



В.А. ИЛЬИН
Г.Е. КУЗМАК

ОПТИМАЛЬНЫЕ
ПЕРЕЛЕТЫ
КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ

В. А. ИЛЬИН, Г. Е. КУЗМАК

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

С ДВИГАТЕЛЯМИ
БОЛЬШОЙ ТЯГИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. В. А. Ильин, Г. Е. Кузмак, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1976, 744 стр.

Книга посвящена изложению эффективных приближенных методов синтеза оптимальных траекторий космических аппаратов с двигателями большой тяги (химическими и ядерными тепловыми).

Рассматривается следующий круг вопросов: 1. Общая теория оптимизации импульсных перелетов и методы решения задач оптимизации траекторий с короткими активными участками. 2. Теория оптимального маневрирования космических аппаратов в тонких слоях центрального гравитационного поля. 3. Задачи синтеза перелетов в системе Земля — Луна: облет Луны с возвращением к Земле, перелеты с околоземной на окололунную орбиту и с Луны на Землю. 4. Задачи оптимизации перелетов Земля — планета — Земля с выходом на орбиты спутников планет, в том числе с торможением в атмосфере. Решения всех задач доведены до конкретных результатов и представлены в форме, удобной для практического использования. Приведены результаты подробных параметрических исследований оптимальных траекторий.

Табл. 23, илл. 278, библи. 376.

Владимир Александрович Ильин,

Генрих Евсеевич Кузмак

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ДВИГАТЕЛЯМИ БОЛЬШОЙ ТЯГИ

М., 1976 г., 744 стр. с илл.

Редактор Б. Е. Гельфгат

Технический редактор А. П. Колесникова

Корректоры Т. С. Плетнева, Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 23/IV 1976 г. Подписано к печати 5/XI 1976 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 46,5. Условн. печ. л. 46,5. Уч.-изд. л. 45,14. Тираж 2000 экз. Т-20317. Цена книги 4 р. 75 к. Заказ № 122.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77,
Станиславского, 25.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	13
Глава I. Проблема синтеза и оптимизации траекторий	23
§ 1.1. Приближенные методы рассмотрения траекторий	23
1.1.1. Уравнения движения центра масс космического аппарата (23).	
1.1.2. «Точные» гравитационные поля (25).	
1.1.3. Приближенные модели гравитационных полей. Метод сращения асимптотических разложений (27).	
1.1.4. Метод сфер влияния — МСВ (метод сращения кеплеровых траекторий) (28).	
1.1.5. Модифицированный метод сфер влияния — ММСВ (40).	
§ 1.2. Задача оптимизации движения в ньютоновском поле тяготения (конечная тяга)	44
1.2.1. Постановка вариационной задачи (44).	
1.2.2. Необходимые условия оптимальности (48).	
1.2.3. Степень гладкости фазовых и сопряженных переменных (50).	
1.2.4. Обобщение на случай движения в произвольном гравитационном поле (53).	
§ 1.3. Уравнения вариационной задачи в координатной форме	55
1.3.1. Прямоугольная декартова и цилиндрическая системы координат (55).	
1.3.2. Линеаризованные уравнения в цилиндрической системе координат (60).	
Глава II. Оптимальные импульсные перелеты	67
§ 2.1. Импульсные перелеты	67
2.1.1. Импульсные перелеты в гравитационном поле (67).	
2.1.2. Современное состояние теории (72).	
§ 2.2. Необходимые условия оптимальности	77
2.2.1. Прямой вывод необходимых условий оптимальности (77).	
2.2.2. Вывод необходимых условий оптимальности из условий оптимальности перелетов с конечной тягой (90).	
2.2.3. Условия трансверсальности при оптимальном выборе начальной и (или) конечной точки перелета. Принцип окаймления (94).	
2.2.4. Траектории, проходящие через бесконечно удаленную точку (98).	
§ 2.3. Применение сопряженной системы для улучшения неоптимальных перелетов	107
2.3.1. Вариация функционала при переходе от N -импульсной к $(N+1)$ -импульсной траектории (107).	
2.3.2. Исходная N -импульсная траектория удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (110).	
2.3.3. Исходная N -импульсная траектория неоптимальна (116).	
Глава III. Сопряженная система в ньютоновском гравитационном поле	123
§ 3.1. Общее решение сопряженной системы	123
3.1.1. Решение Лоудена (123).	
3.1.2. Особенности решения в апсидальных точках кеплеровой дуги (126).	
3.1.3. О записи решения в различных системах координат (128).	

§ 3.2. Примеры использования решения сопряженной системы . . .	136
3.2.1. Векторы s и p на круговой орбите ($e=0$) (137). 3.2.2. Векторы s и p на произвольной кеплеровой дуге ($e \neq 0$) (139). 3.2.3. Векторы s и p на кеплеровых дугах, проходящих через бесконечно удаленную точку (145). 3.2.4. Оптимальность гомановского и биэллиптического перелетов (149).	
§ 3.3. Особенности решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов	154
3.3.1. Ньютоновское гравитационное поле (154). 3.3.2. Произвольное гравитационное поле (158).	
Глава IV. Приближенное определение оптимальных перелетов с конечной тягой	164
§ 4.1. Приближенное построение оптимальной траектории при изменении ограничения на величину тяги	164
4.1.1. Постановка обратной задачи импульсной аппроксимации (164). 4.1.2. Приближенное построение оптимальной траектории при изменении ограничения на величину тяги (167).	
§ 4.2. Приближенное построение оптимальных перелетов с конечной тягой	176
4.2.1. Переход от оптимальной импульсной траектории к приближенной оптимальной траектории с конечной тягой. Правило пересчета (176). 4.2.2. Приближенное определение начальной или конечной точки активного участка (191).	
Глава V. Решение некоторых нелинейных задач оптимизации импульсных перелетов	196
§ 5.1. Некоторые соотношения для перелетов в ньютоновском гравитационном поле	196
5.1.1. Постановка задачи. Допустимые траектории. Гомановские перелеты (196). 5.1.2. Перелеты с постоянной характеристической скоростью между компланарными круговыми орбитами (изоэнергетические траектории) (199). 5.1.3. Перелеты с постоянной угловой дальностью (изогональные траектории) (206). 5.1.4. Применение уравнений изоэнергетических и изогональных траекторий (215).	
§ 5.2. Выход на круговую орбиту после торможения в атмосфере	218
5.2.1. Постановка задачи (218). 5.2.2. Оптимальный одноимпульсный переход с тормозных эллипсов на орбиту ЛС (220).	
Глава VI. Теория оптимального маневрирования по орбитам, близким к круговой	224
§ 6.1. Вводные замечания. Основные соотношения для движения с конечной тягой	224
6.1.1. Основные соотношения (224). 6.1.2. Граничные условия для ряда конкретных типов перелетов (231).	
§ 6.2. Исследование режимов управления с регулируемой тягой	235
§ 6.3. Основные соотношения для линеаризованных многоимпульсных перелетов	242
6.3.1. Линеаризованные граничные условия (242). 6.3.2. Условия оптимальности (244). 6.3.3. Линеаризованные формулы для свободного движения по околокруговым орбитам (248).	
§ 6.4. Приближенное построение оптимальных перелетов для случая активных участков малой протяженности	249
6.4.1. Правило пересчета (249). 6.4.2. Оценка точности (254).	

Глава VII. Некоторые приложения теории оптимального маневрирования по околокруговым орбитам	258
§ 7.1. Перелет с околокруговой орбиты в точку, расположенную в ее окрестности	258
7.1.1. Исходные соотношения (258). 7.1.2. Плоские перелеты (260). 7.1.3. Результаты исследования пространственных перелетов (267).	
§ 7.2. Переходы между близкими околокруговыми компланарными орбитами	272
7.2.1. Исходные соотношения (272). 7.2.2. Анализ оптимальных перелетов (274). 7.2.3. Иллюстрирующие примеры (283).	
§ 7.3. Исследование перелетов между близкими околокруговыми не-компланарными орбитами	286
7.3.1. Исходные соотношения (286). 7.3.2. Правила пересчета параметров при изменении знаков констант $\Delta\alpha$, $\Delta\epsilon$, $\Delta\delta$ и Δz (289). 7.3.3. Исследование соотношений для определения моментов приложения импульсов (291). 7.3.4. Перелеты с импульсами на линии узлов (296). 7.3.5. Перелеты с импульсами по одну сторону от линии узлов (298). 7.3.6. Перелеты с импульсами по разные стороны от линии узлов (304). 7.3.7. Вырожденные перелеты (306). 7.3.8. Общая характеристика перелетов, дающих абсолютный минимум ΔV_{Σ} (310). 7.3.9. Примеры пространственных маневров. Оценка точности линеаризованной теории (314).	
Глава VIII. Приближенная теория оптимального маневрирования в тонких сферических слоях	320
§ 8.1. Постановка задачи. Основные уравнения	320
8.1.1. Вводные замечания (320). 8.1.2. Основные уравнения и вариационная задача (321).	
§ 8.2. Однородные поля тяготения	327
8.2.1. Равенство функций влияния и определение однородных полей тяготения (327). 8.2.2. Формулы для малых значений T (328). 8.2.3. Однородное поле тяготения (330). 8.2.4. Сравнение с точным решением. Оценка погрешности (331).	
§ 8.3. Сведение пространственной задачи к задачам меньшей размерности	337
8.3.1. Геометрическая интерпретация (337). 8.3.2. Правило для определения ориентации плоскости управления (339). 8.3.3. Случай существования прямой управления (338).	
§ 8.4. Оптимальное управление в плоскости управления	340
8.4.1. Исходные соотношения (340). 8.4.2. Уравнения для определения произвольных постоянных (342).	
§ 8.5. Оптимальное управление на прямой управления	344
8.5.1. Закон оптимального управления (344). 8.5.2. Возможные случаи коллинеарности векторов конечного промаха (347).	
§ 8.6. Линеаризованное решение	349
8.6.1. Постановка задачи. Основные соотношения (349). 8.6.2. Решение для малого угла между векторами конечного промаха (353).	
Глава IX. Некоторые приложения теории оптимального маневрирования в тонких слоях	356
§ 9.1. Жесткая встреча	356
9.1.1. Постановка задачи. Основные соотношения (356). 9.1.2. Определение оптимального времени перелета (359). 9.1.3. Оптимизация положения летательных аппаратов в момент начала управления (366).	
§ 9.2. Изменение вектора скорости	369
9.2.1. Постановка задачи. Основные соотношения (369). 9.2.2. Опти-	

мизация времени перелета (371). 9.2.3. Иллюстрирующий пример (375).	
§ 9.3. Синтез оптимального управления в случае коллинеарных векторов конечного промаха при $a_{\max} = \text{const}$	376
9.3.1. Решение для однородного поля (376). 9.3.2. Геометрическая интерпретация для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$ (379).	
9.3.3. Решение задачи для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$ (383).	
§ 9.4. Перелет между произвольными пересекающимися орбитами	392
9.4.1. Постановка задачи и решение для однородного поля (392).	
9.4.2. Решение задачи для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$ (394).	
9.4.3. Сравнение перелетов с одним и двумя активными участками (397).	
9.4.4. Условие оптимальности (400).	
§ 9.5. Перелет между орбитами, у которых в какой-то момент совпадают векторы скорости при движении по ним	401
9.5.1. Постановка задачи и решение для однородного поля (401).	
9.5.2. Решение для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$ (404).	
§ 9.6. Мягкая встреча	406
9.6.1. Постановка задачи. Описание схемы перелета (406).	
9.6.2. Решение для однородного поля тяготения (408).	
9.6.3. Оптимизация параметров перелета (410).	
Глава X. Оптимальные перелеты между сферой влияния планеты и орбитой ее искусственного спутника	412
§ 10.1. Постановка задачи. Приближенное определение планетоцентрической гиперболы	412
10.1.1. Постановка задачи (412).	
10.1.2. Планетоцентрические системы координат (414).	
10.1.3. Приближенное определение планетоцентрической гиперболы (416).	
§ 10.2. Одноимпульсные перелеты сфера влияния — орбита ИС	422
10.2.1. Импульс в точке перехода (422).	
10.2.2. Круговая орбита ИС (425).	
10.2.3. Оптимизация высоты и ориентации в пространстве круговой орбиты (434).	
10.2.4. Эллиптическая орбита ИС (442).	
10.2.5. Инвариантность и симметрия планетоцентрического движения (448).	
§ 10.3. Двухимпульсные перелеты сфера влияния — круговая орбита ИС	455
10.3.1. Постановка задачи. Качественный анализ (455).	
10.3.2. Численное исследование (463).	
§ 10.4. Оптимизация схемы перелета	468
10.4.1. Постановка вариационной задачи (468).	
10.4.2. Схема решения краевой задачи (472).	
10.4.3. Результаты численного решения для круговой орбиты ИС (483).	
Глава XI. Синтез и оптимизация траекторий в системе Земля — Луна	494
§ 11.1. Вводные замечания. Обзор исследований	494
11.1.1. Вводные замечания (494).	
11.1.2. Краткий обзор исследований (495).	
§ 11.2. Приближенный метод синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли	497
11.2.1. Постановка задачи. Основные предположения (497).	
11.2.2. Приближенные уравнения. Классификация траекторий (502).	
11.2.3. Решение задачи синтеза (509).	
§ 11.3. Симметричные траектории облета Луны	514
11.3.1. Условия симметрии и их анализ (514).	
11.3.2. Особенности селеносферического движения. Геометрическая и динамическая симметрия (516).	

§ 11.4. Исследование траекторий облета Луны с возвращением в атмосферу Земли	524
11.4.1. Общие свойства траекторий (524). 11.4.2. Сравнение различных классов траекторий (537).	
§ 11.5. Синтез перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС Луны и поверхность Луны — атмосфера Земли	543
11.5.1. Постановка задачи оптимизации перелетов круговая орбита ИСЗ — круговая орбита ИС Луны и схема ее решения (543). 11.5.2. Численные результаты (547). 11.5.3. Постановка задачи синтеза перелета поверхность Луны — атмосфера Земли. Схема решения задачи (552). 11.5.4. Результаты расчетов (554).	
§ 11.6. Сравнение различных методов синтеза траекторий в системе Земля — Луна	558
11.6.1. Метод сфер влияния и метод численного интегрирования (558). 11.6.2. Численные результаты. Сравнение различных методов (566).	
Глава XII. Оптимизация траекторий полета к планетам	572
§ 12.1. Вводные замечания. Обзор исследований	572
12.1.1. Вводные замечания (572). 12.1.2. Краткий обзор исследований (574).	
§ 12.2. Задачи оптимизации перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля	578
12.2.1. Постановка задач оптимизации (578). 12.2.2. Условия трансверсальности и краевые задачи. Общая схема решения задач оптимизации (582). 12.2.3. Обоснование структуры функционала (597).	
§ 12.3. Методы расчета оптимальных перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля с минимальным числом импульсов	601
12.3.1. Оптимизация перелетов без учета эллиптичности и наклона орбит, планет (601). 12.3.2. Оптимизация перелетов с учетом эллиптичности и наклона орбит планет (618). 12.3.3. Оптимальные перелеты с торможением в атмосфере планет (626).	
§ 12.4. Исследование оптимальных траекторий полета к планетам	635
12.4.1. Четырехимпульсные перелеты орбита ИСЗ — орбита ИС Марса — орбита ИСЗ (636). 12.4.2. Четырехимпульсные перелеты орбита ИСЗ — орбита ИС Венеры — орбита ИСЗ (652). 12.4.3. Перелеты Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере планет (660).	
§ 12.5. Оптимизация схемы перелета	676
12.5.1. Постановка и методика решения задачи (676). 12.5.2. Результаты численного исследования (683).	
Приложение. Сопряженные системы	710
Основные обозначения	717
Литература	722
Предметный указатель	741

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из основных проблем, рассматриваемых в механике космического полета — *астродинамике*, является проблема выбора номинальных параметров и траекторий космических аппаратов — сокращенно КА, удовлетворяющих заданным требованиям и ограничениям, которую в дальнейшем будем называть *проблемой синтеза траекторий КА*. Среди требований, предъявляемых к траектории КА, одно из главных мест занимает ее оптимизация по какому-либо критерию. Поэтому проблема синтеза включает в себя проблему оптимизации и тесно с ней связана, хотя, в общем случае, является более широкой.

Предлагаемая читателю книга посвящена рассмотрению вопросов, связанных с проблемой синтеза и оптимизации траекторий КА с двигателями большой тяги. Характерной особенностью полета таких аппаратов является малая, как правило, продолжительность активных участков по сравнению с полной продолжительностью полета. В этом случае активные участки полета аппроксимируются точками приложения мгновенных импульсов скорости. Возможность применения импульсной аппроксимации в значительной степени определяет общий подход к решению проблемы синтеза и оптимизации траекторий КА большой тяги, поскольку позволяет,ряду с методами теории оптимального управления, использовать эффективные численные методы целевого программирования.

К настоящему времени опубликовано множество статей и ряд книг по исследованию траекторий КА большой тяги и связанных с этой тематикой вопросов. В частности, только исследованию импульсных траекторий посвящено более 300 работ (см. обзор Гобеца и Долла [1]). Кроме непосредственных стимулов, связанных с актуальностью тематики и потребностями практики, этому способствует в значительной мере и то, что в астродинамике находят широкое применение такие разделы механики и математики, как классическая механика, небесная механика, аэромеханика, теория оптимального управления, численные методы решения задач на ЭЦВМ и т. п. Краткий обзор публикаций, непосредственно связанных с разбираемыми в книге вопросами, дан в соответствующих главах.

Разделы небесной механики, используемые в астродинамике, изложены в книгах Г. Н. Дубошипа [1, 2], М. Ф. Субботина [2], Брауэра, Клеменса [1], Эскобала [1, 2]. Анализу траекторий КА с большой тягой посвящены книги К. Б. Алексеева, Г. Г. Бебенина, В. А. Ярошевского [1], Бэттина [2], Эрике [5, 7, 8]. Рассмотрение вопросов механики полета и проектирования КА дано в книгах, вышедших под редакцией Сейферта [1] и Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова [1].

Проблемы оптимизации траекторий и параметров КА рассмотрены в книге, вышедшей под редакцией Лейтмана [1], в книгах и статьях Лоудена [1—24], В. М. Пономарева [1], Эдельбаума [4]. Рассмотрение ряда методов синтеза и оптимизации траекторий КА, основанных на сведении этих задач к поиску оптимальных или рациональных решений в конечномерном пространстве определяющих параметров, вместе с результатами решения конкретных задач дано в книгах Эскобала [2] и Ц. В. Соловьева, Е. В. Тарасова [1]. В книге Эскобала [2], отражающей уровень разработки указанных вопросов к середине 60-х годов, рассмотрены некоторые задачи планетоцентрического маневрирования, методы построения траекторий полета к Луне и планетам. В книге Ц. В. Соловьева и Е. В. Тарасова [1] описаны методы синтеза и оптимизации траекторий межпланетных КА вместе с результатами многочисленных расчетов.

В монографии В. С. Новослова [4] изложена теория приближенного аналитического решения вариационных задач оптимизации траекторий КА большой тяги с помощью рядов по степеням малого параметра, в качестве которого принимается отношение суммарной продолжительности активных участков к полной продолжительности полета. При этом пулевым приближением является решение задачи в импульсной постановке. Для ряда задач оптимизации получено приближенное решение с точностью до величин второго порядка малости.

Особо отметим вышедшие в последнее время монографии В. В. Ивашкина [4] и Г. Л. Грძзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [2].

В монографии В. В. Ивашкина [4] даны подробный вывод и анализ необходимых условий оптимальности перелетов как с конечной, так и с импульсной тягой при ограничениях на расстояния до планет. Подробно анализируется вопрос о замене переменных в задаче оптимального маневрирования. Рассмотрены особенности, возникающие в условиях оптимальности при использовании метода сфер влияния. Исчерпывающим образом решена задача об оптимальных импульсных перелетах между компланарными орбитами со свободной взаимной ориентацией и свободным временем перелета при наличии ограничений на минимальное и максимальное расстояния КА до планеты.

Вопросы оптимизации параметров и траекторий аппаратов с двигателями большой тяги рассмотрены в монографии Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [2]. Для этой книги С. В. Дубовским [2] написана глава, посвященная оптимизации импульсных перелетов на основе вариационного подхода. Здесь приведены необходимые условия оптимальности и дано аналитическое решение ряда интересных задач оптимизации импульсных перелетов.

Обзоры задач аэродинамики, методов их решения и полученных результатов на различных этапах развития аэродинамики даны в работах Е. А. Гребеникова [1], Г. Л. Гродзовского, Д. Е. Охоцкого, В. В. Белецкого, Ю. Н. Иванова, А. И. Курьянова, А. К. Платонова, В. А. Сарычева, В. В. Токарева, В. А. Ярошевского [1], Г. Н. Дубошина, Д. Е. Охоцкого [1], Г. Н. Дубошина [3], Мёкеля [1], Ричардса [1].

Обстоятельный обзор одного из важных разделов механики полета КА большой тяги — импульсных траекторий — дан Гобецем и Доллом [1].

Однако указанные выше книги не исчерпывают всех вопросов, с которыми приходится сталкиваться инженерам и научным работникам при решении задач механики полета современных КА, в частности вопросов, возникающих при решении задач синтеза и оптимизации траекторий большой тяги. В настоящее время отсутствуют обобщающие работы, где с достаточной полнотой были бы изложены эффективные приближенные методы решения этих задач, позволяющие как проводить подробные параметрические исследования, так и выяснять основные свойства оптимальных траекторий. В указанных выше книгах, за исключением монографии В. В. Ивашкина [4] и работы С. В. Дубовского [2], не рассматриваются полученные за последнее время важные результаты в области методов оптимизации импульсных траекторий аппаратов большей тяги на основе строгого подхода в рамках современной теории оптимального управления.

В настоящей книге изложены эффективные приближенные методы синтеза и оптимизации траекторий КА большой тяги вместе с решениями ряда конкретных задач. В ней систематизированы и обобщены результаты выполненных за последние годы исследований в этой области, значительная часть которых была доступна читателю только в виде журнальных публикаций.

В книге рассматриваются четыре группы вопросов:

1. Общая теория оптимизации импульсных перелетов и методов решения задач оптимизации траекторий с короткими активными участками (главы I—V).

2. Линеаризованная и нелинейная теории оптимального маневрирования КА в тонких слоях ньютоновского гравитационного поля (главы VI—IX).

3. Задачи синтеза перелетов в системе Земля — Луна: облет Луны, перелеты орбита ИСЗ — орбита ИСЛ, Луна — Земля (главы X, XI).

4. Задачи оптимизации перелетов Земля — планета — Земля с выходом на орбиты ИС планет, в том числе с торможением в атмосфере (главы X, XII).

Решения всех задач доведены до конкретных результатов и представлены в форме, удобной для практического использования. Приведены результаты подробных параметрических исследований оптимальных траекторий. Все рассмотренные в книге методы и алгоритмы решения задач были опробованы на практике и отражают реальный опыт их использования.

Главы I—V, X—XII, Введение и Приложение написаны В. А. Ильиным, главы VI—IX написаны Г. Е. Кузмаком.

Круг задач, с которыми приходится сталкиваться специалисту-астродинамику в практической работе, достаточно велик и постоянно расширяется с развитием ракетно-космической техники. В этих условиях, особенно при наличии мощных ЭЦВМ, перво-степенное значение приобретают общие подходы и методы, позволяющие наметить эффективные способы решения конкретных практических задач. Поэтому в книге значительное внимание уделяется теоретическим и методическим вопросам. Рассматриваемые в книге задачи синтеза и оптимизации траекторий КА являются одними из наиболее сложных в этой области, имеют важное практическое значение и иллюстрируют эффективность разработанных методов решения.

В книге используется, как правило, традиционная и общепринятая терминология астродинамики, небесной механики и теории оптимального управления. Отметим, в частности, важное обстоятельство. Под сферой влияния планеты понимается граница сферической окрестности планеты, в пределах которой гравитационное поле планеты является доминирующим по сравнению с гравитационными полями Солнца и других планет (см. раздел 1.1.4, а также К. Б. Алексеев, Г. Г. Бебенин, В. А. Ярошевский [1], Бэттин [2], М. Ф. Субботин [1], Эрике [5]), а не сама эта окрестность см. В. А. Егоров [1], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [1], Г. А. Чеботарев [2], Эрике [8]).

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, занимающихся вопросами механики полета и проектирования КА. Она будет полезна студентам старших курсов и аспирантам, а также специалистам, интересующимся приложениями теории оптимального управления. У читателя предполагается знание основ теории оптимального управления и соответствующих разделов высшей математики и механики.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность А. А. Дородницыну, по инициативе и при под-

держке которого ими были начаты исследования в области астродинамики, Г. С. Бюшгенсу за постоянное внимание к работе.

Авторы пользуются случаем выразить свою признательность Р. Ф. Аппазову, А. Д. Гончарову, Г. Л. Гродзовскому, С. В. Дубовскому, З. Ж. Жафярову, В. С. Ильину, О. С. Карпову, А. И. Курьянову, В. А. Модестову, М. К. Рождественскому, Н. В. Толяренко, Л. И. Шатровскому, Л. М. Шкадову за обсуждение постановок и результатов исследования отдельных задач.

Результаты исследований авторов неоднократно докладывались на семинарах по механике космического полета, руководимых Д. Е. Охочимским, Т. М. Энеевым, В. В. Беленским, В. А. Егоровым и М. Л. Лидовым. Авторы благодарят руководителей и участников этих семинаров за полезное и стимулирующее обсуждение затронутых в книге вопросов.

Авторы весьма благодарны рецензенту книги В. Г. Демину за сделанные им предложения и замечания.

Авторы выражают свою искреннюю признательность В. В. Балашову, А. З. Брауде, В. В. Демешкиной и Н. А. Истомину за неизменную поддержку проведенных исследований. Е. И. Арбековой, К. Г. Бабич, Н. М. Ивановой и Т. П. Левиной за большую помощь в оформлении результатов расчетов. В. А. Бобцову за помощь на заключительном этапе работы над рукописью.

Авторы

28 февраля 1974 г., когда работа над рукописью книги в основном была закончена, трагически, на 45-м году оборвалась жизнь Георгия Евсеевича Кузмака.

Наделенный талантом, ясным и глубоким умом, обладая большим трудолюбием, Георгий Евсеевич в совершенстве владел ископным делом мастеровых Наук: умением находить и решать трудные задачи и получать новые результаты. Отличительной его чертой было стремление к успеху и готовность отдать все силы для его достижения. Именно редкий сплав этих качеств лежит в основе впечатляющих результатов его двадцатилетней работы: более 50 статей, две монографии, в 32 года — доктор технических наук и лауреат премии им. Н. Е. Жуковского.

Георгий Евсеевич был жизнерадостным и мужественным человеком, известным яхтсменом, мастером спорта СССР. Жизнь не раз подвергала его суровым испытаниям, и каждый раз он достойно выходил из них. Незаурядные человеческие качества, оптимизм, обаяние и скромность списали Георгию Евсеевичу любовь его друзей, признательное уважение коллег. Время усиливает эти чувства.

Март 1976 г.

В. Ильин

ВВЕДЕНИЕ

Развитие ракетно-космической техники и осуществление полетов автоматических и пилотируемых КА привели в 50-х—60-х годах к формированию нового раздела механики — *механики космического полета*, или *астродинамики*. В настоящее время в механике космического полета (в той ее части, которая изучает движение центра масс КА, использующего тягу двигателей) сложились два основных направления:

- 1) *механика полета КА с двигателями большой тяги*,
- 2) *механика полета КА с двигателями малой тяги*.

В первом направлении рассматривают механику полета КА в основном с химическими и ядерными ЖРД. Характерной особенностью полета таких аппаратов является, как правило, малая продолжительность активных участков по сравнению с полной продолжительностью полета.

Во втором направлении рассматривают механику полета КА в основном с электрическими реактивными двигателями (ЭРД). Характерной особенностью этих двигателей является малая величина ускорения, сообщаемого аппарату при движении в окрестности планеты, по сравнению с местным гравитационным ускорением. В результате оказывается, что полет КА с двигателем малой тяги (при необходимости осуществления маневра) на значительной части траектории происходит с работающим двигателем, а нужное изменение параметров траектории аппарата происходит за промежутки времени, сравнимые с общей продолжительностью полета. Подробное рассмотрение вопросов механики полета КА с малой тягой дано в книгах Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [1, 2].

В рамках указанных направлений исследование вопросов движения центра масс КА естественно разделяется на два этапа:

- 1) *исследование номинальных траекторий и параметров КА*,
- 2) *исследование управления траекторией КА* (анализ воздействия различных возмущений, определение фазовых координат аппарата с помощью траекторных измерений, оптимизация корректирующих воздействий и т. п.).

Круг вопросов, рассматриваемых на каждом из этих этапов, и взаимосвязь между ними подробно освещены в обзорах Г. Л. Гродзовского, Д. Е. Охоцимского, В. В. Белецкого, Ю. Н. Иванова, А. И. Курьянова, А. К. Платонова, В. А. Сарычева, В. В. Токарева, В. А. Ярошевского [4], Г. Н. Дубошина, Д. Е. Охоцимского [1], Г. Н. Дубошина [3] и книгах К. Б. Алексеева, Г. Г. Бебенина, В. А. Ярошевского [2], Бэттика [2], под редакцией Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова [1], под редакцией Сейферта [1], Эрике [5, 7, 8], Эскобала [2].

В настоящей книге рассматриваются вопросы *синтеза и оптимизации траекторий КА большой тяги*, относящиеся к первому из указанных этапов. При этом под синтезом траектории понимается решение задачи построения траектории аппарата, удовлетворяющей заданным требованиям и ограничениям. В таком понимании задача синтеза является более широкой, чем собственно задача оптимизации, и, в общем случае, включает в себя последнюю.

Математически задачи синтеза и оптимизации траекторий в большинстве случаев сводятся к решению совокупности связанных между собой двухточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений или к нахождению решений систем трансцендентных уравнений. Наличие противоречивых требований и ограничений, сложная структура самих ограничений, необходимость расчета большого числа вариантов вместе с чисто математическими трудностями, присущими такого рода задачам (проблема существования и единственности решений, отсутствие регулярных методов нахождения решений, выбор исходных приближений при итеративных методах решения и т. п.), делают проблему синтеза и оптимизации траекторий КА одной из наиболее трудных в астродинамике.

Астродинамика, в отличие от небесной механики, естественным развитием которой она является, характеризуется чрезвычайным разнообразием постановок траекторных задач, обусловленным возможностью активного управления движением КА путем многократного включения его двигательной установки. Анализ опубликованных работ показывает, что значительная их часть посвящена рассмотрению указанных задач в упрощенной («модельной») постановке, позволяющей либо получить решение в аналитическом виде, либо сравнительно просто найти его численно. Многочисленные примеры подобного рода указаны в обзоре Гобеца и Долла [1].

Решения же возникающих на практике задач синтеза и оптимизации траекторий КА могут быть получены лишь на основе громоздких и трудоемких расчетов на ЭЦВМ. Эти задачи характеризуются высокой размерностью и большим числом варьируемых параметров и решаются, как правило, итеративными методами.

В этих условиях особую роль начинают играть методы построения приближенных решений задач синтеза и оптимизации траекторий КА. Чтобы эти методы и даваемые ими решения могли быть эффективно использованы, они должны удовлетворять ряду требований, среди которых отметим следующие:

(1) Приближенное решение должно сохранять все основные качественные закономерности точного решения.

(2) Ошибки приближенного решения должны находиться в заданных пределах по отношению к точному.

(3) Алгоритмы построения приближенного решения должны обеспечивать его получение только на основе исходной информации, без необходимости анализа промежуточных результатов и вмешательства исследователя. Для краткости такие алгоритмы в дальнейшем будем называть *регулярными*. Эти алгоритмы должны требовать на несколько порядков меньшего времени счета на ЭЦВМ, чем алгоритмы получения точного решения.

(4) Приближенное решение должно зависеть от меньшего числа варьируемых параметров и характеризоваться меньшим числом параметров выходной информации, что позволяет сократить количество вариантов при счете и представить результаты решения в более обзримом виде, чем для точного решения.

Отметим важное практическое значение двух последних требований, поскольку именно их выполнение дает возможность на этапе предварительного проектирования ракетно-космического комплекса проанализировать большое число вариантов, удовлетворяющих поставленным требованиям, и выделить из них достаточно узкую совокупность для исследования более точными методами с учетом всех необходимых факторов. Разработка приближенных методов дает возможность естественно, в структуре самого метода, учитывать ограничения и требования, предъявляемые к траекториям и параметрам КА. При таком подходе наличие ограничений и требований во многих случаях не усложняет, а упрощает решение задачи синтеза, так как уменьшает количество варьируемых параметров и диапазон их изменения. Пример такого метода синтеза приведен в гл. XI.

В общем случае может рассматриваться некая иерархия приближенных методов с последовательно повышающейся точностью, образующих в совокупности регулярный алгоритм получения решения поставленной задачи с любой заданной степенью точности. Пример такого иерархического регулярного алгоритма рассмотрен в § 11.6.

В книге изложены эффективные приближенные методы решения задач синтеза и оптимизации траекторий КА большой тяги. Основная особенность излагаемого подхода к решению этих задач состоит в использовании приближенных моделей механики полета КА большой тяги.

1°. Движение КА в гравитационном поле нескольких планет, среди которых можно выделить основную, рассматривается с помощью *модифицированного метода сфер влияния* — ММСВ. Согласно ММСВ при движении КА в гравитационном поле основной планеты радиусы сфер влияния других планет полагаются пулевыми. Такой подход позволяет разделить решение общей задачи синтеза и оптимизации траекторий на решение внешней задачи — в поле основной планеты — и внутренней задачи — в поле каждой меньшей планеты. Как показывает анализ (см. разделы 1.1.4, 1.1.5 и § 11.6), ММСВ обладает точностью того же порядка, что и *метод сфер влияния* — МСВ. В то же время ММСВ позволяет существенно упростить решение задачи по сравнению с МСВ.

2°. Активные участки полета КА аппроксимируются *мгновенными импульсами скорости*: радиус-вектор аппарата остается неизменным, а вектор скорости мгновенно получает некоторое приращение. Импульсная аппроксимация в сочетании с МСВ или ММСВ позволяет представить траекторию КА в виде нескольких кеплеровых дуг.

Импульсный подход дополняется разработанным в последнее время авторами алгоритмом приближенного построения оптимальной траектории КА с конечной тягой на основе известной импульсной траектории, без непосредственного решения вариационной задачи при конечной тяге.

3°. В тех случаях, когда движение КА происходит в окрестности некоторой круговой орбиты, уравнения движения аппарата линеаризуются относительно параметров движения по этой орбите.

Линеаризованные уравнения движения при решении задач оптимизации с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина позволяют в простой форме записать решение сопряженной системы уравнений и значительно упростить решение двухточечной красовой задачи. Линеаризованное решение, в свою очередь, может быть использовано в качестве исходного при решении задач оптимизации в нелинейной постановке.

Линеаризация для исследования импульсных перелетов впервые была применена, по-видимому, Г. Е. Кузмаком [1] (см. также работу Г. Е. Кузмака, Н. И. Лавренко, В. К. Исасва, В. В. Сонина [1]) и затем использовалась в работах Р. Ф. Аппазова, В. И. Огаркова [1], Е. И. Бушуева, А. А. Красовского [1], Г. Е. Кузмака [2, 4], Г. Е. Кузмака, Н. И. Лавренко [1], Макинтайра, Крокко [1, 2], Марекса [1—4], Эдельбаума [3]).

4°. Рассматриваются приближенные модели полей притяжения, в которых упрощение задачи достигается за счет предположения о тонкости слоя, в котором происходит движение, по сравнению с расстоянием до центра притяжения. Величина скорости движения в этом случае может быть произвольной. При таком подходе к задаче функции влияния оказываются одинаковыми по

всем координатам, что дает основание назвать такую модель поля притяжения *однородной* и позволяет выяснить целый ряд интересных свойств оптимального управления простыми геометрическими приемами.

Использование импульсной аппроксимации позволяет при оптимизации траекторий КА заменить каждый активный участок семимерным вектором, который определяется моментом времени t_k , радиусом-вектором $\mathbf{r}_k$ приложения импульса и вектором импульса скорости $\Delta \mathbf{V}_k$. В результате вариационная задача оптимизации траектории в функциональном пространстве (отыскание закона управления вектором тяги) сводится к задаче оптимизации некоторой целевой функции в конечномерном пространстве компонент векторов $\{t_k, \mathbf{r}_k, \Delta \mathbf{V}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) при наличии связей и ограничений. В качестве минимизируемого функционала обычно рассматривается характеристическая скорость перелета ΔV_Σ , равная сумме модулей всех импульсов:
$$\Delta V_\Sigma = \sum_k |\Delta \mathbf{V}_k|.$$

При этом характер связей, накладываемых на векторы $\{t_k, \mathbf{r}_k, \Delta \mathbf{V}_k\}$, определяется свойствами гравитационного поля, в котором происходит движение аппарата.

Применение МСВ или ММСВ позволяет разбивать траекторию аппарата на последовательность связанных между собой участков, на каждом из которых движение аппарата происходит в ньютоновском центральном гравитационном поле. В этом случае дифференциальные связи между векторами $\{t_k, \mathbf{r}_k, \Delta \mathbf{V}_k\}$ можно заменить конечными соотношениями невозмущенного кеплеровского движения. В результате задача синтеза и оптимизации траектории КА сводится к задаче нелинейного программирования. Такой подход к решению указанных задач будем в дальнейшем называть, в отличие от вариационного, *экстремальным*.

Характерная особенность задач астродинамики — это возможность удовлетворения поставленным условиям множеством (в принципе — бесконечным) траекторий, различающихся между собой количеством, местами приложения и величиной импульсов. При использовании экстремального подхода *схема перелета*, т. е. количество импульсов и возможные точки (в пространстве координат и времени) их приложения, должна быть задана из некоторых априорных рациональных соображений. Чтобы установить оптимальность выбранной схемы, надо сравнить ее со всеми допустимыми схемами при том же количестве импульсов, а также со всеми возможными схемами перелета с другим количеством импульсов. Ясно, что, оставаясь в рамках экстремального подхода, решить такую задачу в общем случае практически невозможно *).

*) Исключение составляет линеаризованная теория импульсных перелетов, где для ряда задач удается получить аналитическое решение и с его помощью исследовать вопрос об оптимальности схем перелета (см. гл. VI, VII).

Увеличение возможного количества импульсов существенно снижает эффективность экстремального подхода вследствие резкого увеличения числа варьируемых параметров. Поэтому, несмотря на принципиальную простоту, экстремальный подход применяется и применяется к задачам, в которых схема перелета задана и количество импульсов невелико. Вопрос о строгой локальной оптимальности как найденного решения, так и, в особенности, оптимальности выбранной схемы перелета в рамках экстремального подхода остается открытым.

Несмотря на указанные недостатки, экстремальный подход нашел весьма широкое практическое применение. Подавляющее большинство возникающих на практике достаточно сложных задач синтеза и оптимизации траекторий КА приближенно решено с его помощью (см. К. Б. Алексеев, Г. Г. Бебин, В. А. Ярошевский [1], Бэттин [2], Гобец, Долл [1], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [1], Эрике [5, 7, 8], Эскобал [2]).

В связи со сказанным можно отметить, что применение вместо строгих методов интуитивных подходов, основанных на априорном задании ряда определяющих условий и параметров и последующем их переборе, позволяет получить приближенное решение той или иной конкретной задачи и необходимую для практических целей информацию. Однако в задачах, где число априорно задаваемых условий велико, более или менее полный их перебор практически невозможен вследствие резкого возрастания объема вычислений, что неизбежно приводит к сравнению лишь небольшого числа «рациональных» вариантов. При этом возникает естественное чувство неудовлетворенности, связанное с отсутствием объективной оценки близости «рационального» варианта к строго оптимальному. В задачах оптимизации перелетов, где возможны многоимпульсные схемы перелета, рациональные схемы могут оказаться заметно хуже оптимальных. С другой стороны, наличие строго оптимальных решений позволяет рассматривать рациональные схемы перелета как практически приемлемые аппроксимации первых и сократить количество схем, анализируемых в процессе перебора.

Вопросы установления строгой локальной оптимальности заданной схемы перелета или оптимизации самой схемы перелета могут быть эффективно решены, если, оставаясь в рамках импульсной аппроксимации, от экстремального подхода вернуться к *вариационному подходу*. При использовании вариационного подхода необходимые условия оптимальности траекторий формулируются, как обычно, с помощью решения сопряженной системы уравнений. При этом, в отличие от традиционных задач управления, в случае импульсных траекторий, когда управления отыскиваются в классе векторных δ -функций Дирака, с помощью решения сопряженной системы удастся получить не только необхо-

димые условия оптимальности (стационарности) траектории, по и простые и наглядные условия строгой локальной оптимальности схемы перелета (см. гл. II). С помощью последних эффективно решаются вопросы, связанные с оптимизацией схемы перелета.

Разработка вопросов оптимизации импульсных перелетов в рамках вариационного подхода была начата Лоуденом; его основные результаты изложены в монографии [24], вышедшей в 1963 г. Подробный вывод и анализ необходимых условий оптимальности перелетов с импульсной тягой дан в монографии В. В. Ивашкина [4]. Методы оптимизации схем перелета были предложены в работах Лайона, Хэнделсмана [1], Ежевски, Розендаала [1], Ежевски [1], Минкоффа, Лайона [1]. Использование этих методов позволяет заменить характерный для экстремального подхода итеративный перебор различных схем перелета регулярными алгоритмами их нахождения (см. §§ 2.3, 10.4, 12.5).

Однако непосредственное применение вариационных методов к задачам оптимизации импульсных перелетов сводит их, как и в случае конечной тяги, к двухточечным краевым задачам со всеми трудностями их решения. Каждому оптимальному импульсу на фазовой траектории отвечает определенная структура решения сопряженной системы в соответствующей точке, которая в процессе численного решения краевой задачи может иметь место, вообще говоря, и в других точках на пассивных участках. Поэтому обычные итеративные методы решения краевых задач, в которых информация о структуре решения сопряженной системы используется для изменения управления (схемы перелета), в случае импульсных траекторий оказываются неэффективными.

Допустим теперь, что оптимальная фазовая траектория найдена и зафиксирована. В этом случае сопряженную систему можно рассматривать как линейную систему с переменными коэффициентами. Решение этой системы, удовлетворяющее тем же красивым условиям, что и в исходной задаче оптимизации, может быть всегда численно найдено с помощью одношагового алгоритма. Очевидно, что это решение сопряженной системы и заданная фазовая траектория удовлетворяют всем необходимым условиям строгой локальной оптимальности.

Проведенные выше рассуждения показывают, что эффективным путем решения задач оптимизации импульсных перелетов является сочетание экстремального и вариационного подходов. Сначала для априорно заданной схемы перелета на основе экстремального подхода проводится синтез оптимальной траектории. Затем с помощью решения сопряженной системы проверяется строгая локальная оптимальность заданной схемы перелета. Если найденная траектория не является строго локально оптимальной, то анализ решения сопряженной системы позволяет установить вероятную схему оптимального перелета. Для этой схемы

2*

снова экстремальным подходом находится оптимальная траектория, с помощью сопряженной системы проверяется ее строгая локальная оптимальность и т. д.

Содержание глав книги достаточно ясно из оглавления, поэтому ограничимся кратким комментарием общего плана книги и его связи с изложенными общими положениями.

В главе I путем сравнения различных приближенных методов рассмотрения движения КА в гравитационном поле нескольких планет обосновывается целесообразность применения ММСВ на этапе общего анализа и выбора параметров и траекторий полета. С помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина дается постановка общей задачи оптимизации траектории полета в рамках ММСВ. Применение не прямых методов оптимизации, в особенности принципа максимума, наиболее соответствует задаче оптимизации траекторий КА большой тяги. Использование же в этом случае прямых методов, аналогичных рассмотренным в книгах и статьях Брайсона, Денхэма [1], Брайсона, Хо Ю-шпи [1], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [1], Келли [1], П. Н. Красовского [1], Лейтмана [1], Р. Ли [1], Моррея [1], Томкинса [1], Хедли [1], Т. М. Энеева [1], вряд ли оправдано вследствие малой продолжительности действия управления по сравнению с общей продолжительностью полета. Особенно отчетливо это положение проявляется в случае импульсных перелетов.

В главе II на основе вариационного подхода получены необходимые условия строгой локальной оптимальности импульсных перелетов в произвольном и ньютоновском гравитационном полях. Показано, что сопряженную систему можно эффективно использовать для улучшения неоптимальных импульсных траекторий, в частности для оптимизации схемы перелета.

В главе III проанализировано решение сопряженной системы в случае ньютоновского гравитационного поля. Показана эффективность сочетания экстремального и вариационного подходов, в частности с использованием аналитического решения сопряженной системы, для решения задачи оптимизации импульсного перелета.

В главе IV в общем виде рассмотрена обратная задача импульсной аппроксимации — о приближенном построении с помощью оптимальной импульсной траектории оптимальной траектории для конечной тяги без решения соответствующей вариационной задачи. Сформулирован алгоритм перехода и получены оценки близости приближенного решения к точному.

В главе V для одно- и двухимпульсных кеплеровых перелетов с постоянной характеристической скоростью между компланарными круговыми орбитами и для кеплеровых перелетов между двумя заданными радиусами-векторами получены соотношения, которые эффективно используются при экстремальном подходе к

решению задач синтеза и оптимизации импульсных траекторий. Значительная часть результатов этой главы используется в главах X—XII и особенно при исследовании перелетов Земля — планета — Земля (глава XII).

В главах VI и VII решаются вариационные задачи о перелетах в линейаризованной постановке, которая возможна при движении по околокруговой орбите. В главе VI выводятся приближенные уравнения движения и условия оптимальности для перелетов с конечной и импульсной тягой. В главе VII дано полное решение ряда основных задач теории импульсных перелетов в линейаризованной постановке.

Следующая VIII глава посвящена изложению приближенной теории оптимального маневрирования в тонких сферических слоях ньютоновского гравитационного поля, для применимости которой, в отличие от линейаризации в окрестности круговой орбиты, нет необходимости в предположении о близости величины скорости аппарата к значению круговой скорости. Если величину отношения гравитационного ускорения к расстоянию от центра притяжения аппроксимировать заданной функцией времени, то система уравнений движения оказывается линейной, а уравнения сопряженной системы в проециях на каждую из осей декартовой системы координат имеют один и тот же вид. В этом случае исследование задач оптимизации траекторий может быть проведено в векторной форме с помощью простых геометрических построений. В главе IX полученные результаты прилагаются к решению ряда основных задач ракетодинамики.

В главе X рассматривается «внутренняя» задача ММСВ об оптимальных одно- и двухимпульсных перелетах между сферой влияния и орбитой ИС. Исследование проводится на основе сочетания экстремального и вариационного подходов: сначала задача оптимизации решается для заданных схем перелета, а затем с помощью решения сопряженной системы устанавливается строгая локальная оптимальность схем перелета. Значительная часть результатов этой главы используется в главах XI и XII.

Глава XI посвящена исследованию траекторий КА в системе Земля — Луна, главным образом траекторий облета Луны. Рассматривается приближенный метод синтеза траекторий, основанный на использовании ММСВ, позволяющий получить аналитическое решение задачи построения траекторий облета Луны с возвращением в атмосферу Земли и перелета Луна — атмосфера Земли. Для оптимизации траекторий перелета орбита ИСЗ — орбита ИСЛ предлагается простой вычислительный алгоритм. Для каждой из задач приведены результаты подробного геометрического исследования. В целом материал этой главы иллюстрирует эффективность использования ММСВ при решении достаточно сложных задач синтеза траекторий КА.

В главе XII изучаются оптимальные перелеты орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — орбита ИСЗ, в том числе с использованием торможения в атмосферах планет. Приближенный метод расчета оптимальных траекторий разработан в рамках ММСВ и основан на «склейке» оптимальных решений на гелиоцентрическом и планетоцентрическом участках. Задача оптимизации решается путем сочетания экстремального и вариационного подходов. Сначала рассматриваются перелеты заданной схемы с минимально необходимым количеством импульсов, сообщаемых КА на околопланетных орбитах, затем с помощью решения сопряженной системы проводится оптимизация схем перелета, в том числе с дополнительными импульсами на гелиоцентрических участках. Приведены результаты подробного параметрического исследования оптимальных перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля. В целом материал этой главы иллюстрирует эффективность общего подхода к решению задач синтеза и оптимизации траекторий КА, основанного на использовании приближенных моделей движения и сочетании экстремального и вариационного методов.

В Приложении изложены основные сведения из теории сопряженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Материал этого Приложения используется в теории оптимизации траекторий КА, главным образом в главах I—IV.

§ 1.1. Приближенные методы рассмотрения траекторий

1.1.1. Уравнения движения центра масс космического аппарата. Уравнения движения центра масс КА относительно некоторой инерциальной системы координат в общем случае можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{T}}{m} + \frac{\mathbf{F}_a}{m}. \quad (1.1.2)$$

Здесь t — время, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор аппарата относительно начала системы координат, $\mathbf{V}$ — вектор скорости КА, m — его масса, $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ — вектор гравитационного ускорения, $\mathbf{T}$ — вектор тяги КА, $\mathbf{F}_a$ — вектор аэродинамических сил.

Всюду в дальнейшем рассматривается движение КА вне плотных слоев атмосфер планет, поэтому полагаем $\mathbf{F}_a = 0$. Система уравнений (1.1.1), (1.1.2) будет рассматриваться в основном для ньютоновского гравитационного поля (см. разделы 1.1.5, 1.2.1).

В качестве двигательных установок КА будем рассматривать химические или ядерные ЖРД большой тяги, для которых

$$\mathbf{T} = T\mathbf{e} = -c \frac{dm}{dt} \mathbf{e}, \quad (1.1.3)$$

где c — скорость истечения газов из сопла ЖРД или ЯРД в пустоте, принимаемая постоянной, $\mathbf{e} = \mathbf{T}/T$ — орт вектора тяги.

В дальнейшем считаем, что масса КА расходуется только на создание тяги, а элементы конструкции аппарата (например, топливные баки) не сбрасываются. В этом случае расход массы удобно определять величиной *характеристической скорости* q , задаваемой соотношением

$$\frac{dq}{dt} = \frac{T}{m}, \quad q_0 \equiv q(t_0) = 0, \quad (1.1.4)$$

где t_0 — начальный момент времени. Положим, что $c(t)$ — кусочно-постоянная функция:

$$c_k = \text{const} \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1.5)$$

Тогда из (1.1.3) и (1.1.4) получаем

$$q(t) - q_{k-1} = c_k \ln \frac{m_{k-1}}{m(t)} \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \dots, N, \quad (1.1.6)$$

где

$$q_k = q(t_k), \quad (1.1.7)$$

$$m_k = m(t_k). \quad (1.1.8)$$

Из (1.1.6) имеем

$$\frac{m_0}{m(t)} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} \frac{q_j - q_{j-1}}{c_j} + \frac{q(t) - q_{k-1}}{c_k} \right\} \\ \forall t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1.9)$$

$$\frac{m_0}{m_N} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{q_k - q_{k-1}}{c_k} \right\}. \quad (1.1.10)$$

Если

$$c = \text{const}, \quad (1.1.11)$$

то с учетом (1.1.4) из (1.1.6), (1.1.9) и (1.1.10) получаем

$$q = c \ln \frac{m_0}{m}, \quad \frac{m_0}{m} = e^{q/c}, \quad (1.1.12)$$

$$\frac{T}{m} = \frac{T}{m_0} e^{q/c}. \quad (1.1.13)$$

Введение характеристической скорости вместо массы при анализе оптимальных перелетов КА с двигательными установками большой тяги является сложившейся традицией в аэродинамике. Такой подход, особенно при анализе оптимальных импульсных перелетов (см. § 2.1), позволяет отделить рассмотрение вопросов оптимизации траекторий от вопросов оптимизации конструкции КА с учетом характеристик двигательной установки (Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев [2]).

Основной особенностью движения КА с двигательными установками большой тяги является чрезвычайно малая продолжительность активных участков по сравнению с пассивными. Таким образом, на большей части траектории аппарат движется под действием только гравитационных сил. Поэтому возможность аналитического или, в общем случае, достаточно простого расчета траектории аппарата на пассивных участках играет в задачах аэродинамики первостепенную роль. Из небесной механики известно (Г. Н. Дубошин [1], М. Ф. Субботин [2]), что для уравнений (1.1.1), (1.1.2) (при $F_a \equiv 0$, $T \equiv 0$) можно пайти общее

аналитическое решение в случае задачи двух тел. Однако важнейшие задачи астродинамики, такие, как задачи о движении КА в системе Земля — Луна или о перелетах Земля — планета и Земля — планета — Земля, являются ограниченными задачами n тел, где $n \geq 3$ (см. Г. Н. Дубошин [2], М. Ф. Субботин [2]). Поэтому в астродинамике существенную роль играет вопрос о приближенном задании в уравнении (1.1.2) гравитационного ускорения $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$, позволяющем упростить решение задачи при сохранении требуемой точности. Различные способы приближенного задания вектора гравитационного ускорения $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ основаны на рассмотрении различных моделей, схематизирующих истинные гравитационные поля.

1.1.2. «Точные» гравитационные поля. Для задачи определения траекторий КА, не связанных с оценкой эволюции орбит аппаратов в течение длительных промежутков времени (М. Л. Лидов [1]), используется модель гравитационного поля, основанная на следующих предположениях:

1° Рассматривается ограниченная задача $n + 1$ тела, где 1, 2, ..., n -е тела — Солнце и (или) планеты, $(n + 1)$ -е тело пренебрежимо малой массы — КА.

2° Радиусы-векторы Солнца и (или) планет $\mathbf{r}_i$ относительно начала некоторой инерциальной системы координат являются заданными достаточно гладкими функциями времени:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.14)$$

3° Солнце и (или) планеты имеют сферическое распределение массы.

При этих предположениях гравитационный потенциал Π Солнца и (или) планет имеет вид (Бэттин [2])

$$\Pi = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (1.1.15)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор КА, μ_i — гравитационные постоянные Солнца и (или) планет:

$$\mu_i = k^2 m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.16)$$

m_i — массы Солнца и (или) планет, k — постоянная Гаусса (k^2 — универсальная гравитационная постоянная).

Вектор гравитационного ускорения $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ в этом случае равен

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = - \text{grad } \Pi = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}). \quad (1.1.17)$$

На радиус-вектор КА накладываем естественное ограничение

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| \geq \inf |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.18)$$

Поскольку потенциал Π (1.1.15) в области (1.1.18) при любом постоянном t представляет сумму гармонических функций, гравитационное ускорение является аналитической функцией g для всех g , удовлетворяющих условию (1.1.18).

Проанализируем предположения 2° и 3°. Поскольку рассматривается ограниченная задача $n + 1$ тела, движение Солнца и (или) планет может быть вычислено на рассматриваемый промежуток времени с любой заданной степенью точности. Результаты таких расчетов приводятся, например, в Астрономических ежегодниках СССР. Отметим, что явная зависимость $g(r, t)$ от t в (1.1.17) соответствует заданным зависимостям (1.1.14).

Введение предположения 3° оправдано следующими соображениями. Во-первых, большая часть полета КА происходит на значительных (по сравнению с размерами Солнца и (или) планет) расстояниях, когда Солнце и (или) планеты можно рассматривать как материальные точки, для которых справедливо соотношение (1.1.15). Во-вторых, в настоящее время и в ближайшем будущем полеты с целью близкого облета планеты, выхода на орбиту ее ИС или посадки на планету будут осуществляться от Земли главным образом к Луне, Марсу и Венере, гравитационный потенциал которых с достаточной точностью можно считать имеющим вид (1.1.15).

Отличие действительного потенциала от (1.1.15) сказывается лишь вблизи планет при условии, что движение КА в окрестности планеты происходит в течение длительного промежутка времени. При рассмотрении задач синтеза траекторий перелетов КА с двигателями большой тяги, для которых, как правило, продолжительность движения в окрестности планеты мала, этим отличием, как показывает опыт многочисленных расчетов, можно пренебречь. Отметим, что учет несферичности распределения масс не представляет принципиальных затруднений.

Достоинством рассматриваемой модели гравитационного поля является возможность (с учетом несферичности распределения масс планет) вычисления траектории КА с любой наперед заданной точностью. Однако это может быть сделано только численно с помощью ЭЦВМ. Поэтому при анализе общих свойств траекторий КА и на этапе предварительного выбора оптимальных параметров, схем и траекторий перелета использование «точных» зависимостей (1.1.17) оказывается затруднительным. Эффективное решение краевых задач в «точной» постановке, которое сводится к применению тех или иных итерационных схем, в значительной степени зависит от наличия достаточно хороших исходных приближенных решений. Поэтому различные приближенные методы решения указанных краевых задач, основанные на замене «точного» гравитационного поля (1.1.17) некоторой аппроксимирующей моделью, играют в астродинамике первостепенную роль.

1.1.3. Приближенные модели гравитационных полей. Метод сращивания асимптотических разложений. В основе всех приближенных моделей гравитационных полей лежат характерные особенности Солнечной системы и системы Земля — Луна:

(1) масса каждой планеты m_i намного меньше массы Солнца $m_\odot$ (см. таблицу 1.1.1):

$$\frac{m_i}{m_\odot} < \frac{m_\Sigma}{m_\odot} \approx 1,347 \cdot 10^{-3}, \quad (1.1.19)$$

где m_Σ — сумма масс планет;

(2) масса Луны m_ζ намного меньше массы Земли $m_\oplus$ (см. таблицу 1.1.1):

$$\frac{m_\zeta}{m_\oplus} \approx 1,23 \cdot 10^{-2}. \quad (1.1.20)$$

Рассмотрим, к чему приводят указанные особенности, на примере движения КА в поле тяготения двух планет P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 , считая

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \ll 1. \quad (1.1.21)$$

Перепишем (1.1.17) в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \mu_1 \left[\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} + \varepsilon \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3} \right]. \quad (1.1.22)$$

Из (1.1.22) следует, что для всех $\mathbf{r}$, для которых

$$\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} \gg \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.1.23)$$

влияние гравитационного поля планеты P_2 на движение аппарата мало. Влияние гравитационного поля планеты P_2 становится существенным лишь в некоторой, малой сравнительно с $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, окрестности планеты P_2 . С другой стороны, всегда можно выделить такую малую окрестность планеты P_2 , где, в свою очередь, влияние гравитационного поля планеты P_1 на движение аппарата оказывается малым по сравнению с влиянием гравитационного поля планеты P_2 . Таким образом, если имеет место (1.1.21), то можно считать, что:

(а) Во всем пространстве, за исключением малой по отношению к $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ окрестности планеты P_2 , движение КА в основном определяется гравитационным полем планеты P_1 :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \approx \mu_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.1.24)$$

(б) В указанной малой окрестности планеты P_2 движение КА в основном определяется гравитационным полем планеты P_2 :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \approx \mu_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.1.25)$$

(в) Существует некоторая переходная область, размеры которой имеют тот же порядок, что и размеры окрестности (б), где влияние гравитационных полей планет P_1 и P_2 на движение аппарата сравнимо по величине.

В области (а) уравнения (1.1.1), (1.1.2) содержат малый параметр, и здесь применимы регулярные методы теории возмущений — построение асимптотических разложений (Коул [1], И. Г. Малкин [1]). Движение КА в первом приближении является кеплеровым в гравитационном поле планеты P_1 , влияние планеты P_2 дает возмущения порядка ε (Лагерстрём, Кеворкян [1]).

Однако регулярные методы неприменимы, когда траектория аппарата проходит вблизи планеты P_2 , на расстоянии порядка $\sqrt{\varepsilon} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Здесь необходимо применять специальные методы теории возмущений, учитывающие прохождение траектории вблизи особой точки (Коул [1]).

Назовем задачу определения траектории в поле планеты P_1 с учетом влияния планеты P_2 *внешней задачей*, а задачу определения траектории в поле планеты P_2 с учетом влияния планеты P_1 *внутренней задачей*. Соответствующие асимптотические разложения назовем *внешним* и *внутренним*. Метод построения внешнего и внутреннего разложений и сращивания их был разработан в работе Лагерстрёма и Кеворкяна [1]. С точностью до членов первого порядка внешнее разложение описывает кеплерово движение КА, влияние планеты P_2 дает поправку порядка ε . С точностью до членов порядка ε^2 внутреннее разложение описывает кеплерово движение КА по гиперболе относительно планеты P_2 .

Метод сращивания асимптотических разложений до последнего времени не нашел широкого применения в астродинамике. В настоящее время с его помощью рассмотрены некоторые задачи определения траекторий КА в системе Земля — Луна (Кеворкян, Брэчет [1]; Лагерстрём, Кеворкян [1—4]; Ланкастер, Кеворкян [1]; Ланкастер, Уокер, Мэни [1]; Ланкастер [1]) и траекторий перелета Земля — планета — Земля (Брейкуэлл, Перко [1]; Перко [1]). Некоторые соображения в связи с этим будут рассмотрены в конце раздела 1.1.4.

1.1.4. Метод сфер влияния — МСВ (метод сращивания кеплеровых траекторий). Если во внешнем разложении пренебречь членами порядка ε (влиянием планеты P_2), то во внешней задаче будем иметь кеплерово движение. В этом случае вместо сращивания асимптотических разложений необходимо сращивать две кеплеровы траектории относительно планет P_1 и P_2 соответственно. Чтобы провести такое сращивание, необходимо указать некоторую граничную поверхность в окрестности планеты P_2 , где происходит переход от движения в поле планеты P_1 к движению

в поле планеты P_2 . В связи с этим в астродинамике вводится фундаментальное понятие *гравитационной сферы*, или *сферы влияния планеты P_2 в поле тяготения планеты P_1* . В настоящее время в астродинамике предложены различные определения этого понятия (Бэттин [2], М. Д. Кислик [1], М. Ф. Субботин [1], Г. А. Чеботарев [2]). Наибольшее практическое распространение получило принадлежащее Лапласу определение сферы влияния, названной сферой действия планеты, введенное им в небесную механику в связи с изучением движения комет при их сближении с большими планетами (Бэттин [2], М. Ф. Субботин [1], Г. А. Чеботарев [2]).

Чтобы получить выражение для определения радиуса сферы влияния планеты, рассмотрим ограниченную задачу трех тел: планета P_1 (масса m_1), планета P_2 (масса m_2) и КА (масса $m = 0$), причем имеет место неравенство (1.1.21).

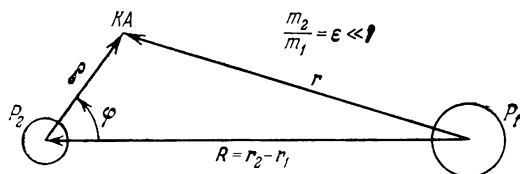


Рис. 1.1.1.

Обозначим (рис. 1.1.1) через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы центров планет P_1 и P_2 в некоторой инерциальной системе координат, $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$ — радиусы-векторы КА относительно планет P_1 и P_2 соответственно, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра планеты P_2 относительно центра планеты P_1 :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (1.1.26)$$

Согласно (1.1.17) уравнения движения аппарата и планет относительно рассматриваемой инерциальной системы координат можно записать в виде

$$\frac{d^2(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}, \quad (1.1.27)$$

$$\frac{d^2(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_2)}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}, \quad (1.1.28)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{\mu_2}{R^3} \mathbf{R}, \quad (1.1.29)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{R^3} \mathbf{R}. \quad (1.1.30)$$

Вычитая (1.1.29) из (1.1.27) и (1.1.30) из (1.1.28), получаем

уравнения движения КА относительно планет P_1 и P_2 соответственно:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r^3} \mathbf{r} = -\mu_2 \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right), \quad (1.1.31)$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} + \frac{\mu_2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} = -\mu_1 \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (1.1.32)$$

Обозначим через $\mathbf{F}_i$ силу, с которой планета P_i притягивает аппарат при его движении относительно этой планеты, а через $\delta \mathbf{F}_i$ — силу, с которой планета P_i возмущает его движение относительно другой планеты. Согласно (1.1.31) и (1.1.32)

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_1}{r^2}, \quad (1.1.33)$$

$$\delta \mathbf{F}_2 = \mu_2 \left| \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right|, \quad (1.1.34)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_2}{\rho^2}, \quad (1.1.35)$$

$$\delta \mathbf{F}_1 = \mu_1 \left| \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right|. \quad (1.1.36)$$

В соответствии с МСВ при решении внешней задачи полагаем

$$\delta \mathbf{F}_2 = 0, \quad (1.1.37)$$

т. е. в системе координат, связанной с центром планеты P_1 , рассматриваем кеплерово движение аппарата, определяемое уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.1.38)$$

Аналогично при решении внутренней задачи полагаем

$$\delta \mathbf{F}_1 = 0, \quad (1.1.39)$$

т. е. в системе координат, связанной с центром планеты P_2 , рассматриваем кеплерово движение аппарата, определяемое уравнением

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu_2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}. \quad (1.1.40)$$

Как показывает уравнение (1.1.32), система координат, связанная с планетой P_2 , не является инерциальной. Из уравнения же (1.1.40) следует, что система координат, связанная с планетой P_2 , считается инерциальной. Уравнение (1.1.40) в точности совпадает с (1.1.32) при $\mathbf{r} = \mathbf{R}$. Физически это соответствует тому, что в центре планеты P_2 ускорение КА, обусловленное неинерциальностью системы координат (уравнением (1.1.30)),

в точности компенсируется гравитационным ускорением планеты P_1 . Очевидно, что в некоторой окрестности планеты P_2 происходит приближенная компенсация этих ускорений. Таким образом, в некоторой окрестности планеты P_2 связанную с ней систему координат приближенно можно считать инерциальной, что и соответствует уравнению (1.1.40). Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении уравнений (1.1.31), (1.1.38) и системы координат, связанной с планетой P_1 .

