывают так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (9')$$

Пример 22. Вычислим по формуле Ньютона — Лейбница интеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}.$$

Отметим еще две формулы записи для формулы (9):

$$\int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b \text{ и } \int_a^b dF(x) = F(x) \Big|_a^b. \quad (10)$$

Таким образом, теорема Ньютона — Лейбница сводит вычисление определенных интегралов к вычислению первообразной (т. е. к вычислению неопределенного интеграла).

Перейдем теперь к выводу правил вычисления определенных интегралов. Естественно ожидать (в силу теоремы Ньютона — Лейбница), что эти правила будут аналогичны соответствующим правилам вычисления неопределенных интегралов.

Теорема 5 (правила вычисления определенных интегралов).

$$\text{I. } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k - \text{постоянная}).$$

$$\text{II. } \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

III. Интегрирование по частям: если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

IV. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

где $\varphi(a) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (f , φ и φ' непрерывны на соответствующих отрезках).

I. Пусть $F' = f$, тогда $(kF)' = kF' = kf$ и по формуле (9)

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = \\ &= k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

II. Пусть $F' = f$ и $G' = g$, тогда $(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$, и по (9)

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= (F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a)) = \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

III. По формуле (10) имеем

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b (v du + u dv) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

и, перенося первый интеграл влево, получаем требуемое.

IV. Пусть $F' = f$, тогда $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, и по (9)

$$\begin{aligned} \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

При вычислении определенных интегралов выбор способа вычисления (сделать ли подстановку или проинтегрировать по частям) диктуется теми же самыми соображениями, что и при вычислении неопределенных интегралов.

Пример 23. $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx \stackrel{(1)}{=} x(-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} -$
 $-\int_0^{\pi/2} (-\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) - 0(-\cos 0) +$
 $+ \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$

(1) Интегрируем по частям, положив $u = x$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = dx$ и $v = -\cos x$.

Пример 24.

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} &\stackrel{(1)}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{5/2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \\ &= \sin t \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} - \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

(1) Делаем подстановку $x = \operatorname{tg} t$; новые пределы интегрирования находим из равенств $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Приведем теперь основные свойства определённых интегралов.

I. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \dots,$$

так как интегральные суммы есть числа, не зависящие от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования.

$$\text{II. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \text{ и } \int_a^a f(x) dx = 0. \text{ До сих}$$

пор определенный интеграл рассматривался только при $a < b$ (a — нижний предел интегрирования, b — верхний). Равенства II являются определениями этого интеграла при $a \geq b$. Эти определения удобны, так как при этом сохраняется формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

III. Введем теперь понятие определенного интеграла с переменным верхним пределом: каждому числу x (из промежутка непрерывности функции f , содержащего a) поставим в соответствие число

$$\int_a^x f(t) dt.$$

Этим на промежутке определена функция от x . Эта функция называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Оказывается, что эта функция имеет производную

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x),$$

т. е. определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная для подынтегральной функции (на промежутке ее непрерывности). Дей-

ствительно, если $F' = f$, то по формуле (9)

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

и

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

IV. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Действительно, если $F' = f$, то по формуле (9)

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Это свойство имеет простой геометрический смысл: если $f \geq 0$ на $[a, b]$ и $a \leq c \leq b$, то оно утверждает,

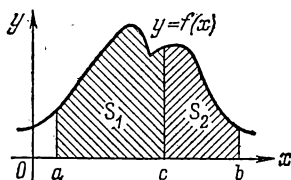


Рис. 78

что площадь S криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 78, равна сумме $S_1 + S_2$ площадей составляющих ее меньших криволинейных трапеций. Действительно, по формуле (6)

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad S_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad S_2 = \int_c^b f(x) dx$$

и

$$\int_a^b f(x) dx = S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Общий вид такой формулы (доказывается по индукции):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx + \dots + \int_{b_{n-1}}^b f(x) dx.$$

V (теорема о среднем). Если функция f непрерывна на отрезке с концами a и b , то между a и b существует такая точка c , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a).$$

Если $F' = f$, то по формуле Лагранжа (гл. II, (7)), между a и b существует такое число c , что $F(b) - F(a) = F'(c) (b - a) = f(c) (b - a)$; поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = f(c) (b - a).$$

Геометрический смысл этой формулы для $f \geq 0$ на $[a, b]$ уже обсуждался при выводе формул (6) и (7).

VI. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. В самом деле, по теореме о среднем (свойство V)

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a) \geq 0,$$

так как $a < c < b$, и следовательно, $f(c) \geq 0$.

VII (интегрирование неравенств). Если $f \leq g$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Так как $g - f \geq 0$ на $[a, b]$, то по свойству VI

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

и, перенося второй интеграл налево, получаем требуемое.

Это свойство тоже имеет простой геометрический смысл: если $f \geq 0$ на $[a, b]$, то оно просто утверждает, что площадь меньшей криволинейной трапеции $aCDb$ (рис. 79) меньше площади большей криволинейной трапеции $aABb$:

$$\int_a^b g(x) dx = \text{пл. } (aABb) > \\ > \text{пл. } (aCDb) = \int_a^b f(x) dx.$$

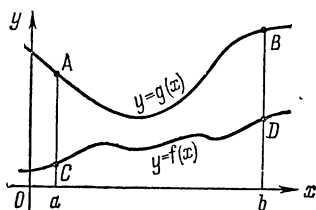


Рис. 79

VIII (теорема об оценке). Если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Так как $f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то в силу свойства VII

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = Mx \Big|_a^b = Mb - Ma = M(b-a).$$

Левая часть неравенства доказывается аналогично.

Это свойство тоже легко проиллюстрировать геометрически: если $f \geq 0$ на $[a, b]$, то оно утверждает, что площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника $aCDb$ (см. рис. 75) и меньше площади прямоугольника $aABb$.

IX. Если $a < b$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ при любом $x \in [a, b]$, то в силу VII

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

что равносильно доказываемому неравенству.

X (геометрический смысл определенного интеграла). Определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиком подынтегральной функции, отрезком

интегрирования и крайними ординатами (т. е. прямыми $x=a$ и $x=b$, если a и b — пределы интегрирования). При этом площади трапеций, расположенных над осью Ox , берутся со знаком плюс, а площади трапеций, расположенных под осью Ox , берутся со знаком минус.

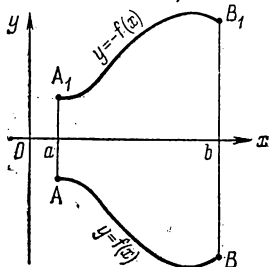


Рис. 80

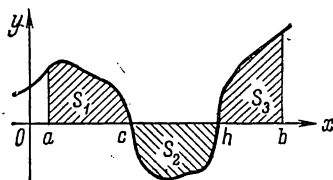


Рис. 81

Рассмотрим сначала случай, когда $f \leq 0$ на $[a, b]$. Тогда $-f \geq 0$ на $[a, b]$. Графики этих функций симметричны относительно оси Ox , и потому площ. $aABb =$ площ. $aA_1B_1b = S$ (рис. 80). По формуле (6)

$$\int_a^b (-f(x)) dx = S, \quad \text{откуда} \quad \int_a^b f(x) dx = -S.$$

В общем случае (рис. 81) по свойству IV

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^h f(x) dx + \int_h^b f(x) dx = \\ &= S_1 - S_2 + S_3, \end{aligned}$$

так как $f \leq 0$ на $[c, h]$, и по предыдущему

$$\int_c^h f(x) dx = -S_2.$$

Рассмотрим некоторые применения этих свойств интеграла.

Пример 25. Покажем, что с точностью до 10^{-5}

$$I = \int_3^{1000} 2^{-x^3} dx \approx 0.$$

Для этого оценим интеграл, пользуясь свойством VIII. Подынтегральная функция $2^{-x^3} > 0$ и убывает; сле-

довательно, свое наибольшее значение M на отрезке $[3; 1000]$ она имеет при $x=3$, т. е. $M=2^{-3^3} = 2^{-27} < 10^{-8}$, и потому

$$0 < I < 10^{-8} (1000 - 3) < 10^{-5}.$$

Пример 26. Покажем, что для любой нечетной функции f

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (11)$$

В силу нечетности f ее график симметричен относительно начала координат (рис. 82). Поэтому площ. OAA = площ. OBB , а по свойству X

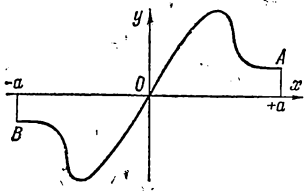


Рис. 82

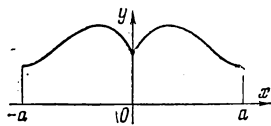


Рис. 83

заданный интеграл равен разности этих площадей. Так, например,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x^5) dx = 0.$$

Аналогично показывается, что для четной функции (рис. 83)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (12)$$

§ 3. Приложения интегрального исчисления

В этом параграфе при помощи интегрального исчисления будет решен ряд задач. При этом основное внимание следует обратить не столько на выведенные формулы, сколько на те методы и способы рассуждений, при помощи которых эти формулы получаются.

Если фигура ограничена графиком функции f (сверху) и g (снизу), прямыми $x=a$ и $x=b$ ($a < b$), то ее площадь

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (13)$$

Для доказательства перенесем параллельно оси ординат фигуру вверх на расстояние m так, чтобы она оказалась выше оси абсцисс (рис. 84 и 85). После

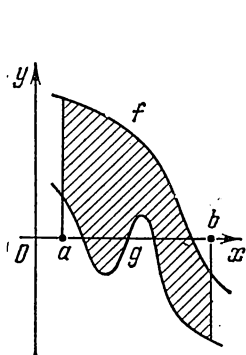


Рис. 84

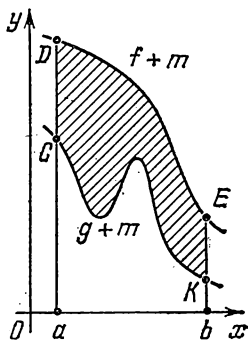


Рис. 85

этого переноса ее ограничивают графики функций $f+m$ и $g+m$. При переносе площадь не меняется, и потому

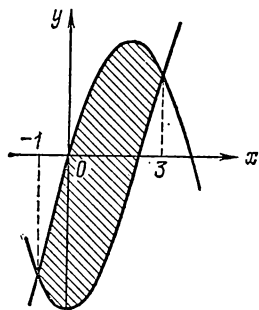


Рис. 86

$$\begin{aligned} S &= \text{пл.}(aDEb) - \text{пл.}(aCKb) = \\ &= \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \\ &= \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m) dx = \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Пример 27. Подсчитаем площадь между параболом $y=4x-x^2$ и $y=x^2-6$ (рис 86). Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим

систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

(эти точки принадлежат и той и другой параболе, и потому их координаты удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол). Из этой системы получаем: $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Тогда по формуле (13) искомая площадь S будет равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 ((4x - x^2) - (x^2 - 6)) dx = \int_{-1}^3 (6 + 4x - 2x^2) dx = \\ &= \left(6x + 2x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^3 = \left(6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 \right) - \\ &\quad - \left(6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} (-1)^3 \right) = 21 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к следующей задаче — определению длины линии. Наглядное представление о длине линии подсказывает нам, что ее длина сколь угодно мало отличается от периметра ломаной, вписанной в эту линию, если все звенья этой ломаной достаточно малы. Эти соображения подводят нас к следующему определению.

Определение 4. *Длиной l линии L называется предел*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} |AA_1A_2 \dots A_{n-1}B| = l, \quad (14)$$

где $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ — вписанная в L ломаная, $|AA_1A_2 \dots A_{n-1}B|$ — периметр этой ломаной, а μ — длина наибольшего из звеньев этой ломаной (рис. 87).

Покажем, что график непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функции f имеет длину

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (15)$$

Впишем в график f ломаную $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ (рис. 88). Ее вершины имеют координаты $A_m(x_m, f(x_m))$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $A_0 = A$, $x_0 = a$, $A_n = B$, $x_n = b$. Подсчитаем периметр этой ломаной.

Длина m -го звена равна

$$|A_m A_{m-1}| = \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (f(x_m) - f(x_{m-1}))^2} \stackrel{(1)}{=} \\ = \sqrt{(\Delta x_m)^2 + (f'(c_m) \Delta x_m)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_m))^2} \Delta x_m.$$

(1) По формуле Лагранжа для каждого $m = 1, 2, \dots, n$ существует число c_m ($x_{m-1} < c_m < x_m$) такое, что

$$f(x_m) - f(x_{m-1}) = f'(c_m)(x_m - x_{m-1}) = f'(c_m) \Delta x_m.$$

Поэтому периметр вписанной ломаной

$$|AA_1A_2 \dots A_{n-1}B| = \sum_{m=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_m))^2} \Delta x_m,$$

т. е. получена интегральная сумма для интеграла в

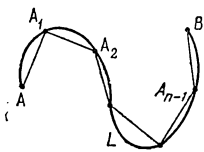


Рис. 87

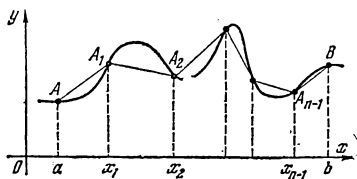


Рис. 88

формуле (15). Следовательно, по определению длины линии (формула (14))

$$l = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_m))^2} \Delta x_m \stackrel{(1)}{=} \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_m))^2} \Delta x_m \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

(1) так как очевидно, что условия $\mu \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ равносильны;

(2) под знаком предела стоит интегральная сумма для этого интеграла.

Пример 28. Найдем длину линии $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$. Так как $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = \sqrt{x}$, то по формуле (15) получаем:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1^{3/2}) = 4 \frac{2}{3}.$$

Рассмотрим график функции f непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ и точку $M(x, f(x))$ на этом графике. Каждому числу $x \in [a, b]$ поставим в соответствие число $l = l(x)$ — длину дуги AM (рис. 89). Этим на отрезке $[a, b]$ задана функция

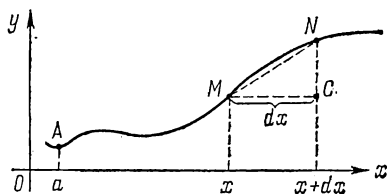


Рис. 89

$l = l(x)$. Дифференциал этой функции dl называется *дифференциалом дуги*. Покажем, что

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \quad (16)$$

Действительно, в силу формулы (15)

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

и потому в силу свойства III определенного интеграла (см. с. 130)

$$dl = l' dx = \left(\int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \right)' dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (17)$$

Возводя в квадрат и учитывая, что $f'(x) dx = dy$, получаем:

$$dl^2 = (1 + (f'(x))^2) dx^2 = dx^2 + (f'(x) dx)^2 = dx^2 + dy^2.$$

Формула (16) имеет простой геометрический смысл — это теорема Пифагора «в малом». В самом деле, если воспользоваться формулой (16) из гл. II, то (см. рис. 89)

$$NC = \Delta y \approx dy, \quad \widetilde{MN} = \Delta l \approx dl. \quad (18)$$

Но по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника MNC

$$|MN|^2 = |MC|^2 + |NC|^2,$$

откуда в силу равенств (18) получаем

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

Для вычисления площади, пути и длины линии были даны полные выводы (формулы (6), (8) и (15)). Но при решении задач, особенно на первых шагах, вычисления ведутся упрощенно: говорят — «в рабочем порядке», а полное решение дается уже потом, если полученное решение представляет интерес. В интегрировании не менее важно овладеть этим видом решения задач. В следующих примерах решение ведется «в рабочем порядке».

Пример 29. Пусть по отрезку $[a, b]$ координатной прямой движется материальная точка под действием силы, проекция $f(x)$ которой на эту прямую есть функция от координаты x движущейся точки. Покажем, что работа этой силы на этом отрезке

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (19)$$

Разобьем весь отрезок $[a, b]$ на n более мелких отрезков — один из них $[x, x + dx]$. Работа силы на этом отрезке приблизительно равна $f(x)dx$, и чем меньше dx , тем это равенство точнее. Работа на всем отрезке $A \approx \sum f(x)dx$, и чем меньше λ , тем это равенство точнее. Если же перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, то получаем равенство (19).

Пример 30. Точка движется по координатной прямой, ее ускорение a есть функция времени t , т. е. $a = a(t)$. Покажем, что скорость точки

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau + v_0, \quad (20)$$

где v_0 — скорость точки в начале пути, т. е. при $t = t_0$: $v_0 = v(t_0)$.

Поскольку $v' = a$, то скорость $v(t)$ есть первообразная для ускорения $a(t)$, и следовательно, по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = v(t) - v(t_0),$$

откуда следует формула (20).

Пример 31. Пусть задано тело с объемом V , про которое известно следующее: имеется такая прямая — назовем ее осью Ox (рис. 90), что какую бы плоскость, перпендикулярную оси Ox , мы ни взяли, нам известна площадь S сечения рассматриваемого тела этой плоскостью.

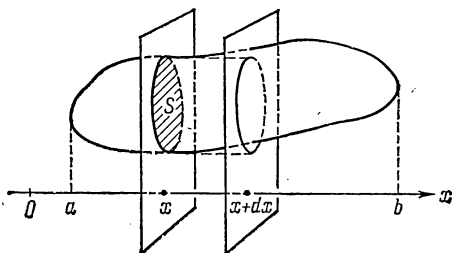


Рис. 90

Каждая такая плоскость пересекает ось Ox в некоторой точке x . Поэтому каждому числу x поставлено в соответствие число $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью (если плоскость не пересекает тело при некотором x , то $S(x) = 0$). Этим определена функция $S = S(x)$. Коротко это формулируют так: задано тело с известными поперечными сечениями.

Покажем, что если $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (21)$$

где отрезок $[a, b]$ есть проекция тела на ось Ox .

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n более мелких отрезков — один из них $[x, x + dx]$. Через его концы проведем плоскости $P_1 \perp Ox$ и $P_2 \perp Ox$. Между этими плоскостями находится часть рассматриваемого тела. Объем этой части приближенно равен $S(x)dx$ и тем точнее, чем меньше dx . Весь объем $V \approx \sum S(x) dx$, и это равенство тем точнее, чем меньше λ . При $\lambda \rightarrow 0$ получаем формулу (21).

Пример 32. Выведем формулу для объема пирамиды, пользуясь формулой (21). Пусть H — высота пирамиды, S — площадь ее основания. Возьмем ось Ox перпендикулярно основанию пирамиды, точка O — вершина пирамиды (рис. 91). Тогда плоскость осно-

вания пирамиды пересекает ось Ox в точке H . Проведем плоскость параллельно основанию пирамиды. Она перпендикулярна оси Ox и пересекает ее в точке $x \in [0, H]$. Фигура, получившаяся в сечении, имеет площадь $S(x)$ и подобна основанию пирамиды. Поэтому

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \text{ откуда } S(x) = \frac{S}{H^2} x^2.$$

Остается воспользоваться формулой (21):

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{SH^3}{3H^2} = \frac{1}{3} SH.$$

Заметим еще, что ничего в приведенных рассуждениях не изменится, если в них всюду слово «пирамида» заменить на слово «конус» (в основании которого лежит произвольная фигура площади S). Поэтому и для конуса объем $V = \frac{1}{3} SH$.

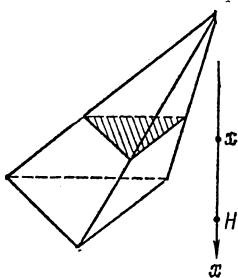


Рис. 91

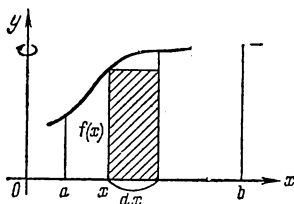


Рис. 92

Иногда приходится вычислять объем тела в другой ситуации.

Пример 33. Криволинейная трапеция ограничена графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f и опирается на этот отрезок (рис. 92), причем $0 < a < b$. Она вращается вокруг оси ординат. Покажем, что объем получившегося тела вращения

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (22)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n более мелких отрезков — один из них $[x, x + dx]$ (рис. 92). При вращении вокруг оси ординат заштрихованный на рис. 92 прямоугольник образует объем, приблизительно равный $2\pi x f(x) dx$, — равенство тем точнее, чем меньше dx . Весь объем $V \approx \sum 2\pi x f(x) dx$, и это равенство тем точнее, чем меньше λ . Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ получаем формулу (22).

Пример 34. Получим формулу для объема шара, пользуясь формулой (22). Шар получается при вращении полукруга вокруг диаметра. Возьмем сначала

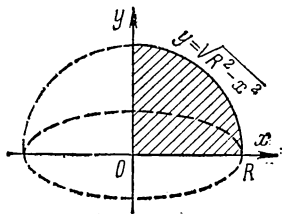


Рис. 93

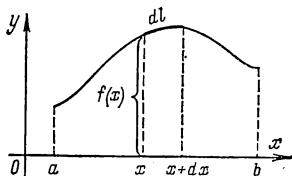


Рис. 94

полушар, который получается при вращении вокруг оси ординат четверти круга: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$ (рис. 93). По формуле (22)

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 2\pi \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\ &= -2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = \\ &= -\frac{4}{3} \pi (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Пример 35. График функции f , положительной и непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, вращается вокруг оси абсцисс. Покажем, что площадь получившейся поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (23)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n более мелких отрезков — один из них $[x, x + dx]$ (рис. 94). Через концы

этого отрезка проведем плоскости, перпендикулярные оси абсцисс; они разобьют поверхность на «полосы» (рис. 95), площадь «полосы» приблизительно равна «ее длине на ширину», т. е. $2\pi f(x) dl$ (рис. 96). Площадь всей поверхности $S \approx \sum 2\pi f(x) dl = \sum 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, и это равенство тем точнее, чем меньше λ . При $\lambda \rightarrow 0$ получаем формулу (23).

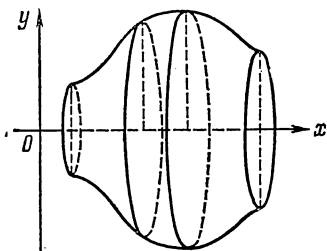


Рис. 95

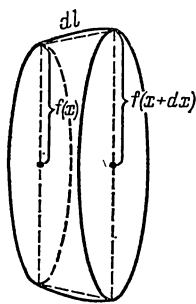


Рис. 96

Пример 36. Парабола $y = 2\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 3$) вращается вокруг оси абсцисс. Подсчитаем площадь получившейся поверхности. Так как $y' = 1/\sqrt{x}$, то по формуле (23) получаем

$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8}{3} \pi (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{56}{3} \pi.$$

Пример 37. Прямой круговой конус, сделанный из однородного материала, вращается вокруг своей геометрической оси с постоянной угловой скоростью ω . Найдем его кинетическую энергию.

Пусть H — высота этого конуса, R — радиус основания и ρ — плотность материала. Точки конуса, отстоящие от оси вращения на расстояние x , образуют поверхность прямого кругового цилиндра радиуса x и высоты y , ось которого совпадает с осью конуса (рис. 97). Разобьем такими цилиндрами весь конус на «слои». Возьмем один такой «слой» (на рис. 97

он показан в разрезе) — его «толщина» dx , а объем приближенно равен произведению площади боковой поверхности цилиндра на толщину стенок — $2\pi xy dx$. Поэтому кинетическая энергия этого «слоя» приближенно равно $\pi\omega^2 x^3 y dx$ (при упрощении подсчета полагаем, что все точки этого «слоя» от оси вращения находятся на расстоянии x). Тогда кинетическая энергия всего конуса $E_k \approx \sum \pi\omega^2 x^3 y dx$, и точность этого равенства тем больше, чем меньше λ (λ — наибольшая из толщин «слоев», на которые разбит конус). При $\lambda \rightarrow 0$ получаем

$$E_k = \int_0^R \pi\omega^2 x^3 y dx,$$

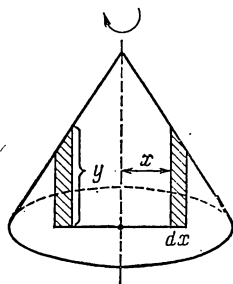


Рис. 97

поскольку наименьшее значение для x равно 0, а наибольшее R . Остается выразить y через x и вычислить интеграл. Из подобия треугольников на рис. 97 получаем

$$\frac{R-x}{R} = \frac{y}{H}, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{H}{R}(R-x),$$

и

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^R \pi\omega^2 x^3 \frac{H}{R}(R-x) dx = \pi\omega^2 \frac{H}{R} \left(R \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^R = \\ &= \frac{1}{20} \pi\omega^2 H R^4 = \frac{3}{20} M R^2 \omega^2, \end{aligned}$$

где M — масса конуса ($M = \frac{1}{3} \pi R^2 H \rho$).

Пример 38. Покажем, что центр тяжести прямого кругового конуса, сделанного из однородного материала, лежит на его геометрической оси на расстоянии три четверти высоты от вершины конуса.

То, что центр тяжести расположен на геометрической оси конуса, следует из однородности материала. Надо только подсчитать, где на оси находится центр тяжести. Напомним основные факты из физики: 1) если тело разбито на части с массами m_i и центрами тяжести в точках A_i , то при нахождении центра тяжести всего тела можно его i -ую часть заменить материальной точкой A_i массы m_i ; 2) для

двух материальных точек центр их тяжести расположен на отрезке, соединяющем эти точки так, что $m_1 d_1 = m_2 d_2$, где m_1 и m_2 — массы этих точек, а d_1 и d_2 — их расстояния от центра тяжести; 3) для n материальных точек их центр тяжести находится так: сначала находим центр тяжести точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 — точку B_2 , далее для точки A_3 с массой m_3 и точки B_2 с массой $m_1 + m_2$ находим их центр тяжести — точку B_3 , затем для точки A_4 с массой m_4 и точки B_3 с массой $m_1 + m_2 + m_3$ находим их центр тяжести — точку B_4 и т. д.

Докажем, что если материальные точки лежат на оси Ox , их массы m_i , координаты x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то координата центра тяжести этой системы точек

$$X = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}. \quad (24)$$

Пусть координата центра тяжести первых двух точек X_2 . Тогда (рис. 98) $m_1(X_2 - x_1) = m_2(x_2 - X_2)$, откуда

$$X_2 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

т. е. при $n = 2$ формула (24) верна. Далее доказательство идет «по индукции»: предположим, что формула верна для $n - 1$ точек

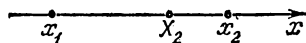


Рис. 98

и докажем, что тогда она верна и для n точек. Обозначим через X_{n-1} координату центра тяжести пер-

вых $n - 1$ точек. Тогда по отмеченным выше правилам надо находить координату центра тяжести точки массы $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ с координатой X_{n-1} и точки массы m_n с координатой x_n (как это сделано выше для X_2):

$$\begin{aligned} X &= \frac{X_{n-1}(m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}) + x_n m_n}{(m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}) + m_n} = \\ &= \frac{\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_{n-1} m_{n-1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}} (m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}) + x_n m_n}{\sum m_i} = \\ &= \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \end{aligned}$$

и формула (24) доказана.

Переходим теперь к конусу. Пусть H — его высота, R — радиус основания, ρ — плотность материала. Введем ось Ox , идущую по геометрической оси конуса и с началом в его вершине (рис. 99). Плоскость основания конуса пересекает ось Ox в точке H .

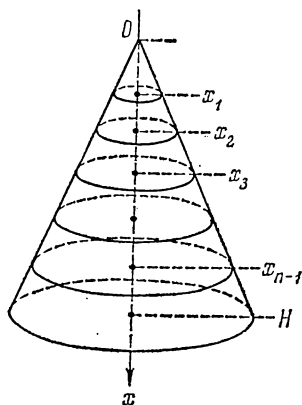


Рис. 99

Разобьем конус на n «слоев» плоскостями, параллельными основанию конуса. Эти плоскости разбивают отрезок $[0, H]$ оси Ox на n более мелких отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Центр тяжести i -го «слоя» —

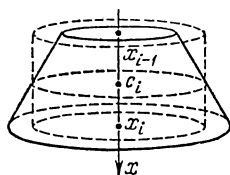


Рис. 100

точка $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ лежит на Ox . Заменим i -й «слой» материальной точкой той же массы ρv_i (v_i — объем этого слоя) с координатой c_i . Тогда по формуле (24) координата центра тяжести конуса

$$X = \frac{\sum c_i \rho v_i}{\sum \rho v_i} = \frac{\sum c_i v_i}{\sum v_i} = \frac{\sum c_i v_i}{V}, \quad (25)$$

где V — объем конуса. Слагаемые в числителе формулы (25) подсчитываем приближенно (рис. 100): i -й слой заменяем цилиндром высоты $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и радиуса $\frac{R}{H} c_i$ (получено из подобия треугольников). Тогда $v_i \approx \pi \left(\frac{R}{H} c_i \right)^2 \Delta x_i$ и $X = \frac{1}{V} \sum c_i \pi \left(\frac{R}{H} c_i \right)^2 \Delta x_i$, и точность этого равенства тем больше, чем меньше λ . При $\lambda \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{V} \int_0^H x \pi \left(\frac{R}{H} x \right)^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} \cdot \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \\ &= \frac{3}{H^3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^H = \frac{3}{4} H. \end{aligned}$$

Во всех приведенных примерах основное внимание надо обратить на метод решения: подсчитываемую величину разбиваем на части, каждую часть подсчитываем с некоторой погрешностью — получается интегральная сумма (в разобранных примерах — для непрерывной функции, и потому существуют соответствующие интегралы), а затем переходим к пределу, за счет чего получается точная формула. Полное решение отличается от решений, проведенных «в рабочем порядке», только тем, что доказывается равенство нулю для предела погрешности проводимых вычислений.

§ 4. Обобщения

До сих пор мы говорили об интегрировании только непрерывных функций. Доказано (см. КМА), что ограниченная на отрезке функция, имеющая на этом отрезке конечное множество точек разрыва, интегрируема на этом отрезке. При этом все основные свойства сохраняются (производная в свойстве III только для точек непрерывности подынтегральной функции). Точки разрыва разбивают отрезок интегрирования на промежутки, на каждом из которых вычисления производятся, как и выше. Это относится и к тому случаю, когда на разных частях отрезка интегрирования функция задается разными формулами.

Пример 39. Вычислим интеграл по отрезку $[0, 4]$ от функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\infty, 1], \\ 2 - x^2 & \text{при } x \in (1, 2), \\ 1/x & \text{при } x \in [2, 10]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x^2) dx + \int_2^4 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \ln x \Big|_2^4 = \frac{1}{6} + \ln 2. \end{aligned}$$

Если промежуток интегрирования бесконечен или функция неограничена на промежутке интегрирова-

ния, то требуется специальное определение таких интегралов — они называются *несобственными*.

Определение 5. Пусть функция f непрерывна на $[a, +\infty)$. Несобственным интегралом функции f от a до $+\infty$ называется число

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если этот предел существует, то интеграл называется *сходящимся*. Если этот предел не существует — интеграл называется *расходящимся*.

Пример 40.
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-4}}{-4} \right|_2^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{-4}}{-4} + \frac{2^{-4}}{4} \right) = \frac{1}{64}, \text{ т. е. интеграл сходится.}$$

Пример 41.
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_3^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 3) = \infty, \text{ т. е. интеграл расходится.}$$

Пример 42. Интеграл $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ расходится, так как $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$ и не существует $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$ (см. график синуса).

Пример 43. При помощи интегрирования по частям вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{b} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Есть и другие варианты несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования — они

определяются аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Пример 44. $\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx =$
 $= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$

Пример 45. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} =$
 $= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Если функция f неограничена в окрестности точки a , то несобственный интеграл с нижним пределом интегрирования a определяется так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx.$$

Пример 46. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0+} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{t}) = 4.$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции f , неограниченной в окрестности точки b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx.$$

Пример 47. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 1-} \int_{-2}^t \frac{dx}{1-x} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 1-} (-\ln(1-t) + \ln 3) = \infty, \text{ т. е. этот интеграл}$
 расходится.

Возможны различные комбинации несобственных интегралов этих типов. При этом заданный интеграл разбивают на сумму нескольких интегралов, пользуясь свойством IV из § 2 так, чтобы каждое слагаемое имело только одну «особенность». Интеграл называется сходящимся, если сходятся все интегралы-слагаемые. Если хоть один из интегралов-слагаемых расходится, то и заданный интеграл называется расходящимся.

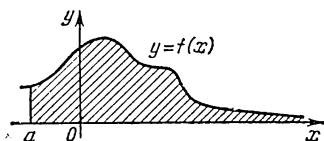


Рис. 101

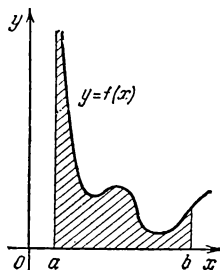


Рис. 102

Геометрический смысл интеграла сохраняется и для несобственных интегралов — это «площадь» криволинейной трапеции, «уходящей в бесконечность», ограниченной графиком подынтегральной функции и промежутком интегрирования (рис. 101 и 102). Для

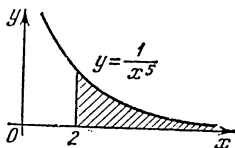


Рис. 103

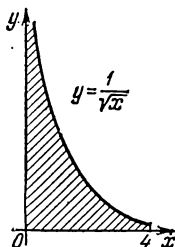


Рис. 104

примера 40 эта площадь равна $1/64$ (рис. 103), в примере 46 эта площадь равна 4 (рис. 104), а в примерах 41 и 47 эта площадь бесконечна.

При решении ряда задач возникает интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Этот несобственный интеграл есть функция от x — она называется «гамма-функция». Доказано (см. КМА), что гамма-функция сходится при $x \geq 0$ и рас-

ходится при $x \leq 0$. Если $x > 1$, то, интегрируя по частям (подстановка верхнего предела означает переход $t \rightarrow +\infty$), получаем

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = -e^{-t} t^{x-1} \Big|_0^{+\infty} + \\ + (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \Gamma(x-1).$$

Пользуясь этим, покажем, что при x натуральных $\Gamma(x) = (x-1)!$, т. е. гамма-функция есть обобщение понятия факториала. При $x = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

При натуральном $x > 1$ пользуемся формулой $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \dots \\ \dots = (x-1)(x-2) \dots 1 \cdot \Gamma(1) = (x-1)!$$

Положив $0! = 1$, мы получим, что равенство

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

выполняется при всех натуральных значениях x ,

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение многих задач естествознания и техники сводится к следующему: требуется найти неизвестную функцию $y = y(x)$, если известно уравнение, содержащее x , $y(x)$, $y'(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями.

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

1. $y' = f(x)$; 2. $x \sin(y') - \ln y = 0$;
3. $y^3 e^x + x^2(y' - y)^5 = 7$.

Определение 2. Функция φ называется решением дифференциального уравнения (1) на интервале I , если для всех $x \in I$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Коротко говорят: функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Пример 4. Для дифференциального уравнения

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \quad (2)$$

функция $y = \sin x$ будет решением, так как $y' = \cos x$ и

$$\cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x = 0$$

для всех x , т. е. интервалом I здесь является все множество действительных чисел. А функция $y = x^2$ не является решением дифференциального уравнения

(2) ни на каком интервале, так как $y' = 2x$ и равенство

$$2x \sin x - x^2 \cos x = 0$$

выполнено только для отдельных значений x — нет такого интервала, на котором равенство выполнялось бы для всех x .