Преобразуем, следуя работам Г. А. Чеботарева [2], М. Ф. Субботина [1], выражения для δF_2 , δF_1 и F_1 . Положим

$$\cos \varphi = \frac{(-\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})}{R\rho}, \quad (1.1.41)$$

$$u = \frac{\rho}{R}. \quad (1.1.42)$$

Угол φ представляет собой угол между направлениями из центра планеты P_2 на центр планеты P_1 и КА (рис. 1.1.1).

Имеем из (1.1.34) с учетом (1.1.41) и (1.1.42)

$$\delta F_2 = \frac{\mu_2}{\rho^2} (1 - 2u^2 \cos \varphi + u^4)^{1/2}. \quad (1.1.43)$$

Аналогично из (1.1.34) получаем

$$\delta F_1 = \frac{\mu_1}{R^2 (1 - 2u \cos \varphi + u^2)} \{1 + (1 - 2u \cos \varphi + u^2)^2 - 2(1 - u \cos \varphi)(1 - 2u \cos \varphi + u^2)^{1/2}\}^{1/2}. \quad (1.1.44)$$

Рассмотрим окрестность планеты P_2 , где ее влияние на движение КА является преобладающим. Тогда u можно считать малой величиной. Раскладывая выражение (1.1.43) в ряд по степеням u , получим с точностью до величин порядка u^2

$$\delta F_2 = F_2 = \frac{\mu_2}{\rho^2}. \quad (1.1.45)$$

Аналогично с точностью до величин порядка u

$$\delta F_1 = \frac{\mu_1 \rho}{R^3} (1 + 3 \cos \varphi)^{1/2}, \quad (1.1.46)$$

$$F_1 = \frac{\mu_1}{R^2}. \quad (1.1.47)$$

Полученные выражения позволяют аналитически построить вокруг планеты P_2 поверхности областей, где влияние планеты P_2 на движение КА является преобладающим. Все указанные поверхности, как будет показано ниже, близки к сферам с центром в точке P_2 , однако радиусы этих сфер определяются до известной степени произвольно.

Рассмотрим прежде всего определение сферы действия планеты по Лапласу. При движении КА около планеты P_2 возмущаю-

щим воздействием планеты P_1 можно пренебречь в области, где

$$\frac{\delta F_1}{F_2} < \frac{\delta F_2}{F_1}. \quad (1.1.48)$$

На границе этой области выполняется условие

$$\frac{\delta F_1}{F_2} = \frac{\delta F_2}{F_1}. \quad (1.1.49)$$

Подставляя соответствующие величины из (1.1.35), (1.1.45), (1.1.46) и (1.1.47) в (1.1.49), получим для значений $\rho_{\text{гр}}$, лежащих на граничной поверхности (1.1.49), следующее уравнение:

$$\frac{\rho_{\text{гр}}}{R} = \left[\frac{\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2}{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \right]^{1/5} \quad (1.1.50)$$

Уравнение (1.1.50) определяет в полярных координатах (ρ, φ) поверхность вращения с осью, направленной по прямой $P_1 P_2$. График функции

$$\rho = \frac{1}{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/10}}, \quad (1.1.51)$$

представляющий сечение этой поверхности меридиональной плоскостью, показан на рис. 1.1.2 сплошной линией. Видно, что поверхность (1.1.50) близка к сфере; отношение максимального и

минимального значений ρ составляет

$$\frac{\rho_{\text{max}}}{\rho_{\text{min}}} = 2^{1/5} \approx 1,15. \quad (1.1.52)$$

Заменяя поверхность (1.1.50) сферой и беря в качестве ее радиуса, как это принято (Бэттин [2], М. Ф. Субботин [1], Г. А. Чеботарев [2]), максимальную величину $\rho_{\text{гр}}$, получим окончательное выражение для радиуса лапласовой сферы действия планеты P_2 в гравитационном поле планеты P_1 :

$$\rho_{\text{сф}} = R \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{2/5}. \quad (1.1.53)$$

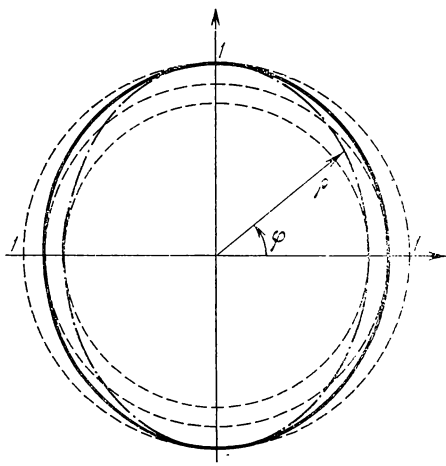


Рис. 1.1.2.

Рассматривая движение КА относительно планеты P_1 , описываемое уравнением (1.1.31), можно определить радиус сферы влияния $\rho_{\text{сф}}^*$ из условия равенства основной F_1 и возмущающей

δF_2 сил (Мёкель [3], Г. А. Чеботарев [2]):

$$F_1 = \delta F_2. \quad (1.1.54)$$

Подставляя (1.1.45) и (1.1.47) в (1.1.54), получим

$$\rho_{\text{сф}}^* = R \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2}. \quad (1.1.55)$$

Согласно (1.1.45), та же сфера влияния получается и из условия равенства основных сил F_1 и F_2 . Сфера с радиусом $\rho_{\text{сф}}^*$ называется *сферой тяготения* планеты (Г. А. Чеботарев [2]).

Аналогично, рассматривая движение КА относительно планеты P_2 , описываемое уравнением (1.1.32), можно определить радиус сферы влияния $\rho_{\text{сф}}^{**}$ из условия равенства основной F_2 и возмущающей δF_1 сил (Мекель [3], Г. А. Чеботарев [2]):

$$F_2 = \delta F_1. \quad (1.1.56)$$

Подставляя (1.1.35) и (1.1.46) в (1.1.56), получим уравнение граничной поверхности

$$\frac{\rho_{\text{гр}}^{**}}{R} = \left[\frac{\frac{m_2}{m_1}}{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \right]^{1/3}. \quad (1.1.57)$$

Свойства поверхности вращения (1.1.57) аналогичны свойствам поверхности (1.1.50). График функции

$$\rho = \frac{1}{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^{1/6}}, \quad (1.1.58)$$

определяющий сечение этой поверхности меридиональной плоскостью, показан на рис. 1.1.2 штрих-пунктирной линией. Поверхность (1.1.57) близка к сфере, для нее отношение

$$\frac{\rho_{\text{max}}^{**}}{\rho_{\text{min}}^{**}} = 2^{1/3} \approx 1,26. \quad (1.1.59)$$

Принимая в качестве радиуса сферы влияния максимальную величину $\rho_{\text{гр}}^{**}$, получим

$$\rho_{\text{сф}}^{**} = R \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/3}. \quad (1.1.60)$$

Заметим, что, согласно (1.1.45), та же сфера получается из условия равенства возмущений δF_1 и δF_2 .

В работе М. Д. Кислика [1] для определения сферы влияния используется обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби) в ограниченной круговой задаче трех тел. Считается, что в пределах сферы влияния планеты КА движется по кеплеровой траектории, которой соответствует константа интеграла Якоби C . После выхода из сферы влияния считается, что аппарат движется

Таблица 1.1.1

Планета	Относительная масса $\frac{m_{\oplus}}{m_{\text{п}}}$	Среднее расстояние от Солнца R , км	Радиусы сфер влияния планет			
			Сфера действия (1.1.53)	Сфера тяготения (1.1.55)	Сфера влияния (1.1.60)	Сфера влияния по Кислику (1.1.61)
			$\frac{\rho_{\text{сф}}}{R} = \left(\frac{m_{\text{п}}}{m_{\odot}}\right)^{2/5}$ $\rho_{\text{сф}}$, км	$\frac{\rho_{\text{сф}}^*}{R} = \left(\frac{m_{\text{п}}}{m_{\odot}}\right)^{1/2}$ $\rho_{\text{сф}}^*$, км	$\frac{\rho_{\text{сф}}^{**}}{R} = \left(\frac{m_{\text{п}}}{m_{\odot}}\right)^{1/3}$ $\rho_{\text{сф}}^{**}$, км	$\sim \frac{\rho_{\text{сф}}}{R} = 1,15 \left(\frac{m_{\text{п}}}{m_{\odot}}\right)^{1/3}$ $\rho_{\text{сф}}$, км
Меркурий	$6,12 \cdot 10^6$	$57,871 \cdot 10^6$	$1,9289 \cdot 10^{-3}$ $0,1162 \cdot 10^6$	$4,0423 \cdot 10^{-4}$ $0,023393 \cdot 10^6$	$5,4670 \cdot 10^{-3}$ $0,31638 \cdot 10^6$	$6,2871 \cdot 10^{-3}$ $0,36384 \cdot 10^6$
Венера	$4,08645 \cdot 10^5$	$108,138 \cdot 10^6$	$5,6946 \cdot 10^{-3}$ $0,61580 \cdot 10^6$	$1,5643 \cdot 10^{-3}$ $0,16916 \cdot 10^6$	$1,3476 \cdot 10^{-2}$ $1,4572 \cdot 10^6$	$1,5497 \cdot 10^{-2}$ $1,6758 \cdot 10^6$
Земля	$3,32488 \cdot 10^5$	$149,5 \cdot 10^6$	$6,1843 \cdot 10^{-3}$ $0,92455 \cdot 10^6$	$1,7343 \cdot 10^{-3}$ $0,25927 \cdot 10^6$	$1,4435 \cdot 10^{-2}$ $2,1580 \cdot 10^6$	$1,660 \cdot 10^{-2}$ $2,4817 \cdot 10^6$
Марс	$3,0880 \cdot 10^6$	$227,792 \cdot 10^6$	$2,5359 \cdot 10^{-3}$ $0,57765 \cdot 10^6$	$5,6906 \cdot 10^{-4}$ $0,12963 \cdot 10^6$	$6,8671 \cdot 10^{-3}$ $1,5643 \cdot 10^6$	$7,8972 \cdot 10^{-3}$ $1,7989 \cdot 10^6$
Юпитер	$1,0474 \cdot 10^3$	$777,849 \cdot 10^6$	$6,1938 \cdot 10^{-2}$ $48,176 \cdot 10^6$	$3,0899 \cdot 10^{-2}$ $24,034 \cdot 10^6$	$9,8468 \cdot 10^{-2}$ $76,590 \cdot 10^6$	$1,1324 \cdot 10^{-1}$ $88,079 \cdot 10^6$
Сатурн	$3,49764 \cdot 10^3$	$1426,06 \cdot 10^6$	$3,8238 \cdot 10^{-2}$ $54,529 \cdot 10^6$	$1,6909 \cdot 10^{-2}$ $24,413 \cdot 10^6$	$6,5878 \cdot 10^{-2}$ $93,946 \cdot 10^6$	$7,5760 \cdot 10^{-2}$ $108,04 \cdot 10^6$
Уран	$2,2869 \cdot 10^4$	$2867,7 \cdot 10^6$	$1,8043 \cdot 10^{-2}$ $51,741 \cdot 10^6$	$6,6127 \cdot 10^{-3}$ $48,963 \cdot 10^6$	$3,5230 \cdot 10^{-2}$ $101,03 \cdot 10^6$	$4,0515 \cdot 10^{-2}$ $116,18 \cdot 10^6$
Нептун	$1,9314 \cdot 10^4$	$4493,63 \cdot 10^6$	$1,9304 \cdot 10^{-2}$ $86,746 \cdot 10^6$	$7,1956 \cdot 10^{-3}$ $32,334 \cdot 10^6$	$3,7271 \cdot 10^{-2}$ $167,48 \cdot 10^6$	$4,2862 \cdot 10^{-2}$ $192,61 \cdot 10^6$
Плутон	$4,0 \cdot 10^5$	$5907,9 \cdot 10^6$	$5,7455 \cdot 10^{-3}$ $33,932 \cdot 10^6$	$1,5811 \cdot 10^{-3}$ $9,3412 \cdot 10^6$	$1,3572 \cdot 10^{-2}$ $80,183 \cdot 10^6$	$1,5608 \cdot 10^{-2}$ $92,21 \cdot 10^6$
Луна	81,526	$384\,394,8$	$0,17198$ 66109	$0,41075$ 42573	$0,23062$ 88650	$0,26522$ 101948

Примечания: 1. Величины $\frac{m_{\oplus}}{m_{\text{п}}}$, R и $\frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}}$ соответствуют данным, приведенным в таблицах 1.1.4.1 и 1.2.4.1.

2. Луна рассматривается в поле тяготения Земли. В качестве относительной массы берется $m_{\oplus}/m_{\odot}$, в качестве R — среднее расстояние от Земли.

по кеплеровой орбите, для которой интеграл Якоби вместо константы дает некоторую функцию $\bar{C}$ координат и скоростей. Разность $\Delta C = \bar{C} - C$, представляющая собой ошибку аппроксимации траектории аппарата двумя кеплеровыми дугами, зависит от отношения масс планет, начальных условий и $\rho_{\text{сф}}$. В качестве $\rho_{\text{сф}}$ принимается величина, минимизирующая осредненную по начальным условиям ошибку ΔC . В результате для радиуса сферы влияния $\rho_{\text{сф}}$ получено выражение

$$\tilde{\rho}_{\text{сф}} = 1,15R \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/3}. \quad (1.1.61)$$

М. Д. Кисликом высказано предположение и приведены примеры расчета, подтверждающие, что при аппроксимации траектории кеплеровыми дугами ошибки расчета параметров траектории будут в среднем минимальны при переходе от одного притягивающего центра к другому на границе сферы влияния с радиусом $\tilde{\rho}_{\text{сф}}$ (1.1.61). Расчеты показывают (см. таблицу 1.1.1), что $\frac{\rho_{\text{сф}}}{\tilde{\rho}_{\text{сф}}} \approx 2 \div 3$. Заметим, что, согласно (1.1.60) и (1.1.61), $\tilde{\rho}_{\text{сф}} \approx \rho_{\text{сф}}^{**}$.

Учитывая, что, согласно проведенному анализу, все рассмотренные сферы, по существу, выделяют область преимущественного влияния планеты P_2 на движение КА, в дальнейшем будем пользоваться для всех полученных сфер названием *сфера влияния*. Радиусы рассмотренных выше сфер влияния планет приведены в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.2

Планета	Ошибки в решении внутренней и внешней задач по МСВ и ММСВ ($\rho_{\text{сф}}$ — радиус сферы действия Лапласа)			
	$\max \frac{\delta F_1}{F_1} \Big _{\rho=\rho_{\text{сф}}} \quad (1.1.65)$	$\left(\frac{\delta F_2}{F_1} \right)_{\text{ср}} \quad (1.1.74)$	$\left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R} \right)^{-1/2}$
Меркурий	$8,7837 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$	$4,3919 \cdot 10^{-2}$	22,769
Венера	$1,5093 \cdot 10^{-1}$	$8,59 \cdot 10^{-4}$	$7,5462 \cdot 10^{-2}$	13,252
Земля	$1,5728 \cdot 10^{-1}$	$9,73 \cdot 10^{-4}$	$7,8640 \cdot 10^{-2}$	12,716
Марс	$1,0072 \cdot 10^{-1}$	$2,55 \cdot 10^{-4}$	$5,0358 \cdot 10^{-2}$	19,858
Юпитер	$4,9775 \cdot 10^{-1}$	$3,0829 \cdot 10^{-2}$	$2,4887 \cdot 10^{-1}$	4,0181
Сатурн	$3,9109 \cdot 10^{-1}$	$1,4954 \cdot 10^{-2}$	$1,9554 \cdot 10^{-1}$	5,1139
Уран	$2,6865 \cdot 10^{-1}$	$4,847 \cdot 10^{-3}$	$1,3432 \cdot 10^{-1}$	7,4447
Нептун	$2,7788 \cdot 10^{-1}$	$5,364 \cdot 10^{-3}$	$1,3894 \cdot 10^{-1}$	7,1974
Плутон	$1,5157 \cdot 10^{-1}$	$8,71 \cdot 10^{-4}$	$7,5786 \cdot 10^{-2}$	13,195
Луна	0,82941	0,14264	0,41471	2,4113

То или иное из определений сферы влияния при проведении расчетов траекторий полета КА по МСВ должно выбираться путем сравнения результатов расчетов по МСВ с результатами численного решения уравнений движения соответствующей ограниченной задачи трех тел. Заметим, однако, что, как будет показано в следующем разделе, выбор конкретного значения радиуса сферы влияния не имеет принципиального значения.

Среди приведенных определений сферы влияния определенным преимуществом обладает лапласово определение сферы действия (1.1.53), поскольку оно учитывает одновременно свойства обоих уравнений — (1.1.31), (1.1.32). Подавляющее большинство расчетов по МСВ как в отечественных, так и в зарубежных работах выполнено для определения (1.1.53). Это в особенности относится к расчетам траекторий в системе Земля — Луна, где, в отличие от траекторий полета к планетам, выбор численного значения радиуса сферы влияния $\rho_{сф}$ оказывает заметное влияние на результаты расчетов (см. § 11.6). Поэтому в дальнейшем для определенности под радиусом сферы влияния планеты $\rho_{сф}$ будем понимать радиус лапласовой сферы действия (1.1.53).

Задачу определения кеплеровой траектории в поле основной планеты P_1 (вне сферы влияния планеты P_2) назовем *внешней задачей*, а задачу определения кеплеровой траектории в сфере влияния планеты P_2 — *внутренней задачей*.

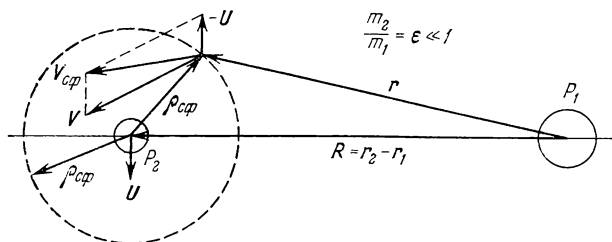


Рис. 1.1.3.

Рассмотрим схему определения траектории КА по МСВ (рис. 1.1.3). Пусть из тех или иных соображений решена внешняя задача. Внутренняя задача рассматривается в системе координат, начало которой совпадает с центром планеты P_2 . Для определения во внутренней задаче траектории аппарата (которая практически всегда является гиперболической) на сфере влияния надо задать планетоцентрические радиус-вектор $\rho_{сф}$ и вектор скорости $\mathbf{V}_{сф}$ аппарата:

$$\rho_{сф} = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad (1.1.62)$$

$$\mathbf{V}_{сф} = \mathbf{V} - \mathbf{U}. \quad (1.1.63)$$

Здесь $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$ — радиусы-векторы и векторы скорости КА и планеты P_2 соответственно во внешней задаче в момент пересечения траекторией аппарата сферы влияния планеты P_2 . Условия (1.1.62), (1.1.63) являются *условиями срачивания* соответствующих кеплеровых траекторий внешней и внутренней задач. Условия срачивания применяются при каждом переходе траектории через сферы влияния планет.

Оценим ошибки вследствие замены уравнения (1.1.32) уравнением (1.1.40) при решении внутренней задачи, для чего рассмотрим отношение $\delta F_1/F_2$. Внутри сферы влияния можно воспользоваться приближенным выражением (1.1.46). Максимальное значение этого отношения равно

$$\max \frac{\delta F_1}{F_2} = 2 \frac{m_1}{m_2} \frac{\rho^3}{R^3}. \quad (1.1.64)$$

На сфере влияния при $\rho = \rho_{\text{сф}}$ с помощью (1.1.53) получим

$$\max \frac{\delta F_1}{F_2} \Big|_{\rho=\rho_{\text{сф}}} = 2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/5} = 2 \left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R} \right)^{1/2}. \quad (1.1.65)$$

Чтобы приближенно в среднем охарактеризовать влияние возмущения на движение аппарата внутри сферы влияния, найдем с помощью (1.1.64) и (1.1.65)

$$\frac{\frac{1}{\rho_{\text{сф}}} \int_0^{\rho_{\text{сф}}} \max \frac{\delta F_1}{F_2} d\rho}{\max \frac{\delta F_1}{F_2} \Big|_{\rho_{\text{сф}}}} = \frac{1}{4}. \quad (1.1.66)$$

Отсюда и из числовых данных для величин (1.1.65), приведенных в таблице 1.1.2, следует, что для всех планет Солнечной системы, за исключением Юпитера и Сатурна, ошибка в решении внутренней задачи по МСВ составляет величину порядка нескольких процентов. Для Луны (в системе Земля — Луна)

$$\max \frac{\delta F_1}{F_2} \Big|_{\rho_{\text{сф}}} \approx 0,83,$$

и возмущение от Земли δF_1 оказывает заметное влияние на движение аппарата в сфере влияния Луны.

Оценим теперь ошибки вследствие замены уравнения (1.1.31) уравнением (1.1.38) при решении внешней задачи, для чего рассмотрим отношение $\delta F_2/F_1$. Поскольку анализируется движение КА вне сферы влияния планеты P_2 , приближенные соотношения (1.1.45) и (1.1.47) неприменимы, поэтому воспользуемся точными соотношениями (1.1.33) и (1.1.34), дающими оценку сверху

для величины $\delta F_2/F_1$:

$$\frac{\delta F_2}{F_1} \leq \frac{\delta F_2^+}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r^2}{R^2} \left[1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} \right] \quad (1.1.67)$$

Если при подсчете δF_2 считать, что КА находится вне сферы влияния планеты P_2 , на продолжении вектора $\mathbf{R}$ (за планетой P_2 , если смотреть с планеты P_1 , рис. 1.1.1), так что $\rho \parallel \mathbf{R}$, а F_1 по-прежнему определять соотношением (1.1.33), то

$$\frac{\delta F_2}{F_1} = \frac{\delta F_2^+}{F_1}. \quad (1.1.68)$$

Поэтому наряду с оценкой (1.1.67) имеет смысл рассмотреть отношение $\delta F_2/F_1$ для случая, когда аппарат находится между планетами P_1 и P_2 . Обозначая это отношение через $\delta F_2^-/F_1$, имеем

$$\frac{\delta F_2^-}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r^2}{R^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - 1 \right]. \quad (1.1.69)$$

Обозначим

$$\frac{r}{R} = x, \quad (1.1.70)$$

В связи со сказанным выше считаем, что x меняется в пределах

$$0 \leq x \leq x_{\text{сф}} < 1, \quad (1.1.71)$$

где

$$x_{\text{сф}} = \frac{R - \rho_{\text{сф}}}{R} = 1 - \frac{\rho_{\text{сф}}}{R}. \quad (1.1.72)$$

Влияние возмущения δF_2 на движение аппарата в гравитационном поле планеты P_1 вне сферы влияния планеты P_2 можно, аналогично (1.1.66), охарактеризовать величиной

$$\frac{\frac{1}{x_{\text{сф}}} \int_0^{x_{\text{сф}}} \frac{\delta F_2^+}{F_1} dx}{\left. \frac{\delta F_2^+}{F_1} \right|_{x=x_{\text{сф}}}} = \frac{\rho_{\text{сф}}}{R} + o\left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R}\right). \quad (1.1.73)$$

Из (1.1.73) и равенства (1.1.49) следует, что суммарное влияние возмущения δF_2 на движение КА в поле тяготения основной планеты составляет величину порядка

$$\left(\frac{\delta F_2}{F_1} \right)_{\text{ср}} = \frac{1}{x_{\text{сф}}} \int_0^{x_{\text{сф}}} \frac{\delta F_2}{F_1} dx \approx \frac{\rho_{\text{сф}}}{R} \max \frac{\delta F_1}{F_2} \Big|_{\rho=\rho_{\text{сф}}}. \quad (1.1.74)$$

Из таблицы 1.1.2 видно, что, за исключением Юпитера и Сатурна, величина $(\delta F_2/F_1)_{\text{ср}}$ составляет менее процента; для Юпитера и Сатурна эта величина примерно равна 3% и 1,5% соответственно. Для Луны (в системе Земля — Луна) $(\delta F_2/F_1)_{\text{ср}} \approx 0,14$.

Таким образом, точность решения внешней задачи при полетах к планетам оказывается на один-два порядка выше, чем при решении соответствующей внутренней задачи. При расчете же траекторий аппарата в системе Земля — Луна точности решения внутренней и внешней задач примерно одинаковы.

Сравнительная простота аналитического описания кеплерова движения, возможность явной записи в виде конечных соотношений условий, накладываемых на траектории КА, и в связи с этим качественного анализа особенностей траекторий, геометрическая наглядность привели к широкому использованию МСВ в астродинамике.

МСВ был эффективно использован при анализе траекторий полета к Луне впервые, по-видимому, В. А. Егоровым [1, 2]. Что касается траекторий полета к планетам, то в большинстве первых исследований в основном использовался более простой модифицированный метод сфер влияния (см. ниже, раздел 1.1.5). Как показали многочисленные расчеты траекторий полета КА к Луне и планетам, МСВ обеспечивает вполне приемлемую точность на этапе общего анализа и предварительного выбора траекторий и параметров. Особенно эффективным и точным МСВ оказался при расчете траекторий полета к планетам вследствие малости размеров сфер влияния планет по сравнению с их расстоянием от Солнца.

Наряду с отмеченными достоинствами следует указать, что использование МСВ при решении краевых задач астродинамики встречает определенные трудности. В самом деле, применение МСВ сводит решение краевой задачи к решению, вообще говоря, достаточно сложных систем конечных трансцендентных уравнений, что, как правило, может быть сделано численно с помощью ЭЦВМ. При этом МСВ позволяет использовать конечные связи между параметрами траектории в характерных точках, например начальной, конечной и промежуточной точке на сфере влияния, в то время как при использовании «точных» методов эти связи получаются в результате численного интегрирования уравнений движения. Поэтому в тех случаях, когда с помощью МСВ не удается в явном виде аналитически полностью или частично решить краевую задачу, МСВ принципиально не отличается от «точных» методов решения краевых задач на ЭЦВМ, хотя и приводит к существенной экономии машинного времени. Отметим, что последнее обстоятельство на практике зачастую оказывается решающим.

Вернемся теперь к оценке метода сращивания асимптотических разложений. Приводя к тем же трудностям при решении

краевых задач, что и МСВ (метод сращивания кеплеровых траекторий), он в то же время не обладает рядом важных достоинств последнего. Практика решения задач астродинамики подтвердила возможность использования МСВ и его упрощенных вариантов для получения исходных приближений, от которых непосредственно можно переходить к «точному» решению краевых задач. Все сказанное привело к сравнительно малому использованию метода сращивания асимптотических разложений в астродинамике.

1.1.5. Модифицированный метод сфер влияния — ММСВ. Допустим, что в (1.1.53)

$$\frac{\rho_{сф}}{R} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/5} \ll 1. \quad (1.1.75)$$

Рассмотрим семейство кеплеровых траекторий $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ в поле планеты P_1 , начинающихся в некоторой точке $\mathbf{r}_i$ на расстоянии порядка $R = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ от планеты P_2 и заканчивающихся внутри и на сфере влияния планеты P_2 в точках ρ_f (рис. 1.1.4).

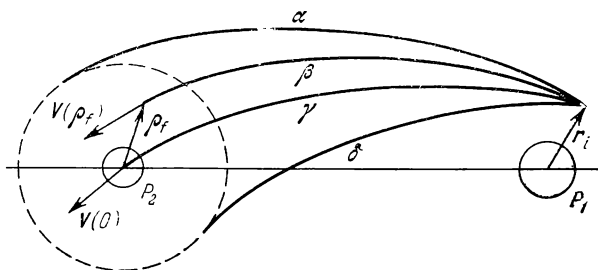


Рис. 1.1.4.

Здесь $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки относительно центра планеты P_1 , а ρ_f — радиус-вектор точки относительно центра планеты P_2 . Траектории семейства для $|\rho_f| < \rho_{сф}$ строятся без учета притяжения планеты P_2 . Для однозначного определения каждой из них необходимо задать одно скалярное условие, например время движения, которое будем считать одним и тем же для всех траекторий семейства. В этом случае параметры траекторий семейства во всех точках, характеризующихся одной и той же величиной дуги, отсчитываемой вдоль траектории от точки $\mathbf{r}_i$ до рассматриваемой точки на траектории, будут отличаться на величину порядка $\rho_{сф}/R$.

Сопоставим между собой любую траекторию семейства, оканчивающуюся на сфере влияния планеты P_2 или внутри нее, и траекторию, попадающую в центр планеты P_2 . Из сказанного выше и из (1.1.74) следует, что параметры, характеризующие движение аппарата в конечных точках этих траекторий, различаются

на величину порядка $\rho_{\text{сф}}/R$, в частности,

$$\mathbf{V}(\rho_f) = \mathbf{V}(0) + O\left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R}\right), \quad (1.1.76)$$

где $\mathbf{V}(0)$ — значение $\mathbf{V}(\rho_f)$ при $\rho_f = 0$.

Если пренебречь влиянием члена порядка $\rho_{\text{сф}}/R$, то вместо семейства можно рассматривать единственную траекторию, попадающую в точку $\rho_f = 0$. Очевидно, что это эквивалентно следующему предположению:

(I) при рассмотрении кеплеровых траекторий внешней задачи, оканчивающихся на сфере влияния планеты P_2 , радиус сферы влияния можно считать равным нулю.

Из условия

$$\mathbf{V}(\rho_f) = \mathbf{V}(0) \quad (1.1.77)$$

и равенства (1.1.63) следует, что для всех кеплеровых траекторий внутренней задачи, являющихся продолжением соответствующих кеплеровых траекторий внешней задачи, вектор скорости КА на сфере влияния один и тот же и равен

$$\mathbf{V}_{\text{сф}} = \mathbf{V}(0) - \mathbf{U}. \quad (1.1.78)$$

Поскольку точка на сфере влияния, в которой срачиваются решения внешней и внутренней задач, не задана, вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ (1.1.78) свободно перемещается параллельно самому себе по сфере. Если считать вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ свободным параметром, то для внутренней задачи приходим к следующей стандартной постановке:

(II) при заданном на сфере влияния планеты P_2 свободно перемещающемся параллельно самому себе векторе $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ требуется построить траекторию КА во внутренней задаче, удовлетворяющую поставленным ограничениям и оптимальную в каком-либо смысле.

Примеры такого рода задач рассмотрены в гл. X. Здесь же отметим, что для ряда важных задач, таких, как облет планеты, выход на орбиту ИС планеты или посадка на поверхность планеты, можно получить достаточно простые аналитические решения задач или сформулировать простые алгоритмы их численного решения (см. гл. X, XI). Таким образом,

(III) решение внутренней задачи с параметром $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ полностью или частично проводится независимо от решения внешней задачи.

В свою очередь,

(IV) решения внутренней задачи, зависящие от параметра $\mathbf{V}_{\text{сф}}$, используются для решения внешней задачи при заданных краевых условиях и условии оптимальности;

(V) после решения внешней задачи находится окончательно вектор $\rho_{\text{сф}}$ и определяется траектория внутренней задачи, соот-

ветствующая поставленной задаче. При заданной величине $\rho_{св}$ на сфере влияния находится (приближенная) точка срачивания кеплеровых траекторий внешней и внутренней задач.

Упрощенный вариант метода сфер влияния, основанный на использовании положений (I) — (V), назовем *модифицированным методом сфер влияния* (ММСВ).

При использовании ММСВ для решения краевых задач облета Луны и планет две кеплеровы дуги внешней задачи соединяются в центре планеты P_2 . При этом воздействие гравитационного поля планеты P_2 на облетающий ее КА заменяется мгновенным преобразованием вектора скорости аппарата в момент подлета V_1 в вектор скорости КА в момент отлета V_2 (рис. 1.1.5).

ММСВ нашел широкое применение при решении задач полета к планетам вследствие малости относительных размеров сфер

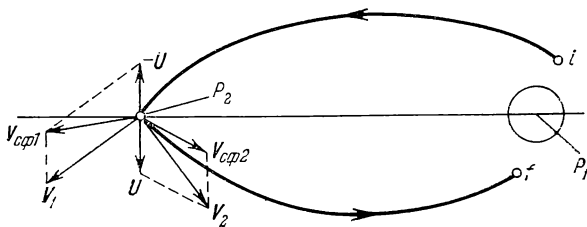


Рис. 1.1.5.

влияния планет. Идея применения ММСВ для анализа траекторий КА была высказана впервые, по-видимому, в работах Лоудена [8, 10]. Однако в этих работах Лоуден ограничился применением схемы ММСВ для энергетических оценок и анализа возможного изменения вектора скорости КА при облете планеты. Систематическое применение ММСВ для анализа траекторий межпланетных перелетов началось в 1958—1959 гг., в частности, Бэттином [1], Крокко [1], Мёкелем [2]. Среди этих работ следует отметить статью Бэттина [1], где была изложена в достаточно полном виде схема синтеза траекторий облета планет в рамках ММСВ. Что касается полетов к Луне, то, вследствие немалости относительных размеров ее сферы влияния (см. таблицу 1.1.1). ММСВ для этих задач практически не применялся, а сама возможность его применения подвергалась сомнению (см., например, Бэттин [2], стр. 186). В. А. Егоров [1] указал на возможность пренебрежения гравитационным полем Луны при расчете траекторий попадания в Луну. Для исследования траекторий облета Луны ММСВ был применен впервые, по-видимому, в работах В. А. Ильина [3—5] (см. § 11.2).

ММСВ, обладая достоинствами МСВ, имеет перед последним существенное преимущество: во многих случаях он позволяет

получить полное или частичное аналитическое решение краевых задач астродинамики или записать весьма простые алгоритмы их решения (см. гл. X—XII). Отметим, что, как следует из (I) — (V), в решение краевой задачи радиус сферы влияния $\rho_{\text{сф}}$ практически не входит, поэтому вопрос об оптимальном выборе величины $\rho_{\text{сф}}$, имеющий определенное значение в МСВ, здесь оказывается совершенно несущественным.

Основным вопросом, связанным с применением ММСВ в астродинамике, является вопрос о его точности. Сравним сначала МСВ и ММСВ для траекторий полета к планетам. Из (1.1.74) и (1.1.65) следует, что

$$\left(\frac{\delta F_2}{F_1}\right)_{\text{ср}} \sim \left(\frac{\rho_{\text{сф}}}{R}\right)^{3/2}. \quad (1.1.79)$$

Из (1.1.79) и (1.1.76) следует, что при решении внешней задачи ошибка, обусловленная заменой «точного» уравнения (1.1.31) уравнением (1.1.38), в $\sqrt{\rho_{\text{сф}}/R}$ раз меньше «геометрической» ошибки порядка $\rho_{\text{сф}}/R$ в (1.1.76). Таким образом, при определении условий на сфере влияния из решения внешней задачи точность ММСВ определяется «геометрической» ошибкой порядка $\rho_{\text{сф}}/R$, обусловленной положением (I).

Что касается точности решения внутренней задачи, то здесь, как следует из (1.1.65), (1.1.66) и (1.1.76), ошибка, связанная с заменой «точного» уравнения (1.1.32) уравнением (1.1.40), в $(\rho_{\text{сф}}/R)^{-1/2}$ раз больше «геометрической» ошибки на сфере влияния порядка $\rho_{\text{сф}}/R$ в (1.1.76). Следовательно, при решении внутренней задачи переход от МСВ к ММСВ не приводит к уменьшению точности расчета траектории.

Таким образом, в целом переход от МСВ к ММСВ несколько снижает точность решения внутренней задачи вследствие «геометрической» ошибки порядка $\rho_{\text{сф}}/R$ в условиях склейки кеплеровых траекторий на сфере влияния. Однако, как показывают проведенные оценки, максимальные возможные ошибки обоих методов имеют один и тот же порядок.

Сравним теперь МСВ и ММСВ для траекторий полета в системе Земля — Луна. Проводя такое же сопоставление, как и выше, и учитывая, что в этом случае $\sqrt{\rho_{\text{сф}}/R} \sim 1$ (см. таблицу 1.1.2), приходим к выводу: «геометрическая» ошибка в условиях склейки кеплеровых траекторий на сфере влияния Луны имеет порядок ошибок в решении внутренней и внешней задач, обусловленных заменами уравнений (1.1.31), (1.1.32) уравнениями (1.1.38), (1.1.40) соответственно, т. е. и в этом случае, хотя переход от МСВ к ММСВ несколько уменьшает точность решения задачи, ошибки обоих методов оказываются одного порядка.

Многочисленные сравнительные расчеты траекторий полета к планетам (см. гл. XII) и в системе Земля — Луна (см. гл. XI)

показали, что точность решения краевых задач астродинамики с помощью ММСВ обеспечивает качественную и количественную близость решения к получаемому с помощью МСВ. Практически всегда решение по ММСВ является очень хорошим исходным приближением для решения задачи МСВ, а во многих случаях возможен непосредственный переход к «точному» решению задачи, минуя ее решение МСВ.

Все изложенное позволяет считать модифицированный метод сфер влияния наиболее приемлемым приближенным методом на этапе общего анализа траекторий КА, предварительного выбора оптимальных параметров, схем полета и траекторий полета к Луне и планетам. Поэтому в основу дальнейших рассмотрений положен модифицированный метод сфер влияния.

§ 1.2. Задача оптимизации движения в ньютоновском поле тяготения (конечная тяга)

1.2.1. Постановка вариационной задачи. В соответствии со сказанным в разделе 1.1.5, рассматриваем движение КА в ньютоновском поле тяготения. Скорость истечения газов из сопла химического ЖРД или ядерного ЖРД принимаем постоянной. Тогда с учетом (1.1.1) — (1.1.4), (1.1.13) и (1.1.17) уравнения движения аппарата можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \mathbf{e}, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{T}{m}, \quad q(t_0) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{T}{m} = \frac{T}{m_0} e^{q/c}, \quad (1.2.4)$$

Далее в качестве основного будет рассматриваться случай, когда величина тяги ограничена:

$$0 \leq T \leq T_{\max}. \quad (1.2.5)$$

Наряду с этим без существенных изменений может рассматриваться случай, когда управлением является не тяга T , а ускорение от тяги (Г. Е. Кузмак, А. З. Брауде [1]):

$$\mathbf{a} = \frac{T}{m} = \frac{T}{m} \mathbf{e} \quad (1.2.6)$$

с соответствующим ограничением

$$0 \leq a \leq a_{\max}. \quad (1.2.7)$$

Приведем уравнения (1.2.1) — (1.2.3) к безразмерному виду, вводя переменные

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R_*}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{V_*}, \quad \bar{t} = \frac{V_* t}{R_*}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_*}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_*},$$

$$\bar{c} = \frac{c}{V_*}, \quad \bar{q} = \frac{q}{V_*}, \quad (1.2.8)$$

где R_*, m_*, T_* — некоторые характерные линейные размер, масса и тяга соответственно,

$$V_* = V_{\text{кр}}(R_*) = \sqrt{\frac{\mu}{R_*}} \quad (1.2.9)$$

— *круговая скорость* на расстоянии R_* от центра тяготения.

Опуская у безразмерных переменных черточки сверху, перепишем уравнения движения КА (1.2.1) — (1.2.3) в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (1.2.10)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + n_* \frac{\mathbf{T}}{m}, \quad (1.2.11)$$

$$\frac{dq}{dt} = n_* \frac{T}{m}, \quad (1.2.12)$$

где

$$n_* = \frac{T_*}{g_* m_*} \quad (1.2.13)$$

— некоторая характерная тяговооруженность аппарата,

$$g_* = \frac{\mu}{R_*^2} \quad (1.2.14)$$

— гравитационное ускорение на расстоянии R_* от центра тяготения.

Уравнение (1.2.4) при переходе к безразмерным переменным сохраняет свой вид.

Безразмерное ускорение от тяги

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\bar{\mathbf{T}}}{\bar{m}} = \frac{\bar{T}}{\bar{m}} \mathbf{e} \quad (1.2.15)$$

связано с размерным ускорением (1.2.6) и тягой соотношением

$$\mathbf{a} = g_* n_* \bar{\mathbf{a}} = g_* n_* \frac{\bar{T}}{\bar{m}} \mathbf{e}. \quad (1.2.16)$$

Из (1.2.16) следует, что входящая в уравнение (1.2.11) величина $n_* \mathbf{T}/m$ представляет вектор тяговооруженности $\mathbf{n}$ (перегрузку) аппарата, модуль которого выражен в долях характерного

гравитационного ускорения g_* :

$$n = \frac{a}{g_*} = n_* \frac{T}{m}. \quad (1.2.17)$$

Если $T_* = T_{\max}$, то для безразмерной тяги $\bar{T}$ ограничение (1.2.5) переходит в

$$0 \leq \bar{T} \leq 1. \quad (1.2.18)$$

Ограничение на ускорение от тяги (1.2.7) переписывается в виде ограничения на тяговооруженность:

$$0 \leq n \leq n_{\max} = \frac{a_{\max}}{g_*}. \quad (1.2.19)$$

В дальнейшем в качестве оптимизируемой величины будет использоваться характеристическая скорость перелета КА. Рассмотрим типичный случай перелета аппарата в поле тяготения Солнца или основной планеты P с некоторого начального многообразия $(t, \rho, V, q = 0)_i$ внутри сферы влияния планеты P_1 (в поле планеты P) на некоторое конечное многообразие $(t, \rho, V)_j$ внутри сферы влияния планеты P_2 (в поле планеты P). Примерами таких перелетов могут служить перелеты между орбитами ИС планет, с поверхности одной планеты на орбиту ИС другой планеты и т. п. В частном случае основная планета P может совпадать с одной из планет P_1 или P_2 (например, P_1 — Земля, P_2 — Луна).

Если воспользоваться МСВ (см. раздел 1.1.4), то характеристическую скорость перелета вследствие (1.2.3) можно записать в виде

$$G = q_{сф1} + q_{12} + q_{сф2}, \quad (1.2.20)$$

где $q_{сф1}$, $q_{сф2}$ — характеристические скорости перехода между конечными многообразиями и соответствующими точками на сферах влияния планет P_1 и P_2 ; q_{12} — характеристическая скорость перелета в поле основной планеты P между сферами влияния планет P_1 и P_2 . Если пересечение сферы влияния аппаратом происходит на активном участке, то соответствующую характеристическую скорость можно относить либо к $q_{сфi}$, либо к q_{12} . В дальнейшем для определенности отнесем ее к q_{12} (см. раздел 12.2.1). При заданном начальном многообразии $(t, \rho, V, q = 0)$ характеристическая скорость $q_{сф1}$ оптимального маневра перехода аппарата между этим многообразием и сферой влияния будет зависеть от радиуса-вектора $\rho_{сф1}$ и вектора скорости $V_{сф1}$ аппарата на сфере влияния планеты:

$$q_{сф1} = q_{сф1}(t_i, \rho_{сф1}, V_{сф1}). \quad (1.2.21)$$

При решении задачи оптимизации перелета с начального многообразия на конечное величины $\rho_{сф1}$ и $V_{сф1}$ не задаются заранее,

а определяются радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ и вектором скорости $\mathbf{V}_1$ движения аппарата в поле планеты P в момент пересечения траекторией сферы влияния планеты P_1 . Поэтому можно записать

$$q_{\text{сф}1} = q_{\text{сф}1}(t_i, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1), \quad (1.2.22)$$

где $q_{\text{сф}1}$ считаем дифференцируемой функцией своих аргументов.

Если от МСВ перейти к ММСВ, то, в соответствии со сказанным в разделе 1.1.5, получим

$$q_{\text{сф}1} = q_{\text{сф}1}(t_i, \mathbf{r}_1, \mathbf{V})|_{\rho_{\text{сф}1}=0} \left[1 + O\left(\frac{\rho_{\text{сф}1}}{R}\right) \right], \quad (1.2.23)$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор планеты P_1 , $\mathbf{V}|_{\rho_{\text{сф}1}=0}$ — вектор скорости движения аппарата в поле планеты P , вычисляемый в центре планеты P_1 . Учитывая, что для внешней задачи ММСВ (в поле планеты P) $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{V}|_{\rho_{\text{сф}1}=0}$ являются начальными данными, и обозначая их $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{V}_i$ соответственно, на основании (1.2.23) получим с

точностью до величин $O\left(\frac{\rho_{\text{сф}1}}{R}\right)$

$$q_{\text{сф}1} = \Delta V_i(t_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i). \quad (1.2.24)$$

Аналогично, с точностью до величин $O\left(\frac{\rho_{\text{сф}2}}{R}\right)$

$$q_{\text{сф}2} = \Delta V_f(t_f, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f), \quad (1.2.25)$$

где $\mathbf{r}_f$ и $\mathbf{V}_f$ — конечные радиус-вектор и вектор скорости аппарата во внешней задаче ММСВ (при движении в поле планеты P). Здесь для характеристических скоростей маневров, совершаемых в пределах начальной и конечной сфер влияния, введены обозначения ΔV_i и ΔV_f соответственно. Из (1.2.23) и сказанного в разделе 1.1.5 следует, что величины ΔV_i и ΔV_f в (1.2.24) и (1.2.25) вычисляются с той же точностью, с которой определяется вся траектория аппарата в целом в рамках ММСВ.

Если рассматривается задача о движении КА только в поле основной планеты P , при отсутствии планет P_1 и P_2 , то $(t_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i)$ и $(t_f, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f)$ могут, вообще говоря, принадлежать некоторым многообразиям в поле планеты P , например, аппарат может совершать перелет между двумя орбитами ИС планеты P .

Учитывая все сказанное, для КА, движение которого описывается системой уравнений (1.2.10) — (1.2.12), (1.2.18) или (1.2.10) — (1.2.12), (1.2.17), (1.2.19), поставим следующую вариационную задачу Майера:

требуется перевести КА с некоторого начального многообразия $(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}, q = 0)_i$ на некоторое конечное многообразие $(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})_f$ по траектории, обеспечивающей минимум функционала

$$G = \Delta V_i(t_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) + \Delta V_f(t_f, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f) + q_f \Rightarrow \min. \quad (1.2.26)$$

В (1.2.26) члены $\Delta V_i(t_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) + \Delta V_f(t_f, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f)$, как показано выше, учитывают затраты массы аппарата (характеристической скорости) на совершение маневра в начальной и конечной точках при применении ММСВ (см. раздел 12.2.1).

1.2.2. Необходимые условия оптимальности. Для решения поставленной задачи может быть использована стандартная процедура принципа максимума Л. С. Понтрягина (В. Г. Болтянский [1], Винх [2], В. К. Исаев, Ю. М. Копнин [1], А. М. Летов [1], Медич [1], Н. Н. Моисеев [1], В. С. Новоселов [1], Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [1], Л. И. Розоноэр [1], В. А. Троицкий [3]). Все используемые в дальнейшем основные сведения, относящиеся к применению принципа максимума для анализа оптимальных траекторий динамических систем, заимствованы главным образом из работ А. М. Летова [1], Н. Н. Моисеева [1], В. С. Новоселова [1], В. А. Троицкого [3].

Введем векторы сопряженных переменных: $\mathbf{p}$ для $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ для $\mathbf{V}$, сопряженную переменную p_q для q — и составим функцию Гамильтона (см. соотношение (П. 51) Приложения):

$$\begin{aligned} H &= (\mathbf{p}, \mathbf{V}) + \left(\mathbf{s}, -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + n_* \frac{T}{m} \mathbf{e} \right) + p_q n_* \frac{T}{m} = \\ &= (\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(\mathbf{s}, \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) + n_* \frac{T}{m} [(\mathbf{s}, \mathbf{e}) + p_q]. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

По правилу дифференцирования скаляра по вектору систему уравнений для сопряженных переменных запишем в виде (см. соотношение (П. 18) Приложения)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{s} \frac{1}{r^3} - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3}{r^5} \mathbf{r}, \quad (1.2.28)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}} = -\mathbf{p}, \quad (1.2.29)$$

$$\frac{dp_q}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.2.30)$$

Исходные уравнения (1.2.10) — (1.2.12) можно записать так:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.2.31)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad (1.2.32)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_q}. \quad (1.2.33)$$

Управлением является либо вектор $\mathbf{T}$, либо вектор $\mathbf{n}$ (1.2.17). Оптимальное управление находится из условия $\max H$ по $\mathbf{T}$ или

п, откуда

$$e \parallel s. \quad (1.2.34)$$

Введем функцию переключения

$$\vartheta = s + p_q. \quad (1.2.35)$$

Тогда оптимальная величина T или n определяется условиями

$$T = \begin{cases} T_{\max}, & \vartheta > 0, \\ \forall T \in [0, T_{\max}], & \vartheta = 0, \\ 0, & \vartheta < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.2.36a) \\ (1.2.36b) \\ (1.2.36b) \end{matrix}$$

или

$$n = \begin{cases} n_{\max}, & \vartheta > 0, \\ \forall n \in [0, n_{\max}], & \vartheta = 0, \\ 0, & \vartheta < 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.2.37a) \\ (1.2.37b) \\ (1.2.37b) \end{matrix}$$

Когда управлением является T , (1.2.30) с учетом (1.2.4), (1.2.34) и (1.2.35) можно записать в виде

$$\frac{dp_q}{dt} = -n_* \frac{T}{m_0} \frac{e^{q/c}}{c} \vartheta. \quad (1.2.38)$$

Если управлением является n , то, согласно (1.2.17), H не зависит от q и (1.2.30) переходит в

$$\frac{dp_q}{dt} = 0 \quad (1.2.39)$$

Граничные условия определяются из условий трансверсальности

$$[\pm \delta G - H \delta t + (p, \delta r) + (s, \delta V) + p_q \delta q]_i^f = 0. \quad (1.2.40)$$

Здесь знак «+» перед полной вариацией δG берется в конечной точке, а знак «—» в начальной. Полные вариации, «вариации точки» (см. В. А. Троицкий [1]), δt , δr и δV находятся с учетом заданных многообразий в начале и в конце траектории; δG зависит, согласно (1.2.26), от этих же вариаций (см. (2.2.14)).

Из (1.2.40) получаем для функционала (1.2.26)

$$p_{qf} = -1. \quad (1.2.41)$$

Из принципа максимума имеем также, что

1) векторы p , s и p_q ни в одной точке траектории не должны одновременно обращаться в нуль;

2) во всех точках траектории, включая точки разрыва управления, должны выполняться условия Вейерштрасса — Эрдмана

непрерывности сопряженных переменных и функции H :

$$\mathbf{p}(t-0) = \mathbf{p}(t+0), \quad \left. \begin{array}{l} s(t-0) = s(t+0), \\ p_q(t-0) = p_q(t+0), \\ H(t-0) = H(t+0) \end{array} \right\} \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (1.2.42)$$

$$(1.2.43)$$

$$(1.2.44)$$

$$(1.2.45)$$

Кроме того, поскольку система (1.2.10) — (1.2.12) автономна, вдоль оптимальной траектории существует 1-й интеграл

$$H = \text{const}. \quad (1.2.46)$$

Из (1.2.40) и (1.2.46) получаем, что если функционал и конечные многообразия не зависят от t_i и t_f , а t_i и (или) t_f не заданы, то для оптимальной траектории

$$H = 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (1.2.47)$$

В дальнейшем при анализе оптимальных траекторий перелета будут рассматриваться либо режимы (1.2.36а), (1.2.37а), соответствующие максимальной величине тяги, либо режимы (1.2.36в), (1.2.37в), соответствующие минимальной величине тяги.

При выполнении условий (1.2.36б) или (1.2.37б) среди режимов управления тягой или тяговооруженностью могут быть особые и скользящие режимы (Брайсон, Хо Ю-Ши [1], Р. Габасов, Ф. М. Кириллова [1], Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев [2], В. Ф. Кротов, В. З. Букреев, В. И. Гурман [1], А. М. Летов [1], Лоуден [24]).

Отметим, что реализация особых режимов управления требует применения двигателя с регулируемой тягой, работающего в общем случае на режиме переменной тяги достаточно продолжительное время. Реализация же скользящих режимов управления тягой требует работы двигателя в режиме «включено — выключено» с достаточно частой сменой режимов.

Особые и скользящие режимы управления тягой или тяговооруженностью в дальнейшем не рассматриваются, за исключением § 6.2, где получены конструктивные результаты для частного класса перелетов.

1.2.3. Степень гладкости фазовых и сопряженных переменных.

В соответствии с принципом максимума, при наличии на оптимальной траектории точек переключения управления фазовые и сопряженные переменные вдоль траектории имеют кусочно-непрерывные первые производные. При этом точки разрыва производных, очевидно, соответствуют моментам переключения управления, а сами разрывы представляют разрывы первого рода («скачки») функций.

Однако для конкретных динамических систем степень гладкости фазовых и сопряженных переменных может быть выше, чем в общем случае. Степень гладкости этих функций имеет важное значение при численном решении соответствующих краевых задач. Кроме того, свойства гладкости фазовых и сопряженных переменных существенным образом используются при приближенном построении решения вариационной задачи с конечной величиной тяги по известному решению соответствующей вариационной задачи в импульсной постановке (см. гл. IV).

Установим степень гладкости фазовых и сопряженных переменных как функций t вдоль оптимальной траектории. Вследствие ограничения (1.1.18) здесь и всюду в дальнейшем при движении КА в ньютоновском гравитационном поле полагаем

$$|r| \geq r_{\min} > 0. \quad (1.2.48)$$

Кроме того, при анализе гладкости сопряженных переменных будем считать

$$|r| \leq r_{\max} < \infty. \quad (1.2.49)$$

С учетом (1.2.48), (1.2.49) из условий Вейерштрасса — Эрдмана (1.2.42) — (1.2.44) следует ограниченность сопряженных векторов p , s и сопряженной переменной p_q на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$.

Если дополнительно к условиям Вейерштрасса — Эрдмана ввести ограниченность p , s и p_q при $r \rightarrow \infty$ (см. раздел 2.2.4), то приводимые ниже результаты будут справедливы и без предположения (1.2.49) для всех $r \in [r_{\min}, \infty)$.

Учитывая, что, согласно сказанному выше в разделе 1.2.2 и (1.2.36), функция $T = T(t)$ кусочно-непрерывна, получим из (1.2.10) — (1.2.12).

$$1^\circ \quad r(t) \in C_1[t_i, t_f], \quad r'' \text{ кусочно-непрерывна}; \quad (1.2.50)$$

$$2^\circ \quad V(t) \in C_0[t_i, t_f], \quad V' \text{ кусочно-непрерывна}; \quad (1.2.51)$$

$$3^\circ \quad q(t) \in C_0[t_i, t_f], \quad q'(t) \text{ кусочно-непрерывна}. \quad (1.2.52)$$

Здесь и ниже через $C_k[a, b]$ обозначен класс функций, непрерывных вместе с k -й производной на отрезке $[a, b]$. Дифференцируя (1.2.28) по t , получим с учетом (1.2.10) и (1.2.29)

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{p}{r^3} - \frac{3}{r^5} \{s(r, V) + r[(s, V) - (p, r)] + (s, r) \left[V - 5 \frac{r}{r} (r, V) \right] \}. \quad (1.2.53)$$

Отсюда, с учетом (1.2.50), (1.2.51), условий Вейерштрасса — Эрдмана (1.2.42), (1.2.43) и уравнения (1.2.29), следует:

$$4^\circ \quad p(t) \in C_2[t_i, t_f], \quad p'''(t) \text{ кусочно-непрерывна}; \quad (1.2.54)$$

$$5^\circ \quad s(t) \in C_3[t_i, t_f], \quad s^{IV}(t) \text{ кусочно-непрерывна}. \quad (1.2.55)$$

Разрывы в производных $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, q , $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ происходят в моменты начала t_k^- и конца t_k^+ k -го активного участка.

Если управлением является тяговооруженность $\mathbf{p}$, то, согласно (1.2.39), (1.2.41), вдоль всей оптимальной траектории

$$p_q = \text{const} = -1. \quad (1.2.56)$$

В этом случае, принимая во внимание (1.2.35) и 5°, имеем:

$$6^\circ \text{ а } p_q \in C_\infty[t_i, t_f]; \quad (1.2.57)$$

$$7^\circ \text{ а } \vartheta \in C_3[t_i, t_f], \quad \vartheta^{\text{IV}} \text{ кусочно-непрерывна.} \quad (1.2.58)$$

Пусть теперь управлением является тяга T с разрывами первого рода в моменты t_k^- и t_k^+ , соответствующими началу и концу k -го активного участка. Наряду с (1.2.38), (1.2.35) рассмотрим уравнение (1.2.12), переписав его, благодаря (1.2.4), в виде

$$\frac{dq}{dt} = n_* \frac{T}{m_0} e^{q/c}. \quad (1.2.59)$$

Поскольку на оптимальной траектории в моменты $t_k^\pm$ разрыва величины тяги T согласно (1.2.36) функция переключения

$$\vartheta(t_k^\pm) = 0, \quad (1.2.60)$$

то правая часть (1.2.38) и $\frac{dp_q}{dt}$ непрерывны всюду на оптимальной траектории

$$p_q \in C_1[t_i, t_f]. \quad (1.2.61)$$

Из (1.2.61), (1.2.35) и (1.2.55) следует, что на оптимальной траектории производная $\frac{d\vartheta}{dt}$ всегда непрерывна:

$$\vartheta(t) \in C_1[t_i, t_f]. \quad (1.2.62)$$

Дифференцируя (1.2.38) по t на участках $T = \text{const}$, найдем с учетом (1.2.59)

$$\frac{d^2 p_q}{dt^2} = -n_* \frac{T}{m_0} \left(\frac{e^{2q/c}}{c^2} n_* \frac{T}{m_0} \vartheta + \frac{e^{q/c}}{c} \frac{d\vartheta}{dt} \right). \quad (1.2.63)$$

Поскольку в общем случае

$$\vartheta'(t_k^\pm) \neq 0, \quad (1.2.64)$$

на основании (1.2.63), (1.2.35) и (1.2.55) заключаем, что

$$6^\circ \text{ б } p_q \in C_1[t_i, t_f], \quad p_q'' \text{ кусочно-непрерывна;} \quad (1.2.65)$$

$$7^\circ \text{ б } \vartheta \in C_1[t_i, t_f], \quad \vartheta'' \text{ кусочно-непрерывна.} \quad (1.2.66)$$

Разрывы в соответствующих производных p_q и ϑ обусловлены разрывами в T . Если рассматривать по отдельности каждый из участков (1.2.36) траектории, то внутри каждого из участков (1.2.36а) и (1.2.36в) все фазовые и сопряженные переменные и

функцию переключения ϑ можно считать функциями, дифференцируемыми произвольное число раз (при $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$) и соответствующей дифференцируемости орта вектора тяги $\mathbf{e}(t)$, что можно предполагать на основании (1.2.34)).

Допустим теперь, что $\mathbf{V}(t)$ может иметь разрывы первого рода (см. § 2.1). Тогда из аналогичных рассуждений получаем:

$$1^\circ \quad \mathbf{r}(t) \in C_0[t_i, t_f], \quad \mathbf{r}' \text{ кусочно-непрерывна}; \quad (1.2.67)$$

$$4^\circ \quad \mathbf{p}(t) \in C_1[t_i, t_f], \quad \mathbf{p}''(t) \text{ кусочно-непрерывна}; \quad (1.2.68)$$

$$5^\circ \quad \mathbf{s}(t) \in C_2[t_i, t_f], \quad \mathbf{s}'''(t) \text{ кусочно-непрерывна}. \quad (1.2.69)$$

Точно так же на участках между разрывами $\mathbf{V}(t)$ все фазовые и сопряженные переменные можно считать непрерывно дифференцируемыми произвольное число раз (при $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$). Подробный анализ поведения сопряженных переменных на оптимальных траекториях для случая $r \rightarrow \infty$ при наличии у $\mathbf{V}(t)$ разрывов первого рода дан в разделе 2.2.4.

Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина сводит рассматриваемую вариационную задачу к двухточечной краевой задаче. Из проведенных рассуждений видно, что краевые задачи, возникающие при оптимизации перелетов КА в центральном поле, в общем случае имеют 14-й порядок — по числу фазовых $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{q}$ и сопряженных $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}_q$ переменных. Для решения этих краевых задач можно использовать стандартные методы и приемы нелинейного программирования и методы решения систем трансцендентных уравнений (Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев [1], С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева [1], В. К. Исаев, В. В. Сонин [1], Кюнц, Крелле [1], Ланс [1], Р. Ли [1], Моррей [1], Розен [1], Томпкинс [1], Уайльд [1], Хедли [1]).

1.2.4. Обобщение на случай движения в произвольном гравитационном поле. Рассмотрим поставленную в разделе 1.2.1 вариационную задачу оптимизации траектории КА при движении его в произвольном гравитационном поле. В этом случае вектор гравитационного ускорения $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ считаем, как и для «точного» гравитационного поля (1.1.17), достаточно гладкой функцией своих аргументов в рассматриваемой области изменения $\mathbf{r}$ и t .

Безразмерные уравнения движения КА аналогично тому, как это сделано в разделе 1.2.1, можно записать в виде (см. (1.2.10) — (1.2.12))

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (1.2.70)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + n_* \frac{\mathbf{T}}{m}, \quad (1.2.71)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = n_* \frac{\mathbf{T}}{m}. \quad (1.2.72)$$

Здесь $g(r, t)$ — безразмерное гравитационное ускорение, относенное к

$$\tilde{g}_* = \frac{V_*^2}{R_*}, \quad (1.2.73)$$

где R_* и V_* — характерные линейные размер и скорость, не связанные, вообще говоря, соотношением (1.2.9). Если во всех соотношениях § 1.2, § 1.3 и ниже, куда входит величина g_* из (1.2.14), иметь в виду вместо нее величину $\tilde{g}_*$ из (1.2.73), то все эти соотношения остаются в силе.

Для системы (1.2.70) — (1.2.72) функция Гамильтона имеет вид (см. (1.2.27))

$$H = (p, V) + (s, g(r, t)) + n_* \frac{T}{m} [(s, e) + p_q], \quad (1.2.74)$$

где p , s и p_q — сопряженные векторы и сопряженная переменная к g , V и q соответственно.

Система уравнений для определения сопряженных переменных запишется в виде (см. (1.2.28) — (1.2.30))

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial r} = - \left(s, \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right), \quad (1.2.75)$$

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial V} = - p, \quad (1.2.76)$$

$$\frac{dp_q}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.2.77)$$

В (1.2.75) $\frac{\partial g(r, t)}{\partial r}$ — матрица 3×3 , элементами которой в некоторой инерциальной прямоугольной декартовой системе координат являются производные $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) компонент вектора $g = \{g^1, g^2, g^3\}$ по компонентам вектора $r = \{x^1, x^2, x^3\}$.

Сравнивая (1.2.74) — (1.2.77) с (1.2.27) — (1.2.30), замечаем, что все остальные соотношения (1.2.34) — (1.2.45) и результаты, приведенные в разделе 1.2.2, остаются в силе.

Если гравитационное ускорение $g(r, t)$ явно не зависит от t :

$$g = g(r), \quad (1.2.78)$$

то для такого поля система (1.2.70) — (1.2.72) автономна и для соответствующего гамильтониана (1.2.74) имеют место интегралы (1.2.46) и (1.2.47).

Как и в разделе 1.2.3, при анализе гладкости решения сопряженной системы сначала считаем выполненным ограничение (1.2.49). Для того чтобы в произвольном гравитационном поле получить соотношения (1.2.50) — (1.2.52), (1.2.54), (1.2.55),

(1.2.65) — (1.2.69), необходимо, как это следует из (1.2.75) и вычисления производной $\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2}$ (см. (1.2.53)), потребовать, чтобы гравитационное ускорение $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ имело по меньшей мере непрерывные производные $\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial r \partial t}$.

§ 1.3. Уравнения вариационной задачи в координатной форме

1.3.1. Прямоугольная декартова и цилиндрическая системы координат. В тех случаях, когда траектория КА является пространственной и решение задачи проводится численными методами, уравнения вариационной задачи удобно записывать в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть $Oxyz$ — некоторая правая прямоугольная декартова система координат, начало которой совпадает с притягивающим центром. Безразмерные уравнения движения центра масс КА (1.2.10) и (1.2.11) в проекциях на эти оси имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad (1.3.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y, \quad (1.3.1б)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z, \quad (1.3.1в)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{x}{r^3} + n_* \frac{T}{m} e_x, \quad (1.3.2a)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{y}{r^3} + n_* \frac{T}{m} e_y, \quad (1.3.2б)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{z}{r^3} + n_* \frac{T}{m} e_z, \quad (1.3.2в)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.3.3)$$

Здесь и ниже x, y, z ; V_x, V_y, V_z ; e_x, e_y, e_z — проекции векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{e}$ на оси x, y, z соответственно.

Уравнения (1.2.28), (1.2.29) для сопряженных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ в координатной форме имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{r^3} s_x - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3}{r^5} x, \quad (1.3.4a)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{r^3} s_y - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3}{r^5} y, \quad (1.3.4б)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{1}{r^3} s_z - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3}{r^5} z, \quad (1.3.4в)$$

где

$$(s, r) = s_x x + s_y y + s_z z, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{ds_x}{dt} = -p_x, \quad (1.3.6a)$$

$$\frac{ds_y}{dt} = -p_y, \quad (1.3.6b)$$

$$\frac{ds_z}{dt} = -p_z, \quad (1.3.6b)$$

$s_x, s_y, s_z, p_x, p_y, p_z$ — проекции векторов s и p на оси xyz .

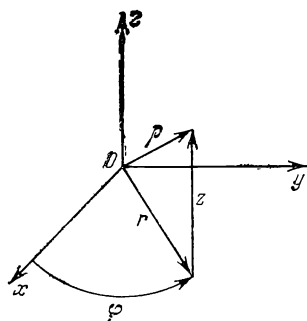


Рис. 1.3.1.

Если движение КА близко к некоторой плоскости (что имеет место во многих практических задачах), целесообразно записывать уравнения движения аппарата в цилиндрической системе координат $O\varphi z$, начало O которой совпадает с притягивающим центром, плоскость $O\varphi$ совпадает с указанной плоскостью, со стороны оси z углы φ растут при движении против часовой стрелки (рис. 1.3.1). В проекциях на радиальное направление r , трансверсаль τ (к r в плоскости xy) и ось z уравнения движения центра масс КА (1.2.1), (1.2.2) имеют вид (см. А. И. Лурье [1])

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad (1.3.7a)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = V_\tau, \quad (1.3.7b)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z, \quad (1.3.7b)$$

$$\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\tau^2}{r} = g(R_*) \left(n_r - \frac{R_*^2 r}{\rho^3} \right), \quad (1.3.8a)$$

$$\frac{dV_\tau}{dt} + \frac{V_r V_\tau}{r} = g(R_*) n_\tau, \quad (1.3.8b)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = g(R_*) \left(n_z - \frac{R_*^2 z}{\rho^3} \right). \quad (1.3.8b)$$

В приведенных соотношениях

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (1.3.9)$$

V_r, V_τ, V_z — проекции вектора V .

Векторы тяги $\mathbf{T}(T_r, T_\tau, T_z)$ и тяговооруженности $\mathbf{n}(n_r, n_\tau, n_z)$ связаны соотношением (1.2.17), откуда с учетом (1.2.4)

$$n_r = \frac{e^{q/c}}{m_0 g(R_*)} T_r, \quad (1.3.10a)$$

$$n_\tau = \frac{e^{q/c}}{m_0 g(R_*)} T_\tau, \quad (1.3.10б)$$

$$n_z = \frac{e^{q/c}}{m_0 g(R_*)} T_z. \quad (1.3.10в)$$

Запишем уравнения (1.3.7), (1.3.8) в безразмерном виде, введя те же безразмерные переменные (1.2.8), что и при записи уравнений (1.2.10) — (1.2.12):

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R_*}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{V_*}, \quad \bar{t} = \frac{V_* t}{R_*}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_*}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_*}, \quad \bar{c} = \frac{c}{V_*}, \quad \bar{q} = \frac{q}{V_*}. \quad (1.3.11)$$

Опуская над безразмерными переменными черточки, имеем

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad (1.3.12a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_\tau}{r}, \quad (1.3.12б)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z, \quad (1.3.12в)$$

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_\tau^2}{r} - \frac{r}{\rho^3} + n_* \frac{T_r}{m}, \quad (1.3.13a)$$

$$\frac{dV_\tau}{dt} = -\frac{V_r V_\tau}{r} + n_* \frac{T_\tau}{m}, \quad (1.3.13б)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{z}{\rho^3} + n_* \frac{T_z}{m}, \quad (1.3.13в)$$

$$\frac{dq}{dt} = n_* \frac{T}{m}. \quad (1.3.14)$$

Задавая векторы сопряженных переменных

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_r, p_\varphi, p_z), \quad (1.3.15)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_r, s_\varphi, s_z). \quad (1.3.16)$$

компонентами, сопряженными к r , φ и z , запишем гамильтониан для системы (1.3.12) — (1.3.14) в виде

$$\begin{aligned} H = & p_r V_r + p_\varphi \frac{V_\tau}{r} + p_z V_z + s_r \left(\frac{V_\tau^2}{r} - \frac{r}{\rho^3} \right) + \\ & + s_\varphi \left(-\frac{V_r V_\tau}{r} \right) + s_z \left(-\frac{z}{\rho^3} \right) + n_* \frac{T}{m} [(s, \mathbf{e}) + p_q]. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Выбор обозначений p_φ и s_φ в (1.3.15), (1.3.16) обусловлен тем, что в качестве фазовой переменной, соответствующей трансверсали τ , выступает угол φ (см. уравнение (1.3.12б)).

Сопряженные векторы (1.3.15), (1.3.16) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{V_\tau}{r^2} (p_\varphi - V_r s_\varphi + V_\tau s_r) + \frac{s_r}{\rho^3} - 3 \frac{r}{\rho^5} (s_r r + s_z z), \quad (1.3.18a)$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.3.18б)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{s_z}{\rho^3} - 3 \frac{z}{\rho^5} (s_r r + s_z z), \quad (1.3.18в)$$

$$\frac{ds_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_r} = -p_r + \frac{V_\tau}{r} s_\varphi, \quad (1.3.19a)$$

$$\frac{ds_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_\tau} = -\frac{1}{r} (p_\varphi + 2V_\tau s_r - V_r s_\varphi), \quad (1.3.19б)$$

$$\frac{ds_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_z} = -p_z. \quad (1.3.19в)$$

Сопряженная переменная p_φ удовлетворяет либо уравнению (1.2.38) (управление — вектор тяги $\mathbf{T}$), либо уравнению (1.2.39) (управление — вектор тяговооруженности $\mathbf{n}$).

На пассивных участках траектории уравнения движения (1.3.12), (1.3.13), как известно, могут быть проинтегрированы в конечном виде. Движение КА в этом случае происходит по кеплеровым траекториям — дугам конических сечений в ньютоновском гравитационном поле. Теория невозмущенного кеплерова движения с достаточной полнотой изложена в ряде руководств по небесной механике и астродинамике (Бэттин [2], Г. Н. Дубошин [1, 2], М. Ф. Субботин [2], П. Е. Эльясберг [2], Эрике [5], Эскобал [1]). Основные результаты теории невозмущенного кеплерова движения, используемые в настоящей книге, подробно рассмотрены в книге Эрике [5]. Здесь же кратко остановимся на некоторых основных соотношениях теории кеплеровых движений.

Совмещая плоскость $O\varphi$ цилиндрической системы координат с плоскостью кеплеровой траектории КА, получим из (1.3.12), (1.3.13) ($\mathbf{T} = 0$, $z = 0$, $r \equiv \rho$) обычно рассматриваемые в небесной механике уравнения задачи двух тел:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{r^2}, \quad (1.3.20)$$

$$r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} = 0. \quad (1.3.24)$$

На основании (1.3.12a), (1.3.12б)

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (1.3.22)$$

Дифференцируя (1.3.22) по времени и учитывая (1.3.21), имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]. \quad (1.3.23)$$

Умножая (1.3.20) на $\frac{dr}{dt}$ и используя (1.3.23), получим интеграл энергии для кеплеровой траектории:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{r} = h = \text{const}. \quad (1.3.24)$$

Замечая, что (1.3.21) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0, \quad (1.3.25)$$

получаем для кеплеровой траектории интеграл площадей:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k = \text{const}. \quad (1.3.26)$$

В полярной системе координат $O\rho\varphi$ уравнение дуги конического сечения, по которой происходит движение, можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \eta}. \quad (1.3.27)$$

Здесь p и e — фокальный параметр и эксцентриситет конического сечения соответственно, η — истинная аномалия точки на орбите (1.3.27):

$$\eta = \varphi - \varphi_\pi, \quad (1.3.28)$$

где φ_π — долгота перигентра. Фокус конического сечения (1.3.27) совпадает с центром гравитационного поля.

Геометрические постоянные p и e связаны с динамическими постоянными h и k соотношениями

$$p = k^2, \quad (1.3.29)$$

$$e^2 = 1 + p h = 1 + k^2 h. \quad (1.3.30)$$

При

$$e < 1 \quad (h < 0) \quad (1.3.31)$$

орбита (1.3.27) является эллипсом;

при

$$e = 1 \quad (h = 0) \quad (1.3.32)$$

орбита (1.3.27) является параболой;

при

$$e > 1 \quad (h > 0) \quad (1.3.33)$$

орбита (1.3.27) является гиперболой.

Из геометрических свойств эллипса и гиперболы следует, что фокальный параметр p и эксцентриситет e связаны с большой (или действительной) полуосью a эллипса (или гиперболы) соотношениями

$$p = a(1 - e^2), \quad (1.3.34)$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad (1.3.35)$$

соответственно. Из (1.3.30), (1.3.34), (1.3.35) с учетом (1.3.31), (1.3.33) получаем следующую связь между постоянной интеграла энергии h (1.3.24) и величиной a :

$$a = \frac{1}{|h|}. \quad (1.3.36)$$

Дифференцируя (1.3.27) по времени, получаем для радиальной скорости точки с учетом (1.3.26) выражение

$$V_r = \frac{dr}{dt} = e \sin \eta \frac{1}{V_p}. \quad (1.3.37)$$

Трансверсальная и угловая скорости движения по кеплеровой дуге на основании (1.3.26) и (1.3.29) равны соответственно

$$V_\tau = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_p}{r}, \quad (1.3.38)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_p}{r^2}. \quad (1.3.39)$$

На пассивных участках траектории вдоль кеплеровых дуг системы уравнений для сопряженных переменных (1.3.4), (1.3.5) и (1.3.18), (1.3.19) также могут быть проинтегрированы (см. разделы 3.1.1, 3.1.3). Система интегралов сопряженной системы играет важную роль в общей теории оптимальных импульсных перелетов. Относящиеся сюда вопросы подробно рассмотрены в гл. III.

1.3.2. Линеаризованные уравнения в цилиндрической системе координат. Предположим, что движение КА мало отличается от движения в плоскости $O\varphi$ по круговой орбите радиуса R_* со скоростью

$$V_* = V_{кр}(R_*) = \sqrt{\frac{\mu}{R_*}}. \quad (1.3.40)$$

Такого типа траектории рассматриваются в задачах о маневрировании КА между близкими околокруговыми орбитами. Общая теория таких перелетов рассмотрена в гл. VI, VII. Аналогичная

ситуация может иметь место и для гелиоцентрических участков траекторий межпланетных полетов (подробнее см. гл. XII).

Следуя работе Г. Е. Кузмака, А. З. Брауде [1], представим переменные системы (1.3.7), (1.3.8) в виде

$$\left. \begin{aligned} r &= R_*(1 + \Delta\bar{r}), \quad z = R_*\Delta\bar{z}, \quad \varphi = \varphi_* + \Delta\varphi, \\ V_r &= V_*\Delta\bar{V}_r, \quad V_\tau = V_*(1 + \Delta\bar{V}_\tau), \quad V_z = V_*\Delta\bar{V}_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.44)$$

Здесь

$$\Delta\bar{r}, \Delta\bar{z}, \Delta\varphi, \Delta\bar{V}_r, \Delta\bar{V}_\tau, \Delta\bar{V}_z \quad (1.3.42)$$

— безразмерные, малые по сравнению с 1, величины,

$$\varphi_* = \frac{V_*}{R_*} t \quad (1.3.43)$$

— угловая дальность полета по круговой орбите радиуса R_* .

Введем безразмерное время

$$\bar{t} = \frac{V_*}{R_*} t. \quad (1.3.44)$$

Заметим, что в силу (1.3.43), (1.3.44)

$$\bar{t} = \varphi_*. \quad (1.3.45)$$

Безразмерные массу $\bar{m}$, тягу $\bar{T}$, скорость истечения $\bar{c}$ и характеристическую скорость $\bar{q}$ введем согласно (1.3.11).

Линеаризуя систему (1.3.12), (1.3.13) и опуская здесь и в дальнейшем черточки сверху у безразмерных величин, получим для рассматриваемых движений КА следующую систему уравнений:

$$\frac{d\Delta r}{dt} = \Delta V_r, \quad (1.3.46a)$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Delta V_\tau - \Delta r, \quad (1.3.46б)$$

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \Delta V_z, \quad (1.3.46в)$$

$$\frac{d\Delta V_r}{dt} = \Delta r + 2\Delta V_\tau + n_* \frac{T_r}{m}, \quad (1.3.47a)$$

$$\frac{d\Delta V_\tau}{dt} = -\Delta V_r + n_* \frac{T_\tau}{m}, \quad (1.3.47б)$$

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} = -\Delta z + n_* \frac{T_z}{m}. \quad (1.3.47в)$$

Уравнение (1.3.14) для безразмерной характеристической скорости остается, очевидно, неизменным:

$$\frac{dq}{dt} = n_* \frac{T}{m}. \quad (1.3.48)$$

Компоненты тяговооруженности n_i связаны с компонентами тяги T_i формулами

$$n_i = n_* \frac{T_i}{m} = \frac{n_* T_i}{m_0} e^{q/c}, \quad i = r, \tau, z. \quad (1.3.49)$$

Входящие в правые части (1.3.47), (1.3.48) тяговооруженность $n = n_* \frac{T}{m}$ и ее компоненты n_r, n_τ, n_z , вообще говоря, не малые величины. Однако всюду в дальнейшем полагаем, что суммарное действие тяговооруженности на всех активных участках и, следовательно, полное изменение характеристической скорости

$$\Delta q = \sum_{k=1}^N \int_{t_k^-}^{t_k^+} n dt \quad (1.3.50)$$

представляют малую того же порядка, что и (1.3.42). Заметим, что если величина Δq (1.3.50) не мала, то скорость КА не может быть всюду на траектории близка к скорости V_* (1.3.40). Поэтому при сделанном выше предположении о близости скорости аппарата к V_* величина Δq должна быть мала по сравнению с 1 и проведенная линеаризация уравнений движения корректна.

Векторы сопряженных переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ задаем компонентами, сопряженными к $\Delta r, \Delta \varphi$ и Δz :

$$\mathbf{p} = (p_r, p_\varphi, p_z), \quad (1.3.51)$$

$$\mathbf{s} = (s_r, s_\varphi, s_z). \quad (1.3.52)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = p_r \Delta V_r + p_\varphi (-\Delta r + \Delta V_\tau) + p_z \Delta V_z + s_r (\Delta r + 2\Delta V_\tau) + \\ + s_\varphi (-\Delta V_r) + s_z (-\Delta z) + n_* \frac{T}{m} [(s, \mathbf{e}) + p_q]. \quad (1.3.53)$$

Сопряженные векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dp_r}{dt} = -s_r + p_\varphi, \quad (1.3.54a)$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = 0, \quad (1.3.54b)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = s_z, \quad (1.3.54b)$$

$$\frac{ds_r}{dt} = s_\varphi - p_r, \quad (1.3.55a)$$

$$\frac{ds_\varphi}{dt} = -2s_r - p_\varphi, \quad (1.3.55b)$$

$$\frac{ds_z}{dt} = -p_z. \quad (1.3.55b)$$

Условия оптимальности (1.2.34) — (1.2.45) остаются в силе. Сопряженная переменная p_q , как и ранее, удовлетворяет либо уравнению (1.2.38), либо уравнению (1.2.39).

Система уравнений (1.3.46), (1.3.47) для фазовых переменных является неоднородной линейной системой уравнений с постоянными коэффициентами, а система уравнений для сопряженных переменных (1.3.54), (1.3.55) — однородной линейной системой. Существенно, что система (1.3.54), (1.3.55) не зависит от системы (1.3.46), (1.3.47) (что, естественно, является следствием того, что опорная орбита круговая).

Простота структуры системы уравнений (1.3.54), (1.3.55) позволяет непосредственно получить ее решение (Г. Е. Кузмак, А. З. Брауде [1]). Уравнение (1.3.54б) дает $p_q = \text{const}$. Уравнения (1.3.54в) и (1.3.55в) интегрируются независимо от остальных уравнений системы. Дифференцируя (1.3.55а) по t с учетом того, что $p_q = \text{const}$, и используя (1.3.54а), (1.3.55б), найдем $s_r(t)$. После этого находятся $p_r(t)$ из (1.3.54а) и $s_q(t)$ из (1.3.55б).

В результате общее решение системы уравнений (1.3.54), (1.3.55) записывается в виде

$$p_r = -A \sin t + B \cos t - 3Ct + D, \quad (1.3.56a)$$

$$p_q = -C, \quad (1.3.56б)$$

$$p_z = E \sin t - F \cos t, \quad (1.3.56в)$$

$$s_r = A \cos t + B \sin t + 2C, \quad (1.3.57a)$$

$$s_q = -2A \sin t + 2B \cos t - 3Ct + D, \quad (1.3.57б)$$

$$s_z = E \cos t + F \sin t, \quad (1.3.57в)$$

где A, B, C, D, E и F — произвольные постоянные. Заметим, что система уравнений (1.3.54), (1.3.55) совпадает с точной системой сопряженных уравнений (1.3.18), (1.3.19) на круговой орбите (см. раздел 3.1.1). В разделе 3.1.1 будет приведено полученное Лоуденом решение сопряженной системы уравнений для круговой орбиты (3.1.6) — (3.1.8), (3.1.16) — (3.1.18). С учетом равенства (1.3.45) для аргументов t в системе (1.3.56), (1.3.57) и η в решении Лоудена нетрудно заметить, что оба решения близки между собой, хотя и не совпадают. Последнее объясняется различным выбором векторов фазовых переменных при получении решений (1.3.56), (1.3.57) и решения Лоудена.

Рассмотрим теперь уравнения (1.2.38) и (1.2.39) для сопряженной переменной p_q . В том случае, когда управлением является тяговооруженность (уравнение (1.2.39)), к решению (1.3.56), (1.3.57) добавляется интеграл

$$p_q = \text{const} \quad (1.3.58)$$

и для функционала (1.2.26)

$$p_q = -1 \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (1.3.59)$$

Для случая, когда управлением является тяга, рассмотрим уравнение (1.2.38), которое перепишем с учетом (1.2.4) и (1.2.35) в виде

$$\frac{dp_q}{dt} = -n_* \frac{T}{mv} \frac{1}{c} (p_q + s). \quad (1.3.60)$$

На k -м пассивном участке $[t_k^+, t_{k+1}^-]$ $T = 0$ и вследствие непрерывности p_q (см. (1.2.44))

$$p_q = \text{const} = p_q(t_k^+). \quad (1.3.61)$$

Рассмотрим уравнение (1.3.60) на k -м активном участке $[t_k^-, t_k^+]$ оптимальной траектории. Вследствие (1.2.36а) на этом активном участке

$$T = \text{const} = T_{\max}. \quad (1.3.62)$$

Из (1.1.3) имеем (все величины размерные)

$$T = -c \frac{dm}{dt}. \quad (1.3.63)$$

Следовательно, на любом активном участке оптимальной траектории расход массы постоянен и равен максимальному (по модулю) значению

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \text{const}. \quad (1.3.64)$$

Размерный расход массы $\dot{m}$ связан с безразмерным $\dot{m}$ соотношением

$$\dot{m} = \frac{m_* V_*}{R_*} \dot{m}_*. \quad (1.3.65)$$

Приводя соотношение (1.3.63) к безразмерному виду, получим (опуская черточки у безразмерных величин)

$$n_* T = -c \dot{m}. \quad (1.3.66)$$

С учетом (1.3.66) уравнение (1.3.60) перепишем в виде

$$\frac{dp_q}{dt} = \frac{\dot{m}}{m} (p_q + s). \quad (1.3.67)$$

Вследствие (1.3.64) текущая масса аппарата на k -м активном участке

$$m = m_k^- + \dot{m} (t - t_k^-) \quad \forall t \in [t_k^-, t_k^+], \quad (1.3.68)$$

где

$$m_k^- = m(t_k^-). \quad (1.3.69)$$

Обозначая

$$t - t_k^- = \tau, \quad (1.3.70)$$

перепишем (1.3.67) окончательно в виде уравнения

$$\frac{dp_q}{d\tau} = \frac{\dot{m}}{m_k^- + m\tau} (p_q + s). \quad (1.3.71)$$

Его общее решение на k -м активном участке с учетом непрерывности p_q (см. (1.2.44)) записывается в виде (Л. С. Понтрягин [1])

$$p_q = \left[1 + \frac{\dot{m}}{m_k^-} (t - t_k^-) \right] \left[p_q(t_k^-) + \frac{\dot{m}}{m_k^-} \int_{t_k^-}^t \frac{s(t) dt}{\left[1 + \frac{\dot{m}}{m_k^-} (t - t_k^-) \right]^2} \right] \\ \forall t \in [t_k^-, t_k^+]. \quad (1.3.72)$$

Если с помощью (1.3.57) вычислить функцию $s(t)$ и подставить ее в (1.3.72), то получающийся при этом интеграл не выражается через элементарные функции. Подынтегральная функция настолько громоздка, что вычисление p_q на активных участках целесообразно проводить путем численного интегрирования уравнений (1.3.60) или (1.3.67), а не с помощью интеграла в (1.3.72).

Интегрирование уравнения для p_q приводит к появлению в общем решении сопряженной системы еще одной постоянной — p_{q0} . Таким образом, решение системы уравнений для сопряженных переменных p , s и p_q включает семь постоянных интегрирования:

$$A, B, C, D, E, F, p_{q0}. \quad (1.3.73)$$

Поскольку уравнение (1.2.38) при линеаризации уравнений движения остается неизменным, полученные для него результаты справедливы и для исходной сопряженной системы (1.2.28), (1.2.29), записанной в любой из рассмотренных систем координат.

Заметим, что если тяга аппарата велика, а продолжительность активного участка мала, то траектория аппарата близка к импульсной. В этом случае (см. гл. II, IV) на активном участке

$$s(t) \approx 1 \quad \forall t \in [t_k^-, t_k^+]. \quad (1.3.74)$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться для приближенного вычисления интеграла в (1.3.72).

Перейдем к системе уравнений (1.3.46), (1.3.47) для фазовых переменных. Рассмотрим сначала соответствующую однородную систему на пассивных участках траектории. Уравнения (1.3.46в) и (1.3.47в) интегрируются независимо от остальных уравнений. Дифференцируя (1.3.47а) по t и используя (1.3.46а) и (1.3.47б), получим уравнение относительно ΔV_r , после чего последовательно

находятся $\Delta V_r(t)$, $\Delta V_\tau(t)$ и $\Delta r(t)$. Подстановка $\Delta V_\tau(t)$ в $\Delta r(t)$ в (1.3.46б) дает интеграл для $\Delta \varphi(t)$.

В результате на пассивных участках траектории общее решение однородной системы (1.3.46), (1.3.47) записывается в виде

$$\Delta r = A_1 \sin t - B_1 \cos t - 2C_1, \quad (1.3.75a)$$

$$\Delta \varphi = 2A_1 \cos t + 2B_1 \sin t + 3C_1 t + D_1, \quad (1.3.75б)$$

$$\Delta z = E_1 \sin t - F_1 \cos t, \quad (1.3.75в)$$

$$\Delta V_r = A_1 \cos t + B_1 \sin t, \quad (1.3.76a)$$

$$\Delta V_\tau = -A_1 \sin t + B_1 \cos t + C_1, \quad (1.3.76б)$$

$$\Delta V_z = E_1 \cos t + F_1 \sin t, \quad (1.3.76в)$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ — произвольные постоянные.

Уравнение (1.3.48) для характеристической скорости q при $c = \text{const}$ интегрируется в виде (1.1.12); поэтому, если

$$T = \begin{cases} T_{\max}, & \dot{m} = \text{const} \neq 0, \quad t \in [t_k^-, t_k^+], \end{cases} \quad (1.3.77a)$$

$$\begin{cases} 0, & \dot{m} = 0, \quad t \in [t_k^+, t_{k+1}^-], \end{cases} \quad (1.3.77б)$$

то дополнительно к (1.3.75), (1.3.76) имеем интеграл

$$q = c \ln \frac{m_0}{m_k^- + \dot{m}(t - t_k^-)}, \quad t \in [t_k^-, t_k^+], \quad (1.3.78a)$$

$$q = q(t_k^+), \quad t \in [t_k^+, t_{k+1}^-]. \quad (1.3.78б)$$

Для решения неоднородной системы (1.3.46), (1.3.47) на активных участках можно применить метод вариаций произвольных постоянных $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ (Л. С. Понтрягин [1]). Получающиеся при этом интегралы не выражаются через элементарные функции. При практическом решении задач целесообразно на активных участках непосредственно интегрировать систему уравнений (1.3.46), (1.3.47).

§ 2.1. Импульсные перелеты

2.1.1. Импульсные перелеты в гравитационном поле. Перепишем безразмерную систему уравнений движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле (1.2.10) — (1.2.12):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + n_* \frac{\mathbf{T}}{m}, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{dq}{dt} = n_* \frac{T}{m}. \quad (2.1.3)$$

Пусть t_k^- , t_k^+ , $k = 1, 2, \dots, N$ — соответственно начало и конец k -го активного участка оптимальной траектории аппарата при ограничении тяги. Интегрируя уравнения (2.1.1) — (2.1.3) и используя при интегрировании (2.1.2) теорему о среднем, с учетом ограничения (1.2.48) и того, что единичный вектор тяги $\mathbf{e}(t)$ на основании (1.2.34) и (1.2.36) на активном участке $t \in [t_k^-, t_k^+]$ является непрерывным, получим

$$\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}(t_k^+) - \mathbf{r}(t_k^-) = \int_{t_k^-}^{t_k^+} \mathbf{V}(t) dt, \quad (2.1.4)$$

$$\Delta \mathbf{V}_k = \mathbf{V}(t_k^+) - \mathbf{V}(t_k^-) = -\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)_{\text{ср}} (t_k^+ - t_k^-) + c \mathbf{e}_{\text{ср}} \ln \frac{m_k^-}{m_k^+}, \quad (2.1.5)$$

$$\Delta q = q(t_k^+) - q(t_k^-) = c \ln \frac{m_k^-}{m_k^+}, \quad (2.1.6)$$

где

$$m_k^- = m(t_k^-), \quad m_k^+ = m(t_k^+). \quad (2.1.7)$$

Пусть теперь длительность активного участка

$$\Delta t_k = t_k^+ - t_k^- \rightarrow 0, \quad (2.1.8)$$

так что

$$t_k^- \rightarrow t_k - 0, \quad t_k^+ \rightarrow t_k + 0, \quad (2.1.9)$$

где $t_k \in [t_k^-, t_k^+]$ — некоторый фиксированный момент времени, при этом считаем

$$\frac{m_k^-}{m_k^+} = \text{const}. \quad (2.1.10)$$

В этом случае из (2.1.4) — (2.1.6), (2.1.8) — (2.1.10) получаем

$$\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^+ - \mathbf{r}_k^- = 0, \quad (2.1.11)$$

$$\Delta \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^- = c \mathbf{e}(t_k) \ln \frac{m_k^-}{m_k^+} = \mathbf{e}(t_k) \Delta q_k, \quad (2.1.12)$$

где

$$\mathbf{r}_k^+ = \mathbf{r}(t_k + 0), \quad \mathbf{r}_k^- = \mathbf{r}(t_k - 0), \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{V}_k^+ = \mathbf{V}(t_k + 0), \quad \mathbf{V}_k^- = \mathbf{V}(t_k - 0). \quad (2.1.14)$$

Расход массы КА на оптимальном активном участке с тягой $T_{\max}$ вследствие (2.1.10)

$$\Delta m_k = m_k^+ - m_k^- = (\dot{m})_{\max} (t_k^+ - t_k^-) = \text{const}, \quad (2.1.15)$$

поэтому из (2.1.8) и (2.1.15) получаем

$$\lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \left| \dot{m}_k \right|_{\max} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{|\Delta m_k|}{\Delta t_k} = +\infty. \quad (2.1.16)$$

Следовательно, и

$$\lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} (T_k)_{\max} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} c \left| \dot{m}_k \right| = +\infty. \quad (2.1.17)$$

В связи с рассмотренным предельным переходом в астродинамике, по аналогии с классической теорией удара (см. Аппель [1], Валле Пуссен [1], Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье [1]), вводится фундаментальное понятие *импульса скорости*.

Мгновенное приращение вектора скорости КА (2.1.12) на бесконечно малом активном участке с конечным расходом массы (2.1.15) при неограниченном возрастании силы тяги (2.1.17) назовем *импульсным приращением вектора скорости КА* или *импульсом скорости*.

При наличии импульсов скорости тягу и траекторию КА будем называть соответственно *импульсной тягой* и *импульсной траекторией*. Заметим, что, согласно (2.1.11), радиус-вектор аппарата при сообщении КА импульса скорости остается неизменным (непрерывным).

Проведенные рассуждения, как нетрудно видеть, остаются в силе для любого закона изменения конечной тяги $T(t)$ на ак-

тивном участке. Существенно лишь, чтобы при стремлении длительности активного участка к нулю (см. (2.1.8)) расход массы аппарата оставался конечным (см. (2.1.15)). При указанных условиях понятие импульса скорости вводится для любых траекторий КА.

Уравнения движения КА на импульсной траектории во всех точках, кроме точек приложения импульсов, совпадают с уравнениями задачи двух тел:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (2.1.18)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.1.19)$$

Отметим, что, как видно из (2.1.12),

$$\Delta q_k \equiv \Delta V_k; \quad (2.1.20)$$

поэтому при решении задач оптимизации перелетов в импульсной постановке характеристическая скорость непосредственно выражается через импульсы вектора скорости $\mathbf{V}$, в результате чего переменная q исключается из рассмотрения (см. раздел 2.2.2).

Поскольку при условиях (1.1.18), (1.2.49) величина гравитационного ускорения $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ ограничена сверху:

$$|\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)| < \sup_{\{\mathbf{r}, t\}} |\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)|, \quad (2.1.21)$$

и в случае произвольного гравитационного поля (см. раздел 1.2.4) возможен предельный переход от конечной тяги к импульсной тяге, при этом все соотношения (2.1.11) — (2.1.17), (2.1.20) остаются в силе. Уравнения движения КА на импульсной траектории во всех точках, кроме точек приложения импульсов тяги, записываются в виде уравнений свободного движения материальной точки в рассматриваемом гравитационном поле:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (2.1.22)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.23)$$

Поскольку между двумя соседними импульсами движение КА происходит по кеплеровой дуге, то, используя интегралы уравнений движения (см. раздел 1.3.1) и задавая в качестве неизвестных моменты времени t_k , радиусы-векторы $\mathbf{r}_k$ и векторы импульсов $\Delta \mathbf{V}_k$, можно свести краевую задачу определения оптимального перелета к задаче на исследование условного экстремума функции многих переменных. При этом следует иметь в виду, что из 14 величин, определяющих моменты времени t_j , t_{j+1} , радиусы-векторы $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_{j+1}$ и векторы скорости $\mathbf{V}_j$ и $\mathbf{V}_{j+1}$ в концах j -й кеплеровой дуги перелета, независимыми являются только 8. В самом деле,

задавая, например, $t_j, \mathbf{r}_j, t_{j+1}, \mathbf{r}_{j+1}$ или $t_j, \mathbf{r}_j, \mathbf{V}_j^+, t_{j+1}$, можно однозначно определить кеплерову дугу перелета. Эти «естественные» условия необходимо учитывать с прочими условиями, наложенными на траекторию перелета. Указанный подход к решению краевых задач оптимизации импульсных перелетов, который условно назовем *экстремальным подходом*, нашел весьма широкое применение в астродинамике (см. К. Б. Алексеев, Г. Г. Бебенник, В. А. Ярошевский [1], Бэттин [2], Гобец, Долл [1], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [1], Эрике [5, 7, 8], Эскобал [2] и § 3.3, гл. V—VII, §§ 10.2, 10.3, 11.5, 12.3, 12.4).

При экстремальном подходе условия экстремума в совокупности с краевыми условиями, как правило, получаются весьма сложными и громоздкими, что требует для решения задачи использования ЭЦВМ. Особенно сложным экстремальный подход оказывается при рассмотрении многоимпульсных перелетов, поскольку включение каждого нового импульса добавляет в задачу в общем случае 7 новых неизвестных. Поэтому экстремальный подход в основном применялся и применяется в астродинамике для нахождения оптимальных траекторий при заданных а priori схемах перелета (т. е. количестве и местах приложения импульсов скорости) с небольшим числом импульсов.

Если же схему импульсного перелета заранее не задавать, то более удобным оказывается *вариационный подход* к решению задачи.

Вариационный подход сводится к рассмотрению уравнений для фазовых координат (2.1.18), (2.1.19) совместно с сопряженной системой уравнений (см. Приложение). С помощью сопряженной системы можно сформулировать необходимые условия строгой локальной оптимальности импульсного перелета.

Вариационный подход обладает важными преимуществами перед экстремальным. Во-первых, оптимальная схема перелета определяется в процессе решения задачи, а не задается заранее. Во-вторых, полученное решение фазовой и сопряженной систем может быть использовано в качестве исходного приближения при решении вариационной задачи с конечной тягой. В-третьих, сопряженная система может быть эффективно использована для улучшения неоптимальных импульсных перелетов (см. § 2.3).

Сопряженная система уравнений в ньютоновском гравитационном поле может быть в общем виде проинтегрирована (см. § 3.4). Поэтому решение краевой задачи может быть, вообще говоря, получено на основе исследования и решения системы конечных соотношений, состоящей из интегралов фазовой и сопряженной систем на каждой кеплеровой дуге и заданных условий на траекторию перелета. Порядок этой системы за счет неизвестных постоянных в интегралах сопряженной системы на $6m$ больше, чем порядок соответствующей экстремальной за-

дачи, где m — количество кеплеровых дуг в составе траектории. Поскольку в общем случае интегралы сопряженной системы имеют весьма сложную структуру, решение задачи оптимизации может быть получено лишь численно с использованием ЭЦВМ. При этом возникают типичные для численного решения вариационных задач трудности, основной из которых является необходимость получения исходного приближения для построения итерационного процесса. Эти трудности могут быть в значительной мере преодолены, если предварительно с помощью экстремального подхода получить решение поставленной задачи для некоторых «рациональных» схем перелета. После этого целесообразно использовать сопряженную систему для построения траектории, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности. Таким образом, наиболее целесообразным методом решения вариационных задач оптимизации импульсных перелетов представляется сочетание экстремального и вариационного подходов.

В заключение этого раздела остановимся на оценке ошибок, к которым приводит аппроксимация траекторий конечной тяги импульсными траекториями. В качестве меры этих ошибок обычно используются гравитационные потери в характеристической скорости, обусловленные конечной длительностью активных участков.

Как следует из (2.1.4), (2.1.5) при условии (2.1.8) (см. § 4.2), решение краевой задачи оптимизации перелета в импульсной постановке в общем случае отличается от решения той же зада-

чи с конечной тягой на величину порядка $\sum_{k=1}^N \Delta t_k$. Если положения начального и конечного импульсов не задаются, а выбираются оптимально или эти импульсы отсутствуют и расход массы аппарата в каждом импульсе не очень велик (см. раздел 4.2.1), то соответствующая ошибка на порядок меньше, чем в общем

случае, и представляет величину порядка $\sum_{k=1}^N (\Delta t_k)^2$. Таким об-

разом, если суммарная длительность активных участков достаточно мала, то импульсная траектория является достаточно хорошим приближением к траектории с конечной тягой. Ряд численных и аналитических оценок (см., например, Дэрби [1], Мёкель [3], Петре [1], Уонг [1]) показывает, что при скоростях истечения газов из сопла химических и ядерных ЖРД $c \leq 10\,000$ м/сек основное влияние на величину гравитационных потерь оказывает начальное ускорение в долях гравитационного ускорения n и величина приращения характеристической скорости Δq . При $\Delta q \leq 10\,000$ м/сек и $n \approx \geq 1$ величина гравитационных потерь не превышает нескольких процентов (Мёкель [3], Петре [1]). Аналитическая оценка ошибок, обусловленных рассмотрением

участков активного движения как импульсных, дана в книге В. С. Новоселова [1].

2.1.2. Современное состояние теории. Обстоятельный обзор истории и современного состояния теории импульсных перелетов, включающий более 300 работ по импульсным траекториям, опубликованных в основном до 1968 г., дан Гобецом и Доллом [1]. В связи с этим кратко остановимся только на некоторых основных вопросах теории оптимальных импульсных перелетов и работах, связанных с рассмотренными в настоящей монографии вопросами.

В подавляющем большинстве исследований, начиная с классической работы Гомана [1] (1925 г.), рассматриваются заданные схемы перелета: количество и места приложения импульсов задаются из некоторых априорных соображений. Исследуются в основном перелеты с одним или двумя импульсами. При этом оптимизация перелета сводится к оптимальному выбору некоторых свободных параметров, число которых невелико. Многочисленные примеры работ такого рода, часть из которых рассмотрена в гл. V и X, приведены в указанном выше обзоре. Следует заметить, что отдельные попытки установить строго оптимальность тех или иных перелетов, как правило, простейших, без использования вариационного подхода приводили к громоздким рассмотрениям (см., например, Биллик, Рот [1], где, по-видимому, впервые была показана оптимальность гомановского перелета).

Большое значение для разработки методов решения задач оптимизации в астродинамике, в частности задач оптимизации импульсных перелетов, имел цикл исследований Лоудена [1—24], выполненных им в 1950—1963 гг.

Фундаментальные результаты, относящиеся к общей теории оптимизации импульсных перелетов в гравитационном поле, изложены Лоуденом в работе [7] (1953 г.). Хотя Лоуден в этой работе явно не пользуется сопряженной системой, необходимые условия оптимальности импульсных перелетов сформулированы им с помощью специальных переменных u , v , совпадающих по смыслу с компонентами вектора s , сопряженного к вектору скорости, в некоторой декартовой системе координат, плоскость xu которой совпадает с плоскостью перелета. Среди основных результатов [7] следует указать на полученное явное решение для u , v на кеплеровых дугах при незаданном времени перелета. В работе [9] (1954 г.) сопряженная система проинтегрирована для плоских перелетов в общем случае при заданном времени перелета (см. § 3.1). В этой работе Лоуден впервые употребил для вектора s компонентами u , v (т. е. для вектора s) название «primer» (буквально — инициатор, зачинатель), прочно вошедшее в зарубежную литературу по оптимизации импульсных траекторий КА.

Лоуден так объяснил выбор этого названия. Когда в некоторой точке на траектории выполняются условия (2.2.87) и (2.2.88), u и v инициируют приложение в этой точке импульса скорости (« u and v act as *primers*, initiating the short periods of thrust»).

В 1959 г. вышла в свет статья Лоудена [19], представляющая собой обзор основных ранее полученных автором результатов, связанных с оптимизацией траекторий КА и ракет. К этому времени были опубликованы известные работы Чикала и Мьеле [1], Мьеле [1—3], в которых задачи оптимизации траекторий ракет успешно рассматривались в рамках формализма вариационной задачи Майера. Для изложения своих результатов Лоуден также (впервые) использует аппарат задачи Майера. При этом сразу же выяснилось, что множители Лагранжа, соответствующие компонентам вектора скорости КА $\mathbf{V}$ (т. е. компоненты вектора $\mathbf{s}$), суть не что иное, как компоненты введенного ранее Лоуденом в [7, 9] вектора u, v . Дается полное решение сопряженной системы уравнений (для векторов $\mathbf{s}$ и $\dot{\mathbf{s}}$) в пространственном случае при движении по кеплеровым траекториям (см. § 3.1).

Цикл исследований Лоудена в области разработки теории оптимизации траекторий КА и ракет завершает широко известная монография [24] (1963 г.). В ней обобщены и изложены с единых позиций все основные ранее опубликованные результаты автора. Рассмотрение, как и в работе [19], ведется на основе задачи Майера классического вариационного исчисления.

Одна из первых попыток построения общей теории импульсных перелетов в рамках классического вариационного исчисления была предпринята также Хэйнесом [1] (1961 г.). Эта и другие аналогичные работы, в которых задача оптимизации импульсных перелетов с разрывными фазовыми координатами искусственно сводилась к задаче классического вариационного исчисления, в результате чего возникали определенные трудности и усложнения, не нашли практического применения. Для обхода указанных трудностей в работах Брейкуэлла [1], Контенсу [1], Марека [1] в качестве новой независимой переменной использовалась характеристическая скорость, в качестве фазовых координат — элементы орбиты.

Эффективный путь получения условий оптимальности импульсных траекторий из условий оптимальности перелетов с конечной тягой был намечен в работах Лоудена (см. монографию [24]) и Вёбека и Геертса [1]. В монографии Лоудена [24] импульсные перелеты рассматриваются как предельные для перелетов с конечной тягой при $(T_k)_{\max} \rightarrow \infty$ (см. выше) в рамках классического вариационного исчисления. Применительно к импульсным перелетам в основном исследуется сопряженная система уравнений, в частности, достаточно подробно рассмотрены ее

интегралы (см. раздел 3.1.1). Следует отметить, что в этой работе, как и в других работах Лоудена, не приведены в общем случае условия трансверсальности импульсных перелетов и не рассматриваются в общем случае краевые задачи для импульсных перелетов. В работе Вёбека и Геертса [1] аналогичный предельный переход с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина применяется при решении задачи об оптимальном многоимпульсном переходе между орбитами с заданной энергией и моментом количества движения. Предельный переход к импульсной тяге в рамках принципа максимума с использованием линеаризации уравнений движения (см. ниже) применен Санномией и Нцсикавой [1].

Достаточно полное изложение современной теории оптимизации импульсных перелетов в рамках указанного подхода дано в книге В. С. Новоселова [1]. Решения задач оптимизации траекторий КА большой тяги здесь отыскиваются в виде рядов по степеням малого параметра $\sum_{k=1}^N \Delta t_k$. В пределе при $\sum_{k=1}^N \Delta t_k \rightarrow 0$ получаются условия оптимальности для импульсных перелетов при решении соответствующих задач. Аналогичным предельным переходом от конечной к импульсной тяге получены необходимые условия оптимальности импульсных перелетов в монографии В. В. Ивашкина [4].

Другой эффективный путь был предложен С. В. Дубовским [1], который дал прямой вывод условий оптимальной импульсных перелетов на основе рассмотрения задачи оптимизации динамических систем с разрывными фазовыми координатами. Его метод позволяет другим путем вывести условия, ранее полученные Лоуденом, а также достаточно просто выписывать условия трансверсальности в общем случае. С помощью полной совокупности необходимых условий оптимальности в работах С. В. Дубовского [1, 2] рассмотрены интересные примеры оптимизации импульсных перелетов.

Важное значение для развития общего подхода к исследованию оптимальных импульсных траекторий имели примеры многоимпульсных, с количеством импульсов более двух, перелетов, более экономичных, чем одноимпульсные и двухимпульсные. Первый пример такого трехимпульсного перелета между компланарными круговыми орбитами — так называемый биэллиптический перелет — был построен А. Штернфельдом в 1954 г. [1], Хёлкером и Зилбером [1] и Эдельбаумом [1] в 1959 г. Биэллиптический перелет между компланарными круговыми орбитами состоит из двух полуэллипсов, один из которых касателем к внутренней орбите, а другой — к внешней орбите; эти полуэллипсы соединяются в общей апсидальной точке, в которой сообщается промежуточный импульс. В обзоре Эдельбаума [2] рассмотрены полученные

к тому времени (1967 г.) примеры оптимальных многоимпульсных перелетов. Следует отметить, что подавляющее большинство этих примеров представляло скорее теоретический, а не практический интерес, поскольку: 1) время перелета не задавалось, 2) допускался либо вылет на ∞ , либо подлет неограниченно близко к центру тяготения; 3) начальные и конечные условия выбирались специальным образом (например, симметрия в расположении начальной и конечной орбиты). Основные результаты по оптимизации многоимпульсных перелетов между компланарными эллиптическими орбитами с незаданной ориентацией больших осей получены Тингом Лу [1, 2]. В последнее время с помощью численного анализа построены примеры оптимальных трехимпульсных перелетов в ряде практически интересных задач (см. раздел 10.1.1, § 12.1, Бин [2], Гербрахт, Пензо [1], Гобец, Долл [2], Долл, Гобец [1], Уиллис [1]). Интересные примеры многоимпульсных перелетов приведены в работах С. В. Дубовского [1, 2], Эдельбаума [5].

Следует также отметить, что результаты численного анализа показывают, что во многих важных практических случаях оптимальные перелеты характеризуются малым числом импульсов — не более трех (см. обзор Гобеца, Долла [1], работы С. В. Дубовского [1, 2], Мойера [1], Тинга Лу [1, 2], а также §§ 10.4 и 12.5 настоящей книги).

Трудности построения оптимальных многоимпульсных перелетов либо с помощью общей теории импульсных перелетов, либо путем численных расчетов привели к разработке Лайоном, Хэнделсменом [1] специального метода построения оптимальных многоимпульсных перелетов, развитого затем в работах Ежевски, Розендаала [1], Ежевски [1], Минкоффа, Лайона [1]. Метод Лайона, Хэнделсмена основан на использовании выражения для вариации характеристической скорости при переходе от N -импульсного перелета к $(N+1)$ -импульсному, полученному с помощью сопряженной системы. Общая теория применения сопряженной системы для улучшения неоптимальных импульсных перелетов изложена в § 2.3. Некоторые примеры применения этой теории рассмотрены также в § 10.4 и § 12.5 и в работах Гросса, Прассинга [1], Минкоффа, Лайона [1], Пельтье [1], Хэзелрига [1].

Изучение оптимальных многоимпульсных перелетов в нелинейной постановке представляет значительные трудности и, как правило, может быть проведено лишь с помощью трудоемких расчетов. Среди различных оптимальных перелетов важное практическое значение имеют перелеты между близкими околопланетными орбитами. К этому классу относятся задачи околопланетного маневрирования, а также задачи о перелетах с Земли на ближайшие планеты — Марс и Венеру. Для решения такого рода задач весьма эффективной оказывается линеаризация уравнений

движения относительно некоторой промежуточной круговой орбиты. Идея линеаризации для анализа многоимпульсных перелетов впервые, по-видимому, предложена Г. Е. Кузмаком [1] (1964 г.). В этой работе дано полное решение ряда задач оптимизации плоских перелетов. В дальнейшем линеаризация эффективно использовалась во многих исследованиях импульсных перелетов (Р. Ф. Аппазов, В. И. Огарков [1], Е. И. Бушуев, А. А. Красовский [1], С. В. Дубовский [2], Г. Е. Кузмак [2, 4], Марек [1—4], Санномия, Нисикава [1], Эдельбаум [3]). В работах Г. Е. Кузмака, А. З. Брауде [1], Макинтайра, Крокко [1, 2] линеаризация вместе с принципом максимума применяется для анализа оптимальных перелетов с конечной тягой.

Общая теория оптимальных линеаризованных импульсных перелетов рассмотрена в гл. VI. Примеры решения различных задач оптимизации импульсных перелетов с помощью этой теории приведены в гл. VII.

Как следует из сказанного в разделе 2.1.1 и как будет показано ниже, решение задачи об оптимальных перелетах в импульсной постановке проще, чем при конечной тяге (см. §§ 2.2, 2.3, 3.3). В связи с близостью соответствующих траекторий с конечной и импульсной тягой возникает вопрос об использовании информации, доставляемой известным импульсным решением, для приближенного построения оптимальной траектории с конечной тягой. Такую задачу естественно назвать обратной задачей импульсной аппроксимации. В работе Пайнса [1] впервые, по-видимому, предложено при решении вариационных задач сопряженные переменные импульсного решения использовать для приближенного построения сопряженных переменных при конечной тяге. Впервые обратная задача рассмотрена, по-видимому, в работах Хэнделсмана [1] и Роббинса [1]. В работе Хэнделсмана [1] на примере расчетов ряда оптимальных траекторий перелетов Земля — Марс и Марс — Земля показано, что импульсные сопряженные переменные можно использовать в качестве начального приближения при численном решении задач оптимизации перелетов не только при большой, но и малой тяге. В работе Роббинса [1] с помощью формулы Блисса (см. Блисс [1], формулы (П.22) и (П.50) Приложения) дано аналитическое сравнение траекторий с конечной и импульсной тягой. Изложен метод построения траектории конечной тяги при незаданной продолжительности перелета, близкой к оптимальной импульсной траектории. Постановка обратной задачи и ее полное решение для случая движения в малой окрестности круговой орбиты (при незаданной продолжительности перелета) даны Г. Е. Кузмаком, А. З. Брауде [1]. Эти результаты рассмотрены в гл. VII. Обратная задача импульсной аппроксимации в нелинейной постановке подробно рассмотрена в гл. IV.

§ 2.2. Необходимые условия оптимальности

2.2.1. Прямой вывод необходимых условий оптимальности. Необходимые условия оптимальности как в ньютоновском, так и в произвольном гравитационном поле выводятся практически одинаково и имеют один и тот же вид.

Движение рассматриваемой динамической системы — КА — на участках между импульсами описывается системой уравнений (2.1.22), (2.1.23).

В соответствии со сказанным в разделах 1.1.2, 1.2.3 наложим на радиус-вектор аппарата в ньютоновском гравитационном поле ограничение

$$0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty \quad (2.2.1)$$

и аналогичное ограничение в произвольном поле с заменой левой части неравенства (2.2.1) на неравенства (1.1.18).

Вектор фазовых координат КА

$$\{r, V\} = \{x, y, z, V_x, V_y, V_z\}, \quad (2.2.2)$$

согласно (2.1.11), (2.1.12), на импульсной траектории состоит из кусочно-непрерывного вектора

$$V = \{V_x, V_y, V_z\} \quad (2.2.3)$$

и непрерывного вектора

$$r = \{x, y, z\}. \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим N -импульсную траекторию КА на некотором замкнутом промежутке времени

$$t \in G_t: [t_1, t_N], \quad (2.2.5)$$

где каждая из величин t_1, t_N может задаваться или быть свободной. В начальный момент времени аппарат находится на некотором гладком многообразии M_1 :

$$(t_1, r_1, V_1^-) \in M_1. \quad (2.2.6)$$

В конечный момент времени аппарат должен выйти на некоторое гладкое многообразие M_N :

$$(t_N, r_N, V_N^+) \in M_N. \quad (2.2.7)$$

В (2.2.6)

$$V_1^- = V(t_1 - 0) \quad (2.2.8)$$

есть скорость КА до первого импульса, действием которого КА переводится с начального многообразия M_1 на траекторию перелета. Аналогично, в (2.2.7)

$$V_N^+ = V(t_N + 0) \quad (2.2.9)$$

представляет собой скорость КА после последнего N -го импульса, переводящего КА на конечное многообразие M_N .

В некоторые, вообще говоря, неизвестные моменты времени t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, скорость КА получает импульсное приращение (2.1.12):

$$\Delta \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.10)$$

Модуль вектора импульса (2.2.10)

$$\Delta V_k = |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-| = \sqrt{(\mathbf{V}_k^+ + \mathbf{V}_k^-, \mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-)} \quad (2.2.11)$$

на основании (2.1.20) совпадает с приращением характеристической скорости Δq_k в импульсе.

В случае импульсной траектории с учетом (2.1.11), (2.1.12), (2.1.20), (2.2.11) характеристическую скорость перелета — функционал (1.2.26) можно записать в виде

$$G = \Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-) + \sum_{k=1}^N |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-| + \Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+), \quad (2.2.12)$$

где члены $\Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-)$ и $\Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$ аналогичны членам $\Delta V_i(t_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i)$ и $\Delta V_f(t_f, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f)$ в (1.2.26) соответственно и учитывают в рамках ММСВ характеристическую скорость (1.2.24), (1.2.25) внутрисферных импульсных маневров в начальной и конечной точках.

Вариационную задачу оптимизации импульсного перелета сформулируем в форме, аналогичной задаче Майера: требуется так подобрать количество импульсов N , моменты их приложения t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, и векторы скорости $\mathbf{V}_k^+$, $\mathbf{V}_k^-$, $k = 1, 2, \dots, N$, определяющие величины импульсов, при которых КА переводится с заданного начального многообразия M_1 (2.2.6) на заданное конечное многообразие M_N (2.2.7), чтобы характеристической скорости — функционалу G (2.2.12) доставлялся минимум.

Для вывода необходимых условий оптимальности N -импульсного перелета воспользуемся методом вариаций.

Для вариации величины импульса скорости $\delta \Delta V_k$ на основании (2.2.11) имеем

$$\delta \Delta V_k \equiv \delta |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-| = \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|}, \delta \mathbf{V}_k^+ - \delta \mathbf{V}_k^- \right). \quad (2.2.13)$$

С учетом (2.2.13) запишем вариацию δG функционала (2.2.12):

$$\begin{aligned} \delta G = & \frac{\partial \Delta V_1}{\partial t} \delta t_1 + \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{r}_1} \delta \mathbf{r}_1 + \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_1^-} \delta \mathbf{V}_1^- + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|}, \delta \mathbf{V}_k^+ - \delta \mathbf{V}_k^- \right) + \\ & + \frac{\partial \Delta V_N}{\partial t_N} \delta t_N + \frac{\partial \Delta V_N}{\partial \mathbf{r}_N} \delta \mathbf{r}_N + \frac{\partial \Delta V_N}{\partial \mathbf{V}_N^+} \delta \mathbf{V}_N^+. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Здесь

$$\frac{\partial \Delta V_j}{\partial \mathbf{r}_j} = \text{grad } \Delta V_j, \quad j = 1, N, \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial \Delta V_j}{\partial \mathbf{v}_j^i} = \text{grad } \Delta V_j, \quad j = 1, i = -; \quad j = N, i = +, \quad (2.2.16)$$

вариации $\delta \mathbf{r}_k$, $\delta \mathbf{V}_k^+$ — полные вариации в концах соответствующего пассивного участка, так называемые «вариации точки» (В. А. Троицкий [1]).

Найдем связи между вариациями

$$\{\delta \mathbf{r}_k, \delta \mathbf{V}_k^+\} = \{\delta \mathbf{r}(t_k), \delta \mathbf{V}(t_k + 0)\} \quad (2.2.17)$$

и

$$\{\delta \mathbf{r}_{k+1}, \delta \mathbf{V}_{k+1}^-\} = \{\delta \mathbf{r}(t_{k+1}), \delta \mathbf{V}(t_{k+1} - 0)\} \quad (2.2.18)$$

в концах k -й кеплеровой дуги при фиксированных значениях t_k , t_{k+1} . Для этого воспользуемся основным свойством однородной системы уравнений в вариациях и сопряженной к ней системы (см. соотношения (П.23) Приложения).

Система уравнений в вариациях для системы уравнений (2.1.22), (2.1.23) записывается в виде

$$\frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} = \delta \mathbf{V}, \quad (2.2.19)$$

$$\frac{d\delta \mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \delta \mathbf{r} \right). \quad (2.2.20)$$

Для ньютоновского поля последнее соотношение имеет вид

$$\frac{d\delta \mathbf{V}}{dt} = -\frac{\delta \mathbf{r}}{r^3} + (\mathbf{r}, \delta \mathbf{r}) \frac{3\mathbf{r}}{r^5}. \quad (2.2.20a)$$

Обозначим, как и в § 1.2, векторы сопряженных к $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ переменных через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ соответственно. Тогда сопряженная к (2.2.19), (2.2.20) система уравнений (см. соотношение (П.18) Приложения) запишется в виде (1.2.75), (1.2.76):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\left(\mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (2.2.21)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\mathbf{p}. \quad (2.2.22)$$

Для ньютоновского поля уравнение (2.2.21) таково:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{s}}{r^3} - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3\mathbf{r}}{r^5}. \quad (2.2.21a)$$

Сопряженная система по виду совпадает с аналогичной системой для конечной тяги. Это обстоятельство имеет важное

практическое значение, поскольку различие между решениями этих систем оказывается того же порядка, что и различие между соответствующими фазовыми траекториями при импульсной и конечной тяге. Следовательно, при импульсной аппроксимации близость фазовой траектории к соответствующей траектории с конечной тягой обеспечивает близость соответствующих решений сопряженных систем. Поэтому при построении итеративных алгоритмов решения вариационных задач оптимизации перелетов с конечной тягой решение задачи в импульсной постановке является хорошим исходным приближением не только по фазовым, но и по сопряженным переменным (подробнее см. разделы 3.3.2, 10.4.3).

На основании свойства сопряженных систем (соотношение (П.23) Приложения) имеем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}^+(t_k), \delta \mathbf{r}^+(t_k)) + (\mathbf{s}^+(t_k), \delta \mathbf{V}^+(t_k)) = \\ & = (\mathbf{p}^-(t_{k+1}), \delta \mathbf{r}^-(t_{k+1})) + (\mathbf{s}^-(t_{k+1}), \delta \mathbf{V}^-(t_{k+1})), k = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

где

$$\mathbf{p}^+(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k+0} \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}^-(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k-0} \mathbf{p}(t), \quad (2.2.24)$$

$$\mathbf{s}^+(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k+0} \mathbf{s}(t), \quad \mathbf{s}^-(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k-0} \mathbf{s}(t). \quad (2.2.25)$$

Вариации $\delta \mathbf{r}^\pm(t_k)$, $\delta \mathbf{V}^\pm(t_k)$ при $t_k = \text{const}$ в (2.2.23) связаны с полными «вариациями точки» $\delta \mathbf{r}_k^\pm$ ($\delta \mathbf{r}_k^+ = \delta \mathbf{r}_k^-$), $\delta \mathbf{V}_k^\pm$ в функционале (2.2.14) соотношениями

$$\delta \mathbf{r}_k^\pm = \delta \mathbf{r}^\pm(t_k) + \mathbf{V}^\pm(t_k) \delta t_k, \quad (2.2.26)$$

$$\delta \mathbf{V}_k^\pm = \delta \mathbf{V}^\pm(t_k) + \mathbf{g}(\mathbf{r}_k, t_k) \delta t_k. \quad (2.2.27)$$

Подставляя (2.2.26), (2.2.27) в (2.2.23), получим окончательно связь между полными вариациями фазового вектора в концах кеплеровой дуги:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}^+(t_k), \delta \mathbf{r}_k) + (\mathbf{s}^+(t_k), \delta \mathbf{V}_k^+) - H^+(t_k) \delta t_k = \\ & = (\mathbf{p}^-(t_{k+1}), \delta \mathbf{r}_{k+1}) + (\mathbf{s}^-(t_{k+1}), \delta \mathbf{V}_{k+1}^-) - H^-(t_{k+1}) \delta t_{k+1}, \\ & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Здесь

$$H(t) = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.2.29)$$

— функция Гамильтона системы уравнений (2.1.22), (2.1.23) и

$$H^\pm(t_k) = (\mathbf{p}^\pm(t_k), \mathbf{V}^\pm(t_k)) + (\mathbf{s}^\pm(t_k), \mathbf{g}(\mathbf{r}_k, t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.30)$$

Необходимое условие оптимальности импульсной траектории сводится к условию стационарности функционала

$$\delta G = 0 \quad (2.2.31)$$

относительно системы из $10N$ (скалярных) вариаций

$$\{\delta t_k, \delta \mathbf{r}_k, \delta \mathbf{V}_k^-, \delta \mathbf{V}_k^+\}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.32)$$

Система вариаций (2.2.32) несвободна. На вариации

$$\delta t_k, \delta \mathbf{r}_k, \delta \mathbf{V}_k^+, \delta t_{k+1}, \delta \mathbf{r}_{k+1}, \delta \mathbf{V}_{k+1}^- \quad (2.2.33)$$

в концах пассивной дуги между k -м и $(k+1)$ -м импульсами наложено 6 связей (2.2.19), (2.2.20). Таким образом, из каж-дых 14 скалярных величин (2.2.33) в общем случае независимы только 8. Кроме того, на вариации $\delta t_1, \delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{V}_1^-$ и $\delta t_N, \delta \mathbf{r}_N, \delta \mathbf{V}_N^+$ наложены связи, обусловленные принадлежностью векторов $(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-)$ и $(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$ начальному M_1 (2.2.6) и конечному M_N (2.2.7) многообразиям соответственно.

Чтобы записать необходимые условия оптимальности в сим-метричной форме, воспользуемся методом Лагранжа (Л. Д. Ку-дрявцев [1], т. II). Вычитая из (2.2.14) левые части $N-1$ ра-венств (2.2.28) и прибавляя к (2.2.14) $N-1$ соответствующих правых частей (2.2.28), получим

$$\begin{aligned} \delta G = & \delta \Delta V_1 + \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_1}{|\Delta \mathbf{V}_1|}, \delta \mathbf{V}_1^+ - \delta \mathbf{V}_1^- \right) - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) - (\mathbf{s}_1^+, \delta \mathbf{V}_1^+) + \\ & + H_1^+ \delta t_1 + \sum_{k=2}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|} - \mathbf{s}_k^+, \delta \mathbf{V}_k^+ \right) - \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|} - \mathbf{s}_k^-, \delta \mathbf{V}_k^- \right) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{p}_k^+ - \mathbf{p}_k^-, \delta \mathbf{r}_k) + (H_k^+ - H_k^-) \delta t_k \right\} + \delta \Delta V_N + \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_N}{|\Delta \mathbf{V}_N|}, \delta \mathbf{V}_N^+ - \delta \mathbf{V}_N^- \right) + \\ & + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (\mathbf{s}_N^-, \delta \mathbf{V}_N^-) - H_N^- \delta t_N, \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

где

$$\delta \Delta V_1 = \frac{\partial \Delta V_1}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{r}_1} \delta \mathbf{r}_1 + \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_1^-} \delta \mathbf{V}_1^-, \quad (2.2.35)$$

$$\delta \Delta V_N = \frac{\partial \Delta V_N}{\partial t_N} \delta t_N + \frac{\partial \Delta V_N}{\partial \mathbf{r}_N} \delta \mathbf{r}_N + \frac{\partial \Delta V_N}{\partial \mathbf{V}_N^+} \delta \mathbf{V}_N^+ \quad (2.2.36)$$

— полные вариации членов $\Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-)$ и $\Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$ в начальной и конечной точках соответственно (см. (2.2.14) — (2.2.16)),

$$\mathbf{p}_k^\pm \equiv \mathbf{p}(t_k \pm 0), \quad (2.2.37)$$

$$\mathbf{s}_k^\pm \equiv \mathbf{s}(t_k \pm 0), \quad (2.2.38)$$

$$H_k^\pm \equiv H(t_k \pm 0), \quad (2.2.39)$$

Условие стационарности (2.2.31) должно выполняться относительно любой системы вариаций, совместимой со связями. Рассмотрим сначала варьированные траектории, для которых начальная (до импульса) и конечная (после импульса) точки закреплены, т. е. положим

$$\delta t_1 \equiv \delta r_1 \equiv \delta V_1^- \equiv \delta t_N \equiv \delta r_N \equiv \delta V_N^+ \equiv 0. \quad (2.2.40)$$

Поскольку исходная траектория удовлетворяет всем связям, система вариаций (2.2.40) с ними совместима. При этом любая варьированная траектория может быть получена, если, например, соответствующим образом задать вариации δt_k , δr_k , $k=2, 3, \dots, N-1$. Вследствие (2.2.40) в (2.2.34) останутся только члены, стоящие под знаком суммы, а также члены с вариацией δV_1^+ в начальной точке и с вариацией δV_N^- в конечной точке. Выбором сопряженных переменных $s_k^\pm$, $p_k^\pm$, $k=2, 3, \dots, N-1$, распорядимся следующим образом: часть из них, входящую в коэффициенты при зависимых вариациях (2.2.33), определим так, чтобы эти коэффициенты обратились в нуль. Тогда для выполнения условия (2.2.31) необходимо, чтобы коэффициенты при оставшихся независимых вариациях тоже обратились в нуль.

Подчеркнем, что такой выбор сопряженных переменных всегда осуществим. В самом деле, на каждой пассивной дуге решение системы уравнений (2.2.21), (2.2.22) шестого порядка определяется шестью краевыми условиями. Следовательно, количество задаваемых компонент сопряженных переменных на концах каждой пассивной дуги совпадает с количеством зависимых вариаций в системе вариаций (2.2.33), что и позволяет осуществить указанный выбор.

В результате для всех внутренних импульсов ($k=2, 3, \dots, N-1$) получаем

$$s_k^+ = s_k^- = \frac{\Delta V_k}{|\Delta V_k|}, \quad (2.2.41)$$

$$p_k^+ = p_k^-. \quad (2.2.42)$$

$$H_k^+ = H_k^-. \quad (2.2.43)$$

Рассматриваемое решение сопряженной системы наиболее удобно определить с помощью равенств (2.2.41) (см. § 2.3).

Таким образом, необходимые условия оптимальности импульсных перелетов для внутренних импульсов скорости формулируются на основании (2.2.21), (2.2.22), (2.2.41) — (2.2.43) следующим образом.

1°. Векторы сопряженных переменных p и s между импульсами удовлетворяют системе уравнений (2.2.21), (2.2.22).

2°. Векторы сопряженных переменных p и s на всей траектории для любого $t \in (t_1, t_N)$ непрерывны, включая точки

импульсов:

$$\mathbf{p}^-(t_k) \equiv \mathbf{p}(t_k - 0) = \mathbf{p}(t_k + 0) \equiv \mathbf{p}^+(t_k), \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.2.44)$$

$$\mathbf{s}^-(t_k) \equiv \mathbf{s}(t_k - 0) = \mathbf{s}(t_k + 0) \equiv \mathbf{s}^+(t_k), \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.2.45)$$

3°. В точках приложения импульсов вектор $\mathbf{s}$ совпадает с единичным вектором импульса скорости:

$$\mathbf{s}(t_k) = \frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|} = \mathbf{e}_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.2.46)$$

4°а. Если моменты приложения импульсов t_k , $k = 2, 3, \dots, N-1$, не заданы, то гамильтониан (2.2.29) при переходе через импульс непрерывен:

$$H^-(t_k) \equiv H(t_k - 0) = H(t_k + 0) \equiv H^+(t_k). \quad (2.2.47)$$

Запишем условие (2.2.47) в более удобной для приложений форме. На основании (2.2.29), (2.2.44), (2.2.45) и (2.2.47) имеем

$$H_k^+ - H_k^- = (\mathbf{p}_k, \mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-) = (\mathbf{p}_k, \Delta \mathbf{V}_k) = 0. \quad (2.2.48)$$

Из (2.2.48) и (2.2.46) следует:

4°б. В момент внутреннего импульса векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ ортогональны:

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{s}_k) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.2.49)$$

Воспользовавшись уравнением (2.2.22), получим из (2.2.49)

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{s}_k) = - \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \Big|_{t_k}, \mathbf{s}_k \right) = - \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{s}, \mathbf{s})}{dt} \Big|_{t_k} = \left(s \frac{ds}{dt} \right) \Big|_{t_k} = 0. \quad (2.2.50)$$

Из (2.2.50) с учетом (2.2.46) и гладкости функции $s(t)$ следует:

4°в. В момент внутреннего импульса функция $s(t) = |\mathbf{s}(t)|$ достигает экстремума:

$$\dot{s}(t) \Big|_{t_k} = 0. \quad (2.2.51)$$

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности импульсной траектории в крайних точках траектории. Во-первых, из (2.2.34) при условии (2.2.40), как и при выводе (2.2.41), получим

$$\mathbf{s}_1^+ = \frac{\Delta \mathbf{V}_1}{|\Delta \mathbf{V}_1|} = \mathbf{e}_1, \quad (2.2.52)$$

$$\mathbf{s}_N^- = \frac{\Delta \mathbf{V}_N}{|\Delta \mathbf{V}_N|} = \mathbf{e}_N. \quad (2.2.53)$$

Поскольку условия $1^\circ - 4^\circ$, (2.2.52), (2.2.53) должны иметь место для любой системы вариаций, совместимой со связями, в дальнейшем полагаем их выполненными. В результате в выражении (2.2.34) для вариации δG останутся только члены, соответствующие вариациям фазовых координат в начальной и конечной точках траектории.