Определение 3. Решить дифференциальное уравнение — это значит найти все решения этого уравнения. Совокупность всех решений заданного дифференциального уравнения называется *общим решением* этого уравнения.

Пример 5. Для дифференциального уравнения

$$y' = f(x)$$

общее решение (см. гл. IV, § 1) дается формулой

$$y = \int f(x) dx.$$

Пример 6. Все решения дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$$

на интервале $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ даются формулой

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Это есть общее решение заданного уравнения.

Далее мы выпишем некоторые типы дифференциальных уравнений и решим их, т. е. найдем их общее решение.

Определение 4. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$g(y) y' = f(x). \quad (3)$$

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (3) дается формулой

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx. \quad (4)$$

Эта формула задает y как функцию от x неявно. Если уравнение (4) решить относительно y , то получим решение явно.

Для доказательства теоремы надо проверить два факта: 1) каждая функция, удовлетворяющая равенству (4) на некотором интервале I есть решение уравнения (3) на интервале I ; 2) каждое решение уравнения (3) на интервале I есть функция, удовлетворяющая уравнению (4) на этом интервале I .

1) Пусть функция φ удовлетворяет уравнению (4) на некотором интервале I . Это значит, что для любого $x \in I$ выполнено равенство

$$\int g(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int f(x) dx,$$

т. е.

$$\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(x) dx.$$

Дифференцируя это тождество на I , получаем $g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x)$, т. е. функция φ есть решение уравнения (3) на I .

2) Пусть функция φ есть решение уравнения (3) на интервале I . Это значит, что для любого $x \in I$ выполнено равенство $g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x)$, и потому

$$\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(x) dx,$$

т. е.

$$\int g(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int f(x) dx,$$

т. е. функция φ удовлетворяет уравнению (4) на I .

Пример 7. Решим дифференциальное уравнение

$$3y^2 y' = 2x(y^3 + 1) \quad (\text{при } y > -1).$$

Перепишав это уравнение в виде

$$\frac{3y^2}{y^3 + 1} \cdot y' = 2x,$$

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Про сделанное преобразование говорят: «разделим переменные». Далее по теореме 1 выписываем общее решение:

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3 + 1} = \int 2x dx, \quad \text{т. е.} \quad \ln(1 + y^3) = x^2 + C.$$

Общее решение получено в неявном виде. Отсюда можно получить общее решение заданного уравнения в явном виде:

$$y = \sqrt[3]{e^{x^2+C} - 1}.$$

Пример 8. Из полного бака вода выливается через донное отверстие за 20 минут. За сколько минут выльется вода из бака, заполненного наполовину?

Прежде всего ясно, что чем меньше осталось воды, тем меньше скорость, с которой она вытекает через донное отверстие. Поэтому верхняя половина бака выливается быстрее, чем нижняя — здесь никаких вычислений не надо. А вот для ответа на вопрос примера нужны вычисления. При этом надо вспомнить, что в физике была формула для скорости вытекания воды: $v = k \sqrt{h}$, где k — постоянный коэффициент (характеризующий вязкость жидкости), а h — высота столба жидкости над отверстием.

Пусть бак имеет форму прямого кругового цилиндра высоты H и площади поперечного сечения S . Площадь донного отверстия s . Если донное отверстие открыто, то вода вытекает, ее уровень понижается со временем, т. е. расстояние x уровня воды от верхнего основания бака (рис. 105) есть функция времени t : $x = x(t)$. Это неизвестная нам функция. Чтобы найти ее, составим дифференциальное уравнение.

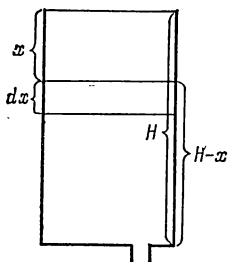


Рис. 105

В момент времени t расстояние уровня воды от верхнего основания бака равно x . За промежуток времени от t до $t + dt$ уровень воды понизился на dx , так как часть воды вытекла. Это количество воды равно Sdx (см. рис. 105) и оно же равно $sk \sqrt{H-x} dt$ ($k \sqrt{H-x}$ — скорость вытекания воды, dt — время вытекания, s — поперечное сечение струи). Следовательно,

$$S dx = sk \sqrt{H-x} dt, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{sk}{S} \sqrt{H-x}$$

или

$$\frac{x'}{\sqrt{H-x}} = \frac{sk}{S},$$

и мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для неизвестной функции $x(t)$. Решаем его:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{H-x}} = \int \frac{sk}{S} dt, \quad -2 \sqrt{H-x} = \frac{sk}{S} t + C. \quad (5)$$

Для определения произвольной постоянной C воспользуемся тем, что отсчет времени мы начинаем при полном баке, т. е. $x=0$ при $t=0$. Подставив эти значения в уравнение (5), находим C :

$$-2\sqrt{H-0} = \frac{sk}{S} \cdot 0 + C, \text{ откуда } C = -2\sqrt{H}.$$

Далее в задаче сказано, что полный бак вытекает за 20 минут, т. е. $x=H$ при $t=20$. Подставив эти значения в уравнение (5) вместе с найденным значением $C = -2\sqrt{H}$, получаем

$$-2\sqrt{H-H} = \frac{sk}{S} 20 - 2\sqrt{H}, \text{ откуда } \frac{sk}{S} = 0,1\sqrt{H}.$$

Теперь можно найти время t_1 , за которое вытекает верхняя половина бака, т. е. $x = \frac{1}{2}H$ при $t=t_1$. Подставив это в (5), имеем

$$-2\sqrt{H - \frac{1}{2}H} = 0,1\sqrt{H} \cdot t_1 - 2\sqrt{H},$$

откуда $t_1 = 10(2 - \sqrt{2})$ (минут).

Следовательно, из бака, наполненного до половины, вода вытекает за время $t_2 = 20 - t_1 = 10\sqrt{2} \approx 14$ (минут).

Пример 9. Найдем динамику развития биологического вида, живущего в «идеальных» условиях.

Состояние популяции (в простейшем понимании — стада) можно охарактеризовать биомассой m этой популяции (т. е. весом всего стада). Биомасса есть функция времени: $m = m(t)$, и мы хотим найти эту неизвестную функцию. Ее производная m' характеризует скорость развития (при $m' > 0$) или вымирания (при $m' < 0$) этой популяции. Считается, что прирост dm биомассы пропорционален промежутку времени dt и биомассе популяции, т. е. $dm = km dt$. Отсюда, учитывая, что $m' = \frac{dm}{dt}$, получается дифференциальное уравнение динамики популяции

$$m' = km. \quad (6)$$

В общем случае коэффициент k также зависит и от времени, и от m . «Идеальные условия» существования будем понимать так: за время наблюдения ко-

Эффект k постоянен, т. е. условия жизни изучаемой популяции не меняются. Тогда уравнение (6) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, и мы находим его общее решение (учитывая то, что по смыслу задачи $m > 0$):

$$\int \frac{dm}{m} = k \int dt, \quad \ln m = kt + C_1 \quad \text{и} \quad m = Ce^{kt}. \quad (7)$$

Для рассматриваемой задачи произвольная постоянная C имеет определенное значение. Его можно найти так: в начале, т. е. при $t = 0$, была какая-то начальная биомасса m_0 . Подставив эти значения в формулу (7), получаем

$$m_0 = Ce^{k \cdot 0}, \quad \text{откуда} \quad C = m_0,$$

после чего формула (7) принимает вид

$$m = m_0 e^{kt}.$$

Мы решали уравнение (6) при $m > 0$, исходя из реального смысла переменной m . В общем же случае формула (7) тоже дает общее решение уравнения (6). Действительно, если функция $m = m(t)$ есть решение уравнения (6), то $(me^{-kt})' = m'e^{-kt} + me^{-kt} \times (-k) = kme^{-kt} - me^{-kt}k = 0$, и по признаку постоянства функции $me^{-kt} = C$, т. е. $m = Ce^{kt}$.

Пример 10. Найдем динамику популяции с учетом среды обитания. Простейшая постановка задачи состоит в следующем: ареал обитания популяции обеспечивает нормальное существование для ее биомассы a — это характеристика среды обитания. Если биомасса популяции $m < a$, то условия жизни хорошие — популяция развивается, и потому $m' > 0$; если $m > a$, то условия жизни популяции плохие — популяция вымирает, и потому $m' < 0$. Перепишем уравнение (6) с учетом отмеченных фактов:

$$m' = b(a - m)m. \quad (8)$$

В общем случае коэффициент $b > 0$ и тоже переменный. Мы рассмотрим простейший случай: b — постоянная. Тогда дифференциальное уравнение (8) — с разделяющимися переменными, решаем его:

$$\int \frac{dm}{bm(a - m)} = \int dt, \quad t \stackrel{(1)}{=} C - \frac{1}{ab} \ln \left| \frac{a}{m} - 1 \right|.$$

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{dm}{m(a-m)} &= \int \frac{dm}{m^2 \left(\frac{a}{m} - 1 \right)} = -\frac{1}{a} \int \frac{d \left(\frac{a}{m} - 1 \right)}{\frac{a}{m} - 1} = \\
 &= -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{m} - 1 \right| + C.
 \end{aligned}$$

Отсюда можно найти m как функцию времени t , но обойдемся без этого — будем строить график функции t от аргумента m . При этом достаточно построить график при $C=0$ — остальные графики получаются при помощи переноса параллельного оси Ot на расстояние C . Прежде всего видно, что при $m=a$ функция не определена и прямая $m=a$ — асимптота.

Из уравнения (8) видно, что $m' > 0$ при $0 < m < a$, т. е. функция $m(t)$ возрастает, а при $m > a$ производная $m' < 0$ — функция $m(t)$ убывает (рис. 106). Полученные кривые дают ясное представление о графике функции $m(t)$ — ниж-

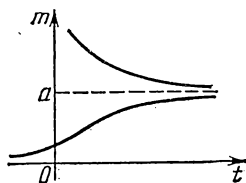


Рис. 106

няя для случая, когда при $t=0$ было $m < a$, а верхняя для случая, когда при $t=0$ было $m > a$.

Заметим еще, что $m=a$ тоже удовлетворяет уравнению (8). Это решение не получается из общего хода интегрирования, так как мы делили на $a-m$ и этим исключили решение $m=a$. Кроме того, здравый смысл подсказывает, что должны наблюдаться затухающие колебания около прямой $m=a$. При нашем решении этого не получилось, поскольку схема процесса была слишком грубой. При более детальной схеме это колебательное явление появляется, но зато дифференциальное уравнение становится очень сложным.

Пример 11. Выясним, почему для каждого вида деревьев, кустарников и трав есть свой характерный (типичный) размер.

Обозначим через x рост дерева. С течением времени t дерево растет, т. е. его рост есть функция времени: $x = x(t)$. Чтобы найти ее, составим дифференциальное уравнение, исходя из следующих соображений: 1) объем дерева увеличивается как ax^3 , 2) поверхность листьев увеличивается как bx^2 , 3) энергию дерево получает только за счет фотосинтеза, т. е. пропорционально поверхности листьев — как cx^2 ,

4) полученная энергия расходуется на: α) затраты энергии на фотосинтез hx^2 ($h < c$), β) увеличение объема $r(x^3)'$ (чем быстрее растет, тем больше энергии надо, поэтому взята производная), γ) перенос веществ из почвы по всему объему px^4 (весь объем ax^3 и по всему объему надо равномерно распределить вещества, поднимая их до высоты x). Приравнивая полученную и израсходованную энергию, получаем:

$$\begin{aligned} cx^2 &= hx^2 + r(x^3)' + px^4, \\ cx^2 &= hx^2 + r \cdot 3x^2x' + px^4, \\ c &= h + 3rx' + px^2, \\ x' &= \lambda(\omega^2 - x^2), \end{aligned}$$

(так как все коэффициенты положительны и $c > h$, то $\lambda = \frac{p}{3r} > 0$, и можно положить $\frac{c-h}{p} = \omega^2$). Получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными — решаем его:

$$\int \frac{dx}{\lambda(\omega^2 - x^2)} = \int dt, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{1}{2\lambda\omega} \ln \left| \frac{\omega + x}{\omega - x} \right| + C.$$

Поскольку рост дерева начинается с нуля, т. е. $x = 0$ при $t = 0$, то, подставив эти значения в решение, находим, что $C = 0$. Итак,

$$t = \frac{1}{2\lambda\omega} \ln \left| \frac{\omega + x}{\omega - x} \right|.$$

Как и в примере 10, не будем находить $x(t)$, а сразу построим график. При этом надо иметь в виду, что при $0 < x < \omega$ производная $x' > 0$ (что видно из дифференциального уравнения), и потому функция $x(t)$ возрастает. При $x = \omega$ функция не определена и прямая $x = \omega$ — асимптота (рис. 107). Из этого рисунка видно, что функция $x(t)$ имеет горизонтальную асимптоту, $x(t) < \omega$ при любом t , и ω определяется коэффициентами c , h , r и p , которые характеризуют данную породу дерева.

Разобранный выше тип дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными — основной.

Есть еще несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение 5. *Однородным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (9)$$

При решении этого уравнения вводят новую неизвестную функцию $u = u(x)$ равенством $y = xu$. Тогда $y' = u + xu'$ и уравнение принимает вид

$$u + xu' = f(u), \quad \text{т. е.} \quad xu' = f(u) - u,$$

и мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, для которого ход решения известен.

Пример 12. Решим дифференциальное уравнение

$$2x^2y' = y^2 + 5x^2.$$

Разделив обе части этого уравнения на x^2 , получаем

$$2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Полагая $y = xu$, получаем дифференциальное уравнение

$$2u + 2xu' = u^2 + 5, \quad 2xu' = u^2 - 2u + 5,$$

$$\frac{2u'}{u^2 - 2u + 5} = \frac{1}{x}.$$

Решаем это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{2 du}{u^2 - 2u + 5} = \int \frac{dx}{x}, \quad \operatorname{arctg} \frac{u-1}{2} = \ln|x| + C,$$

$$u = 1 + 2 \operatorname{tg}(\ln|x| + C), \quad y = x + 2x \operatorname{tg}(\ln|x| + C).$$

Пример 13. Какого вида может быть зеркало у прожектора?

Пример 24 в главе II показывает, что зеркалом у прожектора может быть поверхность, полученная при вращении параболы вокруг ее оси симметрии. Точечный источник света при этом надо поместить в фокусе параболы — тогда отраженные лучи пойдут параллельно оси симметрии параболы. Покажем, что

только парабола годится для получения зеркала прожектора (как поверхности вращения).

Итак, ищется такая функция f при $x > 0$, чтобы при вращении ее графика вокруг оси ординат получилось зеркало прожектора, у которого точечный

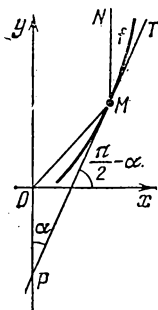


Рис. 108

источник света находится в точке O . Для этого необходимо и достаточно, чтобы в любой точке $M(x, f(x))$ графика функции f выполнялись следующие условия (рис. 108): MT — касательная к графику f в точке касания M , $\widehat{OMP} = \widehat{NMT}$ и $MN \parallel Oy$. Тогда $\alpha = \widehat{OPM} = \widehat{NMT}$ (как соответственные углы при параллельных) и $\widehat{MOy} = 2\alpha$ (как внешний угол $\triangle OPM$). Тогда

$$y' = f'(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$\operatorname{tg} \widehat{MOy} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{x}{y}$ (где $y = f(x)$), и потому

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{y'}}{1 - \left(\frac{1}{y'}\right)^2} = \frac{2y'}{y'^2 - 1},$$

т. е.

$$(y')^2 - 2 \frac{y}{x} y' - 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Если потребовать, чтобы отраженные лучи шли в положительном направлении оси ординат, то $y' > 0$, и следовательно,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Полагая $y = xu$, приходим к уравнению

$$u + xu' = u + \sqrt{u^2 + 1} \quad \text{или} \quad \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{1}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln(u + \sqrt{u^2+1}) = \ln x + \ln C_1,$$

$$u + \sqrt{u^2+1} = C_1 x, \quad \text{откуда} \quad u = \frac{1}{2} \left(C_1 x - \frac{1}{C_1 x} \right),$$

т. е.

$$u = Cx - \frac{1}{4Cx}, \quad y = Cx^2 - \frac{1}{4C}.$$

Таким образом, решением поставленной задачи является множество любых парабол, для которых начало координат — фокус.

Определение 6. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (10)$$

Решается это уравнение *методом вариации произвольной постоянной*, который состоит в следующем. В заданном дифференциальном уравнении (10) заменяем правую часть (функцию q) нулем:

$$y' + py = 0, \quad \text{или} \quad y' = -py. \quad (11)$$

Получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными — решаем его:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p dx, \quad \ln |y| = - \int p dx,$$

$$\text{откуда} \quad |y| = e^{-\int p dx}.$$

Если f — первообразная для p , то это равенство принимает вид

$$|y| = e^{-f+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-f} \quad \text{или} \quad |y| = Ce^{-f}.$$

Так как правая часть этого равенства не обращается в нуль, а y — непрерывная функция (поскольку существует y' , так как y — решение уравнения (10)), то функция y тоже не обращается в нуль и потому сохраняет постоянный знак: или всюду положительна, и тогда $y = Ce^{-f}$, $C > 0$, или всюду отрицательна, и тогда $y = Ce^{-f}$, $C < 0$. Заметим еще, что $y = 0$ — тоже решение уравнения (11). Таким образом, общее

решение уравнения (11) имеет вид

$$y = Ce^{-f}, \quad (12)$$

где C — произвольная постоянная, f — первообразная для p .

Будем теперь считать множитель C в формуле (12) некоторой функцией от x и при помощи такого приема попробуем решить заданное уравнение (10) — в этом и состоит метод вариации (т. е. изменения) произвольной постоянной. Тогда

$$y = C(x)e^{-f(x)}, \quad y' = C'e^{-f} - Cf'e^{-f} = C'e^{-f} - Cpe^{-f};$$

подставляя эти выражения в (10), будем искать $C(x)$: $C'e^{-f} - Cpe^{-f} + pce^{-f} = q$, откуда $C' = qe^f$

$$\text{и } C = \int qe^f dx.$$

Подставив это выражение в (12), получим общее решение (10)

$$y = e^{-f} \int qe^f dx, \quad \text{или } y = e^{-\int p dx} \int qe^{\int p dx} dx. \quad (12')$$

Пример 14. Решим дифференциальное уравнение

$$\sqrt{x^2 + 3} y' = y + x(\sqrt{x^2 + 3} + x).$$

Это линейное дифференциальное уравнение с $p = -1/\sqrt{x^2 + 3}$ и $q = x + x^2/\sqrt{x^2 + 3}$. Решаем его методом вариации произвольной постоянной:

$$\sqrt{x^2 + 3} y' = y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}},$$

$$\ln |y| = \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| + C_1,$$

и (см. (12))

$$y = C(x + \sqrt{x^2 + 3}). \quad (13)$$

Начинаем вариацию произвольной постоянной C :

$$y' = C'(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}\right),$$

подставляем эти выражения для y и y' в заданное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3} C'(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C(\sqrt{x^2 + 3} + x) &= \\ &= C(x + \sqrt{x^2 + 3}) + x(\sqrt{x^2 + 3} + x). \end{aligned}$$

Отсюда после упрощений получаем:

$$\sqrt{x^2+3}C' = x \quad \text{и} \quad C(x) = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + C.$$

Подставив это выражение в (13) вместо C , приходим к общему решению заданного дифференциального уравнения:

$$y = (\sqrt{x^2+3} + C)(x + \sqrt{x^2+3}).$$

Поскольку $dy = y'dx$, то заданное дифференциальное уравнение часто можно бывает записать в виде

$$P dx + Q dy = 0,$$

где P и Q — некоторые функции от двух переменных x и y . Это выражение похоже на дифференциал функции двух переменных. Но не для любого выражения такого типа существует функция $U(x, y)$ такая, что $dU = P dx + Q dy$. Для того чтобы такая функция существовала, достаточно потребовать непрерывности P'_y и Q'_x в некоторой области и выполнения в ней равенства $P'_y = Q'_x$ (см. КМА). Необходимость этого условия следует из того, что $P = U'_x$ и $Q = U'_y$, а тогда $P'_y = U''_{xy}$ и $Q'_x = U''_{yx}$, но непрерывные смешанные производные равны.

Определение 7. Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (14)$$

если существует такая функция $U(x, y)$, что $dU = P dx + Q dy$.

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$U(x, y) = C, \quad C — произвольная постоянная. \quad (15)$$

Действительно, если φ есть решение уравнения (14), то для всех x из некоторого интервала выполнено равенство

$$P(x, \varphi(x)) dx + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx = 0,$$

т. е. $dU(x, \varphi(x)) = 0$, и тогда $U(x, \varphi(x)) = C$, т. е. φ удовлетворяет равенству (15) на этом интервале. И наоборот, если функция φ на некотором интервале

удовлетворяет равенству (15), то выполнены равенства

$$U(x, \varphi(x)) = C, \quad \text{тогда} \quad dU(x, \varphi(x)) = 0,$$

т. е.

$$U'_x dx + U'_y d\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad P dx + Q d\varphi(x) = 0,$$

т. е. функция φ есть решение уравнения (14) на этом интервале.

Пример 15. Решим дифференциальное уравнение

$$(2x + x^2)e^{x-y} dx - x^2e^{x-y} dy = 0. \quad (16)$$

Догадываемся (см. КМА), что здесь $U = x^2e^{x-y}$ (проверьте это!), и потому общее решение уравнения (16) имеет вид

$$x^2e^{x-y} = C, \quad C > 0 \text{ — произвольная постоянная.}$$

Эта формула задает решение уравнения (16) в неявном виде. Из нее можно найти общее решение в явном виде:

$$y = x + \ln x^2 + C_1.$$

§ 2. Некоторые общие сведения из теории

Познакомимся с основными свойствами решений уравнения

$$y' = f(x, y). \quad (17)$$

Прежде всего надо обратить внимание на область определения правой части этого уравнения (т. е. функции f). Мы будем рассматривать только такие уравнения, у которых область определения правой части есть некоторая область G . Например, для уравнения

$$y' = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad (18)$$

область определения правой части есть множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 1$ — это круг радиуса 1 с центром в начале координат.

Если функция φ есть решение уравнения (17), то график этой функции (коротко говорят: график решения дифференциального уравнения) называется *интегральной линией* (или кривой) уравнения (17).

Эта кривая лежит в области G — области определения правой части. Если точка $(x_0, y_0) \in G$, а решение φ таково, что $y_0 = \varphi(x_0)$ (т. е. интегральная кривая проходит через точку (x_0, y_0)), то говорят, что решение проходит через точку (x_0, y_0) .

Сформулируем теперь основное свойство решений уравнения (17).

Теорема 2 (Коши). *Если f и f'_y непрерывны в области G — области определения функции f , то через любую точку области G проходит единственное решение уравнения (17).*

Из теоремы Коши следует, в частности, что решения уравнения (17) не могут ни пересекаться, ни касаться (при указанных условиях). Этих решений бесконечно много, и в области G через каждую точку проходит какое-нибудь решение.

Если решение φ уравнения (17) проходит через точку (x_0, y_0) , то говорят, что φ есть *частное решение уравнения (17), соответствующее начальным условиям $x = x_0, y = y_0$* (или короче: начальным условиям x_0 и y_0). Поэтому теорему Коши можно сформулировать и так:

Теорема 2' (Коши). *Если f и f'_y непрерывны в области G — области определения функции f , то для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in G$ существует единственное решение уравнения (17), соответствующее этим начальным условиям.*

Взглянем теперь на дифференциальные уравнения с геометрической точки зрения. Решение дифференциального уравнения есть линия L — интегральная линия заданного уравнения. Что означает уравнение (17) для этой линии? Интегральная линия уравнения (17) есть график некоторого решения φ этого уравнения, т. е. такой функции, что

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (19)$$

для всех x из некоторого интервала (по определению решения). Возьмем точку (x_0, y_0) на L . Для этой точки равенство (19) принимает вид

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad \text{где } y_0 = \varphi(x_0). \quad (20)$$

Но $\varphi'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к L в точке (x_0, y_0) .

Таким образом, можно себе представить следующую геометрическую картину: берем точку $(x_0, y_0) \in$

$\in G$, через эту точку проходит решение дифференциального уравнения (17); это решение имеет график — интегральную линию L заданного уравнения (рис. 109); у линии L в рассматриваемой точке имеется касательная, угловой коэффициент которой k в силу формулы (20) равен

$$k = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Следовательно, в каждой точке области G можно установить положение касательной к решению

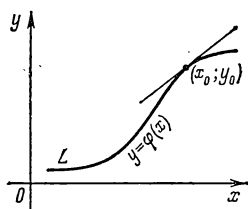


Рис. 109

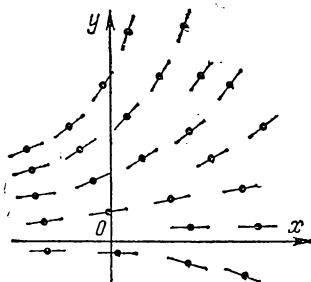


Рис. 110

уравнения (17), проходящему через эту точку, не решая этого уравнения.

Представим себе теперь, что эти касательные проведены для каждой точки области G , но не целиком, а из каждой касательной оставлен только небольшой отрезок, содержащий точку касания. Тогда получится чертеж вроде рис. 110, который называется полем направлений, задаваемым уравнением (17). Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида (17) задает на плоскости в области G поле направлений. А интегральные линии этого уравнения должны быть таковы, чтобы в каждой точке они касались направления, указанного полем в этой точке (рис. 111).

Из этих геометрических соображений около двухсот лет назад Эйлером был предложен метод прибли-

женного решения дифференциальных уравнений (17). В этом методе строится так называемая *ломаная Эйлера*, приближенно дающая интегральную линию.

Делается это так. Берем точку $(x_0, y_0) \in G$. В этой точке уравнением (17) определено некоторое направление (указанное полем направлений). Берем отрезок длины h с этим направлением и левым концом в точке (x_0, y_0) (рис. 112).

Правый конец этого отрезка — точка (x_1, y_1) — пусть принадлежит G . В этой точке проделываем такое же построение: берем отрезок длины h с левым концом в точке (x_1, y_1) , имеющий направление, определяемое в ней полем.

Правый конец этого отрезка — точка (x_2, y_2) . Если $(x_2, y_2) \in G$, то в этой точке проделываем такое же построение — получаем точку (x_3, y_3) и т. д. Это же построение можно продолжить и влево от точки (x_0, y_0) , и полученная линия — ломаная Эйлера — тем ближе к интегральной кривой (см. КМА), чем меньше h . Есть формулы, позволяющие выбрать h таким, чтобы на интересующем нас отрезке отклонение ломаной Эйлера от интегральной кривой не превышало заданной точности вычислений. Таким образом, ломаные Эйлера дают приближенное решение дифференциального уравнения. А точность этого приближенного решения может быть достигнута любая, заранее заданная.

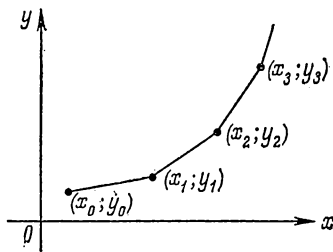


Рис. 112

Если дифференциальное уравнение содержит старшие производные, то оно называется *дифференциальным уравнением высшего порядка*. Говорят, что задано дифференциальное уравнение n -го порядка, если в этом уравнении содержится производная n -го порядка и нет производных большего порядка. Так, уравнение $y \ln(x + y'') + \sin(y' - 5 \operatorname{arctg} y) = 0$ есть дифференциальное уравнение второго порядка; уравнение

$$xe^y + \sin(y''' + y^v) = \sqrt{x^2 + 3}$$

есть дифференциальное уравнение пятого порядка. Почти все, что было сказано о дифференциальных

уравнениях первого порядка, сохраняется для дифференциальных уравнений высших порядков.

Определение 8. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (21)$$

где y — неизвестная функция от x , называется *дифференциальным уравнением n -го порядка*.

Определение 9. Функция φ называется *решением дифференциального уравнения (21)* на интервале I , если для всех $x \in I$ имеем

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Коротко говорят: функция φ обращает уравнение в тождество или φ удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению.

Определение 3 сохраняется для дифференциальных уравнений высших порядков. Простейшим дифференциальным уравнением n -го порядка является уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \quad (22)$$

Пример 16. Решим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = e^{2x}. \quad (23)$$

Так как любая функция, производная которой равна e^{2x} , дается формулой (см. определение 2 из гл. IV)

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1,$$

то для любого решения уравнения (23) будет

$$y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1. \quad (24)$$

Таким образом, мы перешли к уравнению второго порядка — говорят «понижили порядок уравнения». Это рассуждение коротко записывают так:

$$y'' = \int y''' dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1.$$

Из (24) при помощи таких же рассуждений следует

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2$$

и

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \\ = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

В этой формуле содержатся все решения уравнения (23), т. е. мы решили это дифференциальное уравнение, а полученная формула есть общее решение уравнения (23). В ней C_1 , C_2 и C_3 — произвольные постоянные. При этом, чтобы не загромождать вычислений, не пишут $\frac{1}{2} C_1$ и т. п., так как при произвольном C_1 произвольно и $\frac{1}{2} C_1$.

Для того чтобы сформулировать основное свойство решений дифференциального уравнения (21), определим для этого уравнения понятие начальных условий.

Определение 10. *Начальными условиями* для дифференциального уравнения n -го порядка называется набор из $n + 1$ чисел

$$x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}. \quad (25)$$

Определение 11. Если для решения φ дифференциального уравнения n -го порядка выполнены равенства

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y'_0 = \varphi'(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0),$$

то говорят, что *решение* φ дифференциального уравнения *удовлетворяет начальным условиям* (25).

После этого основное свойство решений дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

сохраняется дословно. Надо только иметь в виду, что правая часть дифференциального уравнения — функция f , теперь уже функция от $n + 1$ переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, ее область определения — некоторая область G в $(n + 1)$ -мерном пространстве (см. КМА). Чтобы не усложнять этими понятиями дальнейшие формулировки, будем предполагать, что функция f определена при любых аргументах.

Теорема 3 (Коши). *Если $f, f'_y, f''_y, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны, то для любых начальных условий*

существует единственное решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

соответствующее этим начальным условиям.

Коротко можно сказать так: написанное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет бесконечно много решений и через каждую точку плоскости (x_0, y_0) проходит график некоторого решения; причем это решение можно подобрать таким, что первые $n - 1$ производных этого решения в точке x_0 заданы заранее произвольным образом.

§ 3. Дифференциальные уравнения второго порядка

Простейшими и вместе с тем наиболее важными из дифференциальных уравнений высших порядков являются дифференциальные уравнения второго порядка. В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми общими свойствами решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (26)$$

и найдем общее решение такого уравнения для одного важного частного случая.

Начальными условиями для этого уравнения будет набор из трех чисел: x_0 , y_0 и y'_0 . Решение φ уравнения (26) соответствует этим начальным условиям, если

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad y'_0 = \varphi'(x_0).$$

Геометрически равенства эти означают, что через точку (x_0, y_0) проходит график этого решения — интегральная линия уравнения (26), и касательная к этой линии имеет угловой коэффициент, равный y'_0 .

Основное свойство решений геометрически означает следующее: для любой точки плоскости и для любой невертикальной прямой, проходящей через эту точку, существует решение уравнения (26), график которого проходит через эту точку и касается этой прямой. Такое решение существует только одно. Из этого, в частности, следует, что через каждую точку плоскости (в отличие от дифференциальных уравнений первого порядка) проходит бесконечно много решений — для каждого направления по одному ре-

шению, но касаться они по-прежнему не могут (рис. 113).

Особенно часто приходится иметь дело с *линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами*—это уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (27)$$

где p и q —числа. Если правая часть—функция f —равна нулю, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (28)$$

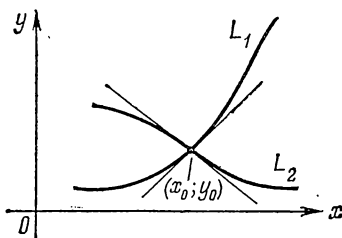


Рис. 113

называют *однородным* линейным дифференциальным уравнением, соответствующим уравнению (27). Если f —не нулевая функция, то уравнение (27) называют *неоднородным*. При решении уравнений (27) и (28) основную роль играет *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (29)$$

т. е. квадратное алгебраическое уравнение относительно неизвестного r . Это уравнение получается из уравнения (28) при замене y'' на r^2 , y' на r и y на 1. Об общем решении уравнения (28) докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (30)$$

1) Если корни характеристического уравнения r_1 и r_2 действительны и различны, то

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad (31)$$

где C_1 и C_2 —произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (30).

2) Если корни характеристического уравнения $r_1 = r_2 = r$ равны, то

$$y = (C_1 x + C_2) e^{rx}, \quad (32)$$

где C_1 и C_2 —произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (30).

3) Если корни характеристического уравнения $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) — мнимые числа, то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (33)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (30).

Поскольку других возможностей для корней характеристического уравнения нет (о комплексных числах см. Приложение, с. 284), то теорема 4 дает решение для уравнения (30).

Прежде чем доказать теорему, приведем несколько примеров, показывающих простоту решения уравнения (30).

Пример 17. Решим дифференциальное уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка — решаем его с помощью теоремы 4. Характеристическое уравнение $r^2 - 2r - 3 = 0$ имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Следовательно, общее решение данного уравнения (см. случай 1)) есть

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 18. Решим дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0$. Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка — решаем его с помощью теоремы 4. Характеристическое уравнение

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

имеет корни $r_{1,2} = -2$. Следовательно, общее решение этого уравнения (см. случай 2)) есть

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}.$$

Пример 19. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка — решаем его с помощью теоремы 4. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 13 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = 2 \pm 3i$. Следовательно, общее решение этого уравнения (см. случай 3)) есть

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Для доказательства теоремы 4 введем новую неизвестную функцию

$$u = ye^{-rx}, \quad \text{т. е.} \quad y = ue^{rx}, \quad (34)$$

где r — некоторое число, которое мы будем подбирать в ходе доказательства так, как нам это будет удобно. Поскольку

$$y' = u'e^{rx} + rue^{rx} \quad \text{и} \quad y'' = u''e^{rx} + 2ru'e^{rx} + r^2ue^{rx},$$

то после подстановки этих производных в уравнение (30) и упрощений получаем дифференциальное уравнение для функции u :

$$u'' + (p + 2r)u' + (r^2 + pr + q)u = 0. \quad (35)$$

Обратите внимание на то, что коэффициент при u в этом уравнении как раз совпадает с левой частью характеристического уравнения (29).

Теперь будем рассматривать случаи, оговоренные в теореме.