Во-вторых, из (2.2.31) и (2.2.34) с учетом (2.2.52), (2.2.53) получаем условие трансверсальности:

$$\delta\Delta V_1 + H_1^+ \delta t_1 - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) - (\mathbf{s}_1^+, \delta \mathbf{V}_1^-) + \delta\Delta V_N - H_N^- \delta t_N + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (\mathbf{s}_N^-, \delta \mathbf{V}_N^+) = 0. \quad (2.2.54)$$

Входящие в (2.2.54) вариации δt_1 , $\delta \mathbf{r}_1$, $\delta \mathbf{V}_1^-$ и δt_N , $\delta \mathbf{r}_N$, $\delta \mathbf{V}_N^+$ вычисляются с учетом принадлежности фазовых векторов $(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-)$ и $(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$ начальному M_1 (2.2.6) и конечному M_N (2.2.7) многообразиям. Вариации $\delta\Delta V_1$ и $\delta\Delta V_N$ определяются по формулам (2.2.35), (2.2.36). В общем случае системы вариаций фазовых координат в начальной и конечной точках связаны друг с другом и должны рассматриваться совместно (см. раздел 12.2.2).

Предположим теперь, что многообразия M_1 (2.2.6) и M_N (2.2.7) не связаны друг с другом, как и системы вариаций фазовых координат в начальной и конечной точках. При этом для получения необходимых условий оптимальности в начальной точке $t = t_1$ положим сначала

$$\delta t_N \equiv \delta \mathbf{r}_N \equiv \delta \mathbf{V}_N^+ \equiv 0. \quad (2.2.55)$$

Соотношение (2.2.54) с учетом (2.2.55) дает условие трансверсальности в начальной точке:

$$\delta\Delta V_1 + H_1^+ \delta t_1 - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) - (\mathbf{s}_1^+, \delta \mathbf{V}_1^-) = 0. \quad (2.2.56)$$

Аналогично, полагая в (2.2.54)

$$\delta t_1 \equiv \delta \mathbf{r}_1 \equiv \delta \mathbf{V}_1^+ \equiv 0, \quad (2.2.57)$$

получим в конечной точке траектории при $t = t_N$ условие трансверсальности

$$\delta\Delta V_N - H_N^- \delta t_N + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (\mathbf{s}_N^-, \delta \mathbf{V}_N^+) = 0. \quad (2.2.58)$$

Итак, необходимые условия оптимальности импульсных траекторий в начальной и конечной точках траектории при наличии импульсов скорости в этих точках на основании (2.2.52), (2.2.53), (2.2.54), (2.2.56), (2.2.58) формулируются следующим образом.

5°. Предельные значения вектора $\mathbf{s}$ справа в начальной точке и слева в конечной точке совпадают с единичными векторами

импульсов скорости:

$$s(t_1 + 0) = s_1^+ = \frac{\Delta \mathbf{V}_1}{|\Delta \mathbf{V}_1|} = \mathbf{e}_1, \quad (2.2.59)$$

$$s(t_N - 0) = s_N^- = \frac{\Delta \mathbf{V}_N}{|\Delta \mathbf{V}_N|} = \mathbf{e}_N. \quad (2.2.60)$$

6°. В начальной и конечной точках траектории выполняются условия трансверсальности:

в общем случае

$$\delta \Delta V_1 + H_1^+ \delta t_1 - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) - (s_1^+, \delta \mathbf{V}_1^-) + \delta \Delta V_N - \\ - H_N^- \delta t_N + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (s_N^-, \delta \mathbf{V}_N^+) = 0; \quad (2.2.61)$$

в случае независимости систем вариаций $\delta t_1, \delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{V}_1^-$ и $\delta t_N, \delta \mathbf{r}_N, \delta \mathbf{V}_N^+$

$$\delta \Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-) + H_1^+ \delta t_1 - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) - (s_1^+, \delta \mathbf{V}_1^-) = 0, \quad (2.2.62)$$

$$\delta \Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+) - H_N^- \delta t_N + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (s_N^-, \delta \mathbf{V}_N^+) = 0, \quad (2.2.63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1^+ &= H(t_1 + 0), \quad H_N^- = H(t_N - 0), \quad \mathbf{p}_1^+ = \mathbf{p}(t_1 + 0), \\ \mathbf{p}_N^- &= \mathbf{p}(t_N - 0). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.64)$$

С помощью функции Гамильтона (2.2.29) систему уравнений движения (2.1.22), (2.1.23) и сопряженную ей систему (2.2.21), (2.2.22) можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.2.65)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad (2.2.66)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.2.67)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}} \quad (2.2.68)$$

соответственно. В ньютоновском гравитационном поле система (2.1.18), (2.1.19) автономна, для нее на каждой кеплеровой дуге между k -м и $(k+1)$ -м импульсами имеет место первый интеграл (см. соотношение (П.54) Приложения)

$$H(t) = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \text{const} = C. \quad (2.2.69)$$

Поскольку функционал (2.2.12) не зависит от моментов приложения промежуточных импульсов t_k , $k = 2, 3, \dots, N-1$, имеет место непрерывность гамильтониана (2.2.47) и, следовательно, постоянная C в (2.2.69) одна и та же для любого $t \in (t_1, t_N)$.

Если моменты времени t_1 и (или) t_N не заданы и не связаны друг с другом, а ΔV_1 , ΔV_N в (2.2.12) и M_1 (2.2.6), M_N (2.2.7) не зависят от t_1 и t_N соответственно, то из (2.2.61) — (2.2.63) следует, что в (2.2.69) постоянная $C = 0$ и, следовательно, вдоль оптимальной импульсной траектории

$$H(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_N]. \quad (2.2.70)$$

Заметим, что непрерывность векторов сопряженных переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ вдоль оптимальной импульсной траектории (2.2.44), (2.2.45) следует, вообще говоря, из общих свойств этих векторов (1.2.68), (1.2.69).

Перейдем теперь к выводу необходимого условия оптимальности, связанного с установлением оптимального количества импульсов N на траектории. Предположим, что наряду с N -импульсной траекторией, для которой выполнены все выписанные ранее необходимые условия оптимальности, рассматривается близкая к ней $(N+1)$ -импульсная траектория (см. § 2.3), полученная из исходной траектории приложением на кеплеровой дуге между k -м и $(k+1)$ -м импульсами в момент $t \in (t_k, t_{k+1})$ в точке

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t)_N + \delta \mathbf{r}, \quad (2.2.71)$$

где $\mathbf{r}(t)_N$ — радиус-вектор аппарата на исходной N -импульсной траектории, малого импульса

$$\delta \Delta \mathbf{V} = \delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^-; \quad (2.2.72)$$

здесь $\delta \mathbf{V}^+$, $\delta \mathbf{V}^-$ — вариации вектора скорости аппарата $\mathbf{V}(t)_N$ на исходной N -импульсной траектории справа и слева от точки t соответственно (см. рис. 2.3.1). Вариацию характеристической скорости перелета в этом случае можно записать в виде

$$\delta G = \delta G_N + |\delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^-|, \quad (2.2.73)$$

где δG_N — вариация характеристической скорости на исходной N -импульсной траектории, определяемая соотношением (2.2.14). Учитывая, что вариация (2.2.72) является «вариацией в точке» (см. (2.2.27) при $\delta t_k = 0$), добавим к системе равенств (2.2.28) два аналогичных равенства на пассивных дугах (t_k, t) и (t, t_{k+1}) :

$$(\mathbf{p}_k^+, \delta \mathbf{r}_k) + (\mathbf{s}_k^+, \delta \mathbf{V}_k^+) - H_k^+ \delta t_k = (\mathbf{p}^-(t), \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}^-(t), \delta \mathbf{V}^-) = 0, \quad (2.2.74)$$

$$(\mathbf{p}^+(t), \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}^+(t), \delta \mathbf{V}^+) = (\mathbf{p}_{k+1}^-, \delta \mathbf{r}_{k+1}) + \\ + (\mathbf{s}_{k+1}^-, \delta \mathbf{V}_{k+1}^-) - H_{k+1}^- \delta t_{k+1} = 0. \quad (2.2.75)$$

Проделаем те же выкладки, что и при выводе соотношения

(2.2.34), получим

$$\delta G = \delta G_N + |\delta V^+ - \delta V^-| - (s^+(t), \delta V^+) + \\ + (s^-(t), \delta V^-) - (p^+(t) - p^-(t), \delta r), \quad (2.2.76)$$

где δG_N определяется выражением (2.2.34).

Поскольку исходная N -импульсная траектория удовлетворяет необходимым условиям оптимальности $1^\circ-6^\circ$, то $\delta G_N = 0$, а векторы $p(t)$, $s(t)$ и гамильтониан $H(t)$ непрерывны всюду на траектории. В результате для вариации δG из (2.2.76) получаем соотношение

$$\delta G = |\delta V^+ - \delta V^-| - (s(t), \delta V^+ - \delta V^-), \quad (2.2.77)$$

которое с учетом (2.2.72) перепишем в виде

$$\delta G = |\delta \Delta V| \left[1 - \left(s(t), \frac{\delta \Delta V}{|\delta \Delta V|} \right) \right]. \quad (2.2.78)$$

Из (2.2.78) следует, что если всюду на пассивных дугах исходной N -импульсной траектории

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in (t_1, t_2) \cup (t_2, t_3) \cup \dots \cup (t_{N-1}, t_N), \quad (2.2.79)$$

то исходная траектория локально не может быть улучшена добавлением $(N+1)$ -го достаточно малого импульса.

Если же на некотором промежутке Δt внутри j -й пассивной дуги

$$s(t) > 0, \quad t \in \Delta t \subset (t_j, t_{j+1}), \quad (2.2.80)$$

из (2.2.78), (2.2.80) следует, что, прикладывая при $\forall t \in \Delta t$ произвольный малый импульс $\delta \Delta V$, для которого

$$\left(s(t), \frac{\delta \Delta V}{|\delta \Delta V|} \right) > 1, \quad (2.2.81)$$

получим на основании (2.2.78), (2.2.81)

$$\delta G < 0, \quad (2.2.82)$$

т. е. с помощью такого импульса характеристическую скорость перелета можно уменьшить. Итак, если на исходной N -импульсной траектории имеет место (2.2.80), то эта траектория заведомо не является локально оптимальной, несмотря на выполнение на ней необходимых условий оптимальности $1^\circ-6^\circ$. Наконец, если в некоторой точке исходной траектории, отличной от точки приложения импульса, достигается

$$\max_{\{t \in \bigcup_k (t_k, t_{k+1})\}} s(t) = 1, \quad (2.2.83)$$

то, прикладывая в этой точке произвольный малый импульс $\delta \Delta V$,

получим на основании (2.2.78), (2.2.83)

$$\delta G \geq 0, \quad (2.2.84)$$

причем знак равенства в (2.2.84) достигается только при выполнении условия

$$\delta \Delta \mathbf{V} \parallel \mathbf{s}(t). \quad (2.2.85)$$

Следовательно, если в некоторой точке траектории имеет место (2.2.83), то импульс скорости, удовлетворяющий условию (2.2.85), не нарушает ее стационарности (т. е. равенства $\delta G = 0$). Заметим, что условия (2.2.83), (2.2.85) аналогичны условиям (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60). Проведенные рассуждения обобщаются на случай варьирования исходной N -импульсной траектории, если ввести любое фиксированное количество малых импульсов и применить неравенство (2.2.80) на нескольких участках траектории (подробнее см. § 2.3).

Поскольку на основании (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60) в точках приложения импульсов

$$s(t_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.86)$$

и на основании (2.2.51) функция $s(t)$ в точках приложения

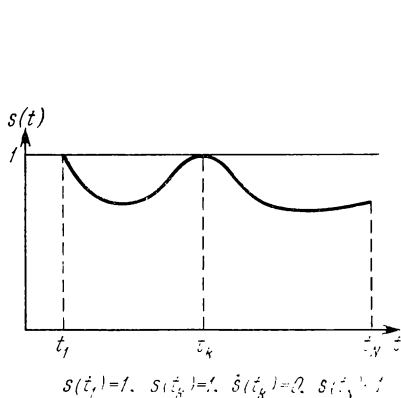


Рис. 2.2.1.

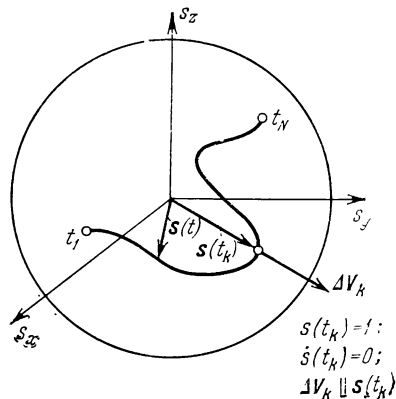


Рис. 2.2.2.

внутренних импульсов достигает экстремума, с учетом неравенства (2.2.79) и соотношений (2.2.83)—(2.2.85) получаем следующее условие строгой локальной оптимальности импульсного перелета (рис. 2.2.1):

7°. Всюду на оптимальной импульсной траектории модуль вектора $\mathbf{s}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$s(t) = |\mathbf{s}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [t_1, t_N]. \quad (2.2.87)$$

В моменты приложения импульсов t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, функция $s(t)$ достигает максимума:

$$s(t_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.88)$$

Всюду на пассивных дугах оптимальной траектории должно выполняться неравенство

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in \bigcup_{k=1}^{N-1} (t_k, t_{k+1}). \quad (2.2.89)$$

Условия (2.2.87) — (2.2.89) означают, что годограф вектора $s(t) = \{s_x(t), s_y(t), s_z(t)\}$ (рис. 2.2.2) представляет гладкую кривую ($s(t) \in C_2[t_1, t_N]$), заключенную внутри сферы единичного радиуса. В моменты приложения внутренних оптимальных импульсов годограф касается сферы. Если импульсы прикладываются в начальной и (или) конечной точках перелета, то годограф $s(t)$ начинается и (или) кончается на единичной сфере, вообще говоря, не касаясь сферы в точках подхода к ней (см. раздел 2.2.3).

Отметим «односторонний» характер полученного критерия, позволяющего судить о неоптимальности исходной N -импульсной траектории и целесообразности перехода к траектории с большим количеством импульсов. Эта особенность полученного критерия определяется существом дела. Действительно, чтобы судить о целесообразности уменьшения количества импульсов на траектории, надо в одной из точек приложения импульса с помощью вариации вектора скорости справа и слева уменьшить величину этого импульса и оценить влияние этой вариации на функционал G . В результате придем к очевидному результату — любая вариация импульса, удовлетворяющего необходимому условию оптимальности, не может привести к уменьшению функционала G . Следовательно, уменьшения функционала можно достичь, рассматривая вариации скорости аппарата только на пассивных участках, т. е. сравнивая исходную траекторию с траекторией с большим количеством импульсов.

Полученные условия 1° — 7° представляют полную совокупность необходимых условий строгой локальной оптимальности импульсных перелетов. Заметим, что условия 2° (2.2.44), (2.2.45), 3° (2.2.46), 5° (2.2.59), (2.2.60), 7° (2.2.87), (2.2.88), (2.2.89) идентичны соответствующим условиям Лоудена, полученным для введенного им вектора u, v (см. раздел 2.1.2).

Проведенное выше рассмотрение относится к определенному выбору фазовых координат аппарата: радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{V}$ заданы своими проекциями на оси некоторой инерциальной прямоугольной декартовой системы координат. Покажем теперь, что оно справедливо для широкого класса систем координат, в которых вектор скорости аппарата в каждой точке

траектории задается своими проекциями на три взаимно ортогональных направления. Тройка фазовых координат, определяющих радиус-вектор аппарата, может быть достаточно произвольна и должна удовлетворять обычным требованиям, накладываемым на связи этих координат с декартовыми прямоугольными координатами (взаимная однозначность и непрерывная дифференцируемость, см. Л. Д. Кудрявцев [1], т. II). К такому классу систем координат относятся, в частности, цилиндрическая, сферическая и естественная системы координат, т. е. все основные системы координат, используемые в механике. Для указанного класса систем функционал (2.2.12) сохраняет свою структуру: для внутренних импульсов он зависит лишь от проекций разности векторов $V_k^+ - V_k^-$ и не содержит фазовых координат, определяющих положение аппарата. Обозначим, как и ранее, векторы, сопряженные с g и V , через p и s . Основываясь на указанной специальной структуре функционала (2.2.12), можно аналогично тому, как это сделано выше, показать, что для векторов p и s и соответствующего гамильтониана H сохраняются условия 2° (2.2.44), (2.2.45) и 4°а (2.2.47) непрерывности p , s и H в точках приложения внутренних импульсов, геометрическая интерпретация вектора s в момент приложения импульса 3° (2.2.46), 5° (2.2.59), (2.2.60), соотношение (2.2.78) и следующие из него условия 7° (2.2.87) — (2.2.89) строгой локальной оптимальности импульсной траектории. Если выбранная система координат такова, что вектор $\frac{ds}{dt}$ остается непрерывным при переходе через импульс, то из (2.2.87), (2.2.88) следует, что в момент приложения внутренних импульсов выполняется условие 4°в (2.2.51).

Изложенная выше схема вывода необходимых условий оптимальности в основном соответствует использованной в работе С. В. Дубовского [1]. Приведенные выше условия 1°—5° содержатся в этой работе. Дополнительно к полученным там результатам выше подробно рассмотрены условия трансверсальности в рамках ММСВ (условие 6°) и дан корректный анализ поведения функции $s(t)$ на оптимальной импульсной траектории (условие 7°).

2.2.2. Вывод необходимых условий оптимальности из условий оптимальности переплетов с конечной тягой. Рассмотрим оптимальную траекторию КА для конечной тяги с N активными участками. Положим на k -м активном участке в соответствии с (2.1.16), (2.1.17)

$$\frac{T_k}{m(t)} = \frac{\Delta V_k}{\Delta t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.90)$$

и получим соотношения, определяющие оптимальную траекторию при $\max \Delta t_k \rightarrow 0$.

Обозначим начальный и конечный моменты времени через t_i и t_f . Рассмотрим k -й активный участок $[t_k^-, t_k^+]$, расположенный внутри промежутка $[t_i, t_f]$, считая длительность активного участка

$$\Delta t_k = t_k^+ - t_k^- \quad (2.2.91)$$

малой величиной.

На рис. 2.2.3, а показан один из возможных видов функции переключения (1.2.35) для траектории с двумя активными участками. Из условия

$$\vartheta(t_k^-) = \vartheta(t_k^+) = 0 \quad (2.2.92)$$

и из рассмотрения, проведенного в разделе 1.2.3, следует, что на активном участке оптимальной траектории $\vartheta(t) \in C_\infty[t_k^-, t_k^+]$ и

$$\vartheta(t) = \vartheta(\Delta t_k^2) \quad \text{при} \quad t \in [t_k^-, t_k^+]. \quad (2.2.93)$$

Подставляя (2.2.90) и (2.2.93) в (1.2.38), получаем

$$\frac{dp_q}{dt} = O(\Delta t_k) \quad \text{при} \quad t \in [t_k^-, t_k^+]. \quad (2.2.94)$$

Если 1-й и N -й активные участки примыкают к началу и концу траектории, то в общем случае

$$\vartheta(t) = O(\Delta t_1) \quad \text{для} \quad t \in [t_i \equiv t_1^-, t_1^+], \quad (2.2.95)$$

$$\vartheta(t) = O(\Delta t_N) \quad \text{для} \quad t \in [t_N^-, t_f \equiv t_N^+]. \quad (2.2.96)$$

и соответственно

$$\frac{dp_q}{dt} = O(1), \quad t \in [t_i, t_1^+] \cup [t_N^-, t_f]. \quad (2.2.97)$$

Рассмотрим предельный переход при $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ в уравнениях (1.2.75), (1.2.76) и (1.2.38) для p , s и p_q .

Поскольку, как следует из (2.1.11), $\mathbf{r} \in C_0[t_i, t_f]$, а правые части уравнений (1.2.75) и (1.2.76) при условиях (2.2.1), которые предполагаются выполненными, не содержат никаких особенностей, связанных с предельным переходом, уравнения (1.2.75) и (1.2.76) сохраняют свой вид и в импульсном случае (см. условие 1° в разделе 2.2.1). Из условий Вейерштрасса — Эрдмана (1.2.42), (1.2.43) и сказанного следует, что для импульсных перелетов $\mathbf{p} \in C_1[t_i, t_f]$, $s \in C_2[t_i, t_f]$ (см. отношения (1.2.68), (1.2.69) раздела 1.2.3). Из соотношений (2.2.94) и

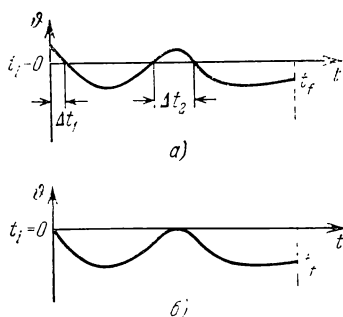


Рис. 2.2.3.

(2.2.97) с учетом (1.2.41) вытекает

$$p_q = -1 + O(\Delta t_1) + O(\Delta t_N) + \sum_{k=2}^{N-1} O(\Delta t_k^2). \quad (2.2.98)$$

откуда при $\Delta t_k \rightarrow 0$

$$p_q = -1 \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (2.2.99)$$

Рассмотрим гамильтониан (1.2.74), который с учетом (1.2.34), (1.2.35) запишем в виде

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)) + n_* \frac{T}{m} \vartheta. \quad (2.2.100)$$

Переходя в (2.2.100) к пределу при $\max \Delta t_k \rightarrow 0$, $k = 2, \dots, N-1$, получим с учетом (2.2.90), (2.2.93)

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)) \quad \forall t \in [t_2^-, t_{N-1}^+]. \quad (2.2.101)$$

Совершая формально аналогичный предельный переход для активных участков, примыкающих к концам траектории, получим на основании (2.2.90), (2.2.95), (2.2.96)

$$H_i^- = H(t_i - 0) = [(\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t))]_{t_i - 0} + O(1), \quad (2.2.102)$$

$$H_f^+ = H(t_f + 0) = [(\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t))]_{t_f + 0} + O(1). \quad (2.2.103)$$

Но, как показано в разделе 2.2.1, в случае импульсных перелетов сопряженные переменные вводятся для связи вариаций фазовых координат только на участках $[t_k^+, t_{k+1}^-]$. При этом предельные значения сопряженных переменных при $t_i - 0$, $t_f + 0$ не рассматриваются, следовательно, не рассматриваются и предельные значения H_i^- (2.2.102) и H_f^+ (2.2.103). Поскольку

$$T(t_1^+ + 0) = 0, \quad T(t_N^- - 0) = 0, \quad (2.2.104)$$

имеем

$$H_1^+ = H(t_1^+ + 0) = [(\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t))]_{t_1^+ + 0}, \quad (2.2.105)$$

$$H_N^- = H(t_N^- - 0) = [(\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t))]_{t_N^- - 0}. \quad (2.2.106)$$

С учетом (2.2.104) и (2.2.105), (2.2.106) получаем

$$H(t) = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) + (\mathbf{s}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)) \quad \forall t \in [t_i, t_f], \quad (2.2.107)$$

причем на основании условия Вейерштрасса — Эрдмана (1.2.45) гамильтониан $H(t)$ непрерывен всюду на траектории, в частности (см. (2.2.47)),

$$H(t_k^-) = H(t_k^+). \quad (2.2.108)$$

Функция переключения (1.2.35) для импульсных перелетов с учетом (2.2.99) записывается в виде

$$\vartheta = s - 1. \quad (2.2.109)$$

Наличие интеграла (2.2.99) и запись функции переключения в виде (2.2.109) фактически исключают переменную p_q из дальнейшего рассмотрения. При $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ функция переключения Φ из показанной на рис. 2.2.3, а переходит непрерывно в показанную на рис. 2.2.3, б. Обозначая через t_k точки приложения импульсов, получаем (см. (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60))

$$s(t_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.110)$$

Поскольку $s \in C_2[t_i, t_f]$, из геометрических соображений следует, что для внутренних импульсов (см. (2.2.51))

$$\dot{s}(t_k) = 0, \quad k = 2, \dots, N-1; \quad (2.2.111)$$

что касается крайних точек, то здесь в общем случае

$$\dot{s}(t_i) \neq 0, \quad \dot{s}(t_f) \neq 0. \quad (2.2.112)$$

Оптимальная ориентация импульса определяется по-прежнему соотношением (1.2.34) (см. (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60)).

Из (2.2.109), (2.2.110), (2.2.111) предельным переходом получаем (см. рис. 2.2.3), что для оптимальных импульсных перелетов имеют место неравенства (2.2.87), (2.2.89):

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in (t_k^+, t_{k+1}^-), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.2.113)$$

Таким образом, полученное выше условие 7° строгой локальной оптимальности импульсных перелетов (см. соотношения (2.2.87) — (2.2.89)) эквивалентно условию максимума гамильтониана на оптимальном управлении, позволяющем среди всех стационарных управлений выделить управление, доставляющее минимум функционалу.

При предельном переходе в условии трансверсальности (1.2.40) следует учесть, что

1) переменные p_q и q уже исключены из рассмотрения (см. соотношения (2.1.20) и (2.2.99));

2) вектор $\mathbf{g}$ непрерывен в точках t_i и t_f ;

3) вектор $\mathbf{V}$ рассматривается на начальном и конечном многообразиях до и после импульса соответственно, т. е. в (1.2.40) надо подставить $\mathbf{V}^-(t_i) = \mathbf{V}(t_i - 0)$ в начальной точке и $\mathbf{V}^+(t_f) = \mathbf{V}(t_f + 0)$ в конечной точке;

4) для сопряженных переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ и гамильтониана в точках t_i и t_f надо брать, на основании сказанного выше, предельные значения справа и слева соответственно.

В результате для функционала (2.2.12) приходим к условиям трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63) в начальной и конечной точках.

Поскольку переменные q и p_q исключаются из рассмотрения, соответствующая краевая задача для оптимальных импульсных перелетов имеет 12-й порядок (по числу компонент векторов $\mathbf{g}$,

V, p и s) вместо 14-го для конечной тяги (см. конец раздела 1.2.3). Методы решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов подробно рассмотрены в § 3.3.

Другой вывод необходимых условий оптимальности импульсных перелетов из условий оптимальности перелетов с конечной тягой, основанный на разложении последних в ряд по степеням малого параметра $\sum_{k=1}^N \Delta t_k$ и предельном переходе при $\sum_{k=1}^N \Delta t_k \rightarrow 0$, приведен в книге В. С. Новоселова [1].

2.2.3. Условия трансверсальности при оптимальном выборе начальной или конечной точки перелета. Принцип окаймления. Рассмотрим условия трансверсальности (2.2.62), (2.2.63) для задач оптимизации импульсных перелетов в ньютоновском гравитационном поле при старте КА с заданной орбиты ИС или выходе на заданную орбиту ИС. Подробно одна из таких задач рассмотрена в гл. X. Будем считать, что

1) момент старта с орбиты t_1 и (или) момент выхода на орбиту t_N не заданы и подлежат определению из условий оптимальности перелета (2.2.59) — (2.2.63),

2) функционал (2.2.12) задачи имеет вид

$$G = \sum_k \Delta V_k, \quad (2.2.114)$$

3) краевые условия таковы, что $H^+(t_1) = 0$ или $H^-(t_N) = 0$ (см. §§ 3.2, 10.4).

Рассмотрим для определенности задачу о старте КА с заданной орбиты ИС. В начальный момент времени $t_1 = 0$ до импульса должны выполняться условия

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{p}(t_1), \quad (2.2.115)$$

$$\mathbf{V}^-(t_1) \equiv \mathbf{V}(t_1 - 0) = \mathbf{p}(t_1), \quad (2.2.116)$$

где $\mathbf{p}$ — радиус-вектор точки на орбите ИС.

Пусть орбита ИС задана тремя ортами, характеризующими ее ориентацию, фокальным параметром p и эксцентриситетом e (см. § 10.1). Задачу рассматриваем в безразмерном виде, относя все линейные размеры к

$$R_* = p, \quad (2.2.117)$$

а скорости — к

$$V_* = \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \quad (2.2.118)$$

где μ — гравитационная постоянная планеты.

Правую ортогональную систему планетоцентрических координат $Oxyz$ выберем так, чтобы ось x была направлена в перигейс центр орбиты ИС, ось z была параллельна моменту количества движения ИС (см. раздел 10.1.2).

На основании предположения 3) $H^-(t_N) = 0$ и из (2.2.70)

$$H^+(t_1) \equiv H(t_1 + 0) = (\mathbf{p}^+, \mathbf{V}^+) \big|_{t_1} - \left(\mathbf{s}^+, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \bigg|_{t_1} = 0. \quad (2.2.119)$$

В этом случае для функционала (2.2.114) с учетом (2.2.119) условие трансверсальности (2.2.62) записывается в виде

$$(\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) + (\mathbf{s}_1^+, \delta \mathbf{V}_1^-) = 0. \quad (2.2.120)$$

Из (2.2.120), (2.2.115) и (2.2.116) получаем

$$(\mathbf{p}^+, \delta \mathbf{\rho}) \big|_{t_1} + (\mathbf{s}^+, \delta \dot{\mathbf{\rho}}) \big|_{t_1} = 0. \quad (2.2.121)$$

Запишем с учетом (2.2.115), (2.2.116) гамильтониан (2.2.29) для $\mathbf{p}^+(t_1)$, $\mathbf{s}^+(t_1)$, $\mathbf{V}_1^-$:

$$H(\mathbf{p}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{r}, \mathbf{V}^-) \big|_{t_1} = (\mathbf{p}^+, \dot{\mathbf{\rho}}) \big|_{t_1} - \left(\mathbf{s}^+, \frac{\mathbf{p}}{\rho^3} \right) \bigg|_{t_1}. \quad (2.2.122)$$

Входящие в (2.2.121) и (2.2.122) векторы $\mathbf{\rho}$, $\dot{\mathbf{\rho}}$, $\delta \mathbf{\rho}$, $\delta \dot{\mathbf{\rho}}$ удобно выразить в виде функций истинной аномалии η точки на орбите ИС. В рассматриваемой системе координат (см. § 10.4)

$$\mathbf{\rho} = \left\{ \frac{\cos \eta}{1 + e \cos \eta}, \frac{\sin \eta}{1 + e \cos \eta}, 0 \right\}_{\eta=\eta_1}, \quad (2.2.123a)$$

$$\dot{\mathbf{\rho}} = \{ -\sin \eta, e + \cos \eta, 0 \}_{\eta=\eta_1}, \quad (2.2.123b)$$

$$\delta \mathbf{\rho} = \left\{ -\frac{\sin \eta}{(1 + e \cos \eta)^2}, \frac{e + \cos \eta}{(1 + e \cos \eta)^2}, 0 \right\}_{\eta=\eta_1} \delta \eta, \quad (2.2.124a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{\rho}} = \{ -\cos \eta, -\sin \eta, 0 \}_{\eta=\eta_1} \delta \eta. \quad (2.2.124b)$$

Подставляя (2.2.123) в (2.2.122) и (2.2.124) в (2.2.121), замечаем, что правая часть равенства (2.2.122) с точностью до множителя $\frac{\delta}{(1 + e \cos \eta)^2}$ совпадает с равенством (2.2.121), следовательно,

$$H(\mathbf{p}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{r}, \mathbf{V}^-) \big|_{t_1} = (\mathbf{p}^+, \mathbf{V}^-) \big|_{t_1} - \left(\mathbf{s}^+, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \bigg|_{t_1} = 0. \quad (2.2.125)$$

Вычитая (2.2.125) из (2.2.119) и повторяя выкладки (2.2.48) — (2.2.51) (с заменой $\mathbf{p}_k$ на $\mathbf{p}_1^+$ и $\mathbf{s}_k$ на $\mathbf{s}_1^+$) с учетом (2.2.52), получим

$$\dot{\mathbf{s}}^+(t_1) = \frac{d\mathbf{s}(t)}{dt} \bigg|_{t_1+0} = 0. \quad (2.2.126)$$

Более общий вывод соотношения (2.2.126), не использующий предположения 3), дан в разделе 2.3.3 (пример 2°).

Сравнивая (2.2.52), (2.2.126) с (2.2.46), (2.2.51), приходим к следующему результату.

Если траектория оптимального импульсного перелета начинается и (или) кончается в выбираемых оптимально точках на орбитах ИС и начальный и (или) конечный моменты времени перелета не заданы, то годограф вектора $s(t)$ в точках t_1 и (или) t_N касается единичной сферы. Функция $s(t)$ и функция переключения ϑ (2.2.109) в начальной и (или) конечной точке ведут себя аналогично поведению этих функций в точках внутренних импульсов (рис. 2.2.4). Условия трансверсальности

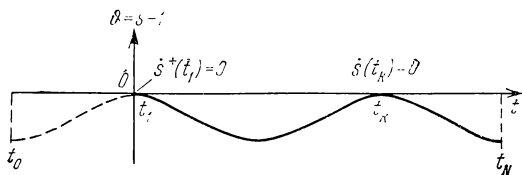


Рис. 2.2.4.

(2.2.62), (2.2.63) в крайних точках эквивалентны условиям (2.2.126) и (или)

$$\dot{s}^-(t_N) = \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t_N-0} = 0 \quad (2.2.127)$$

соответственно.

Полученному результату можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим для определенности оптимальный перелет из оптимальной точки I на орбите ИС в точку N на некотором конечном многообразии (рис. 2.2.5). Этому перелету соответствует оптимальная продолжительность $t_{1N} = t_N - t_1$. Пусть заданная продолжительность перелета

$$t_{0N} > t_{1N}. \quad (2.2.128)$$

Тогда оптимальным является перелет, состоящий из движения по начальной орбите в течение промежутка времени $t_{0N} - t_{1N}$ от точки O до оптимальной точки схода I и по найденной ранее оптимальной траектории перелета IN , поскольку при условии

(2.2.128) для соответствующих функционалов

$$G(t_{0N}) \geq G(t_{1N}) = \inf G(t_{0N}) \quad \forall t_{0N} \geq t_{1N}. \quad (2.2.129)$$

Таким образом, в оптимальной импульсной траектории при условии (2.2.128) к ранее найденной траектории добавляется пассивный участок перед импульсом на орбите (рис. 2.2.4), при этом импульс схода с орбиты оказывается внутренним и для

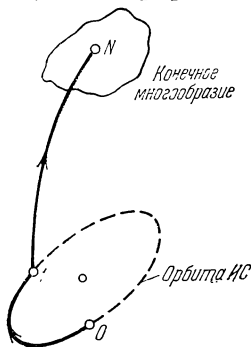


Рис. 2.2.5.

него имеет место соотношение (2.2.51). Поскольку все построение справедливо для $\forall t_{0N} \geq t_{1N}$, в пределе при $t_{0N} \rightarrow t_{1N}$ с учетом непрерывности $s(t)$ и $p(t)$ получаем (2.2.126).

Проведенный выше анализ справедлив и в случае оптимальных перелетов с конечной тягой. При старте из оптимальной точки орбиты ИС, аналогично (2.2.124), имеем условие трансверсальности (см. (1.2.40)), откуда для функционала $G = q$,

$$(p, \delta p)|_{t_i} + (s, \delta p)_{t_i} = 0. \quad (2.2.130)$$

Сравнивая (2.2.130) с гамильтонианом (1.2.27) для оптимального перелета в начальной точке

$$H(t_i) = \left[(p, \dot{p}) - \left(s, \frac{p}{\rho^3} \right) + n_* \frac{T}{m} \vartheta \right]_{t_i}, \quad (2.2.131)$$

с учетом (2.2.123), (2.2.124) и условия (1.2.47) получим

$$H(t_i) = n_* \frac{T}{m} \vartheta(t_i) = 0. \quad (2.2.132)$$

Аналогичный результат получается и в конечной точке при оптимальном выходе на орбиту ИС. Поскольку величина тяги T связана с функцией переключения соотношениями (1.2.36), из (2.2.132) следует, что при оптимальном старте с орбиты ИС или выходе на орбиту ИС функция переключения (1.2.35) удовлетворяет неравенствам

$$\vartheta(t_i) \leq 0, \quad (2.2.133)$$

$$\vartheta(t_f) \leq 0, \quad (2.2.134)$$

Таким образом, если начальный t_i или конечный t_f моменты времени не заданы, а выбираются оптимально, то движение КА начинается или кончается пассивным участком либо оптимальные

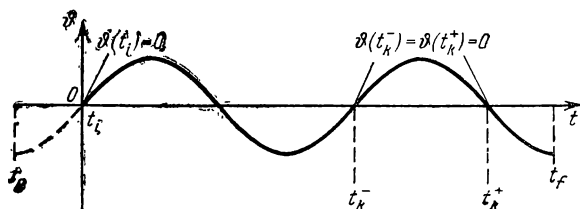


Рис. 2.2.6.

значения t_i , t_f являются нулями функции переключения ϑ (рис. 2.2.6). При этом остается в силе данная выше геометрическая интерпретация структуры оптимальной траектории при условии (2.2.128).

Основываясь на данной выше геометрической интерпретации структуры оптимальной траектории при оптимальном выборе начальной и (или) конечной точек на орбитах ИС при незаданной продолжительности перелета, назовем полученный результат *принципом окаймления*.

Для отдельных задач плоских импульсных перелетов соотношения (2.2.126), (2.2.127) получены С. В. Дубовским [1].

Данная выше геометрическая интерпретация позволяет утверждать, что принцип окаймления в более широком понимании справедлив для определенного класса задач оптимизации траекторий динамических систем. Рассмотрим динамическую систему, которую надо перевести с некоторого начального многообразия на некоторое конечное многообразие при незаданном времени перехода, доставляя экстремум некоторому функционалу. Начальная и конечная точки выбираются оптимально. Пусть начальное и (или) конечное многообразия представляют траектории пассивного движения системы, а рассматриваемая система такова, что она может двигаться по этим многообразиям неограниченно долго без затраты ресурсов управления. В этом случае справедлива данная выше геометрическая интерпретация принципа окаймления. В результате для систем с непрерывными фазовыми координатами структура оптимальной траектории и решения сопряженной системы в крайних точках траектории оказываются аналогичными структуре оптимальной траектории и решению сопряженной системы в начале и конце внутреннего «активного» участка, а для систем с разрывными фазовыми координатами — в точке внутреннего скачка фазовых координат.

В частности, для систем, линейных по управлению, свойства функции переключения в концах внутренних активных участков и выбираемых оптимально начальной и конечной точках траектории должны быть одинаковыми.

На практике принцип окаймления может быть эффективно использован при записи и анализе условий оптимальности, в частности условий трансверсальности, для указанного выше класса задач оптимизации траекторий динамических систем. Пристыковывание начального и (или) конечного пассивных участков к траектории с оптимально выбираемыми начальной и (или) конечной точками может быть использовано при численном решении задачи оптимизации с помощью градиентных методов для сведения задачи со свободными концами к задаче с фиксированными концами (О'Мэхони, Беннет, Эскридж [4]).

2.2.4. Траектории, проходящие через бесконечно удаленную точку. Рассмотрим случай, когда оптимальная траектория в ньютоновском гравитационном поле проходит через бесконечно удаленную точку. Поскольку все полученные ниже результаты справедливы для любой параболической или гиперболической дуги,

один из концов которой находится в бесконечности, будем, без ограничения общности, считать, что на траектории имеется лишь одна бесконечно удаленная точка, т. е. траектория перелета начинается или кончается в бесконечности. Будем для определенности полагать, что аппарат удаляется от центра тяготения в бесконечность, т. е. что одновременно

$$r \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2.135)$$

Обращая движение по траектории, можно перенести все полученные ниже результаты и на случай начала движения аппарата из бесконечно удаленной точки. Из (2.2.135) следует, что оптимальные перелеты, проходящие через бесконечно удаленную точку, могут, очевидно, возникать только в задачах оптимизации с незаданной продолжительностью перелета.

Поскольку для фазовых координат на кеплеровой дуге условие (2.2.135) не приводит к каким-либо особенностям (см. разделы 1.1.1, 1.1.2), рассмотрим особенности, возникающие при этом в решении сопряженной системы уравнений (2.2.21а), (2.2.22).

Предположим, что соответствующая фазовая траектория во всех конечных точках удовлетворяет условиям строгой локальной оптимальности (см. раздел 2.2.1). Для любой фазовой траектории, удовлетворяющей этому предположению, модуль сопряженного вектора $s(t)$ должен быть ограничен при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$:

$$s(t) = |s(t)| \leq M < \infty \quad \forall t \geq T, \quad (2.2.136)$$

где T — заданное положительное сколь угодно большое число, M — некоторая положительная постоянная. В самом деле, если (2.2.136) не имеет места, то существует конечное значение t_* такое, что

$$s(t_*) > 1, \quad (2.2.137)$$

т. е. рассматриваемая траектория не может, вопреки сделанному предположению, быть строго локально оптимальной.

Покажем, что из ограниченности $s(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и уравнений (2.2.21а), (2.2.22) следует, что существуют

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0, \quad (2.2.138)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_\infty. \quad (2.2.139)$$

При условии (2.2.136) для достаточно больших r из (2.2.21а) следует:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.2.140)$$

Здесь и далее символ $O(x^\alpha)$, $\alpha > 0$, означает, что соответствующая бесконечно малая величина стремится к нулю не медленнее,
 7*

чем x^α при $x \rightarrow 0$. Поскольку при достаточно больших r для параболической дуги

$$t = O(r^{3/2}), \quad e = 1, \quad (2.2.141)$$

и для гиперболической дуги

$$t = O(r), \quad e > 1, \quad (2.2.142)$$

из (2.2.140) — (2.2.142) для достаточно больших t получаем

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{t^{9/2}}\right) & \text{для параболы,} \\ O\left(\frac{1}{t^3}\right) & \text{для гиперболы.} \end{cases} \quad (2.2.143)$$

Интегрируя (2.2.21а) с учетом (2.2.143), имеем при достаточно больших t

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_\infty + \begin{cases} O\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right) & \text{для параболы,} \\ O\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{для гиперболы,} \end{cases} \quad (2.2.144)$$

где $\mathbf{p}_\infty$ — некоторый постоянный вектор.

Подставляя (2.2.144) в уравнение (2.2.22) и интегрируя по t , получаем при достаточно больших t

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_\infty - \mathbf{p}_\infty t + \begin{cases} O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right) & \text{для параболы,} \\ O\left(\frac{1}{t}\right) & \text{для гиперболы,} \end{cases} \quad (2.2.145)$$

где $\mathbf{s}_\infty$ — некоторый постоянный вектор.

Но из (2.2.145) следует, что для ограниченности $\mathbf{s}(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ должно быть

$$\mathbf{p}_\infty = 0. \quad (2.2.146)$$

На основании (2.2.144) — (2.2.146) получаем (2.2.138), (2.2.139).

Поскольку во всех конечных точках рассматриваемой фазовой траектории выполняется условие (2.2.87), вектор $\mathbf{s}_\infty$ удовлетворяет условию

$$|\mathbf{s}_\infty| = s_\infty \leq 1. \quad (2.2.147)$$

Если

$$s_\infty = 1, \quad (2.2.148)$$

то функция $\mathbf{s}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к $\mathbf{s}_\infty = 1$, оставаясь меньше 1. В этом случае для достаточно больших $t > T$

$$s_\infty = \max_{\{t > T\}} s(t), \quad (2.2.149)$$

где T — некоторое заданное достаточно большое положительное число такое, что на промежутке $[T, \infty)$ нет импульсов.

Более точно предельная величина s_∞ (для ньютоновского гравитационного поля) будет указана в разделе 3.2.3. В частности, там будет показано (см. соотношение (3.2.60)), что для параболической дуги всегда

$$s_\infty = 0. \quad (2.2.150)$$

Проведенный анализ поведения решения сопряженной системы при $r \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ позволяет обобщить все полученные ранее в разделе 1.2.3 и в предыдущих разделах гл. II результаты на случай импульсных траекторий, проходящих через бесконечно удаленную точку и удовлетворяющих во всех конечных точках условиям строгой локальной оптимальности. Из существования при $r \rightarrow \infty$ предельных значений $\mathbf{p}_\infty$ и s_∞ и непрерывности функций $\mathbf{p}$ и s в точке $r = \infty$ следует, что всюду на такой траектории функции $\mathbf{p}(t)$ и $s(t)$ обладают такой же степенью гладкости, что и установленная в разделе 1.2.3 (см. соотношения (1.2.68), (1.2.69)). Более того, поскольку даже при наличии разрыва вектора скорости аппарата в бесконечно удаленной точке (см. ниже) согласно (1.2.53) существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = 0, \quad (2.2.151)$$

на последней кеплеровой дуге, уходящей в бесконечность, всегда, в отличие от (1.2.68), (1.2.69),

$$\mathbf{p}(t) \in C_2(t_N, \infty), \quad (2.2.152)$$

$$s(t) \in C_3(t_N, \infty), \quad (2.2.153)$$

где t_N — момент приложения импульса в находящейся на конечном расстоянии точке этой кеплеровой дуги.

Перейдем теперь к обобщению на рассматриваемый класс траекторий необходимых условий оптимальности импульсного перелета. Из (2.2.138), (2.2.139) и существования предельных значений фазовых переменных при $r \rightarrow \infty$ на основании (2.2.29) получаем, что

$$H_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} H = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[(\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(s, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] = 0, \quad (2.2.154)$$

и из условия непрерывности гамильтониана всюду на траектории, включая и точку $r = \infty$, получаем всюду на траектории $H = 0$ (см. (2.2.70)).

Допустим теперь, что рассматривается фазовая траектория, во всех конечных точках которой выполняются условия строгой локальной оптимальности и, следовательно, имеют место соотношения (2.2.138), (2.2.139) и в бесконечно удаленной точке которой приложен импульс $\Delta \mathbf{V}_\infty$.

Фазовое состояние аппарата в бесконечно удаленной точке гиперболической дуги характеризуется его вектором скорости движения по асимптоте гиперболы до импульса V_{∞}^{-} и после импульса V_{∞}^{+} . В случае параболы $V_{\infty}^{-} = 0$ и направление движения аппарата до импульса не определено, после же конечного импульса аппарат переходит на асимптоту некоторой гиперболы, характеризующую вектором V_{∞}^{+} . На основании сказанного условие (2.2.7) попадания траектории на заданное конечное многообразие M_{∞} можно записать в виде

$$V_{\infty}^{+} \in M_{\infty}. \quad (2.2.155)$$

Характеристическая скорость для рассматриваемых траекторий дается функционалом (2.2.12) при

$$\Delta V_N \equiv 0. \quad (2.2.156)$$

В основе всех рассмотрений в разделе 2.2.1 лежат соотношения (2.2.23), которые при установленной непрерывности $p(t)$, $s(t)$ и $H(t)$ в точке $r = \infty$ справедливы и для кеплеровой дуги, проходящей через бесконечно удаленную точку. Повторяя почти дословно все рассуждения, проведенные в разделе 2.2.1 при выводе необходимых условий оптимальности, получим для рассматриваемой траектории с импульсом в бесконечно удаленной точке все необходимые условия оптимальности 1°, 2° (2.2.44), (2.2.45), 3° (2.2.46), 4° (2.2.47) — (2.2.51), 5° (2.2.59), 6° (2.2.62).

Условие оптимальности импульса в бесконечно удаленной точке запишется в виде, аналогичном (2.2.60):

$$s_{\infty} = \frac{\Delta V_{\infty}}{|\Delta V_{\infty}|} = e_{\infty}, \quad (2.2.157)$$

откуда

$$s_{\infty} = |s_{\infty}| = 1. \quad (2.2.158)$$

Из непрерывности гамильтониана $H(t)$ в точке $r = \infty$ и (2.2.157), как и при выводе (2.2.51), получим

$$\dot{s}_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0, \quad (2.2.159)$$

что, очевидно, следует из (2.2.138).

Переходя в (2.2.63) к пределу, с учетом (2.2.138), (2.2.139), (2.2.154), (2.2.156) получим условие трансверсальности в бесконечно удаленной точке:

$$(s_{\infty}, \delta V_{\infty}^{+}) = 0, \quad (2.2.160)$$

где δV_{∞}^{+} вычисляется с учетом связи (2.2.155).

В рассматриваемом случае выполняется и принцип окаямления. Чтобы показать это, рассмотрим задачу с краевым условием

(2.2.155) в виде

$$\mathbf{V}_{\infty}^{+} = \mathbf{V}_{\infty}^{*} = \text{const.} \quad (2.2.161)$$

Тогда

$$\delta \mathbf{V}_{\infty}^{+} = 0 \quad (2.2.162)$$

и условие (2.2.160) удовлетворяется при любом векторе $\mathbf{s}_{\infty}$. Но многообразию (2.2.161) на бесконечном удалении от центра тяготения соответствует сколь угодно длительное движение аппарата без затраты топлива по вырожденной кеплеровой дуге — прямой с направляющим вектором $\mathbf{V}_{\infty}^{+}$, являющейся асимптотой некоторой гиперболы. Следовательно, к рассматриваемой траектории применим принцип окаймления. Таким образом, бесконечно удаленная точка с импульсом в ней всегда может считаться «внутренней» точкой траектории. Этот геометрический результат соответствует, очевидно, тому, что для любой рассматриваемой кеплеровой дуги имеет место (2.2.159).

Из сказанного следует, что единственным существенным условием оптимальности импульса в бесконечности является условие (2.2.157), условие же (2.2.159), являющееся следствием общих свойств решения сопряженной системы на оптимальной траектории, может не учитываться. Поскольку для параболической дуги всегда имеет место (2.2.150), на основании изложенного приходим к выводу, что оптимальный конечный импульс в бесконечности может сообщаться КА только на гиперболической дуге (см. ниже).

Рассмотрим наряду с исходной траекторией с импульсами в конечных точках, удовлетворяющей в них условиям строгой локальной оптимальности, варьированную траекторию, полученную из исходной приложением в бесконечно удаленной точке малого импульса (см. (2.2.72))

$$\delta \Delta \mathbf{V}_{\infty} = \delta \mathbf{V}_{\infty}^{+} - \delta \mathbf{V}_{\infty}^{-}, \quad (2.2.163)$$

где $\delta \mathbf{V}_{\infty}^{+}$, $\delta \mathbf{V}_{\infty}^{-}$ — вариации вектора скорости КА на бесконечности $\mathbf{V}_{\infty}$ справа и слева соответственно. Тогда, повторяя практически без изменений все рассуждения, проведенные при получении соотношения (2.2.78) в разделе 2.2.1, получим для вариации функционала δG , обусловленной импульсом (2.2.163), аналогичное соотношение:

$$\delta G = |\delta \Delta \mathbf{V}_{\infty}| \left[1 - \left(s_{\infty}, \frac{\delta \Delta \mathbf{V}_{\infty}}{|\delta \Delta \mathbf{V}_{\infty}|} \right) \right]. \quad (2.2.164)$$

Из (2.2.164), как и при выводе необходимого условия оптимальности 7° (см. соотношения (2.2.79), (2.2.83) — (2.2.85)), получим:

Если

$$s_{\infty} < 1, \quad (2.2.165)$$

то приложение конечного малого импульса скорости в бесконечно удаленной точке в рамках линейного анализа нецелесообразно.

Если же

$$s_{\infty} = 1, \quad (2.2.166)$$

то достаточно малый импульс $\delta\Delta V_{\infty}$, удовлетворяющий условию

$$\delta\Delta V_{\infty} \| s_{\infty}, \quad (2.2.167)$$

не нарушает стационарности исходной траектории. Любой же другой малый конечный импульс в бесконечно удаленной точке в рамках линейного анализа ухудшает функционал.

Если скорость аппарата на бесконечности отлична от нуля:

$$|\mathbf{V}_{\infty}^{-}| > 0, \quad (2.2.168)$$

т. е. аппарат движется по асимптоте гиперболы, то для оптимальной N -импульсной траектории, уход на бесконечность вдоль которой осуществляется по гиперболической дуге, оказывается справедливым необходимое условие оптимальности 7° (2.2.87) — (2.2.89).

Пусть теперь дугой оптимальной N -импульсной траектории, уходящей на бесконечность, является парабола и

$$\mathbf{V}_{\infty}^{-} = 0. \quad (2.2.169)$$

Поскольку для параболы имеет место соотношение (2.2.150), в этом случае в бесконечно удаленной точке нельзя, на основании сказанного, приложить конечный импульс. Но если КА сообщает исчезающе малый импульс

$$\delta\Delta V_{\infty} \rightarrow 0, \quad (2.2.170)$$

то он, как это следует из (2.2.164), никогда не нарушает условия стационарности, так как

$$\lim_{|\delta\Delta V_{\infty}| \rightarrow 0} \delta G = 0. \quad (2.2.171)$$

Поскольку вектор скорости аппарата в бесконечности $\mathbf{V}_{\infty}^{-}$ на исходной параболе равен нулю, с помощью исчезающе малого импульса (2.2.170) можно получить вектор скорости

$$\mathbf{V}_{\infty}^{+} = 0, \quad (2.2.172)$$

ориентацию которого можно считать сколь угодно сильно отличающейся от ориентации вектора $\mathbf{V}_{\infty}^{-}$ (2.2.169). В результате с помощью исчезающе малого импульса можно получить параболическую дугу, сколь угодно сильно отличающуюся от исходной параболической дуги. Если эта дуга, в свою очередь, принадлежит некоторой импульсной траектории, во всех конечных точках которой выполняются условия строгой локальной оптимальности, то

и вся траектория в целом, состоящая из двух траекторий — исходной и полученной с помощью исчезающе малого импульса (2.2.170) в бесконечно удаленной точке — является строго локально оптимальной.

Из изложенного следует также, что оптимальная параболическая дуга не может перейти в оптимальную гиперболическую дугу и обратно с помощью оптимального импульса на бесконечности. Допустив возможность такого перехода, приходим к тому, что вектор $s(t)$, вследствие (2.2.150), (2.2.158), будет разрывен во внутренней точке траектории $r = \infty$, что недопустимо на оптимальной траектории (см. условие 2° (2.2.45) в разделе 2.2.1).

Заметим, что исчезающе малая вариация вектора скорости или радиуса-вектора в любой точке траектории, согласно (2.2.78), (2.2.164), не нарушает стационарности функционала. Однако в любой конечной точке она оставляет траекторию движения неизменной, поэтому ее рассмотрение имеет смысл только в бесконечно удаленной точке, где она приводит к конечным изменениям в траектории.

Проведенный анализ позволяет сформулировать для практического решения задач оптимизации траекторий, имеющих в своем составе параболические или гиперболические дуги, проходящие через бесконечно удаленную точку, следующие правила:

а°. Оптимальный конечный импульс может сообщаться КА в бесконечно удаленной точке только на оптимальной гиперболической дуге, при этом гиперболическая дуга может перейти только в оптимальную гиперболическую дугу.

б°. На оптимальной параболической дуге в бесконечно удаленной точке КА может сообщаться только исчезающе малый импульс, при этом параболическая дуга может перейти только в оптимальную параболическую дугу.

Таким образом, для строго локально оптимальных траекторий перелетов КА, имеющих в своем составе бесконечно удаленные точки, должны выполняться все необходимые условия оптимальности, полученные в разделах 2.2.1, 2.2.3, включая соответствующие условия оптимальности конечного импульса (2.2.157), (2.2.158) в бесконечно удаленной точке на гиперболической дуге.

Рассмотрим теперь траектории, проходящие через бесконечно удаленную точку в «точном» гравитационном поле (1.1.17). В этом случае при всех конечных $|r_i|$ и достаточно больших $|r|$ гравитационное ускорение (1.1.17) представимо в виде

$$g(r, t) = -\frac{r}{r^3} \sum_{i=1}^n \mu_i + O\left(\frac{\sum \mu_i r_i}{r^3}\right). \quad (2.2.173)$$

Из (2.2.173) получаем, что любое «точное» поле при достаточно больших r сколь угодно близко к ньютоновскому полю

с потенциалом

$$\Pi = - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{r}. \quad (2.2.174)$$

Поскольку второй член в (2.2.173) представляет малую более высокого порядка по сравнению с первым, он не оказывает влияния на оценки (2.2.140) — (2.2.146). Из этого для случая произвольного «точного» поля (1.1.17) следуют предельные соотношения (2.2.138), (2.2.139), а с ними и все общие результаты, относящиеся к необходимым условиям оптимальности траекторий, проходящих через бесконечно удаленную точку.

Поскольку для рассматриваемого поля

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r, t) = 0, \quad (2.2.175)$$

скорость аппарата на пассивном участке фазовой траектории, уходящем в бесконечность, при $r \rightarrow \infty$ стремится, как и в ньютоновском поле, к конечному пределу

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, t) = V_{\infty} = \text{const.} \quad (2.2.176)$$

Это дает возможность различать пассивные дуги, для которых

$$|V_{\infty}| > 0, \quad (2.2.177)$$

и пассивные дуги, для которых

$$|V_{\infty}| = 0. \quad (2.2.178)$$

Дуги (2.2.177) являются в рассматриваемом поле аналогами гипербол в ньютоновском поле, а дуги (2.2.178) — аналогами парабол. Однако в данном случае не удастся установить соотношения (2.2.150), справедливого для ньютоновского поля. Поэтому для «точного» поля из полученных выше результатов, применительно к особенностям приложения оптимального импульса в бесконечно удаленной точке, остается в силе лишь установленный для параболической дуги результат, связанный с приложением исчезающе малого импульса на пассивной дуге, характеризующейся условием (2.2.178).

Все полученные в настоящем разделе результаты основаны на соотношениях (2.2.138), (2.2.139), которые, в свою очередь, следуют из ограниченности функции $s(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ (см. (2.2.136)) для любой фазовой траектории, удовлетворяющей в конечных точках условиям строгой локальной оптимальности. Если взять любую, не удовлетворяющую, вообще говоря, условиям оптимальности траекторию импульсного перелета (см. § 2.3) и предположить для нее ограниченность функции $s(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, то для нее также получим соотношения (2.2.138), (2.2.139).

§ 2.3. Применение сопряженной системы для улучшения неоптимальных перелетов

2.3.1. Вариация функционала при переходе от N -импульсной к $(N+1)$ -импульсной траектории. Рассмотрим функционал (2.2.12) — характеристическую скорость — для N -импульсной, вообще говоря, неоптимальной траектории в произвольном достаточно гладком гравитационном поле (см. раздел 2.2.1):

$$G = \Delta V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-, t_1) + \sum_{k=1}^N |\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-|_k + \Delta V_N(\mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+, t_N). \quad (2.3.1)$$

Ранее (см. раздел 2.2.1) вариация δG рассматривалась при фиксированном числе импульсов N . Предположим теперь, что вместе с N -импульсной траекторией рассматривается близкая к ней возмущенная $(N+1)$ -импульсная траектория, полученная

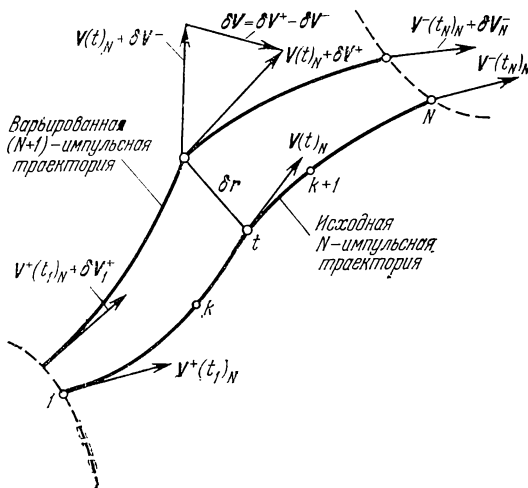


Рис. 2.3.1.

из исходной N -импульсной траектории приложением малого импульса в момент $t \in (t_k, t_{k+1})$ в точке

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t)_N + \delta \mathbf{r}, \quad (2.3.2)$$

где $\mathbf{r}(t)_N$ — радиус-вектор КА на исходной N -импульсной траектории, $\delta \mathbf{r}$ — вариация радиуса-вектора аппарата,

$$\delta \Delta V = \mathbf{V}(t)_N + \delta \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}(t)_N - \delta \mathbf{V}^- = \delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^-, \quad (2.3.3)$$

где $\delta \mathbf{V}^-$ и $\delta \mathbf{V}^+$ — вариации вектора скорости $\mathbf{V}(t)_N$ КА на исходной N -импульсной траектории при переходе к $(N+1)$ -импульсной траектории слева и справа соответственно (рис. 2.3.1). Так как для

любого импульса $\Delta \mathbf{V}$

$$|\Delta \mathbf{V}| = |\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-| = \sqrt{(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)}. \quad (2.3.4)$$

для его вариации имеем

$$\delta |\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-| = \left(\frac{\Delta \mathbf{V}}{|\Delta \mathbf{V}|}, \delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^- \right). \quad (2.3.5)$$

С учетом (2.3.3) и (2.3.5) запишем вариацию G в виде

$$\delta G = \delta \Delta V_1 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|}, \delta \mathbf{V}_k^+ - \delta \mathbf{V}_k^- \right) + \delta \Delta V_N + |\delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^-|. \quad (2.3.6)$$

Если в (2.3.6) отбросить последний член, то δG совпадет с рассмотренной ранее в разделе 2.2.1 вариацией δG для N -импульсной траектории.

Для приведения δG к удобному виду воспользуемся сопряженной системой (2.2.21), (2.2.22), которая определяется только системой уравнений (2.2.19), (2.2.20) и не зависит от того, является ли рассматриваемая фазовая траектория оптимальной или нет. Вариации (2.3.2), (2.3.3) прикладываются во внутренней точке пассивной дуги и представляют собой «вариации в точке» (см. соотношения (2.2.26), (2.2.27)). Поэтому для них вместо соотношений (2.2.28) имеем соотношения вида (2.2.74), (2.2.75). Учитывая связи (2.2.28), (2.2.74), (2.2.75) на участках траектории между любыми двумя последовательными импульсами $(N+1)$ -импульсной траектории, перепишем (2.3.6) в виде, аналогичном (2.2.76):

$$\delta G = \delta G_N + |\delta \mathbf{V}^+ - \delta \mathbf{V}^-| - (s^+, \delta \mathbf{V}^+) + (s^-, \delta \mathbf{V}^-) - (p^+ - p^-, \delta \mathbf{r}), \quad (2.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta G_N = & \delta \Delta V_1 + \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_1}{|\Delta \mathbf{V}_1|}, \delta \mathbf{V}_1^+ - \delta \mathbf{V}_1^- \right) - (p_1, \delta \mathbf{r}_1) - (s_1^+, \delta \mathbf{V}_1^+) + \\ & + H_1^+ \delta t_1 + \sum_{k=2}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|} - s_k^+, \delta \mathbf{V}_k^+ \right) - \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_k}{|\Delta \mathbf{V}_k|} - s_k^-, \delta \mathbf{V}_k^- \right) - \right. \\ & - (p_k^+ - p_k^-, \delta \mathbf{r}_k) + (H_k^+ - H_k^-) \delta t_k \left. \right\} + \left(\frac{\Delta \mathbf{V}_N}{|\Delta \mathbf{V}_N|}, \delta \mathbf{V}_N^+ - \delta \mathbf{V}_N^- \right) + \\ & + (p_N^-, \delta \mathbf{r}_N) + (s_N^-, \delta \mathbf{V}_N^-) - H_N^- \delta t_N + \delta \Delta V_N. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Вариация δG_N соответствует исходной N -импульсной траектории при фиксированном числе импульсов и по своей форме совпадает с вариацией (2.2.34).

Заметим (см. раздел 2.1.1.), что система вариаций времени и фазового вектора δt_k , $\delta \mathbf{r}_k$, $\delta \mathbf{V}_k^+$ и δt_{k+1} , $\delta \mathbf{r}_{k+1}$, $\delta \mathbf{V}_{k+1}^-$ в концах k -го

пассивного участка, расположенного между k -м и $(k+1)$ -м импульсами, не может быть независимой даже при отсутствии каких-либо дополнительных связей на величины $t_k, r_k, V_k^+, t_{k+1}, r_{k+1}, V_{k+1}^-$. В самом деле, задавая $\delta t_k, \delta r_k$ и $\delta t_{k+1}, \delta r_{k+1}$, можно определить пассивную варьированную траекторию между k -м и $(k+1)$ -м импульсами и, следовательно, δV и δV_{k+1}^- . Таким образом, из 14 скалярных вариаций $\delta t_k, \delta r_k, \delta V_k^+, \delta t_{k+1}, \delta r_{k+1}, \delta V_{k+1}^-$ в общем случае независимы только 8. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе решения сопряженной системы: целесообразно выбирать решение сопряженной системы так, чтобы в правой части (2.3.8) оставались независимые вариации в концах k -го пассивного участка (см. раздел 2.3.3). Что касается вариаций $\delta t_1, \delta r_1, \delta V_1$ и $\delta t_N, \delta r_N, \delta V_N^+$, то эти вариации необходимо вычислять с учетом принадлежности векторов (t_1, r_1, V_1^-) и (t_N, r_N, V_N^+) заданным начальному и конечному многообразиям (см. пример 2° в разделе 2.3.3).

Входящие в (2.3.7), (2.3.8) векторы сопряженных переменных p и s представляют некоторое решение системы (2.2.21), (2.2.22) на исходной N -импульсной траектории, которая, вообще говоря, не является оптимальной. Конкретный вид решения сопряженной системы будем определять, задавая некоторые условия в начальной и конечной точках траектории и в точках приложения импульсов. Выбором тех или иных условий в этих точках можно придавать вариации δG различные формы и получать различные необходимые условия для выбора вариаций $\delta r_k, \delta r, \delta V_k^+, \delta V^+, \delta t_k$, при которых $\delta G < 0$, т. е. обеспечивается уменьшение функционала G .