1) Корни характеристического уравнения $r_1 \neq r_2$, действительные. Возьмем тогда в формуле (34) $r = r_1$. Уравнение (35) при этом упростится и примет вид

$$u'' + (r_1 - r_2)u' = 0 \quad (36)$$

(коэффициент при u обратился в нуль, так как r_1 есть корень характеристического уравнения). По теореме Виета $p = -(r_1 + r_2)$, и потому $p + 2r_1 = r_1 - r_2$. Перепишем уравнение (36) в иной форме: $(u' + (r_1 - r_2)u)' = 0$, откуда $u' + (r_1 - r_2)u = C$, C — произвольная постоянная в силу признака постоянства функции. Мы получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка (см. формулу (10)) — выписываем его общее решение (формула (12')):

$$\begin{aligned} u &= e^{-(r_1 - r_2)x} \int C e^{(r_1 - r_2)x} dx = \\ &= e^{-(r_1 - r_2)x} \left(\frac{C}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2)x} + C_2 \right) = C_1 + C_2 e^{r_1 x - r_1 x}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \frac{C}{r_1 - r_2}$ и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденное выражение для u в формулу (34), получаем (31):

$$y = (C_1 + C_2 e^{r_2 x - r_1 x}) e^{r_1 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2) Корни характеристического уравнения $r_1=r_2==r$ равны. Подставив это число r в формулу (34), получим упрощенное уравнение (35):

$$u'' = 0.$$

Здесь коэффициент при u обратился в нуль, так как r есть решение характеристического уравнения и, кроме того, по теореме Виета $p = -(r_1 + r_2) = -2r$. Решаем уравнение $u'' = 0$: $u' = C_1$ и $u = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив найденное выражение для u в формулу (34), получаем (32).

3) Корни характеристического уравнения — мнимые числа $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$). В этом случае мы не можем положить в (34) $r = r_1$, так как не знаем, что такое комплексная степень числа e . Поэтому для упрощения уравнения (35) положим в (34) $r = \alpha$. Поскольку решением квадратного уравнения (29) являются числа

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

то $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$, т. е. $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Следовательно, после подстановки $r = \alpha$ в уравнении (35) коэффициент $p + 2\alpha = 0$, а коэффициент при u будет

$$\alpha^2 + p\alpha + q = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q = q - \frac{p^2}{4} = \beta^2,$$

так что уравнение (35) примет вид

$$u'' + \beta^2 u = 0 \quad (\beta \neq 0). \quad (37)$$

Уравнение (37) называется *уравнением колебаний*. Докажем, что его общее решение имеет вид

$$u = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x, \quad C_1 \text{ и } C_2 —$$

произвольные постоянные. (38)

Этим, в силу формулы (34), будет доказана формула (33) и завершено доказательство теоремы 4.

Доказательство формулы (38) разобьем на четыре шага.

I. Покажем сначала, что если функция f есть решение уравнения (37) и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f(x) = 0$

при всех x . В самом деле, если f удовлетворяет уравнению (37), то

$$\begin{aligned} f'' + \beta^2 f &= 0, \\ ((f')^2 + \beta^2 f^2)' &= 2f'f'' + \beta^2 2ff' = 2f'(f'' + \beta^2 f) = 0, \\ (f')^2 + \beta^2 f^2 &= C, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная (по признаку постоянства). Отсюда при $x=0$ получаем $C=0$, так как по условию $f'(0)=f(0)=0$. Но

$$(f')^2 + \beta^2 f^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 f^2 = 0 \Rightarrow f = 0,$$

так как $\beta \neq 0$.

II. Если функция f и g — два решения уравнения (37) такие, что $f(0)=g(0)$ и $f'(0)=g'(0)$, то $f(x)=g(x)$ при всех x . Возьмем функцию $h=f-g$. Так как $h''=f''-g''=-\beta^2 f+\beta^2 g=-\beta^2(f-g)=-\beta^2 h$, то функция h есть решение уравнения (37). Кроме того, $h(0)=f(0)-g(0)=0$ и $h'(0)=f'(0)-g'(0)=0$ по условию. Следовательно, в силу шага I $h(x)=0$ для всех x , т. е. $f(x)=g(x)$ при всех x .

III. Проверим, что функция в (38) есть решение уравнения (37) при любых постоянных C_1 и C_2 . В самом деле,

$$\begin{aligned} u'' &= C_1(-\beta^2 \cos \beta x) + C_2(-\beta^2 \sin \beta x) = \\ &= -\beta^2(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = -\beta^2 u. \end{aligned}$$

IV. Докажем, что для любого решения u уравнения (37) можно подобрать такие числа C_1 и C_2 , что $u = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$. Действительно, функция

$$g(x) = u(0) \cos \beta x + \frac{u'(0)}{\beta} \sin \beta x$$

удовлетворяет уравнению (37) (шаг III) и, кроме того, $g(0)=u(0)$ и $g'(0)=u'(0)$ (проверьте это!). Поэтому в силу шага II $u(x)=g(x)$ при всех x . Этим доказано, что (38) есть общее решение для (37). Доказательство случая 3) и теоремы 4 закончено.

Заметим еще, что формулу (38) можно записывать в виде

$$u = A \cos(\beta x + \varphi), \quad (39)$$

где A и φ — произвольные постоянные. Действительно, положим

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (40)$$

Тогда если $A = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и формула (39) верна — угол φ можно взять любым. Если $A \neq 0$, то точка $\left(\frac{C_1}{A}, -\frac{C_2}{A}\right)$ лежит на единичной окружности, так как

$$\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(-\frac{C_2}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}(C_1^2 + C_2^2) = 1,$$

и потому существует такой угол φ , что

$$\cos \varphi = \frac{C_1}{A} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = -\frac{C_2}{A},$$

откуда

$$C_1 = A \cos \varphi \quad \text{и} \quad C_2 = -A \sin \varphi. \quad (41)$$

Подставив эти значения в (38), получаем (39)

$$u = A \cos \varphi \cos \beta x - A \sin \varphi \sin \beta x = A \cos(\beta x + \varphi)$$

по формуле косинуса суммы.

Рассмотрим задачу о колебаниях, которая объясняет название дифференциального уравнения (37).

Пример 20. На горизонтальной пружине закреплен груз массой m . Исследуем колебания этого груза, если известно, что на груз, отведенный от положения равновесия на l , действует сила сопротивления пружины $F = kl$, направленная к положению равновесия (закон Гука). Чтобы не усложнять вычислений, мы

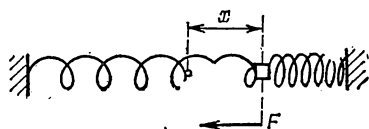


Рис. 114

не будем учитывать остальных сил, действующих на груз, а груз примем за материальную точку.

Возьмем ось Ox по оси пружины (рис. 114) и начало координат поместим в точке равновесия. Тогда положение груза определяется его координатой x , которая меняется со временем t , т. е. x есть функция времени t : $x = x(t)$. Надо найти эту неизвестную функцию и по ней изучить колебания груза.

Напишем уравнение движения груза по второму закону Ньютона:

$$ma = F, \quad (42)$$

где a — ускорение груза, равное x'' (см. гл. II, пример 8), а F — сумма всех сил, действующих на груз,

В нашем случае $F = -kx$, $k > 0$, и знак минус поставлен потому, что сила сопротивления пружины направлена от груза к началу координат: если $x > 0$, то сила направлена в отрицательном направлении оси Ox , если $x < 0$, то сила направлена в положительном направлении оси Ox . Подставляя эти значения для силы и ускорения в уравнение (42), получаем уравнение движения груза

$$mx'' = -kx, \quad \text{или} \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (43)$$

Это уравнение колебания (отсюда название для этого уравнения), и можно, по теореме 4, выписать его общее решение

$$x = C_1 \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2 \sin\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right), \quad (44)$$

или в виде

$$x = A \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi\right). \quad (45)$$

Из этого решения видно, что груз совершает колебания около точки равновесия 0. Они называются гармоническими колебаниями. Из формулы (45) можно получить ряд сведений об этих колебаниях. Их амплитуда равна A . Период этих колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (46)$$

Некоторые выводы о колебании груза можно сделать и без формул, из физических соображений. Например, ясно, что с увеличением массы груза колебания будут происходить медленнее, т. е. период колебаний увеличится. Но как? А формула (46) может объяснить, почему с увеличением груза в 4 раза период колебаний увеличивается только в 2 раза, а не иначе. Точно так же ясно, что с увеличением жесткости пружины (т. е. увеличением k) колебания груза будут протекать быстрее — период колебаний уменьшится. Но как? Опять-таки — формула (46) может объяснить, почему с увеличением жесткости пружины в 4 раза период колебаний уменьшится только в 2 раза.

Ряд задач о движении груза вообще не может быть решен без формулы (45). Из физических соображений ясно, что если вывести груз из положения рав-

новесия до положения x_0 и отпустить, то начнутся колебания с амплитудой x_0 . Это легко получить и из формулы (45). Но что будет, если еще и подтолкнуть груз в ту или иную сторону? Какова будет амплитуда колебаний? Здесь ответ можно получить из формул.

Разберем простейший случай. В начальный момент времени $t=0$ груз находился в положении равновесия, $x(0)=0$, и мы его подтолкнули, т. е. сообщили некоторую скорость v_0 . Начались колебания. Каковы они? Нас интересует такое решение $x(t)$, для которого $x'(0)=v_0$ (см. пример 8 из гл. II). Таким образом, из всех решений (45) уравнения движения (43) надо найти такое, что

$$0 = x(0) = A \cos \varphi \quad \text{и} \quad v_0 = x'(0) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi.$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных A и φ , получаем

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Подставляя найденные значения A и φ в (45), получаем ответ:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что амплитуда колебаний равна $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Пример 21. Рассмотрим задачу о сосуществовании двух видов, которую биологи обычно называют «хищник-жертва». Ситуацию в этой задаче популярно можно объяснить так: на острове растет трава и пасется стадо овец. Овцы поедают и вытаптывают траву — в этой ситуации это вид-хищник, а трава — вид-жертва. Нас интересует динамика этих видов.

Без всяких вычислений ясно, что если овец слишком много, то они поедят и вытопчут слишком много травы. Условия жизни овец ухудшатся и они начнут вымирать, их количество уменьшится. Поэтому поедать и вытаптывать траву они будут меньше — трава разрастется, условия жизни овец улучшатся, и их стадо разрастется. И так пойдет колебательный процесс. Нам надо установить его характеристики.

Биомассу овец обозначим через x — это функция времени t , т. е. $x = x(t)$. Биомассу травы обозначим через y — это тоже функция времени t , т. е. $y = y(t)$. Охарактеризуем условия жизни этих видов. Обозначим через b биомассу овец, а через c — биомассу травы, при которых условия жизни на острове оптимальны. Это означает следующее: если биомасса овец меньше b , то трава разрастается; если биомасса овец больше b , то трава вымирает; если биомасса травы больше c , то стадо овец развивается; если биомасса травы меньше c , то стадо овец вымирает.

Составим дифференциальные уравнения, учитывающие эти условия жизни видов: знак x' должен совпадать со знаком $y - c$, а знак y' — со знаком $b - x$, получаем

$$\begin{cases} x' = k(y - c), \\ y' = m(b - x), \end{cases} \quad (47)$$

где k и m — некоторые положительные коэффициенты. В общем случае это функции от t , x и y . Но мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда k и m — положительные числа.

Для решения этой системы продифференцируем первое уравнение и подставим туда y' из второго, получим

$$x'' = km(b - x) \quad \text{или} \quad (x - b)'' + km(x - b) = 0.$$

Это уравнение колебаний; его общее решение

$$x - b = A \cos(t \sqrt{km} + \varphi),$$

$$\text{т. е.} \quad x = b + A \cos(t \sqrt{km} + \varphi).$$

Отсюда и из первого уравнения системы находим

$$y = c - \sqrt{\frac{m}{k}} A \sin(t \sqrt{km} + \varphi).$$

Особенно наглядно описывается этот процесс, если графики функций $x(t)$ и $y(t)$ изобразить вместе (рис. 115). При этом у функций общий период, а их графики сдвинуты на четверть периода, и каждый график «колеблется около своего оптимального значения» — график $x(t)$ около значения b , а график $y(t)$ — около значения c .

Посмотрим еще, какова здесь роль управления, т. е. какое влияние в этой экологической системе мо-

жет оказать человек. В простейшем случае вмешательство здесь может быть таким: в начальный момент времени $t=0$ завезено определенное количество овец с биомассой $x_0 = x(0)$ и оставлено на острове

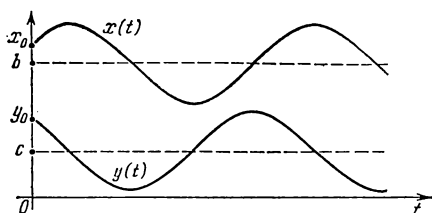


Рис. 115

определенное количество травы с биомассой $y_0 = y(0)$. Этими числами x_0 и y_0 (начальными условиями) уже определяется амплитуда колебаний. Действительно, из формул для x и y при $t=0$ имеем:

$$x_0 - b = A \cos \varphi, \quad y_0 - c = -\sqrt{\frac{m}{k}} A \sin \varphi,$$

откуда

$$A = \sqrt{(x_0 - b)^2 + \frac{k}{m} (y_0 - c)^2}.$$

Из этого выражения видно, что при больших разностях $|x_0 - b|$ и $|y_0 - c|$ амплитуда A может оказаться настолько большой, что $\sqrt{\frac{m}{k}} A > c$, а это значит, что в некоторый момент времени вся трава окажется уничтоженной, а вслед за этим погибнут и овцы. Это говорит о том, насколько осторожным должно быть вмешательство.

Перейдем теперь к решению неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 5. Если \bar{y} — решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, а Y — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, то $Y + \bar{y}$ есть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Сначала покажем, что $Y + \bar{y}$ есть решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

(см. формулы (27) и (28)):

$$(Y + \bar{y})'' + p(Y + \bar{y})' + q(Y + \bar{y}) = \\ = (Y'' + pY' + qY) + (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) = f(x),$$

так как $Y'' + pY' + qY = 0$, поскольку Y — решение уравнения (28), а $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = f(x)$, так как \bar{y} — решение уравнения (27).

Покажем теперь, что $Y + \bar{y}$ — общее решение уравнения (27). Пусть y — любое решение уравнения (27). Тогда

$$(y - \bar{y})'' + p(y - \bar{y})' + q(y - \bar{y}) = \\ = (y'' + py' + qy) - (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) = f(x) - f(x) = 0,$$

т. е. $y - \bar{y}$ есть решение однородного уравнения (28) и потому получается из общего решения Y при некотором подборе произвольных постоянных $C_1 = C_1^*$ и $C_2 = C_2^*$ (напомним, что Y записывается по формулам (31), (32) или (33), которые содержат произвольные постоянные C_1 и C_2). Следовательно, $y - \bar{y} = Y$, откуда $y = Y + \bar{y}$.

В ряде наиболее важных для практики случаев решение \bar{y} находится методом подбора. Как это делается, покажем на примерах.

Пример 22. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}. \quad (48)$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad (49)$$

его характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$ имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, так что общее решение однородного уравнения (49) есть

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Подбор решения \bar{y} неоднородного уравнения (48) делается из следующих соображений. Производные от Ae^{-x} — снова функции того же вида. Попробуем подобрать коэффициент A так, чтобы функция

$$\bar{y} = Ae^{-x} \quad (50)$$

удовлетворяла заданному уравнению (48). Вычислим ее производные:

$$\bar{y}' = -Ae^{-x}, \quad \bar{y}'' = Ae^{-x}$$

и подставим их в уравнение (48): $Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + + 2Ae^{-x} = e^{-x}$, или $6Ae^{-x} = e^{-x}$, откуда $A = 1/6$. Подставляя найденное значение A в (50), получаем

$$\bar{y} = \frac{1}{6} e^{-x}.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения (48) будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-x}.$$

Обратите внимание на то, что решение \bar{y} искалось в том же виде, что и правая часть уравнения (48). Этот прием применим и в тех случаях, когда правая часть заданного уравнения (типа (27)) есть многочлен или линейная комбинация синусов и косинусов.

Пример 23. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 169 \sin 3x.$$

Решаем характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$: $r_{1,2} = 2$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = (C_1 x + C_2) e^{2x}.$$

Решение \bar{y} заданного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = A \cos 3x + B \sin 3x,$$

где A и B — неопределенные коэффициенты, и их надо подобрать так, чтобы \bar{y} было решением заданного уравнения (обратите внимание на то, что в \bar{y} входят синус и косинус одного и того же аргумента, хотя в правой части уравнения — только синус). Для этого находим производные

$$\bar{y}' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x,$$

$$\bar{y}'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$$

и подставляем их в заданное уравнение:

$$(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x) - 4(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + + 4(A \cos 3x + B \sin 3x) = 169 \sin 3x.$$

Это равенство должно быть тождеством. Для этого достаточно, чтобы коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$ слева и справа были равны — это дает систему двух

уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B :

$$\begin{cases} 0 = -5A - 12B, \\ 169 = 12A - 5B. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 12$ и $B = -5$. Следовательно,

$$\bar{y} = 12 \cos 3x - 5 \sin 3x,$$

а общее решение заданного уравнения

$$y = (C_1 x + C_2) e^{2x} + 12 \cos 3x - 5 \sin 3x.$$

Пример 24. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 5y = 3,8 - 10x^2.$$

Его характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 5 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = -2 \pm i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Правая часть заданного уравнения есть многочлен второй степени, и потому \bar{y} ищем в виде многочлена второй степени:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C,$$

где A , B и C — неопределенные коэффициенты. Их надо подобрать так, чтобы функция \bar{y} была решением заданного уравнения, т. е. чтобы при подстановке \bar{y} в уравнение получилось тождество. Находим производные

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A$$

и подставляем их в заданное уравнение:

$$2A + 4(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 3,8 - 10x^2.$$

Это равенство является тождеством, если коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа равны, — это дает систему уравнений, из которых находим A , B и C :

$$\begin{cases} 5A = -10, \\ 8A + 5B = 0, \\ 2A + 4B + 5C = 3,8. \end{cases}$$

Ее решение: $A = -2$, $B = 3,2$ и $C = -1$. Следовательно,

$$\bar{y} = -2x^2 + 3,2x - 1,$$

а общее решение заданного уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2x^2 + 3,2x - 1.$$

Доказано (см. КМА), что этот прием всегда дает решение, кроме одного особого случая, который называется *случаем резонанса* (объяснение этого названия будет приведено ниже). Этот случай состоит в том, что решение \bar{y} может содержаться в Y (и тогда при подстановке \bar{y} в левую часть уравнения получается нуль, а не правая часть). Тогда (в этом состоит дополнение к методу подбора) написанное для \bar{y} выражение надо домножить еще на x .

Пример 25. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' + y = \sin x. \quad (51)$$

Его характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Если написать \bar{y} по образцу примера 23, то получится Y — это случай резонанса. Поэтому решение \bar{y} ищем в виде

$$\bar{y} = x(A \cos x + B \sin x).$$

Так как

$$\bar{y}'' = -x(A \cos x + B \sin x) + 2(-A \sin x + B \cos x),$$

то после подстановки \bar{y} в уравнение (51) и упрощений получаем:

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x.$$

Это равенство выполняется для всех x , если $B = 0$ и $A = -1/2$. Следовательно: $\bar{y} = -\frac{x}{2} \cos x$, а общее решение уравнения (51)

$$y = \left(C_1 - \frac{x}{2}\right) \cos x + C_2 \sin x.$$

Разберем еще один пример, который поясняет название случая резонанса.

Пример 26. Добавим в примере 20 «раскачивающую силу» $F_1 = \sin t$. Тогда, как известно из физики, если период колебания груза (собственные колебания) и период «раскачивающей силы» совпадают, то наступает явление резонанса — амплитуда колебаний груза неограниченно растет (хотя раскачивающая сила может быть и очень маленькой).

Посмотрим, как это сказывается на уравнении движения груза и его решении. Сохраним все обозначения примера 20. Тогда в уравнении (42) $F = -kx + \sin t$, и уравнение движения груза примет вид

$$mx'' = -kx + \sin t.$$

Чтобы не усложнять вычислений, возьмем $m = k = 1$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$x'' + x = \sin t,$$

а общее решение этого уравнения уже найдено в примере 25:

$$x = \left(C_1 - \frac{t}{2}\right) \cos t + C_1 \sin t. \quad (52)$$

Собственные колебания груза, возникающие при отсутствии «раскачивающей силы», получаются из соответствующего однородного уравнения — это Y в примере 20, т. е. $C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Период этих колебаний 2π , и он совпал с периодом колебаний «раскачивающей силы» $F_1 = \sin t$. Таким образом, мы имеем дело со случаем резонанса. Из формулы (52) видно, что амплитуда колебаний груза неограниченно растет вместе со временем t .

Приведем еще одну теорему, помогающую подбирать решение \bar{y} неоднородного дифференциального уравнения (28).

Теорема 6. Если \bar{y}_1 и \bar{y}_2 — решения (соответственно) уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ — решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \quad (53)$$

По условию теоремы для всех x из некоторого интервала I выполнены равенства (не забудем, что \bar{y}_1 и \bar{y}_2 — функции от x):

$$\bar{y}_1'' + p\bar{y}_1' + q\bar{y}_1 = f_1(x) \text{ и } \bar{y}_2'' + p\bar{y}_2' + q\bar{y}_2 = f_2(x).$$

Поскольку $\bar{y}' = \bar{y}'_1 + \bar{y}'_2$ и $\bar{y}'' = \bar{y}''_1 + \bar{y}''_2$, то подстановка \bar{y} в левую часть уравнения (53) дает: для всех $x \in I$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} (\bar{y}''_1 + \bar{y}''_2) + p(\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2) + q(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \\ = (\bar{y}''_1 + p\bar{y}'_1 + q\bar{y}_1) + (\bar{y}''_2 + p\bar{y}'_2 + q\bar{y}_2) = f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

т. е. $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ есть решение уравнения (53) на интервале I .

Пример 27. Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 2y = 4e^{-2x} - 2x^3. \quad (54)$$

Общее решение однородного уравнения

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Методом подбора ищем решение уравнения

$$y'' - y' - 2y = 4e^{2x}. \quad (55)$$

Подставляем в (55) $\bar{y}_1 = Ae^{-2x}$, $\bar{y}'_1 = -2Ae^{-2x}$, $\bar{y}''_1 = 4Ae^{-2x}$:

$$4Ae^{-2x} + 2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} = 4e^{-2x}.$$

Отсюда $A = 1$ и $\bar{y}_1 = e^{-2x}$. Методом подбора ищем решение второго уравнения

$$y'' - y' - 2y = -2x^3. \quad (56)$$

$\bar{y}_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $\bar{y}'_2 = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $\bar{y}''_2 = 6Ax + 2B$, подставляем в (56):

$$\begin{aligned} (6xA + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) - \\ - 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = -2x^3, \end{aligned}$$

приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} -2A = -2, \\ -3A - 2B = 0, \\ 6A - 2B - 2C = 0, \\ 2B - C - 2D = 0, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -1,5$, $C = 4,5$, $D = -3,75$ и

$$\bar{y}_2 = x^3 - 1,5x^2 + 4,5x - 3,75.$$

Окончательно общее решение уравнения (54):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{-2x} + x^3 - 1,5x^2 + 4,5x - 3,75.$$

В более сложных случаях пользуются или некоторыми другими методами подбора или *вариацией произвольных постоянных* (см. КМА).

Аналогично решаются линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (см. КМА).

Пример 24. Решим дифференциальное уравнение

$$y^{IV} - 3y'' - 4y = 14e^{2x}.$$

Его характеристическое уравнение $r^4 - 3r^2 - 4 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm 2$, $r_{3,4} = \pm i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Решение \bar{y} неоднородного уравнения ищем методом подбора. Функция $y = Ae^{2x}$ — решение однородного уравнения (см. У при $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_1 = A$). Следовательно, это случай резонанса, и потому \bar{y} ищем в виде

$$\bar{y} = Axe^{2x}.$$

Тогда

$$\bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \text{ и } \bar{y}^{IV} = 32Ae^{2x} + 16Axe^{2x};$$

подставляем \bar{y} , \bar{y}'' и \bar{y}^{IV} в заданное уравнение:

$$(32Ae^{2x} + 16Axe^{2x}) - 3(4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 4Axe^{2x} = 14e^{2x},$$

откуда, после преобразований, получаем $A = 0,7$. Таким образом,

$$\bar{y} = 0,7xe^{2x},$$

и общее решение заданного уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + 0,7xe^{2x}.$$

Решение ряда задач сводится к сложению бесконечного числа слагаемых, т. е. ставится проблема обобщения понятия суммы на этот случай. При этом особое внимание надо обратить на то, что это понятие вводится только для членов последовательности. Ни для какого другого бесконечного множества слагаемых сумма не определяется. Для этого обобщения некоторые свойства обычных сумм сохраняются, а другие пропадают.

§ 1. Общие факты

Сложить бесконечное число слагаемых так, как это делалось для конечных сумм, — сначала сложить первые два слагаемых, затем к ним добавить еще одно, затем — еще одно и т. д., нельзя — этот процесс никогда не закончится. Поэтому для суммы бесконечного числа слагаемых вводится определение.

Определение 1. Пусть задана последовательность a_n . Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется *рядом*, a_n — n -м или общим *членом ряда*.

Короче (1) записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum a_n, \quad \sum a_k, \quad \sum a_i, \quad \dots$$

— какой буквой обозначается номер члена ряда — безразлично.

Определение 2. Сумма n первых членов ряда называется *n -й частичной суммой ряда*, ее принято обозначать s_n .

Так, для ряда (1) n -я частичная сумма

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Определение 3. Если последовательность s_n частичных сумм ряда имеет предел s , то ряд называется *сходящимся*, а число s называют *суммой* этого ряда и пишут $\sum a_k = s$. Если последовательность s_n не имеет предела, то ряд называется *расходящимся*.

Коротко говорят: сумма ряда есть предел его частичных сумм. Если же последовательность частичных сумм не имеет предела (ряд расходится), то ряд не имеет суммы.

Ряд $\sum aq^{n-1}$ будем называть геометрической прогрессией (как и последовательность членов этого ряда).

Пример 1. Геометрическая прогрессия $\sum aq^{n-1}$ расходится при $|q| \geq 1$, $a \neq 0$, и сходится при $|q| < 1$, при этом

$$\sum aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1). \quad (2)$$

Прежде всего найдем n -ю частичную сумму этого ряда. Как известно из школы (при $q \neq 1$),

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}.$$

При $|q| < 1$ существует $\lim s_n = \lim a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, так как $\lim q^n = 0$. Этим доказана формула (2). Случай $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$ просто доказывается в примере 4 ниже.

Например, геометрическая прогрессия

$$\sum 5 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3 \cdot 5}{3 + 2} = 3,$$

так как $q = -\frac{2}{3}$, т. е. $|q| < 1$.

Приведем пример, который показывает, что действие с рядами по привычным для конечных сумм правилам может привести к неожиданному результату.

Пример 2. Сумма ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ — положительное число, поскольку $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots > \frac{1}{2} +$

$+0+0+\dots > 0$. Переставим теперь члены этого ряда: одно слагаемое положительное — два отрицательных:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \\ - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right). \end{aligned}$$

Оказалось, что после такой перестановки слагаемых сумма ряда уменьшилась вдвое (в скобках стоит тот же ряд, с которого мы начали).

Этот пример показывает, что правила действий с рядами не всегда повторяют аналогичные правила действий с конечными суммами. Поэтому при вычислениях с рядами надо опираться только на соответствующие теоремы. Ниже будут сформулированы и доказаны основные (и простейшие) теоремы о рядах.

Для начала отметим, что конечную сумму

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = a$$

мы можем рассматривать как ряд (с той же суммой)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + 0 + 0 + \dots$$

(у выписанного ряда $a_n = 0$ при всех $n > k$). Действительно, частичная сумма ряда (3) при любом $n > k$ будет

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + 0 = a,$$

т. е. постоянна, и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$, т. е. ряд (3) сходится и его сумма равна a .

Теорема 1 (об общем множителе). Если ряд $\sum a_m$ сходится, то для любого числа λ ряд $\sum \lambda a_m$ тоже сходится и

$$\sum \lambda a_m = \lambda \sum a_m.$$

Если ряд $\sum a_m$ расходится и $\lambda \neq 0$, то и ряд $\sum \lambda a_m$ расходится.

Коротко говорят: общий множитель можно выносить за знак суммы, умножение на ненулевой множитель не нарушает сходимости (расходимости).

Так как $\sum a_m$ сходится, то последовательность $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ имеет предел и, по определению суммы ряда, $\sum a_m = \lim s_n$. Выпишем далее частичную сумму ряда $\sum \lambda a_m$:

$$S_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n = \lambda (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda s_n,$$

поэтому $\lim S_n = \lim \lambda s_n = \lambda \lim s_n$. Поэтому ряд $\sum \lambda a_m$ сходится и $\sum \lambda a_m = \lim S_n = \lambda \lim s_n = \lambda \sum a_m$.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что ряд $\sum \lambda a_m$ сходится. Тогда (по первой части теоремы) сходится ряд $\sum \frac{1}{\lambda} (\lambda a_m) = \sum a_m$, что противоречит условию теоремы (второй части). Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно и потому ряд $\sum \lambda a_m$ расходится.

Теорема 2 (сумма рядов). Если ряды $\sum a_m$ и $\sum b_m$ сходятся, то сходится ряд $\sum (a_m + b_m)$ и

$$\sum (a_m + b_m) = \sum a_m + \sum b_m.$$

Ряд $\sum (a_m + b_m)$ и ряд $\sum (a_m - b_m)$ будем называть *рядом-суммой*.

Так как $\sum a_m$ сходится, то существует $\lim s_n = \sum a_m$, где $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Так как $\sum b_m$ сходится, то существует $\lim \sigma_n = \sum b_m$, где $\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Выпишем частичную сумму ряда-суммы:

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = s_n + \sigma_n. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность S_n имеет предел (так как s_n и σ_n имеют пределы), т. е. ряд-сумма сходится и

$$\begin{aligned} \sum (a_m + b_m) &= \lim S_n = \lim (s_n + \sigma_n) = \\ &= \lim s_n + \lim \sigma_n = \sum a_m + \sum b_m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 3. } \sum \frac{2^{n+1} - 5 \cdot 3^n}{6^n} &= \sum \left(\frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \right. \\ &- \left. \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \frac{4}{3} \sum \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \frac{5}{2} \sum \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \\ &- \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 5 = -3. \end{aligned}$$

Следствие. Если ряд $\sum a_m$ сходится, а ряд $\sum b_m$ расходится, то ряд-сумма $\sum (a_m + b_m)$ расходится.

Действительно, предположим, что ряд-сумма сходится, тогда, по теореме 2, сходится ряд-сумма $\sum ((a_m + b_m) - a_m) = \sum b_m$, что противоречит условию. Следствие доказано.

Заметим еще, что если оба ряда расходятся, то ряд-сумма может оказаться как сходящимся рядом (если, например, $b_m = -a_m$), так и расходящимся (если, например, $b_m = a_m$).

Теорема 3. Изменение конечного числа членов ряда не нарушает его сходимости (расходимости).

Другими словами, расходящийся ряд остается расходящимся, а сходящийся ряд остается сходящимся, хотя сумма ряда при этом, как правило, изменяется.

Пусть у ряда $\sum a_m$ как-то изменены первые k членов. При этом получился ряд $\sum b_m$, у которого $b_m = a_m$ при всех $m > k$. Положим $c_m = b_m - a_m$. Тогда ряд $\sum c_m$ сходится, так как $c_m = 0$ при всех $m > k$. Поэтому ряд-сумма $\sum (a_m + c_m) = \sum b_m$ сходится, если сходится ряд $\sum a_m$, и расходится, если расходится ряд $\sum a_m$.

Из этой теоремы следует, что при изучении сходимости ряда можно изменять, как нам удобно (или вообще отбрасывать), конечное число членов ряда — на его сходимость (расходимость) это не влияет.

Первый вопрос, который обычно выясняется относительно ряда — сходится он или расходится, а для сходящегося ряда уже можно ставить вопрос о вычислении его суммы (точном или приближенном).

Для ответа на первый вопрос существуют теоремы, которые называются признаками сходимости.

Теорема 4 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim a_n = 0$.

Пусть сумма ряда равна s . Так как $s_n = s_{n-1} + a_n$, то

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Очень важное замечание. Ниже будет доказано, что ряд $\sum \frac{1}{n}$ (его называют *гармоническим рядом*) расходится, хотя $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 5 (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim a_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum a_n$ расходится.

Предположим, что ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда $\lim a_n = 0$ (теорема 4), что противоречит условию теоремы 5. Следовательно, $\sum a_n$ расходится.

Коротко теорему 5 формулируют так: если $a_n \not\rightarrow 0$, то $\sum a_n$ расходится.

Пример 4. Ряд $\sum aq^{n-1}$ расходится при $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$, так как $aq^{n-1} \not\rightarrow 0$. Ряд $\sum \frac{2n+3}{5-7n}$ расходится, так как $\lim \frac{2n+3}{5-7n} = -\frac{2}{7} \neq 0$.

Пример 5. Ряд $\sum \cos \frac{\pi n}{2}$ расходится, так как не существует $\lim \cos \frac{\pi n}{2}$.

§ 2. Достаточные признаки сходимости рядов

Прежде чем доказывать признаки сходимости рядов, докажем две теоремы о пределах последовательностей.

Теорема 6 (сохранение неравенств). Если $\lim p_n < q$, то существует такой номер N , что $p_n < q$ при всех $n > N$. Если $\lim p_n > r$, то существует такой номер N , что $p_n > r$ при всех $n > N$.

Положим $p = \lim p_n$. Так как $q > p$, то $\varepsilon = q - p > 0$, и по определению предела последовательности, существует такой номер N , что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|p_n - p| < \varepsilon$, откуда

$$p_n - p < \varepsilon = q - p, \quad \text{т. е.} \quad p_n < q.$$

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Следствие. Если существует $\lim p_n$, то последовательность (p_n) ограничена.

Действительно, положим $p = \lim p_n$. Тогда существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполнено неравенство $p - 1 < p_n < p + 1$ (по теореме 6). Положим

$$m = \min(p_1, p_2, \dots, p_N, p - 1)$$

и

$$M = \max(p_1, p_2, \dots, p_N, p + 1).$$

Тогда для всех номеров n выполнено неравенство

$$m \leq p_n \leq M,$$

т. е. последовательность (p_n) ограничена.

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Для того чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена. При этом: если последовательность (p_n) возрастает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \geq p_n$ при любом n ; если последовательность (p_n) убывает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \leq p_n$ при любом n .*

Необходимость доказана в предыдущем следствии. Докажем достаточность. Пусть последовательность (p_n) возрастает (для определенности) и ограничена, т. е. можно подобрать два таких числа, что $m \leq p_n \leq M$ для всех номеров n . Рассмотрим множество $A = \{p_n\}$ и множество B , состоящее из всех чисел b таких, что $p_n \leq b$ для любого n . Множество B не пусто, так как $M \in B$ (и, следовательно, любое

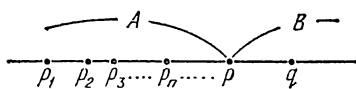


Рис. 116

число $b > M$ тоже принадлежит B). На координатной прямой множество A расположено левее множества B (рис. 116).

По аксиоме непрерывности множества действительных чисел (см. Приложение, с. 235) существует число p , разделяющее множества A и B , т. е. для любого числа $b \in B$ и любого n выполнено неравенство $p_n \leq p \leq b$.

Докажем, что $p = \lim p_n$. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. Число $p - \varepsilon < p$, и потому $p - \varepsilon \notin B$. Следовательно, неравенство $p - \varepsilon \geq p_n$ выполняется не для

всех n , т. е. при некотором N выполнено неравенство $p_N > p - \varepsilon$. Тогда при любом $n > N$ в силу возрастания последовательности $p_n \geq p_N > p - \varepsilon$, откуда $p - p_n < \varepsilon$. А так как $p - p_n \geq 0$ при всех номерах n , то

$$n > N \Rightarrow |p_n - p| = p - p_n < \varepsilon.$$

Этим часть теоремы, относящаяся к возрастающим последовательностям, полностью доказана.

Если последовательность (p_n) убывает и ограничена, то последовательность $(-p_n)$ возрастает и ограничена и потому существует $\lim(-p_n) = r$ и $-p_n \leq r$ для всех n . Но тогда $p = -r = \lim p_n$ и $p_n \geq p$ для всех n . Теорема полностью доказана.

В теории самую важную роль играют признаки сходимости знакоположительных рядов, т. е. рядов $\sum a_n$, для которых $a_n \geq 0$ при всех n . Все эти признаки следуют из необходимого и достаточного признака сходимости знакоположительного ряда:

Теорема 8. Если $a_n \geq 0$ при всех n , то для сходимости ряда $\sum a_n$ необходима и достаточна ограниченность последовательности частичных сумм этого ряда. Если $s_n \leq M$ при всех n , то $0 \leq \sum a_n \leq M$; $s_n \leq \sum a_m$ при всех n .

Поскольку $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ при всех n , то последовательность (s_n) (частичных сумм ряда) возрастающая и, по теореме Вейерштрасса, для существования $\lim s_n$, т. е. сходимости ряда $\sum a_m$, необходима и достаточна ограниченность последовательности (s_n) . При этом, по теореме Вейерштрасса, при любом n выполнены неравенства $s_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum a_m$. Если $s_n \leq M$ при всех n , то $0 \leq s_n \leq M$ при любом n (так как $a_m \geq 0$ при любом m). Переходя к пределу в неравенстве $0 \leq s_n \leq M$, получаем: $0 \leq \sum a_m \leq M$.

Аналогично доказывается (см. КМА) теорема:

Теорема 8'. Если функция f непрерывна и неотрицательна на $[1, \infty)$, то для сходимости $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ необходима и достаточна ограниченность последовательности $\left(\int_1^n f(x) dx \right)$; $\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx$ при любом n .

Теорема 9 (интегральный признак). Пусть последовательность (a_n) убывает и $a_n \geq 0$ при всех n . Если существует функция f , непрерывная и убывающая на $[1; \infty)$, такая, что $f(n) = a_n$, то для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ необходима и достаточна сходимость $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

На рис. 117 и 118 площадь заштрихованного прямоугольника равна a_k , так как его ширина равна 1,

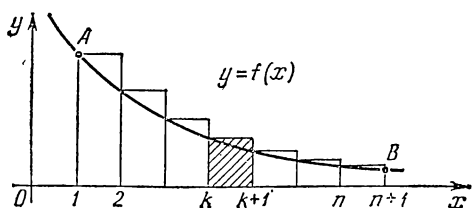


Рис. 117

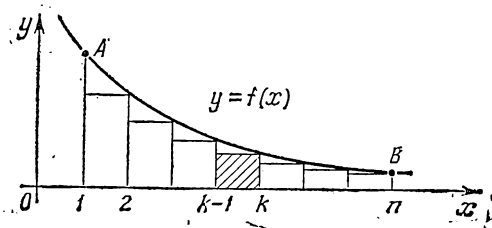


Рис. 118

а высота равна $f(k) = a_k$ по условию. И так для каждого из нарисованных прямоугольников. Из рис. 117 видно, что площадь криволинейной трапеции $1AB(n+1)$ меньше суммы площадей изображенных прямоугольников, т. е.

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n \leq \sum_{m=1}^{+\infty} a_m,$$

если ряд $\sum a_m$ сходится. Из этого неравенства, в силу теоремы 8', следует сходимость $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Итак, из сходимости ряда $\sum a_m$ следует сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Докажем обратное. Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Из рисунка 118 видно, что площадь криволинейной трапеции $1ABn$ больше суммы площадей изображенных прямоугольников, т. е.

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n < \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

в силу неотрицательности функции f . Следовательно, частичные суммы ряда ограничены и ряд $\sum a_m$ сходится.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 9 следует, что расходимость ряда $\sum a_n$ равносильна расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

П р и м е р 6. Покажем, что ряд Дирихле $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

При $p \leq 0$ общий член ряда $\frac{1}{n^p} \nrightarrow 0$, и потому ряд расходится. При $p > 0$ общий член ряда $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$ и убывает, поэтому можно воспользоваться интегральным признаком. Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ непрерывна и убывает на $[1, +\infty)$, $f(n) = \frac{1}{n^p}$, поэтому сходимость (расходимость) ряда Дирихле равносильна сходимости (расходимости) интеграла. При $p > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{(p-1)b^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1},$$

т. е. интеграл (а потому и ряд) сходится. При $0 < p < 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \infty,$$

т. е. интеграл (а потому и ряд) расходится. При $p=1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty,$$

т. е. интеграл (а потому и ряд) расходится.

В частности, $\sum \frac{1}{n^3}$ сходится, так как $p=3 > 1$;
 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как $p = \frac{1}{2} < 1$; *гармонический ряд* $\sum \frac{1}{n}$ расходится, так как $p=1$.

Теорема 10 (признак сравнения). Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$ для всех n , тогда:

1) если ряд $\sum a_n$ расходится, то и ряд $\sum b_n$ расходится;

2) если ряд $\sum b_n$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ сходится и $\sum a_n \leq \sum b_n$.

Докажем сначала утверждение 2). Частичные суммы $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \sum b_k$ при любом n , и потому ряд $\sum a_m$ сходится. Переходя в неравенстве $s_n \leq \sum b_k$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $\sum b_k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_m$.

Для доказательства утверждения 1) предположим, что ряд $\sum b_n$ сходится. Тогда, в силу уже доказанного утверждения 2), и ряд $\sum a_n$ сходится, что противоречит условию. Следовательно, сделанное предположение неверно, и потому ряд $\sum b_n$ расходится.

Пример 7. Ряд $\sum \frac{1}{n^3+5}$ сходится, так как $0 \leq \frac{1}{n^3+5} \leq \frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum \frac{1}{n^3}$ сходится (ряд Дирихле с показателем $p=3 > 1$).

Пример 8. Ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ расходится, так как $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0$, а $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд Дирихле при $p=1/2 < 1$.

Замечание. Признаком сравнения (без неравенства для сумм) можно пользоваться, если неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ выполнено не при всех n , а только при всех n , больших некоторого числа N (т. е. для

некоторых из первых N номеров неравенство может быть и не выполнено). Действительно, изменим первые N членов рядов, положив $a_n = b_n = 0$. При этом сходимость (расходимость) рядов не нарушится, а неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ будет выполнено уже при всех n , и можно применять теорему 10.

Пример 9. Для членов ряда $\sum \frac{\ln n}{n}$ неравенство $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ выполнено при $n > 2$. А так как гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то и заданный ряд $\sum \frac{\ln n}{n}$ расходится.

Теорема 11 (радикальный признак, признак Коши). Пусть $a_n \geq 0$ и существует $\lim \sqrt[n]{a_n} = K$. Тогда:

- 1) если $K < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится,
- 2) если $K > 1$, то $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum a_n$ расходится.

При $K = 1$ радикальный признак не дает ответа на вопрос о сходимости (расходимости) ряда.

Докажем утверждение 2). Так как $K = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ то, по теореме 6, существует такой номер N , что $\sqrt[n]{a_n} > 1$ при всех $n > N$, т. е. $a_n > 1$ при всех $n > N$, и потому $a_n \not\rightarrow 0$ и, следовательно, ряд $\sum a_n$ расходится.

Для доказательства утверждения 1) возьмем число q такое, что $K < q < 1$. Поскольку $K = \lim \sqrt[n]{a_n} < q$, то, в силу теоремы 6, существует такой номер N , что $\sqrt[n]{a_n} < q$ при всех $n > N$, т. е. $a_n < q^n$ при всех $n > N$. Поскольку $0 < q < 1$, то ряд $\sum q^n$ сходится и, по теореме 10 и замечанию к ней, сходится ряд $\sum a_n$.

Пример 10. Исследуем ряд $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. По радикальному признаку

$$K = \lim \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

и потому заданный ряд сходится.

Пример 11. Исследуем ряд $\sum \frac{2^n}{n^{10}}$. По радикальному признаку ряд расходится, так как

$$K = \lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{10}}} = \lim \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{10}} \stackrel{(1)}{=} 2 > 1.$$

(1) $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$, и так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Пример 12. Для гармонического ряда $\sum \frac{1}{n}$ (он расходится) по радикальному признаку $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Для ряда $\sum \frac{1}{n^3}$ (он сходится как ряд Дирихле с $p = 3 > 1$) по радикальному признаку $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1$. Отсюда видно, что при $K = 1$ радикальный признак не дает ответа — ряд может оказаться и расходящимся, и сходящимся.

Теорема 12 (признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда:

1) если $D < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;

2) если $D > 1$, то $a_n \nrightarrow 0$ и потому ряд $\sum a_n$ расходится.

Доказательство начнем со случая $D > 1$. По теореме 6 существует такой номер N , что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ при всех $n > N$, т. е. $a_{n+1} > a_n$ при всех $n > N$. Следовательно, при любом $n > N$ имеем: $a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \dots > a_{N+1}$. Но $a_{N+1} > 0$, и потому $a_n \nrightarrow 0$, а ряд $\sum a_n$ расходится.

Если $D < 1$, то возьмем число q так, чтобы $D < q < 1$, и подберем номер N (в силу теоремы 6) такой, чтобы при всех $n > N$ было $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, т. е. $a_{n+1} < qa_n$ при всех $n > N$. Тогда для любого $n > N$:

$$a_n < qa_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \dots < a_{N+1} q^{n-N-1} = \frac{a_{N+1}}{q^{N+1}} q^n = b_n.$$

Но ряд $\sum b_n$ сходится как геометрическая прогрессия, знаменатель которой q удовлетворяет неравенству $0 < q < 1$. Следовательно, по теореме 10 (с учетом замечания к ней), сходится ряд $\sum a_n$.

Пример 13. Ряд $\sum \frac{n^{10}}{3^n}$ сходится: по признаку Даламбера

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Пример 14. Ряд $\sum \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$ расходится: по признаку Даламбера

$$D = \lim \frac{5^{n+1} (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n!} = \lim \frac{5}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e} > 1.$$

Теорема 13 (признак эквивалентности). Если $a_n > 0, b_n > 0$ и $a_n \sim b_n$, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся (расходятся) одновременно.

Так как $a_n \sim b_n$, т. е. $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, то (теорема 6) существует такой номер N , что $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2$ при всех $n > N$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то из неравенства $b_n < 2a_n$ (при всех $n > N$) следует сходимость ряда $\sum b_n$ (признак сравнения и замечание к нему). Если ряд $\sum a_n$ расходится, то из неравенства $b_n > \frac{1}{2} a_n$ (при всех $n > N$) следует расходимость ряда $\sum b_n$ (признак сравнения и замечание к нему).

Пример 15. Исследуем ряд $\sum \sin \frac{1}{n^5}$. Так как $\sin \frac{1}{n^5} \sim \frac{1}{n^5}$ (см. с. 38), а ряд $\sum \frac{1}{n^5}$ сходится, то и ряд $\sum \sin \frac{1}{n^5}$ сходится.

Пример 16. Исследуем ряд $\sum (\sqrt[n]{7} - 1)$. Так как $\sqrt[n]{7} - 1 = 7^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{\ln 7}{n}$ (см. с. 38), а гармонический ряд расходится, то ряд $\sum (\sqrt[n]{7} - 1)$ расходится.

До сих пор рассматривались ряды с неотрицательными слагаемыми. Теперь перейдем к рядам, члены которых имеют произвольные знаки.

Теорема 14 (признак абсолютной сходимости). Если $\sum |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ сходится. При этом $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Так как $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$, то, по признаку сравнения, сходится ряд $\sum (|a_n| + a_n)$. Но тогда сходится ряд-сумма $\sum ((|a_n| + a_n) - |a_n|) = \sum a_n$. Поскольку $|s_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq \sum |a_m|$ для любого n , то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве $|s_n| \leq \sum |a_m|$,

получаем:

$$\sum |a_m| \geq \lim |s_n| = |\lim s_n| = |\sum a_m|.$$

Пример 17. Исследуем ряд $\sum \frac{\sin n}{n^3}$. Так как $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum \frac{1}{n^3}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$ и потому (теорема 14) сходится ряд $\sum \frac{\sin n}{n^3}$.

Теорема 15 (признак Лейбница). Если $\lim u_n = 0$ и последовательность (u_n) убывает, то ряд $\sum (-1)^{n-1} u_n$ сходится и выполнено неравенство

$$0 \leq \sum (-1)^{n-1} u_n \leq u_1. \quad (4)$$

Лемма. Для того чтобы $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, необходимо и достаточно выполнение двух равенств: $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1}$ и $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k}$.

Докажем необходимость. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, то можно подобрать такой номер N , что $n > N \Rightarrow |p - p_n| < \varepsilon$. Но тогда

$$k > \frac{1}{2}(N-1) \Rightarrow 2k+1 > N \Rightarrow |p - p_{2k+1}| < \varepsilon,$$

$$k > \frac{1}{2}N \Rightarrow 2k > N \Rightarrow |p - p_{2k}| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1} = p$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k} = p$.

Докажем достаточность. Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1}$, то можно подобрать такой номер N_1 , что

$$k > N_1 \Rightarrow |p - p_{2k+1}| < \varepsilon. \quad (5)$$

Так как $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k}$, то можно подобрать такой номер N_2 , что

$$k > N_2 \Rightarrow |p - p_{2k}| < \varepsilon. \quad (6)$$

Положим $N = \max(2N_1 + 1; 2N_2)$. Тогда для любого $n > N$ будет выполнено (5) (если n нечетное) и (6) (если n четное), и потому $|p - p_n| < \varepsilon$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$.

Для доказательства теоремы рассмотрим последовательность частичных сумм ряда (4) только с четными номерами. Так как последовательность u_n убывает и все $u_n \geq 0$ (поскольку $\lim u_n = 0$) по условию теоремы, то:

$$\left. \begin{aligned} s_{2k} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2k-1} - u_{2k} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}) \geq 0, \\ s_{2k} &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots \\ &\quad \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} \leq u_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Следовательно, последовательность частичных сумм s_{2k} ограничена. Кроме того, $s_{2k+2} - s_{2k} = u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq 0$, т. е. $s_{2k+2} \geq s_{2k}$ — последовательность s_{2k} возрастает. В силу теоремы Вейерштрасса существует $\lim s_{2k} = s$ и при этом $0 \leq s \leq u_1$ (см. неравенства (7)). Для частичных сумм с нечетными номерами $\lim s_{2k+1} = \lim (s_{2k} + u_{2k+1}) = \lim s_{2k} + \lim u_{2k+1} = s + 0 = s$, т. е. предел тот же. Следовательно, последовательность s_n имеет предел, т. е. ряд $\sum (-1)^{n-1} u_n$ сходится, а сумма его равна s . Но выше отмечено, что $0 \leq s \leq u_1$, т. е. $0 \leq \sum (-1)^{n-1} u_n \leq u_1$.

Пример 18. Ряд $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница, так как $u_n = \frac{1}{n}$, а эта последовательность убывает, и $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Заметим, что сходимость в теореме 15 сохранится, если убывание последовательности u_n начинается только с некоторого номера N . Действительно, изменим первые N членов этого ряда (при этом сходимость ряда не нарушится в силу теоремы 3), положив $u_n = u_N$ при всех $n < N$. Тогда измененная последовательность u_n будет уже убывающей, и можно применять признак Лейбница.

Пример 19. Исследуем ряд $\sum \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 10}$. Здесь $u_n = \frac{n}{n^2 + 10}$ и ясно, что $\lim u_n = 0$. Остается доказать, что последовательность u_n убывает (хотя бы начиная с некоторого номера). Это установим при помощи производной (считая n действительным числом, чтобы

при вычислении не вводить новых переменных):

$$\left(\frac{n}{n^2+10}\right)' = \frac{n^2+10-2n^2}{(n^2+10)^2} = \frac{10-n^2}{(n^2+10)^2} < 0 \quad \text{при } n > 3,$$

и потому последовательность u_n убывает, начиная с $n=4$. Следовательно, заданный ряд сходится по признаку Лейбница.

Ряды, удовлетворяющие условиям теоремы 15, называются рядами типа Лейбница. Отметим еще, что в рассмотренных примерах $\sum |a_n|$ расходится, так как $|a_n| \sim \frac{1}{n}$. Таким образом, могут быть ряды сходящиеся, для которых $\sum |a_n|$ расходится. Это побудило ввести следующее определение.

Определение 4. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, а $\sum |a_n|$ расходится, то ряд $\sum a_n$ называется *условно сходящимся*.

Так, в примерах 18 и 19 ряды сходятся условно, поскольку $|a_n| \sim \frac{1}{n}$, а гармонический ряд расходится. А в примере 17 ряд сходится абсолютно.

Теперь мы умеем ответить на вопрос «есть ли у заданного ряда сумма?», т. е. сходится ряд или расходится. Если ряд сходится, то надо уметь находить его сумму — или точно, или приближенно с любой заданной точностью. Для этого вводится понятие n -го остатка сходящегося ряда.

Определение 5. Для сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$ называется n -м *остатком* и обозначается r_n , т. е.

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m.$$

Остаток ряда получается из заданного ряда выбрасыванием первых n членов — от этого сходимость ряда не нарушается, т. е. n -й остаток ряда есть ряд сходящийся.

Теорема 16 (об остатке ряда). $\sum a_m = s_n + r_n$, т. е. $r_n = s - s_n$ и $\lim r_n = 0$.

Для доказательства рассмотрим два сходящихся ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + 0 + 0 + \dots = s_n$$

и

$$\overbrace{0 + 0 + \dots + 0}^{n \text{ раз}} + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = r_n.$$

Их сумма $s_n + r_n = \sum a_k = s$. Поскольку $\lim s_n = s$, то $\lim r_n = 0$.

Отсюда видно, что погрешность приближенного равенства

$$\sum a_k \approx s_n \quad (8)$$

равна остатку r_n и с ростом n точность приближенного равенства (8) неограниченно увеличивается. Покажем на примере, как сумму ряда вычислить приближенно с заданной точностью.

Пример 20. Найти сумму ряда $\sum \frac{(-1)^k}{2^k + k}$ с точностью до 0,001. При решении воспользуемся формулой (8), в которой n надо подобрать так, чтобы $|r_n| < 0,001$ (тогда получим требуемую точность):

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} + n + 1} + \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+2} + n + 2} + \dots = \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1} + n + 1} - \frac{1}{2^{n+2} + n + 2} + \dots \right). \end{aligned}$$

В скобках стоит ряд типа Лейбница, поэтому выражение, стоящее в скобках, положительно и не больше $1/(2^{n+1} + n + 1) < 1/2^{n+1}$ (теорема 15), т. е. $|r_n| < 2^{-n-1}$. А так как $2^{10} = 1024 > 1000$, то при $n = 9$ получаем $|r_n| < 2^{-10} < 0,001$. Таким образом, достаточно взять девять слагаемых, чтобы получить сумму ряда с точностью до 0,001. При этом $r_9 > 0$, так как $(-1)^{9+1} = 1$ (см. выше выражения для r_n), т. е. приближенное выражение дает нам сумму ряда с недостатком.

Теорема 17. При перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.

После перестановки членов ряда $\sum a_j$ получается новый ряд, у которого на первом месте стоит число a_{k_1} , на втором месте стоит число a_{k_2} и т. д., на i -м месте стоит число a_{k_i} и т. д. Таким образом, после перестановки получился ряд $\sum a_{k_i}$. Теорема утверждает, что $\sum a_j = \sum a_{k_i}$.

Для доказательства возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Положим $s = \sum a_j$. Тогда из абсолютной сходимости ряда следует, что можно подобрать такое n , что выполнены неравенства

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем N таким, что $i > N \Rightarrow k_i > n$. Тогда для любого $m > N$ имеем:

$$\sigma_m = \sum_{i=1}^m a_{k_i} = s_n + \sum_{\substack{i \leq m \\ k_i > n}} a_{k_i}$$

и

$$\begin{aligned} |s - \sigma_m| &= \left| s - s_n - \sum_{\substack{i \leq m \\ k_i > n}} a_{k_i} \right| \leq |s - s_n| + \\ &\quad + \sum_{\substack{i \leq m \\ k_i > n}} |a_{k_i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана, так как получено, что $\sum a_{k_i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = s = \sum a_j$.

Смысл этой теоремы наглядно состоит в том, что с абсолютно сходящимися рядами можно обращаться как и с конечными суммами. С условно сходящимися рядами в обращении нужна осторожность, как это следует из примера 2.

§ 3. Степенные ряды

До сих пор мы складывали числа. Но можно складывать и функции. Пусть задана последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ..., которые все определены на множестве E . Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum u_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, определенным на множестве E . Если вместо x подставить число $x_0 \in E$, то получится числовой ряд $\sum u_n(x_0)$. Если он сходится (расходится), то говорят, что *функциональный ряд сходится (расходится) в точке x_0* .

Пример 21. Функциональный ряд $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ определен на всей числовой оси, т. е. множество $E = \mathbb{R}$. Если $x \leq 0$, то общий член этого ряда не стремится к нулю и поэтому ряд расходится. Говорят, что множество $(-\infty, 0]$ есть *область расходимости* заданного ряда. При $x > 1$ ряд сходится абсолютно — говорят, что множество $(1, +\infty)$ есть *область абсолютной сходимости* заданного ряда. При $0 < x \leq 1$ заданный ряд сходится условно (сходимость следует из признака Лейбница) — говорят, что множество $(0, 1]$ есть *область условной сходимости* заданного ряда.

Для функциональных рядов, как и для числовых рядов, тоже возникают некоторые отличия от свойств конечных сумм. Например, у ряда

$$\sum \frac{x}{(1+|x|)^n}$$

все слагаемые непрерывны, а его сумма разрывна в нуле. Действительно, это геометрическая прогрессия с $a = \frac{x}{1+|x|}$ и $q = \frac{1}{1+|x|}$.

Если $x = 0$, то $a = 0$ и сумма ряда равна нулю. Если $x \neq 0$, то $0 < q < 1$, ряд сходится и, по формуле (2),

$$\begin{aligned} \sum \frac{x}{(1+|x|)^n} &= \frac{x}{1+|x|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+|x|}} = \frac{x}{1+|x| - 1} = \\ &= \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

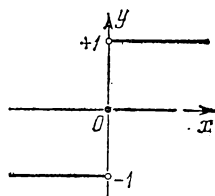


Рис. 119

На рис. 119 приведен график суммы этого ряда.

Самыми простыми функциональными рядами являются степенные ряды.

Определение 6. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$c_0 + \sum c_n x^n,$$

где c_n — числа, они называются *коэффициентами степенного ряда*.

В точке 0 любой степенной ряд сходится абсолютно, так как все слагаемые в сумме равны нулю. Что можно сказать при $x \neq 0$?

Пример 22. Степенной ряд $\sum n^n x^n$ расходится при любом $x \neq 0$. Действительно, если $x \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |nx| = \infty > 1$ и, по радикальному признаку, общий член ряда не стремится к нулю — ряд расходится.

Пример 23. Степенной ряд $\sum \frac{x^n}{n^n}$ сходится абсолютно при любом x .

Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{x}{n}\right| = 0 < 1$ при любом x , и, следовательно, по радикальному признаку, этот ряд сходится абсолютно при любом x .

Пример 24. Исследуем на сходимость ряд $\sum \frac{x^n}{n}$. Найдем область абсолютной сходимости этого ряда при помощи радикального признака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x|.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ общий член ряда не стремится к нулю, и потому ряд расходится. Остается выяснить, что делается в точках ± 1 . При $x = 1$ получим $\sum \frac{1}{n}$ — гармонический ряд — он расходится. При $x = -1$ получаем $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ — ряд типа Лейбница, он сходится, сходимость условная. Итак: $(-1, 1)$ — область абсолютной сходимости ряда, при $x = -1$ ряд сходится условно, а при $x < -1$ и при $x \geq 1$ ряд расходится.

Последний пример типичен для степенного ряда — в общем случае положение аналогично: для каждого степенного ряда есть такое число $R > 0$, что при $||x| < R$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > R$ ряд расходится. Для примера 22 условились говорить, что $R = 0$, а для примера 23 — $R = \infty$. Доказательство этого утверждения основано на следующей теореме:

Теорема 18 (Абель). Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом x , для которого $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится в точке x_0 , то он расходится в любой точке x , для которой $|x| > |x_0|$.

Сходимость степенного ряда в точке x_0 означает, что сходится числовой ряд $\sum c_n x_0^n$, и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n x_0^n| = 0 < 1$. По теореме 6 существует такой номер N , что $|c_n x_0^n| < 1$ при всех $n > N$. Но тогда при всех $n > N$

$$|x| < |x_0| \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Поскольку $\sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ сходится как геометрическая прогрессия с положительным знаменателем $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, то по признаку сравнения сходится ряд $\sum |c_n x^n|$, т. е. степенной ряд сходится абсолютно в точке x .

Вторая часть теоремы доказывается методом от противного. Предположим, что существует точка x_1 , для которой $|x_1| > |x_0|$ и в которой степенной ряд сходится. Тогда, в силу первой части теоремы, степенной ряд сходится в точке x_0 , что противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что нет таких точек x_1 , т. е. для любой точки x , для которой $|x| > |x_0|$, степенной ряд расходится.

Теперь можно доказать теорему, которая полностью описывает область сходимости степенного ряда.

Теорема 19. *Для степенного ряда возможно только следующее:*

1) *степенной ряд расходится при любом $x \neq 0$ в 0 — абсолютная расходимость;*

2) *степенной ряд абсолютно сходится в любой точке;*

3) *существует такое число $R > 0$, что на $(-R, R)$ сходимость абсолютная, а при $|x| > R$ — расходимость.*

Число R называется *радиусом сходимости степенного ряда*, интервал $(-R, R)$ — *интервалом сходимости степенного ряда*.

То, что случаи 1) и 2) возможны, видно из примеров 22 и 23. Если же ни случай 1), ни случай 2) не имеют места, то существуют как точки сходимости степенного ряда (отличные от нуля), так и точки его расходимости. Пусть A есть множество всех положительных чисел x , в которых степенной ряд

сходится, а B — множество всех положительных чисел x , в которых степенной ряд расходится. Оба множества не пусты.

На координатной прямой множество A расположено левее множества B , т. е. при любом $a \in A$ и любом $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$ (равенства быть не может, так как в каждой точке может быть или сходимость, или расходимость — одно исключает другое). Доказательство этого утверждения проведем от противного: предположим, что существует такая пара чисел $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$, что $a_1 > b_1$. Тогда, по теореме Абеля, степенной ряд сходится в точке b_1 , что противоречит условию $b_1 \in B$. Следовательно, наше предположение неверно — таких пар нет, т. е. для любой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$.

Поскольку множество A расположено левее множества B , то (в силу аксиомы непрерывности множества действительных чисел) их разделяет некоторое число R . Это значит, что при любых числах $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq R \leq b$. Из него следует, что $R > 0$, поскольку числа $a > 0$.

Докажем, что на интервале $(-R, R)$ степенной ряд сходится абсолютно. Для любого числа $x \in (-R, R)$ выполнено неравенство $|x| < R$.

Возьмем такое число x_0 , что $|x| < x_0 < R$; $x_0 \notin B$, так как $x_0 < R$, и потому степенной ряд сходится в точке x_0 . Но тогда, в силу теоремы Абеля, степенной ряд сходится абсолютно в точке x .

Докажем теперь, что степенной ряд расходится для любого x , для которого $|x| > R$. Пусть $|x| > R$ — берем число x_0 так, что $|x| > x_0 > R$. Из неравенства $x_0 > R$ следует, что $x_0 \in B$, и потому степенной ряд расходится в точке x_0 , а тогда, по теореме Абеля, степенной ряд расходится в точке x . Теорема полностью доказана.

Простота степенных рядов заключается еще и в том, что в интервале сходимости с ними можно обращаться, как с обычными многочленами — их можно перемножать и переставлять как угодно слагаемые (в силу абсолютной сходимости), их можно почленно дифференцировать и интегрировать, а сумма их непрерывна в интервале сходимости и имеет производные всех порядков. Все это доказывается в приведенных ниже теоремах.

Теорема 20 (дифференцирование степенного ряда). При почленном дифференцировании степенного ряда его интервал сходимости не меняется и в нем

$$(\sum c_n x^n)' = \sum c_n n x^{n-1}. \quad (9)$$

Сначала докажем, что при почленном дифференцировании степенного ряда его интервал сходимости не меняется (интерес представляет только случай $R \neq 0$). Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum c_n x^n$, а R_1 — радиус сходимости продифференцированного степенного ряда $\sum c_n n x^{n-1}$ (для удобства доказательств будем считать, что в суммах $n > 2$, т. е. выброшено два слагаемых — это не влияет на общность доказательств). Надо доказать, что $R_1 = R$.

Возьмем любое число $x \in (-R_1, R_1)$. Тогда сходится ряд $\sum |c_n n x^{n-1}|$ и, следовательно, сходится ряд $\sum |c_n n x^n|$. Но $|c_n x^n| \leq |c_n n x^n|$, и потому, по признаку сравнения, сходится ряд $\sum |c_n x^n|$, т. е. $x \in (-R, R)$. Этим доказано, что $R \geq R_1$.

Покажем, что неравенство $R > R_1$ невозможно. Доказательство проведем от противного: предположим, что $R > R_1$, и возьмем числа x_1 и x_2 так, что $R_1 < x_1 < x_2 < R$. Из неравенства $x_1 > R_1$ следует, что ряд $\sum c_n n x_1^{n-1}$ расходится, и потому расходится ряд $\sum c_n n x_1^n$. Из неравенства $x_2 < R$ следует, что ряд $\sum |c_n x_2^n|$ сходится. Но

$$|c_n n x_1^n| = |c_n x_2^n| \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n n = |c_n x_2^n| \cdot \frac{n}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n}.$$

А так как $\frac{x_2}{x_1} > 1$, то показательная функция $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n$ растет быстрее n , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = 0 < 1$. Поэтому

(теорема 6) существует такой номер N , что $\frac{n}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} <$

< 1 при всех $n > N$ и потому $|c_n n x_1^n| < |c_n x_2^n|$ для всех $n > N$. Следовательно, по признаку сравнения, сходится ряд $\sum |c_n n x_1^n|$, т. е. мы пришли

к противоречию. Оно получилось из-за предположения $R > R_1$. Следовательно, это предположение неверно и доказано равенство $R = R_1$.

Ясно, что интервал сходимости степенного ряда не меняется и после второго дифференцирования, третьего дифференцирования и т. д. В частности, степенной ряд $\sum |c_n n(n-1)x^{n-2}|$ (полученный после двукратного дифференцирования) сходится на $(-R, R)$.

Переходим к доказательству равенства (9). Положим

$$f(x) = \sum c_n x^n \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \sum c_n n x^{n-1}.$$

Эти функции определены на интервале $(-R, R)$. Нам надо доказать, что для любого числа $x_0 \in (-R, R)$ существует $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = \varphi(x_0)$, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x_0). \quad (10)$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \varphi(x_0) = \\ &= \frac{\sum c_n x^n - \sum c_n x_0^n}{x - x_0} - \sum c_n n x_0^{n-1} = \\ &= \sum c_n \left(\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} - n x_0^{n-1} \right) \stackrel{(1)}{=} \sum c_n (n \xi_n^{n-1} - n x_0^{n-1}) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum c_n n (n-1) \eta_n^{n-2} (\xi_n - x_0). \end{aligned}$$

(1) По теореме Лагранжа между x и x_0 существует такая точка ξ_n ;

(2) еще раз применяем теорему Лагранжа: η_n лежит между ξ_n и x_0 .

Поскольку x и $x_0 \in (-R, R)$, то существует $\rho \in (-R, R)$ такое, что $|x| < \rho$ и $|x_0| < \rho$. Тогда $|\eta_n| < \rho$ и $|\xi_n - x_0| < |x - x_0|$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| &\leq \sum |c_n n(n-1) \eta_n^{n-2} (\xi_n - x_0)| < \\ &< \sum |c_n n(n-1) \rho^{n-2}| \cdot |x - x_0| = A |x - x_0|, \end{aligned}$$

где $A = \sum |c_n n(n-1) \rho^{n-2}|$ (ряд сходится—см. выше). Из полученного неравенства $|\alpha(x)| < A |x - x_0|$ сле-

дует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ — формула (10) и, следовательно, формула (9) доказаны.

Из этой теоремы получим несколько следствий.

Теорема 21. *Сумма f степенного ряда $c_0 + \sum c_n x^n$ непрерывна в интервале сходимости, имеет производные всех порядков и*

$$c_0 = f(0), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (11)$$

Непрерывность суммы степенного ряда

$$f(x) = c_0 + \sum c_n x^n \quad (12)$$

следует из его дифференцируемости в интервале сходимости. Полагая в (12) $x = 0$, получаем $f(0) = c_0$. Дифференцируя (12), имеем:

$$f'(x) = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n x^{n-1},$$

при $x = 0$ получаем $f'(0) = c_1$. Дифференцируя (12) последовательно n раз, последовательно получаем степенные ряды с тем же интервалом сходимости (в силу теоремы 20):

$$f^{(n)}(x) = n! c_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n} c_m,$$

при $x = 0$ получаем $f^{(n)}(0) = n! c_n$.

Теорема 22. *В интервале сходимости степенного ряда*

$$\int \left(\sum c_n x^n \right) dx = C + \sum c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Короче — степенной ряд можно интегрировать почленно в его интервале сходимости. Действительно, по теореме 20 в интервале сходимости имеем:

$$\left(\sum c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum \frac{c_n}{n+1} (n+1) x^n = \sum c_n x^n.$$

Таким образом, проинтегрированный ряд имеет тот же интервал сходимости.