При указанном выборе условий для определения решения сопряженной системы (2.2.21), (2.2.22) векторы p, s и гамильтониан H будут непрерывны на каждой кеплеровой дуге траектории между двумя соседними импульсами. В частности,

$$p^+(t) = p^-(t), \quad (2.3.9)$$

$$s^+(t) = s^-(t), \quad \forall t \in (t_k, t_{k+1}). \quad (2.3.10)$$

$$H^+(t) = H^-(t) \quad (2.3.11)$$

С учетом (2.3.10) запишем

$$|\delta V^+ - \delta V^-| - (s(t), \delta V^+ - \delta V^-) = |\delta \Delta V| \left[1 - \left(s(t), \frac{\delta \Delta V}{|\delta \Delta V|} \right) \right]. \quad (2.3.12)$$

Подставляя (2.3.9) и (2.3.12) в (2.3.7), получаем окончательно

$$\delta G = \delta G_N + |\delta \Delta V| \left[1 - \left(s(t), \frac{\delta \Delta V}{|\delta \Delta V|} \right) \right]. \quad (2.3.13)$$

Рассмотрим ряд типичных задач оптимизации и укажем для них способы выбора решений сопряженной системы. Подчеркнем, что приводимые ниже результаты справедливы не только для траекторий, все точки которых конечны, но, с очевидными изменениями, и для траекторий, проходящих через бесконечно удаленную точку, если в последнем случае потребовать ограниченности функции $s(t)$ при $r \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ (см. замечание в конце раздела 2.2.4).

2.3.2. Исходная N -импульсная траектория удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Пусть исходная N -импульсная траектория и сопряженная система удовлетворяют в начальной и конечной точках и в точках приложения импульсов необходимым условиям оптимальности 1°–6° раздела 2.2.1.

Поскольку в этом случае в начальной и конечной точках выполнены условия трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63), а в точках приложения импульсов выполнены условия непрерывности векторов p , s и гамильтониана, то вектор s_k совпадает с единичным вектором импульса (см. (2.2.44) — (2.2.47), (2.2.59), (2.2.60)), на исходной N -импульсной траектории выполняется условие ее стационарности

$$\delta G_N = 0 \quad (2.3.14)$$

и вариация характеристической скорости (2.3.13) записывается в виде, идентичном (2.2.78):

$$\delta G = |\delta \Delta \mathbf{V}| \left[1 - \left(s(t), \frac{\delta \Delta \mathbf{V}}{|\delta \Delta \mathbf{V}|} \right) \right]. \quad (2.3.15)$$

Проведем, используя соотношение (2.3.15), анализ оптимальности количества импульсов N . Если на исходной N -импульсной траектории

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in (t_1, t_2) \cup (t_2, t_3) \cup \dots \cup (t_{N-1}, t_N), \quad (2.3.16)$$

то она строго локально оптимальна (рис. 2.3.2, а) (см. раздел 2.2.1, условие 7°). Этот же результат непосредственно следует и из (2.3.15): при условии (2.3.16) и любом импульсе $\delta \Delta \mathbf{V} \neq 0$ всегда

$$\delta G > 0 \quad (2.3.17)$$

и переход от исходной N -импульсной траектории к любой близкой $(N+1)$ -импульсной может привести только к увеличению характеристической скорости перелета.

Пусть теперь на некотором участке Δt (рис. 2.3.2, б)

$$s(t) > 1, \quad t \in \Delta t, \quad (2.3.18)$$

и исходная N -импульсная траектория заведомо неоптимальна. Тогда из (2.3.15) следует, что приложением $(N+1)$ -го импульса

любой точке на траектории, где $s(t) > 0$, можно добиться, чтобы было

$$\delta G < 0, \quad (2.3.19)$$

таким образом, улучшить функционал.

При заданной величине $|\delta \Delta V|$ $(N+1)$ -го импульса $\min_{\delta \Delta V} \delta G$

достигается, очевидно, при следующих условиях:

1°. Точка приложения $(N+1)$ -го импульса $t|\delta \Delta V$ должна соответствовать точке $\max |s|$:

$$t|\delta \Delta V \rightarrow \max s(t). \quad (2.3.20)$$

2°. В этой точке векторы $\delta \Delta V$ и s должны быть параллельны:

$$\delta \Delta V(t) \parallel s(t). \quad (2.3.21)$$

При этом оптимальная величина $|\delta \Delta V|$ в рамках линейного по функционалу анализа (см. соотношение (2.3.15)) определена

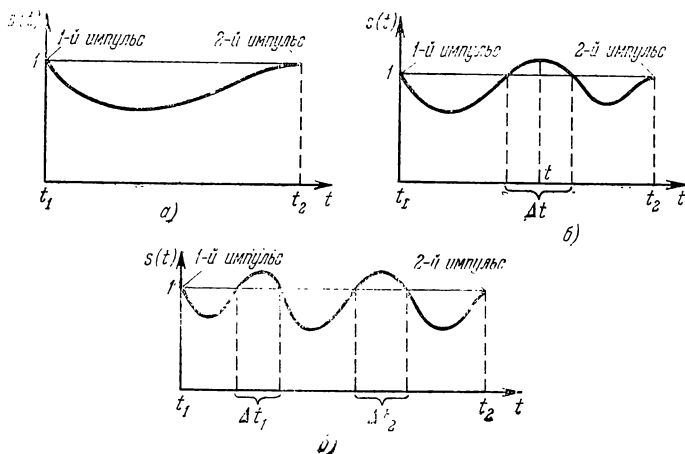


Рис. 2.3.2.

быть не может. В работах Ежевски [4], Ежевски, Розендаала [1] в вариации функционала учтены члены второго порядка малости от независимых вариаций, что позволяет приближенно найти величину промежуточного импульса.

Условие (2.3.18) указывает на целесообразность перехода от N -импульсной траектории к $(N+1)$ -импульсной траектории. При этом вопрос о строгой локальной оптимальности $(N+1)$ -импульсной траектории остается открытым и может быть выяснен после решения соответствующей краевой задачи и изучения поведения функции $s(t)$ на полученном решении.

Все сказанное остается в силе, если неравенство (2.3.18) имеет место сразу на нескольких участках траектории Δt_i , $i=1, 2, \dots, m$ (рис. 2.3.2, в). В этом случае целесообразен переход к $(N+n)$ -импульсной траектории, где $1 \leq n$, причем вопрос об оптимальности этой траектории, в частности о выборе числа n , должен выясняться путем решения соответствующей краевой задачи и изучения поведения функции $s(t)$ на этом решении.

Пусть теперь в некоторой точке t_* , отличной от точек приложения импульсов $k=1, 2, \dots, N$, достигается (рис. 2.3.3, а)

$$\max_{t \in \bigcup_k (t_k, t_{k+1})} s(t) = s(t_*) = 1, \quad (2.3.22)$$

причем во всех остальных точках, отличных от точек приложения импульсов, имеет место (2.3.16). Тогда из (2.3.15) и (2.3.22) следует, что для любой вариации $\delta \Delta V(t_*)$

$$\delta G \geq 0, \quad (2.3.23)$$

причем знак равенства в (2.3.23) достигается лишь при условии

$$\delta \Delta V(t_*) \| s(t_*), \quad (2.3.24)$$

аналогичном условию оптимальности (2.2.46). Следовательно, если достаточно малый импульс в точке t_* удовлетворяет условию

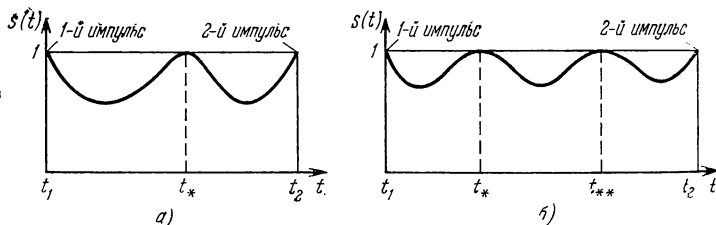


Рис. 2.3.3.

(2.3.24), то он не нарушит стационарности траектории. Любой другой импульс в этой точке, как и всякий импульс в любой другой точке траектории, приводит к увеличению функционала. Таким образом, в случае (2.3.22) в линейном приближении нельзя судить о целесообразности перехода от N -импульсной траектории к $(N+1)$ -импульсной траектории. Для решения этого вопроса надо решить задачу оптимизации перелета для траектории с $N+1$ импульсом, задавая в качестве начального приближения траекторию перелета, близкую к исходной, с малым, но конечным импульсом в точке t_* , удовлетворяющим условию (2.3.24), и сравнить полученный функционал G_{N+1} с исходным G_N .

Проведенные рассуждения очевидным образом обобщаются на случай, когда равенство (2.3.22) имеет место в нескольких точках

на траектории (рис. 2.3.3, б). Если равенство (2.3.22) достигается в процессе решения задачи оптимизации перелета, непрерывно зависящей от вектора параметров, при некотором значении этого вектора, то можно показать, что в точке t_* оптимальным является бесконечно малый импульс $\delta\Delta V$ (подробнее см. ниже).

Рассмотрим вопрос о практическом применении полученных результатов. Отметим, как и при выводе необходимых условий оптимальности (см. раздел 2.2.1, условие 7°), «односторонний» характер полученных критериев: все они позволяют судить о целесообразности перехода от N -импульсной траектории к траектории с большим количеством импульсов. Поэтому надо начинать решение задачи оптимизации перелета с рассмотрения траекторий с минимально необходимым количеством импульсов, постепенно, в случае надобности, увеличивая количество импульсов. Заметим, что если количество импульсов не задавать, а определять в процессе решения краевой задачи, то полученные решения задач оптимизации с конечными импульсами могут быть таковы, что в них часть «старых» импульсов (соответствующих исходной траектории) может отсутствовать. Поэтому в результате применения рассмотренных выше критериев могут быть получены оптимальные траектории с меньшим, чем на исходной траектории, количеством импульсов.

Пусть решение задачи оптимизации перелета КА зависит от некоторого (для простоты — скалярного) параметра c , принимающего значения из некоторой области D . Будем полагать, что параметр c входит в краевые условия задачи и правые части системы уравнений движения так, что решение вариационной задачи непрерывно зависит от c (Л. С. Понтрягин [1]). Предположим, что при некоторых заданных N и $c_0 \in D$ найдено строго локально оптимальное решение задачи оптимизации перелета КА. Будем теперь непрерывно изменять параметр c в области D , начиная со значения $c = c_0$. При этом решение сопряженной системы, в частности вектор $s(t, c)$, будет непрерывно меняться в зависимости от c .

Заметим, что в рассматриваемом случае решение задачи при $c_{i+1} = c_i + \Delta c_i$ целесообразно проводить, используя итеративные методы типа метода непрерывности (по параметру c) (Моррей [1], Томпкинс [1]). При нахождении решения краевой задачи для $c = c_{i+1}$ в качестве начального приближения используется решение задачи при $c = c_i$.

Если окажется, что во всех точках траектории, исключая точки приложения импульсов,

$$s(t, c) < 1 \quad \forall c \in D, \quad (2.3.25)$$

то N -импульсные траектории строго локально оптимальны для всех $c \in D$.

Пусть теперь в некоторой точке траектории $t_* \in (t_k, t_{k+1})$ (рис. 2.3.4)

$$s(t_*, c_*) = \lim_{c \rightarrow c_* - 0} s(t_*, c) = 1 - 0, \quad (2.3.26)$$

причем

$$\left. \frac{\partial s(t_*, c)}{\partial c} \right|_{c=c_*} > 0. \quad (2.3.27)$$

Неравенство (2.3.27) означает, что при $c > c_*$ в некоторой окрестности c_*

$$s(t, c) > 1 \quad (2.3.28)$$

в некоторой окрестности точки $t = t_*$.

Поскольку для любого $c \in D$ вектор $s(t, c)$ непрерывно дифференцируем по t , в точке $t = t_*$ достигается $\max_{\{t\}} s(t, c_*)$ и

$$\dot{s}(t_*, c_*) = 0. \quad (2.3.29)$$

Таким образом, в точке $t = t_*$ при $c = c_* + 0$ выполняются все необходимые условия приложения $(N+1)$ -го импульса. Но вследствие (2.3.26) и (2.3.27) полученную траекторию можно по-прежнему считать N -импульсной траекторией, так как бесконечно малым

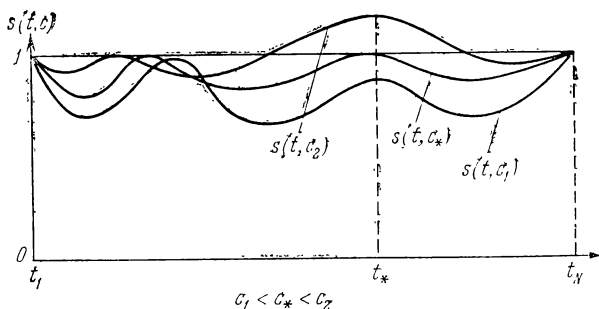


Рис. 2.3.4.

изменением c можно осуществить бесконечно малое уменьшение $s(t_*, c_*)$. В результате получаем, что при $c = c_* + 0$ решение вариационной задачи соответствует $(N+1)$ -импульсной траектории с бесконечно малым импульсом, приложенным в точке $t = t_*$.

Положим

$$c = c_* + \Delta c, \quad \Delta c > 0, \quad (2.3.30)$$

где Δc достаточно мало. Если теперь решить вариационную задачу для N -импульсной траектории при указанном c , то вследствие (2.3.27), (2.3.28) придем для функции $s(t, c)$ к ситуации, рас-

смотренной выше в общем случае при анализе перехода от N -импульсной траектории к $(N+1)$ -импульсной траектории. В результате для определения дополнительного импульса $\delta\Delta V$ имеем соотношения (2.3.20), (2.3.21). Из проведенных рассуждений следует, что величина импульса $|\delta\Delta V|$ при соответствующем выборе Δc достаточно мала. Это позволяет при определении $(N+1)$ -импульсной траектории применять итеративные методы, используя в качестве исходного приближения решение задачи при $c = c_*$. Решив задачу оптимизации $(N+1)$ -импульсного перелета при $c = c_* + \Delta c$, например, с помощью экстремального подхода (см. раздел 3.3.2), снова анализируем для нее функцию $s(t, c)$, после чего описанный выше процесс повторяется, и т. д.

Поскольку в рассматриваемом случае импульс $\delta\Delta V$ можно всегда выбором Δc сделать достаточно малым по модулю, для решения задачи можно использовать линеаризацию искомой траектории относительно исходной N -импульсной траектории (Ежевски [1], Ежевски, Розендал [1], Лайон, Хэнделсен [1], Минкофф, Лайон [1]). При этом для записи связи между вариациями фазового вектора на кеплеровой дуге между k -м и $(k+1)$ -м импульсами можно использовать аппарат переходных матриц (см. формулу (П.17) Приложения, Бэттин [2], В. И. Чарный [2, 3], П. Е. Эльясберг [2]).

Проведенные рассмотрения остаются в силе, если решение вариационной задачи зависит от вектора параметров c . В этом случае

$$\left. \frac{\partial s(t, c)}{\partial c} \right|_{\{c\}} = \text{grad } s(t, c). \quad (2.3.31)$$

Пусть, как и ранее, t_* и c_* таковы, что на исходной N -импульсной траектории

$$s(t_*, c_*) = 1, \quad (2.3.32)$$

$$\left. \text{grad } s(t, c) \right|_{\{c\}} \Big|_{t=t_*, c=c_*} \neq 0. \quad (2.3.33)$$

В качестве вектора Δc в соотношении, аналогичном (2.3.30), можно рассматривать любой достаточно малый по норме вектор Δc , для которого

$$(\Delta c, \left. \text{grad } s(t_*, c_*) \right|_{\{c\}}) > 0. \quad (2.3.34)$$

Условие (2.3.33) является обобщением условия (2.3.27). Если в качестве Δc взять вектор

$$\Delta c \parallel \left. \text{grad } s(t_*, c_*) \right|_{\{c\}}, \quad (2.3.35)$$

то при заданной норме $\|\Delta c\| = \sqrt{(\Delta c, \Delta c)}$ вектору (2.3.35) соответствует наиболее «глубокий» переход в область $(N+1)$ -импульсных траекторий.

2.3.3. Исходная N -импульсная траектория неоптимальна. Пусть исходная N -импульсная траектория не удовлетворяет всей совокупности необходимых условий оптимальности перелета. Как уже отмечалось в разделе 2.3.1, задавая различные условия для определения решений сопряженной системы, можно получать различные выражения для вариаций δG (2.3.7). Распорядимся произвольно в выборе этих условий, чтобы получить достаточно удобное для практического использования выражение δG . При этом будем руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, определенное для неоптимальной траектории решение сопряженной системы должно в случае оптимальной траектории переходить в соответствующее решение сопряженной системы для оптимальной траектории. Во-вторых, решение сопряженной системы целесообразно выбрать так, чтобы из 14 зависимых вариаций δr_k , δV_k^+ , δt_k и δr_{k+1} , δV_{k+1}^- , δt_{k+1} в концах k -го пассивного участка, входящих в вариацию (2.3.8), исключить либо целиком векторы δr_k , δr_{k+1} , либо векторы δV_k^+ , δV_{k+1}^- .

Указанным двум требованиям можно удовлетворить, если выбрать решение сопряженной системы (2.2.21), (2.2.22), реализующее в точках приложения импульсов на исходной N -импульсной траектории условия (Лайон, Хэнделсмен [1])

$$s(t_k) = s_k = \frac{\Delta V_k}{|\Delta V_k|}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3.36)$$

исключив, таким образом, в (2.3.8) вариации $\delta V_k^\pm$, $k = 1, \dots, N$.

Определение (2.3.36) оставляет за вектором s_k на неоптимальной траектории тот же смысл, что и на оптимальной траектории: вектор s_k является единичным вектором импульса. Задание векторов s_k , s_{k+1} на концах k -й пассивной дуги N -импульсной траектории полностью определяет решение сопряженной системы (2.2.21), (2.2.22). При этом (как и для оптимальной траектории) вектор s остается непрерывным (см. ниже). С учетом (2.3.36) перепишем (2.3.8) в виде

$$\begin{aligned} \delta G_N = & \delta \Delta V_1 - (s_1, \delta V_1^-) - (p_1^+, \delta r_1) + H_1^+ \delta t_1 + \\ & + \sum_{k=2}^{N-1} \{ p_k^+ - p_k^-, \delta r_k \} + (H_k^+ - H_k^-) \delta t_k \} + (s_N, \delta V_N^+) + \\ & + (p_N^-, \delta r_N) - H_N^- \delta t_N + \delta \Delta V_N. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

В рассматриваемом случае для вариации δG по-прежнему имеет место соотношение (2.3.13), где δG_N дается формулой (2.3.37). Подчеркнем еще раз, что при отсутствии каких-либо связей на моменты времени и фазовые векторы в концах k -го пассивного участка вариации δt_k , δr_k , $k = 1, 2, \dots, N$, как указывалось выше,

являются свободными. Однако в общем случае в формулах (2.3.13), (2.3.37) вариации δt_k , $\delta \mathbf{r}_k$, $k=1, 2, \dots, N$, могут удовлетворять некоторым связям. Вариации $\delta \mathbf{V}_1^-$ и $\delta \mathbf{V}_N^+$ связаны с вариациями δt_1 , $\delta \Delta V_1$ и δt_N , $\delta \Delta V_N$, соответственно, условием принадлежности начальной и конечной точек траектории перелета некоторым заданным многообразиям. Поэтому при анализе введения в исходную траекторию тех или иных вариаций необходимо учитывать все возможные связи между ними.

Рассмотрим несколько характерных задач оптимизации импульсных перелетов, считая для определенности гравитационное поле ньютоновским.

1°. Исходная траектория — двухимпульсная траектория перелета между двумя заданными кеплеровыми траекториями, начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени и, следовательно, $\mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{V}^-(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_2)$, $\mathbf{V}^+(t_2)$ заданы (Лайон, Хэнделсмен [1]). В этом случае, как это видно из (2.3.37), $\delta G_N = 0$ и согласно (2.3.13)

$$\delta G = |\delta \Delta \mathbf{V}| \left[1 - \left(\mathbf{s}(t), \frac{\delta \Delta \mathbf{V}}{|\delta \Delta \mathbf{V}|} \right) \right]. \quad (2.3.38)$$

Вопрос о целесообразности перехода от двухимпульсной исходной траектории к трехимпульсной или с большим числом импульсов решается точно так же, как и в общем случае, рассмотренном выше, в разделе 2.3.2.

То же выражение (2.3.38) для δG получается при переходе от N -импульсной траектории перелета между двумя кеплеровыми дугами к $(N+1)$ -импульсной траектории, если заданы начальный t_1 и конечный t_N моменты времени перелета, радиусы-векторы $\mathbf{r}_k$ и моменты t_k всех промежуточных импульсов. В этом случае также применим изложенный выше анализ вопроса о переходе от N -импульсной траектории к $(N+1)$ -импульсной.

В рассмотренном примере явно видна целесообразность выбора решения сопряженной системы, удовлетворяющего условиям (2.3.38). Использование этого решения позволяет исключить из общего выражения δG_N (2.3.8) вариации $\delta \mathbf{V}_i^+$, $\delta \mathbf{V}_i^-$, $i=1, 2, \dots, N$, связанные с вариациями $\delta \mathbf{V}^-$ и $\delta \mathbf{V}^+$ в точке приложения дополнительного импульса.

2°. Исходная траектория — N -импульсная траектория перелета между двумя заданными кеплеровыми дугами. Проанализируем вопрос о выборе момента t_1 схода с исходной орбиты и момента t_N выхода на конечную орбиту при условии, что радиусы-векторы $\mathbf{r}_k$ и моменты приложения t_k промежуточных импульсов заданы.

В рассматриваемом случае из (2.3.13), (2.3.37) получаем

$$\delta G \equiv \delta G_N = -(\mathbf{s}_1, \delta \mathbf{V}_1^-) - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) + H_1^+ \delta t_1 + (\mathbf{s}_N, \delta \mathbf{V}_N^+) + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) - H_N^- \delta t_N. \quad (2.3.39)$$

Совокупность членов в начальной и конечной точках в (2.3.39) аналогична членам, входящим в условие трансверсальности для оптимальных импульсных траекторий. Преобразуем их к более удобному для приложений виду (Лайон, Хэнделсмен [4]).

Напомним, что в любой точке импульсной траектории, включая точки приложения импульсов,

$$\dot{\mathbf{V}}(t_k - 0) = \dot{\mathbf{V}}(t_k + 0) = \mathbf{g}(t_k) = \dot{\mathbf{V}}(t_k). \quad (2.3.40)$$

Поскольку начало траектории все время находится на заданной орбите,

$$\delta \mathbf{V}_1^- = \dot{\mathbf{V}}_1 \delta t_1, \quad (2.3.41)$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{V}_1^- \delta t_1. \quad (2.3.42)$$

С учетом выражения для гамильтониана (2.2.29), непрерывности вектора $\mathbf{s}_1$ и (2.3.40), (2.3.41), (2.3.42) получим

$$-(\mathbf{s}_1, \delta \mathbf{V}_1^-) - (\mathbf{p}_1^+, \delta \mathbf{r}_1) + H_1^+ \delta t_1 = (\mathbf{p}_1^+, \mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^-) \delta t_1. \quad (2.3.43)$$

Выражая импульс $\Delta \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^-$ с помощью (2.3.36) и подставляя полученное соотношение в (2.3.43), имеем

$$(\mathbf{p}_1^+, \mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^-) \delta t_1 = |\Delta \mathbf{V}_1| (\mathbf{p}_1^+, \mathbf{s}_1) \delta t_1, \quad (2.3.44)$$

откуда, используя уравнение (2.2.22), с учетом равенства $s_1 = 1$ получаем

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{V}_1| (\mathbf{p}_1^+, \mathbf{s}_1) \delta t_1 &= - |\Delta \mathbf{V}_1| \left(\mathbf{s}_1, \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_1+0} \delta t_1 = \\ &= - |\Delta \mathbf{V}_1| \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_1+0} \delta t_1. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Аналогично, учитывая (2.3.40) и

$$\delta \mathbf{V}_N^+ = \dot{\mathbf{V}}_N \delta t_N, \quad (2.3.46)$$

$$\delta \mathbf{r}_N = \mathbf{V}_N^+ \delta t_N, \quad (2.3.47)$$

получим

$$(\mathbf{s}_N, \delta \mathbf{V}_N^+) + (\mathbf{p}_N^-, \delta \mathbf{r}_N) - H_N^- \delta t_N = - |\Delta \mathbf{V}_N| \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_N-0} \delta t_N. \quad (2.3.48)$$

Таким образом,

$$\delta G = - |\Delta \mathbf{V}_1| \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_1+0} \delta t_1 - |\Delta \mathbf{V}_N| \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_N-0} \delta t_N. \quad (2.3.49)$$

Пусть

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_1+0} \neq 0, \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{t_N-0} \neq 0. \quad (2.3.50)$$

Выбирая $\delta t_1, \delta t_N$ в соответствии с правилом

$$\text{sign } \delta t_1 = \text{sign} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_1+0}, \quad (2.3.51)$$

$$\text{sign } \delta t_N = \text{sign} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_N-0}, \quad (2.3.52)$$

можно уменьшить функционал G .

На рис. 2.3.5 показано два типичных примера для двухимпульсной траектории перелета между заданными орбитами. В случае рис. 2.3.5, а $\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_1+0} > 0, \delta t_1 > 0$, т. е. для уменьшения функционала целесообразно сход с начальной орбиты осуществить

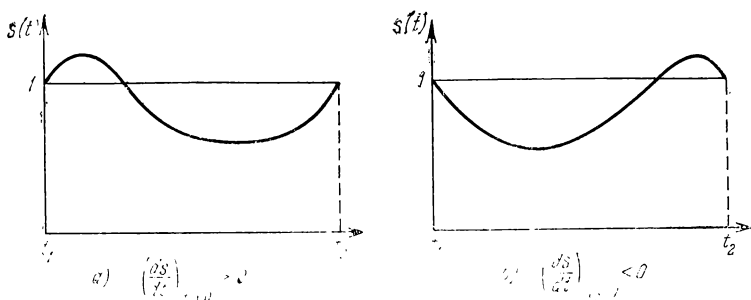


Рис. 2.3.5.

позже; в случае рис. 2.3.5, б $\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_2-0} < 0, \delta t_2 < 0$, т. е. для уменьшения функционала целесообразно произвести переход на конечную орбиту раньше. Если

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=t_1+0} = 0, \quad (2.3.53)$$

то изменение $\delta t_1, \delta t_N$ в линейном приближении не затрагивает функционал G : точка схода с начальной орбиты и точка выхода на конечную орбиту выбраны оптимально, и сдвиг их нецелесообразен. Заметим, что соотношение (2.3.53), согласно (2.3.43) и (2.2.62), совпадает с условиями трансверсальности (2.2.126), (2.2.127), хотя рассматриваемая траектория неоптимальна.

3°. Исходная траектория — N -импульсная траектория перелета между начальным и конечным многообразиями с заданными моментами $t_k, k=1, 2, \dots, N$, и радиусами-векторами $\mathbf{r}_k, k=1, 2, \dots, N$, приложения импульсов. Проанализируем возможность уменьшения функционала G за счет малого изменения моментов t_k и радиусов-векторов $\mathbf{r}_k$ приложения только внутренних импуль-

сов, без изменения количества импульсов (Минкофф, Лайон [4]). Исходная и варьированная траектории удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, поэтому

$$\delta t_1 = \delta r_1 = \delta V_1^- = \delta t_N = \delta r_N = \delta V_N^+ = 0 \quad (2.3.54)$$

и из (2.3.37) получаем

$$\delta G = \delta G_N = \sum_{k=2}^{N-1} \{ -(p_k^+ - p_k^-, \delta r_k) + (H_k^+ - H_k^-) \delta t_k \}. \quad (2.3.55)$$

В рассматриваемом случае вариации δt_k и δr_k можно считать независимыми, так как каждая кеплерова дуга, входящая в состав траектории, определяется заданием ее начальной и конечной точек $r_k + \delta r_k$, $r_{k+1} + \delta r_{k+1}$ и времени полета между ними $t_{k+1} + \delta t_{k+1} - t_k - \delta t_k$. Отметим, что использование решения сопряженной системы, удовлетворяющего условиям (2.3.36), позволило исключить из рассмотрения в вариации функционала δG (2.3.8) зависимые вариации $\delta V_k^\pm$, $k=2, \dots, N-1$, и представить δG в виде (2.3.55) через независимые вариации δt_k , δr_k .

На основании (2.3.55) имеем

$$\frac{\partial G}{\partial t_k} = H_k^+ - H_k^-, \quad (2.3.56)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r_k} = \text{grad } G = -(p_k^+ - p_k^-). \quad (2.3.57)$$

Полагая

$$\text{sign } \delta t_k = -\text{sign } (H_k^+ - H_k^-), \quad (2.3.58)$$

$$\delta r_k \parallel p_k^+ - p_k^-, \quad (2.3.59)$$

при заданных $|\delta t_k|$ и $|\delta r_k|$ осуществим максимальное (в линейном приближении) уменьшение величины функционала G . Заметим, что, как и при выборе оптимального $(N+1)$ -го импульса $\delta \Delta V$ в разделе 2.3.2, оптимальные величины $|\delta t_k|$ и $|\delta r_k|$ в рамках линейного анализа не могут быть определены (δG монотонно уменьшается с ростом $|\delta t_k|$ и $|\delta r_k|$). Если

$$H_k^+ = H_k^-, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.3.60)$$

$$p_k^+ = p_k^-, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.3.61)$$

то моменты и радиусы-векторы приложения промежуточных импульсов выбраны оптимально, хотя сама исходная траектория может и не быть локально оптимальной (например, вдоль траектории не выполнено условие (2.3.16)).

Если исходная N -импульсная траектория локально оптимальна, то условия (2.3.60), (2.3.61) на ней выполнены, поскольку эти условия содержатся среди необходимых условий оптимальности (см. разделы 2.2.1, 2.2.2).

Изложенные выше соображения могут быть положены в основу построения алгоритмов улучшения неоптимальных траекторий и численного решения на ЭЦВМ задач оптимизации импульсных траекторий с использованием решений сопряженной системы (Ежевски [1], Милкофф, Лайон [1]). Для поиска оптимальной N -импульсной траектории при $N = \text{fix}$ можно использовать градиентные методы нахождения экстремума (см. Б. П. Демидович, И. А. Марон [1], С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева [1], Кюнц, Крелле [1], Ланс [1], Р. Ли [1], Н. Н. Моисеев [1], Моррей [1], Розен [1], Томпкинс [1], Уайльд [1], Хедли [1]). Рассмотрим для определенности задачу оптимизации N -импульсной траектории перелета между заданными начальной и конечной орбитами. Поскольку такая траектория полностью определяется заданием начального t_1 и конечного t_N моментов времени, моментов времени и радиусов-векторов приложения промежуточных импульсов $t_k, \mathbf{r}_k, k=2, 3, \dots, N-1$, характеристическую скорость G такого перелета можно записать в виде

$$G = G(t_1, t_k, \mathbf{r}_k, t_N), \quad k=2, 3, \dots, N-1. \quad (2.3.62)$$

Все переменные в (2.3.62) независимы, поэтому

$$\text{grad } G = \left\{ \frac{\partial G}{\partial t_1}, \frac{\partial G}{\partial t_k}, \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}_k}, \frac{\partial G}{\partial t_N} \right\}, \quad k=2, 3, \dots, N-1 \dots \quad (2.3.63)$$

Согласно (2.3.49), (2.3.56) и (2.3.57)

$$\text{grad } G = \left\{ -|\Delta \mathbf{V}_1| \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_1+0}, H_k^+ - H_k^-, \right. \\ \left. -(\mathbf{p}_k^+ - \mathbf{p}_k^-), -|\Delta \mathbf{V}_N| \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_N-0} \right\}, \quad k=2, 3, \dots, N-1. \quad (2.3.64)$$

Знание величины $\text{grad } G$ позволяет с помощью известных методов найти точку $\min_{\{t_1, t_k, \mathbf{r}_k, t_N\}} G$ в пространстве $(4N-6)$ -мерных векторов $\{t_1, t_k, \mathbf{r}_k, t_N\}$.

Заметим, что такая оптимизация может быть проведена непосредственно в фазовом пространстве $\{t_1, t_k, \mathbf{r}_k, t_N\}$, без вычисления решений сопряженной системы. Однако непосредственное вычисление производных функционала (2.3.62) требует фактического построения варьированной N -импульсной траектории. Чтобы проделать соответствующие вычисления, необходимо для каждой кеплеровой дуги, входящей в состав варьированной N -импульсной

траектории, решать задачу Ламберта определения траектории аппарата по двум заданным его положениям и времени перелета (см. Бэттин [2], П. Е. Эльясберг [1, 2] и раздел 5.1.4). Можно добиться некоторых упрощений в вычислениях, если линеаризовать варьированную траекторию относительно опорной и использовать аппарат переходных матриц (см. раздел 2.3.2). Однако и в этом случае, особенно при большом количестве импульсов, вычисления оказываются достаточно громоздкими.

Определение же вектора $\text{grad } G$ (2.3.64) с помощью решения сопряженной системы, удовлетворяющего условиям (2.3.36), особенно с использованием известных аналитических решений сопряженной системы (см. § 3.1), может оказаться значительно проще. Существенным преимуществом использования сопряженной системы по сравнению с прямой оптимизацией в фазовом пространстве является важная дополнительная информация, позволяющая в процессе и результате вычислений устанавливать либо строгую локальную оптимальность самой N -импульсной схемы, либо целесообразность перехода к другой схеме перелета за счет введения дополнительных промежуточных импульсов.

Примеры, иллюстрирующие применение изложенных выше общих положений для оптимизации схем межпланетных перелетов КА, рассмотрены в § 10.4 и § 12.5.

Подробное изложение конкретных алгоритмов и результатов вычисления оптимальных перелетов с использованием сопряженной системы читатель найдет в упомянутых статьях Ежевски [1], Ежевски, Розендаала [1], Минкоффа, Лайона [1], в работе Гросса, Прассинга [1].

СОПРЯЖЕННАЯ СИСТЕМА
В НЬЮТОНОВСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 3.1. Общее решение сопряженной системы

Сопряженная система (2.2.21), (2.2.22) при известной фазовой траектории представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При движении КА в ньютоновском гравитационном поле под действием импульсной тяги система (2.2.21а), (2.2.22) рассматривается на фазовых траекториях, представляющих в общем случае дуги конических сечений — кеплеровы траектории. Оказывается, что на кеплеровых траекториях можно найти общее решение системы (2.2.21а), (2.2.22) в достаточно простой аналитической форме.

В настоящее время можно указать на два подхода к интегрированию сопряженной системы.

В первом подходе интегралы сопряженной системы уравнений на кеплеровых дугах получены путем непосредственного интегрирования системы (2.2.21а), (2.2.22). Этот подход принадлежит Лоудену [7, 9]. Полное изложение своего метода и основных результатов Лоуден дал в работе [24]. Другие способы решения сопряженной системы в рамках этого же подхода рассмотрены в работах Бёрпса [1], Глэндорфа [1], Гравье, Маршала, Калпа [1, 4], Хемпела [1], Экенуилера [1].

Во втором подходе решение сопряженной системы в ньютоновском гравитационном поле получается на основе известных связей между решениями систем дифференциальных уравнений и соответствующих систем уравнений в вариациях и сопряженной системы (Биркгоф [1], Пуанкаре [1], Уиттекер [1]). Изложение полученных здесь результатов дано в статьях В. И. Чарного [1, 2, 3]. Ряд результатов, относящихся непосредственно к системе (2.2.21а), (2.2.22), в этом направлении был получен в работах С. В. Дубовского [1, 2], Лайона, Хэнделсмена [1], Пауэрса, Тэпли [1]. Вопросы решения сопряженной системы уравнений на кеплеровых дугах в рамках каждого из указанных подходов подробно рассмотрены в книге В. С. Повоселова [1].

3.1.1. Решение Лоудена. Как было показано в разделе 2.2.1, система уравнений (в безразмерных переменных) (2.2.21а), (2.2.22)

для определения сопряженных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ в ньютоновском гравитационном поле имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{s}}{r^3} - (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \frac{3}{r^5} \mathbf{r}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\mathbf{p}. \quad (3.1.2)$$

Система уравнений (3.1.1) и (3.1.2) определяет векторы сопряженных переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ на всей траектории в случае импульсной тяги (см. § 2.2) и на пассивных участках движения КА в случае конечной тяги.

Исключая из (3.1.1) и (3.1.2) $\mathbf{p}$, получим линейное уравнение второго порядка для $\mathbf{s}$:

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{s}}{r^3} + \frac{3}{r^5} (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \mathbf{r}. \quad (3.1.3)$$

Для интегрирования уравнения (3.1.3) рассмотрим его в проекциях на оси подвижной декартовой системы координат $O\tau\tau_z$ (рис. 3.1.1), начало которой совпадает с центром притяжения, плоскость $O\tau\tau_z$ совпадает с плоскостью кеплеровой дуги траектории КА, ось $O\tau$ направлена по радиусу-вектору центра масс КА, трансверсаль τ направлена в сторону движения аппарата, нормаль к плоскости орбиты Oz дополняет систему до правой.

В проекциях на эти оси

$$\mathbf{s} = \{s_r, s_\tau, s_z\}. \quad (3.1.4)$$

Так как рассматриваемое гравитационное поле стационарно, система уравнений (3.1.1) и (3.1.2) имеет первый

интеграл (2.2.69), который запишем в виде

$$H = \left(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{V} \right) + \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = C' = \text{const}. \quad (3.1.5)$$

Обозначим через p и e фокальный параметр и эксцентриситет кеплеровой дуги соответственно, через η — истинную аномалию КА при движении по этой дуге.

В случае движения КА по круговой орбите общее решение уравнения (3.1.3) для вектора $\mathbf{s}$ (3.1.4) записывается в виде

$$s_r = A \cos \eta + B \sin \eta + 2C, \quad (3.1.6)$$

$$s_\tau = 2B \cos \eta - 2A \sin \eta - 3C \eta + D, \quad (3.1.7)$$

$$s_z = E \cos \eta + F \sin \eta, \quad (3.1.8)$$

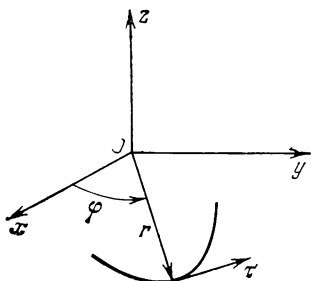


Рис. 3.1.1.

где A, B, C, D, E, F — постоянные, причем C' в (3.1.5) совпадает с C в (3.1.6), (3.1.7).

Заметим, что решение (3.1.6) — (3.1.7) с точностью до обозначения произвольных постоянных совпадает с решением (1.3.56) и (6.1.9), полученным при линеаризации движения КА в окрестности круговой орбиты.

При $e \neq 0$ общее решение уравнения (3.1.3) имеет вид

$$s_r = A \cos \eta + B e \sin \eta + C I_1, \quad (3.1.9)$$

$$s_\tau = -A \sin \eta + B(1 + e \cos \eta) - \frac{D - A \sin \eta}{1 + e \cos \eta} + C I_2, \quad (3.1.10)$$

$$s_z = \frac{E \cos \eta + F \sin \eta}{1 + e \cos \eta}, \quad (3.1.11)$$

где

$$I_1 = \sin \eta \int \frac{d\eta}{\sin^2 \eta (1 + e \cos \eta)^2}, \quad (3.1.12)$$

$$I_2 = \frac{\operatorname{ctg} \eta}{e(1 + e \cos \eta)} + \frac{1 + e \cos \eta}{e \sin \eta} I_1. \quad (3.1.13)$$

При вычислении интеграла I_1 аддитивную постоянную надо считать равной нулю, поскольку в соотношениях (3.1.9), (3.1.10) она уже учтена. В (3.1.9) — (3.1.11) A, B, C, D, E и F — постоянные интегрирования, постоянная интегрирования C в (3.1.9), (3.1.10) отличается от постоянной C' в интеграле (3.1.5) множителем p/e .

Вычисление интеграла

$$I_1^* = \int \frac{d\eta}{\sin^2 \eta (1 + e \cos \eta)^2}, \quad (3.1.14)$$

входящего в I_1 , сводится, как известно, к интегрированию рационального выражения заменой $x = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}$ (Л. Д. Кудрявцев [1], т. I).

Проведя непосредственные выкладки, получим (Лоуден [9]):

при $e \neq 1$

$$\begin{aligned} I_1^* = & \frac{1}{2(1-e)^2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} - \\ & - \frac{1}{2(1+e)^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \frac{e^3}{(1-e^2)^2} \frac{\sin \eta}{1+e \cos \eta} - \\ & - \frac{6e^2}{(1-e^2)^{5/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) \text{ для } e < 1, \quad (3.1.15 \text{ а}) \end{aligned}$$

$$I_1^* = \frac{1}{2(1-e)^2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2(1+e)^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \frac{e^3}{(1-e^2)^2} \frac{\sin \eta}{1+e \cos \eta} -$$

$$- \frac{6e^2}{(e^2-1)^{5/2}} \operatorname{arth} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) \text{ для } e > 1; \quad (3.1.15б)$$

$$I_1^* = \frac{1}{40} \operatorname{tg}^5 \frac{\eta}{2} + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^3 \frac{\eta}{2} + \frac{3}{8} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} - \frac{1}{8 \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} \text{ для } e = 1. \quad (3.1.15в)$$

Используя полученные решения для вектора s , найдем с помощью (3.1.2) соответствующие соотношения для проекций вектора p на оси r , τ , z .

При $e=0$ с учетом того, что безразмерная угловая скорость $\eta = a^{-3/2}$, где a — безразмерный радиус круговой орбиты, получаем

$$p_r = \frac{1}{a^{3/2}} (-A \sin \eta + B \cos \eta - 3C\eta + D), \quad (3.1.16)$$

$$p_\tau = \frac{1}{a^{3/2}} (A \cos \eta + B \sin \eta + C), \quad (3.1.17)$$

$$p_z = \frac{1}{a^{3/2}} (-E \cos \eta + E \sin \eta). \quad (3.1.18)$$

При $e \neq 0$ имеем

$$p_r = \frac{\sqrt{p}}{r^2} \left(\frac{-A \sin \eta + D}{1 + e \cos \eta} + B - CI_3 \right), \quad (3.1.19)$$

$$p_\tau = \frac{1}{p^{3/2}} [A(e + \cos \eta) - De \sin \eta - C \cos \eta], \quad (3.1.20)$$

$$p_z = \frac{1}{p^{3/2}} [E \sin \eta - F(\cos \eta + e)], \quad (3.1.21)$$

где

$$I_3 = \frac{e \sin^2 \eta - \cos \eta}{e \sin \eta (1 + e \cos \eta)^2} - \frac{1}{e \sin \eta} I_1. \quad (3.1.22)$$

Другие формы записи решения сопряженной системы приведены в работах Глэндорфа [1], Гравье, Маршала, Калпа [1, 4], С. В. Дубовского [1, 2], Хемпела [1], В. И. Чарного [2, 3], Экнунилера [1].

3.1.2. Особенности решения в апсидальных точках кеплеровой дуги. Входящие в решение сопряженной системы интегралы I_1 , I_2 , I_3 содержат особенности при $\eta=0$. В случае эллиптической кеплеровой дуги необходимо также рассмотреть особенности в указанных интегралах и при $\eta = 180^\circ$. В случае параболической и гиперболической дуг при ограничении (см. (2.2.4))

$$r < \infty$$

$$(3.1.23)$$

из (1.3.27) следует:

$$\cos \eta > -\frac{1}{e}, \quad (3.1.24)$$

что при $e \geq 1$ дает

$$\eta < 180^\circ. \quad (3.1.25)$$

Если же

$$r \rightarrow \infty, \text{ т. е. } \cos \eta \rightarrow -\frac{1}{e}, \quad (3.1.26)$$

то таким траекториям соответствует бесконечная продолжительность перелета (см. раздел 3.2.3), в результате чего

$$C = 0 \quad (3.1.27)$$

и интегралы I_1 , I_2 и I_3 не входят в решение сопряженной системы. Таким образом, для параболической и гиперболической дуг в рассмотрении особенностей в I_1 , I_2 , I_3 при условии (3.1.26) нет необходимости.

Как указывалось ранее (см. раздел 1.2.3), при условии $0 < r < \infty$ решение сопряженной системы всюду является ограниченным и достаточно гладким, поэтому при $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 180^\circ$ (последнее для $e < 1$) интегралы I_1 , I_2 и I_3 должны стремиться к конечным пределам. Следовательно, отмеченные особенности в них представляют собой неопределенности типа $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ и $\infty - \infty$ соответственно.

Рассмотрим сначала I_1 , I_2 и I_3 в окрестности точки $\eta = 0$ и выпишем первые члены разложений соответствующих интегралов в ряды по степеням η . Воспользовавшись соотношениями (3.1.12) и (3.1.15), получим (с учетом четности I_1 по η)

$$I_1 = -\frac{1}{(1+e)^2} + \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{1+e^2}{2} + e^3 - \frac{3e^2}{1+e} \right) \eta^2 + O(\eta^4) \text{ для } e \neq 1, \quad (3.1.28)$$

$$I_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{\eta}{2} \right)^4 + O(\eta^6) \text{ для } e = 1. \quad (3.1.29)$$

Заметим, что удержание трех явных членов в разложении (3.1.29) необходимо для раскрытия соответствующей неопределенности в интеграле I_3 .

Используя разложения (3.1.28), (3.1.29) для раскрытия неопределенности типа $\infty - \infty$ в интеграле I_2 (3.1.13), получим (с учетом нечетности I_2 по η)

$$I_2 = \frac{2(1-e)^2 + e^3}{(1-e^2)^2} \eta + O(\eta^3) \text{ для } e \neq 1, \quad (3.1.30)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \eta + O(\eta^3) \text{ для } e = 1. \quad (3.1.31)$$

Аналогично, для интеграла I_3 (3.1.22) получим (с учетом четности I_3 по η)

$$I_3 = \frac{-3 + 7e - 5e^2 - e^3}{2(1 - e^2)^2(1 + e)} \eta + O(\eta^3) \text{ для } e \neq 1, \quad (3.1.32)$$

$$I_3 = \frac{\eta^3}{16} + O(\eta^5) \text{ для } e = 1. \quad (3.1.33)$$

Для раскрытия неопределенности в окрестности точки $\eta = 180^\circ$ при $e < 1$ положим

$$\eta = 180^\circ - \Delta\eta \quad (3.1.34)$$

и выпишем первые члены разложения соответствующих интегралов по степеням $\Delta\eta$ в окрестности точки $\Delta\eta = 0$. Поскольку разложение функции

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (3.1.35)$$

в окрестности точек $x = \pm \infty$ имеет вид

$$y = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right), \quad (3.1.36)$$

получим для последнего члена в (3.1.15a) при $\eta \rightarrow 180^\circ$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \Delta\eta - \\ - \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{3/2} \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{\eta}{2}} + O\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^5 \frac{\eta}{2}}\right). \quad (3.1.37)$$

Используя разложение (3.1.37) и делая замену (3.1.34), получим аналогично тому, как это сделано выше, при $e < 1$ в окрестности точки $\eta = 180^\circ$

$$I_1 = \frac{1}{(1-e)^2} - \frac{6e^2}{(1-e^2)^{5/2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \Delta\eta\right) \Delta\eta + \frac{-1+e+5e^2+3e^3}{(1-e)(1-e^2)^2} \frac{\Delta\eta^2}{2} + \\ + O(\Delta\eta^3), \quad (3.1.38)$$

$$I_2 = \frac{-6e(1-e)}{(1-e^2)^{5/2}} \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \Delta\eta + \frac{2}{(1-e)^2} \Delta\eta + O(\Delta\eta^2), \quad (3.1.39)$$

$$I_3 = \frac{6e}{(1-e^2)^{5/2}} \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \Delta\eta - \frac{1+e}{(1-e)^3} \Delta\eta + O(\Delta\eta^2). \quad (3.1.40)$$

3.1.3. О записи решения в различных системах координат. Как следует из общих результатов, приведенных в Приложении, вид и решение сопряженной системы уравнений зависят от выбора вектора фазовых координат. При замене переменных, входящих в состав фазового вектора, можно, зная решение сопряженной системы для исходного фазового вектора, найти с помощью линейного преобразования (см. формулу (П.41) Приложения) соответ-

ствующее решение сопряженной системы для измененного фазового вектора.

При рассмотрении траекторий КА в ньютоновском гравитационном поле используются, как правило, три основные системы координат:

(1) инерциальная прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, рассмотренная в разделе 1.3.1 (см. уравнения (1.3.1) — (1.3.6));

(2) подвижная декартова система координат $Ortz$, рассмотренная в разделе 3.1.1 (см. рис. 3.1.1);

(3) подвижная цилиндрическая система координат $Or\varphi z$ (рис. 1.3.1), рассмотренная в разделах 1.3.1, 1.3.2 (см. уравнения (1.3.12) — (1.3.19) в общем случае и уравнения (1.3.46) — (1.3.55) при линеаризации уравнений движения относительно круговой орбиты).

Между системами (1) $Oxyz$, (2) $Ortz$, с одной стороны, и системой (3) $Or\varphi z$, с другой стороны, имеется существенное различие. В каждой из систем $Oxyz$ и $Ortz$ фазовыми векторами являются радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор скорости аппарат $\mathbf{V}$, заданные своими декартовыми компонентами на оси системы $Oxyz$ или системы $Ortz$. Что касается системы (3) $Or\varphi z$, то здесь, как это следует из систем уравнений (1.3.12), (1.3.13) и (1.3.46), (1.3.47), фазовым вектором является вектор

$$\mathbf{y} = \{r, \varphi, z, \mathbf{V}\}, \quad (3.1.41)$$

отличный от фазового вектора

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, \mathbf{V}\}, \quad (3.1.42)$$

использованного в первых двух системах.

Покажем, что в случае систем (1) $Oxyz$ и (2) $Ortz$ сопряженные векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ не зависят от выбора той или другой системы координат для записи уравнений движения. Проведем эти рассуждения для уравнений движения КА в произвольном стационарном гравитационном поле, рассматриваемых в двух декартовых системах координат: инерциальной и вращающейся относительно нее с угловой скоростью ω .

Будем обозначать полную производную векторов $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ в инерциальной системе координат через $\dot{\mathbf{p}}$, $\dot{\mathbf{s}}$ соответственно, а полную производную этих же векторов во вращающейся системе координат — через $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$, $\overset{\circ}{\mathbf{s}}$ соответственно. Тогда

$$\dot{\mathbf{p}} = \overset{\circ}{\mathbf{p}} + [\omega, \mathbf{p}], \quad (3.1.43)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \overset{\circ}{\mathbf{s}} + [\omega, \mathbf{s}]. \quad (3.1.44)$$

Подставляя (3.1.43) и (3.1.44) в (2.2.21), (2.2.22) соответственно, получим систему уравнений для определения векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ во вращающейся системе координат:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\left(\mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}}\right) + [\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}], \quad (3.1.45)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{p} + [\mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.1.46)$$

Обозначим полные производные $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ в инерциальной и вращающейся системах координат также через $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ соответственно. Поскольку

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], \quad (3.1.47)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}], \quad (3.1.48)$$

запишем, подставляя (3.1.47), (3.1.48) в (2.1.22), (2.1.23), уравнения движения аппарата во вращающейся системе координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{V} - [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], \quad (3.1.49)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) - [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}]. \quad (3.1.50)$$

Обозначая соответствующие сопряженные переменные во вращающейся системе координат через $\tilde{\mathbf{p}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}$ и гамильтониан системы (3.1.49), (3.1.50) через $\tilde{H}$, имеем

$$\tilde{H} = (\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{V}) - (\tilde{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]) + (\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{g}(\mathbf{r})) - (\tilde{\mathbf{s}}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}]). \quad (3.1.51)$$

С учетом известного свойства смешанного произведения трех векторов уравнения для определения векторов $\tilde{\mathbf{p}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}$ записываются в виде

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{r}} = -\left(\tilde{\mathbf{s}}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}}\right) + [\tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\omega}], \quad (3.1.52)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{p}} + [\tilde{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.1.53)$$

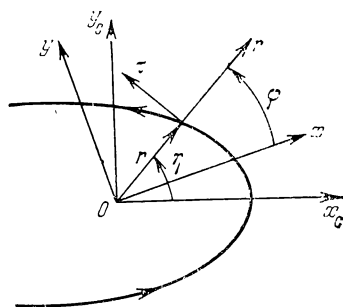
Поскольку производные по t в (3.1.45), (3.1.46) и (3.1.52), (3.1.53) вычисляются в одной и той же вращающейся системе координат, эти уравнения тождественны и

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}. \quad (3.1.54)$$

Заметим, что в разделе 3.1.1 исходная сопряженная система (3.1.1), (3.1.2) записана в инерциальной системе координат $Oxyz$, а в процессе ее решения векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ спроектированы на ось

вращающейся системы координат $O\tau z$. Согласно сказанному выше, те же уравнения для определения векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ получаются, если уравнения движения сразу же записать во вращающейся системе координат $O\tau z$.

Введем в качестве стандартной инерциальной декартовой прямоугольной системы координат $Ox_c y_c z_c$ систему, плоскость $Ox_c y_c$ которой совпадает с плоскостью кеплеровой дуги, ось Ox_c направлена в перигецентр орбиты, а оси Oz_c и Oz в системах $Ox_c y_c z_c$ и $O\tau z$ совпадают (рис. 3.1.2).



Вид со стороны оси Oz

Рис. 3.1.2.

Переход от проекций векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ на оси системы координат $O\tau z$ (3.1.6)–(3.1.8), (3.1.16)–(3.1.18) при $e = 0$ или (3.1.9)–(3.1.11), (3.1.19)–(3.1.21) при $e \neq 0$ к проекциям векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ на оси системы $Ox_c y_c z_c$ осуществляется с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} p_{xc} \\ p_{yc} \\ p_{zc} \\ s_{xc} \\ s_{yc} \\ s_{zc} \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\eta) \begin{pmatrix} p_r \\ p_\tau \\ p_z \\ s_r \\ s_\tau \\ s_z \end{pmatrix}, \quad (3.1.55)$$

где матрица перехода $\mathbf{B}(\eta)$ имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.56)$$

Рассмотрим теперь связь между сопряженными векторами при записи уравнений движения в произвольной инерциальной декартовой прямоугольной системе координат (1) $Oxyz$ и подвижной цилиндрической системе координат (3) $O\varphi z$. В соответствии с общими результатами Приложения для этого надо найти матрицу Якоби $\mathbf{A}$ (П. 31) преобразования (П.29) фазового вектора из

системы координат $Or\varphi z$ в систему координат $Oxyz$. Указанное преобразование имеет вид (см. рис. 3.1.2)

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ V_x &= V_r \cos \varphi - V_\tau \sin \varphi, \\ V_y &= V_r \sin \varphi + V_\tau \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.57)$$

Компоненты z и V_z в обеих системах одни и те же. Связь между вариациями фазовых векторов (3.1.41) и (3.1.42) в системах $Or\varphi z$ и $Oxyz$ соответственно дается соотношением

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta V_x \\ \delta V_y \\ \delta V_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \\ \delta z \\ \delta V_r \\ \delta V_\tau \\ \delta V_z \end{pmatrix}, \quad (3.1.58)$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(V_r \sin \varphi + V_\tau \cos \varphi) & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & +V_r \cos \varphi - V_\tau \sin \varphi & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.59)$$

Заметим, что

$$\det \mathbf{A} = r \quad (3.1.60)$$

и при V_r , удовлетворяющем условию $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ (см. соотношение (2.2.1)), матрица $\mathbf{A}$ невырождена.

Если произвольная система $Oxyz$ совпадает со стандартной системой $Ox_c y_c z_c$ (см. рис. 3.1.2), то в этом случае

$$\varphi \equiv \eta \quad (3.1.61)$$

и в матрице $\mathbf{A}$ достаточно заменить φ на η .

Обозначим через $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ox_c y_c z_c}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\eta z}$ фундаментальные матрицы решений сопряженных систем уравнений в системах координат $Or\tau z$, $Ox_c y_c z_c$ и $Or\eta z$ соответственно. Здесь $Ox_c y_c z_c$ представляет собой стандартную инерциальную декартову прямоугольную систему координат, а $Or\eta z$ — цилиндрическую систему координат при условии (3.1.61) (см. рис. 3.1.2).

Очевидно, что $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}$ представляет собой фундаментальную матрицу решений, полученную Лоуденом. В соответствии с общими результатами Приложения имеет место связь (см. соотношение (П. 41))

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\eta z} = \mathbf{A}^T(\eta) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ox_c y_c z_c}, \quad (3.1.62)$$

где $\mathbf{A}(\eta)$ имеет вид (3.1.59) с учетом (3.1.61). Учитывая, что между матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ox_c y_c z_c}$ и матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}$ имеет место связь (3.1.55), получаем, подставляя (3.1.55) в (3.1.62):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\eta z} = \mathbf{A}^T(\eta) \mathbf{B}(\eta) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}. \quad (3.1.63)$$

Обозначая

$$\mathbf{A}^T(\eta) \mathbf{B}(\eta) = \mathbf{C}(\eta), \quad (3.1.64)$$

имеем на основании (3.1.56) и (3.1.59) с учетом (3.1.61)

$$\mathbf{C}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & -V_\tau & V_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.65)$$

Пусть теперь $Oxyz$ — произвольная инерциальная декартова прямоугольная система координат, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью кеплеровой дуги, а ось Oz совпадает с осью Oz системы координат $Or\tau z$ (см. рис. 3.1.2).

Пусть цилиндрическая система координат (3) $Or\varphi z$ рассматривается по отношению к системе $Oxyz$, оси Oz обеих систем совпадают. Система $Or\varphi z$ отличается от системы $Or\eta z$ началом отсчета полярного угла $\varphi \neq \eta$. Обозначим через $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\varphi z}$ векторы фазовых переменных в системах $Oxyz$ и $Or\varphi z$ соответственно. Тогда, как и выше, имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz} = \mathbf{B}(\varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}, \quad (3.1.66)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\varphi z} = \mathbf{A}^T(\varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz}, \quad (3.1.67)$$

где матрица $\mathbf{B}(\varphi)$ совпадает с матрицей (3.1.56) с заменой η на φ ,

а матрица $\mathbf{A}(\varphi)$ имеет вид (3.1.59). Подставляя (3.1.66) в (3.1.67), получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\varphi z} = \mathbf{C}(\varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ortz}, \quad (3.1.68)$$

где матрица

$$\mathbf{C}(\varphi) = \mathbf{A}^T(\varphi) \mathbf{B}(\varphi) \quad (3.1.69)$$

по-прежнему имеет вид (3.1.65).

Таким образом, в тех случаях, когда плоскость Oxy инерциальной декартовой прямоугольной системы координат совпадает с плоскостью кеплеровой дуги, вид матрицы $\mathbf{C}(\eta)$ (3.1.65) не зависит от того, является ли система координат $Oxyz$ стандартной ($\eta = \varphi$) или нет ($\eta \neq \varphi$). Этот результат естественен, поскольку в этом случае начала систем координат и координатные направления системы $Ortz$, с одной стороны, и систем $Or\eta z$ и $Or\varphi z$, с другой стороны, совпадают, различается лишь выбор векторов фазовых координат.

Пусть, теперь $Oxyz$ представляет собой произвольную инерциальную декартову прямоугольную систему координат (1), а цилиндрическая система координат (3) $Or\varphi z$ рассматривается относительно этой системы координат (см. рис. 3.1.2). Обозначим вектор сопряженных переменных в системе координат $Oxyz$ также через $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz}$. Тогда векторы $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ortz}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz}$ связаны соотношением вида (3.1.66):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Oxyz} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ortz}, \quad (3.1.70)$$

где матрица $\mathbf{B}$ аналогична матрице (3.1.56), однако уже не равна этой матрице. Как и матрица (3.1.56), матрица $\mathbf{B}$ в (3.1.70) состоит из двух матриц перехода от системы осей $Ortz$ к системе осей $Oxyz$. Строками каждой из указанных матриц перехода являются направляющие косинусы осей системы $Oxyz$ относительно осей системы $Ortz$.

В рассматриваемом случае, как и выше, получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\varphi z} = \mathbf{A}^T(\varphi) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Ortz}, \quad (3.1.71)$$

где $\mathbf{A}^T(\varphi)$ по-прежнему имеет вид (3.1.59). Однако теперь уже

$$\mathbf{A}^T(\varphi) \mathbf{B} \neq \mathbf{C}(\eta), \quad (3.1.72)$$

где $\mathbf{C}(\eta)$ — матрица (3.1.65), поскольку плоскость Oxy не совпадает с плоскостью кеплеровой дуги и координатные направления в системах $Ortz$ и $Or\varphi z$ не совпадают друг с другом.

При практическом применении приведенных результатов целесообразно системы координат $Oxyz$ и $Or\varphi z$ для каждой кеплеро-

вой дуги выбирать так, чтобы плоскость Oxy совпадала с плоскостью кеплеровой дуги, поскольку в этом случае пересчет сопряженных векторов $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\tau z}$ в сопряженные векторы $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{Or\varphi z}$ происходит с помощью соотношения (3.1.68), в котором матрица $\mathbf{C}(\eta)$ имеет достаточно простой вид (3.1.65). При переходе от одной кеплеровой дуги траектории аппарата к другой кеплеровой дуге, не лежащей в той же плоскости, что и предыдущая дуга, сопряженные векторы, с учетом их непрерывности, можно пересчитывать из одной прямоугольной системы координат в другую, а затем, с помощью приведенных соотношений, — в соответствующие цилиндрические системы координат.

Проиллюстрируем полученные общие результаты на примере сопряженной системы для круговой и произвольной кеплеровой орбит. В соответствии со сказанным выше считаем, что плоскость Oxy системы $Oxyz$ совпадает с плоскостью орбиты. По определению сопряженная система для круговой орбиты совпадает с сопряженной системой для уравнений движения, линеаризованных относительно круговой орбиты. Для круговой орбиты в матрице $\mathbf{C}$ (3.1.65)

$$r = 1, \quad V_r = 0, \quad V_\tau = 1, \quad (3.1.73)$$

и она принимает вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.74)$$

В случае круговой орбиты всегда можно считать, что имеет место соотношение (3.1.61). Подставляя (3.1.74) в (3.1.63), получим связь между векторами фундаментальной матрицы сопряженной системы уравнений в системах координат $Or\tau z$ и $Or\varphi z$:

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\varphi \\ p_z \\ s_r \\ s_\varphi \\ s_z \end{pmatrix}_{Or\varphi z} = \begin{pmatrix} p_r \\ p_\tau - s_r \\ p_z \\ s_r \\ s_\tau \\ s_z \end{pmatrix}_{Or\tau z} \quad (3.1.75)$$

Записывая решение (3.1.6) — (3.1.8), (3.1.16) — (3.1.18) в виде линейной комбинации векторов фундаментальной системы решений (Л. С. Понтрягин [1]), получим фундаментальную матрицу

сопряженной системы уравнений в системе координат $O\tau\zeta$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{O\tau\zeta} \equiv \begin{pmatrix} p_r \\ p_\tau \\ p_\zeta \\ s_r \\ s_\tau \\ s_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \eta & \cos \eta & -3\eta & 1 & 0 & 0 \\ \cos \eta & \sin \eta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \eta & -\cos \eta \\ \cos \eta & \sin \eta & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sin \eta & 2\cos \eta & -3\eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \eta & \sin \eta \end{pmatrix}. \quad (3.1.76)$$

При записи (3.1.76) учтено, что на круговой орбите при условии (3.1.73) в соотношениях (3.1.16)–(3.1.18)

$$a = 1. \quad (3.1.77)$$

Подставляя векторы матрицы (3.1.76) в соотношение (3.1.75) и учитывая, что для круговой орбиты (см. (1.3.45))

$$t = \varphi = \eta, \quad (3.1.78)$$

получим фундаментальную матрицу векторов, входящих в решения (1.3.56), (1.3.57). Непосредственно также видно, что общее решение (3.1.6)–(3.1.8), (3.1.16)–(3.1.18) с помощью преобразования (3.1.75) переходит в общее решение (1.3.56), (1.3.57) (этим объясняется выбор констант в (1.3.56), (1.3.57) и в (3.1.6)–(3.1.8), (3.1.16)–(3.1.18) соответственно).

В общем случае движения по произвольной кеплеровой дуге получаем на основании (3.1.65), (3.1.68) и (3.1.69), что в фундаментальных матрицах $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{O\varphi\zeta}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{O\tau\zeta}$ для цилиндрической и прямоугольной систем координат совпадают все строки, кроме которых, для которых имеем

$$p_\varphi|_{O\varphi\zeta} = (rp_\tau - V_\tau s_r + V_r s_\tau)_{O\tau\zeta}. \quad (3.1.79)$$

Подробно вопрос о замене переменных и преобразовании решения сопряженной системы проанализирован в книге В. В. Ивашкина [4]. Аналогичные вопросы (в несколько ином аспекте) рассмотрены в книге В. С. Новоселова [1].

§ 3.2. Примеры использования решения сопряженной системы

Материал настоящего параграфа носит в основном иллюстративный характер. Приведенные примеры заимствованы из монографии Лоудена [24] с рядом изменений и дополнений. Более подробный анализ решения сопряженной системы и другие примеры читатель найдет в упомянутой монографии Лоудена [24], в его работах [9, 19, 20, 22], в работах С. В. Дубовского [2], Пращинга [1].

Предположим, что

1° время перелета не задано, функционал $G = \sum_k \Delta V_k$;

2° начальным и конечным многообразиями ((2.2.6) и (2.2.7)) являются кеплеровы дуги, положения начальной и конечной точек перелета на них не фиксированы и подлежат оптимизации.

Всюду, за исключением раздела 3.2.3, принимается, что

3° все кеплеровы дуги, входящие в перелет, компланарны.

Следуя Лоудену, примем, что на всех кеплеровых дугах, входящих в перелет,

$$H(t) = C = 0. \quad (3.2.1)$$

Равенство (3.2.1) имеет, в частности, место, если перелет начинается или кончается на круговой орбите, поскольку в системе координат Ort краевые условия можно записать в виде $V_{ir}^k = 0$, $V_{it}^k = \text{const}$, $r_{ir}^k = \text{const}$, $r_{it}^k = 0$, где $i = 1$, $k = -$ или $i = N$, $k = +$, не зависящем от времени. Равенство (3.2.1) выполняется также для перелетов, включающих бесконечно удаленную точку (см. (3.2.47)).

3.2.1. Векторы s и r на круговой орбите ($e=0$). На круговой орбите при $C = 0$ получаем из (3.1.6) и (3.1.7)

$$s_r = A \cos \eta + B \sin \eta = R \sin(\eta + \eta_0), \quad (3.2.2)$$

$$s_\tau = 2B \cos \eta - 2A \sin \eta + D = 2R \cos(\eta + \eta_0) + D, \quad (3.2.3)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (3.2.4)$$

$$\sin \eta_0 = A/R, \quad \cos \eta_0 = B/R. \quad (3.2.5)$$

Поскольку на круговой орбите все точки равноправны, полярную ось отсчета всегда можно совместить с направлением η_0 , т. е. всегда можно считать $\eta_0 = 0$. Тогда (3.2.2) и (3.2.3) перепишутся в виде

$$s_r = R \sin \eta, \quad (3.2.6)$$

$$s_\tau = 2R \cos \eta + D. \quad (3.2.7)$$

На плоскости s_r, s_τ геометрическим местом точек вектора s — годографом вектора s — является эллипс (рис. 3.2.1)

$$\left(\frac{s_r}{R}\right)^2 + \frac{(s_\tau - D)^2}{(2R)^2} = 1. \quad (3.2.8)$$

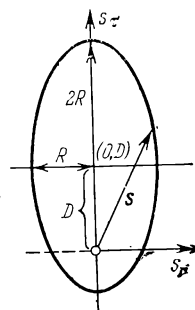


Рис. 3.2.1.

Из рис. 3.2.1 и (3.2.6), (3.2.7) следует, что

$$\text{при } D > 0 \max s \text{ достигается при } \eta = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\text{при } D < 0 \max s \text{ достигается при } \eta = \pi, \quad (3.2.10)$$

при $D = 0$ $\max s$ достигается при $\eta = 0$ и $\eta = \pi$. (3.2.14)

Рассмотрим важный для практики случай, когда КА стартует с круговой орбиты или выходит на круговую орбиту. В этом случае на круговой орбите КА сообщается один импульс. В соответствии со сказанным в разделе 2.2.2 (см. (2.2.88)) в точке приложения импульса достигается $\max s$ и

$$s = 1. \quad (3.2.12)$$

Используя (3.2.6), (3.2.7), (3.2.9) — (3.2.12), получим

$$s_r = \frac{1 \mp D}{2} \sin \eta, \quad (3.2.13)$$

$$s_\tau = (1 \mp D) \cos \eta + D, \quad (3.2.14)$$

где знак «—» перед D соответствует разгонному импульсу ($D > 0$), сообщаемому КА в точке $\eta = 0$, а знак «+» — тормозному импульсу, сообщаемому в точке $\eta = \pi$ ($D < 0$). При этом

$$|D| < 1. \quad (3.2.15)$$

Рассмотрим при $C = 0$ вектор $\mathbf{p}$ на круговой орбите. Перепишем (3.1.16) и (3.1.17) с учетом (3.2.4) и (3.2.5) в виде

$$p_r = \frac{1}{a^{3/2}} (R \cos \eta + D), \quad (3.2.16)$$

$$p_\tau = \frac{1}{a^{3/2}} R \sin \eta. \quad (3.2.17)$$

Если КА сообщается импульс на круговой орбите, то, аналогично (3.2.13), (3.2.14),

$$p_r = \frac{1}{a^{3/2}} \left[\frac{(1 \mp D)}{2} \cos \eta + D \right], \quad (3.2.18)$$

$$p_\tau = \frac{(1 \mp D)}{2a^{3/2}} \sin \eta. \quad (3.2.19)$$

Рассмотрим теперь предельные значения $D = 0$ и $D = \pm 1$. Случай $D = 0$ также описывается формулами (3.2.13), (3.2.14), (3.2.18), (3.2.19). При этом точке $\eta = 0$ соответствует разгонный трансверсальный импульс, а точке $\eta = \pi$ — трансверсальный тормозной импульс. Этот случай реализуется, если круговая орбита является промежуточной кеплеровой дугой на оптимальной траектории и на пей КА сообщаются два импульса тяги.

Если $D = \pm 1$, верхний и нижний знаки соответствуют разгонному и тормозному трансверсальному импульсам, $s_r \equiv 0$ и

$s_r = \pm 1$. В этом случае во всех точках круговой орбиты $|s| = 1$ и необходимые условия строгой локальной оптимальности (2.2.87) — (2.2.89) на круговой орбите не выполнены.

На основании сказанного случай $|D| = 1$, при котором на круговой орбите не выполняются необходимые условия оптимальности приложения дискретных импульсов, в дальнейшем рассматриваться не будет. Таким образом, в дальнейшем на круговой орбите, входящей в состав оптимальной траектории, считаем допустимыми значения D , удовлетворяющие неравенству (3.2.15). При этом всюду на круговой орбите выполняются необходимые условия оптимальности (2.2.87) — (2.2.89).

В любом случае, при выходе на круговую орбиту, при сходе с нее в оптимальной точке на орбите ($C = 0$), вектор скорости КА до импульса или после импульса соответственно ортогонален к радиусу-вектору аппарата. Таким образом, приходим к следующему важному результату: переход между любой кеплеровой дугой и круговой орбитой, входящей в состав оптимальной траектории КА, при оптимальном выборе точки перехода может совершаться только в апсидальной точке кеплеровой дуги.

3.2.2. Векторы s и p на произвольной кеплеровой дуге ($e \neq 0$). Учитывая сказанное в конце предыдущего раздела, рассмотрим случай, когда кеплерова дуга, входящая в состав траектории, начинается или кончается в апсидальной точке, т. е. КА при $\eta = 0$ или $\eta = \pi$ сообщается трансверсальный импульс. При $C = 0$ получаем из (3.1.9) и (3.1.10)

$$A = 0 \quad (3.2.20)$$

и на кеплеровой дуге

$$s_r = Be \sin \eta, \quad (3.2.21)$$

$$s_\tau = B(1 + e \cos \eta) + \frac{D}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.2.22)$$

Проведем анализ зависимости $s(\eta)$ на кеплеровой дуге, следуя в основном Лоудену [24]. Однако, в отличие от Лоудена, при отборе возможных вариантов включения кеплеровой дуги в оптимальную траекторию будем сразу учитывать полную совокупность необходимых условий строгой локальной оптимальности.

С помощью (3.2.21), (3.2.22) получим

$$s^2 = B^2(1 + e^2) + 2BD + 2B^2X + \frac{D^2}{(1 + X)^2}, \quad (3.2.23)$$

где обозначено

$$X = e \cos \eta. \quad (3.2.24)$$

Предположим сначала, что

$$B \neq 0. \quad (3.2.25)$$

Тогда (3.2.23) можно переписать так:

$$\beta = 2X + \frac{\alpha}{(1 + X)^2}, \quad (3.2.26)$$

где

$$\alpha = \frac{D^2}{B^2} \geq 0, \quad (3.2.27)$$

$$\beta = \frac{s^2}{B^2} - (1 + e^2) - 2 \frac{D}{B}. \quad (3.2.28)$$

График кривой $\beta = \beta(X)$ для нескольких значений α показан на рис. 3.2.2. При $D \neq 0$, $\alpha > 0$ β достигает минимума в точке X_0 :

$$\beta \Rightarrow \min: X_0 = \alpha^{1/3} - 1 > -1. \quad (3.2.29)$$

Во всех остальных точках

$$\frac{d\beta}{dX} = 2 - \frac{2\alpha}{(1+X)^3} \neq 0 \text{ при } X \neq X_0. \quad (3.2.30)$$

Точка на кеплеровой дуге может служить точкой приложения внутреннего оптимального импульса, если, согласно (2.2.51), (2.2.88) и (3.2.28), в ней одновременно выполнены условия

$$\beta \Rightarrow \max, \quad \frac{d\beta}{d\eta} = 0. \quad (3.2.31)$$

Поскольку

$$\frac{d\beta}{d\eta} = - \frac{d\beta}{dX} e \sin \eta \quad (3.2.32)$$

и $\frac{d\beta}{dX} = 0$ в точке X_0 (3.2.29) минимума β , второе из условий (3.2.31) может выполняться лишь в апсидальных точках кеплеровой дуги. Если импульс прикладывается в крайней точке траектории, положение которой на траектории оптимизируется, то, согласно принципу окаймления, такая точка не отличается от точки приложения оптимального внутреннего импульса и в ней снова должны выполняться условия (3.2.31). При приложении импульса в конечной заданной точке траектории второе из условий (3.2.31) может не выполняться.

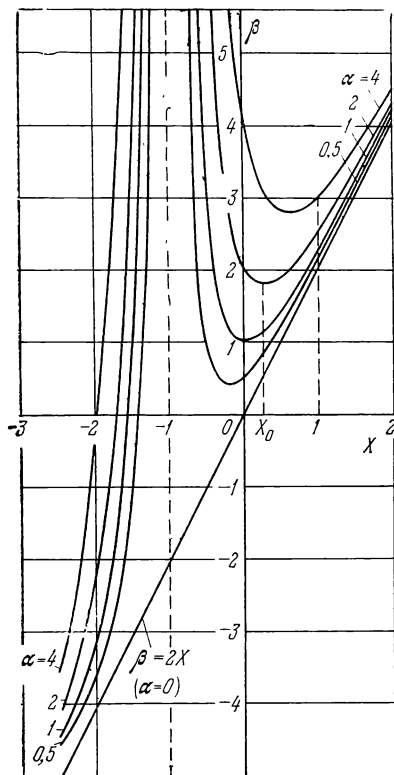


Рис. 3.2.2.

Проанализируем с учетом сказанного возможные варианты вхождения кеплеровой дуги в состав оптимальной траектории, предполагая, что все точки на траектории конечны и, следова-

тельно, переменная X (3.2.24) изменяется в диапазоне

$$-1 < X \leq e. \quad (3.2.33)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Пусть кеплеровой дугой является эллипс с эксцентриситетом $e < 1$ и $X \in [-e, e]$. Если $X_0 \in (-e, e)$, то (см. рис. 3.2.2) условия (3.2.31) выполняются в апсидальных точках $\eta = 0$ и $\eta = \pi$. В этом случае эллиптическая дуга может служить как внутренней, так и начальной или заключительной кеплеровой дугой оптимальной траектории. Если $X_0 < -e$ или $X_0 > e$, то (см. рис. 3.2.2) условия (3.2.31) выполняются в перигее $\eta = 0$ или апогее $\eta = \pi$ соответственно. Во всех остальных точках $X \in [-e, e)$ или $X \in (-e, e]$ $\beta < \beta_{\max}$ и импульс прикладываться не может. Таким образом, в этих случаях эллиптическая дуга может быть начальной или заключительной дугой оптимального перелета.

Пусть теперь кеплеровой дугой является парабола или гипербола с эксцентриситетом $e \geq 1$ и $X \in (-1, e]$. Поскольку среди конечных точек на этих кеплеровых дугах перигей является единственной точкой, в которой импульс направлен по трансверсали (см. (3.2.21), (3.2.22)), то, согласно сказанному в начале раздела, перигей обязательно должен быть одной из крайних точек этой кеплеровой дуги, в которой прикладывается импульс. Если $X_0 < e$, то в перигее выполнены оба условия (3.2.31). Движение по этой кеплеровой дуге возможно между перигеем и точкой, в которой истинная аномалия η_* удовлетворяет уравнению (см. рис. 3.2.2)

$$2X_* + \frac{\alpha}{(1+X_*)^2} = 2e + \frac{\alpha}{(1+e)^2}, \quad X_* = e \cos \eta_* < X_0. \quad (3.2.34)$$

Каждому значению X_* соответствуют два значения η_* : $\eta_* > 0$ и $\eta_* < 0$. Если движение аппарата происходит от перигея $\eta = 0$ до точки $\eta < \eta_*$ ($\eta_* > 0$) или от точки $\eta > \eta_*$ ($\eta_* < 0$) к перигею $\eta = 0$, то на такой дуге импульс прикладывается лишь в перигее. Если движение начинается или кончается в точке η_* , то это значение истинной аномалии соответствует заданной начальной или конечной точке траектории соответственно и в этой точке прикладывается импульс. В точке $\eta = \eta_*$ второе из условий (3.2.31), очевидно, не выполняется, поэтому эта точка не может быть внутренней точкой траектории перелета, а также выбираемой оптимально точкой приложения импульса на начальной или конечной кеплеровой дуге. Из сказанного следует, что при $X_0 < e$ параболическая или гиперболическая дуга может являться начальной или конечной дугой оптимальной траектории. В перигее этой дуги происходит соединение с остальной частью траектории и прикладывается внутренний импульс скорости.

Если $X_0 \geq e$, то во всех точках кеплеровой дуги $\beta > \beta_{\min} = \beta(\eta = 0)$ (см. рис. 3.2.2) и всюду на траектории не выполнено необходимое условие оптимальности (2.2.89). Следовательно, в этом случае параболическая или гиперболическая дуги не могут входить в состав оптимальной траектории.

Пусть теперь

$$D = 0, \quad \alpha = 0. \quad (3.2.35)$$

В этом случае в перигеентре выполнены оба условия (3.2.31), во всех же остальных точках $X < e$ любой кеплеровой дуги $\beta < \beta_{\max} = \beta(\eta = 0)$ и импульс прикладываться не может. Следовательно, при условии (3.2.35) кеплерова дуга может являться начальной или конечной дугой оптимальной траектории. В перигеентре происходит соединение с остальной частью траектории и прикладывается внутренний импульс.

При $D = 0$ из (3.2.21), (3.2.22) получаем

$$s_r = Be \sin \eta, \quad (3.2.36)$$

$$s_\tau = B(1 + e \cos \eta). \quad (3.2.37)$$

Сравнивая компоненты s_r и s_τ с соответствующими компонентами вектора скорости аппарата $\mathbf{V}$ (1.3.37), (1.3.38), замечаем, что

$$s(\eta) = B \sqrt{p} \mathbf{V}(\eta). \quad (3.2.38)$$

Случай, когда одновременно $A = 0$, $D = 0$, реализуется, в частности, когда рассматриваемой кеплеровой дугой является параболическая или гиперболическая дуга, проходящая через бесконечно удаленную точку (см. раздел 3.2.3).

Рассмотрим теперь случай, когда

$$B = 0, \quad D \neq 0 \quad (3.2.39)$$

и компоненты сопряженного вектора (3.2.21), (3.2.22) равны

$$s_r = 0, \quad (3.2.40)$$

$$s_\tau = \frac{D}{1 + e \cos \eta}. \quad (3.2.41)$$

Из (3.2.40), (3.2.41) следует, что при условии (3.2.39) эллиптическая дуга ($e < 1$) только с одним импульсом в апоцентре удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Такая эллиптическая дуга может служить начальной или конечной дугой оптимальной траектории, причем в апоцентре эта дуга соединяется с остальной траекторией. Заметим, что этот случай соответствует рассмотренному выше случаю для эллиптической дуги при $B \neq 0$ и $X_0 > e$.

В случае параболической дуги ($e = 1$) или гиперболической дуги ($e > 1$) при движении от перигеентра $s(\eta)$ монотонно воз-

растает, и, поскольку оптимальный трансверсальный импульс на этих кеплеровых дугах может быть приложен только в перигентре, на таких дугах не выполняется необходимое условие оптимальности (2.2.89), и, следовательно, параболическая и гиперболическая дуги при условии (3.2.39) не могут входить в состав оптимальной траектории.

Сводка всех рассмотренных вариантов возможности или недопустимости включения кеплеровой дуги в состав оптимальной траектории перелета приведена в таблице 3.2.1.

Таким образом, если кеплерова дуга начинается или кончается в апсидальной точке и все точки приложения импульсов оптимизируются, то импульс может сообщаться КА только в апсидальных точках. Из этого следует, что параболическая и гиперболическая дуги могут являться только заключительными участками оптимальной траектории. В случае эллиптической дуги получаем, что если один из импульсов — при $\eta = 0$ или $\eta = \pi$ — трансверсальный, то и второй импульс — при $\eta = \pi$ или $\eta = 0$ соответственно — тоже трансверсальный.

На основании сказанного выше и в разделе 3.2.1 с учетом принципа окаймления приходим к следующему важному выводу.

Если в оптимальном плоском перелете между начальной и конечной кеплеровыми дугами (а) продолжительность перелета не задана и $C = 0$, (б) все точки перехода между кеплеровыми дугами, а также начальная и конечная точки на траектории не заданы, а выбираются оптимально и (в) одна из кеплеровых дуг, входящих в перелет, начинается или кончается в апсидальной точке, то при таком перелете все импульсы сообщаются КА только в апсидальных точках всех кеплеровых дуг, входящих в перелет (при условии, что радиус-вектор аппарата все время конечен).

Пусть КА сообщается импульс в перигентре и кеплерова дуга является эллипсом, параболой или гиперболой. Тогда с учетом (3.2.12), (3.2.20) получим, что на кеплеровой дуге постоянные B и D связаны соотношением

$$B(1+e)^2 + D = \pm (1+e). \quad (3.2.42)$$

Если кеплерова дуга является эллипсом, то импульс может сообщаться КА в апоцентре и аналогично

$$B(1-e)^2 + D = \pm (1-e). \quad (3.2.43)$$

Знаки плюс и минус в правых частях (3.2.42), (3.2.43) соответствуют разгонному и тормозному импульсу.

Если на эллипсе КА сообщаются импульсы как в перигентре, так и в апоцентре, то в каждой из этих точек должны выполняться соотношения (3.2.42) и (3.2.43).

Таблица 3.2.1

B ≠ 0	D ≠ 0	Эллипс, e < 1	Положение корня X ₀	X ₀ ∈ (-e, e)	X ₀ < -e	X ₀ > e
			Возможные точки приложения оптимального импульса	η = 0, η = π	η = 0	η = π
			Тип дуги в составе оптимальной траектории	Внутренняя, начальная или конечная дуга	Начальная или конечная дуга	
		Парабола, e = 1, или гипербола, e > 1	Положение корня X ₀	X ₀ ∈ (-1, e)		X ₀ > e
			Возможные точки приложения оптимального импульса	η = 0, η = η* см. (3.2.34)		—
			Тип дуги в составе оптимальной траектории	Начальная или конечная дуга, точка соединения с оптимальной траекторией η = 0		Кеплерова дуга не может входить в состав оптимальной траектории
	D = 0, α = 0	Эллипс, парабола, гипербола	Возможные точки приложения оптимального импульса	η = 0		
			Тип дуги в составе оптимальной траектории	Начальная или конечная дуга		
	B = 0, D ≠ 0	Эллипс, e < 1	Возможные точки приложения оптимального импульса	η = π		
			Тип дуги в составе оптимальной траектории	Начальная или конечная дуга		
Парабола, e = 1, или гипербола, e > 1		Кеплерова дуга не может входить в состав оптимальной траектории				

Компоненты вектора $\mathbf{p}$ (3.1.19), (3.1.20) с учетом (3.2.20):

$$p_r = \frac{1}{p^{3/2}} (1 + e \cos \eta)^2 \left(\frac{D}{1 + e \cos \eta} + B \right), \quad (3.2.44)$$

$$p_\tau = - \frac{1}{p^{3/2}} D e \sin \eta. \quad (3.2.45)$$

Сопоставим полученные результаты с необходимыми условиями оптимальности импульсных перелетов (см. раздел 2.2.1). Условие непрерывности гамильтониана H (2.2.47) на всей оптимальной траектории выполнено за счет того, что постоянная $C = 0$ на всей траектории (условие (3.2.1)). Условия непрерывности вектора $\mathbf{s}$ (2.2.45), (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60) и (2.2.88), (2.2.51) в момент приложения импульса выполнены путем выбора на кеплеровых дугах в качестве точек для сообщения импульсов КА только апсидальных точек и специального выбора констант в соотношениях для компонент вектора $\mathbf{s}$. Поскольку в выбранных апсидальных точках (выбор η) s достигает максимума, на всей траектории удовлетворяется условие (2.2.87). Так как начальная и конечная точки на рассматриваемых траекториях также являются апсидальными для соответствующих кеплеровых дуг, в этих точках выполнены условия (2.2.88), (2.2.51) и на основании принципа окаймления выполнены условия трансверсальности (2.2.62), (2.2.63).

Таким образом, единственным условием, которое еще не рассматривалось, является условие Вейерштрасса — Эрмита (2.2.44) непрерывности вектора $\mathbf{p}$ в момент сообщения импульса тяги КА. Это условие в апсидальных точках кеплеровых дуг, как следует из (3.2.18), (3.2.19), (3.2.44), (3.2.45), сводится к непрерывности компоненты p_r в этих точках. При «склеивании» в апсидальной точке двух кеплеровых дуг, входящих в состав оптимальной траектории, это условие дает дополнительное соотношение для определения постоянной интегрирования D на круговой орбите и постоянных интегрирования B и D на кеплеровой дуге (см. раздел 3.2.4).

3.2.3. Векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}$ на кеплеровых дугах, проходящих через бесконечно удаленную точку. Уточним полученные в разделе 2.2.4 результаты, основываясь на явном аналитическом представлении вектора $\mathbf{s}$ (3.1.9) — (3.1.11) и вектора $\mathbf{p}$ (3.1.19) — (3.1.21).

На основании сказанного в конце раздела 2.2.4, для того чтобы имели место предельные соотношения (2.2.138), (2.2.139), достаточно, чтобы функция $s(t)$ была ограничена при $r \rightarrow \infty$ (см. (2.2.136)). Но тогда, как показано в разделе 2.2.4, предельные значения гамильтониана (2.2.29)

$$H_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} H = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[(\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] = 0. \quad (3.2.46)$$

Учитывая, что во всех точках кеплеровой дуги, проходящей через бесконечно удаленную точку, имеет место первый интеграл (2.2.69) и гамильтониан (2.2.29) непрерывен во всех точках этой дуги, включая бесконечно удаленную точку, на основании (3.2.46) получаем, что постоянная C' в (3.1.5) и, следовательно, постоянная $C = \frac{p}{e} C'$ в решении (3.1.9) — (3.1.11), (3.1.19) — (3.1.21) равна нулю:

$$C = 0, \quad (3.2.47)$$

независимо от того, входит ли эта дуга в состав оптимальной траектории или нет. Поскольку при $r \rightarrow \infty$ продолжительность движения по кеплеровой дуге, содержащей бесконечно удаленную точку, неограниченно возрастает, рассматриваемые кеплеровы дуги могут входить в состав оптимальной траектории только при незаданной продолжительности перелета. В этом случае равенство (3.2.47) следует из общих свойств оптимальных траекторий с незаданной продолжительностью перелета (см. (2.2.70)).

Из (1.3.27) следует, что траектория аппарата проходит через бесконечно удаленную точку при условии

$$\cos \eta \rightarrow -\frac{1}{e}. \quad (3.2.48)$$

На основании сказанного исследуем свойства решения (3.1.9) — (3.1.11), (3.1.19) — (3.1.21) при условиях (3.2.47), (3.2.48), предполагая лишь ограниченность функции $s(\eta) = s(t(\eta))$ (см. (2.2.136)):

$$|s(\eta)| \leq M < \infty \quad \text{при} \quad \cos \eta \rightarrow -\frac{1}{e}, \quad (3.2.49)$$

и не предполагая пока, что рассматриваемая кеплерова дуга входит в состав оптимальной траектории.

Чтобы при условии (3.2.48) функция $s(\eta)$ была ограниченной, между постоянными A, D, E и F должны выполняться соотношения

$$eD - \sqrt{e^2 - 1}A = 0, \quad (3.2.50)$$

$$-E + \sqrt{e^2 - 1}F = 0. \quad (3.2.51)$$

Подставляя (3.2.50), (3.2.51) в (3.1.19) — (3.1.21), получим, что для любой кеплеровой дуги, проходящей через бесконечно удаленную точку, из ограниченности функции $s(\eta)$ при $r \rightarrow \infty$ следует (2.2.138),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_\infty = 0. \quad (3.2.52)$$

Из (3.2.52) и (3.1.2) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} s = s_\infty. \quad (3.2.53)$$

Найдем предельное значение (3.2.53) вектора s

$$s_{\infty} = \{s_{\infty r}, s_{\infty \tau}, s_{\infty z}\} \quad (3.2.54)$$

для гиперболы и параболы. Для этого достаточно раскрыть в (3.1.10) и (3.1.11) неопределенности типа $\frac{0}{0}$ при $\cos \eta \rightarrow -\frac{1}{e}$ и учесть соотношения (3.2.50), (3.2.51). В результате для гиперболы получим

$$s_{\infty r} = -\frac{A}{e} + B\sqrt{e^2 - 1}, \quad s_{\infty \tau} = -\frac{Ae}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad s_{\infty z} = \frac{Fe}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (3.2.55)$$

Для параболической же дуги имеем

$$A = D = E = F = 0. \quad (3.2.56)$$

Таким образом, в случае параболической дуги, проходящей через бесконечно удаленную точку, вектор $s(\eta)$ всегда имеет вид

$$s_r = B \sin \eta, \quad (3.2.57)$$

$$s_{\tau} = B(1 + \cos \eta), \quad (3.2.58)$$

$$s_z \equiv 0. \quad (3.2.59)$$

Из (3.2.57) — (3.2.59) следует, что предельное значение вектора s_{∞} всегда (см. (2.2.150))

$$s_{\infty} = 0. \quad (3.2.60)$$

Предположим теперь, что параболическая дуга, проходящая через бесконечно удаленную точку, входит в состав оптимальной траектории перелета, и с учетом полученных выше соотношений уточним общие результаты раздела 2.2.4. Проанализируем типичный случай, когда в конечной точке приложения импульса рассматриваемая параболическая дуга соединяется с некоторой кеплеровой дугой. Тогда в этой внутренней точке приложения оптимального импульса должны иметь место условия (2.2.46), (2.2.51). Эти условия могут выполняться только в перигентре при $\eta = 0$, причем

$$|B| = \frac{1}{2} \quad (3.2.61)$$

и

$$s_r = \pm \frac{1}{2} \sin \eta, \quad (3.2.62)$$

$$s_{\tau} = \pm \frac{1}{2} (1 + \cos \eta), \quad (3.2.63)$$

где знак «+» соответствует разгонному трансверсальному импульсу, а знак «—» — тормозному трансверсальному импульсу. Поскольку импульс в перигентре параболы прикладывается по трансверсали, точкой перехода на соседней дуге может быть только

апсидальная точка этой кеплеровой дуги. Из (3.2.62), (3.2.63) следует, что во всех точках параболической дуги выполняются условия строгой локальной оптимальности (2.2.88), (2.2.89). Компоненты сопряженного вектора $\mathbf{p}$ (3.1.19) — (3.1.21) на рассматриваемой параболической дуге с учетом (3.2.56) и (3.2.61) записываются в виде

$$p_r = \pm \frac{1}{2\rho^{3/2}} (1 + \cos \eta)^2, \quad p_\tau = 0, \quad p_z = 0. \quad (3.2.64)$$

Отметим, что в отличие от анализа, проведенного в разделах 3.2.1 и 3.2.2, компланарность рассматриваемой параболической дуги с примыкающей к ней кеплеровой дугой выступает не в качестве предположения, а следует из условия (3.2.49), выполняющегося, как показано в разделе 2.2.4, на оптимальных траекториях. Кроме того, в отличие от сказанного в разделе 3.2.2, то обстоятельство, что импульс прикладывается в общей апсидальной точке параболы и примыкающей кеплеровой дуги, следует не из сделанного в начале раздела 3.2.2 предположения, а является следствием необходимых условий оптимальности перелета в точке приложения внутреннего импульса.

Для движения по гиперболической дуге получить аналогичные результаты в общем случае не удастся, поскольку соотношения (3.2.50), (3.2.51), по существу, не упрощают вид решения (3.1.9) — (3.1.11). Поэтому здесь, как и в разделе 3.2.2, ограничимся рассмотрением случая, когда гиперболическая дуга, проходящая через бесконечно удаленную точку, компланарна с примыкающей к ней кеплеровой дугой и импульс в конечной точке на ней прикладывается в перигеентре при $\eta = 0$. Тогда на основании (3.2.20) и (3.2.50)

$$A = D = 0 \quad (3.2.65)$$

и на рассматриваемой гиперболической дуге, проходящей через бесконечно удаленную точку, вектор $\mathbf{s}(\eta)$ имеет компоненты

$$s_r = Be \sin \eta, \quad (3.2.66)$$

$$s_\tau = B (1 + e \cos \eta), \quad (3.2.67)$$

$$s_z = 0. \quad (3.2.68)$$

Из (3.2.66), (3.2.67) и (2.2.46), (2.2.51) получаем

$$|B| = \frac{1}{1+e}, \quad (3.2.69)$$

откуда

$$s_r = \pm \frac{e}{1+e} \sin \eta, \quad (3.2.70)$$

$$s_\tau = \pm \frac{1}{1+e} (1 + e \cos \eta), \quad (3.2.71)$$

где знак «+» соответствует разгонному трансверсальному импульсу, а знак «—» — тормозному трансверсальному импульсу.

Компоненты p_r и p_τ вектора $\mathbf{p}$ в рассматриваемом случае равны

$$p_r = \pm \frac{1}{p^{3/2}} \frac{(1 + e \cos \eta)^2}{1 + e}, \quad p_\tau = 0, \quad (3.2.72)$$

где знаки « $\pm$ » совпадают с соответствующими знаками в (3.2.70), (3.2.71).

Из (3.2.70), (3.2.71) следует, что в промежутке $\left[0, \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)\right]$ функция $s(\eta)$ монотонно убывает с ростом η , достигая максимума $s = 1$ при $\eta = 0$. Поскольку

$$s_\infty = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} < 1 \quad \forall e > 1, \quad (3.2.73)$$

во всех точках рассматриваемой гиперболической дуги, кроме перигея, импульс прикладываться не может, причем во всех точках гиперболической дуги выполняются условия строгой локальной оптимальности (2.2.87) — (2.2.89).

Сравнивая компоненты (3.2.70), (3.2.71) вектора $\mathbf{s}$ с соответствующими компонентами скорости аппарата $\mathbf{V}$ (1.3.37), (1.3.38), замечаем, что на рассматриваемых гиперболических дугах имеет место равенство (см. соотношения (3.2.36) — (3.2.38))

$$\mathbf{s}(\eta) = \frac{\sqrt{p}}{1+e} \mathbf{V}(\eta). \quad (3.2.74)$$

3.2.4. Оптимальность гомановского и биэллиптического перелетов. Рассмотрим оптимальный переход КА между компланарными круговыми орбитами. В соответствии с полученными выше общими результатами такой переход при условии конечности радиуса-вектора аппарата должен совершаться по некоторому числу полуэллипсов, все апсидальные точки которых лежат на одной прямой (все импульсы сообщаются КА на конечном расстоянии от центра тяготения). Простейшим переходом такого типа является перелет по полуэллипсу, касательному в апсидальных точках к заданным круговым орбитам (рис. 3.2.3). Это условие полностью определяет указанный перелет (см. Эриксе [7]).

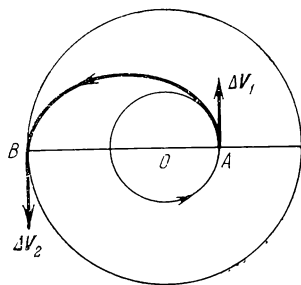


Рис. 3.2.3.

Перелет такого типа впервые исследовался Гоманом [1], по имени которого назван *гомановским перелетом*. Исследуем строгую локальную оптимальность гомановского перелета. Будем для

определенности рассматривать перелет с внутренней круговой орбиты на внешнюю круговую орбиту.

Обозначим радиусы внутренней и внешней орбит через a и b соответственно. Из соотношений

$$a = \frac{p}{1+e}, \quad b = \frac{p}{1-e} \quad (3.2.75)$$

для фокального параметра и эксцентриситета гомановского перелета получаем

$$p = \frac{2n}{n+1}, \quad (3.2.76)$$

$$e = \frac{n-1}{n+1}, \quad (3.2.77)$$

где

$$n = \frac{b}{a} > 1. \quad (3.2.78)$$

В точках A и B касания гомановского полуэллипса начальной и конечной орбит КА сообщаются разгонные трансверсальные импульсы, равные модулю разности скоростей движения аппарата по соответствующей круговой орбите и в соответствующей апсидальной точке эллипса.

Относя все скорости к скорости движения по внутренней круговой орбите, получим из (1.3.38) с учетом (3.2.75)–(3.2.77) для импульсов в точках A и B соответственно

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2n}{1+n}} - 1, \quad (3.2.79)$$

$$\Delta V_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+n}} \right). \quad (3.2.80)$$

Характеристическая скорость гомановского перелета равна

$$\Delta V_{\Sigma \text{ гом}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sqrt{\frac{2n}{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1. \quad (3.2.81)$$

Зависимость $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{\Sigma}(n)$ (3.2.81), приведенная на рис. 3.2.5, подробно исследована в работах Хёлкера, Зилбера [1], Эриксе [7], Эскобала [2]. Согласно (3.2.81)

$$\lim_{n \rightarrow 1} \Delta V_{\Sigma \text{ гом}} = 0, \quad (3.2.82)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta V_{\Sigma \text{ гом}} = \sqrt{2} - 1. \quad (3.2.83)$$

В последнем случае характеристическая скорость гомановского перелета равна разности между параболической и круговой скоростями. Можно показать, что при $n = 15,582$ характеристиче-

ская скорость гомановского перелета (3.2.81) достигает максимума (рис. 3.2.5). Величина этого максимума, отнесенная к круговой скорости на внутренней орбите, равна 0,536.

Разгонные трансверсальные импульсы сообщаются КА в точках касания полуэллипса к круговым орбитам A и B (рис. 3.2.3). На переходном эллипсе этим точкам соответствуют значения истинной аномалии $\eta = 0$ в точке A и $\eta = \pi$ в точке B . В соответствии с результатами раздела 3.2.1 на каждой из круговых орбит этим же точкам соответствует значение истинной аномалии $\eta = 0$, где для каждой из круговых орбит берется своя истинная аномалия η (см. соотношения (3.2.9), (3.2.13), (3.2.14)).

Далее, следуя Лоудену [24], примем, что начальная и конечная круговые орбиты входят в состав оптимального перелета (на это важное обстоятельство обратил внимание В. С. Новоселов [1]; отметим очевидную аналогию между этим предположением и принципом окаймления, см. раздел 2.2.3).

На основании сказанного в конце раздела 3.2.2 запишем условия непрерывности вектора $\mathbf{p}$ в точках A и B , используя формулы (3.2.18), (3.2.19), (3.2.42) — (3.2.45);

$$\text{в точке } A: \quad 1 + D = \left(\frac{a}{p}\right)^{3/2} (1 + e)^2 (2 - e); \quad (3.2.84)$$

$$\text{в точке } B: \quad 1 + D' = \left(\frac{b}{p}\right)^{3/2} (1 - e)^2 (2 + e), \quad (3.2.85)$$

где D и D' — константы в решении сопряженной системы (3.2.13), (3.2.14), (3.2.18), (3.2.19) для внутренней и внешней круговых орбит соответственно. Согласно (3.2.9), (3.2.15) эти константы должны удовлетворять неравенствам (импульсы разгонные!)

$$0 \leq D, \quad D' < 1. \quad (3.2.86)$$

Используя (3.2.75), можно показать (Лоуден [24]), что при $e > 0$ неравенства (3.2.86) удовлетворяются, если

$$0 < e \leq 0,87938. \quad (3.2.87)$$

Сопоставляя (3.2.87) с (3.2.77), получаем, что условия строгой локальной оптимальности (2.2.87) — (2.2.89) выполняются для гомановского перелета только при

$$1 < n \leq 15,582, \quad (3.2.88)$$

т. е. для значений n , не превышающих соответствующего $\max \Delta V_{\Sigma \text{ гом.}}$. При $n > 15,582$ гомановский перелет заведомо неоптимален.

Вопрос о построении оптимального перелета между круговыми орбитами более выгодного, чем гомановский, при достаточно больших значениях параметра n был впервые рассмотрен в 1954 г. А. Штернфельдом [1], в 1959 г. Хёлкером и Зилбером [1] и Эдельбаумом [1]. Ими был исследован трехимпульсный перелет

между компланарными круговыми орбитами — так называемый *биэллиптический перелет*. Биэллиптический перелет между компланарными круговыми орбитами (рис. 3.2.4) состоит из двух полуэллипсов, один из которых касателен к внутренней орбите в точке A , а другой — к внешней орбите в точке C , эти полуэллипсы соединяются в общем апоцентре B , в котором КА сообщается промежуточный импульс. Все апсидальные точки эллипсов расположены на одной прямой, проходящей через центр тяготения. Как

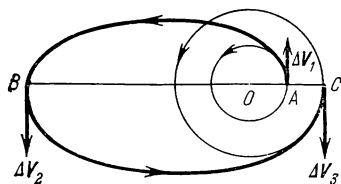


Рис. 3.2.4.

показали Хёлкер и Зилбер [1], биэллиптический перелет может быть выгоднее гомановского перелета уже при $n > 11,939$, если

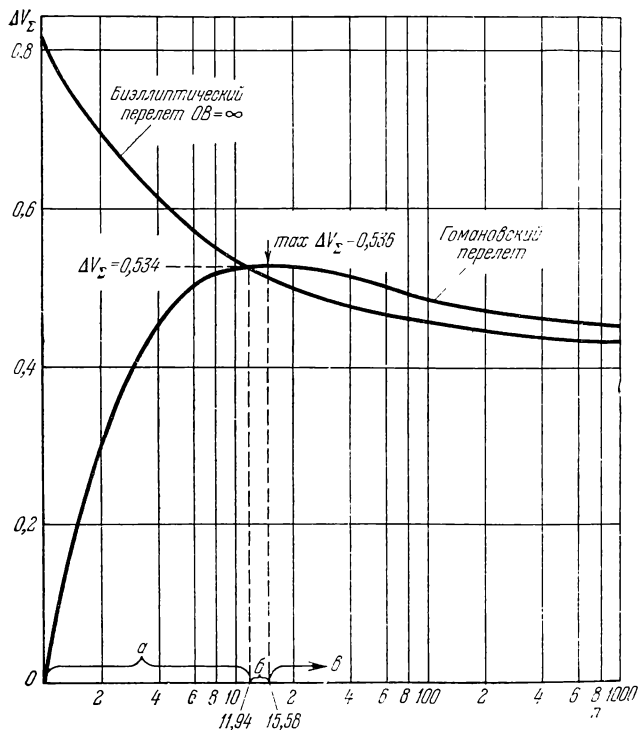


Рис. 3.2.5.

величина OB превышает некоторую критическую величину $OB_{\text{крит}}$ (рис. 3.2.5). Однако при $n < 15,582$ гомановский перелет остается локально оптимальным (область б); при $n < 11,939$ этот перелет

является абсолютно оптимальным (область a). При $n < 15,582$ ростом OB (рис. 3.2.5, область e) характеристическая скорость биэллиптического перелета монотонно уменьшается; то же имеет место и при $11,939 \leq n \leq 15,582$, если $OB > OB_{\text{крит.}}$. При $OB \rightarrow \infty$ полуэллипсы превращаются в параболы, импульс в точке B становится исчезающе малым, а характеристическая скорость перелета, отнесенная к круговой скорости на внутренней орбите, стремится к некоторому нижнему пределу, равному сумме импульсов в точках A и C , каждый из которых представляет разность между параболической и круговой скоростями на соответствующей круговой орбите. Относя характеристическую скорость перелета к круговой скорости на внутренней орбите, получим

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_3 = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n}} \right). \quad (3.2.89)$$

Зависимость (3.2.89) приведена на рис. 3.2.5.

Покажем, что предельный биэллиптический перелет при $OB \rightarrow \infty$ удовлетворяет условиям строгой локальной оптимальности. В соответствии со сказанным в разделах 3.2.2 и 3.2.3, для этого достаточно убедиться в непрерывности вектора p в точках перехода между круговой орбитой и дугами парабол, проходящих через бесконечно удаленную точку.

В точке перехода с внутренней круговой орбиты на параболическую дугу дается разгонный импульс, $\eta = 0$, $0 \leq D < 1$ и (см. (3.2.18), (3.2.19))

$$p_r^-(t_1) = \frac{1}{a^{3/2}} \frac{1+D}{2}, \quad p_{\tau}^-(t_1) = 0. \quad (3.2.90)$$

В точке перехода с параболической дуги на внешнюю круговую орбиту дается тормозной импульс, $\eta = \pi$, $-1 < D' \leq 0$ и (см. (3.2.18), (3.2.19))

$$p_r^+(t_3) = \frac{1}{b^{3/2}} \frac{D'-1}{2}, \quad p_{\tau}^+(t_3) = 0. \quad (3.2.91)$$

Согласно (3.2.64) на параболической дуге «орбита — бесконечность»

$$p_r^+(t_1) = \frac{2}{p^{3/2}}, \quad p_{\tau}^+(t_1) = 0, \quad (3.2.92)$$

а на параболической дуге «бесконечность — орбита»

$$p_r^-(t_3) = -\frac{2}{p^{3/2}}, \quad p_{\tau}^-(t_3) = 0, \quad (3.2.93)$$

где p, p' — фокальные параметры соответствующих парабол.

Поскольку для рассматриваемых параболических дуг

$$\frac{p}{a} = \frac{p'}{b} = 2, \quad (3.2.94)$$

из условия непрерывности вектора $\mathbf{p}(t_1)$ с учетом (3.2.90), (3.2.92) и (3.2.94) получаем

$$0 < D = \sqrt{2} - 1 < 1, \quad (3.2.95)$$

а из условия непрерывности вектора $\mathbf{p}(t_3)$ с учетом (3.2.91), (3.2.93) и (3.2.94)

$$-1 < D' = -(\sqrt{2} - 1) < 0. \quad (3.2.96)$$

Соотношения (3.2.95), (3.2.96) показывают, что постоянные D, D' удовлетворяют наложенным на них ограничениям (см. (3.2.15)) и, следовательно, для предельного биэллиптического перелета ($OB \rightarrow \infty$) всегда выполнены условия строгой локальной оптимальности (2.2.87) — (2.2.89). Все сказанное верно и для некомпланарных начальной и конечной орбит (см. раздел 2.2.4). Поворот в бесконечности осуществляется с помощью исчезающе малого импульса.

Следует, однако, отметить, что максимальный относительный выигрыш в характеристической скорости при переходе от гомановского перелета к биэллиптическому составляет примерно 10% и достигается при очень больших значениях апоцентрического радиуса OB . В результате этого продолжительность биэллиптического перелета становится намного больше продолжительности гомановского.

Обращая движение по кеплеровым дугам, получим аналогичные результаты для перелетов с внешней орбиты на внутреннюю.

§ 3.3. Особенности решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов

3.3.1. Ньютоновское гравитационное поле. Основной особенностью, отличающей задачи оптимизации импульсных перелетов в ньютоновском гравитационном поле от аналогичных задач в произвольном поле (см. раздел 3.3.2), является наличие явного аналитического решения сопряженной системы уравнений (см. § 3.1). Рассмотрим схемы решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов с использованием решения сопряженной системы в двух типичных случаях:

- 1°. Оптимальная фазовая траектория КА заранее не задана и определяется непосредственно в ходе решения краевой задачи.
- 2°. «Подозреваемая» на оптимальность фазовая траектория КА заранее задана.

В первом случае для определения оптимальной траектории используются непосредственно необходимые условия оптимальности, т. е. задача решается с помощью вариационного подхода. Во втором случае необходимые условия оптимальности используются для проверки оптимальности заданной траектории перелета и за-

дача решается на основе сочетания экстремального и вариационного подходов.

Вариационный подход к решению задачи оптимизации перелета (случай 1°). Зададим количество импульсов N , которыми может быть осуществлен оптимальный перелет. В качестве искоемых фазовых переменных введем радиусы-векторы $\mathbf{r}_j$ точек приложения импульсов, векторы скорости в этих точках после приложения импульса $\mathbf{V}_j^+ = \mathbf{V}(t_j + 0)$ и моменты t_j приложения начального импульса на j -й кеплеровой дуге.

Каждая кеплерова дуга, входящая в перелет, определяется восемью скалярными величинами.

$$t_j, \mathbf{r}_j, \mathbf{V}_j^+, t_{j+1}. \quad (3.3.1)$$

В конце j -й кеплеровой дуги из уравнений движения аппарата в гравитационном поле определяется радиус-вектор $\mathbf{r}_{j+1}$ и вектор скорости КА $\mathbf{V}_{j+1}^-$:

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j(\mathbf{r}_j, \mathbf{V}_j^+, t_{j+1} - t_j), \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{V}(t_{j+1} - 0) \equiv \mathbf{V}_{j+1}^- = \mathbf{V}_{j+1}^-(\mathbf{r}_j, \mathbf{V}_j^+, t_{j+1} - t_j). \quad (3.3.3)$$

В момент перехода от $(j - 1)$ -й кеплеровой дуги к j -й кеплеровой дуге КА сообщается импульс скорости

$$\Delta \mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j^+ - \mathbf{V}_j^-, \quad j = 2, 3, \dots, N - 1. \quad (3.3.4)$$

Начальное и конечное состояния КА определяются векторами

$$\{t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-\} \in M_1 \quad (3.3.5)$$

и

$$\{t_N, \mathbf{r}_N(\mathbf{r}_{N-1}, \mathbf{V}_{N-1}^+, t_N - t_{N-1}), \mathbf{V}_N^+\} \in M_N. \quad (3.3.6)$$

Вектор x искоемых фазовых координат в общем случае можно записать в виде

$$x = \{t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-, \mathbf{V}_1^+; t_2, \mathbf{V}_2^+; \dots; t_j \mathbf{V}_j^+; \dots; t_{N-1}, \mathbf{V}_{N-1}^+; t_N, \mathbf{V}_N^+\}. \quad (3.3.7)$$

Заметим, что в качестве независимых переменных, задающих движение КА по j -й кеплеровой дуге, можно вместо (3.3.1) взять любые восемь скалярных величин, определяющих это движение, например $t_j, \mathbf{r}_j, t_{j+1}, \mathbf{r}_{j+1}$. Тот или иной вид выбираемых независимых переменных не имеет принципиального значения для проводимых ниже рассуждений, хотя при решении конкретных задач он может иметь важное значение.

Выразив импульсы (3.3.4) через соответствующие переменные, входящие в вектор (3.3.7), запишем на основании (2.2.46),

(2.2.59), (2.2.60) для концов j -й кеплеровой дуги соотношения

$$s(t_j) = \frac{\Delta \mathbf{V}_j}{|\Delta \mathbf{V}_j|}, \quad (3.3.8)$$

$$s(t_{j+1}) = \frac{\Delta \mathbf{V}_{j+1}}{|\Delta \mathbf{V}_{j+1}|}. \quad (3.3.9)$$

С учетом (3.1.6) — (3.1.11) соотношения (3.3.8), (3.3.9) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно постоянных

$$(A, B, C, D, E, F)_j, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3.10)$$

входящих в решение сопряженной системы (3.1.6) — (3.1.8) или (3.1.9) — (3.1.11) на j -й кеплеровой дуге. Поскольку рассматриваемое решение сопряженной системы фундаментально, система уравнений (3.3.8), (3.3.9) всегда разрешима. В результате решение сопряженной системы уравнений на всей траектории можно в явном виде записать через переменные, входящие в искомый вектор фазовых координат.

Рассмотрим теперь необходимые условия оптимальности перелета (см. раздел 2.2.1).

Заметим, что, поскольку вектор $\mathbf{s}$ удовлетворяет условиям (3.3.8), (3.3.9), он непрерывен на всей траектории

$$s(t_j - 0) = s(t_j + 0), \quad j=2, 3, \dots, N-1. \quad (3.3.11)$$

Условия непрерывности вектора $\mathbf{p}$ (2.2.44)

$$\mathbf{p}(t_j - 0) = \mathbf{p}(t_j + 0), \quad j=2, 3, \dots, N-1, \quad (3.3.12)$$

и гамильтониана (2.2.51)

$$\dot{s}(t_j) = 0, \quad j=2, 3, \dots, N-1, \quad (3.3.13)$$

дают в каждой точке приложения внутреннего импульса четыре скалярных соотношения, что соответствует количеству искомым фазовых координат t_j , $\mathbf{V}_j^+$ во внутренних точках траектории.

Система соотношений (3.3.12), (3.3.13) дополняется условиями трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63). Выражая все переменные в (3.3.12), (3.3.13), (2.2.61) — (2.2.63) через фазовые координаты, входящие в вектор x (3.3.7), получим для определения этого вектора замкнутую систему трансцендентных соотношений, состоящую из уравнений (2.2.61) — (2.2.63), (3.3.12), (3.3.13).

Если в результате решения этой системы окажется, что всюду на полученной траектории (см. (2.2.89))

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in \bigcup_j (t_j, t_{j+1}), \quad (3.3.14)$$

то на найденной траектории будут выполнены все необходимые условия оптимальности и найденная траектория — строго локаль-

но оптимальна. Находя при заданном N все решения и сравнивая полученные решения при различных N , можно из найденных локально оптимальных траекторий выбрать абсолютно оптимальную траекторию.

Аналогичная методика решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов, основанная на необходимых условиях оптимальности, изложена в книге В. В. Ивашкина [4].

Несмотря на принципиальную простоту и ясность такого подхода, его практическая реализация в общем случае связана с преодолением значительных трудностей, обусловленных тем, что оптимальная фазовая траектория определяется одновременно с соответствующим ей решением сопряженной системы. За исключением случаев, характеризующихся рядом существенных упрощающих предположений и небольшим количеством импульсов (один-два) (см. примеры в § 3.2, в монографии Лоудена [24], в работах С. В. Дубовского [1, 2] и Смита [1]), система уравнений для определения оптимального вектора x (3.3.7) получается сложной и громоздкой. Решение этой системы в общем случае возможно лишь численными методами с помощью ЭЦВМ.

В тех случаях, когда такой подход позволяет аналитически довести решение задачи оптимизации перелета до конца, он оказывается весьма эффективным (см. гл. VI и VII).

Сочетание экстремального и вариационного подходов при решении задачи оптимизации перелета (случай 2°). Пусть задана некоторая фазовая N -импульсная траектория перелета КА с начального на конечное многообразие, удовлетворяющая заданным требованиям и ограничениям. Такая траектория может быть задана a priori из «рациональных» соображений или получена в результате решения соответствующей экстремальной задачи.

Используя снова соотношения (3.3.8), (3.3.9) для всех точек приложения импульсов $j = 1, 2, \dots, N$, можно на каждой кеплеровой дуге найти численные значения постоянных (3.3.10). Предполагая же решением сопряженной системы, соответствующей рассматриваемой фазовой траектории, можно численно проверить, выполняются ли условия (3.3.12), (3.3.13) в точках приложения внутренних импульсов, условия трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63) и условие (3.3.14) на всей траектории.

Если эти условия выполнены, то заданная N -импульсная траектория перелета строго локально оптимальна.

Если же какие-либо из указанных необходимых условий оптимальности перелета не выполнены, то приходим к ситуации, рассмотренной в разделе 2.3.3. Условия (3.3.8), (3.3.9) совпадают с условиями (2.3.36), а вариация функционала δG записывается в виде (2.3.37). В этом случае можно применить к заданной неоптимальной траектории рассмотренные в § 2.3 методы улучшения

неоптимальных импульсных траекторий для численного решения задачи оптимизации перелета с использованием заданной траектории в качестве исходной. Эти же методы позволяют качественно выявить «степень неоптимальности» заданной траектории и указать ее причину (неоптимальный выбор количества импульсов N , неоптимальное расположение и выбор крайних и промежуточных импульсов).

Основной особенностью рассмотренной схемы решения задачи оптимизации импульсного перелета является раздельное рассмотрение задачи нахождения фазовой (в общем случае неоптимальной) траектории и соответствующего решения сопряженной системы. Задача определения фазовой траектории, как уже говорилось, решается с помощью экстремального подхода как задача нелинейного программирования в конечномерном пространстве (см. раздел 2.1.1). Решение такой задачи всегда имеет практический смысл, независимо от того, является ли искомая траектория строго локально оптимальной в вариационном смысле. Что касается сопряженной системы, то она используется лишь для численной проверки строгой локальной оптимальности заданного перелета. В случае неоптимальности перелета сопряженную систему удобно использовать для вычисления вектора $\text{grad } G$ при определении вариаций фазовых координат, улучшающих импульсный перелет.

В рассматриваемом случае наличие явного аналитического решения сопряженной системы в ньютоновском гравитационном поле играет первостепенную роль, поскольку позволяет путем решения системы уравнений (3.3.8), (3.3.9) относительно постоянных (3.3.10) элементарно найти решение сопряженной системы вдоль всей фазовой траектории. Такой метод особенно эффективен при применении ЭЦВМ в силу простоты используемого алгоритма, его одинаковости для каждой кеплеровой дуги и минимальной информации о решении сопряженной системы на каждой кеплеровой дуге, которую необходимо хранить в памяти ЭЦВМ.

Проведенный анализ явно показывает преимущества рассмотренной в случае 2° схемы решения задачи оптимизации импульсного перелета, основанной на сочетании и последовательном применении экстремального и вариационного подходов, по сравнению с рассмотренным в случае 1° «чисто» вариационным подходом.

3.3.2. Произвольное гравитационное поле. В центральном стационарном гравитационном поле также может быть получено аналитическое решение сопряженной системы (Винх [1]); к такому полному применимо все сказанное в предыдущем разделе. В произвольном же гравитационном поле явные аналитические решения фазовой системы уравнений (2.1.22), 2.1.23 и сопряженной системы уравнений (2.2.21), 2.2.22) на участках пассивного полета между импульсами, вообще говоря, не могут быть получены.

В результате неприменим экстремальный подход в том виде, как он используется в случае пьютоновского гравитационного поля (непосредственное нахождение условного экстремума функции многих переменных, см. раздел 2.1.1).

Далее, обычные итеративные схемы решения двухточечных краевых задач оказываются неприменимыми для нахождения решения двухточечной краевой вариационной задачи оптимизации импульсного перелета. Каждому импульсу тяги на N -импульсной траектории соответствует одна точка t_k , в которой должно выполняться условие (2.2.88):

$$s(t_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.15)$$

Кроме того, на пассивных участках оптимальной N -импульсной траектории должно выполняться неравенство (2.2.89):

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in \bigcup_{k=1}^{N-1} (t_k, t_{k+1}). \quad (3.3.16)$$

Если на какой-либо из итераций условие (3.3.16) не выполняется, то неясно, нужно ли в соответствующем месте на траектории прикладывать импульс (см. раздел 2.3.2) или же это результат неточного удовлетворения краевых условий. С другой стороны, если в какой-либо точке t_k

$$s(t_k) < 1, \quad s(t_k) \approx 1, \quad (3.3.17)$$

то по аналогичной причине импульс в этой точке может быть «потерян». Таким образом, в процессе численного решения двухточечной краевой задачи обычными итеративными методами практически затруднительно установить с помощью сопряженной системы наличие импульса в той или иной точке на траектории.

Проведенные рассуждения показывают, что для решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов в рамках обычного вариационного подхода практически невозможно на основе стандартных итеративных методов решения двухточечных краевых задач построить регулярные алгоритмы, обеспечивающие сходимость процесса итераций.

Рассмотрим теперь схему решения задачи оптимизации перелета, позволяющую обойти указанные трудности. Зададим некоторое количество импульсов N , с помощью которых может быть осуществлен рассматриваемый перелет. Пусть эти импульсы сообщаются КА в некоторые моменты времени t_j , $j = 1, 2, \dots, N$, в которые радиус-вектор аппарата равен $\mathbf{r}_j$. Пусть, далее, $\mathbf{V}_j^- = \mathbf{V}(t_j - 0)$, $\mathbf{V}_j^+ = \mathbf{V}(t_j + 0)$ — векторы скорости КА в точке t_j до и после импульса соответственно.

Тогда траектория N -импульсного перелета КА, как и в случае пьютоновского поля, определяется вектором (3.3.7). Характери-

стическую скорость перелета — функционал (2.2.12) — можно записать в виде

$$G = \Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-) + \sum_{k=1}^N |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-| + \\ + \Delta V_N[t_N, \mathbf{r}_N(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-; \mathbf{V}_1^+; t_2, \mathbf{V}_2^+; \dots; t_{N-1}, \mathbf{V}_{N-1}^+; t_N, \mathbf{V}_N^+)], \quad (3.3.18)$$

или, с учетом (3.3.7),

$$G = G(x). \quad (3.3.19)$$

Если принять вектор x за вектор искомых переменных, то для оптимизации траектории перелета — теперь уже в конечномерном пространстве компонент вектора x — можно применить стандартные методы нелинейного программирования (см. Б. П. Демидович, И. А. Марон [1], С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева [1], Кюнцц, Крелле [1], Ланс [1], Р. Ли [1], Н. Н. Моисеев [1], Моррей [1], Розен [1], Томпкинс [1], Уайльд [1], Хедли [1]). Существенным, но не принципиальным отличием задачи минимизации функционала (3.3.19) от стандартной задачи нелинейного программирования является наличие, наряду с конечными связями, дифференциальных связей (2.1.22), (2.1.23). При использовании градиентных методов решения задачи нелинейного программирования, основанных на линеаризации функционала и связей, указанное отличие приводит лишь к изменению техники вычисления вариаций $\delta x(t_j)$ вектора x в точках приложения импульсов t_j .

Изложенная схема решения задачи оптимизации импульсного перелета в произвольном гравитационном поле в пространстве фазовых «параметров» (3.3.7) эквивалентна, очевидно, экстремальному подходу к решению задачи оптимизации перелета в ньютоновском гравитационном поле (см. раздел 2.3.3). Поэтому изложенный выше подход также можно условно назвать экстремальным. Как и в случае ньютоновского гравитационного поля, при заданной схеме перелета, т. е. при заданном количестве импульсов N и заданных областях их приложения, экстремальный подход позволяет численно получить решение задачи оптимизации перелета. Для полного решения задачи оптимизации перелета необходимо сравнить между собой различные схемы перелета.

Несмотря на принципиальную простоту и ясность экстремального подхода, его практическая реализация при большом количестве импульсов связана с выполнением громоздких расчетов. Особенно громоздким экстремальный метод оказывается, когда он применяется для оптимизации схемы перелета. Для преодоления отмеченных трудностей можно эффективно использовать сопряженную систему уравнений (2.2.21), (2.2.22). Итак, пусть задана некоторая фазовая траектория N -импульсного перелета, получен-

ная, например, с помощью экстремального подхода. На основании сказанного в разделе 2.3.3 и соотношений (2.2.46), (2.2.59) и (2.2.60) для каждого пассивного участка, входящего в состав N -импульсной траектории, найдем решение сопряженной системы (2.2.21), (2.2.22), удовлетворяющее краевым условиям (3.3.8), (3.3.9).

Для нахождения решения этой двухточечной краевой задачи можно использовать стандартные градиентные методы и приемы.

Задавая на одном из концов j -го пассивного участка неизвестный сопряженный вектор

$$\mathbf{p}_j^+ = \mathbf{p}(t_j + 0) \quad (3.3.20)$$

или

$$\mathbf{p}_{j+1}^- = \mathbf{p}(t_{j+1} - 0), \quad (3.3.21)$$

найдем решение, удовлетворяя, путем подбора вектора (3.3.20) или (3.3.21), на другом конце j -го пассивного участка условию (3.3.9) или (3.3.8) соответственно.

Отметим при этом следующие два важных обстоятельства. Во-первых, фазовая траектория перелета задана, что полностью исключает описанные выше явления неустойчивости итерационного процесса при обычном вариационном подходе и обеспечивает применимость в данном случае обычных итерационных методов решения двухточечных краевых задач.

Во-вторых, при заданной фазовой траектории сопряженная система уравнений (2.2.21), (2.2.22) представляет собой линейную однородную систему уравнений относительно сопряженных переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$. Пусть $\mathbf{K}^\psi(t, \tau)$ — фундаментальная (переходная) матрица системы (2.2.21), (2.2.22) (см. соотношения (П.14), (П.15) Приложения). Тогда на основании формулы Лагранжа — Коши (П.17) значения сопряженных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ в точках t_j и t_{j+1} связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^- \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{t_{j+1}} = \mathbf{K}^\psi(t_j, t_{j+1}) \begin{pmatrix} \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{t_j}. \quad (3.3.22)$$

Поскольку моменты времени t_j , t_{j+1} и фазовая траектория заданы, элементы переходной матрицы постоянны:

$$\mathbf{K}^\psi(t_j, t_{j+1}) = \text{const.} \quad (3.3.23)$$

Из (3.3.22) и (3.3.23) следует, что матрицы производных тоже постоянны:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{j+1}}{\partial \mathbf{p}_j^+} = \text{const.}, \quad (3.3.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}_j}{\partial \mathbf{p}_{j+1}^-} = \text{const.} \quad (3.3.25)$$

Отметим, что при практическом решении рассматриваемой двухточечной краевой задачи в определении переходной матрицы $K^*(t, \tau)$ нет необходимости, нужно знать лишь одну из матриц производных (3.3.24) или (3.3.25). В результате алгоритм решения двухточечной краевой задачи оказывается достаточно простым и сводится к следующим операциям:

1°. Задаем (для определенности) вектор $p^{(0)}(t_j + 0)$ и численным интегрированием систем (2.2.21), (2.2.22) с начальными условиями $(p^{(0)}(t_j + 0), s(t_j))$ находим соответствующий вектор $s^{(0)}(t_j + 0)$.

2°. Повторяем то же поочередно с векторами

$$p^{(k)}(t_j + 0) = p^{(0)}(t_j + 0) + \Delta p^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.3.26)$$

где

$$\Delta p^{(k)} = \{c_1 \delta_{1k}, c_2 \delta_{2k}, c_3 \delta_{3k}\}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.3.27)$$

δ_{ik} , $i, k = 1, 2, 3$, — символ Кронекера, c_k , $k = 1, 2, 3$, — некоторые постоянные, находим соответствующие векторы $s^{(k)}(t_{j+1})$ и разности

$$\Delta s_{j+1}^{(k)} = s^{(k)}(t_{j+1}) - s^{(0)}(t_{j+1}). \quad (3.3.28)$$

Матрица частных производных (3.3.24) равна, очевидно,

$$\frac{\partial s_{j+1}}{\partial p_j^+} = \left(\frac{\Delta s_{j+1}^1}{c_1}, \frac{\Delta s_{j+1}^2}{c_2}, \frac{\Delta s_{j+1}^3}{c_3} \right). \quad (3.3.29)$$

3°. Из системы уравнений

$$\frac{\partial s_{j+1}}{\partial p_j^+} (p_j^+ - p^{(0)}(t_j + 0)) = s_{j+1} - s_{j+1}^{(0)} \quad (3.3.30)$$

находим искомый вектор p_j^+ .

Получив для заданной фазовой траектории решение сопряженной системы, можно теперь достаточно просто решить вопросы, связанные с оптимизацией схемы перелета.

Условия (3.3.8), (3.3.9) обеспечивают, очевидно, выполнение условия непрерывности (2.2.45) вектора $s(t)$ вдоль траектории и необходимости условий оптимальности (2.2.46), (2.2.59), (2.2.60). В соответствии со сказанным в разделе 2.2.1, для строгой оптимальности рассматриваемого N -импульсного перелета должны выполняться условия непрерывности (2.2.44) и (2.2.47) вектора p и гамильтониана H во всех точках приложения оптимальных внутренних импульсов:

$$p_j^- \equiv p(t_j - 0) = p(t_j + 0) \equiv p_j^+, \quad j = 2, 3, \dots, N - 1, \quad (3.3.31)$$

$$H_j^- \equiv H(t_j - 0) = H(t_j + 0) \equiv H_j^+, \quad j = 2, 3, \dots, N - 1, \quad (3.3.32)$$

условия трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63) в начальной и конечной точках траектории и условие (2.2.89).

Если все перечисленные условия выполнены, то рассматриваемая N -импульсная траектория является строго локально оптимальной.

Если какие-либо из перечисленных условий нарушаются, то рассматриваемая фазовая траектория не является локально оптимальной. В этом случае информация, даваемая решением сопряженной системы, как это показано в разделах 2.3.2, 2.3.3, позволяет установить «источник» и «степень» неоптимальности фазовой траектории. Так, невыполнение условия (2.2.89) свидетельствует о целесообразности перехода от N -импульсной траектории к траектории с большим количеством импульсов (см. раздел 2.3.2), невыполненные условия (3.3.31) или (3.3.32) свидетельствует о неоптимальном выборе радиуса-вектора $\mathbf{r}$; или момента приложения импульса соответственно (см. раздел 2.3.3).

Обращаясь к записи вариации функционала (3.3.18) в виде (2.3.8), замечаем, что полученное решение сопряженной системы может быть использовано для численного определения частных производных функционала (3.3.19) по компонентам вектора $\mathbf{x}$ (3.3.7) и нахождения вектора $\text{grad } G(\mathbf{x})$ (см. раздел 2.3.3).

Укажем на один частный случай применения изложенной схемы для проверки оптимальности заданной траектории перелета. Пусть задана фазовая траектория, на одном или обоих концах которой к КА прилагают импульсы скорости. Тогда приведенная выше схема определения решения сопряженной системы может быть применена сразу ко всей траектории в целом. Ввиду наличия на каждом из концов траектории условий трансверсальности (2.2.61) — (2.2.63), вектор $\mathbf{p}^{(0)}(t_1 + 0)$ или $\mathbf{p}^{(0)}(t_N - 0)$ будет удовлетворять некоторым связям. При этом может возникнуть ситуация, как правило, типичная для таких задач, когда количество свободно задаваемых параметров, например компонент векторов $\mathbf{p}^{(0)}(t_1 + 0)$ или $\mathbf{p}^{(0)}(t_N - 0)$, меньше количества краевых условий, которым надо удовлетворять на другом конце траектории. Если заданная фазовая траектория перелета строго локально оптимальна, то путем соответствующего подбора свободных параметров на одном конце траектории удастся удовлетворить всем условиям на другом конце траектории, несмотря на то что свободных параметров меньше, чем удовлетворяемых условий. Пример такой задачи приведен в § 10.4.