Теорема 23. При любых числах a и b из интервала сходимости ряда $\sum c_n x^n$ выполнено равенство

$$\int_a^b \left(\sum c_n x^n \right) dx = \sum \int_a^b c_n x^n dx.$$

Для функции $\sum c_n x^n$ в интервале сходимости этого степенного ряда первообразной будет функция (теорема 22) $F(x) = \sum c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, и потому (по формуле Ньютона — Лейбница)

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\sum c_n x^n \right) dx &= F(b) - F(a) = \sum c_n \frac{b^{n+1}}{n+1} - \\ &- \sum c_n \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum \left(c_n \frac{b^{n+1}}{n+1} - c_n \frac{a^{n+1}}{n+1} \right) = \\ &= \sum \int_a^b c_n x^n dx. \end{aligned}$$

Теорема 24 (формулы Маклорена). Для всех x из указанных интервалов

$$e^x = 1 + \sum \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (13)$$

$$\cos x = 1 + \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (14)$$

$$\sin x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (15)$$

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1), \quad (16)$$

$$(1+x)^a = 1 + \sum \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} x^n, \\ x \in (-1, 1). \quad (17)$$

Для функции $f(x) = e^x$ вычислим по формуле (11) коэффициенты степенного ряда (12) — получится правая часть формулы (13). Теперь надо доказать, что этот ряд сходится на $(-\infty, +\infty)$ и выполнено равенство (13). По признаку Даламбера (при $x \neq 0$) на-

ходим область абсолютной сходимости ряда в (13):

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

при любом $x \neq 0$. Следовательно, этот ряд сходится абсолютно на $(-\infty, +\infty)$ (так как при $x=0$ любой степенной ряд сходится абсолютно) и определяет на $(-\infty, +\infty)$ некоторую функцию

$$y = 1 + \sum \frac{x^n}{n!}, \quad (18)$$

имеющую на $(-\infty, +\infty)$ производную

$$\begin{aligned} y' &= \sum \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum \frac{nx^{n-1}}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = 1 + \sum \frac{x^k}{k!} = y. \end{aligned}$$

Таким образом установлено, что функция, определенная равенством (18) на интервале $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y$, общее решение которого (см. формулу (12) из гл. V) есть $y = Ce^x$. Так как из (18) видим, что $y(0) = 1$, то произвольную постоянную C можно найти: $1 = C \cdot e^0 = C$, т. е. $C = 1$, и потому $y = e^x$. Формула (13) доказана.

Формула (14) доказывается аналогично. Для функции $f(x) = \cos x$ вычислим по формулам (11) коэффициенты степенного ряда (12) — получим правую часть формулы (14). Теперь надо доказать, что этот ряд сходится на $(-\infty, +\infty)$ и выполнено равенство (14).

По признаку Даламбера выясняем область абсолютной сходимости получившегося ряда (при $x \neq 0$):

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| : \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$$

при любом $x \neq 0$. Следовательно, этот ряд сходится абсолютно на $(-\infty, +\infty)$ и определяет на этом интервале некоторую функцию

$$y = 1 + \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (19)$$

имеющую на $(-\infty, +\infty)$ производную любого порядка:

$$\begin{aligned} y' &= \sum \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum (-1)^n \frac{2n}{(2n)!} x^{2n-1} = \\ &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (20) \\ y'' &= \sum \left((-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)' = \sum (-1)^n \frac{2n-1}{(2n-1)!} x^{2n-2} = \\ &= -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \\ &= - \left(1 + \sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = -y. \end{aligned}$$

Этим установлено, что функция, определяемая равенством (19) на интервале $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению колебаний $y'' = -y$ на этом интервале. Общее решение этого уравнения нам известно (см. формулы (37) и (38) из гл. V): $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Произвольные постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий: при $x=0$, $y=1$ (см. (19)) и $y'=0$ (см. (20)). Итак, C_1 и C_2 должны быть таковы, что $1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$, т. е. $C_2 = 1$ и $0 = C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0$, т. е. $C_1 = 0$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получаем $y = \cos x$. Формула (14) доказана.

Формула (15) следует из равенства (20), так как уже доказано, что $y = \cos x$, и потому $y' = -\sin x$, так что для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ имеем:

$$-\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

т. е.

$$\sin x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Для доказательства формулы (17) берем функцию $f(x) = (1+x)^a$ и для нее вычисляем по формулам (11) коэффициенты ряда (12) — получается ряд из правой части формулы (17). Теперь надо доказывать, что полученный ряд сходится абсолютно на интервале $(-1, 1)$ и на этом интервале выполнено равенство (17). По признаку Даламбера, находим область аб-

солютной сходимости этого ряда (при $x \neq 0$):

$$\begin{aligned} D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a(a-1) \dots (a-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| &= \left| \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \cdot |x| = |x|. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ общий член ряда не стремится к нулю и потому ряд расходится. Таким образом, на интервале $(-1, 1)$ имеем дифференцируемую функцию

$$\begin{aligned} y &= 1 + \sum \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n = \\ &= 1 + ax + \sum_{n \geq 2} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n. \quad (21) \end{aligned}$$

Найдем для $x \in (-1, 1)$ ее производную:

$$\begin{aligned} y' &= a + \sum_{n \geq 2} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} n x^{n-1} = \\ &= a + \sum_{n \geq 2} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}, \\ (1+x)y' &= a + \sum_{n \geq 2} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + ax + \\ &+ \sum_{n \geq 2} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(n-1)!} x^n = \\ &= a + \sum \frac{a(a-1) \dots (a-k+1)}{k!} (a-k+k) x^k = \\ &= a \left(1 + \sum \frac{a(a-1) \dots (a-k+1)}{k!} x^k \right) = ay. \end{aligned}$$

Этим установлено, что функция, определяемая равенством (21), на $(-1, 1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+x)y' = ay, \quad \text{или} \quad y' = \frac{a}{1+x} y. \quad (22)$$

Его общее решение (см. формулы (11) и (12) из гл. V) есть

$$y = Ce^{a \ln(1+x)}, \quad \text{или} \quad y = C(1+x)^a.$$

Чтобы найти произвольную постоянную C , заметим, что при $x=0$ из формулы (21) получаем $y=1$. Отсюда $C=1$. Подставив это значение C в общее решение, получаем $y=(1+x)^a$, и формула (17) доказана.

Для доказательства формулы (16) воспользуемся теоремой 23:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \stackrel{(1)}{=} \int_0^x \left(\sum (-t)^{n-1} \right) dt = \\ &= \sum \int_0^x (-t)^{n-1} dt = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

(1) По формуле для суммы геометрической прогрессии при $|t| < 1$ имеем: $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum (-t)^{n-1}$, поэтому обоснованность всех следующих вычислений при любом $x \in (-1, 1)$ следует из теоремы 23.

Пример 25. Вычислим $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ с точностью до

10^{-5} . Этот интеграл не берется в элементарных функциях, поэтому возможно только приближенное вычисление. Разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$\begin{aligned}\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0,5} \left(1 + \sum \frac{(-x^2)^n}{n!} \right) dx = \\ &= 0,5 + \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \sum \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \cdot n! (2n+1)}.\end{aligned}$$

Остается вычислить с заданной точностью сумму этого ряда. Его остаток

$$\begin{aligned}r_n &= \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} \cdot k! (2k+1)} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+3} (n+1)! (2n+3)} \times \\ &\times \left(1 + \sum \frac{(-1)^m (2n+3)}{4^m (n+2) \dots (n+1+m) (2n+3+2m)} \right).\end{aligned}$$

В скобках стоит ряд типа Лейбница, и потому это выражение заключено между 0 и 1, так что

$$|r_n| < \frac{1}{2^{2n+3} (n+1)! (2n+3)}.$$

Остается подобрать n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^{2n+3} (n+1)! (2n+3)} < 10^{-5}, \text{ или}$$

$$2^{2n+3} (n+1)! (2n+3) > 10^5.$$

Достаточно взять $n = 3$. Тогда $r_3 > 0$ и по недостатку получаем:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{2^7 \cdot 3! \cdot 7} \approx 0,46127.$$

Пример 26. Пользуясь непрерывностью суммы степенного ряда, найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\sum (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{15} x^2 - \dots \right) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Основные элементарные функции. В этом пункте напоминаются изучавшиеся в школе основные элементарные функции и их графики. Основными элементарными функциями называют следующие функции: x^p (степенная), a^x (показательная), $\log_a x$ (логарифмическая); тригонометрические: $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические: $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Прежде чем перейти к графикам этих функций, напомним, что такое система координат на плоскости. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные координатные прямые, пересекающиеся в начале отсчета (рис. 120).

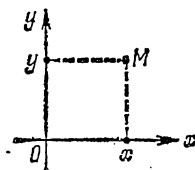


Рис. 120

Тогда каждой точке M на плоскости сопоставляется единственная пара чисел, которая называется координатами точки M и определяется следующим образом: из точки M опускаются перпендикуляры на эти координатные прямые. Основания этих перпендикуляров — точки, т. е. числа.

Обычно горизонтальную прямую называют осью абсцисс, или осью Ox , и число — основание перпендикуляра, опущенного на эту ось, — называют абсциссой точки M , или координатой «икс» точки M , и обозначают буквой x — это первая координата. Вертикальную прямую называют осью ординат, или осью Oy , и число — основание перпендикуляра, опущенного на эту ось, — называют ординатой точки M , или координатой «игрек» точки M , и обозначают ее буквой y — это вторая координата точки M . Точку M с координатами x и y записывают так: $M(x, y)$.

При помощи координат ряд задач геометрии можно свести к задачам алгебры. Например, пусть заданы точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$. Найти расстояние от M до N (т. е. длину отрезка MN) по координатам этих точек. Опустим из точки M и N перпендикуляры на оси координат. Из рис. 121 видно, что $MC = x_2 - x_1$, $NC = y_2 - y_1$, и из прямоугольного треугольника MNC по теореме Пифагора получаем

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Приведем теперь графики основных элементарных функций. Показательная функция $y = a^x$ определена при всех x и положительна. При $a > 1$ она возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает (рис. 122). Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена при всех $x > 0$. При $a > 1$ она возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает (рис. 123). Показательная и логарифмическая функции определены только при основаниях $a > 0$, $a \neq 1$.

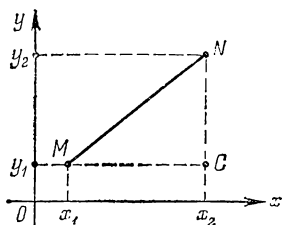


Рис. 121

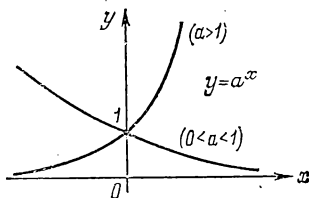


Рис. 122

Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ определены при всех действительных числах x ; $\operatorname{tg} x$ определен для всех $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\operatorname{ctg} x$ — для всех $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Все они периодичны. Напомним, что число $T \neq 0$ называется периодом функции f , если для любого $x \in D(f)$ числа $x \pm T \in D(f)$ и $f(x + T) = f(x)$ (рис. 124). Кроме того, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — функции нечетные (рис. 125—127). Напомним, что функция f называется нечетной, если для любого $x \in D(f)$ число $-x \in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$ (рис. 128). График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Функция $\cos x$ четная (рис. 129). Напомним, что функция f называется четной, если для любого $x \in D(f)$ число $-x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$ (рис. 130). График четной функции симметричен относительно оси Oy .

Функция $\operatorname{arctg} x$ (рис. 131) определена для всех x , возрастает и нечетна. Функция $\operatorname{arcsctg} x$ (рис. 132) определена для всех x , убывающая и положительная. Функция $\operatorname{arcsin} x$ (рис. 133) определена только на отрезке $[-1, 1]$, возрастающая и нечетная. Функция $\operatorname{arccos} x$ (рис. 134) определена на отрезке $[-1, 1]$, убывающая и неотрицательная. Степенная функция x^p определена

для всех положительных x и $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. При $p < 0$ она не определена для $x = 0$. Функция $\sqrt[n]{x}$ при нечетном n определена и при $x < 0$ и нечетна. При этом надо иметь в виду следующие особенности графика степенной функции для $x > 0$. При $x = 1$ все функции равны 1. Все степенные функции монотонны: возрастают при $p > 0$ и убывают при $p < 0$. Их графики выпуклы

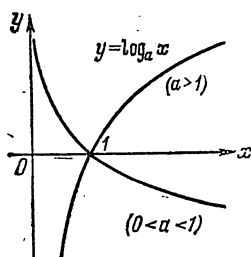


Рис. 123

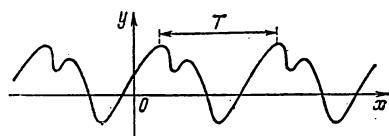


Рис. 124

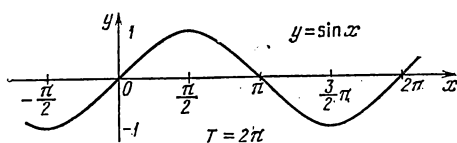


Рис. 125

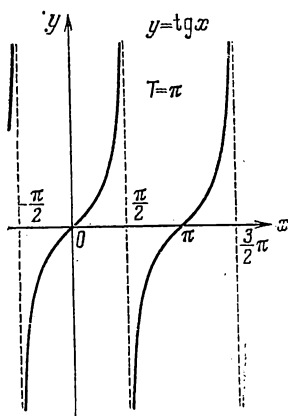


Рис. 126

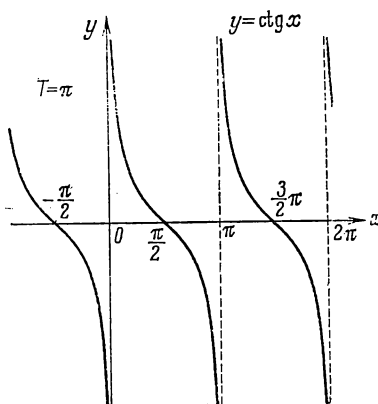


Рис. 127

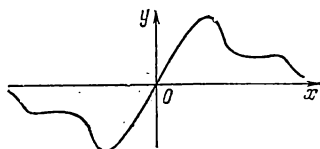


Рис. 128

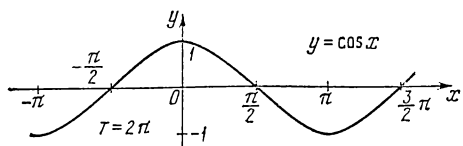


Рис. 129

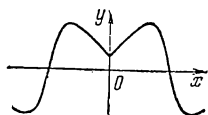


Рис. 130

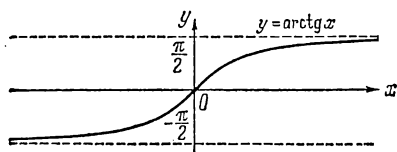


Рис. 131

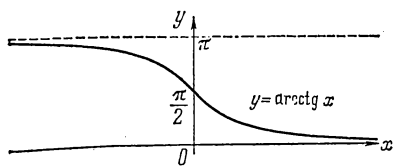


Рис. 132

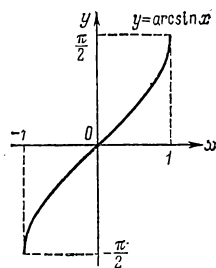


Рис. 133

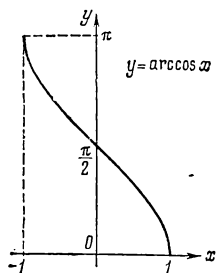


Рис. 134

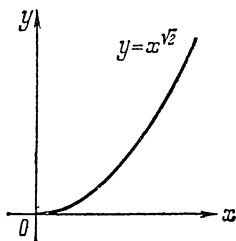


Рис. 135

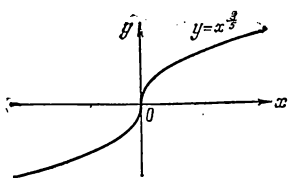


Рис. 136

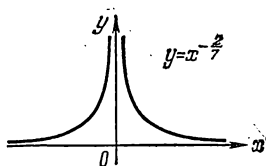


Рис. 137

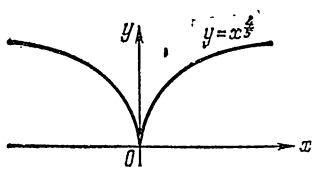


Рис. 138

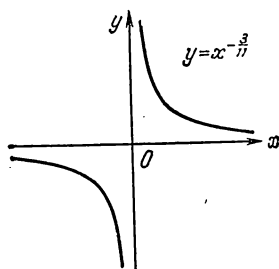


Рис. 139

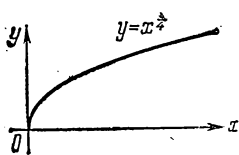


Рис. 140

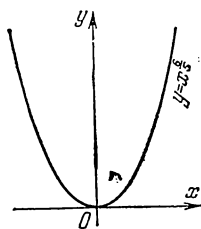


Рис. 141

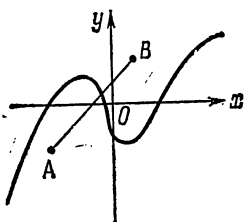


Рис. 142

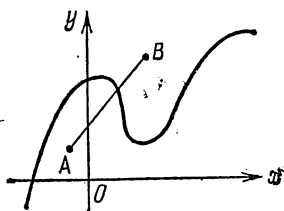


Рис. 143

вверх при $0 < p < 1$ и вниз при $p < 0$ и $p > 1$. При $p > 1$ их график касается оси Ox в начале координат, а при $0 < p < 1$ касается оси Oy . Все эти правила легко получаются из теорем гл. II. На рис. 135—141 приведены графики степенных функций для основных типичных случаев.

Напомним еще прием построения графиков при помощи преобразований сжатия (растяжения) и переноса. При переносе графика каждый отрезок, показанный на чертеже, переходит в параллельный и равный себе отрезок (сравните с поступательным движением в физике, рис. 142 и 143). Если перенести чертеж параллельно оси Ox на расстояние a вправо и параллельно оси Oy на расстояние b вверх, т. е. на вектор $\mathbf{r}(a, b)$, то точка $P(x, y)$ перенесется в точку $Q(x+a, y+b)$. Действительно (рис. 144), вектор \overline{PQ} имеет координаты $(x+a-x, y+b-y) = (a, b)$, т. е. $\overline{PQ} = \mathbf{r}$ для любой точки P . Указанная связь между координатами точек P и Q сохраняется при любых числах a и b .

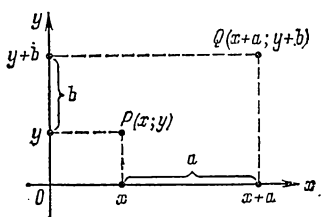


Рис. 144

При этом перенос параллельно оси Ox делается на расстояние $|a|$ и при $a < 0$ — влево, а перенос параллельно оси Oy делается на $|b|$ и при $b < 0$ — вниз.

Сжатие в k раз к оси Oy состоит в том, что точка (x, y) переходит в точку $\left(\frac{x}{k}, y\right)$. Например, сжатие в 2 раза к оси Oy состоит в том, что расстояния всех точек от оси Oy уменьшаются в 2 раза, а их расстояния от оси Ox не меняются; при этом сжатии из рис. 145 получается рис. 146. Сжатие в (-2) раза к оси Oy означает, что, кроме сжатия в 2 раза к оси Oy , надо еще сделать симметрию относительно этой оси: при сжатии в (-2) раза из рис. 145 получается рис. 147. Сжатие к оси Oy в $1/3$ раза означает, что расстояния всех точек от этой оси увеличиваются в 3 раза (так что на самом деле это не сжатие к оси Oy , а растяжение от оси Oy , но для единообразия терминологии в этом случае принято тоже говорить о сжатии с коэффициентом, по модулю меньшим единицы); при сжатии в $1/3$ раза к оси Oy из рис. 145 получается рис. 148. Аналогично определяется сжатие к оси Ox в k раз — это преобразование, при котором точка с координатами (x, y) переходит в точку $\left(x, \frac{y}{k}\right)$. Геометрический смысл этого преобразования аналогичен геометрическому смыслу сжатия к оси Oy .

При помощи переносов и сжатий из графиков основных элементарных функций можно получить графики более сложных функций. Например, график функции $y = (x - 1)^{4/7} + 2$ получается из графика функции $y = x^{4/7}$ при переносе с $a = 1$ и $b = 2$ (рис. 149). Это правило легко доказать в общем виде: график

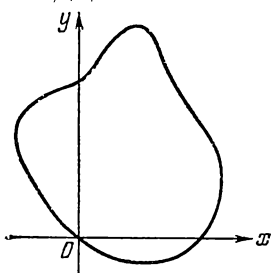


Рис. 145

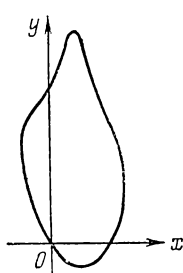


Рис. 146

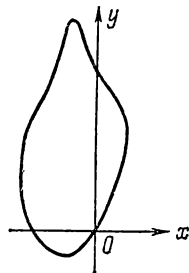


Рис. 147

функции $y = f(x - x_0) + y_0$ (линия L_1) получается из графика функции $y = f(x)$ (линия L_2) при переносе на вектор $\mathbf{r}(x_0, y_0)$. Действительно, график функции f по определению есть линия



Рис. 148

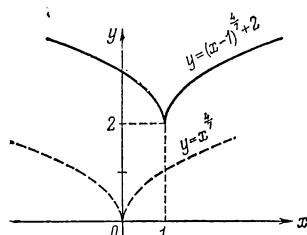


Рис. 149

(для простоты будем считать, что функция f определена всюду):

$$L_2 = \{(x, f(x))\}$$

(в скобках сокращенно записано определение графика функции— множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x — любое число из области определения функции; если функция определена всюду, то x — любое действительное число). Сделаем перенос L_2 на вектор $\mathbf{r}(x_0, y_0)$, получим линию

$$L_3 = \{(x + x_0, f(x) + y_0)\}$$

(по определению переноса). Обозначив абсциссы точек, как обычно, буквой x , получаем (так как $x = x + x_0 - x_0$)

$$L_3 = \{(x, f(x - x_0) + y_0)\} = L_1$$

по определению графика функции $y = f(x - x_0) + y_0$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть известен график функции f (линия L_1). Покажем, что для построения графика функции

$$y = Af(px + x_0) + B, \text{ т. е. } y = Af\left(p\left(x + \frac{x_0}{p}\right)\right) + B$$

(линия L_2) достаточно с графиком функции f (линия L_1) проделать следующие преобразования (в указанном порядке):

- (1) сжатие к оси Ox в $1/A$ раз;
- (2) сжатие к оси Oy в p раз;
- (3) перенос на вектор $r(-x_0/p, B)$.

Действительно (в скобках под стрелками указано, какое преобразование делается):

$$\begin{aligned} L_1 = \{(x, f(x))\} &\xrightarrow{(1)} \{(x, Af(x))\} \xrightarrow{(2)} \\ &\xrightarrow{(2)} \left\{\left(\frac{x}{p}, Af(x)\right)\right\} \xrightarrow{(3)} \left\{\left(\frac{x}{p} - \frac{x_0}{p}, Af(x) + B\right)\right\} = \\ &= \{(x, A(px + x_0) + B)\} = L_2. \end{aligned}$$

В последнем равенстве, как обычно, обозначили абсциссу $\left(\frac{x}{p} - \frac{x_0}{p}\right)$ получившихся точек буквой x и учитываем, что $x = p\left(\frac{x}{p} - \frac{x_0}{p}\right) + x_0$. Но линия L_2 есть, по определению, график

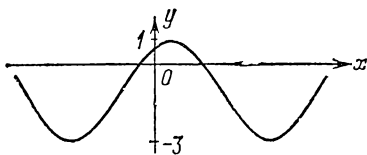


Рис. 150

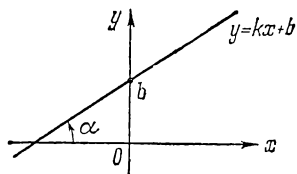


Рис. 151

функции $y = Af(px + x_0) + B$. Например, чтобы построить график функции

$$y = 2 \sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2 \sin \frac{3}{4}\left(x - \frac{4\pi}{9}\right) - 1,$$

надо взять известный график функции $y = \sin x$ (рис. 125) сжать его к оси Ox в $1/2$ раза (т. е. растянуть в 2 раза), сжать к оси Oy в $3/4$ раза и перенести на вектор $r\left(\frac{4\pi}{9}, -1\right)$, получим рис. 150.

Линейная функция

$$y = kx + b.$$

Ее график — прямая с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между прямой и осью абсцисс, отсекающая на оси Oy отрезок b (рис. 151).

График квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

называется параболой и получается при преобразовании степенной функции $y = x^2$ (рис. 152):

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Строить параболу удобнее, не выделяя полного квадрата, как это сделано выше, а по двум (или, если нужно точнее, трем) точкам. Например, для построения графика функции

$$y = 3 - 2x - x^2$$

можно найти точки пересечения этого графика с прямой $y = 3$:
 $3 = 3 - 2x - x^2 \Leftrightarrow 0 = -x(2 + x) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ или } x = -2).$

Так как эти точки лежат на горизонтальной прямой, то ось симметрии параболы (искомого графика) проходит посередине

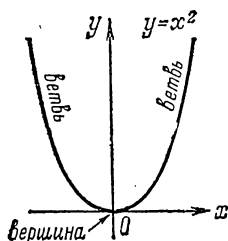


Рис. 152

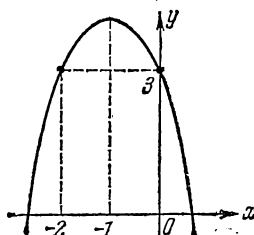


Рис. 153

между этими точками. Поскольку $a = -1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Этих рассуждений для первого приближения достаточно. Если желательно построить график точнее (рис. 153), то по $x = -1$ на оси симметрии параболы вычисляется еще ордината точки вершины (третья точка).

И последнее — график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0.$$

Он получается при преобразовании гиперболы — графика степенной функции $y = x^{-1}$:

$$\begin{aligned} y = \frac{ax + b}{cx + d} &= \frac{\frac{a}{c}(cx + d) + b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = y_0 + \frac{m}{x - x_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для построения графика дробно-линейной функции удобно пользоваться следующими соображениями. График функции $y = x^{-1}$ (рис. 154) неограниченно приближается к осям координат; эти прямые (оси координат) называются асимптотами гиперболы. Легко видеть, что вертикальная асимптота есть прямая $x = x_0$, где x_0 — точка, в которой знаменатель обращается в нуль. Горизонтальная же асимптота $y = y_0$, где $y_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y$, как это видно из формулы

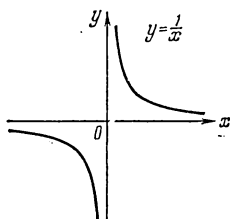


Рис. 154

$$y = \frac{2x + 3}{5x - 4}.$$

Это гипербола. Найдем ее асимптоты. Так как $5x - 4 = 0$ при $x = 4/5$, то вертикальная асимптота есть прямая $x = 4/5$. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{5 - \frac{4}{x}} = \frac{2}{5},$$

то горизонтальная асимптота есть прямая $y = 2/5$. Так как гипербола с асимптотами не пересекается, то достаточно найти точки пересечения ее с осями координат (например). Пересечение

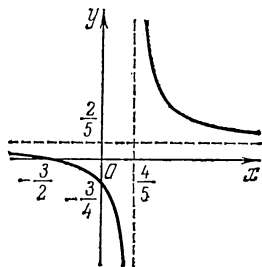


Рис. 155

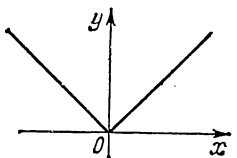


Рис. 156

с осью Oy получается при $x = 0$, тогда $y = -3/4$. Пересечение с осью Ox получается при $y = 0$, тогда $2x + 3 = 0$ и $x = -3/2$. Этого достаточно для построения графика в первом приближении (рис. 155).

Кроме основных элементарных функций, очень важна функция модуль (рис. 156):

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Ее основные свойства известны из школьного курса:

$$\begin{aligned} |a+b| &\leq |a| + |b|, \\ |a+b| &\geq |a| - |b| \quad \text{и} \quad |a+b| \geq |b| - |a|, \\ |ab| &= |a| \cdot |b| \quad \text{и} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}. \end{aligned}$$

Кроме того, важно отметить, что

$$|x-a| < h \Leftrightarrow a-h < x < a+h,$$

в частности,

$$|x| < h \Leftrightarrow -h < x < h.$$

2. Второй замечательный предел. Начнем с того, что определим число e . Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = \frac{1}{x}$ и опирающуюся на отрезок $[1, b]$ (рис. 157). Если число b близко к 1, то площадь

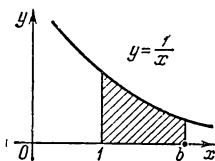


Рис. 157

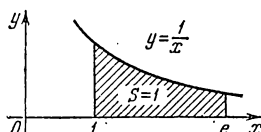


Рис. 158

такой криволинейной трапеции мала. Если число b велико, то и площадь такой криволинейной трапеции тоже велика. Поэтому найдется такое число — его обозначают буквой e и называют «число e », что площадь криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[1, e]$, равна 1 (рис. 158). Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (1)$$

Эту формулу называют *вторым замечательным пределом*. Для доказательства сначала покажем, что для любого натурального числа n выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2)$$

Действительно, возьмем любое натуральное число n и положим $q = 1 + \frac{1}{n}$. Рассмотрим на оси абсцисс точки q^m и прямоугольники, изображенные на рис. 159. Площадь m -го прямоугольника равна

$$\frac{1}{q^{m-1}} (q^m - q^{m-1}) = q - 1 = \frac{1}{n}.$$

Поэтому сумма площадей n таких прямоугольников (с основаниями на отрезке $[1, q^n]$) равна 1, так что площадь криволинейной трапеции $ABCS$ меньше 1. Следовательно, $q^n < e$, и левое неравенство в (2) доказано.

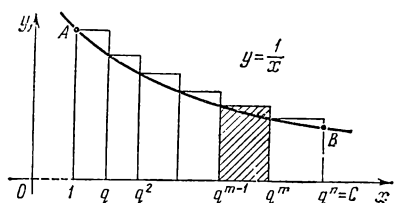


Рис. 159

Для доказательства правой части неравенства (2) рассмотрим прямоугольники на рис. 160. Площадь m -го прямоугольника равна

$$\frac{1}{q^m} (q^m - q^{m-1}) = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому сумма площадей $n+1$ этих прямоугольников (с основаниями на отрезке $[1, q^{n+1}]$) равна 1, так что площадь криво-

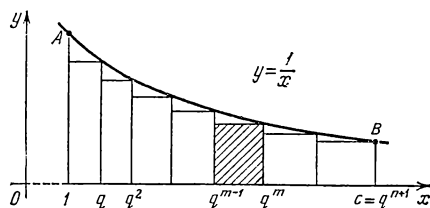


Рис. 160

линейной трапеции $ABCS$ больше 1. Следовательно, $q^{n+1} > e$, и правая часть неравенства (2) доказана.

Для последовательности $\alpha_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ в силу (2) получаем:

$$\begin{aligned} 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{e}{n}, \end{aligned}$$

т. е. $0 < \alpha_n < \frac{e}{n}$, откуда, по оценочному признаку существования предела, следует, что $\lim \alpha_n = 0$, а тогда (теорема о связи между бесконечно малыми и пределом)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3)$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{1/x} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{1/x} = e. \quad (4)$$

Для любого числа x такого, что $0 < x < 1$, существует единственное натуральное число n , удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$. Этим на $(0, 1)$ определена функция $n(x)$. Для функций

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)}$$

и

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}$$

на $(0, 1)$ очевидны неравенства

$$f(x) < (1+x)^{1/x} < g(x).$$

А так как $\lim_{x \rightarrow 0+} n(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = e,$$

откуда, в силу теоремы (оценочный признак существования предела), следует первая формула (4). Докажем вторую формулу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{(1) \ y \rightarrow 0+} \left(1 + \frac{-y}{1+y}\right)^{-\left(\frac{1}{y}+1\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{-\left(\frac{1}{y}+1\right)} = \lim_{y \rightarrow 0+} (1+y)^{\frac{1}{y}} \cdot (1+y)^{\frac{1}{(2)}} = e. \end{aligned}$$

(1) Делаем замену $x = \frac{-y}{1+y}$, тогда $y > 0$ и $\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{y}+1\right)$;

(2) пользуемся первой формулой (4).

Из (4) следует формула (1) в силу теоремы 14, гл. I.

3. Действительные числа. Для доказательства более тонких теорем математического анализа требуется уточнить понятие действительного числа. В множестве действительных чисел — его обозначают через \mathbf{R} — определены действия сложения, умножения и сравнения (больше — меньше), которые подчиняются тем же законам, что и в множестве рациональных чисел. При этом мно-

жество рациональных чисел — его обозначают через Q — есть подмножество R . Единственное отличие R от Q в том, что R обладает свойством непрерывности, а Q им не обладает. Для этого свойства существует много разных формулировок, приведем одну из них.

А к с и о м а (непрерывности R). Пусть числовые множества A и B не пусты и таковы, что при любых числах $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$. Тогда существует такое число c , что для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq c \leq b$. Говорят, что число c разделяет множества A и B .

Ниже этому свойству будет дано наглядное геометрическое истолкование.

Покажем, что множество рациональных чисел не обладает непрерывностью. Действительно, пусть множество A состоит из рациональных чисел $a > 0$, для которых $a^2 < 2$, а множество B состоит из рациональных чисел $b > 0$, для которых $b^2 > 2$. Очевидно, что для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$. Покажем, что, несмотря на это, нет рационального числа c такого, что $a \leq c \leq b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$. Этим будет доказано, что множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что такое число c существует. Ясно, что $c > 1$ и $c^2 \neq 2$ (как это доказывалось в школе). Если $c^2 < 2$, то $h = 2 - c^2$ удовлетворяет неравенству $0 < h < 1$, а рациональное число $d = c + \frac{h}{4c} > c$. Но $d^2 < 2$ (так как $d^2 = \left(c + \frac{h}{4c}\right)^2 = c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16c^2} = c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h}{16} \cdot h \cdot \frac{1}{c^2} < c^2 + \frac{h}{2} + \frac{h}{16} < c^2 + h = 2$), так что $d \in A$. Но тогда $d \leq c$, а это противоречит неравенству $d > c$. Если предположить, что $c^2 > 2$, то, проведя аналогичные рассуждения, снова приходим к противоречию. Таким образом предположение «существует рациональное число c , разделяющее множества A и B » приводит к противоречию. Следовательно, это предположение неверно — такого числа c не существует.

Естественно возникает вопрос: зачем нужны действительные числа — может быть, достаточно только рациональных чисел?

На этот вопрос ответ был дан еще Пифагором, обнаружившим, что длину диагонали единичного квадрата нельзя выразить рациональным числом. Следовательно, если ограничиться только рациональными числами, то диагональ квадрата со стороной 1 не будет иметь длины. Ясно, что такое положение очень неудобно, — надо, чтобы каждый отрезок имел длину. Имея же в распоряжении действительные числа, можно измерить любой отрезок.