Рассмотренный подход к оптимизации траектории импульсного перелета в произвольном гравитационном поле, по существу, основан на сочетании и последовательном применении экстремального и вариационного подходов.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ

§ 4.1. Приближенное построение оптимальной траектории при изменении ограничения на величину тяги

4.1.1. Постановка обратной задачи импульсной аппроксимации.

Поскольку траектории КА с конечной и импульсной тягой близки между собой, естественно использовать решение краевой задачи в импульсной постановке в качестве исходной информации при решении задачи оптимизации перелета с конечной тягой (см., например, Пайнс [1], Хэнделсмен [1]). В связи с этим можно поставить следующую задачу:

Задача 1. Известно решение вариационной задачи оптимизации перелета в импульсной постановке. Требуется на основании имеющейся информации приближенно с минимальной возможной ошибкой построить соответствующую оптимальную траекторию при конечной тяге, не решая для нее краевой задачи.

Оценки, приведенные в начале раздела 2.1.1, показывают, что отличие траектории при конечной тяге от соответствующей импульсной траектории составляет величину порядка длины активного участка. Поэтому а priori ясно, что точность решения задачи 1 должна быть по крайней мере такой же. Если ограничиться указанной точностью, то, как следует из сказанного в разделе 2.1.1 и как будет показано ниже, решение задачи 1 может быть получено достаточно просто: активные участки надо расположить так, чтобы точки приложения импульса находились внутри соответствующих активных участков, а направление вектора тяги должно незначительно отклоняться от направления вектора импульса.

В связи со сказанным возникает вопрос: нельзя ли так расположить имеющимся произволом в расположении активных участков и ориентации вектора тяги, чтобы повысить точность решения задачи 1 по сравнению с указанной выше? Выяснение условий, при которых на этот вопрос можно дать положительный ответ, составляет основное содержание проводимого ниже рассмотрения задачи 1.

Поставленную задачу естественно назвать *обратной задачей импульсной аппроксимации*. Впервые обратная задача в близкой к указанной постановке рассмотрена Роббинсом [1]. В этой работе с помощью формулы Блисса (см. ниже) указан метод построения траектории с конечной тягой, близкой к оптимальной импульсной траектории, однако, не анализируется близость построенной траектории с конечной тягой к строго оптимальной. Приведенная постановка обратной задачи (задачи 1) и ее решение для случая движения КА в малой окрестности круговой орбиты в ньютоновском гравитационном поле при незаданной продолжительности перелета даны Г. Е. Кузмаком [3] (см. § 6.4 и работу Г. Е. Кузмака, А. З. Брауде [1]).

В настоящей главе рассматривается решение обратной задачи в нелинейной постановке для любых траекторий движения КА с двигателями большой тяги в произвольном гравитационном поле.

Прежде чем перейти к решению задачи 1, рассмотрим вспомогательную задачу 2.

Задача 2. Известна оптимальная траектория движения КА для заданных краевых условий и заданного ограничения величины тяги. Требуется на основании имеющейся информации приближенно с минимально возможной ошибкой в величине функционала и в выполнении краевых условий построить траекторию, близкую к оптимальной, при другом уровне ограничения тяги, не решая соответствующую вариационную задачу.

Решение задачи 2 представляет и самостоятельный интерес.

Рассмотрим движение КА в произвольном гравитационном поле, описываемое системой уравнений (1.2.70) — (1.2.72), для двух режимов полета 1 и 2, отличающихся тяговооруженностью $(T/m)_1$ и $(T/m)_2$. Здесь и в дальнейшем нижними индексами 1 и 2 будем обозначать величины, относящиеся к режимам 1 и 2 соответственно.

Для рассматриваемого поля и траекторий считаем выполненными все ограничения и предположения, указанные в разделах 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4. Запишем уравнения движения КА для режима 2 в виде

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = g(r, t) + n_* \left(\frac{T}{m} \right)_1 + n_* \left[\left(\frac{T}{m} \right)_2 - \left(\frac{T}{m} \right)_1 \right], \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dq}{dt} = n_* \left(\frac{T}{m} \right)_1 + n_* \left[\left(\frac{T}{m} \right)_2 - \left(\frac{T}{m} \right)_1 \right]. \quad (4.1.3)$$

Потребуем, чтобы различие между векторами тяговооруженностей было малым в том смысле, чтобы фазовые переменные вдоль траекторий 1 и 2 отличались бы для любого t незначительно.

При указанном предположении интеграл от вектора

$$n_* \left[\left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_1 \right] \quad (4.1.4)$$

вдоль траектории можно считать малым по норме возмущением. Взяв в качестве вариаций фазовых переменных величины

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \delta \mathbf{V} &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1, \\ \delta q &= q_2 - q_1 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

и воспользовавшись формулой Блисса (см. соотношение (П.22) Приложения), можем записать

$$\begin{aligned} [(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{V}) + p_q \delta q]_{t_i}^t &= \int_{t_i}^t \left\{ \left(\mathbf{s}, n_* \left[\left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_1 \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. + p_q n_* \left[\left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_1 \right] \right\} dt \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Формула (4.1.6) справедлива с точностью до величин второго порядка малости $|\delta \mathbf{r}|^2$, $|\delta \mathbf{V}|^2$, δq^2 . Входящие в нее сопряженные переменные $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$, p_q определяются системой уравнений (1.2.75) — (1.2.77) для одной из фазовых траекторий — 1 или 2. В дальнейшем принимаем, что сопряженные переменные определены для траектории, соответствующей режиму 1.

Значения вариаций фазовых переменных в начале и конце траекторий определяются условиями сравнения траекторий. Так, если траектории 1 и 2 выходят из одной и той же начальной точки фазового пространства, то

$$\delta \mathbf{r}|_i = \delta \mathbf{V}|_i = \delta q|_i = 0. \quad (4.1.7)$$

Задавая различные краевые условия для сопряженных переменных, можно с помощью (4.1.6) оценивать влияние изменения режима тяги на значения фазовых переменных в крайних (или промежуточных) точках траектории. Например, если фазовые траектории 1 и 2 выходят из одной и той же начальной точки, то, полагая

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \\ p_q \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.8)$$

можно с помощью (4.1.6) найти $\delta V_x|_f$, т. е. определить влияние изменения режима полета на фазовую переменную $V_x|_f$ в конеч-

ной точке траектории, и т. п. Из сказанного ясно, что сопряженные переменные, входящие в (4.1.6), не совпадают, вообще говоря, с сопряженными переменными вариационной задачи оптимизации траекторий 1 или 2, поскольку краевые условия для последних находятся из условия трансверсальности (1.2.40).

Решение обратной задачи импульсной аппроксимации на основе указанных соображений проведем по следующей схеме:

1) сначала с помощью соотношения (4.1.6) решим задачу 2 (раздел 4.1.2),

2) затем, устремляя режим 2 к импульсному режиму, в результате предельного перехода получим решение задачи 1 (раздел 4.2.1).

4.1.2. Приближенное построение оптимальной траектории при изменении ограничения на величину тяги. Пусть $(t_k^-)_i, (t_k^+)_i$, $i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, N$, — соответственно начало и конец k -го активного участка для i -го режима полета. Положим

$$t_k^- = \min \{(t_k^-)_1, (t_k^-)_2\}, \quad t_k^+ = \max \{(t_k^+)_1, (t_k^+)_2\}. \quad (4.1.9)$$

Учитывая, что для $t \notin [t_1^-, t_1^+] \cup [t_2^-, t_2^+] \cup \dots \cup [t_N^-, t_N^+]$

$$\left(\frac{\mathbf{T}}{m}\right)_1 = \left(\frac{\mathbf{T}}{m}\right)_2 = 0,$$

получаем из (4.1.6)

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{V}) + p_q \delta q]_i^t = \\ & = \sum_{k=1}^N \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left\{ \left(\mathbf{s}, n_* \left[\left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_1 \right] \right) + p_q n_* \left[\left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\mathbf{T}}{m} \right)_1 \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Поскольку для безразмерных величин $\mathbf{T}$, $\mathbf{s}$ и m

$$n_* \mathbf{T} = -c \frac{dm}{dt} \mathbf{e},$$

из (4.1.10) следует:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{v}) + p_q \delta q]_i^t = & \sum_{k=1}^N \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left\{ \left(\mathbf{s}, -c \left[\left(\frac{dm}{dt} \right)_2 \mathbf{e} - \left(\frac{dm}{dt} \right)_1 \mathbf{e} \right] \right) - \right. \\ & \left. - p_q c \left[\left(\frac{dm}{dt} \right)_2 - \left(\frac{dm}{dt} \right)_1 \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

В дальнейшем будем сравнивать режимы полета с одним и тем же количеством активных участков и одинаковым расходом

массы на каждом из активных участков:

$$\left(\frac{m_k^-}{m_k^+}\right)_1 = \left(\frac{m_k^-}{m_k^+}\right)_2, \quad (4.1.12)$$

откуда при равенстве начальных или конечных масс следует:

$$(m_k^\pm)_1 = (m_k^\pm)_2. \quad (4.1.13)$$

В этом случае

$$\delta q_f = 0 \quad (4.1.14)$$

и траектории 1 и 2 имеют один и тот же функционал $G = q_f$. При этом, как следует из (4.1.11), траектории 1 и 2 отличаются друг от друга из-за того, что в общем случае для режимов 1 и 2

$$e_1(t) \neq e_2(t), \quad t_{k1}^\pm \neq t_{k2}^\pm. \quad (4.1.15)$$

Из (2.1.5) вытекает, что для того, чтобы траектории 1 и 2 были близки, на активных участках должно выполняться условие

$$e_1(t) \approx e_2(t). \quad (4.1.16)$$

Кроме того, при условии

$$t_k^+ - t_k^- \ll t_f - t_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1.17)$$

уравнения (2.1.4), (2.1.5) и (1.2.70) — (1.2.72) показывают, что для близости траекторий должно быть

$$t_{k1}^\pm \approx t_{k2}^\pm, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.18)$$

Сформулируем теперь с учетом изложенного уточненную постановку задачи 2 следующим образом:

Пусть известна оптимальная траектория 1 (см. постановку вариационной задачи в разделе 1.2.1) для заданного ограничения

$$0 \leq T_1 \leq T_{1 \max}. \quad (4.1.19)$$

Без потери общности можно считать, что для траектории 2 выполняется ограничение (см. замечание на стр. 172)

$$0 \leq T_2 \leq T_{2 \max}, \quad T_{2 \max} > T_{1 \max}. \quad (4.1.20)$$

Требуется на основании информации, известной для траектории 1, построить приближенно оптимальную траекторию 2 так, чтобы при выполнении условия (4.1.13) она с максимальной точностью удовлетворяла бы краевым условиям. При этом в качестве минимизируемого функционала будем рассматривать конечное значение характеристической скорости

$$G = q_f, \quad (4.1.21)$$

которое, как было сказано выше, является одним и тем же для режимов полета 1 и 2.

Поскольку для оптимальных траекторий 1 и 2 на активных участках

$$\dot{m}_{k1} = \text{const} = \dot{m}_1, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1.22)$$

$$\dot{m}_{k2} = \text{const} = \dot{m}_2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1.23)$$

примем, что условие (4.1.23) выполняется и для конструируемой траектории 2.

При выполнении этого условия решение задачи 2 сводится к выбору некоторого «наилучшего» закона $e_2(t)$ на активных участках и определению «наилучшего» расположения величин t_{k2}^+ относительно величин t_{k1}^+ .

Из (1.2.75), (1.2.76) следует, что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ непрерывны всюду на траектории. Основываясь на этом, можно, как и в разделе 1.2.3, показать, что входящие в правые части (4.1.6), (4.1.10) и (4.1.11) функции $s(t)$ и $p_q(t)$, соответствующие, как это было указано выше, режиму 1, обладают следующими свойствами (см. соотношения (1.2.55), (1.2.65) и конц. раздела 1.2.3):

$$s(t) \in C_3[t_i, t_f], \quad p_q \in C_0[t_i, t_f], \quad p_q \in C_\infty[t_{k1}^-, t_{k1}^+]. \quad (4.1.24)$$

Отличие в оценке для p_q (от (1.2.65)) обусловлено тем, что рассматриваемые функции $s(t)$ и p_q не удовлетворяют условиям (1.2.34) — (1.2.36), в результате чего правая часть (1.2.77) в концах активных участков имеет разрывы первого рода. Поскольку режим 1 оптимальный, согласно (1.2.34), (1.2.55) $e_1(t)$ можно считать трижды непрерывно дифференцируемой для любого $t \in [t_i, t_f]$. Поскольку режим 2 предполагается близким к оптимальному, считаем $e_2(t)$ также трижды непрерывно дифференцируемой функцией.

Пусть $t_k \in [t_k^-, t_k^+]$; тогда в некоторой окрестности ее на основании установленных свойств $s(t)$ и $e_i(t)$ имеем

$$s(t) = s(t_k) + s'(t_k)(t - t_k) + \frac{s''(\xi_s)}{2!}(t - t_k)^2, \quad (4.1.25)$$

$$e_i(t) = e_i(t_k) + e_i'(t_k)(t - t_k) + \frac{e_i''(\xi_e^i)}{2!}(t - t_k)^2, \quad i = 1, 2, \quad (4.1.26)$$

где $t_k < \xi_s, \xi_e^i < t$. Обозначим (см. (4.1.11)) для некоторого k

$$I_1 = c \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left(s, \left[\left(\frac{\dot{m}}{m} e \right)_2 - \left(\frac{\dot{m}}{m} e \right)_1 \right] \right) dt. \quad (4.1.27)$$

Подстановка (4.1.25) и (4.1.26) в (4.1.27) даст

$$I_1 = -c \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left\{ [(s_k, e_{2k}) \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 - (s_k, e_{1k}) \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1] + [(s_k, e'_{2k}) + (s'_k, e_{2k})] \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 (t - t_k) - [(s_k, e'_{1k}) + (s'_k, e_{1k})] \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1 (t - t_k) + O \left[\left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1 (t - t_k)^2, \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 (t - t_k)^2 \right] \right\} dt. \quad (4.1.28)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} s_k &= s(t_k), & e_{ik} &= e_i(t_k), & i &= 1, 2, \\ s'_k &= s'(t_k), & e'_{ik} &= e'_i(t_k), & i &= 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.29)$$

Интегрируя первую квадратную скобку в (4.1.28), получим с учетом (4.1.12)

$$c \left[(s_k, e_{2k}) \ln \left(\frac{m_k^-}{m_k^+} \right) - (s_k, e_{1k}) \ln \left(\frac{m_k^-}{m_k^+} \right) \right] = c (s_k, e_{2k} - e_{1k}) \ln \left(\frac{m_k^-}{m_k^+} \right). \quad (4.1.30)$$

Из (4.1.30) следует: для того чтобы в I_1 члены нулевого порядка взаимно уничтожились, должно быть

$$e_2(t_k) = e_1(t_k). \quad (4.1.31)$$

Рассмотрим теперь интегралы от членов, линейно зависящих от $(t - t_k)$. Первый из этих интегралов с точностью до постоянного множителя равен

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 (t - t_k) dt = \dot{m}_2 \int_{t_{k2}^-}^{t_{k2}^+} \frac{(t - t_k)}{m(t_{k2}^-) + \dot{m}_2(t - t_{k2}^-)} dt = \\ &= t_{k2}^+ - t_{k2}^- + \frac{m_k^- + \dot{m}_2(t_k - t_{k2}^-)}{\dot{m}_2} \ln \frac{m_k^-}{m_k^+}. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Из условия $I_2 = 0$ получаем

$$\dot{m}_2(t_{k2}^+ - t_{k2}^-) + [m_k^- + \dot{m}_2(t_k - t_{k2}^-)] \ln \frac{m_k^-}{m_k^+} = 0. \quad (4.1.33)$$

Обозначим

$$\dot{m}_2(t_{k2}^+ - t_{k2}^-) = -\Delta m_k, \quad m_k^- + \dot{m}_2(t_k - t_{k2}^-) = m_2(t_k). \quad (4.1.34)$$

В соответствии с (4.1.13) расход массы на активном участке

не зависит от режима полета. С учетом (4.1.34) перепишем (4.1.33) в виде

$$\frac{m_2(t_k)}{m_k^-} = - \frac{\frac{\Delta m_k}{m_k^-}}{\ln \left(1 - \frac{\Delta m_k}{m_k^-} \right)}. \quad (4.1.35)$$

Аналогично вышеизложенному, для интеграла

$$I_3 = \int_{t_k^-}^{t_k^+} \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1 (t - t_k) dt = \int_{t_{k1}^-}^{t_{k1}^+} \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1 (t - t_k) dt \quad (4.1.36)$$

получим: $I_3 = 0$, если

$$\frac{m_1(t_k)}{m_k^-} = - \frac{\frac{\Delta m_k}{m_k^-}}{\ln \left(1 - \frac{\Delta m_k}{m_k^-} \right)}. \quad (4.1.37)$$

Здесь

$$m_1(t_k) = m_k^- + \dot{m}_1(t_k - t_{k1}^-). \quad (4.1.38)$$

Но из (4.1.35) и (4.1.37) следует:

$$m_2(t_k) = m_1(t_k) = m(t_k) \equiv m_k. \quad (4.1.39)$$

Таким образом, условие обращения в нуль членов порядка $O(t_k^+ - t_k^-)$ в I_1 записывается в виде

$$\frac{m_k}{m_k^-} = - \frac{\frac{\Delta m_k}{m_k^-}}{\ln \left(1 - \frac{\Delta m_k}{m_k^-} \right)}. \quad (4.1.40)$$

Обозначая

$$\frac{\Delta m_k}{m_k} = X, \quad \frac{m_k}{m_k^-} = Y, \quad (4.1.41)$$

перепишем (4.1.40) так:

$$Y = - \frac{X}{\ln(1-X)}. \quad (4.1.42)$$

График зависимости (4.1.42) приведен на рис. 4.1.1.

Условие (4.1.40) определяет положение точки t_k и расположение активных участков 1 и 2 относительно этой точки. Положение точки t_k не зависит от режима и определяется только расходом массы на k -м активном участке. Зная траекторию 1, для каждого

из активных участков находим t_k . Зная $\dot{m}_2$, определяем начало t_{k2}^- и конец t_{k2}^+ активного участка режима 2 в соответствии с (4.1.40) (рис. 4.1.2).

Если, согласно (4.1.20),

$$|\dot{m}_2| > |\dot{m}_1|, \quad (4.1.43)$$

то, в соответствии со сказанным,

$$[t_k^-, t_k^+]_2 \subset [t_k^-, t_k^+]_1. \quad (4.1.44)$$

Предполагая в дальнейшем (без потери общности, см. ниже

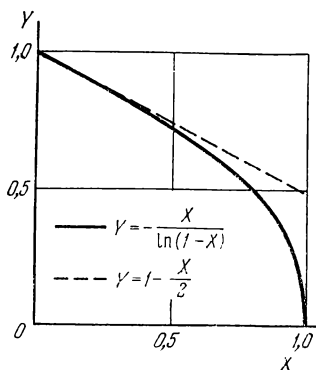


Рис. 4.1.1.

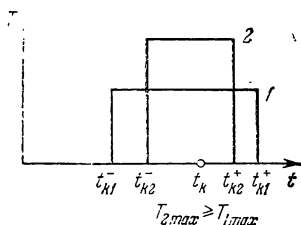


Рис. 4.1.2.

замечание) выполненными условия (4.1.43) и (4.1.44), получаем на основании (4.1.24) для любого $t \in [t_k^-, t_k^+]$

$$p_q = p_q(t_k) + p'_q(t_k)(t - t_k) + \frac{p''_q(\xi_q)}{2!}(t - t_k)^2, \quad (4.1.45)$$

где $\xi_q \in (t_k^-, t_k^+)$. Используя это разложение, находим, что при выполнении (4.1.13) и при t_k , выбранном в соответствии с (4.1.40), в интеграле (см. (4.1.11))

$$I_4 = -c \int_{t_k^-}^{t_k^+} p_q \left[\left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_1 \right] dt \quad (4.1.46)$$

обращаются в нуль члены нулевого и первого относительно $(t_k^+ - t_k^-)$ порядка малости.

Замечание. Когда $T_{2\max} < T_{1\max}$ и соответственно $|\dot{m}_2| < |\dot{m}_1|$, то все рассуждения остаются в силе, если сопряженные переменные вычислять на режиме 2 (т. е. фактически поменять местами обозначения режимов).

Вычисляя интегралы от последних членов в (4.1.28), получим

$$\int_{t_h^-}^{t_h^+} \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_i (t - t_h)^2 dt = O \left\{ \max_k \left[\left(t_{ki}^+ - t_{ki}^- \right)^2 \ln \frac{m_k^-}{m_k^+} \right] \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (4.1.47)$$

Принимая, что на активных участках относительный расход массы (безразмерный)

$$\frac{\Delta m_k}{m_k^-} = \frac{\dot{m}_i}{m_k^-} (t_{ki}^+ - t_{ki}^-), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1.48)$$

таков что $\max \ln(m_k^-/m_k^+)$ представляет величину нулевого порядка, окончательно с учетом (4.1.13), (4.1.14), (4.1.31), (4.1.40), (4.1.44), (4.1.47), (4.1.48) получаем

$$[(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{V})]_i' = O \left[\max (t_k^+ - t_k^-)^2 \right]. \quad (4.1.49)$$

В проведенных рассуждениях точка t_k , относительно которой соответствующие функции раскладывались по формуле Тейлора, бралась одной и той же для всех функций $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{p}_q(t)$, $\mathbf{e}_i(t)$. Введем теперь свои центры разложения для каждой из указанных функций t_k^s , t_k^{pq} , t_k^{ei} соответственно. Тогда точно так же, как это сделано выше, для определения каждой из указанных точек получим соотношения вида (4.1.35), (4.1.37), где вместо величин $m_i(t_k)$ будут стоять величины $m_i(t_k^s)$, $m_i(t_k^{ei})$ и $m_i(t_k^{pq})$, $i = 1, 2$, соответственно. Сравнивая эти соотношения для каждого из режимов, получим, что вследствие равенства правых частей этих соотношений должно быть

$$t_k^s = t_k^{ei}, \quad t_k^{pq} = t_k^{ei}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1.50)$$

откуда следует:

$$t_k^s = t_k^{ei} = t_k^{eq} = t_k^{pq} = t_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.51)$$

Таким образом, в качестве центра разложения для каждой из функций $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{p}_q(t)$, $\mathbf{e}_i(t)$ при получении оценки (4.1.49) следует брать одну и ту же точку t_k .

Раскладывая (4.1.42) при $X < 1$ в ряд, получим

$$Y = 1 - \frac{X}{2} - \frac{X^2}{12} - \frac{X^3}{24} \dots \quad (4.1.52)$$

Если в качестве точки t_k в (4.1.25), (4.1.26) и (4.1.45) выбрать середины активных участков и положить

$$t_k = t_k^- + \frac{t_{ki}^+ - t_{ki}^-}{2} = \frac{t_{ki}^+ + t_{ki}^-}{2}, \quad (4.1.53)$$

то величина Y (4.1.42) будет равна

$$Y = \frac{m(t_k)}{m_k^-} = \frac{m_k^- + \dot{m}_i \left(\frac{t_{ki}^+ - t_{ki}^-}{2} \right)}{m_k^-} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m_k}{m_k^-} = 1 - \frac{X}{2}. \quad (4.1.54)$$

Сравнивая (4.1.54) и (4.1.42) с помощью разложения (4.1.52) (см. рис. 4.1.1), замечаем, что практически при всех значениях $X \leq 0,6$ величина t_k , определяемая из (4.1.42), близка к (4.1.53). Если величину t_k , соответствующую (4.1.42), заменить на величину t_k , соответствующую (4.1.53), то относительная ошибка в величине интегралов I_1 и I_4 составит (рис. 4.1.3)

$$\Delta Y = 1 - \frac{1}{2} X + \frac{X}{\ln(1-X)} = \frac{X^2}{12} + \frac{X^3}{24} \dots \quad (4.1.55)$$

Таким образом, при расходах массы

$$\frac{\Delta m_k}{m_k^-} \leq 0,6 \quad (4.1.56)$$

с относительной ошибкой $\sim 4\%$ можно считать, что t_k определяется соотношением (4.1.53), т. е. середины активных участков режимов 1 и 2 должны совпадать.

Смещение значения t_k , определяемого равенством (4.1.40), от середины активного участка к его концу объясняется наличием в интеграле вида (4.1.32) весового множителя $1/m_i$, который при больших расходах массы резко возрастает и существенно искажает линейную функцию $t - t_k$. При $X \rightarrow 1$ $1/m_i \rightarrow \infty$, и интеграл вида

(4.1.32), по существу, превращается в интеграл, содержащий δ -функцию $\delta = \delta(t - t_{ki}^+)$, в результате чего $t_k \rightarrow t_{ki}^+$.

Если считать ограниченной не тягу, а тяговооруженность, то

$$\left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \quad (4.1.57)$$

и из условия обращения в нуль интегралов вида (4.1.32) получим, что t_k должны удовлетворять (4.1.53). Условие (4.1.31) не зависит от вида ограничения. Поскольку теперь $p_a = \text{const}$ (см. (1.2.39)), то в (4.1.46) $I_4 = 0$ при условии (4.1.13). Таким образом, в случае ограничения тяговооруженности для режима 2 имеет место оценка (4.1.49), если выполняются условия (4.1.31) и (4.1.53).

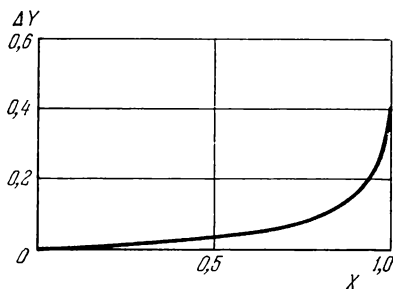


Рис. 4.1.3.

Возьмем теперь в качестве режима 2 режим, для которого

$$e_2(t) = \text{const} = e_1(t_k), \quad (4.1.58)$$

а начало и конец активного участка выбраны так, что удовлетворяется условие (4.1.40). Нетрудно видеть, что для рассматриваемого режима имеет место та же оценка (4.1.49). Полученные результаты позволяют дать решение задачи 2. При этом необходимо различать два случая:

1°. Активные участки в начале и конце траектории, примыкающие к t_i и t_f соответственно, отсутствуют, либо, при их наличии, t_i и t_f не заданы.

2°. В начале и (или) конце траектории имеются активные участки, примыкающие к заданным моментам t_i и (или) t_f соответственно.

В первом случае в качестве режима 2, достаточно близко к оптимальному по краевым условиям, можно взять режим, определяемый условиями (4.1.40) и (4.1.58). При этом, согласно оценке (4.1.49), краевые условия для режима 2 удовлетворяются с точностью до величин порядка $O[\max(t_k^+ - t_k^-)^2]$. В рассматриваемом случае моменты времени t_i и t_f при переходе от режима 1 к режиму 2 либо не изменяются, либо изменяются в соответствии с описанным выше правилом построения активных участков для режима 2 (см. рис. 4.1.2).

Если же на одном или обоих концах траектории имеются активные участки, примыкающие к заданным моментам t_i и t_f соответственно, то для крайних активных участков при переходе от режима 1 к режиму 2 не удастся провести их деформацию в окрестности одной точки t_k , определяемой соотношением (4.1.40).

В самом деле, введя, как и выше, например, для начального активного участка, примыкающего к точке $t_i = \text{const}$, свои центры разложения $t_1^s, t_1^{e_1}, t_1^{e_2}, t_1^{p_q}$ для функций $s(t), e_1(t), e_2(t), p_q(t)$ соответственно, получим, что для компенсации в интегралах вида (4.1.27), (4.1.46) линейных относительно $(t_i^+ - t_i^-)$ членов должны иметь место равенства (4.1.50):

$$t_1^s = t_1^{e_i}, \quad t_1^{p_q} = t_1^{e_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4.1.59)$$

и, следовательно,

$$t_1^s = t_1^{e_1} = t_1^{e_2} = t_1^{p_q}. \quad (4.1.60)$$

Но выполнение указанных равенств невозможно, поскольку при условии $t_i = \text{const}$ положения точек $t_1^{e_1}$ и $t_1^{e_2}$ оказываются заданными по отношению к начальной точке t_i . Таким образом, в этом случае краевые условия для режима 2 удовлетворяются на поря-

док менее точно, чем в общем случае (4.1.49), т. е. с точностью до величин порядка $O[\max(t_k^+ - t_k^-)]_1$.

Вопрос о степени близости построенной в соответствии с указанными правилами траектории для режима 2 к строго оптимальной траектории будет рассмотрен в конце раздела 4.2.1.

§ 4.2. Приближенное построение оптимальных перелетов с конечной тягой

4.2.1. Переход от оптимальной импульсной траектории к приближенно оптимальной траектории с конечной тягой. Правило пересчета. Пусть режим 2 стремится к импульсному режиму 3 так, что

$$|\dot{m}_2| \rightarrow +\infty, \quad \dot{m}_2(t_k^+ - t_k^-)_2 = \text{const} = \Delta m_k. \quad (4.2.1)$$

Условие (4.2.1) соответствует (4.1.12), (4.1.13) и обеспечивает равенство функционала (4.1.21) для всех рассматриваемых траекторий как с конечной, так и с импульсной тягой. Положим, что

$$t_{k2}^- \rightarrow t_{k3}, \quad t_{k2}^+ \rightarrow t_{k3}, \quad \mathbf{e}_2(t) \rightarrow \mathbf{e}_3(t). \quad (4.2.2)$$

В этом случае из (4.1.27) и (4.1.46) получаем

$$\lim_{|\dot{m}_2| \rightarrow +\infty} \left\{ -c \int_{t_{k2}^-}^{t_{k2}^+} (\mathbf{s}, \mathbf{e}_2) \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 dt \right\} = c(\mathbf{s}(t_{k3}), \mathbf{e}_3(t_{k3})) \ln \frac{m_k^-}{m_k^+}, \quad (4.2.3)$$

$$\lim_{|\dot{m}_2| \rightarrow +\infty} \left\{ -c \int_{t_{k2}^-}^{t_{k2}^+} p_q \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 dt \right\} = c p_q(t_{k3}) \ln \frac{m_k^-}{m_k^+}. \quad (4.2.4)$$

Если положить

$$t_{k3} = t_k, \quad \mathbf{e}_3(t_{k3}) = \mathbf{e}_3(t_k) = \mathbf{e}_1(t_k), \quad (4.2.5)$$

где t_k по-прежнему определяется соотношением (4.1.40) или (4.1.53), то для такого импульсного режима 3 члены нулевого порядка относительно $(t_k^+ - t_k^-)_1$ в интегралах (4.1.27) и (4.1.46) уничтожаются. Члены первого порядка малости относительно $(t_k^+ - t_k^-)_1$ не зависят от импульсного режима 3 и уничтожаются путем выбора t_k в соответствии с (4.1.40) или (4.1.53). Следовательно, замена оптимального режима с конечной тягой 1 импульсным режимом 3 при выполнении условий (4.2.5) позволяет получить для импульсного режима ту же оценку (4.1.49).

Таким образом, рассмотренные выше, в разделе 4.1.2, режимы 2 конечной тяги с условием (4.1.53) и импульсной тяги с условия-

ми (4.2.5) дают одну и ту же точность выполнения краевых условий по отношению к оптимальному режиму 1.

В проведенных рассмотрениях оптимальность режима I нужна лишь при записи свойств (4.1.22) — (4.1.26), (4.1.45). Поэтому полученные результаты остаются в силе при сопоставлении любых режимов конечной тяги, для которых имеют место соотношения (4.1.22) — (4.1.26), (4.1.45), с импульсным режимом, удовлетворяющим условиям (4.2.5). Поскольку рассматриваемые режимы конечной тяги по построению близки к оптимальным, естественно предположить для них выполнение соотношений (4.1.22) — (4.1.26), (4.1.45).

Полученные результаты позволяют дать частичное решение задачи 1 — сформулировать *правило построения активных участков*.

В соответствии с результатами решения задачи 2 сформулируем это правило сначала для случая, когда все импульсы и активные участки расположены строго внутри отрезка $[t_i, t_f]$ или, при наличии крайних импульсов и активных участков, примыкающих к моментам t_i, t_f , когда моменты t_i и t_f не заданы.

Правило П₁. Пусть имеется заданная импульсная траектория. Чтобы траектория КА при конечной тяге с тем же расходом массы и тем же функционалом (4.1.21) удовлетворяла бы тем же краевым условиям с точностью порядка $\max [(t_k^+ - t_k^-)^2]$, должно выполняться следующее правило П₁:

1°. Расход массы на каждом активном участке должен быть таким же, как и в соответствующем импульсе.

2°. Вектор тяги на активном участке должен иметь постоянную ориентацию, совпадающую с ориентацией вектора импульса.

3°. Если управлением является вектор тяги, то точка приложения импульса должна совпадать с точкой активного участка, выбираемой в соответствии с соотношением (4.1.40). При относительных расходах массы, удовлетворяющих условию (4.1.56), точка приложения импульса приближенно должна совпадать с серединой активного участка. Если управлением является вектор тяговооруженности, то середина активного участка точно должна совпадать с точкой приложения импульса.

В тех же случаях, когда в заданных точках t_i, t_f имеются копцевые импульсы, соответствующие активные участки должны примыкать к t_i и t_f . Повторяя те же рассуждения, что и в конце раздела 4.1.2, получим, что

$$t_i \neq t_1, \quad t_f \neq t_N, \quad (4.2.6)$$

где t_1 и t_N выбираются в соответствии с (4.1.40) или (4.1.53). Для краевых условий получаем оценку $\max \{O(t_1^+ - t_1^-), (t_N^+ - t_N^-)\}$,

а не оценку $\max[(t_k^+ - t_k^-)^2]$. Формулировка соответствующего правила построения активных участков для этого случая будет дана ниже (см. правило Π_2), после подробного анализа траекторий с импульсами и активными участками в концах траектории.

Очевидно, что правилом Π_1 можно пользоваться и для построения импульсной траектории по заданной траектории с конечной тягой.

Перейдем теперь к анализу оптимальности (приближенной) построенного по правилу Π_1 решения 2, если известно, что импульсная траектория 3 оптимальна. Для этого найдем решение сопряженной системы уравнений (1.2.75) — (1.2.77) для траектории 2 и оценим точность, с которой для нее выполняются условия оптимальности.

Будем вначале предполагать, что импульсы и активные участки на концах траектории отсутствуют. Пусть имеется некоторая оптимальная импульсная траектория 3 и ей соответствуют сопряженные переменные $s_3(t)$, $p_3(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности $1^\circ - 7^\circ$, сформулированным в разделе 2.2.1. Перейдем к соответствующему решению 2 при конечной тяге, используя правило Π_1 . Тогда отличие фазовой траектории 2 от фазовой траектории 3 в каждой точке будет иметь порядок $O[\max(t_k^+ - t_k^-)^2]$.

Рассмотрим для решения 2 сопряженную систему уравнений (1.2.75) — (1.2.77). Фазовые переменные для траекторий 2 и 3 должны удовлетворять одним и тем же краевым условиям. Поэтому условию transversальности для сопряженных переменных $s_2(t)$, $p_2(t)$ и $s_3(t)$, $p_3(t)$ — одни и те же.

Радиусы-векторы r_2 и r_3 для траекторий 2 и 3 отличаются в каждой точке траектории на малую порядка $O[\max(t_k^+ - t_k^-)^2]$. Поскольку как при конечной, так и импульсной тяге радиус-вектор аппарата непрерывен, $r_2(t)$ можно представить в виде $r_2(t) = r_3(t) + \mu \rho(t)$, где $\rho(t)$ — непрерывная векторная функция $|\rho(t)| \approx |r_3(t)|$, а постоянный параметр μ имеет порядок $\mu = O[\max(t_k^+ - t_k^-)^2]$. Так как для всех имеющих физический смысл задач выполнено ограничение (1.2.48) и $r(t) \neq 0$ в некоторой окрестности траектории 3, то в этой окрестности для правых частей системы (1.2.75), (1.2.76) в соответствии с предположениями, сделанными относительно вектора гравитационного ускорения $g(r, t)$ в разделе 1.2.4 (существование и непрерывность частных производных $\frac{\partial g(r, t)}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2}$), существуют и непрерывны

частные производные по p , s и r . Из сказанного получаем, что система уравнений (1.2.75), (1.2.76) удовлетворяет условиям теоремы о дифференцируемости решения по параметру (Л. С. Поя-

трягин [1]). Следовательно, в каждой точке траектории 2 имеем

$$s_2(t) = s_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2], \quad (4.2.7)$$

$$p_2(t) = p_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.8)$$

Из (4.2.7) следует

$$s_2(t) = s_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.9)$$

Дифференцируя по времени тождество $s^2(t) = (s, s)$, получим с учетом (1.2.76)

$$\frac{ds}{dt} = -\left(\frac{s}{s}, p\right). \quad (4.2.10)$$

На основании (4.2.7), (4.2.8), (4.2.10)

$$s_2'(t) = s_3'(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.11)$$

Рассмотрим необходимые условия оптимальности для режима конечной тяги 2, содержащие сопряженные переменные s_2 и p_2 , используя полученные оценки для фазовых и сопряженных переменных режима 2 по отношению к оптимальному импульсному режиму 3 и необходимые условия оптимальности для последнего (см. раздел 2.2.1).

Из правила Π_1 непосредственно следует, что для режима 2 краевые условия по фазовым переменным выполнены с точностью $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$. Непосредственно из получения функций $s_2(t)$ и $p_2(t)$ ясно, что они непрерывны всюду на траектории 2 (см. (1.2.42), (1.2.43)) и на концах траектории удовлетворяют (точно!) условиям трансверсальности, следующим для них из (1.2.40).

Условие (1.2.34) с использованием (4.1.58), (4.2.5) и (4.2.7) дает

$$\begin{aligned} (s_2(t), e_2) &= (s_2(t), e_3(t_{k3})) = \\ &= (s_3(t), e_3(t_{k3})) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

В малой окрестности точки приложения оптимального импульса t_{k3} имеем (см. (1.2.69))

$$s_3(t) = s_3(t_{k3}) + s_3'(t_{k3})(t - t_{k3}) + O(t - t_{k3})^2. \quad (4.2.13)$$

Подставляя (4.2.13) в (4.2.12), получим

$$\begin{aligned} (s_2(t), e_2) &= (s_3(t_{k3}), e_3(t_{k3})) + (s_3'(t_{k3}), e_3(t_{k3}))(t - t_{k3}) + \\ &+ O(t - t_{k3})^2 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Но на основании (2.2.46), (2.2.50)

$$(s_3'(t_{k3}), e_3(t_{k3})) = 1, \quad (s_3'(t_{k3}), e_3(t_{k3})) = 0. \quad (4.2.15)$$

Так как $t_k = t_{k3}$ (см. (4.2.5)) и $t_k \in [t_{k2}^-, t_{k2}^+]$, в малой окрестности точки t_k длины $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$ из (4.2.14) с учетом (4.2.15) получим

$$(s_2(t), e_2) = 1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.16)$$

Из (4.2.9) в той же окрестности точки $t_k = t_{k3}$ с учетом (2.2.46), (2.2.51) имеем

$$\begin{aligned} s_2(t) &= s_3(t_{k3}) + s_3'(t_{k3})(t - t_k) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2] = \\ &= 1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Сравнивая (4.2.16) с (4.2.17), окончательно получим в окрестности точки t_k длины $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$

$$(s_2(t), e_2) = s_2(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.18)$$

Таким образом, для режима 2 условие (1.2.34) всюду на активном участке выполняется с той же точностью, с короткой выполнены краевые условия для фазовых координат.

Перейдем теперь к анализу необходимых условий оптимальности (1.2.36), (1.2.37), связанных с функцией переключения (1.2.35). Для этого, прежде всего, рассмотрим уравнение (1.2.77) относительно сопряженной переменной p_{q2} для режима 2.

Пусть управлением является тяга аппарата. Тогда, поскольку режим 2 неоптимальный, уравнение (1.2.77) на активных участках аналогично (1.3.67) запишем в виде

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 [(s_2, e_2) + p_{q2}]. \quad (4.2.19)$$

На пассивных участках уравнение для p_{q2} совпадает с соответствующим уравнением для оптимальной траектории (см. (1.2.38))

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = 0. \quad (4.2.20)$$

Если бы режим 2 был точно оптимальным, то (см. (1.3.67)) не было бы

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)_2 [s_2 + p_{q2}]. \quad (4.2.21)$$

Подставляя (4.2.16) в (4.2.19) и (4.2.17) в (4.2.21), получаем одно и то же уравнение

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)_2 (1 + p_{q2} + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]). \quad (4.2.22)$$

Непрерывным решением соответствующего (4.2.22) уравнения

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)_2 [1 + p_{q2}] \quad (4.2.23)$$

при краевом условии (1.2.41) является

$$p_{q2} = 1 \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (4.2.24)$$

Из (4.2.19) — (4.2.24) следует, что непрерывное решение уравнений (4.2.19), (4.2.20) при том же краевом условии имеет вид

$$p_{q2} = 1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.25)$$

Этот же результат можно получить, если воспользоваться формулой (1.3.72). Оценка (4.2.25) в точности совпадает с оценкой (2.2.98) для оптимальной траектории с конечной тягой (крайние активные участки отсутствуют).

Из (4.2.22), (4.2.25) с учетом (4.1.48) получаем, что на активных участках режима 2, как и на оптимальной траектории (см. (2.2.94)),

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)_2 O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2] = O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]. \quad (4.2.26)$$

Если управлением является тяговооруженность аппарата, то всюду на траектории 2, как и для оптимального решения (см. (1.2.39), (1.2.56)),

$$\frac{dp_{q2}}{dt} = 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f], \quad (4.2.27)$$

$$p_{q2} = 1 \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (4.2.28)$$

Очевидно, что в силу самого построения решений (4.2.25), (4.2.28) они удовлетворяют условию непрерывности (1.2.44).

Установим связь между функцией переключения (1.2.35) для режима 2

$$\vartheta_2(t) = s_2(t) + p_{q2}(t) \quad (4.2.29)$$

и функцией переключения (2.2.109) для импульсной траектории 3

$$\vartheta_3(t) = s_3(t) - 1. \quad (4.2.30)$$

Прибавляя к соотношению (4.2.29) и вычитая из него (4.2.30), получим

$$\vartheta_2(t) = \vartheta_3(t) + s_2(t) - s_3(t) + p_{q2} + 1, \quad (4.2.31)$$

откуда с учетом (4.2.9), (4.2.25), (4.2.28) в рассматриваемых случаях

$$\vartheta_2(t) = \vartheta_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2] \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (4.2.32)$$

Дифференцируя (4.2.29), (4.2.30) и учитывая (4.2.11), (4.2.20), (4.2.26), имеем в случае, когда управлением является тяга:

на активных участках

$$\dot{\vartheta}_2(t) = \dot{\vartheta}_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2], \quad (4.2.33)$$

на пассивных участках

$$\dot{\vartheta}_2(t) = \dot{\vartheta}_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.34)$$

Если управлением является тяговооруженность, то аналогично с учетом (4.2.11), (4.2.27), (4.2.28) всюду на траектории

$$\dot{\vartheta}_2(t) = \dot{\vartheta}_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2] \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad (4.2.35)$$

Рассмотрим подробно характер функции переключения $\vartheta_1(t)$ в пределах k -го внутреннего активного участка для оптимальной траектории с конечной тягой 1 (см. раздел 4.1.2). Следуя методике работы Г. Е. Кузмака, А. З. Брауде [1] (см. также § 6.4), разложим функцию $\vartheta_1(t)$ в окрестности некоторой точки t_{k1} k -го активного участка $t_{k1} \in [t_{k1}^-, t_{k1}^+]$ по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= \vartheta_1(t_{k1}) + \dot{\vartheta}_1(t_{k1})(t - t_{k1}) + \\ &+ \frac{\ddot{\vartheta}_1(t_{k1})}{2!}(t - t_{k1})^2 + \frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}(t - t_{k1})^3, \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

где $\xi_\vartheta \in (t_{k1}, t)$ или $\xi_\vartheta \in (t, t_{k1})$. Поскольку в концах активного участка

$$\vartheta_1(t_{k1}^-) = \vartheta_1(t_{k1}^+) = 0, \quad (4.2.37)$$

получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t_{k1}^-) &= \vartheta_1(t_{k1}) + \dot{\vartheta}_1(t_{k1})(t_{k1}^- - t_{k1}) + \\ &+ \frac{\ddot{\vartheta}_1(t_{k1})}{2!}(t_{k1}^- - t_{k1})^2 + \frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}(t_{k1}^- - t_{k1})^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t_{k1}^+) &= \vartheta_1(t_{k1}) + \dot{\vartheta}_1(t_{k1})(t_{k1}^+ - t_{k1}) + \\ &+ \frac{\ddot{\vartheta}_1(t_{k1})}{2!}(t_{k1}^+ - t_{k1})^2 + \frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}(t_{k1}^+ - t_{k1})^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Умножая (4.2.38) на $(t_{k1}^+ - t_{k1})/(t_{k1}^- - t_{k1})$ и вычитая из полученного выражения (4.2.39), имеем

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t_{k1}) = & \frac{\vartheta_1''(t_{k1})}{2!}(t_{k1}^+ - t_{k1})(t_{k1}^- - t_{k1}) + \\ & + \frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}(t_{k1}^+ - t_{k1})(t_{k1}^- - t_{k1})(t_{k1}^+ + t_{k1}^- - 2t_{k1}). \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Вычитая теперь (4.2.38) из (4.2.39) и деля на $t_{k1}^+ - t_{k1}^-$, получим

$$\begin{aligned} \vartheta_1'(t_{k1}) = & -\frac{\vartheta_1''(t_{k1})}{2!}(t_{k1}^+ + t_{k1}^- - 2t_{k1}) - \\ & - \frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}[(t_{k1}^+ - t_{k1}^-)^2 + (t_{k1}^+ - t_{k1})(t_{k1}^- - t_{k1}) + (t_{k1}^- - t_{k1})^2]. \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

Если в качестве точки t_{k1} взять середину активного участка

$$t_{k1} = \frac{t_{k1}^+ + t_{k1}^-}{2}, \quad (4.2.42)$$

то из (4.2.40), (4.2.41) соответственно находим

$$\vartheta_1(t_{k1}) = -\frac{\vartheta_1''(t_{k1})}{2!}\left(\frac{t_{k1}^+ - t_{k1}^-}{2}\right)^2 + O[(t_{k1}^+ - t_{k1}^-)^4], \quad (4.2.43)$$

$$\vartheta_1'(t_{k1}) = -\frac{\vartheta_1'''(\xi_\vartheta)}{3!}\left(\frac{t_{k1}^+ - t_{k1}^-}{2}\right)^2. \quad (4.2.44)$$

Из (4.2.40) — (4.2.44) окончательно получаем, что для оптимальной траектории 1

$$\vartheta_1(t_{k1}) = O(t_{k1}^+ - t_{k1}^-)^2 \quad \forall t_{k1} \in [t_{k1}^-, t_{k1}^+], \quad (4.2.45)$$

$$\vartheta_1'(t_{k1}) = \begin{cases} O(t_{k1}^+ - t_{k1}^-)^2, & \text{если } t_{k1} = \frac{t_{k1}^+ + t_{k1}^-}{2}, \\ O(t_{k1}^+ - t_{k1}^-), & \text{если } t_{k1} \neq \frac{t_{k1}^+ + t_{k1}^-}{2}, \\ & t_{k1} \in [t_{k1}^-, t_{k1}^+]. \end{cases} \quad (4.2.46)$$

Вернемся к соотношению (4.2.32) и рассмотрим, с какой точностью оно определяет нули функции переключения $\vartheta_2(t)$ по отношению к активным участкам режима 2 и, следовательно, по отношению к точке приложения оптимального импульса $t_k = t_{k3}$

(см. (4.2.5)). Так как, согласно (4.2.30), (2.2.51), (2.2.88),

$$\vartheta_3(t_{k3}) - \vartheta_3'(t_{k3}) = 0, \quad (4.2.47)$$

из (4.2.32) в окрестности точки t_k порядка $\max(t_k^+ - t_k^-)_2$ и в самой точке t_k имеем

$$\vartheta_2(t) = O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.48)$$

Поскольку сама функция переключения (4.2.45) на оптимальной траектории такова, что смещение от ее нуля на величину порядка длины активного участка изменяет ее на величину второго порядка малости, условие (4.2.48) определяет нули функции $\vartheta_2(t)$ с точностью порядка $\max(t_k^+ - t_k^-)_2$.

Таким образом, хотя условие равенства нулю функции переключения в концах активного участка $t_{k2}^\pm$, согласно (4.2.48), выполнено, как и прочие условия оптимальности, с точностью порядка $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$, само это условие не может быть использовано для выбора концов активных участков с точностью большей, чем $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$.

Взаимное положение точек $t_k = t_{k3}$ и $t_{k2}^\pm$ определяется пунктом 3° правила Π_1 . Сопоставляя (4.2.33) и (4.2.35) в точках t_k с соотношениями (4.2.46), замечаем, что в точках t_k для производной $\vartheta_2'(t_k)$ с соответствующей точностью выполнены те же условия, что и для производной $\vartheta_1'(t_{k1})$, при аналогичном взаимном расположении точки t_{k1} относительно точек $t_{k1}^\pm$ на оптимальной траектории 1.

Составим для траектории 2 гамильтониан (1.2.74)

$$(H_2(t) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{V}_2) + (\mathbf{s}_2, \mathbf{g}(\mathbf{r}_2, t)) - \left(\frac{cm}{m}\right)_2 [(\mathbf{s}_2, \mathbf{e}_2) + p_{q2}]. \quad (4.2.49)$$

Используя оценки для фазовых и сопряженных переменных (см. (4.2.7), (4.2.8), (4.2.16), (4.2.25), (4.2.28)), получим

$$H_2(t) = H_3(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2] - \left(\frac{cm}{m}\right)_2 O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]. \quad (4.2.50)$$

Из (4.2.50) и (2.2.47) следует, что условие непрерывности (1.2.45) гамильтониана $H_2(t)$ выполняется на пассивных участках с точностью $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$, а на активных — с точностью $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$.

Из (4.2.32) и (4.2.30), (2.2.89) следует, что всюду на пассивных участках условие принципа максимума — отрицательность

функции переключения на пассивных участках (4.2.366), (4.2.37в) — выполняется с точностью до величин $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$.

Этим заканчивается проверка условий оптимальности для режима конечной тяги 2.

Предположим теперь, что точки расположения оптимальных импульсов t_{k3} относительно концов активных участков режима 2 выбираются не в соответствии с пунктом 3° правила Π_1 , а из других соображений, например, $t_{k3} = t_{k2}^-$ или $t_{k3} = t_{k2}^+$, в то время как пункты 1° и 2° выполняются. Тогда интегралы I_2 (4.1.32), I_3 (4.1.36), I_4 (4.1.46) будут величинами порядка $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$; следовательно, в соотношении (4.1.49) справа будет величина такого же порядка. Поскольку именно оценка (4.1.49) лежит в основе всех рассмотрений, связанных с выявлением степени оптимальности режима 2, повторяя их, получим во всех приведенных выше соотношениях вместо оценки $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$ оценку $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$, а вместо $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$ — оценку $O(1)$. Заметим, что при этом вместо точного выполнения пунктов 1° и 2° правила Π_1 достаточно выполнить их с той же точностью $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$. Таким образом, в классе режимов конечной тяги 2, удовлетворяющих, согласно (4.1.13), (4.1.34), (4.2.1), условию

$$(m_k^\pm)_2 = (m_k^\pm)_3, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.51)$$

режим, построенный с помощью правила Π_1 , обеспечивает наибольшую точность как по краевым условиям, так и по условиям оптимальности.

При построении режима 2 полностью используется запас «полезной информации» о фазовых координатах из оптимального импульсного режима 3.

В самом деле, в фазовом пространстве оптимальный импульсный режим 3 характеризуется моментами приложения t_{k3} и векторами импульсов $\Delta V_{k3} = \Delta V_{k3} e_{k3}$. Величина ΔV_{k3} определяет расход массы на активном участке (пункт 1° правила Π_1). По вектору e_{k3} можно определить лишь постоянную ориентацию вектора тяги (пункт 2° правила Π_1). Наконец, «оптимизация» режима 2 сводится к определенному расположению активных участков относительно моментов t_{k3} (пункт 3° правила Π_1). Из проведенных рассуждений и полученных оценок следует, что построение на основе этой информации при условии (4.2.51) режима, отличного от режима 2 и удовлетворяющего краевым условиям и условиям оптимальности с большей точностью, не представляется возможным.

Если рассматриваются перелеты с функционалами $G = \sum_k \Delta V_k$ и $G = q_f$, начинающиеся и (или) кончающиеся на орбитах ис-

кусственных спутников, с незадаанным начальным и (или) конечным временем и на концах траектории имеются импульсы и соответствующие активные участки, положение которых оптимизируется, то, согласно принципу окаймления, эти импульсы и активные участки можно рассматривать как внутренние (см. раздел 2.2.3). Важно, что при этом условия трансверсальности записываются в виде (2.2.51) — единственного соотношения, отличающего внутренние импульсы от концевых в общем случае. Таким образом, и в этом случае для построения «оптимального» (в указанном выше смысле) режима 2 с конечной тягой правило Π_1 остается в силе.

Итак, окончательно получаем: если рассматриваются оптимальные перелеты без импульсов на концах траектории или с импульсами на концах траектории при незадаанных t_i и (или) t_f , то решение задачи 1 дается правилом Π_1 .

Предположим теперь, что на одном или на каждом из концов траектории имеются импульсы и активные участки и t_i , t_f заданы. Тогда при переходе от оптимального импульсного режима 3 к любому режиму конечной тяги должно быть

$$t_1^- = t_i \neq t_1, \quad t_N^+ = t_f \neq t_N, \quad (4.2.52)$$

где t_1 и t_N — точки, выбираемые в соответствии с (4.1.40), причем

$$t_1 = t_1^- + O(t_1^+ - t_1^-), \quad t_N = t_N + O(t_N^+ - t_N^-). \quad (4.2.53)$$

Если выбор управления на внутренних активных участках, а также направления вектора тяги и расхода массы на концевых активных участках для режима 2 произвести в соответствии с правилом Π_1 , то во всех соотношениях, оценивающих точность выполнения краевых условий и степень оптимальности для режима 2, получим вместо оценки $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2^2]$ оценку $O\{\max[(t_1^+ - t_1^-)_2, (t_N^+ - t_N^-)_2]\}$, а вместо $O[\max(t_k^+ - t_k^-)_2]$ — оценку $O(1)$. Заметим, что поскольку теперь получаемые оценки не зависят от точного выполнения всех пунктов правила Π_1 , эти пункты также могут быть выполнены приближенно с точностью порядка $\max[(t_1^+ - t_1^-)_2, (t_N^+ - t_N^-)_2]$. В частности, когда управлением является вектор тяги, вместо выбора точки $t_k = t_{k3}$ для внутренних активных участков в соответствии с (4.1.40) можно в качестве точки t_k взять середину активного участка

$$t_k = \frac{(t_k^+ + t_k^-)_2}{2}, \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.2.54)$$

При этом пункты 1° и 2° правила Π_1 ввиду их простоты для всех активных участков оставляем неизменными. Заметим, что при от-

носительных расходах массы $\Delta m_k/m_k^- \leq 0,6$ соотношение (4.2.54) удовлетворяет пункту 3° правила Π_1 . Указанная возможность упрощения выбора точки t_k имеет важное практическое значение (см. ниже правило Π_2).

Проведенный анализ показывает, что в классе режимов конечной тяги, удовлетворяющих условию (4.2.51), в рассматриваемом случае обеспечить большую точность как по краевым условиям, так и по условиям оптимальности не представляется возможным.

На основании изложенного получаем окончательно следующее *правило Π_2 построения приближенно оптимального режима конечной тяги с помощью известного оптимального импульсного решения.*

Правило Π_2 .

1°. Расход массы или приращение характеристической скорости на каждом активном участке должны быть такими же, как и в соответствующем импульсе.

2°. Вектор тяги на каждом активном участке должен иметь постоянную ориентацию, совпадающую с ориентацией вектора импульса.

3°. Середины внутренних активных участков и выбираемых оптимально крайних активных участков должны совпадать с точками приложения импульсов.

4°. При заданных моментах начала и конца траекторий крайние активные участки должны прилегать к началу и концу траекторий.

Заметим сразу же, что формулировка пункта 3° правила Π_2 дана исходя из компактности и применимости (без специальных оговорок) ко всем наиболее важным практическим случаям. При этом не учитывается то обстоятельство, что когда управлением является вектор тяги аппарата, а расход массы в импульсе не удовлетворяет условию (4.1.56), целесообразно выбирать активные участки, исходя из соотношения (4.1.40) (см. пункт 3° правила Π_1). Поэтому сделаем сразу же уточняющее дополнение к пункту 3° правила Π_2 .

Дополнение к пункту 3° правила Π_2 . Если управлением КА является вектор тяги, а крайние активные участки отсутствуют или выбираются оптимально, то при больших относительных расходах массы на активных участках, не удовлетворяющих условию (4.1.56), точка приложения импульса должна совпадать с точкой активного участка, выбираемой в соответствии с соотношением (4.1.40). В дальнейшем для краткости сформулированное правило будем называть *правилом пересчета*.

В проведенных рассуждениях величина относительного расхода массы в импульсах $\Delta m_k/m_k^-$ предполагалась, вообще говоря, не малой. В случае малых расходов массы $\Delta m_k/m_k^-$ можно на основании (4.1.47) всюду, начиная с соотношения (4.1.49), получить

уточненные оценки: вместо $O [\max (t_k^+ - t_k^-)_2^2]$ — оценку $O [\max [(\Delta m_k / m_k^-)(t_k^+ - t_k^-)_2^2]]$, вместо $O [\max (t_k^+ - t_k^-)_2]$ — оценку $O [\max [(\Delta m_k / m_k^-)(t_k^+ - t_k^-)_2]]$ (см. § 6.4).

Проведенный анализ показывает, что при отсутствии крайних импульсов или их оптимальном выборе за счет расположения активных участков относительно импульсов в соответствии с соотношением (4.1.40) краевым условиям при переходе от импульсной тяги к конечной при любом относительном расходе массы $\Delta m_k / m_k^-$ можно удовлетворить с точностью порядка $\max [(\Delta m_k / m_k^-) \times (t_k^+ - t_k^-)^2]$. Этот результат имеет важное практическое значение, поскольку для ряда задач астродинамики, в частности для задач навигации, можно ограничиться построением траекторий, удовлетворяющих достаточно точно краевым условиям, за счет некоторого снижения степени их оптимальности.

Выше предполагалось, что схемы перелета, т. е. количество и расположение на траектории активных участков, как при импульсной, так и при любой конечной тяге одинаковы. Это условие выполнено, если импульсы расположены на траектории так, что при переходе к конечной тяге активные участки не перекрываются друг с другом. Для подавляющего большинства задач оптимизации траекторий с конечным количеством импульсов и активных участков (исключая траектории с особыми и скользящими режимами, см. конец раздела 1.2.2) указанное предположение выполняется.

Вернемся теперь к задаче 2 построения приближенно оптимального режима конечной тяги 2 по известной оптимальной траектории 1 при изменении ограничения на величину тяги или тяговооруженности. При оценке степени оптимальности режима 2с незначительными изменениями можно повторить все проведенные выше рассуждения и получить все соотношения с заменой величин с индексом 3, относящихся к оптимальному импульсному режиму 3, на соответствующие величины с индексом 1, относящиеся к режиму 1.

Проследим конспективное ход рассуждений, останавливаясь лишь на тех из них, которые отличаются от проведенных ранее. При этом соотношения, в которых только индекс 3 заменяется на индекс 1, будем обозначать теми же номерами, что и ранее.

Имеем (вместо (4.2.12)–(4.2.18)) с учетом (1.2.34), (4.1.44), (4.1.58), (4.2.7), (4.2.9), (4.2.11) в малой окрестности $O [\max (t_k^+ - t_k^-)_1]$ точки $t_k \in [t_{k1}^-, t_{k1}^+]$, выбираемой в соответствии с (4.1.40) или (4.1.53),

$$\begin{aligned} (s_2(t), e_2(t)) - (s_2(t), e_1(t_k)) &= \\ &= (s_1(t), e_1(t_k)) + O [\max (t_k^+ - t_k^-)_1^2] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s_1(t_k), e_1(t_k)) + (s_1'(t_k), e_1(t_k))(t - t_k) + O(t - t_k)^2 + \\
&\quad + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2] = s_1(t_k) + s_1'(t_k)(t - t_k) + \\
&\quad + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2] = s_2(t_k) + s_2'(t_k)(t - t_k) + \\
&\quad + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2] = s_2(t) + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2]. \quad (4.2.55)
\end{aligned}$$

Таким образом, для режима 2 всюду на активном участке условие (1.2.34) выполняется с той же точностью, что и краевые условия для фазовых координат.

Для оптимального режима 1 с учетом оценок (2.2.93), (2.2.98) имеем:

всюду на траектории

$$p_{q1} = -1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2] \quad \forall t \in [t_i, t_f], \quad (4.2.56)$$

на активном участке

$$s_1(t) = \vartheta_1(t) - p_{q1}(t) = -1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2] \quad \forall t \in [t_{k1}^-, t_{k1}^+]. \quad (4.2.57)$$

Из (4.2.9), (4.2.55), (4.2.57) получаем на активном участке (см. (4.2.17), (4.2.18))

$$s_2(t) = -1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2], \quad (4.2.58)$$

$$(s_2(t), e_2(t)) = -1 + O[\max(t_k^+ - t_k^-)_1^2]. \quad (4.2.59)$$

Все остальные рассуждения, результаты и оценки с очевидными изменениями переносятся на рассматриваемый случай. При этом может быть сформулировано правило пересчета, аналогичное правилу P_2 .

Наряду с обратной задачей импульсной аппроксимации может быть поставлена и «прямая» задача о приближенном построении оптимальной импульсной траектории по известной оптимальной траектории с конечной тягой. Эта задача является предельной для задачи 2, и на нее также с очевидными изменениями распространяются все полученные результаты.

Задачи оптимизации перелетов с конечной тягой содержат «естественный» малый параметр μ , в качестве которого можно взять среднюю $\sum_{h=1}^N (t_k^+ - t_k^-)/N$ или максимальную $\max(t_k^+ - t_k^-)$ длину активного участка, или величину, обратную начальной тяговооруженности аппарата. Это позволяет искать решение задачи путем разложения его в ряд по степеням μ . Решением в нулевом приближении, или, что то же самое, при $\mu \rightarrow 0$, является опти-

мальный импульсный перелет. Такой подход позволяет в принципе получить решение обратной задачи импульсной аппроксимации, сколь угодно близкое к точному оптимальному решению.

Относящиеся сюда вопросы с достаточной полнотой изложены в монографии В. С. Новоселова [1]. В основе разработанной теории лежит метод Пуанкаре отыскания решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в виде ряда по степеням малого параметра μ (см. Коул [1], И. Г. Малкин [1]). С помощью этого метода установлена связь между заданной степенью точности вычисления функционала и соответствующей степенью точности выполнения необходимых условий оптимальности. Общая теория применяется для решения отдельных задач оптимизации перелетов, в частности между компланарными круговыми орбитами (см. раздел 3.2.4), между орбитами ИС двух планет (см. гл. XII). Рассматриваются также задачи оптимизации перелетов между орбитами с малым эксцентриситетом и малым взаимным наклонением (которые и принимаются в качестве малых параметров). Во всех случаях основное внимание уделяется аналитическим аспектам решаемых задач: явному вычислению коэффициентов разложения решения в ряды по степеням μ до членов порядка μ^2 (включительно), качественному анализу влияния на решение учета членов различного порядка по μ . Приведенные решения показывают, что построение разложений с учетом членов порядка μ^2 , не говоря уже об учете членов более высокого порядка, связано с выполнением, как правило, громоздких и трудоемких выкладок.

Аналогичный подход к решению обратной задачи импульсной аппроксимации развивается в работах Корнхаузера, Лайона, Хэзелрига [1], Хэзелрига, Лайона [1], Эндраса [1], Энтони, Сазакки [2]. Здесь в качестве малого параметра μ используется величина, обратная начальной тяговооруженности аппарата. В работах Корнхаузера, Лайона, Хэзелрига [1], Хэзелрига, Лайона [1] основное внимание уделено получению соотношений, определяющих поправки к импульсному решению порядка μ и μ^2 . В работе Хэзелрига, Лайона [1] рассматривается ограниченная (постоянная) тяговооруженность аппарата, а в работе Корнхаузера, Лайона, Хэзелрига [1] — ограниченная (постоянная) тяга. Показано, что в последнем случае надо использовать разложение решения в ряд по двум малым параметрам — μ_1 , равному величине, обратной начальной тяговооруженности аппарата, и μ_2 , равному величине, обратной скорости истечения газов из сопла двигателя. При $\mu_1 \rightarrow 0$ решение для конечной тяги стремится к импульсному, а при $\mu_2 \rightarrow 0$ решение для конечной тяги стремится к оптимальному решению для случая ограничения тяговооруженности аппарата. В каждой из этих работ приведены примеры расчетов оптимальных гелиоцентрических перелетов Земля — Марс, де-

монстрирующие эффективность и достаточную точность метода. В работе Энтони, Сазаки [2] получено решение задачи оптимизации плоского перелета с круговой орбиты ИС, обеспечивающего на бесконечности получение заданного вектора скорости V_∞ (см. раздел 10.1.1).