В самом деле, любой отрезок можно измерить с недостатком с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. — полученные числа образуют множество A . Этот же отрезок можно измерить с избытком с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. — полученные числа образуют множество B . Ясно, что $a \leq b$ для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$. По свойству непрерывности множества действительных чисел существует такое число c (в данном случае единственное), что $a \leq c \leq b$ при любых числах $a \in A$ и $b \in B$. Это число c и называется длиной взятого отрезка.

Таким же способом в результате любого измерения получается действительное число. Грубо говоря, если имеется единица измерения, которую можно неограниченно делить, то при помощи действительных чисел можно измерить любую величину.

Для многих задач очень удобно геометрическое изображение действительных чисел на координатной прямой. Возьмем прямую и отметим на ней точку O , которую будем называть

началом отсчета и которая будет изображать число нуль (рис. 161). Возьмем любую точку L , лежащую на прямой справа от точки O . Длина отрезка OL есть некоторое положительное

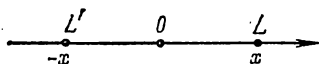


Рис. 161

действительное число x (каждый отрезок имеет длину, как мы видели выше); условимся, что точка L изображает это число x — его называют координатой точки L и пишут $L(x)$. Пусть точка L' симметрична с точкой L относительно точки O . Условимся, что точка L' изображает число $-x$. Это число называют координатой точки L' . Таким образом, каждая точка прямой изображает некоторое действительное число — положительное, если точка лежит справа от O , и отрицательное, если точка лежит слева от O . Ясно, что при этом каждое действительное число будет изображаться некоторой точкой на прямой. В дальнейшем мы не будем различать числа и точки, которые изображают эти числа: говоря «число», будем иметь в виду ту точку прямой, которая изображает это число; говоря «точка», будем иметь в виду то число, которое изображается взятой точкой.

Теперь можно просто проиллюстрировать свойство непрерывности множества действительных чисел. Каждая точка a (число) из множества A расположена левее (меньше) любой точки b (числа) из множества B . Поэтому множество A (как множество точек на прямой, изображающих числа этого множества) расположено целиком левее множества B . Свойство непрерывности множества действительных чисел утверждает, что между этими множествами A и B есть точка, «отделяющая одно множество от другого» (рис. 162, где точку c можно выбрать

многими разными способами), — факт геометрически совершенно очевидный.

Отметим некоторые свойства множества действительных чисел. Начнем с примеров. Рассмотрим множества $P = [0, 1]$ и $Q = (-2, 3)$. В множестве P есть наибольшее число — это 1, а у множества Q нет наибольшего числа. Напрашивается, правда,

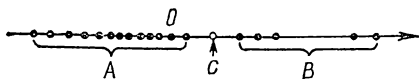


Рис. 162

ответ, что наибольшее число для Q есть 3, но 3 не принадлежит множеству Q , и потому нельзя сказать, что среди чисел, принадлежащих множеству Q , есть наибольшее. Однако число 3 для множества Q «играет роль наибольшего». Этот пример подводит к обобщению понятия наибольшего числа.

О п р е д е л е н и е. *Верхней гранью числового множества A* (коротко обозначается $\sup A$) называется такое число M , что:

- 1) $a \leq M$ для любого числа $a \in A$;
- 2) для любого положительного числа ε в множестве A можно найти такое число a' , что $a' > M - \varepsilon$.

Легко видеть, что в частном случае, если в множестве A есть наибольшее число a^* , то $a^* = \sup A$. Поэтому $\sup A$ есть обобщение понятия наибольшего числа числового множества.

Заметим, что числовое множество A не может иметь двух верхних граней (т. е. у числового множества или нет верхней грани, или есть только одна). Докажем это от противного.

Предположим, что у числового множества A есть две верхние грани c_1 и c_2 , $c_1 \neq c_2$. Тогда одно из этих чисел больше, пусть $c_1 > c_2$. Так как $c_1 = \sup A$, то для числа $\varepsilon = c_1 - c_2 > 0$ можно указать такое число $a' \in A$, что $a' > c_1 - \varepsilon = c_2$, а это противоречит тому, что c_2 есть верхняя грань множества A (нарушено условие 1)). Полученное противоречие показывает, что неравенство $c_1 \neq c_2$ невозможно. Этим доказана единственность верхней грани числового множества.

Аналогично обобщается понятие наименьшего числа у числового множества:

О п р е д е л е н и е. *Нижней гранью числового множества A* (коротко обозначается $\inf A$) называется такое число m , что:

- 1) $a \geq m$ для любого числа $a \in A$;
- 2) для любого положительного числа ε в множестве A можно подобрать такое число a'' , что $a'' < m + \varepsilon$.

Ясно, что если в числовом множестве A есть наименьшее число a_* , то $a_* = \inf A$. Нижняя грань числового множества

тоже единственна. Для приведенного выше множества Q $\sup Q = 3$, $\inf Q = -2$.

О п р е д е л е н и е. Числовое множество A ограничено сверху, если существует такое число H , что $H \geq a$ для любого $a \in A$. Числовое множество A ограничено снизу, если существует такое число h , что $h \leq a$ для любого $a \in A$. Числовое множество A ограничено, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Т е о р е м а (существование верхней (нижней) грани). Если числовое множество A не пусто и ограничено сверху (снизу), то у него существует единственная $\sup A$ ($\inf A$).

Единственность верхней (нижней) грани числового множества уже была доказана. Будем доказывать ее существование. Пусть множество A не пусто и ограничено сверху. Рассмотрим множество B , состоящее из всех чисел H таких, что $H \geq a$ для любого $a \in A$. Поскольку множество A ограничено сверху, то такие числа H существуют и потому множество B не пусто, а множество A расположено на координатной прямой левее множества B . Следовательно, по аксиоме непрерывности множества действительных чисел, существует число c , «разделяющее» множества A и B , т. е. $a \leq c \leq H$ для любых $a \in A$ и $H \in B$.

Докажем, что $c = \sup A$. По определению числа c для любого числа $a \in A$ выполнено неравенство $a \leq c$, т. е. первое условие в определении $\sup A$ выполнено. Проверим, что выполнено и второе условие.

Предположим, что второе условие не выполнено. Это значит, что существует такое число $r > 0$, что для всех чисел $a \in A$ выполнено неравенство $a \leq c - r$. Так как $c - r < c$, то число $c - r$ не принадлежит множеству B . Но это противоречит определению множества B — оно содержит все числа H , для которых $H \geq a$ при любом $a \in A$, а мы нашли число $c - r$, не принадлежащее B , но для которого $c - r \geq a$ для любого $a \in A$. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно и потому для числа c выполнено и условие 2) из определения $\sup A$.

Существование $\inf A$ доказывается аналогично.

4. Непрерывные функции. Начнем с объяснения того, какие наглядные и практические соображения привели к определению непрерывности и предела функции в точке.

Рассматривая графики функций, можно заметить, что одни из них можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги (например, $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$), а графики других функций так нарисовать нельзя (например, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \{x\}$, $y = [x]$). Гра-

фики этих функций как бы разорванные в некоторых точках кривые — это название сохраняется и за соответствующими функциями — их называют разрывными. А графики первых приведенных функций есть кривые без разрывов, они не прерываются — их принято называть непрерывными, и это же название сохраняется и для функций — непрерывные функции.

Аналогичное положение наблюдается и в общем случае: если функция f такова, что ее график (на некотором интервале I) можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, то говорят, что функция f непрерывна на интервале I , или f непрерывна в каждой точке интервала I .

Теперь это наглядное представление надо перевести на язык математики (если по графику функции мы сразу видим — непрерывна она или нет, то для функции, заданной формулой, выяснение ее непрерывности представляет собой уже определенную задачу, и приходится пользоваться теоремами, а их можно доказывать, только пользуясь строгими математическими определениями). Чтобы осуществить такой «перевод», обратимся к приближенным вычислениям.

Пусть функция f непрерывна на интервале I , т. е. ее график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Пусть надо вычислить $f(a)$ для точки $a \in I$. В инженерной практике число a обычно округляют, т. е. берут более удобное для вычислений число $x \approx a$ и вычисляют $f(x) \approx f(a)$ вместо $f(a)$. При этом получается некоторая погрешность. Что о ней можно сказать?

Чтобы разобраться в этом, изображим все сказанное выше на чертеже. На рис. 163 изображен график f и показано, как вычисляется $f(a)$ и $f(x)$. Погрешность приближенного равенства

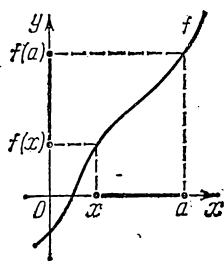


Рис. 163

$x \approx a$ есть $|x - a|$ — это расстояние между точками x и a или длина отрезка, выделенного на оси Ox . Чем меньше длина этого отрезка, тем точнее приближенное равенство $x \approx a$.

Аналогично, погрешность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ есть длина отрезка, выделенного на оси Oy . Чем точнее приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$, тем меньше длина этого отрезка. Из рисунка ясно, что чем ближе x к a , т. е. чем точнее приближенное равенство $x \approx a$, тем точнее приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$ (на оси Oy точка $f(x)$ тем ближе к точке $f(a)$). При этом для приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ можно получить любую точность за счет повышения точности приближенного равенства $x \approx a$ (т. е. за счет приближения x к a). Это

значит, что если мы хотим получить $f(x) \approx f(a)$ с точностью до 0,001, то этого можно добиться, взяв x достаточно близким к a ; если нам нужна точность до 0,00001, то и этого можно добиться; и вообще, если произвольно задана точность вычисления — это некоторое положительное число (его по традиции обозначают буквой греческого алфавита ε — «эпсилон» или δ — «дельта»), то и этого можно добиться — надо только взять x поближе к a .

Эти соображения и приводят к определению непрерывности функции в точке:

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке a* , если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ , что

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (1)$$

С точки зрения приближенных вычислений, число ε есть заданная точность приближенного вычисления $f(x) \approx f(a)$. Условие (1) и означает, что для непрерывной функции любая заданная точность вычислений может быть достигнута. Число $\delta > 0$ есть граница погрешностей приближенного равенства $x \approx a$ (т. е. границы в погрешностях в аргументе функции) и обеспечивает заданную точность вычисления значения $f(a)$.

Для теории оказался важен следующий шаг, который приводит к понятию предела функции в точке. Сначала поясним его на примере. Нарисуем график функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Она не определена при $x = 1$, а для $x \neq 1$ дробь можно сократить на общий множитель $x - 1 \neq 0$ — получим $f(x) = x + 1$ при $x \neq 1$.

Теперь легко нарисовать график функции f — это прямая, «из которой выкинута одна точка» (рис. 164) — «светлая точка графика». Таким образом, функция f не является непрерывной в точке 1 (левую и правую части графика приходится рисовать отдельно из-за «светлой точки»).

Но если изменить этот график только в одной точке (при $x = 1$), то можно получить непрерывную в 1 функцию — для этого достаточно прочертить прямую, не обращая внимания на «светлую точку». Тогда исправленная функция уже будет непрерывна в точке 1. При этом говорят, что функция f имеет предел в точке 1. Ординату «светлой точки» — в нашем случае (см. рис. 164) — число 2, называют пределом функции f в точке 1 и пишут $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

В общем случае положение аналогично. Пусть функция f такова, что при изменении ее графика только в одной точке (при

$x=a$ на рис. 165) можно получить непрерывную в точке a функцию. Тогда говорят, что функция f имеет предел в точке a , и число b (см. рис. 165) называют пределом функции f в точке a и пишут $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Таким образом, число b «играет роль $f(a)$ » для измененной (уже непрерывной) функции. А так как после изменения функция делается непрерывной в точке a , то должны выполняться условия (1), в которых $f(a)$ заменено на число b , а $x \neq a$. Суммируя все эти соображения, приходим к определению предела функции в точке.

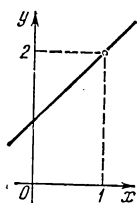


Рис. 164

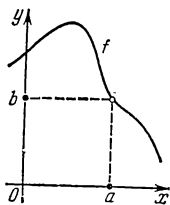


Рис. 165

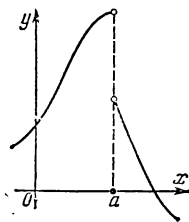


Рис. 166

Определение. Число b называют *пределом функции* f в точке a и пишут $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь надо обратить внимание на левую часть неравенства $0 < |x - a| < \delta$, говорящую о том, что значение $x = a$ не рассматривается. Это приходится делать потому, что функция f (не измененная) в точке a может быть не определена (см., например, первый и второй замечательные пределы).

На рис. 166 приведен пример функции, не имеющей предела в точке a : для того чтобы превратить нарисованную кривую в непрерывную, придется добавить целый кусок линии — одной точки недостаточно (даже если не обращать внимания на то, что при этом исправлении получится кривая, не являющаяся графиком функции).

Отметим еще, что если функция f непрерывна в точке a , то ее и «подправлять» не надо — для нее $b = f(a)$ и получаем: функция f непрерывна в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Скажем еще несколько слов о тех наглядных и практических соображениях, которые привели к понятию и определению обратной функции. К этому понятию привели потребности решения уравнений. Так, чтобы решить уравнение $x^3 = a$, была введена

функция $\sqrt[3]{x}$, обратная к функции x^3 . Рассмотрим этот вопрос в общем виде.

Пусть задана функция f . Рассмотрим график уравнения $x = f(y)$.

Начнем с простейшего случая: график уравнения $x = f(y)$ есть график некоторой функции g (рис. 167). Эта функция называется обратной к функции f . По рис. 167 видно, что $D(f)$ — область определения функции f , расположена на оси ординат и

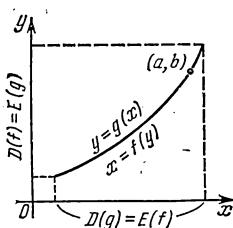


Рис. 167

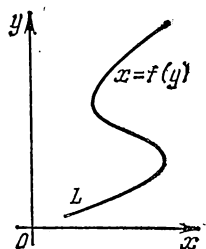


Рис. 168

совпадает с $E(g)$ — множеством значений функции g , а $E(f)$ — множество значений функции f , расположено на оси абсцисс и совпадает с $D(g)$ — областью определения функции g . Кроме того, для каждой точки (a, b) принадлежность к этой кривой равносильна и равенству $a = f(b)$, и равенству $b = g(a)$, т. е. $a = f(b) \Leftrightarrow b = g(a)$ при любых $a \in D(g)$ и любых $b \in D(f)$.

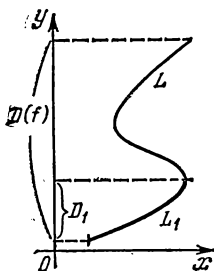


Рис. 169

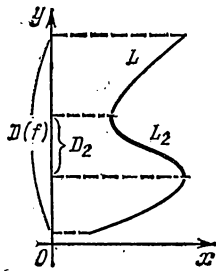


Рис. 170

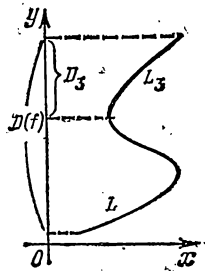


Рис. 171

Подмеченные факты и служат элементами определения обратных функций.

Переходим к более общему случаю (рис. 168). Здесь часто кривую L можно разбить на части, каждая из которых уже является графиком некоторой функции (рис. 169, 170, 171). Это разбиение дает соответственно разбиение $D(f)$ на части D_1 , D_2 и D_3 . Если рассматривать функцию f_1 , определенную на мно-

жестве D_1 равенством $f_1(x) = f(x)$ при любых $x \in D_1$, то мы оказываемся в уже разобранной выше ситуации. Функция g_1 , обратная к функции f_1 , называется функцией, обратной к функции f , суженной на множество D_1 (последнее часто опускают).

Аналогичное рассуждение проводится и для L_2 и L_3 . В таком положении мы оказываемся с функциями x^2 , $\sin x$, $\cos x$ и т. п. Функция \sqrt{x} — обратная к функции x^2 , суженной на $[0, +\infty)$ (рис. 172); функция $-\sqrt{x}$ — обратная к функции x^2 , суженной на $(-\infty, 0]$; функция $\arcsin x$ — обратная к функции $\sin x$, суженной на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (рис. 173); функция $2\pi - \arccos x$ — обратная к функции $\cos x$, суженной на $[\pi, 2\pi]$, и т. д.

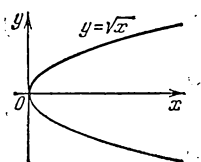


Рис. 172

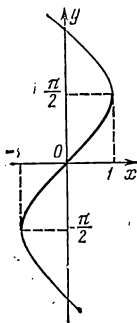


Рис. 173

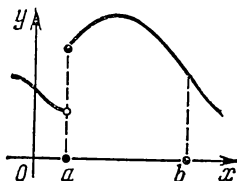


Рис. 174

Если дано уравнение $f(x) = a$ и $a \in E(f)$, а g — функция, обратная к f , то $x = g(a)$ есть решение заданного уравнения.

Перейдем теперь к изучению основных свойств функций, непрерывных на отрезке.

Определение. Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

Так, функция, график которой изображен на рис. 174, не непрерывна на отрезке $[a, b]$, хотя, если эту функцию рассматривать на всей прямой, она разрывна: a — ее точка разрыва.

Теорема 1 (Кантор). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что при x' и $x'' \in [a, b]$

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Построим на отрезке $[a, b]$ точки $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots$ следующим образом: если точка

$x_k < b$ уже построена, то рассмотрим множество E_k , состоящее из всех точек x , удовлетворяющих неравенствам

$$x_k < x \leq b, \quad |f(x) - f(x_k)| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим (рис. 175)

$$x_{k+1} = \begin{cases} b, & \text{если } E_k \text{ пусто (и на этом построение} \\ & \text{заканчивается),} \\ \inf E_k, & \text{если } E_k \text{ не пусто.} \end{cases}$$

Заметим, что $x_k < x_{k+1}$ в силу непрерывности f и

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для любого } x \in [x_k, x_{k+1}]. \quad (3)$$

Докажем, что последовательность (x_k) конечна. Предположим что она бесконечна, тогда $x_k < b$ для любого k . Пусть $c =$

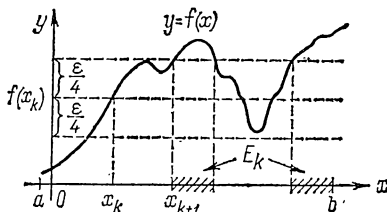


Рис. 175.

$= \sup(x_k) \leq b$. Так как $a < c \leq b$, то функция f непрерывна в точке c слева, и потому можно указать такое число $q \in (a, c)$ что

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{10} \quad \text{для любого } x \in (q, c). \quad (4)$$

По определению числа c можно найти x_k в интервале (q, c) . Тогда любое число x из интервала (x_k, c) принадлежит интервалу (q, c) и потому $|f(x) - f(x_k)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(x_k) - f(c)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{4}$, что противоречит определению x_k и E_k . Полученное противоречие доказывает, что последовательность (x_k) конечна. Поэтому можно положить

$$\delta = \min(x_{k+1} - x_k). \quad (5)$$

Возьмем два любые числа x' и x'' из отрезка $[a, b]$, для которых $0 < x'' - x' < \delta$. Возможны два случая: или эти числа попали на один из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, или нет. Если $x', x'' \in$

$\in [x_k, x_{k+1}]$, то, в силу (3),

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_k)| + |f(x'') - f(x_k)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Во втором случае между x' и x'' найдется x_k , но тогда $x' \geq x_{k-1}$, так как

$$x_{k-1} = x_k - (x_k - x_{k-1}) \leq x_k - (x'' - x') = x' - (x'' - x_k) \leq x'$$

и $x'' \leq x_{k+1}$ (доказывается аналогично), и потому, в силу (3)

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_{k-1})| +$$

$$+ |f(x_{k-1}) - f(x_k)| + |f(x'') - f(x_k)| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Теорема Кантора доказана. Свойство функции f , доказанное в этой теореме, называют так: *функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Смысл теоремы состоит в том, что для всех точек отрезка по заданному числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать одно общее число $\delta > 0$, фигурирующее в определении непрерывности функции в точке. Для функций, непрерывных на интервале, это уже не всегда можно сделать. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но она не равномерно непрерывна на $(0, 1)$. Действительно, для числа $\varepsilon = 1$, какое бы число $\delta > 0$ мы ни взяли, точки $x' = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4}\right)$ и $x'' = 2x'$ принадлежат интервалу $(0, 1)$ и для них $|x' - x''| = x' < \delta$, а

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{2x'} \right| = \frac{1}{2x'} \geq 2 > \varepsilon.$$

Теорема 2 (Вейерштрасс). *Функция, непрерывная на отрезке, имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.*

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. В силу теоремы 1 для числа 1 можно подобрать такое натуральное n , что при $x', x'' \in [a, b]$

$$|x' - x''| < \frac{2(b-a)}{n} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < 1.$$

Положим $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$. Для любого $x \in [a, b]$ найдется отрезок $[x_k, x_{k+1}]$, содержащий эту точку x . Тогда

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots$$

$$\dots + |f(x) - f(x_k)| < |f(a)| + k + 1 \leq |f(a)| + n.$$

Этим доказано, что множество E значений функции f ограничено, и потому существует $\sup E = M$ и $\inf E = m$, т. е. для любого $x \in [a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Покажем, что на отрезке $[a, b]$ найдутся точки x^* и x_* такие, что

$$f(x^*) = M \text{ и } f(x_*) = m.$$

Доказательство проведем от противного: предположим, что точки x^* на отрезке $[a, b]$ нет, т. е. $f(x) < M$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = 1/(M - f(x))$$

неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ (так как $M - f(x)$ непрерывна и $M - f(x) \neq 0$ на $[a, b]$). Поэтому, в силу доказанного выше, множество значений функции φ на отрезке $[a, b]$ является ограниченным, т. е. существует такое число C , что для любой точки $x \in [a, b]$ выполнены неравенства

$$0 < \varphi(x) \leq C, \text{ или } 1/\varphi(x) \geq 1/C, \text{ т. е. } f(x) \leq M - \frac{1}{C}.$$

Но последнее противоречит тому, что $M = \sup E$. Это противоречие получилось из-за предположения — нет точки x^* на $[a, b]$. Следовательно, это предположение неверно, и потому на отрезке $[a, b]$ есть точка x^* такая, что $f(x^*) = M$. Число $f(x^*)$ есть наибольшее значение функции f на отрезке $[a, b]$. Существование точки x_* доказывается аналогично.

Теорема 3 (о нуле функции). *Функция, непрерывная на отрезке и имеющая разные знаки на его концах, обращается в нуль внутри этого отрезка.*

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим через E множество тех точек $x \in [a, b]$, для которых $f(t) > 0$ при любых $t \in [a, x]$. Поскольку это множество ограничено (оно лежит на отрезке $[a, b]$) и не пусто (ему принадлежит точка a), то существует

$$c = \sup E \text{ и } a \leq c \leq b. \quad (6)$$

Докажем, что $f(c) = 0$. Предположим, что $f(c) > 0$, тогда $c \neq b$ (так как $f(b) < 0$), и потому $c < b$ и f непрерывна в точке c справа. Следовательно (см. следствие 2, с. 24), существует такое число $q \in (c, b)$, что $f > 0$ на интервале (c, q) , а это противоречит (6). Предположим, что $f(c) < 0$. Тогда $c \neq a$ (так как $f(a) > 0$), и потому $c > a$ и f непрерывна в точке c слева. Следовательно (см. следствие 2, с. 24), существует такое число $q \in (a, c)$, что $f < 0$ на интервале (q, c) , а это противоречит (6). Таким образом, предположение $f(c) \neq 0$

приводит к противоречию. Следовательно, это предположение неверно, и потому $f(c) = 0$. А так как $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$, то $c \neq a$ и $c \neq b$, т. е. $a < c < b$ — точка c внутри отрезка $[a, b]$.

Теорема 4 (непрерывный образ отрезка). *Функция, непрерывная на отрезке, принимает все промежуточные значения между своим наибольшим и наименьшим значениями.*

Коротко говорят: непрерывный образ отрезка есть отрезок.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. По теореме 2 на отрезке $[a, b]$ существуют точки x^* и x_* такие, что

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ для всех } x \in [a, b]. \quad (7)$$

Пусть C — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$f(x_*) < C < f(x^*). \quad (8)$$

Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x) - C$$

на отрезке с концами x_* и x^* непрерывна (так как этот отрезок есть часть отрезка $[a, b]$) и в его концах имеет разные знаки:

$$\varphi(x^*) = f(x^*) - C > 0, \quad \varphi(x_*) = f(x_*) - C < 0.$$

По теореме 3 между точками x^* и x_* существует точка c такая, что

$$\varphi(c) = 0, \text{ т. е. } f(c) - C = 0, \text{ т. е. } f(c) = C.$$

Этим теорема доказана, так как точки x^* и x_* принадлежат отрезку $[a, b]$ и потому точка c находится внутри отрезка $[a, b]$.

Теорема 5 (Лагранж). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) . Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \quad (9)$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*. Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = (x - a)(f(b) - f(a)) - (b - a)(f(x) - f(a)).$$

Она непрерывна на отрезке $[a, b]$ (таковы слагаемые) и дифференцируема в интервале (a, b) (таковы слагаемые):

$$\varphi'(x) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(x).$$

Докажем, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$. Для этого заметим, что в силу теоремы 2 на отрезке $[a, b]$ существуют такие точки x^* и x_* , что

$$\varphi(x_*) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x^*) \text{ для любых } x \in [a, b]. \quad (10)$$

Если $x^* \in (a, b)$, то это точка максимума функции φ , и потому $\varphi'(x^*) = 0$. Таким образом, в этом случае существование точки

с доказано — это x^* . Если $x^* \notin (a, b)$, то x^* совпадает с одним из концов отрезка: или $x^* = b$, и тогда

$$\varphi(x^*) = \varphi(b) = (b-a)(f(b) - f(a)) - (b-a)(f(b) - f(a)) = 0,$$

или $x^* = a$, и тогда $\varphi(x^*) = \varphi(a) = 0$. Тогда проследим за точкой x_* . Если $x_* \in (a, b)$, то это точка минимума функции φ , и потому $\varphi'(x_*) = 0$, т. е. в этом случае $c = x_*$ — точка c существует. Если же $x_* \notin (a, b)$, то x_* совпадает с одним из концов отрезка и тогда, как мы видели выше, $\varphi(x_*) = 0$. Но тогда из (10) получаем, что $\varphi(x) = 0$ для любого $x \in [a, b]$, т. е. φ — постоянная, и потому $\varphi' = 0$ в любой точке (a, b) , т. е. точка c может быть взята любой. Итак, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\varphi'(c) = 0, \text{ т. е. } f(b) - f(a) - (b-a)f'(c) = 0,$$

откуда следует формула (9).

Теорема 6. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если сделано разбиение $[a, b]$ точками $\{x_i\}$ на более мелкие отрезки, то буквой η_i будем обозначать точку, в которой f имеет наибольшее значение на $[x_{i-1}, x_i]$, а буквой ζ_i будем обозначать точку, в которой f имеет наименьшее значение на $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда числовое множество

$$P = \left\{ s = \sum f(\zeta_i) \Delta x_i \mid \{x_i\} - \text{любые разбиения } [a, b] \right\}$$

расположено левее числового множества

$$Q = \left\{ S = \sum f(\eta_i) \Delta x_i \mid \{x_i\} - \text{любые разбиения } [a, b] \right\}.$$

Действительно, для любого $s \in P$, $s = \sum f(\zeta'_i) \Delta x'_i$, и любого $S \in Q$, $S = \sum f(\eta''_j) \Delta x''_j$, возьмем разбиение $[a, b]$ точками $\{x_k\} = \{x'_i\} \cup \{x''_j\}$. Обозначим через N_i множество таких номеров k , что $x'_{i-1} \leq x_{k-1} < x'_i$, а через M_j — множество таких номеров k , что $x''_{j-1} \leq x_{k-1} < x''_j$. Тогда

$$\Delta x'_i = \sum_{k \in N_i} \Delta x_k, \quad \Delta x''_j = \sum_{k \in M_j} \Delta x_k$$

и

$$\begin{aligned} s &= \sum_i f(\zeta'_i) \Delta x'_i = \sum_i f(\zeta'_i) \sum_{k \in N_i} \Delta x_k \leq \\ &\leq \sum_k f(\zeta_k) \Delta x_k \leq \sum_k f(\eta_k) \Delta x_k = \sum_j \sum_{k \in M_j} f(\eta_k) \Delta x_k \leq \\ &\leq \sum_j f(\eta''_j) \sum_{k \in M_j} \Delta x_k = \sum_j f(\eta''_j) \Delta x''_j = S. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу непрерывности множества действительных чисел, существует число I , разделяющее множества P и Q . Покажем, что это число единственное и что

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (11)$$

Берем любое число $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то по теореме 1 существует такое число $\delta > 0$, что для любых чисел x' и x'' из $[a, b]$ выполнено условие

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (12)$$

Докажем единственность числа I , разделяющего множества P и Q . Предположим, что множества P и Q разделяют два числа I_1 и I_2 , $I_1 > I_2$. Тогда для числа $\varepsilon = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ такое, что выполнены условия (12). Возьмем любое разбиение $[a, b]$ с $\lambda < \delta$. Тогда (обозначения см. выше) $s \leq I_2 < I_1 \leq S$ и

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &\leq S - s = \sum f(\eta_i) \Delta x_i - \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \sum (f(\eta_i) - f(\xi_i)) \Delta x_i < \sum \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon = \frac{I_1 - I_2}{2}, \end{aligned}$$

т. е. получено неравенство $1 < \frac{1}{2}$. Это противоречие показывает, что двух чисел, разделяющих множества P и Q , быть не может.

Докажем (11). Берем любое разбиение $[a, b]$ с $\lambda < \delta$, где δ — из условия (12). Тогда (подсчет идет, как и выше)

$$\begin{aligned} I - \sum f(\xi_i) \Delta x_i &\leq \sum f(\eta_i) \Delta x_i - \sum f(\xi_i) \Delta x_i < \varepsilon, \\ I - \sum f(\xi_i) \Delta x_i &\geq \sum f(\xi_i) \Delta x_i - \sum f(\eta_i) \Delta x_i > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполнено условие

$$\lambda < \delta \Rightarrow \left| \sum f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Этим равенство (11) доказано.

5. Функциональные ряды и ряды Фурье. В начале гл. VI мы уже видели, что сумма непрерывных функций (бесконечное число слагаемых) может оказаться функцией разрывной. Аналогичные факты появляются и в дифференцировании, и в интегрировании. Сейчас будет указано условие, при выполнении которого

«производная суммы равна сумме производных» и «интеграл суммы равен сумме интегралов».

О п р е д е л е н и е. Функциональный ряд $\sum u_n(x)$ *сходится равномерно на множестве E* , если существует такая числовая последовательность ρ_n , что: 1) $\lim \rho_n = 0$ и 2) $|r_n(x)| \leq \rho_n$ при любом $x \in E$ для каждого номера n .

П р и м е р 1. Ряд $\sum \frac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на множестве $E = [-1, 1]$, так как для этого ряда

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots$$

Следовательно, для любого $x \in E = [-1, 1]$

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = \rho_n,$$

т.е. выполнено условие 2). Но ρ_n есть n -й остаток сходящегося ряда $\sum \frac{1}{n^2}$, и потому $\lim \rho_n = 0$ — условие 1) тоже выполнено.

Т е о р е м а 1. Если функциональный ряд сходится равномерно на интервале I , а все члены этого ряда непрерывны в точке $a \in I$, то сумма этого ряда непрерывна в точке a .

Введем обозначение для ряда и его суммы:

$$\sum u_n(x) = S(x).$$

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости ряда на I следует, что существует номер N такой, что $|r_N(x)| \leq \rho_N < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in I$. Частичная сумма этого ряда с этим номером

$$S_N(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_N(x)$$

непрерывна в точке a (конечное число слагаемых, каждое из которых непрерывно в точке a по условию теоремы). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ и

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |S_N(x) - S_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для любого x , удовлетворяющего условию $|x - a| < \delta$, имеем:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(a)| &= |S_N(x) + r_N(x) - S_N(a) - r_N(a)| \leq \\ &\leq |S_N(x) - S_N(a)| + |r_N(x)| + |r_N(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $a \rightarrow$ конец промежутка I , то аналогично доказывается односторонняя непрерывность (по I) $S(x)$ в точке a . Таким образом, сумма ряда в примере 1 непрерывна в $[-1, 1]$ (и не определена вне).

Т е о р е м а 2. Если ряд $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ и все его члены непрерывны на $[a, b]$, то

$$\int_a^b \sum u_n(x) dx = \sum \int_a^b u_n(x) dx. \quad (1)$$

Поскольку ряд сходится равномерно на $[a, b]$ и его члены непрерывны на $[a, b]$, то, по теореме 1, его сумма непрерывна на $[a, b]$ и потому определена левая часть в равенстве (1). Все слагаемые в правой части равенства (1) тоже определены, в силу непрерывности членов ряда на $[a, b]$. Остаток $r_n(x)$ этого ряда тоже непрерывен на $[a, b]$, так как $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ — это разность непрерывных на $[a, b]$ функций. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum u_m(x) dx &= \int_a^b (S_n(x) + r_n(x)) dx = \int_a^b S_n(x) dx + \\ &+ \int_a^b r_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots \\ &\dots + \int_a^b u_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx = s_n + \alpha_n. \end{aligned}$$

Первые n слагаемых в этой сумме есть n -я частичная сумма s_n числового ряда, стоящего в правой части равенства (1). В силу равномерной сходимости ряда на $[a, b]$

$$|\alpha_n| = \left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx \leq \rho_n(b-a),$$

и потому $\lim \alpha_n = 0$. Следовательно,

$$\lim s_n = \int_a^b \sum u_m(x) dx,$$

и теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Если функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы в интервале I , ряд $\sum u'_n(x)$ сходится равномерно на I и существует точка $a \in I$ такая, что $\sum u_n(a)$ сходится, то

ряд $\sum u_n(x)$ сходится на I и для любого $x \in I$ существует

$$\left(\sum u_n(x)\right)' = \sum u_n'(x). \quad (2)$$

Возьмем любое $x \in I$. Отрезок с концами x и a принадлежит I , и потому на этом отрезке ряд $\sum u_n'(x)$ сходится равномерно, все его члены непрерывны по условию, поэтому (теорема 2)

$$\int_a^x \sum u_n'(t) dt = \sum \int_a^x u_n'(t) dt = \sum (u_n(x) - u_n(a)). \quad (3)$$

Тогда сходится ряд-сумма $\sum ((u_n(x) - u_n(a)) + u_n(a)) = \sum u_n(x)$. Итак, ряд $\sum u_n(x)$ сходится при любом $x \in I$, а из (3) следует:

$$\sum u_n(x) = \int_a^x \sum u_n'(t) dt + \sum u_n(a). \quad (4)$$

Справа под знаком интеграла стоит непрерывная функция, так как ряд сходится равномерно, а слагаемые непрерывны. Поэтому (свойство III определенных интегралов, с. 130) правая часть есть дифференцируемая функция от x и ее производная равна

$$\left(\int_a^x \sum u_n'(t) dt\right)' = \sum u_n'(x),$$

так как второе слагаемое — постоянная. Этим, в силу тождества (4), на I доказана формула (2).

В гл. VI рассматривались представления функций при помощи степенных рядов. При этом оказалось, что такие представления годятся только для функций, имеющих производные всех порядков — это чрезвычайно сужает сферу применимости степенных рядов. Но из физических соображений (см. КМА) возник еще один способ представления функций — при помощи рядов Фурье. Сфера их применения оказалась очень обширной (см., например, теорему 5).

Определение. Рядом Фурье для функции f называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (5)$$

Таким образом, для того чтобы написать ряд Фурье для функции f , достаточна ее непрерывность (даже интегрируемость — см. КМА). Подчеркнем, что существование коэффициентов Фурье (формулы (5)) еще не гарантирует истинности равенства

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (6)$$

Приведем без доказательства (см. КМА) две теоремы, гарантирующие равенство (6). Предварительно только заметим, что правая часть в (6) имеет период 2π , поэтому это равенство возможно только для функций, имеющих период 2π .

Теорема 4. Если существует $f'(a)$, то ряд Фурье функции f сходится в точке a к $f(a)$.

Теорема 5 (Дирихле). Если промежуток $[0, 2\pi)$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция f монотонна, то ряд Фурье функции f сходится в любой точке x к числу $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$, где $f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t)$, $f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$.

Из этой теоремы следует, что в каждой точке непрерывности функции f (в условиях теоремы) выполнено равенство (6).

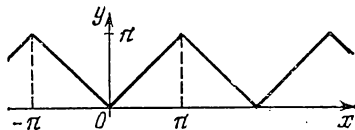


Рис. 176

Пример 2. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ при $x \in [-\pi, \pi]$, имеющую период 2π (рис. 176). Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = 0, \text{ так как } |x| \sin nx \text{ нечетна.}$$

Таким образом, ряд Фурье найден и можно написать равенство (теорема 5):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx.$$

Пример 3. Разложим в ряд Фурье функцию f с периодом 2π

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{при } x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \\ 2 & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

В точках разрыва положим $f = -1$, — тогда (см. рис. 177) выполняются условия теоремы Дирихле и в точках разрыва, и

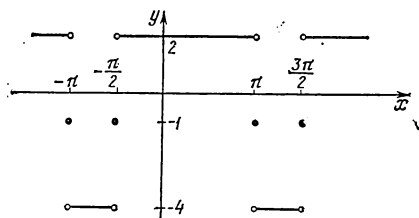


Рис. 177

потому сумма ряда Фурье равна значению функции для всех x . Вычислим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -4 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dx \right) = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -4 \cos nx dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n} \sin nx \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -4 \sin nx \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin nx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n} \cos nx \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{6}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum \frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} \cos nx + \frac{6}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n \right) \sin nx.$$

Поясним происхождение формул (5). Для этого докажем при любых натуральных n и m равенства

- 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi,$
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0,$
- 3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0$ при $n \neq m,$
- 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0.$

Действительно:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\
 3) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos (n-m)x + \\
 &+ \cos (n+m)x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (n-m)x}{n-m} + \frac{\sin (n+m)x}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,
 \end{aligned}$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Остальные формулы доказываются так же.

Про формулы 1) — 4) говорят: тригонометрическая система функций ортогональна.

Предположим теперь, что в формуле (6) ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \pi a_0, \end{aligned}$$

все слагаемые в суммах обратились в нуль в силу 4). Чтобы получить формулу для a_n при $n > 0$, поменяем в (6) индекс суммирования на m и умножим обе части равенства на $\cos nx$. Поскольку $|\cos nx| \leq 1$, то после этого умножения опять получится ряд, равномерно сходящийся на $[-\pi, \pi]$, и потому (теорема 2)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx \, dx + \\ &+ \sum \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx \right) = a_n \pi, \end{aligned}$$

так как в силу формул 2) — 4) в суммах останется только одно слагаемое, отличное от нуля при $m = n$, а интеграл в этом слагаемом равен π по формуле 1). Отсюда находим a_n . Чтобы найти b_n , умножаем обе части равенства (6) (в котором индекс суммирования обозначен буквой m) на $\sin nx$ и повторяем приведенные выше рассуждения.

Выведем еще формулу для остатка степенного ряда в общем случае.

Теорема 6 (формула Тейлора). Пусть в некоторой окрестности U точки a функция f имеет $(n+1)$ -ю производную. Тогда для любого $x \in U$ существует число ξ между x и a такое, что

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^n \frac{(x-a)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi). \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой Тейлора*. Последнее слагаемое в формуле (7) называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа. Правая часть формулы Тейлора без остаточного члена есть многочлен n -й степени, его называют многочленом Тейлора для функции f в точке a и обозначают $T_n(x)$.

Для доказательства формулы (7) зафиксируем любое число $x \in U$, $x \neq a$ (так как при $x = a$ равенство (7) очевидно) и возьмем такое число p , что

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^n \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + p(x-a)^{n+1} \quad (8)$$

(это можно сделать, так как $x \neq a$). Тогда функция от t

$$g(t) = f(x) - f(t) - \sum_{m=1}^n \frac{(x-t)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(t) + p(x-t)^{n+1}$$

дифференцируема в U ,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t) - \sum_{m=1}^n \left(\frac{(x-t)^m}{m!} \cdot f^{(m+1)}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m(x-t)^{m-1}}{m!} \cdot f^{(m)}(t) \right) + p(n+1)(x-t)^n = \\ &= p(n+1)(x-t)^n - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t), \\ g(x) &= f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

$$g(a) = f(x) - f(a) - \sum_{m=1}^n \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) - p(x-a)^{n+1} = 0$$

по выбору числа p . Поэтому $g(x) - g(a) = 0$ и, по теореме Лагранжа, между точками x и a существует такое число ξ , что $g'(\xi) = 0$, т. е.

$$0 = g'(\xi) = p(n+1)(x-\xi)^n - \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

откуда

$$p = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

так как $\xi \neq x$ и на $(x-\xi)^n$ можно сократить. Поставив это выражение для p в формулу (8), получаем формулу (7).

Пример 4. Вычислим с точностью до 10^{-5} число e . Для этого воспользуемся формулой Тейлора для функции $f(x) = e^x$

при $a = 0$ и $x = 1$:

$$e = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Теперь надо подобрать n так, чтобы остаток этой формулы был меньше 0,00001:

$$0 < \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}, \text{ т. е. } (n+1)! > 3 \cdot 10^5.$$

Подбор показывает, что достаточно взять $n = 8$. Следовательно,

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 8} = 2,71828$$

с точностью до пяти знаков после запятой (по недостатку).

Пример 5. Докажем достаточный признак экстремума для функции двух переменных (формулировку см. на с. 103). По ус-

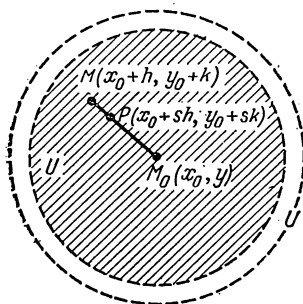


Рис. 178

ловию вторые частные производные функции f непрерывны в окрестности U_0 точки M_0 . Возьмем любую точку $M \neq M_0$ из U_0 . Пусть $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + h, y_0 + k)$. Введем вспомогательную функцию (одной переменной t):

$$g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Для нее $g(0) = f(M_0)$, $g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(M)$, $g'(t) = f'_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + f'_y(x_0 +$

$+ th, tk)k$ и $g'(0) = f'_x(M_0)h + f'_y(M_0)k = 0$ по условию теоремы и

$$g''(t) = f''_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk)h^2 + 2f''_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)hk + f''_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk)k^2. \quad (9)$$

По формуле Тейлора для функции g существует число $s \in (0; 1)$ такое, что

$$f(M) - f(M_0) = g(1) - g(0) = g'(0) + g''(s) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2), \quad (10)$$

где точка $P(x_0 + sh, y_0 + sk)$ (см. формулу (9)) лежит внутри отрезка M_0M (рис. 178). Поэтому, если точка M принадлежит окрестности U точки M_0 , то и $P \in U$.

Теперь разберем случай $D > 0$. Функция $\varphi(Q) = f''_{xx}(Q) \times f''_{yy}(Q) - (f''_{xy}(Q))^2$ непрерывна в U_0 и $\varphi(M_0) = AC - B^2 = D > 0$. Поэтому $\varphi > 0$ в некоторой окрестности $U \subset U_0$ точки M_0 , т. е. $f''_{xx}(Q)f''_{yy}(Q) > (f''_{xy}(Q))^2 \geq 0$ в U . Следовательно, $f''_{xx} \neq 0$ в U и, в силу непрерывности f''_{xx} , знак f''_{xx} в U совпадает со знаком $f''_{xx}(M_0) = A$. Для любой точки $M \in U$ в формуле (10) точка $P \in U$, и потому $f''_{xx}(P) \neq 0$, так что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} (f''_{xx}(P) h^2 + 2f''_{xy}(P) hk + f''_{yy}(P) k^2) = \\ = \frac{1}{2f''_{xx}(P)} ((f''_{xx}(P) h + f''_{xy}(P) k)^2 + (f''_{xx}(P) f''_{yy}(P) - \\ - (f''_{xy}(P))^2) k^2). \quad (11)$$

Оба выражения в скобках неотрицательны и одновременно не обращаются в нуль. Поэтому знак Δf совпадает со знаком $f''_{xx}(P)$, который совпадает со знаком A . Следовательно, если $A > 0$, то $\Delta f > 0$ в U , т. е. $f(M) > f(M_0)$ для любой точки $M \in U$ и $M \neq M_0$ — M_0 — точка минимума (строгого) функции f . Если $A < 0$, то $\Delta f < 0$ в U , т. е. $f(M) < f(M_0)$ для любой точки $M \in U$ и $M \neq M_0$ — M_0 — точка максимума (строгого) функции f .

В случае $D < 0$ существует такая окрестность $U \subset U_0$ точки M_0 и пара прямых l_1 и l_2 , проходящих через точку M_0 (рис. 179), что для любой точки $M_1 \in l_1 \cap U$ будет $f(M_1) > f(M_0)$, т. е. в точке M_0 нет максимума функции f , а для любой точки $M_2 \in l_2 \cap U$ будет $f(M_2) < f(M_0)$, т. е. в точке M_0 нет минимума функции f . Следовательно, в точке M_0 нет экстремума функции f . Покажем, как находить l_1 , l_2 и U .

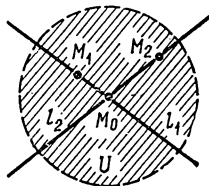


Рис. 179

Для любого числа λ точки $M(x_0 + \lambda k, y_0 + k)$, $k \in \mathbf{R}$, образуют прямую, проходящую через точку M_0 (при $k = 0$). Выбирая λ , получим прямые l_1 и l_2 . При этом придется рассмотреть два случая: $A \neq 0$ и $A = 0$.

Запишем формулу (11) для точек $M(x_0 + \lambda k, y_0 + k)$:

$$\Delta f = \frac{k^2}{2} (f''_{xx}(P) \lambda^2 + 2f''_{xy}(P) \lambda + f''_{yy}(P)) = \frac{k^2}{2} r(P, \lambda). \quad (12)$$

При фиксированном λ выражение $r(Q, \lambda) = f''_{xx}(Q) \lambda^2 + 2f''_{xy}(Q) \lambda + f''_{yy}(Q)$ — непрерывная в U_0 функция относительно

Q и $r(M_0, \lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$. При $A \neq 0$ это квадратный трехчлен относительно λ с дискриминантом $(2B)^2 - 4AC = -4(AC - B^2) = -4D > 0$ (так как $D < 0$). Поэтому есть такое число λ_1 , что $r(M_0, \lambda_1) > 0$, и такое число λ_2 , что $r(M_0, \lambda_2) < 0$. Но это сохраняется и при $A = 0$: тогда $r(M_0, \lambda) = 2B\lambda + C$ — линейная функция с $B \neq 0$ (так как $0 > D = AC - B^2 = -B^2$, т. е. $B^2 > 0$), и потому есть число λ_1 такое, что $r(M_0, \lambda_1) > 0$, и есть такое число λ_2 , что $r(M_0, \lambda_2) < 0$. Так как функция r непрерывна в U_0 , то существует окрестность $U \subset U_0$ точки M_0 , в которой $r(Q, \lambda_1) > 0$ и $r(Q, \lambda_2) < 0$. Точки $M_1(x_0 + \lambda_1 k, y_0 + k)$, $k \in \mathbb{R}$, образуют прямую l_1 и $M_0 \in l_1$. Для любой точки $M_1 \in l_1 \cap \dot{U}$ (см. (12)) $\Delta f = \frac{1}{2} k^2 r(P, \lambda_1) > 0$, так как $P \in U$, т. е. $f(M_1) > f(M_0)$. Точки $M_2(x_0 + \lambda_2 k, y_0 + k)$, $k \in \mathbb{R}$, образуют прямую l_2 и $M_0 \in l_2$. Для любой точки $M_2 \in l_2 \cap \dot{U}$ (см. (12)) $\Delta f = \frac{1}{2} k^2 r(P, \lambda_2) < 0$, так как $P \in U$, т. е. $f(M_2) < f(M_0)$.

Теорема полностью доказана.

6. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры.

Из школьного курса вы уже знакомы с векторами. Говоря о векторе (скорости, силе, параллельном переносе и т. п.), указывают его величину (неотрицательное число) и его направление (т. е. вектор — это пара: неотрицательное число и направление). Поэтому векторы удобно изображать «направленными отрезками» (рис. 180), и коротко говорят: «вектор — направленный отрезок». Из школьного курса известны правила сложения векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и его свойства, координаты вектора. Введем еще один вид произведения двух векторов — векторное произведение:

О п р е д е л е н и е. Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор c — его обозначают $a \times b$, такой, что:

- 1) $c \perp a$ и $c \perp b$;
- 2) $|c| = |a| \cdot |b| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами a и b ;
- 3) тройка векторов a , b и c — правая (т. е. они расположены так, как на правой руке расположены первые три пальца — большой, указательный и средний — рис. 181).

Докажем основные свойства векторного произведения:

- I. $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$, или $b = 0$, или $a \parallel b$;
- II. $a \times b = -b \times a$;
- III. $(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b)$;
- IV. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Свойство I ясно, так как только в этих случаях $|a \times b| = 0$, как это видно из определения, п. 2).

II. Если $a \times b = 0$, то и $b \times a = 0$ в силу свойства I, и равенство выполнено. Если $a \times b \neq 0$, то отложим векторы a и b от общего начала и проведем через них плоскость α (она единственная, так как $a \nparallel b$). По определению векторного произведения и $a \times b \perp \alpha$, и $b \times a \perp \alpha$, и потому $a \times b \parallel b \times a$. Так как $|a \times b| = |b \times a|$ (см. определение, п. 2)), то эти векторы или равны, или противоположны. По рис. 182 видно, что эти векторы направлены противоположно (в силу п. 3) определения) и потому $a \times b = -b \times a$.

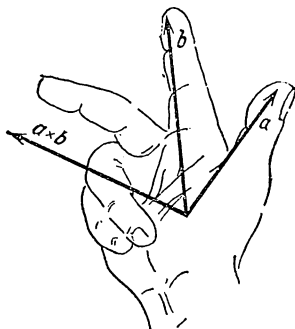


Рис. 181

III. Если $\lambda = 0$, то левая и правая части равенства есть нулевой вектор и потому III верно. Если $a \times b = 0$, то и $(\lambda a) \times b = 0$ (в силу свойства I) и потому III тоже верно. Если $a \times b \neq 0$, то $a \nparallel b$ и потому существует единственная плоскость α , содержащая эти векторы, когда они отложены от общего начала. Так как $a \times b \perp \alpha$ и $(\lambda a) \times b \perp \alpha$, то $\lambda(a \times b) \parallel (\lambda a) \times b$. Подсчитаем длины этих векторов. Если $\lambda > 0$,

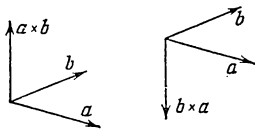


Рис. 182

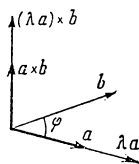


Рис. 183

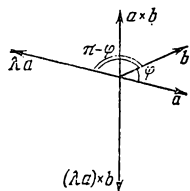


Рис. 184

то $\varphi = \widehat{ab} = (\widehat{\lambda a})\widehat{b}$ (рис. 183) и потому $|(\lambda a) \times b| = \lambda |a| \cdot |b| \sin \varphi = |\lambda(a \times b)|$. Кроме того — см. рис. 183, — векторы $(\lambda a) \times b$ и $a \times b$ направлены в одну сторону (в силу п. 3) определения), так что $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b$. Если $\lambda < 0$, то $(\widehat{\lambda a})\widehat{b} = \pi - \varphi$ (рис. 184) и $|(\lambda a) \times b| = |\lambda a| \cdot |b| \sin(\pi - \varphi) = |\lambda| \cdot |a| \cdot |b| \sin \varphi = |\lambda(a \times b)|$. Направления векторов $a \times b$ и $(\lambda a) \times b$ — противоположны (в силу п. 3) определения, см. рис. 184), и потому векторы $\lambda(a \times b)$ и $(\lambda a) \times b$ направлены в одну сторону, так как $\lambda < 0$. Итак, векторы параллельны,

направлены в одну сторону и имеют равные длины — следовательно, они равны. Свойство III доказано.

Прежде чем доказывать свойство IV, познакомимся со *смешанным произведением трех векторов* — оно обозначается (a, b, c) и по определению равно $a(b \times c)$: $(a, b, c) = a(b \times c)$.

Теорема 1 (признак компланарности трех векторов). $(a, b, c) = 0$ — *необходимое и достаточное условие компланарности векторов a, b, c .*

Необходимость. Если векторы a, b и c компланарны, то, отложенные от общего начала, они принадлежат плоскости α . Поскольку $b \times c \perp \alpha$ и $a \in \alpha$, то $a \perp b \times c$ и потому $a(b \times c) = 0$.

Достаточность. Пусть $(a, b, c) = 0$. Если $b \times c = 0$, то $b \parallel c$. Отложим все три вектора от общего начала и проведем через векторы a и b плоскость α . Поскольку $c \parallel b$, то $c \in \alpha$, т. е. в этом случае компланарность векторов доказана. Если $b \times c \neq 0$, то $b \nparallel c$. Отложим все три вектора от общего начала и проведем через векторы b и c плоскость α . Так как $b \times c \perp \alpha$ — по определению и $a \perp b \times c$, поскольку $a(b \times c) = 0$ — по условию, то $a \in \alpha$, т. е. a, b и c компланарны.

Теорема 2 (геометрический смысл смешанного произведения). *Смешанное произведение (a, b, c) (не равное нулю) равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (отложенных от общего начала) и взятого со знаком плюс, если тройка a, b и c — правая, и со знаком минус — в противном случае.*

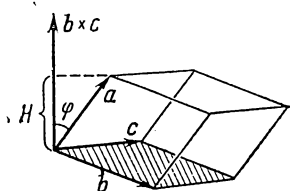


Рис. 185

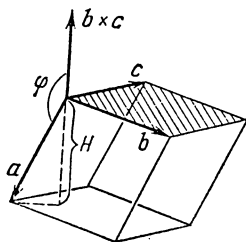


Рис. 186

Отметим, что из определения $b \times c$ следует, что $|b \times c|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах b и c (на рис. 185 и 186 этот параллелограмм заштрихован). Тогда

$$(a, b, c) = |a| \cdot |b \times c| \cos \varphi = |a| \cos \varphi S = \pm HS = \pm V$$

(на рис. 186 угол φ — тупой, и потому $|a| \cos \varphi = -H$).

Теорема 3. *Смешанное произведение трех векторов меняет знак на противоположный при перестановке в нем двух векторов.*

Надо доказать три формулы: $(a, b, c) = -(b, a, c)$, $(a, b, c) = -(c, b, a)$, $(a, b, c) = -(a, c, b)$. Третья формула доказывается просто: $(a, b, c) = a(b \times c) = a(-(c \times b)) = -a(c \times b) = -(a, c, b)$.

Докажем вторую формулу. Если векторы a, b, c компланарны, то смешанные произведения равны нулю — формула верна. Пусть векторы некопланарны. Из рисунка 187 видно, что при перестановке векторов в правой тройке a, b, c получается левая тройка b, a, c (и наоборот) и потому $(a, b, c) = V$ а $(b, a, c) = -V$ (по теореме 2), т. е. $(a, b, c) = -(b, a, c)$.

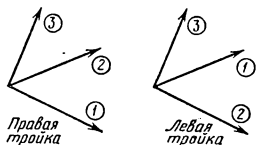


Рис. 187

Доказательство второй формулы опирается на уже доказанные:

$$(c, b, a) = -(b, c, a) = (b, a, c) = -(a, b, c).$$

Докажем еще одно свойство скалярного произведения:

$$\text{если } aq = bq \text{ для любого вектора } q, \text{ то } a = b. \quad (1)$$

Действительно, $aq = bq \Rightarrow aq - bq = 0$, т. е. $(a - b)q = 0$. Поскольку вектор q — любой, положим $q = a - b$. Тогда $(a - b)(a - b) = 0$, т. е. $|a - b|^2 = 0$ и, следовательно, $a - b = 0$, т. е. $a = b$.

Теперь просто доказывается распределительный закон для векторного умножения (свойство IV): для любого вектора q имеем:

$$\begin{aligned} q(a \times (b + c)) &= (q, a, b + c) = -(b + c, a, q) = \\ &= -(b + c)(a \times q) = -b(a \times q) - c(a \times q) = \\ &= -(b, a, q) - (c, a, q) = (q, a, b) + (q, a, c) = \\ &= q(a \times b) + q(a \times c) = q(a \times b + a \times c). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (1), следует свойство IV векторного умножения.

Пользуясь свойствами I — IV, получим координаты векторного произведения через координаты сомножителей. Если $a(x_1, y_1, z_1)$ и $b(x_2, y_2, z_2)$, то (по определению координат вектора)

$$\begin{aligned} a \times b &= (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \times (x_2 i + y_2 j + z_2 k) \stackrel{(1)}{=} \\ &= x_1 x_2 i \times i + x_1 y_2 i \times j + x_1 z_2 i \times k + y_1 x_2 j \times i + y_1 y_2 j \times j + \\ &\quad + y_1 z_2 j \times k + z_1 x_2 k \times i + z_1 y_2 k \times j + z_1 z_2 k \times k \stackrel{(2)}{=} \\ &= x_1 y_2 k - x_1 z_2 j - y_1 x_2 k + y_1 z_2 i + z_1 x_2 j - z_1 y_2 i = \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) i - (x_1 z_2 - z_1 x_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k. \end{aligned}$$

[1] Правила III и IV позволяют обычным способом (как в алгебре) раскрывать скобки, нельзя только менять местами

векторные множители; числовые множители выносим по правилу II;

- (2) подсчитываем по определению: $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$,
 $i \times i = j \times j = k \times k = 0$, $j \times i = -i \times j = -k$ и т. д.

Выражения, стоящие в скобках, есть координаты векторного произведения. Все они образованы по одному и тому же закону: надо координаты векторов — сомножителей подписать друг под другом, и для получения n -й координаты векторного произведения вычеркивается столбец из n -х координат сомножителей, перемножаются оставшиеся числа «по диагонали», произведение, содержащее множителем число в левом верхнем углу, берется с плюсом, а другое — с минусом:

$\begin{array}{ c } \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc} y_1 & & z_1 \\ & \swarrow \searrow & \\ y_2 & & z_2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc} x_1 & & z_1 \\ & \swarrow \searrow & \\ x_2 & & z_2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc} y_1 & & z_1 \\ & \swarrow \searrow & \\ y_2 & & z_2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \end{array}$
	$y_1 z_2 - y_2 z_1$		$x_1 z_2 - x_2 z_1$		$x_1 y_2 - x_2 y_1$	
	первая		вторая		третья	
	координата		координата		координата	

Эти выражения называются определителями 2-го порядка, их обозначают так:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Запишем векторное произведение с помощью этих обозначений:

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Правая часть в этом равенстве есть сокращенная запись для суммы определителей, написанных слева, она называется определителем 3-го порядка. В такой форме векторное произведение записывать через координаты сомножителей проще всего.

Пример 1. Найдем $a \times b$, если $a(-1, 2, 0)$ и $b(3, -1, -2)$. По формуле (2)

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} k = -4i - 2j - 5k, \end{aligned}$$

т. е. вектор $a \times b$ имеет координаты $(-4, -2, -5)$.

Пример 2. Найдем площадь $\triangle ABC$, где $A(1, 2, -5)$, $B(-3, 0, 2)$, $C(4, -2, 0)$. Принято говорить, что этот треугольник построен на векторах $\overline{CA} = \mathbf{a}(-3, 4, -5)$ и $\overline{CB} = \mathbf{b}(-7, 2, 2)$. Площадь S треугольника ABC вдвое меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах. А при доказательстве теоремы 2 мы видели, что площадь такого параллелограмма равна $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Поэтому сначала найдем

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} - (-41)\mathbf{j} + 22\mathbf{k}.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 41^2 + 22^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2489} \approx 25 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Докажем теперь, что для векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{c}(x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Действительно, для векторов $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$ и $\mathbf{q}(q_1, q_2, q_3) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ скалярное произведение $\mathbf{p}\mathbf{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, т. е. в разложении \mathbf{q} векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} заменены соответствующими координатами вектора \mathbf{p} . А так как

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

то после замены в этом выражении векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} соответствующими координатами вектора \mathbf{a} получаем формулу (3).

Пример 3. Найдем $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, если $\mathbf{a}(-3, 1, 2)$, $\mathbf{b}(2, 3, 0)$ и $\mathbf{c}(0, 4, -1)$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3(-3) - 1(-2) + 2 \cdot 8 = 27.$$

Пример 4. Лежит ли точка $M(3, 0, -2)$ в плоскости $\triangle ABC$, где $A(5, 4, 0)$, $B(-3, 1, 2)$ и $C(0, -1, 4)$? Для того чтобы точка M лежала в плоскости $\triangle ABC$, необходима и достаточна компланарность векторов $\overline{MA} = \mathbf{a}(2, 4, 2)$, $\overline{MB} = \mathbf{b}(-6, 1, 4)$ и $\overline{MC} = \mathbf{c}(-3, -1, 6)$. Так как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(10) - 4(-24) + 2 \cdot 9 \neq 0,$$

то точка M не лежит в плоскости $\triangle ABC$.

Заметим еще (как следствие из теоремы 2), что для пирамиды, построенной на векторах a , b и c , ее объем

$$V = \frac{1}{6} |(a, b, c)|.$$

Пример 5. Найдем объем пирамиды с вершинами $A(3, -2, 1)$, $B(4, -3, 0)$, $C(-2, 1, -5)$ и $D(4, 3, -2)$. Эта пирамида построена на векторах $\overrightarrow{DA} = a(-1, -5, 3)$, $\overrightarrow{DB} = b(0, -6, 2)$ и $\overrightarrow{DC} = c(-6, -2, -3)$, и потому

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pm 1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\pm 1}{6} (-1(-14) + 5(12) + 3(-36)) = 5 \frac{2}{3} \text{ (ед}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Приведем основные свойства смешанного произведения. Они, в силу формулы (3), одновременно являются и основными свойствами определителей 3-го порядка (для определителей 2-го порядка эти свойства тоже верны и проверяются непосредственным вычислением).

I. При перестановке двух векторов знак смешанного произведения меняется на противоположный (см. теорему 3).

II. Числовой множитель можно выносить за знак смешанного произведения: $(\lambda a, b, c) = \lambda(a, b, c)$ и т. д.

III. Смешанное произведение аддитивно: $(a' + a'', b, c) = (a', b, c) + (a'', b, c)$.

IV. Для равенства нулю смешанного произведения необходимо и достаточно, чтобы один из векторов был линейной комбинацией двух других: например, $c = \lambda a + \mu b$. Частные случаи: 1) один из векторов нуль, 2) два вектора параллельны, например, $c = \lambda a$.

V. Смешанное произведение не меняется, если к одному из векторов прибавить линейную комбинацию двух других векторов.

VI. При транспонировании определитель не меняется:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство относится исключительно к определителям (и 2-го порядка тоже). Транспонирование определителя состоит в следующем: числа, записанные в строку (у определителя, стоящего слева, это a_1, a_2, a_3 — первая строка, b_1, b_2, b_3 — вторая строка, c_1, c_2, c_3 — третья строка), записываются в столбец с тем же

номером (у определителя, стоящего справа, — соответственно первый, второй и третий столбцы).

II. Пользуясь свойством скалярного произведения, имеем:

$$(\lambda a, b, c) = (\lambda a) (b \times c) = \lambda (a (b \times c)) = \lambda (a, b, c),$$

т. е. свойство II доказано для первого множителя. Пользуясь этим и свойством I, имеем: $(a, \lambda b, c) = -(\lambda b, a, c) = -\lambda (b, a, c) = \lambda (a, b, c)$. Для третьего множителя доказательство аналогично.

III. Пользуясь свойством скалярного умножения, имеем:

$$\begin{aligned} (a' + a'', b, c) &= (a' + a'') (b \times c) = a' (b \times c) + a'' (b \times c) = \\ &= (a', b, c) + (a'', b, c), \end{aligned}$$

т. е. для первого множителя свойство III доказано. Для остальных множителей доказательство проводится, как и в свойстве II.

IV. По теореме 1 для равенства $(a, b, c) = 0$ необходима и достаточна компланарность векторов a, b и c , но тогда один из них есть линейная комбинация двух других (доказано в школе).

V. По свойству III имеем: $(a + \lambda b + \mu c, b, c) = (a, b, c) + (\lambda b + \mu c, b, c) = (a, b, c)$, так как $(\lambda b + \mu c, b, c) = 0$ по свойству IV. Свойство V доказано для первого множителя. Для остальных множителей доказательство проводится, как и в свойстве II.

VI. Для доказательства этого правила вычислим, как обычно, определители, выписанные в равенстве, — правый коротко обозначим Δ , а левый Δ^* (* — знак транспонирования):

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$$

$$\Delta^* = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2.$$

Отсюда видно, что Δ и Δ^* состоят из одинаковых слагаемых и потому $\Delta = \Delta^*$.

Из свойства VI следует, что все, что было сказано относительно строк определителя, справедливо и относительно его столбцов. Это часто упрощает вычисление определителей.

Пример 6. Вычислим, пользуясь доказанными свойствами, определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 0 = -20.$$

- (1) Складываем второй и третий столбцы и вычитаем полученное из первого столбца;
- (2) пишем разложение по первому столбцу, как это делается для первой строки.

Покажем теперь, как можно решать геометрические задачи, пользуясь изложенным выше материалом. Напомним только, что

в школе было доказано, что всякое уравнение первой степени относительно x , y и z есть уравнение некоторой плоскости и для каждой плоскости есть ее уравнение первой степени. При этом вектор $\mathbf{N}(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пример 7. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{N}(A, B, C)$. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала плоскости, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ был параллелен этой плоскости, и потому $\overline{M_0M} \perp \mathbf{N}$, что записываем при помощи скалярного произведения $\mathbf{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$ или в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

Пример 8. Каково расположение следующих плоскостей:

- 1) $2x - 3y + z = 0$, 2) $6y - 4x - 2z = 7$,
3) $5x + 2y - 4z = 1$, 4) $x - 2y - 3z + 10 = 0$?

Выписываем перпендикулярные к этим плоскостям векторы:

$$\mathbf{N}_1(2, -3, 1), \quad \mathbf{N}_2(-4, 6, -2), \quad \mathbf{N}_3(5, 2, -4), \quad \mathbf{N}_4(1, -2, -3).$$

Так как $\mathbf{N}_2 = -2\mathbf{N}_1$, то $\mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{N}_2$ и потому 1-я и 2-я плоскости параллельны. Так как $\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = 0$, то $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_3$, т. е. 1-я и 3-я плоскости перпендикулярны.

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_4}) &= \\ &= \frac{\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_4}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_4|} = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$

Таким образом, угол между векторами \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_4 равен $\arccos \frac{5}{14}$.

Этому же равен угол между плоскостями 1-й и 4-й.

Пример 9. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Необходимое и достаточное условие того, что точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости указанных точек, есть компланарность трех векторов $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, т. е. их смешанное произведение $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$, что дает

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Любую прямую можно задать парой пересекающихся по ней плоскостей, и каждая пара пересекающихся плоскостей задает

прямую. Но такой способ задания прямой в пространстве не имеет геометрической наглядности. Гораздо геометричнее задание прямой в пространстве, при котором указан параллельный прямой вектор $l(m, n, p)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой. Тогда для того чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{M_0M} \parallel l$, т. е. $\overline{M_0M} = tl$, что в координатах дает:

$$x = x_0 + tm, \quad y = y_0 + tn, \quad z = z_0 + tp. \quad (5)$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве. Находя из них параметр t и приравнявая полученные дроби, приходим к каноническим уравнениям прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Если $M_1(x_0 + m, y_0 + n, z_0 + p)$, то при $0 < t < 1$ в (5) точка M лежит внутри отрезка M_0M_1 .

П р и м е р 10. Напишем канонические уравнения прямой a

$$\begin{cases} x - y + 2z = 9, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Прямая задана как пересечение двух плоскостей. Выпишем перпендикулярные к этим плоскостям векторы: $N_1(1, -1, 2)$ и $N_2(2, 1, -1)$. Поскольку прямая a лежит в правой плоскости, то $a \perp N_1$. Поскольку прямая a лежит во второй плоскости, то $a \perp N_2$. Поэтому вектор $l \parallel a$ будет и $l \perp N_1$, и $l \perp N_2$, т. е. можно взять

$$l = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 5j + 3k, \quad \text{т. е. } l(-1, 5, 3).$$

Осталось любым способом подобрать точку $M_0 \in a$ — ее координаты должны удовлетворять уравнениям и 1-й, и 2-й плоскости. Например, можно взять $M_0(2, -1, 3)$. Следовательно, канонические уравнения a :

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z - 3}{3}.$$

П р и м е р 11. Найдем угол φ между плоскостью α и прямой a :

$$(a) \quad 2x - 2y + z = 0, \quad (a) \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z + 3}{2}.$$

Вектор $N(2, -2, 1)$ перпендикулярен плоскости α , вектор $l(-1, -2, 2)$ параллелен прямой a , и потому (рис. 188)

$$\sin \varphi = \frac{|N|}{|l| \cdot |N|} = \frac{(-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{9}.$$

Пример 12. Напишем уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(3, -2, 5)$ на плоскость $x + 2y - 3z = 7$. Нам надо написать уравнения прямой a , проходящей через точку M_0

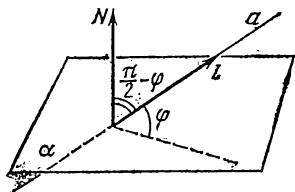


Рис. 188

и перпендикулярной плоскости α . Вектор, перпендикулярный плоскости α , есть $N(1, 2, -3)$, и потому можно взять $l = N$. Тогда канонические уравнения a :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-3}.$$

Пример 13. Пересекаются

ли прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{3}$

и $\frac{x+2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$? На этих прямых лежат точки $M_1(1, -5, 0)$

и $M_2(-1, 0, 1)$. Для того чтобы эти прямые пересекались (т. е. лежали в одной плоскости и не были параллельными), необходима и достаточна компланарность трех векторов: l_1, l_2 и $\overline{M_1M_2}$, т. е. $(l_1, l_2, \overline{M_1M_2}) = 0$, у нас это

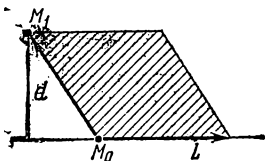


Рис. 189

$= 0$, у нас это

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-18) + 1 \cdot 9 + \\ + 3 \cdot (-9) = -54 \neq 0.$$

Заданные прямые не пересекаются.

Пример 14. Найдём расстояние от точки $M_1(2, -1, 0)$ до прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. Это расстояние есть высота параллелограмма (рис. 189), площадь которого равна $|l \times \overline{M_0M_1}|$, и потому

$$d = \frac{|l \times \overline{M_0M_1}|}{|l|} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{3} \sqrt{4 + 36 + 25} = \frac{1}{3} \sqrt{65}.$$

Пример 15. Найдём пересечение плоскости $x - 2y + z = 3$ и прямой $\frac{x+1}{8} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-7}{-4}$. Из уравнения прямой выра-

жаем x и z через y и подставляем в уравнение плоскости $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y$, $z = 5 - 2y$, тогда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y - 2y + 5 - 2y = 3$, откуда $y = 1$, $x = 2$ и $z = 3$. Таким образом, точка пересечения имеет координаты $(2, 1, 3)$.

В ряде теоретических задач полезно иметь общее выражение для решения систем линейных уравнений. Применим сведения из векторной алгебры к решению системы из трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ и $\mathbf{d}(d_1, d_2, d_3)$. Тогда система (7) означает, что

$$ax + by + cz = \mathbf{d} \quad (8)$$

(в физике очень часто переходят от «координатной записи» к векторной и обратно по описанной выше схеме). Умножая (8) почленно скалярно на $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, получаем (так как $(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ и $(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$): $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})x = (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})y = (\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})z = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ (последние два равенства получаются аналогично после почленного скалярного умножения (8) соответственно на $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Из этих равенств видно, что при $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ система (7) имеет единственное решение

$$x = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad y = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad z = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Если же $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, то одна из строк определителя

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

есть линейная комбинация двух других, так как векторы $\mathbf{u}(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v}(a_2, b_2, c_2)$ и $\mathbf{w}(a_3, b_3, c_3)$ компланарны, поскольку $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Delta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Пусть, например, $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. Покоординатно это дает:

$$a_3 = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad b_3 = \lambda b_1 + \mu b_2, \quad c_3 = \lambda c_1 + \mu c_2.$$

А эти равенства говорят о том, что

$$a_3x + b_3y + c_3z = \lambda(a_1x + b_1y + c_1z) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z),$$

т. е. левая часть третьего уравнения системы (7) есть линейная комбинация левых частей первого и второго уравнений системы (7).

Поэтому, если $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$, то система (7) несовместна; а если $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$, то третье уравнение системы (7) есть линейная комбинация первых двух уравнений и потому его можно отбросить — система из трех уравнений сводится к системе из двух уравнений относительно трех переменных. Эта система или имеет бесконечно много решений, или несовместна.

Итак, при $\Delta = 0$ система (7) или несовместна, или имеет бесконечно много решений.

Оказывается, что если ввести понятие определителя n -го порядка, то все факты, описанные выше для системы трех линейных уравнений с тремя переменными, сохраняются для системы n линейных уравнений с n переменными.

Введем понятие определителя n -го порядка «по индукции». Мы уже знаем определители 2-го и 3-го порядков. Пусть мы уже знаем, что такое определитель $(n-1)$ -го порядка. Выпишем таблицу из n^2 чисел, которые расположены в n строках и n столбцах, как это сделано ниже:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{km} называются элементами этого определителя n -го порядка, первый индекс k указывает на то, что это число стоит в k -й строке, второй индекс m указывает на то, что это число стоит на m -м месте в этой строке, т. е. оно стоит в m -м столбце.

Вычеркнем из этой таблицы первую строку и m -й столбец. Получим определитель $(n-1)$ -го порядка. По предположению индукции мы уже знаем, как его вычислять. Обозначим этот определитель M_{1m} . Тогда по определению (для краткости определитель n -го порядка обозначим Δ)

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n-1} a_{1n}M_{1n}. \quad (9)$$

Это непосредственное обобщение правила вычисления определителя 3-го порядка. В результате этого определения: с определителями 3-го порядка мы уже знакомы — следовательно, определители 4-го порядка определены равенством (9); известны теперь определители 4-го порядка — следовательно, определители 5-го порядка определены равенством (9), и т. д. для всех натуральных n .

Доказано (см. КМА), что свойства I—VI определителей полностью сохраняются для определителей любого порядка.

Пример 16. Вычислим определитель 4-го порядка по формуле (9):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 2 \cdot (-12) - 1 \cdot 16 + (-1) \cdot (-6) - 0 = 34.$$

Пример 17. Пользуясь свойствами определителей, вычислим (последовательно из первого столбца вычитаем сумму остальных столбцов):

$$\begin{vmatrix} 10 & 7 & 4 & 3 & -1 \\ -7 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-5) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = 15 \cdot 5 = 75$$

Аналогично вычисляются определители 6-го, 7-го и т. д. порядков.

До сих пор мы имели дело с векторами на плоскости или в пространстве. На плоскости вектор имеет две координаты, в пространстве — три. В ряде случаев приходится иметь дело с упорядоченным набором из n чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) . Этот набор называют n -мерным вектором и пишут $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а числа x_m называют координатами вектора \mathbf{x} : x_1 — первая, x_2 — вторая и т. д. Вектор на плоскости — это 2-мерный вектор, вектор в пространстве — это 3-мерный вектор.

Например, если фабрика производит n видов продукции, а за месяц производит продукции (в тоннах) первого вида x_1 , второго вида x_2 , ..., m -го вида x_m , ..., n -го вида x_n , то месячная продукция фабрики может быть охарактеризована n -мерным вектором $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Продукция фабрики за 3 месяца будет характеризоваться вектором $(3x_1, 3x_2, \dots, 3x_n) = 3\mathbf{x}$,

а за время t продукция будет характеризоваться вектором tx . Если работает вторая фабрика, выпускающая тот же набор продукции (тех же n видов), то ее продукция будет характеризоваться вектором $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Совокупный же продукт обеих фабрик будет характеризоваться вектором $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = x + y$. Все это непосредственно обобщает аналогичные (изучавшиеся в школе) факты для векторов на плоскости и в пространстве. Можно пойти и дальше. Если стоимость тонны продукции первого вида равна s_1 (руб.), стоимость тонны продукции второго вида равна s_2 (руб.) и т. д., стоимость тонны продукции n -го вида равна s_n (руб.), то стоимость тонны продукции фабрики можно охарактеризовать n -мерным вектором стоимости $s(s_1, s_2, \dots, s_n)$, а стоимость всей месячной продукции фабрики будет

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_n s_n = xs,$$

это естественно назвать скалярным произведением векторов x и s (по аналогии со школой и сохранить обозначение xs). При этом все основные свойства скалярного произведения сохраняются.

Для более детального описания месячной продукции фабрики можно еще разбить каждый вид продукции по сортам: первый, второй, третий и т. д. Если установлено m сортов, то месячная продукция фабрики характеризуется таблицей

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь числа в первой строке дают количество тонн продукции первого сорта: x_{11} — первого вида, x_{12} — второго вида и т. д., x_{1n} — n -го вида. Во второй строчке — тоннаж продукции второго сорта (по видам) и т. д. Таким образом, число x_{ij} (оно стоит в i -й строке и в j -м столбце этой таблицы) показывает, сколько тонн продукции i -го сорта получилось при выпуске j -го вида продукции за месяц. Эта таблица называется матрицей, а числа, стоящие в этой таблице, называются элементами этой матрицы. Коротко матрицы обозначаются большими буквами: X , A и т. п.

В практике полезно еще понятие произведения матриц. Если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

ца — ее обозначают A^{-1} и она такова, что $A^{-1}A = E$ и $A^{-1}A = E$ (сравните для чисел $a \cdot a^{-1} = 1$). Пользуясь этим, уже легко решить уравнение (11) — умножим слева обе части этого уравнения на A^{-1} :

$$Ax = b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ex = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b,$$

т. е. вектор x найден, система (11) — (10) решена. Удобство в том, что решение выписано в компактном виде, его можно подставлять в другие выражения и проводить с ним необходимые вычисления. Подробнее об этом написано в теории матриц.

7. Вектор-функция. Представим себе, что в пространстве движется точка M и зафиксирована точка O . Тогда вектор $r = \overline{OM}$ меняется со временем t — говорят, что вектор r есть вектор-функция времени и пишут $r = r(t)$. Координаты вектор-функции тоже есть функции времени, т. е. $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Определение вектор-функции, ее предела и непрерывности в точке полностью повторяют аналогичные определения из гл. I. При этом все теоремы (имеющие смысл для векторов) из гл. I сохраняются (см. КМА). Так, если функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны в точке t_0 , то и $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ тоже непрерывна в точке t_0 (теоремы о пределе суммы и постоянном множителе — здесь i , j и k — постоянные множители). Обратно, если $r(t)$ непрерывна в точке t_0 , то и скалярное произведение $ir(t) = x(t)$ тоже непрерывно в точке t_0 (и аналогично с $y(t)$ и $z(t)$). Производная определяется, как и в гл. II:

$$r'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Все теоремы (имеющие смысл для векторов) гл. II сохраняются (см. КМА). Рассмотрим геометрический смысл этой производной.

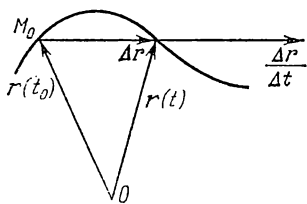


Рис. 190

Как и для числовой функции, графиком вектор-функции называется множество всех точек M таких, что $\overline{OM} = r(t)$. В практически важных случаях это некоторая кривая. Из рис. 190 видно, что $\Delta r / \Delta t$ (на рис. 190 изображен случай $\Delta t > 0$, случай

$\Delta t < 0$ изобразите самостоятельно) есть вектор, идущий по секущей «в сторону возрастания аргумента t ». При $\Delta t \rightarrow 0$ эта секущая поворачивается вокруг точки M_0 . Поскольку существует предел $\Delta r / \Delta t$, то секущая имеет предельное положение, которое в гл. II названо касательной. Таким образом, вектор производной $r'(t_0)$ направлен по касательной к графику вектор-функции

(точка касания M_0) «в сторону возрастания аргумента». Если t — время, то \mathbf{r}' есть скорость \mathbf{v} , а \mathbf{r}'' — ускорение (как это объяснялось еще в школьном курсе физики).

Пример. Покажем, что если неподвижная точка O притягивает движущуюся точку M по закону Ньютона, то траектория точки M лежит в некоторой плоскости. По закону притяжения Ньютона сила притяжения $\mathbf{F} \parallel \overline{OM} = \mathbf{r}$, а по второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$, где m — масса точки M . Следовательно, $\mathbf{r}'' \parallel \mathbf{r}$ и потому

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{r}')' = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' + \mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = 0.$$

По признаку постоянства функции отсюда следует, что вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{a}$ есть постоянная и потому движение происходит так, что $\overline{OM} \perp \mathbf{a}$ (по определению векторного произведения), т. е. точка M (в любой момент движения) находится в плоскости $\alpha \perp \mathbf{a}$, проходящей через точку O . Дополнительные вычисления показывают, что движение в этой плоскости α происходит так, что заштрихованная на рис. 191 (ON — какой-то фиксированный луч) площадь $s = 0,5t|\mathbf{a}|$, а траектория движения есть линия второго порядка (см. ниже).

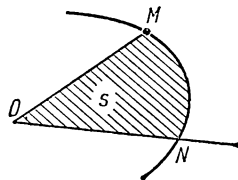


Рис. 191

8. Линии второго порядка. Из школьного курса известно, что любое уравнение первой степени $ax + by + c = 0$ (раньше говорили — первого порядка) задает на плоскости прямую. А какую линию на плоскости задает уравнение второй степени (второго порядка)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0? \quad (1)$$

Т. е. что представляет собой множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1)?

Некоторые факты известны из школы: $x^2 + y^2 = R^2$ — окружность радиуса R с центром в начале координат; $y = ax^2 + bx + c$ — парабола; $xy = k$ — гипербола. Оказывается, что ничего существенно нового нет: может оказаться окружность, сжатая к диаметру, — эта линия называется *эллипс*, или *гипербола*, сжатая или растянутая относительно своей оси симметрии (при этом название «гипербола» сохраняется); положение относительно осей координат может оказаться тоже произвольным, т. е. кривая может быть повернута и перенесена. Кроме того, могут еще оказаться «вырожденные» случаи: $(ax + by + c)^2 = 0$ —

двойная прямая, $x^2 - y^2 = 0$ — пара пересекающихся прямых ($y = \pm x$), $x^2 = a^2$ — пара параллельных прямых, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ — пустое множество.

Доказательство этих фактов приведено в курсах аналитической геометрии. Мы же познакомимся только с основными сведениями.

Эллипсом называется линия, которая получается после сжатия окружности к диаметру. Для изучения этой кривой выведем ее уравнение. Если окружность $x^2 + y^2 = a^2$ сжата вдоль оси Oy в k раз ($k \geq 1$, при $k = 1$ нет сжатия, т. е. окружность есть частный случай эллипса, рис. 192), то получим уравнение эллипса $x^2 + (ky)^2 = a^2$. Обычно это уравнение записывают несколько иначе: делим обе части уравнения на a^2 и кладем $b = a/k$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Это уравнение называется «каноническим уравнением эллипса». В нем $a \geq b > 0$ — эти числа называют полуосями эллипса, так

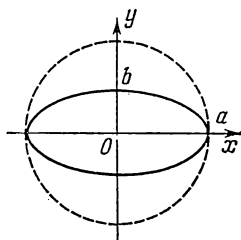


Рис. 192

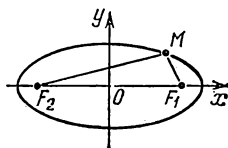


Рис. 193

как оси координат эллипс пересекает в точках $\pm a$ и $\pm b$. Сами точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса. Так как уравнение (2) содержит только квадраты координат, то от изменения знаков координат точек это уравнение не меняется. Поэтому оси координат есть оси симметрии эллипса, а точка O — центр симметрии.

Докажем *фокальное свойство эллипса*. На большей оси эллипса (для уравнения (2) это ось Ox) отметим две точки, находящиеся на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра симметрии эллипса — эти точки называются *фокусами эллипса* (рис. 193), их координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Фокальное свойство эллипса состоит в следующем: для любой точки M на эллипсе $F_1M + F_2M = 2a$ (рис. 193). Для доказательства подсчитаем через

координаты точки $M(x, y)$ фокусные расстояния:

$$\begin{aligned} F_1 M &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{\left(\frac{c}{a} x\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a} x\right) a + a^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{c}{a} x - a\right)^2} \stackrel{(3)}{=} |\epsilon x - a| \stackrel{(4)}{=} a - \epsilon x. \end{aligned}$$

- (1) Вместо y^2 ставим его выражение через x из уравнения (2), поскольку точка M взята на эллипсе;
 (2) так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ по определению, то $a^2 - b^2 = c^2$ и $c^2 + b^2 = a^2$;
 (3) положили $\epsilon = c/a$ — это число называется *эксцентриситетом* эллипса и показывает величину его сжатия; так как $0 \leq c \leq a$, то $0 \leq \epsilon \leq 1$;
 (4) так как $|x| \leq a$ для всех точек на эллипсе и $0 \leq \epsilon \leq 1$, то $a \geq \epsilon x$ и потому $|\epsilon x - a| = a - \epsilon x$.
 Аналогично подсчитывается фокусное расстояние

$$F_2 M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \epsilon x.$$

Складывая, получаем: $F_1 M + F_2 M = a - \epsilon x + a + \epsilon x = 2a$.

Докажем оптическое свойство эллипса: если в фокусе эллипса поместить точечный источник света, а эллипс считать зеркалом, то отраженный луч попадает во второй фокус этого эллипса (рис. 194).

Для доказательства заметим: функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{r}|$ (рис. 194), т. е. длина радиуса-вектора точки $M(x, y)$ имеет

$$\text{grad } |\mathbf{r}| = \text{grad } f =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{r}^0.$$

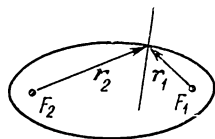


Рис. 194

Пользуясь фокальным свойством эллипса, мы можем рассматривать эллипс как линию уровня функции $f = |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$ (рис. 194). Поскольку градиент функции идет по нормали к линии уровня, то

$$\text{grad } f = \text{grad } |\mathbf{r}_1| + \text{grad } |\mathbf{r}_2| = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0$$

есть нормаль к эллипсу и она идет по биссектрисе радиусов-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (рис. 194), так как $|\mathbf{r}_1^0| = 1$ и $|\mathbf{r}_2^0| = 1$. А это есть закон отражения света.

Гипербола Докажем сначала, что линия с уравнением

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (3)$$

есть гипербола $2xy = a^2$, повернутая на 45° (рис. 195). Для этого биссектрисы координатных углов возьмем за новые оси координат u и v (рис. 196), p и q — единичные векторы по этим

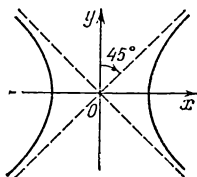


Рис. 195

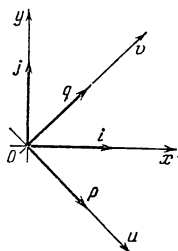


Рис. 196

осям. Каждая точка M получает две пары координат — (x, y) и (u, v) . Найдем между ними связь. Прежде всего из рисунка видно, что

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} (i - j), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} (i + j).$$

Тогда, по определению координат, имеем:

$$\begin{aligned} \overline{OM} = up + vq &= \frac{u}{\sqrt{2}} (i - j) + \frac{v}{\sqrt{2}} (i + j) = \\ &= \frac{u+v}{\sqrt{2}} i + \frac{v-u}{\sqrt{2}} j, \end{aligned}$$

откуда

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{v-u}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти выражения для x и y в уравнение (3), получаем:

$$\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{v-u}{\sqrt{2}} \right)^2 = a^2, \quad 2uv = a^2, \quad v = \frac{1}{2} \frac{a^2}{u}.$$

Это показывает, что линия с уравнением (3) есть гипербола, асимптоты которой есть биссектрисы координатных углов (оси Ou и Ov).

Сожмем (или растянем) гиперболу (3) вдоль оси Oy — получим гиперболу с уравнением $x^2 - (ky)^2 = a^2$. При сжатии $k \geq 1$, при растяжении $0 < k < 1$. Разделив обе части этого уравнения

на a^2 и положив $b = a/k$, получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Из этого уравнения (как и для эллипса) видно, что оси координат есть оси симметрии гиперболы (рис. 197), а начало координат — центр симметрии. Гипербола не пересекает ось Oy и пересекает ось Ox в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ — они называются вершинами гиперболы. Ось Ox называется действительной осью. На действительной оси гиперболы на расстоянии $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ от ее центра находятся два фокуса гиперболы — точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.

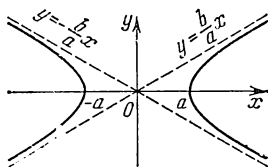


Рис. 197

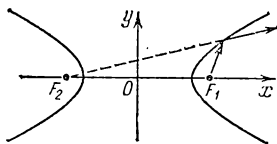


Рис. 198

Фокальное свойство гиперболы состоит в следующем: для любой точки M гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$. Доказывается это почти так же, как и для эллипса. Оптическое свойство гиперболы: если в одном фокусе гиперболы поместить точечный источник света, а гиперболу считать зеркалом, то отраженный луч пойдет так, что его продолжение проходит через другой фокус гиперболы (рис. 198) (доказывается это так же, как и для эллипса).

При сжатии (растяжении) гиперболы (3) ее асимптоты переходят в прямые, которые являются асимптотами гиперболы (4), их уравнение $y = \pm \frac{b}{a}x$. Действительно, асимптоты гиперболы (3) — это прямые $y = \pm x$. При сжатии (растяжении) они переходят в прямые $ky = \pm x$, где $k = a/b$ по определению числа b . Этим все доказано.

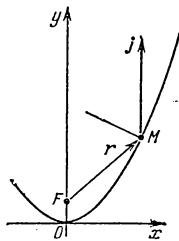


Рис. 199

Парабола есть график функции $y = ax^2$. При $a > 0$ (рис. 199) точка $F(0, \frac{1}{4a})$ (на оси Oy) называется фокусом параболы. Фокальное свойство параболы: для любой точки $M(x, y)$ параболы $|FM| = y + \frac{1}{4a}$. Действительно, так как $x^2 = y/a$, $y \geq 0$

и $a > 0$. то

$$FM = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{\frac{y}{a} + y^2 - \frac{y}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} = \\ = \sqrt{y^2 + \frac{y}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} = y + \frac{1}{4a}.$$

Оптическое свойство параболы: если в фокусе параболы поместить точечный источник света, а параболу считать зеркалом, то все отраженные лучи пойдут параллельно оси Oy . На этом свойстве основаны зеркала прожекторов. Для доказательства возьмем фокальный радиус-вектор $\overline{FM} = \mathbf{r}$ любой точки M параболы. Тогда, в силу фокального свойства, парабола есть нулевая линия уровня функции $f(x, y) = y + \frac{1}{4a} - |\mathbf{r}|$. Так как $\text{grad } f = \mathbf{j} - \mathbf{r}^0$ есть нормаль к этой линии уровня (т. е. к параболе), а с другой стороны, $\text{grad } f$ идет по биссектрисе векторов \mathbf{j} и \mathbf{r}^0 (так как они единичные), то (см. рис. 199) оптическое свойство параболы доказано.

Отметим еще простейшие поверхности. Из школы известна сфера. Уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Если сжать сферу по осям координат, то получим поверхность, которая называется *эллипсоидом*. При сжатии с коэффициентами k по оси Ox , m по оси Oy и n по оси Oz получаем $(kx)^2 + (my)^2 + (nz)^2 = R^2$ или

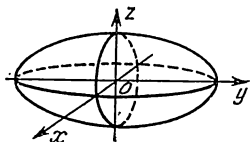


Рис. 200

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a = \frac{R}{k}$, $b = \frac{R}{m}$, $c = \frac{R}{n}$. Это уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида (рис. 200).

Если в плоскости yOz взять график функции $z = f(y)$, $y \geq 0$, и повернуть его вокруг оси Oz , то получим поверхность вращения. Напишем уравнение поверхности вращения. Пусть $M(x, y, z)$ — любая точка этой поверхности. Проведем через точку M плоскость, параллельную плоскости xOy , — она пересечет поверхность по окружности с центром Q на оси Oz . Для всех точек этой окружности $\sqrt{x^2 + y^2} = QM = y_0$ (рис. 201), где y_0 — ордината точки на графике f , и потому $z = f(y_0)$. Следовательно, для любой

точки $M(x, y, z)$ на поверхности вращения выполнено равенство

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Это и есть искомое *уравнение поверхности вращения*. Аналогичные уравнения получаются при вращении вокруг осей Ox и Oy .

Возьмем гиперболу $x^2 - y^2 = R^2$ и повернем ее относительно оси Ox — получим поверхность вращения с уравнением $x^2 -$

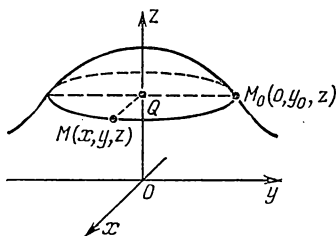


Рис. 201

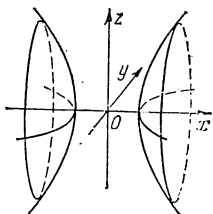


Рис. 202

$-y^2 - z^2 = R^2$. Сжав эту поверхность по осям координат (как выше сферу), получим поверхность, которая называется *свуполостным гиперboloидом* и уравнение которой имеет вид (рис. 202)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если гиперболу $z^2 - y^2 = R^2$ повернуть вокруг оси Oy и потом сжать по осям координат, то получим поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

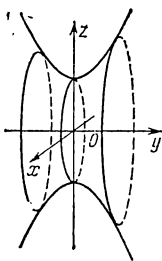


Рис. 203

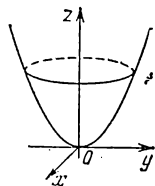


Рис. 204

Эта поверхность называется *однополостным гиперboloидом* (рис. 203).

Если параболу $z = y^2$ повернуть вокруг оси Oz и сжать получившуюся поверхность по осям координат, то получим *эллиптический параболоид*, уравнение которого имеет вид (рис. 204)

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Если в этом уравнении изменить знак, то получим уравнение

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Задаваемая им поверхность называется *гиперболическим параболоидом*, или короче — *седло* (рис. 205).

Если прямую $x = y$ вращать вокруг оси Oz и затем провести сжатие по осям координат, то получим *уравнение конуса* второго порядка (рис. 206)

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Если в пространстве рассмотреть множество всех точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ (в нем нет одной координаты z), то получим

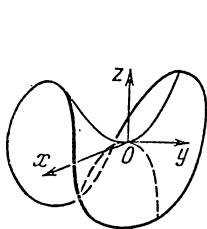


Рис. 205

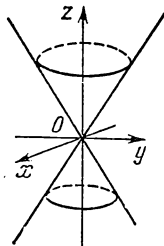


Рис. 206

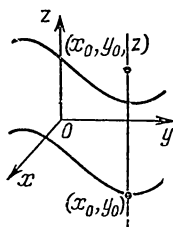


Рис. 207

цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz , а направляющая в плоскости xOy задается уравнением $F(x, y) = 0$ (рис. 207). Действительно, если точка $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy лежит на кривой $F(x, y) = 0$, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$, то координаты точки $M(x_0, y_0, z)$ при любом z тоже удовлетворяют этому уравнению, т. е. точка M лежит на поверхности. А все такие точки лежат на прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку M_0 .

9. Комплексные числа и функции. При изучении математики в школе запас чисел постепенно расширялся: сначала были натуральные числа, потом дроби, потом добавились отрицательные числа и 0 — получились рациональные числа, потом добавились иррациональные числа — получилось множество действительных чисел R . Каждый шаг при расширении запаса чисел диктовался потребностями практики — решением уравнений или потребностями измерений.

Теперь нам предстоит сделать еще один шаг в расширении запаса чисел — добавить к действительным числам числа мнимые и получить множество комплексных чисел C . Причина, которая побуждает нас сделать этот шаг, в том, что квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Введение комплексных чисел сделаем по аналогии с шагом получения действительных чисел при добавлении к рациональным числам чисел иррациональных. Один из элементов этого шага состоял в том, что квадратное уравнение $x^2 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней. Другими словами, имея в распоряжении только рациональные числа, мы не можем решать это уравнение. Какой нашли выход из этого положения? Ввели новое число, которое обозначили $\sqrt{2}$ и которое по определению таково, что $(\sqrt{2})^2 = 2$. Это число есть решение уравнения $x^2 - 2 = 0$. Это новое, не рациональное число — его называли иррациональным. Это число разрешалось умножать на любое рациональное число и результат складывать с любым рациональным числом, т. е. вычислять с выражениями вида $x + y\sqrt{2}$, где x и y — рациональные числа, по обычным правилам алгебры с учетом равенства $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Повторим эту схему. Обозначим буквой i такое число, что $i^2 = -1$. Это не действительное число — назовем его мнимым. Это число есть решение уравнения $x^2 + 1 = 0$. Будем рассматривать числа вида $x + iy$, где x и y — действительные числа. Вычисления с ними будем вести по обычным правилам алгебры с учетом равенства $i^2 = -1$.

Примеры: 1. $(2 + 5i) - (0,7 - \frac{2}{3}i) = 1,3 + 5\frac{2}{3}i$;

2. $(3 - 2i)(0,2 + i\frac{1}{6}) = 0,6 - 0,4i + 3\frac{1}{2}i - 2\frac{1}{3}i^2 =$
 $= 0,6 + 3,1i + 2\frac{1}{3} = 2\frac{14}{15} + 3,1i$;

3. $\frac{-2 + i}{3 - 2i} = \frac{(-2 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-6 + 3i - 4i + 2i^2}{9 - (2i)^2} =$
 $= \frac{-6 - i - 2}{9 + 4} = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$.

Полученные числа называются комплексными, их множество обозначается \mathbb{C} . Действительные числа оказываются частным случаем комплексных чисел при $y = 0$. Доказано (см. КМА), что описанные выше действия не приводят к противоречию.

Это расширение понятия числа принесло большие выгоды. Например, доказано, что любой многочлен (а не только $x^2 + 1$) имеет корень. Однако за это пришлось «заплатить»: для комплексных чисел нельзя ввести понятие «больше» с привычными из алгебры правилами действий.

Покажем, что для любого действительного числа a существует два комплексных числа z , таких, что $z^2 = a$. Если $a \geq 0$, то $z = \pm \sqrt{a}$, как и раньше. Если $a < 0$, то $z = \pm \sqrt{|a|}i$. Дей-

ствительно, $z^2 = (\pm i \sqrt{|a|})^2 = i^2 |a| = -1 \cdot (-a) = a$. Именно так мы далее и будем понимать \sqrt{a} при действительном a .

Докажем, что любое квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

имеет решение. Для этого умножим обе части (1) на $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

откуда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Это обычная формула для решения квадратного уравнения, только при дискриминанте $D = b^2 - 4ac < 0$ получаются комплексные корни. В случае $D = 0$ принято говорить, что квадратное уравнение (1) имеет двойной корень $-b/2a$.

Пример 4. $x^2 - 2x + 5 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i$.

Комплексные числа принято изображать точками плоскости (подобно тому как действительные числа изображаются точками прямой). Делается это так: комплексное число $z = x + iy$

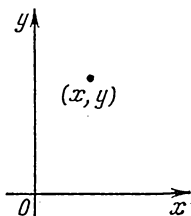


Рис. 208

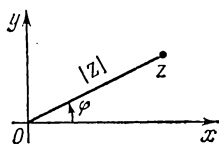


Рис. 209

изображается точкой на плоскости с координатами (x, y) . Каждому комплексному числу поставлена в соответствие единственная точка плоскости (рис. 208), и каждой точке плоскости поставлено в соответствие единственное комплексное число. Поэтому (как и для действительных чисел) не различают комплексные числа и точки плоскости, говорят — комплексная плоскость.

Расстояние от комплексного числа z до 0 (рис. 209) называется *модулем* z и обозначается $|z|$ (как и для действительных чисел). Из рис. 209 ясно, что

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ называют *аргументом комплексного числа* z : $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$, $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Эта запись называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Перейдем теперь к первоначальному знакомству с комплексными функциями. Определение в точности повторяет гл. I: если каждому комплексному числу z из некоторого множества D поставлено в соответствие единственное комплексное число w , то говорят, что на множестве D задана функция f , и пишут $w = f(z)$. Определения и теоремы из гл. I (не связанные с неравенствами) полностью сохраняются. В частности, это относится и к рядам. В гл. VI были получены формулы Маклорена (с. 216). Эти формулы служат определением для функций комплексного аргумента z :

$$e^z = 1 + \sum \frac{z^n}{n!}, \quad (3)$$

$$\cos z = 1 + \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (4)$$

$$\sin z = \sum (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (5)$$

Эти ряды (как и на с. 217) сходятся для любого z , т. е. показательная функция, синус и косинус определены на всей комплексной плоскости. Познакомимся с их свойствами. Так как $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, $i^{2k-1} = i(i^{2k-2}) = i(-1)^{k-1}$, то

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \sum \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + \sum \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum \frac{(iz)^{2k-1}}{(2k-1)!} = \\ &= 1 + \sum (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} = \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Таким образом, получена знаменитая формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (6)$$

Она, в частности, показывает, что $iz = \ln(\cos z + i \sin z)$ по определению логарифма (которое было в школе).

Например: $e^{i \frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, т. е.

$$\ln \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} i; \quad e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad \text{т. е. } \ln(-1) = \pi i.$$

Покажем, что для показательной функции на комплексной плоскости сохраняется обычное свойство: для любых z_1 и z_2

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \quad (7)$$

Напомним (см. с. 152), что $0! = 1$ и потому формулу (3) можно

записать короче: суммирование начать с 0 — это даст 1. Тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{z_1^k \cdot z_2^m}{k! m!} \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{z_1^k \cdot z_2^m}{k! m!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z_1^k \cdot z_2^{n-k} \stackrel{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1 + z_2}. \end{aligned}$$

(1) Группируем слагаемые в сумме так, что вместе собраны все слагаемые, для которых сначала $k + m = 0$, потом $k + m = 1$, потом $k + m = 2$, потом $k + m = 3$ и т. д.;

(2) $\frac{n!}{k! (n-k)!}$ — коэффициент в бинOME Ньютона (с. 72).

Пользуясь формулой (7), докажем, что *показательная функция периодична* — ее период $2\pi i$. Действительно, по формулам (7) и (6)

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Отсюда следует, что *логарифмы чисел определены с точностью до слагаемого $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$* . Покажем еще, что любое комплексное число $z \neq 0$ имеет логарифм. Для этого воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа:

$$\{z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{\ln |z|} \cdot e^{i\varphi} = e^{\ln |z| + i\varphi + 2\pi i n},$$

откуда $\ln z = \ln |z| + i\varphi + 2\pi i n$.

$$\begin{aligned} \text{Так } \ln(-3) &= \ln 3 + \pi i + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \ln(1 + i\sqrt{3}) = \\ &= \ln 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

9. Решим уравнение $\cos z = 5$. При действительном z это уравнение не имеет решений. Посмотрим, что получится при комплексных z . По формуле Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad \text{и} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

а уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= 5 \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 10e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = 5 \pm \sqrt{24} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow iz = \ln(5 \pm \sqrt{24}) + 2\pi i n \Leftrightarrow z = -i \ln(5 \pm \sqrt{24}) + 2\pi n, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Аналогично получается, что уравнения $\cos z = a$ и $\sin z = a$ имеют решения при любом a . Если a действительные и $|a| \leq 1$, то, как и раньше, решения — действительные числа, если $|a| > 1$, то решения — комплексные числа,