Приведенное выше приближенное решение обратной задачи импульсной аппроксимации основано хотя и на близких, но в целом отличных от использованных в перечисленных работах соображениях. Характерной его особенностью является простота окончательного результата, сформулированного в виде правила пересчета. Вместе с тем, как показывает опыт его практического применения, оно приводит к результатам, хорошо согласующимся с точными оптимальными решениями соответствующих задач.

Примеры применения правила пересчета Π_2 для оптимизации перелетов с конечной тягой рассмотрены в § 6.4 для задач оптимизации перелетов в линеаризованной постановке и в разделах 10.4.2, 10.4.3 для задач оптимизации перелетов в нелинейной постановке. В этих же разделах дана численная оценка точности правила пересчета Π_2 .

4.2.2. Приближенное определение начальной или конечной точки активного участка. Если точка (начальная или конечная), от которой начинается интегрирование уравнений движения при приближенном построении оптимальной траектории в соответствии с правилом пересчета Π_2 , задана, то достаточно определить лишь положение точек t_k^- , t_k^+ . Рассматривая безразмерные уравнения движения (см. раздел 1.2.1), положим

$$T_* = T_{\max}, \quad m_* = m_0, \quad n_* = \frac{T_{\max}}{g_* m_0}. \quad (4.2.60)$$

Если управлением является вектор тяги, то на k -активном участке имеем

$$\frac{dq}{dt} = n_* e^{q/c} \quad (\bar{T} = 1), \quad (4.2.61)$$

откуда для k -го активного участка получаем

$$e^{-q_k^-/c} - e^{-q_k^+/c} = n_* \frac{\Delta t_k}{c}. \quad (4.2.62)$$

Поскольку в соответствии с правилом Π_2 значения $q_k^\pm$ для траекторий с конечной и импульсной тягой одни и те же, соотношения (4.2.62) и (4.1.40) позволяют приближенно найти длину, начало и конец k -го активного участка.

В том случае, когда управлением является вектор тяговооруженности, с учетом (4.2.60) имеем

$$\frac{dq}{dt} = n_*, \quad n_* = \frac{T_{\max}}{g_* m_0} = n_{\max} \quad (4.2.63)$$

и для k -го активного участка

$$q_k^+ - q_k^- = n_* \Delta t_k. \quad (4.2.64)$$

Если начальная и (или) конечная точка выбираются оптимально при старте с орбиты ИС и (или) выходе на орбиту ИС и начальный и (или) конечный моменты времени не заданы, то при приближенном построении оптимальной траектории в соответствии с правилом Π_2 нужно пойти начальную и (или) конечную точку на орбитах ИС.

Рассмотрим для определенности старт с орбиты ИС в ньютоновском гравитационном поле. Введем цилиндрическую систему координат, плоскость $O\tau\varphi$ которой совпадает с плоскостью орбиты ИС, углы φ отсчитываются в направлении движения по орбите. Обозначим через $t_i^- = 0$ и t_i^+ моменты соответственно начала и конца активного участка, $\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$ — длину активного участка, $t_i = (t_i^+ + t_i^-)/2$ — момент приложения импульса (см. правило Π_2 , пункт 3° вместе с дополнением). Пусть $\varphi(t_i^-) = \varphi_i^-$, $\varphi(t_i) = \varphi_i$, тогда угловое смещение точки старта на орбите ИС по отношению к точке старта при импульсной тяге равно

$$\delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^-. \quad (4.2.15)$$

Используя уравнение (4.3.126), имеем

$$\delta\varphi_i = \int_{t_i^-}^{t_i^+} \frac{V_\tau}{r} dt. \quad (4.2.16)$$

Для вычисления $\delta\varphi_i$ с точностью $O(\Delta t_i^2)$ достаточно V_τ вычислить с точностью $O(\Delta t_i)$.

Из (4.2.11), (4.2.12) и (4.2.15) следует:

$$dV = e dq - \frac{r}{r_3} dt. \quad (4.2.67)$$

В соответствии с правилом Π_2

$$e = \text{const} = e_i = \frac{\Delta V_i}{|\Delta V_i|}, \quad (4.2.68)$$

где ΔV_i — импульсное приращение скорости при старте с орбиты ИС. Обозначим через $\tau_i = \tau(t_i)$ единичный вектор трансверсали (к r в плоскости $O\tau\varphi$, см. раздел 4.3.4), соответствующий точке старта с орбиты ИС. Учитывая, что на активном участке

$$\tau(t) = \tau_i + O(\Delta t_i), \quad (4.2.69)$$

из (4.2.67) с учетом (4.2.69) при $q_i = 0$ получим

$$V_\tau = (V_i)_\tau + (e_i)_\tau q + O(\Delta t_i), \quad (4.2.70)$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости движения по орбите ИС в точке, соответствующей импульсу ($t = t_i$), $(\mathbf{V}_i)_\tau$ и $(\mathbf{e}_i)_\tau$ — проекции соответствующих величин на направление τ_i .

Из (4.2.10) находим, что на активном участке [$t_i^- = 0, t_i = \Delta t_i$]

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_i + O(\Delta t_i), \quad (4.2.71)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_i)$ — радиус-вектор точки старта на орбите ИС при импульсной тяге. На основании (4.2.62), (4.2.64) при $q_i = 0$ в случае, когда управление — вектор тяги,

$$q = -c \ln \left(1 - \frac{n_*}{c} t \right); \quad (4.2.72)$$

в случае, когда управление — вектор тяговооруженности,

$$q = n_* t. \quad (4.2.73)$$

Подставляя (4.2.70), (4.2.71), (4.2.72) или (4.2.73) в (4.2.66), получаем:

в случае, когда управление — вектор тяги,

$$\delta \varphi_i = \frac{(\mathbf{V}_i)_\tau}{r_i} \frac{\Delta t_i}{2} + \frac{(\mathbf{e}_i)_\tau c^2}{r_i n_*} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{n_*}{c} \frac{\Delta t_i}{2} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{n_*}{c} \frac{\Delta t_i}{2} \right) - 1 \right] \right\} + O(\Delta t_i^2); \quad (4.2.74)$$

в случае, когда управление — вектор тяговооруженности.

$$\delta \varphi_i = \frac{(\mathbf{V}_i)_\tau}{r_i} \frac{\Delta t_i}{2} + \frac{(\mathbf{e}_i)_\tau n_*}{2 r_i} \left(\frac{\Delta t_i}{2} \right)^2 + O(\Delta t_i^2). \quad (4.2.75)$$

Заметим, что вторые члены в правых частях (4.2.74), (4.2.75) являются членами порядка $O(\Delta t_i)$, так как величина $n_* \Delta t_i$, вообще говоря, сравнима с $|\mathbf{V}_i|$, поскольку, с учетом (1.2.13), (4.2.60),

$$n_* \Delta t_i = -c \Delta t_i = -c \Delta m_i, \quad (4.2.76)$$

где Δm_i — относительный (в долях m_0) расход массы аппарата на начальном активном участке.

Аналогично, при выходе на орбиту ИС с конечной тягой смещение точки выхода (в направлении движения по орбите ИС) по отношению к точке выхода для импульсной тяги равно:

в случае, когда управлением является вектор тяги,

$$\delta \varphi_f = \frac{(\mathbf{V}_f)_\tau}{r_f} \frac{\Delta t_f}{2} - \frac{(\mathbf{e}_f)_\tau c^2}{q_f^{+}/c} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{n_*}{c} e^{q_f^{+}/c} \frac{\Delta t_f}{2} \right) \left[\ln \left(1 + \frac{n_*}{c} e^{q_f^{+}/c} \frac{\Delta t_f}{2} \right) - 1 \right] \right\} + O(\Delta t_f^2), \quad (4.2.77)$$

где, согласно (1.2.4), (4.2.60), $n_* e^{q_f^{+}/c} = \frac{T_{\max}}{g_* m_f^{+}};$

в случае, когда управлением является вектор тяговооруженности,

$$\delta\varphi_f = \frac{(\mathbf{V}_f)_\tau}{r_f} \frac{\Delta t_f}{2} - \frac{(\mathbf{e}_f)_\tau}{r_f} n_* \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t_f}{2} \right)^2 + O(\Delta t_f^3), \quad (4.2.78)$$

где, в отличие от (4.2.60), положено

$$m_* = m_f^-, \quad n_* = \frac{T_{\max}}{g_* m_f^-} = n_{\max},$$

что позволяет и для этого участка воспользоваться уравнением (4.2.63) и получить соотношение (4.2.78), с точностью до знака перед вторым членом идентичное (4.2.75).

Здесь Δt_f — длина активного участка; m_f^- , m_f^+ — масса аппарата в начале и конце активного участка; q_f^+ — характеристическая скорость в конце активного участка; r_f — радиальное расстояние до точки выхода на орбиту ИС при импульсной тяге; $\mathbf{V}_f$ — вектор скорости движения по орбите ИС в точке, соответствующей импульсу; $\mathbf{e}_f = \frac{\Delta \mathbf{V}_f}{|\Delta \mathbf{V}_f|}$, где $\Delta \mathbf{V}_f$ — импульсное приращение скорости при выходе на орбиту ИС; $(\mathbf{V}_f)_\tau$ и $(\mathbf{e}_f)_\tau$ — проекции соответствующих величин на направление трансверсали τ в точке, соответствующей импульсу.

В соответствии с (4.2.74) — (4.2.78) положение начальной и (или) конечной точки на орбите ИС определяется с точностью до величин порядка Δt_i^2 или Δt_f^2 . В формуле Блисса (4.1.6) и соответственно (4.1.49) величины δg_i , $\delta \mathbf{V}_i$ или δg_f , $\delta \mathbf{V}_f$ на одном из концов траектории можно рассматривать как ошибки в задании начальных или конечных условий. Следовательно, при использовании правила пересчета Π_2 оптимальные начальные условия на каждом из концов траектории определяются с точностью порядка Δt_i^2 или Δt_f^2 . При интегрировании уравнений движения с использованием правила Π_2 моменты t_k окажутся сдвинутыми также на величины порядка Δt_i^2 или Δt_f^2 , что приведет к отличию интегралов типа (4.1.32) от 0 на величины того же порядка. Следовательно, приближенное определение оптимальных начальной и (или) конечной точек при старте с орбиты ИС и (или) выходе на орбиту ИС при незадаанных начальном и (или) конечном моментах времени с помощью формул (4.2.74) — (4.2.78) приводит при приближенном построении оптимальной траектории к ошибкам порядка Δt_i^2 или Δt_f^2 , не превосходящим порядка ошибок, возникающих при применении правила Π_2 .

Аналогичное проведенному выше рассмотрению можно использовать и для внутренних оптимальных импульсов. При этом одну

из кеплеровых дуг, примыкающих к импульсу, можно рассматривать как орбиту, с которой происходит старт аппарата, и использовать соотношения (4.2.74), (4.2.75), а другую — как орбиту, на которую происходит выход аппарата, и использовать соотношения (4.2.77), (4.2.78).

Правило пересчета Π_2 вместе с приведенными соотношениями для определения начальных или конечных точек активных участков позволяет по известной оптимальной импульсной траектории перелета приближенно построить оптимальную траекторию аппарата с конечной тягой. При численном решении соответствующих краевых задач оптимизации перелета эта фазовая траектория может быть взята в качестве исходного приближения.

Подробное рассмотрение этих вопросов дано в § 10.4 на примере решения задачи об оптимальных перелетах между орбитой ИС планеты и ее сферой влияния.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ

§ 5.1. Некоторые соотношения для перелетов в ньютоновском гравитационном поле

5.1.1. Постановка задачи. Допустимые траектории. Гомановские перелеты. В задачах межорбитального перелета в качестве основных условий, определяющих траектории КА, рассматриваются времена движения и угловые перемещения КА. Однако, в отличие от классических задач небесной механики, в задачах аэродинамики в качестве одного из определяющих факторов выступает также энергетика перелета, задаваемая обычно в виде характеристической скорости (см. раздел 2.1.1).

В большинстве работ, посвященных межорбитальным перелетам, методика расчета основывается на уравнении Эйлера — Ламберта (Брейкуэлл, Джиллспай, Росс [1], Бэттин [1, 2], С. В. Петухов [1], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [1], М. Ф. Субботин [2], Н. Е. Эльясберг [1, 2]), использование которого приводит к существенному усложнению энергетических соотношений.

Ниже излагается методика расчета межорбитальных перелетов КА, не использующая уравнение Эйлера — Ламберта, основанная на непосредственном учете ограничений, накладываемых на характеристическую скорость и угловые дальности полета (В. А. Ильин [2]).

В дальнейшем для удобства изложения и индексации всех величин при рассмотрении планетоцентрического движения КА вывод всех соотношений будет проводиться применительно к движению аппарата около Земли, а при рассмотрении перелета между орбитами ИС двух планет вывод всех соотношений будет проведен применительно к перелету Земля — Марс.

Рассмотрим перелет КА с орбиты ИСЗ на орбиту ИС планеты при следующих предположениях:

1°. Орбиты планет являются круговыми и компланарными, а траектория перелета лежит в плоскости орбит планет.

2°. Движение аппарата рассматривается последовательно в сфере влияния Земли, на гелиоцентрическом участке и в сфере влияния планеты.

3°. При рассмотрении гелиоцентрического участка перелета начальная и конечная точки дуги перелета считаются совпадаю-

щими с центрами соответствующих планет, т. е. схема перелета соответствует ММСВ (см. раздел 1.1.5).

4°. Для разгона и торможения аппарата у Земли и планеты аппарату в некоторых точках орбит ИС сообщаются импульсы скорости.

5°. В качестве энергетической характеристики перелета принимается характеристическая скорость (см. раздел 2.1.1).

Заметим, что если исключить влияние гравитационных полей Земли и планеты, то рассмотренная схема будет соответствовать перелету между круговыми орбитами в ньютоновском гравитационном поле.

Всюду в дальнейшем при выводе и анализе основных соотношений в качестве межорбитального или межпланетного перелета будет рассматриваться перелет с внутренней орбиты на внешнюю (перелет орбита ИСЗ — орбита ИС Марса). Это обусловлено тем, что вместо перелета на внутреннюю орбиту всегда можно рассматривать обращенный перелет на внешнюю орбиту. В соответствии со сказанным при введении безразмерных величин в качестве характерного линейного размера R_* возьмем радиус внутренней орбиты R_0 , а в качестве характерной скорости V_* — скорость движения по внутренней круговой орбите U_0 , определяемую соотношением (1.2.9):

$$U_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, \quad (5.1.1)$$

где μ — гравитационная постоянная центрального тела, в поле которого происходит перелет.

Рассмотрим в координатах p, e область допустимых траекторий перелета с внутренней орбиты на внешнюю. Кеплеровы дуги перелета должны удовлетворять следующим условиям (Фертрегт [1]) (рис. 5.1.1):

перигеи кеплеровой дуги должны лежать внутри или касаться внутренней орбиты радиуса R_0 ,

$$r_{\pi} \leq R_0; \quad (5.1.2)$$

апоцентр эллипса должен лежать вне или касаться внешней орбиты радиуса R_1 ,

$$r_a \geq R_1. \quad (5.1.3)$$

Используя соотношение (1.3.27), перепишем (5.1.2) и (5.1.3) в виде

$$e \geq p - 1, \quad (5.1.4)$$

$$e \geq 1 - \frac{p}{n}, \quad (5.1.5)$$

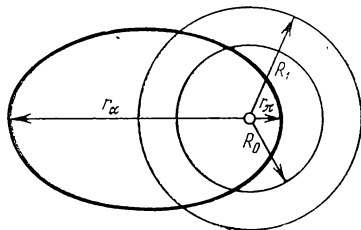


Рис. 5.1.1.

где n — относительное среднее расстояние до внешней орбиты:

$$n = \frac{R_1}{R_0} > 1, \quad (5.1.6)$$

p — безразмерный фокальный параметр, отнесенный к R_0 . Прямые

$$e = p - 1, \quad (5.1.7)$$

$$e = 1 - \frac{p}{n} \quad (5.1.8)$$

выделяют на плоскости p, e область допустимых параметров p, e кеплеровых дуг перелета, показанную на рис. 5.1.2 для перелета Земля — Марс. При $n = 1$ неравенство (5.1.5) и соответствующая прямая (5.1.8), показанная на рис. 5.1.2 штрих-пунктиром, соответствуют кеплеровым дугам, для которых радиус апоцентра r_a не меньше радиуса начальной орбиты R_0 , $r_a \geq R_0$.

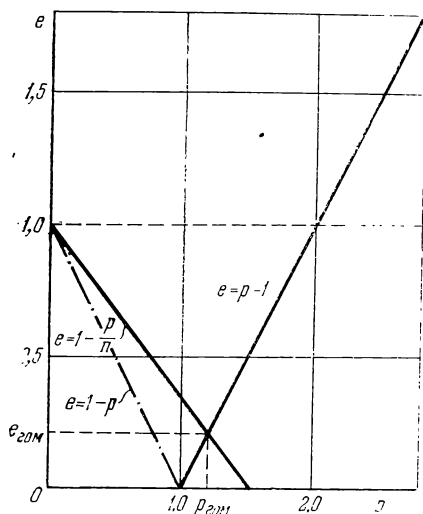


Рис. 5.1.2.

Прямая (5.1.7) определяет конические сечения, касательные к внутренней орбите; прямая (5.1.8) определяет эллипсы, касательные к внешней орбите.

Точка пересечения прямых определяет эллипс минимально возможного эксцентриситета для перелета Земля — планета, касательный к внутренней и внешней орбитам, т. е. гомановский эллипс, для которого

$$e_{\text{гом}} = \frac{n-1}{n+1}, \quad (5.1.9)$$

$$p_{\text{гом}} = \frac{2n}{n+1}. \quad (5.1.10)$$

Абсолютная оптимальность гомановского перелета в классе двухимпульсных перелетов

(при $n < 11,939$) будет непосредственно установлена ниже (см. раздел 5.1.2). Используя соотношение (1.1.63) и выражая скорости аппарата в перигеяре и апоцентре гомановского перелета через n , получим для величин планетоцентрических скоростей на сферах влияния внутренней и внешней планет

$$V_{\text{сф}0} = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} - 1 \quad (5.1.11)$$

и
$$V_{сф1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+n}} \right). \quad (5.1.12)$$

В случае перелета между орбитами соотношения (5.1.11) и (5.1.12) определяют величины соответствующих импульсов ΔV_0 и ΔV_1 , необходимых для схода с начальной орбиты и выхода на конечную орбиту. Продолжительность гомановского перелета

$$t_{01} = \pi \sqrt{\left(\frac{1+n}{2} \right)^3}. \quad (5.1.13)$$

Основные характеристики гомановских перелетов Земля — Марс и Земля — Венера (вместе с некоторыми характеристиками гомановских перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля) приведены в таблице 12.4.2.

5.1.2. Перелеты с постоянной характеристической скоростью между компланарными круговыми орбитами (изоэнергетические траектории). Рассмотрим переход с орбиты ИС планеты на планетоцентрическую гиперболу или обратно при импульсном изменении скорости КА, считая, что величина планетоцентрической скорости аппарата $V_{сф}$ на сфере влияния планеты задана (рис. 5.1.3).

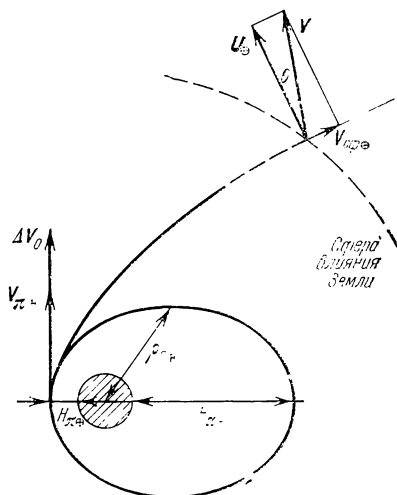


Рис. 5.1.3.

В данном случае для получения окончательного соотношения (5.1.24) будем пользоваться размерными величинами.

Для удобства индексации рассмотрим КА, движущийся около Земли по эллиптической орбите с большой полуосью $a_{0\oplus}$. Скорость аппарата в каждой точке орбиты определяется соотношением

$$V_{0\oplus}^2 = \mu_{\oplus} \left(\frac{2}{\rho_{0\oplus}} - \frac{1}{a_{0\oplus}} \right), \quad (5.1.14)$$

где $\mu_{\oplus}$ — гравитационная постоянная Земли, $\rho_{0\oplus}$ — расстояние от центра Земли до аппарата.

Скорость аппарата сразу же после импульса определяется соотношением ($\rho_{0\oplus}$ в процессе импульса не изменяется)

$$V_{1\oplus}^2 = \mu_{\oplus} \left(\frac{2}{\rho_{0\oplus}} + \frac{1}{a_{1\oplus}} \right), \quad (5.1.15)$$

где $a_{1\oplus}$ — действительная полуось гиперболы.

Вектор импульсного приращения скорости определяется равенством

$$\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{1\oplus} - \mathbf{V}_{0\oplus}, \quad (5.1.16)$$

откуда

$$\Delta V_0 = \sqrt{V_{0\oplus}^2 \cos^2 \psi_0 + \mu_{\oplus} \left(\frac{1}{a_{0\oplus}} + \frac{1}{a_{1\oplus}} \right)} - V_{0\oplus} \cos \psi_0, \quad (5.1.17)$$

где ψ_0 — угол между векторами $\mathbf{V}_{0\oplus}$ и $\Delta \mathbf{V}_0$.

Из (5.1.17) следует, что при заданных $a_{0\oplus}$ и $V_{сф\oplus}$ (т. е. $a_{1\oplus}$) $\min \Delta V_0$ достигается при $\max (V_{0\oplus} \cos \psi_0)$, т. е. при сообщении импульса в перигея орбиты по направлению вектора скорости движения аппарата.

В результате выражение (5.1.17) можно записать в виде

$$\Delta V_0 = \sqrt{V_{\pi\oplus}^2 + \mu_{\oplus} \left(\frac{1}{a_{0\oplus}} + \frac{1}{a_{1\oplus}} \right)} - V_{\pi\oplus}, \quad (5.1.18)$$

где $V_{\pi\oplus}$ — перигейная скорость движения ИСЗ.

Пусть H_{π} , $H_{\alpha\oplus}$ — высоты перигея и апогея орбиты ИСЗ соответственно. Тогда

$$a_{0\oplus} = R_{\oplus} + \frac{H_{\pi\oplus} + H_{\alpha\oplus}}{2} = R_{\oplus} + H_{ср\oplus}, \quad (5.1.19)$$

где $R_{\oplus}$ — средний радиус Земли,

$$H_{ср\oplus} = \frac{H_{\pi\oplus} + H_{\alpha\oplus}}{2}. \quad (5.1.20)$$

В результате величину $\mu_{\oplus}/a_{0\oplus}$ можно записать в виде

$$\frac{\mu_{\oplus}}{a_{0\oplus}} = \frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus} + H_{ср\oplus}} = V_{ср\oplus}^2, \quad (5.1.21)$$

где $V_{ср\oplus}$ — скорость движения ИСЗ по круговой орбите с высотой $H_{ср\oplus}$. Формулу (5.1.21) запишем так:

$$V_{ср\oplus}^2 = V_{1\oplus}^2 \frac{1}{1 + \frac{H_{ср\oplus}}{R_{\oplus}}}, \quad (5.1.22)$$

где $V_{1\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$ — 1-я космическая скорость.

Используя интеграл энергии, получим

$$\frac{\mu_{\oplus}}{a_{1\oplus}} = V_{сф\oplus}^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{\rho_{сф\oplus}}, \quad (5.1.23)$$

где $V_{сф\oplus}$ — заданная геоцентрическая скорость аппарата на сфере влияния Земли, $\rho_{сф\oplus}$ — радиус сферы влияния Земли.

Подставляя (5.1.21) и (5.1.23) в (5.1.18), приходим к окончательному выражению для импульсного приращения скорости в перицентре орбиты ИСЗ:

$$\Delta V_0 = \sqrt{V_{\pi\oplus}^2 + V_{ср\oplus}^2 + V_{сф\oplus}^2 - 2 \frac{\mu_{\oplus}}{\rho_{сф\oplus}} - V_{\pi\oplus}}. \quad (5.1.24)$$

Заметим, что скорость аппарата в перицентре орбиты ИСЗ с учетом (5.1.21) можно записать в виде (Эрике [5]).

$$V_{\pi\oplus}^2 = V_{ср\oplus}^2 \frac{1 + H_{\alpha\oplus}/R_{\oplus}}{1 + H_{\pi\oplus}/R_{\oplus}}. \quad (5.1.25)$$

Для круговой орбиты ИСЗ $V_{\pi\oplus} \equiv V_{ср\oplus}$.

Выразим теперь величину $V_{сф}$ через параметры гелиоцентрического участка траектории КА p, e . Из $V_{сф} = V - U$ следует:

$$V_{сф}^2 = V^2 + U^2 - 2VU \cos \theta, \quad (5.1.26)$$

где V — скорость движения аппарата по гелиоцентрической кеплеровой дуге, U — скорость движения планеты по гелиоцентрической круговой орбите радиуса R , θ — угол наклона вектора V к местной трансверсали (направленной по вектору U). Все величины в (5.1.26) считаем безразмерными, отнесенными к скорости U_0 (5.1.1). Воспользовавшись интегралами энергии (1.3.24) и момента количества движения (1.3.26) и соотношениями (1.3.29), (1.3.30), получим в начальной и конечной точках перелета на круговых орбитах радиусов R_0 и R_1

$$V \cos \theta = U \sqrt{\frac{p}{n}}, \quad (5.1.27)$$

$$V^2 = U^2 \left(\frac{2}{n} + \frac{e^2 - 1}{p} \right), \quad (5.1.28)$$

$$U^2 = \frac{1}{n}, \quad (5.1.29)$$

где для начальной точки $n = 1$ и для конечной точки перелета $n = R_1/R_0$. Подставляя соотношения (5.1.27) — (5.1.29) в (5.1.26), окончательно будем иметь следующее выражение для определения планетоцентрической скорости аппарата на сферах влияния планет $V_{сф}$ в начальной и конечной точках:

$$V_{сф}^2 = \frac{1}{n} \left(3 - 2 \sqrt{\frac{p}{n}} + n \frac{e^2 - 1}{p} \right). \quad (5.1.30)$$

Заметим, что в случае перелета между круговыми орбитами радиусов r_0 и r_1 , $r_1 > r_0$, в поле одного притягивающего центра соотно-

шение (5.1.30) определяет импульсы скорости аппарата в начальной ($n = 1$) и конечной ($n = r_1/r_0$) точках перелета.

Рассмотрим теперь двухимпульсный перелет с орбиты ИСЗ на орбиту ИС планеты, например перелет Земля — Марс.

Характеристическая скорость этого перелета

$$\Delta V_{01} = \Delta V_0 + \Delta V_1, \quad (5.1.31)$$

где ΔV_0 определяется выражением (5.1.24), а импульсное приращение скорости в перицентре орбиты ИСМ ΔV_1 — аналогичным соотношением:

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_{\pi\sigma}^2 + V_{\text{ср}\sigma}^2 + V_{\text{сф}\sigma}^2 - 2\left(\frac{\mu_\sigma}{\rho_{\text{сф}\sigma}}\right)} - V_{\pi\sigma}. \quad (5.1.32)$$

Входящие в (5.1.32) величины $V_{\pi\sigma}$, $V_{\text{ср}\sigma}$ определяются соотношениями (5.1.20), (5.1.22) и (5.1.25) при подстановке в них соответствующих величин для Марса R_σ , μ_σ и для орбиты ИСМ $H_{\pi\sigma}$ и $H_{\alpha\sigma}$.

Подставляя (5.1.24) и (5.1.32) в (5.1.31) и вводя обозначения

$$A = (\Delta V_{01} + V_{\pi\oplus} + V_{\pi\sigma})/U_\oplus, \quad (5.1.33)$$

$$B^2 = [V_{\pi\oplus}^2 + V_{\text{ср}\oplus}^2 - 2(\mu_\oplus/\rho_{\text{сф}\oplus})]/U_\oplus^2, \quad (5.1.34)$$

$$C^2 = [V_{\pi\sigma}^2 + V_{\text{ср}\sigma}^2 - 2(\mu_\sigma/\rho_{\text{сф}\sigma})]/U_\oplus^2, \quad (5.1.35)$$

где $U_\oplus$ — средняя скорость движения Земли по орбите, перепишем равенство (5.1.31) в виде

$$A = \sqrt{B^2 + V_{\text{сф}\oplus}^2/U_\oplus^2} + \sqrt{C^2 + V_{\text{сф}\sigma}^2/U_\oplus^2}. \quad (5.1.36)$$

Учитывая, что при перелете Земля — Марс в качестве скорости U_0 (5.1.1) следует взять среднюю орбитальную скорость Земли $U_\oplus$, можем для определения величин $V_{\text{сф}\oplus}^2/U_\oplus^2$ и $V_{\text{сф}\sigma}^2/U_\oplus^2$ воспользоваться соотношением (5.1.30). Подставляя (5.1.30) в (5.1.36) и освобождаясь от радикалов, окончательно имеем

$$e^2 = 1 + a_1 p + a_{3/2} p^{3/2} + a_2 p^2, \quad (5.1.37)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} \left(A\alpha + \frac{\beta}{A} \right)^2 - B^2 - 3, \quad a_{3/2} = 2 - \alpha\gamma - \frac{\beta\gamma}{A^2}, \quad a_2 = \frac{\gamma^2}{A^2}, \quad (5.1.38)$$

$$\alpha = 1 + \frac{B^2 - C^2}{A^2}, \quad \beta = 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad \gamma = 1 - \frac{1}{n^{3/2}}. \quad (5.1.39)$$

Соотношение (5.1.37) является уравнением *изознергетических траекторий* — двухимпульсных перелетов с постоянной характеристической скоростью между орбитами ИС двух произвольных

планет, отношение радиусов орбит которых равно n , в плоскости параметров p, e для гелиоцентрического участка перелета.

Если считать, что орбиты ИС находятся на бесконечно большом расстоянии от центров планет, например, если для Земли и Марса $H_{\pi\oplus} = H_{\alpha\oplus} = H_{\pi\delta} = H_{\alpha\delta} = \infty$, то

$$\Delta V_{01} = V_{c\oplus} + V_{c\delta} \quad (5.1.40)$$

и в формулах (5.1.38), (5.1.39) надо положить

$$A = \Delta V_{01}/U_{\oplus}, B = C = 0, \alpha = 1. \quad (5.1.41)$$

Соотношения, аналогичные (5.1.37), можно получить и для однопимпульсных перелетов между орбитами. Так, в случае импульса на орбите ИСЗ

$$\Delta V_{01} = \Delta V_0, \Delta V_1 = 0 \quad (5.1.42)$$

уравнение линий $\Delta V_{01} = \text{const}$ с использованием соотношения (5.1.24) приводится к виду

$$e^2 = 1 + a_1' p + 2p^{3/2}, \quad (5.1.43)$$

где

$$a_1' = A'^2 - B^2 - 3, \quad A' = \frac{\Delta V_0 + V_{\pi\oplus}}{U_{\oplus}}. \quad (5.1.44)$$

В случае импульса на орбите ИСМ

$$\Delta V_{01} = \Delta V_1, \quad \Delta V_0 = 0, \quad (5.1.45)$$

и с использованием (5.1.32) получим

$$e^2 = 1 + a_1'' p + a_{3/2}'' p^{3/2}, \quad (5.1.46)$$

где

$$a_1'' = A''^2 - C^2 - \frac{3}{n}, \quad a_{3/2}'' = \frac{2}{n^{3/2}}, \quad A'' = \frac{\Delta V_1 + V_{\pi\delta}}{U_{\oplus}}. \quad (5.1.47)$$

Коэффициенты B , входящий в a_1' , и C , входящий в a_1'' , по-прежнему даются соотношениями (5.1.34) и (5.1.35).

Если орбиты ИСЗ и ИСМ находятся на бесконечно большом расстоянии от центров Земли и Марса, то в (5.1.44) и в (5.1.47) надо, аналогично (5.1.41), положить

$$A' = \frac{\Delta V_0}{U_{\oplus}}, \quad B = 0, \quad (5.1.48)$$

$$A'' = \frac{\Delta V_1}{U_{\oplus}}, \quad C = 0 \quad (5.1.49)$$

соответственно.

Соотношения (5.1.37) и (5.1.43), (5.1.49) справедливы и для двухимпульсных и однопимпульсных, соответственно, перелетов между круговыми орбитами в поле тяготения одной и той же

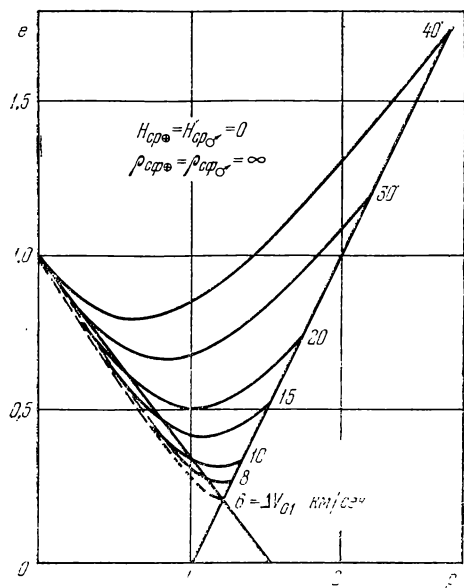


Рис. 5.1.4.

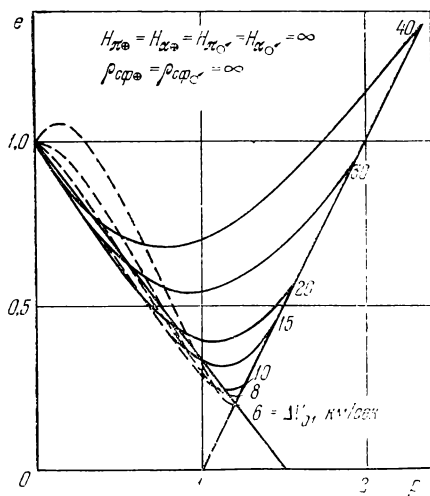


Рис. 5.1.5.

планеты. При этом, согласно сделанному замечанию и (5.1.30), уравнения изоэнергетических кривых для этих перелетов совпадают с соответствующими уравнениями для перелетов между бесконечно удаленными от центров тяготения орбитами ИС планет.

При исследовании полученных уравнений ограничимся случаем перелета на внешнюю планету ($n > 1$) и рассмотрим двухимпульсный перелет Земля — Марс.

На рис. 5.1.4, 5.1.5 приведены результаты расчета кривых $e = e(r)$ при $\Delta V_{01} = \text{const}$ по уравнению (5.1.37) для двух предельных случаев высот орбит: $H_{ср\oplus} = H_{ср\otimes} = 0$ (рис. 5.1.4),

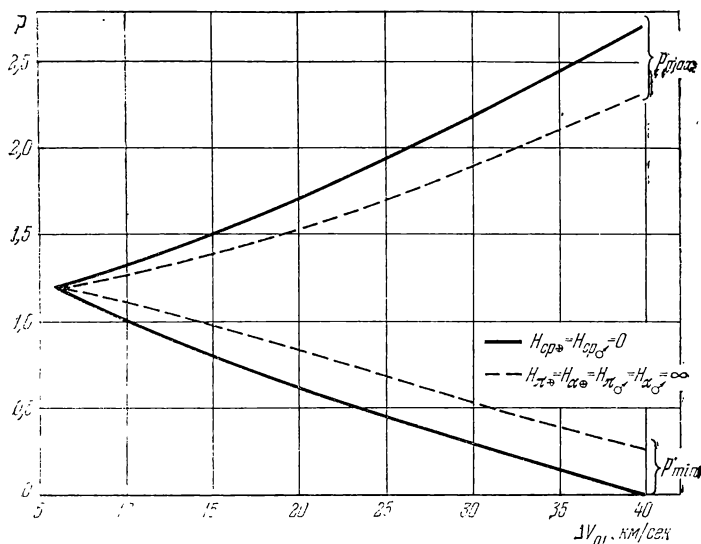


Рис. 5.1.6.

$H_{\pi\oplus} = H_{\alpha\oplus} = H_{\pi\otimes} = H_{\alpha\otimes} = \infty$ (рис. 5.1.5) — при условии $\rho_{сф\oplus} = \rho_{сф\otimes} = \infty$.

Из приведенных данных следует, что характер кривых $\Delta V_{01} = \text{const}$ в области допустимых значений r , e практически не зависит от высот орбит ИСЗ и ИС планеты. Численный анализ показывает, что участки кривых рис. 5.1.4, 5.1.5, проведенные штриховыми линиями, не имеют физического смысла. Из хода кривых $\Delta V_{01} = \text{const}$ непосредственно видно, что гомановский перелет обеспечивает абсолютный минимум характеристической скорости при перелете между двумя круговыми орбитами (при $n < 11,939$).

Кривые (5.1.37) пересекаются с граничными прямыми (5.1.7) и (5.1.8) в точках, для которых значения $\sqrt{r}$ определяются из следующих уравнений:

для границы (5.1.7)

$$(a_2 - 1)p + a_{3/2}p^{1/2} + a_1 + 2 = 0; \quad (5.1.50)$$

для границы (5.1.8)

$$\left(a_2 - \frac{1}{n^2}\right)p + a_{3/2}p^{1/2} + a_1 + \frac{2}{n} = 0. \quad (5.1.51)$$

Анализ корней уравнений (5.1.50) и (5.1.51) показывает, что из двух действительных корней каждого уравнения надо брать положительный корень, ближайший к точке пересечения прямых (5.1.7) и (5.1.8), соответствующей гомановскому перелету. Обозначим квадраты этих корней через $p_{\max}(\Delta V)$ и $p_{\min}(\Delta V)$ соответственно. Графики значений $p_{\max}(\Delta V)$ и $p_{\min}(\Delta V)$ для перелета Земля — Марс приведены на рис. 5.1.6.

Обозначая, как и выше, точки пересечения кривых (5.1.43), (5.1.46) с граничными прямыми (5.1.7), (5.1.8) через $p_{\max}(\Delta V)$ и $p_{\min}(\Delta V)$ соответственно, получим для их определения следующие уравнения:

одноимпульсный перелет с импульсом тяги на орбите ИС внутренней планеты (уравнение (5.1.43)):

$$p_{\max}(\Delta V): \quad p - 2p^{1/2} - a'_1 - 2 = 0, \quad (5.1.52)$$

$$p_{\min}(\Delta V): \quad \frac{1}{n^2}p - 2p^{1/2} - a'_1 - \frac{2}{n} = 0; \quad (5.1.53)$$

одноимпульсный перелет с импульсом тяги на орбите ИС внешней планеты (уравнение (5.1.46)):

$$p_{\max}(\Delta V): \quad p - a''_{3/2}p^{1/2} - a''_1 - 2 = 0, \quad (5.1.54)$$

$$p_{\min}(\Delta V): \quad \frac{1}{n^2}p - a''_{3/2}p^{1/2} - a''_1 - \frac{2}{n} = 0. \quad (5.1.55)$$

Для дальнейшего заметим, что при заданной величине характеристической скорости ΔV_{01} физический смысл имеют лишь те участки кривых (5.1.37), (5.1.43) и (5.1.46), для которых соответствующие значения p удовлетворяют условию

$$p_{\min}(\Delta V) \leq p \leq p_{\max}(\Delta V). \quad (5.1.56)$$

5.1.3. Перелеты с постоянной угловой дальностью (изогональные траектории). Перелет между двумя круговыми орбитами может быть совершен по одной из четырех дуг конического сечения, показанных на рис. 5.1.7. Следуя Фертретту [1], назовем перелеты по дугам A_0A_1 , $B_0A_0A_1$, $A_0A_1B_1$ и $B_0A_0A_1B_1$ соответственно маршрутами перелета A , B , C и D . Маршрут A не содержит вершин конического сечения, маршрут B содержит перигцентр, маршрут

рут C содержит апоцентр, и, наконец, маршрут D содержит обе вершины конического сечения. Последние два маршрута — C и D — имеют место только для эллиптических перелетов.

Угловая дальность перелета по маршруту A равна изменению истинной аномалии при перелете из точки A_0 в точку A_1 :

$$\eta_{01}^{(A)} = \eta_1 - \eta_0, \quad (5.1.57)$$

где $0 \leq \eta_0, \eta_1 \leq 180^\circ$ — истинные аномалии в точках A_0 и A_1 :

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \arccos[(1/e)(p-1)], \\ \eta_1 &= \arccos[(1/e)((p/n)-1)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.58)$$

Здесь, как и выше, $n = R_1/R_0$ — отношение радиусов круговых орбит, p и e — фокальный параметр (безразмерный) и эксцентриситет орбиты перелета.

Для маршрутов B, C и D угловая дальность перелета определяется соотношениями

$$\eta_{01}^{(B)} = \eta_{01}^{(A)} + 2\eta_0 = \eta_1 + \eta_0, \quad (5.1.59)$$

$$\eta_{01}^{(C)} = \eta_{01}^{(A)} + 2(\pi - \eta_1) = 2\pi - (\eta_0 + \eta_1), \quad (5.1.60)$$

$$\eta_{01}^{(D)} = 2\pi - \eta_{01}^{(A)}. \quad (5.1.61)$$

Рассматривая маршрут A , имеем из (5.1.57)

$$\cos \eta_{01} = \cos \eta_1 \cos \eta_0 + \sin \eta_1 \sin \eta_0. \quad (5.1.62)$$

Используя соотношения (5.1.58), приведем (5.1.62) к виду

$$e^2 \sin^2 \eta_{01} = (p-1)^2 + \left(\frac{p}{n} - 1\right)^2 - 2(p-1)\left(\frac{p}{n} - 1\right) \cos \eta_{01}. \quad (5.1.63)$$

Из (5.1.63) при $\sin \eta_{01} \neq 0$ получим

$$e^2 = b_0 + b_1 p + b_2 p^2, \quad (5.1.64)$$

где

$$b_0 = \sec^2 \frac{\eta_{01}}{2}, \quad (5.1.65a)$$

$$b_1 = -\frac{n+1}{n} \sec^2 \frac{\eta_{01}}{2}, \quad (5.1.65b)$$

$$b_2 = [1 + (1/n^2) - (2/n) \cos \eta_{01}] / \sin^2 \eta_{01}. \quad (5.1.65b)$$

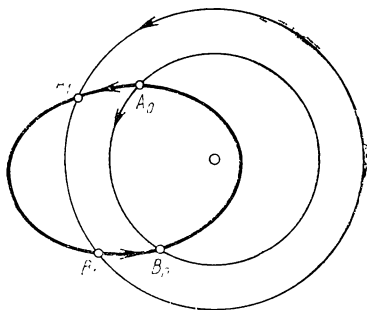


Рис. 5.1.7.

В случае маршрутов *B*, *C* и *D* придем к тем же результатам.

Полученное соотношение представляет уравнение *изогональных* траекторий — келлеровых дуг с равными углами перелета $\eta_{01} = \text{const}$ (между круговыми орбитами). Перелеты с дальностями

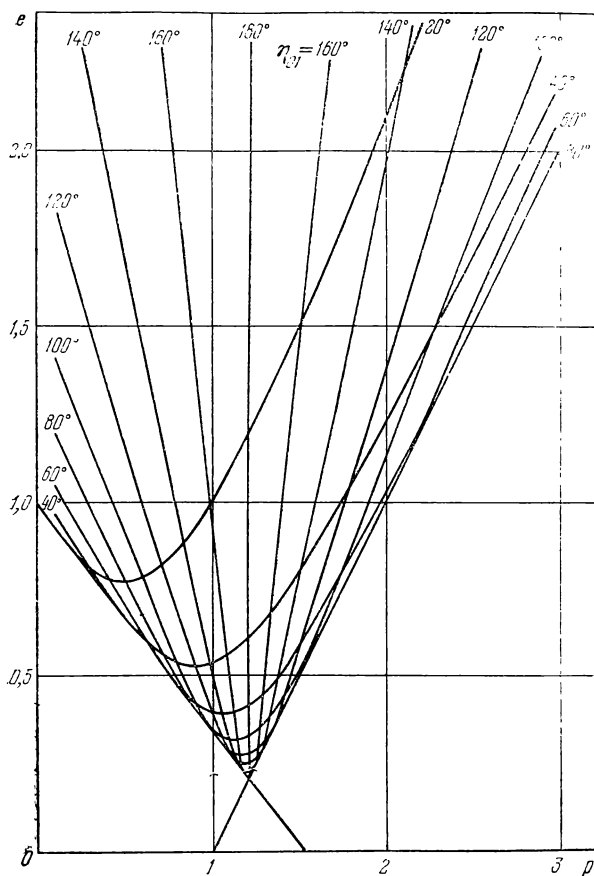


Рис. 5.1.8.

$\eta_{01} = 0, 180^\circ$ и 360° , для которых $\sin \eta_{01} = 0$, рассмотрены в конце раздела.

Как и при исследовании линий $\Delta V_{01} = \text{const}$, ограничимся случаем $n > 1$ и рассмотрим перелет Земля — Марс. Результаты расчета кривых $e = e(\rho)$ при $\eta_{01} = \text{const}$ для этого случая приведены на рис. 5.1.8 (каждая кривая $\eta_{01} = \text{const}$ соответствует также значениям $360^\circ - \eta_{01}$).

Из графика видно, что кривая $\eta_{01} = \text{const}$ в общем случае касается границ области допустимых параметров траекторий перелета. Этот же результат можно получить подстановкой в соотношение (5.1.64) вместо e правых частей уравнений (5.1.7) и (5.1.8).

Кривая $\eta_{01} = \text{const}$ касается прямой (5.1.7) при $\cos \eta_{01} < 1/n$; величина p в точке касания $p_{\max}(\eta)$ определяется соотношением

$$p_{\max}(\eta) = (1 - \cos \eta_{01})/[1/n - \cos \eta_{01}]. \quad (5.1.66)$$

При $\cos \eta_{01} \rightarrow 1/n$ $p_{\max}(\eta) \rightarrow \infty$, при $\cos \eta_{01} > 1/n$ кривая $\eta_{01} = \text{const}$ не имеет общих точек с прямой (5.1.7). Кривая $\eta_{01} = \text{const}$ касается прямой (5.1.8) в точке

$$p_{\min}(\eta) = (1 - \cos \eta_{01})/[1 - (\cos \eta_{01}/n)] \quad (5.1.67)$$

при всех значениях $\cos \eta_{01}$.

Из (5.1.63) следует, что при $\eta_{01} = 180^\circ$ кривая $\eta_{01} = \text{const}$ вырождается в вертикальную прямую (см. (5.1.10))

$$p = p_{\text{гом}} = 2n/(n+1). \quad (5.1.68)$$

При этом

$$p_{\min}(\eta) = p_{\max}(\eta) = p_{\text{гом}}. \quad (5.1.69)$$

Графики кривых $p_{\max}(\eta)$, $p_{\min}(\eta)$ для перелета Земля — Марс приведены на рис. 5.1.9 (кривые соответствуют значениям $0 \leq \eta_{01} \leq 180^\circ$ и $360^\circ - \eta_{01}$).

Установим соответствие между различными маршрутами перелета и точками кривых $\eta_{01} = \text{const}$. Для этого прежде всего определим диапазон изменения угловой дальности перелета η_{01} для каждого из маршрутов перелета (рис. 5.1.10).

Для маршрута А перелетом с минимальной угловой дальностью $\eta_{01} = 0$ является радиальный перелет, при котором скорость аппарата в момент достижения внешней орбиты обращается в 0. Этот перелет является предельным для касательных к внеш-

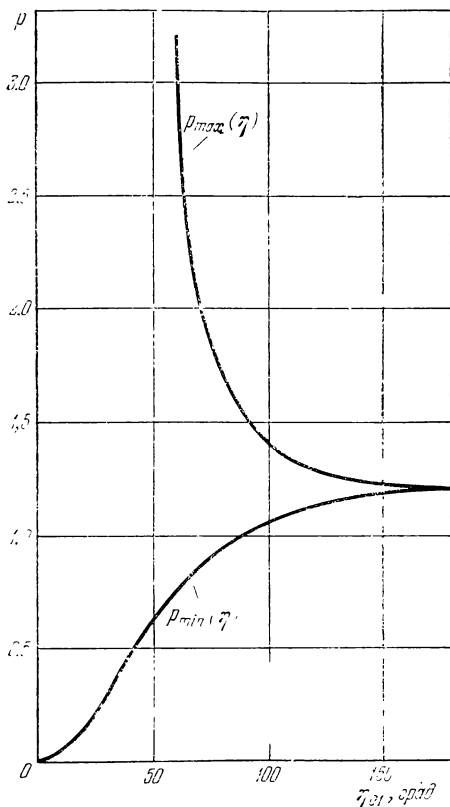


Рис. 5.1.9.

ней орбите перелетов. Перелетом максимальной угловой дальности $\eta_{01} = 180^\circ$ для маршрута *A* является гомановский перелет (5.1.9), (5.1.10). Таким образом, для маршрута *A*

$$0 \leq \eta_{01} \leq 180^\circ. \quad (5.1.70)$$

Для маршрута *B* минимальная дальность реализуется на предельных прямолинейных перелетах, касательных к внутренней орбите, с бесконечно большой характеристической скоростью ($\Delta V_{01} = \infty$, см. ниже). Угловая дальность этого перелета $\eta_{01} = \arccos \frac{1}{n}$. Перелет максимальной дальности для маршрута *B* получается на радиальной траектории при облете центра тяготения; в момент подлета к внешней орбите скорость аппарата должна

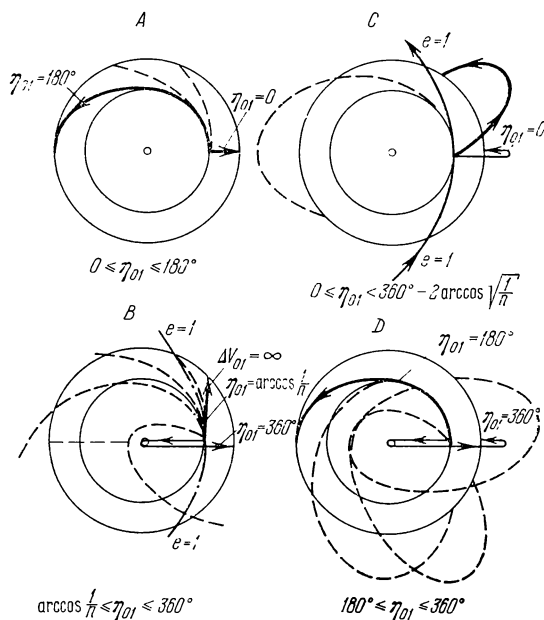


Рис. 5.1.10.

быть равна 0. Угловая дальность этого перелета $\eta_{01} = 360^\circ$. Таким образом, для маршрута *B*

$$\arccos \frac{1}{n} \leq \eta_{01} \leq 360^\circ. \quad (5.1.71)$$

Для маршрута *C* минимальная дальность $\eta_{01} = 0$ получается для радиальных перелетов с залетом за внешнюю орбиту. По-

сколькx перелеты C существуют только для эллиптических кеплеровых дуг, получаем, что предельным перелетом для маршрута C является перелет по параболе, касательной к внутренней орбите. Учитывая, что для параболы, касательной к внутренней орбите, на основании (1.3.27)

$$r = R_0 / \cos^2 \frac{\eta}{2}, \quad (5.1.72)$$

получаем при $r = R_1$ для истинной аномалии в точке первого пересечения параболы внешней орбиты

$$\eta_1 = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (5.1.73)$$

Поскольку для рассматриваемого перелета $\eta_0 = 0$, с учетом (5.1.60) и (5.1.73) получаем для угловой дальности этого перелета

$$\eta_{01} = 360^\circ - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (5.1.74)$$

Следует, однако, заметить, что сам этот перелет не принадлежит маршруту C , а принадлежит маршруту B . С учетом всего сказанного для маршрута C имеем

$$0 \leq \eta_{01} < 360^\circ - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (5.1.75)$$

Для маршрута D перелетом минимальной дальности $\eta_{01} = 180^\circ$ является гомановский перелет (5.1.9), (5.1.10). Перелет максимальной дальности $\eta_{01} = 360^\circ$ получается на радиальной траектории при облете центра тяготения и вылете за внешнюю орбиту. Таким образом, для маршрута D

$$180^\circ \leq \eta_{01} \leq 360^\circ. \quad (5.1.76)$$

Поскольку коэффициенты b_i зависят от $\sin^2 \eta_{01}$ и $\cos \eta_{01}$, кривые $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ для значений $0 \leq \eta_{01} \leq \pi$ и $\leq \eta_0 = 2\pi - \eta_{01} \leq 2\pi$ не различаются между собой. Очевидно, что при этом для перелетов A и D сохраняется однозначное соответствие между η_{01} и $\cos \eta_{01}$ и, следовательно, между точками кривой $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ и η_{01} . Чтобы сохранилось однозначное соответствие между точками кривой $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ и η_{01} для перелетов B и C , соответствующие кривые должны иметь по две ветви: одну для значений $0 \leq \eta_{01} \leq \pi$ и другую для значений $\pi \leq \eta_{01} \leq 2\pi$.

Пусть $\eta_{01} < 180^\circ$. Тогда возможными маршрутами перелета являются A , B и C . При $\eta_{01} = \text{const}$ непрерывный переход от маршрута A к маршруту B за счет деформации кеплеровой дуги перелета возможен через граничные перелеты, касательные к внутренней орбите, которым на кривой $\eta_{01} = \text{const}$ соответствует

точка $p_{\max}(\eta)$. Непрерывный переход от маршрута A к маршруту C за счет деформации кеплеровой дуги перелета возможен через граничные перелеты, касательные к внешней орбите, которым на кривой $\eta_{01} = \text{const}$ соответствует точка $p_{\min}(\eta)$. Сопоставляя сказанное с видом кривой $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ (рис. 5.1.11), приходим к выводу, что при $\eta_{01} < 180^\circ$ имеет место следующее соответствие между маршрутами перелета и участками кривой $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$:

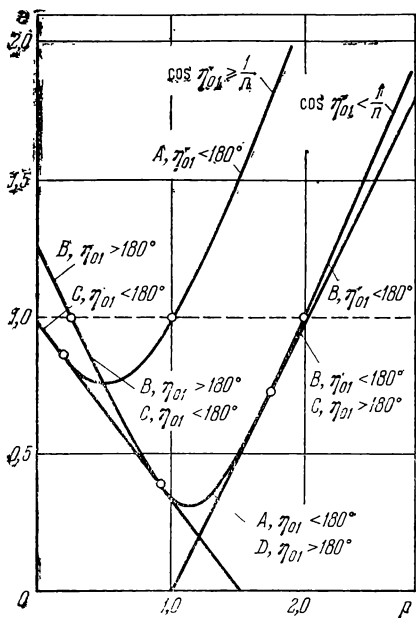


Рис. 5.1.11.

$$\left. \begin{aligned} A: & p_{\min}(\eta) \leq p \leq p_{\max}(\eta), \\ B: & p \geq p_{\max}(\eta), \\ C: & p \leq p_{\min}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.77)$$

Проводя аналогичное рассмотрение при $\eta_{01} > 180^\circ$ для маршрутов D , B и C , получаем следующее соответствие между маршрутами перелета и участками кривой $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ (рис. 5.1.11):

$$\left. \begin{aligned} D: & p_{\min}(\eta) \leq p < p_{\max}(\eta), \\ B: & p \leq p_{\min}(\eta), \\ C: & p \geq p_{\max}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.78)$$

При рассмотрении кривых $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$ необходимо различать два случая.

При

$$\cos \eta_{01} < \frac{1}{n}, \quad (5.1.79)$$

как указывалось выше, кривая $\eta_{01} = \text{const}$ касается каждой из граничных кривых (5.1.7), (5.1.8). При этом возможны переходы между всеми четырьмя маршрутами A , B , C и D в соответствии с (5.1.77), (5.1.78).

Если же

$$\eta_{01} < 180^\circ, \cos \eta_{01} \geq \frac{1}{n}, \quad (5.1.80)$$

то кривая $\eta_{01} = \text{const}$ не имеет общих точек с прямой (5.1.7) и весь участок $p \geq p_{\max}$ на кривой $\eta_{01} = \text{const}$, соответствующий при $\eta_{01} < 180^\circ$ маршруту B (5.1.77), отсутствует.

Суммируя все сказанное выше относительно структуры кривых $e = e(p; \eta_{01} = \text{const})$, допустимых диапазонов изменения угловых дальностей для каждого из маршрутов и соответствия между маршрутами перелета и участками кривых $\eta_{01} = \text{const}$, получим результаты, приведенные на рис. 5.1.11 и в таблице 5.1.1.

Таблица 5.1.1

Пределы изменения η_{01} для различных маршрутов

Маршрут	$0 < p \leq p_{\min}(\eta)$		$p_{\min}(\eta) < p \leq p_{\max}(\eta)$		$p_{\max}(\eta) < p < \infty$	
	$e < 1$	$e \geq 1$	$e < 1$	$e \geq 1$	$e < 1$	$e \geq 1$
A	—	—	$0 \div 180^\circ$		—	—
B	$180 \div \arccos \frac{1}{n}$		—	—	$\arccos \frac{1}{n} \div 180^\circ$	
C	$0 \div 180^\circ$	—	—	—	$180 \div 360^\circ - 2 \arccos 1/\sqrt{n}$	
D	—	—	$180 \div 360^\circ$		—	—

Примечание: Таблица составлена для значений $\cos \eta_{01} < \frac{1}{n}$; при $\cos \eta_{01} \geq \frac{1}{n}$

$p_{\max}(\eta)$ заменяется на ∞ , а участок кривой $p_{\max}(\eta) < p < \infty$ отсутствует.

Рассмотрим теперь особенности в уравнении (5.1.63) при $\eta_{01} = 0$, $\eta_{01} = 180^\circ$ и $\eta_{01} = 360^\circ$. Остановимся сначала на случае $\eta_{01} = 180^\circ$. Как уже указывалось выше, непосредственно из уравнения (5.1.63) следует, что при $\eta_{01} = 180^\circ$ имеют место равенства (5.1.68), (5.1.69). Из проведенного выше анализа ясно, что при $\eta_{01} = 180^\circ$ единственным перелетом по маршрутам A и D является гомановский перелет, которому на плоскости p, e соответствует точка пересечения прямых (5.1.7), (5.1.8). Весь же вертикальный отрезок

$$p = p_{\text{гом}} = \frac{2n}{n+1}, \quad e > e_{\text{гом}} = \frac{n-1}{n+1}, \quad (5.1.81)$$

как следует из сопоставления рис. 5.1.8 и 5.1.11, соответствует маршрутам B и C (последние при $e < 1$) с угловой дальностью $\eta_{01} = 180^\circ$.

Пусть теперь $\eta_{01} = 0$ или $\eta_{01} = 360^\circ$. Как показано выше, все эти перелеты соответствуют радиальным перелетам (рис. 5.1.10): $\eta_{01} = 0$ для маршрутов A и C, $\eta_{01} = 360^\circ$ для маршрутов B и D. Для всех этих перелетов на основании (1.3.26), (1.3.29), а также уравнения (5.1.63) фокальный параметр

$$p = 0. \quad (5.1.82)$$

Если полная энергия движущегося аппарата h конечна, $|h| < \infty$, то на основании (1.3.30) и (5.1.82) для таких перелетов

$$e = 1. \quad (5.1.83)$$

Таким образом, на плоскости p, e перелетам с дальностью $\eta_{01} = 0$ или $\eta_{01} = 360^\circ$ при любой конечной энергии соответствует точка ($p = 0, e = 1$), являющаяся граничной для примыкающих к ней областей эллиптических, параболических или гиперболических перелетов.

Пусть теперь полная энергия радиальных перелетов

$$h \rightarrow \infty. \quad (5.1.84)$$

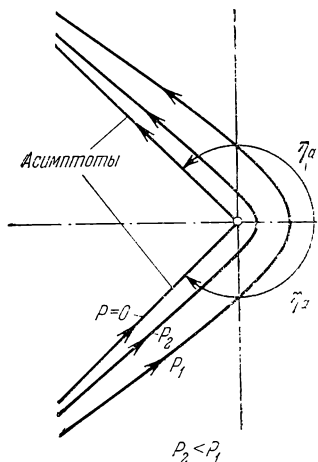


Рис. 5.1.12.

Можно показать, что все указанные перелеты являются вырожденными гиперболическими перелетами для маршрута B , проходящими на бесконечно малом удалении от центра тяготения, $r_n \rightarrow 0$. Геометрическим местом этих вырожденных гиперболических перелетов на плоскости p, e является полуось $p = 0, e \geq 1$. Рассматриваемые радиальные перелеты представляют собой вырожденные гиперболы, состоящие из

двух асимптот с заданным углом между ними (рис. 5.1.12). Угол, который составляют асимптоты гипербол с направлением на перцентр, равен

$$\eta_a = \arccos \left(-\frac{1}{e} \right). \quad (5.1.85)$$

Эти вырожденные перелеты по маршруту B с параметрами $p = 0, e > 1$ соответствуют начальным точкам кривых $e = e(p, \eta_{01} = \text{const})$ на оси $p = 0$ (см. рис. 5.1.11).

Рассмотрим теперь перелет КА между двумя заданными радиусами-векторами Γ_0 и Γ_1 по кеплеровой дуге в ньютоновском гравитационном поле. В этом случае для всех возможных кеплеровых дуг перелета справедливо соотношение (5.1.64), где η_{01} — угол между векторами Γ_0 и Γ_1 и $n = r_1/r_0$. Данная выше классификация маршрутов перелета остается в силе и для этого случая, если маршрут перелета характеризовать отсутствием или наличием на нем вершин конического сечения. Таким образом, полученные в этом разделе результаты фактически не зависят от рассмотрения перелетов между круговыми орбитами и справедливы при задании только угла между двумя радиусами-векторами движущегося в ньютоновском поле КА.

5.1.4. Применение уравнений изоэнергетических и изогональных траекторий. Уравнения изоэнергетических (5.1.37), (5.1.43), (5.1.46) и изогональных (5.1.64) траекторий можно эффективно использовать при решении различных задач астродинамики (В. С. Вожаев, В. А. Ильин [1], В. А. Ильин [2, 3], §§ 10.1, 11.2, 11.5, 12.3). Особенно полезным оказывается уравнение (5.1.64) изогональных траекторий, поскольку оно носит универсальный характер и описывает семейство кеплеровых дуг в «типовой» задаче, возникающей при синтезе и оптимизации импульсных перелетов. Поэтому далее в работе это соотношение систематически используется (см. §§ 10.1, 11.2, 11.5, 12.3).

Отметим, что выбор в качестве независимой переменной фокального параметра p кеплеровой дуги позволяет в ряде важных случаев свести решение задач синтеза и оптимизации межорбитальных перелетов к нахождению корней алгебраических уравнений (см. примеры в настоящем разделе, § 12.3, В. С. Вожаев, В. А. Ильин [1], Ли [1], Старк [1], Эскобал [2], работы [84], [283] в обзоре Гобеца, Долла [4]).

Ниже для иллюстрации рассмотрено несколько простых задач.

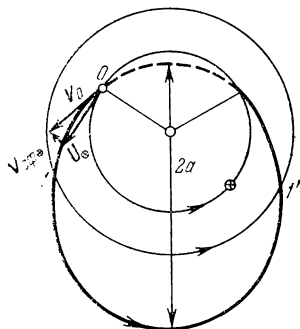
1. Одноимпульсный перелет с заданной характеристической скоростью $\Delta V_{01} = \Delta V_0 = \text{const}$ между круговыми компланарными орбитами по дуге эллипса с заданной большой полуосью a (рис. 5.1.13).

Примером такого перелета может служить кольцевой перелет между орбитами Земли и планеты с периодом, кратным периоду обращения Земли по орбите, в результате чего обеспечивается встреча КА с Землей при возвращении. В качестве характерных линейного размера и скорости выберем радиус внутренней орбиты (Земли) R_* и скорость движения по ней (5.1.1) U_* . При помощи интеграла энергии (1.3.30) и соотношения (5.1.43) для постоянной интеграла энергии получим

$$h = \frac{e^2 - 1}{p} = a'_1 + 2 \sqrt{p}. \quad (5.1.86)$$

Поскольку для эллипса большая полуось a связана с постоянной h интеграла энергии соотношением

$$a = -\frac{1}{h}, \quad (5.1.87)$$



5.1.13 – Возможные положения планеты назначения

Рис. 5.1.13.

окончательно получаем

$$p = \frac{1}{4} \left(a'_1 + \frac{1}{a} \right)^2, \quad (5.1.88)$$

причем, так как в (5.1.86) $\sqrt{p} \geq 0$, должно выполняться условие

$$a'_1 + \frac{1}{a} \leq 0. \quad (5.1.89)$$

2. Двухимпульсный перелет Земля — планета с заданной характеристической скоростью ΔV_{01} (5.1.31) по дуге B с заданным радиусом перицентра r_π .

Подобная задача возникает при рассмотрении «быстрых» перелетов Земля — планета — Земля (см. §§ 12.3, 12.4 и Эрике [2, 3, 4]).

Используя соотношения

$$r_\pi = \frac{p}{1 + e} \quad (5.1.90)$$

и (5.1.37), получим следующее уравнение для определения p :

$$\left(a_2 - \frac{1}{r_\pi^2} \right) p + a_{3/2} p^{1/2} + a_1 + \frac{2}{r_\pi} = 0. \quad (5.1.91)$$

Простота уравнения (5.1.91) позволяет провести полное исследование задачи в зависимости от основных параметров: ΔV_{01} , n , высот апоцентра H_a и перицентра H_π орбит ИС и r_π .

3. Классическая задача небесной механики определения орбиты тела по двум заданным положениям (Бэттин [2], В. А. Ильин [2, 3], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [4], М. Ф. Субботин [2], П. Е. Эльясберг [4]). Именно к такой задаче приводится внешняя задача астродинамики о проведении кеплеровой дуги между двумя точками на орбитах Земли и планеты назначения, определенными датой старта с орбиты ИСЗ t_0 и датой прибытия t_1 в окрестность планеты назначения.

Для решения этой задачи можно использовать уравнение Эйлера — Ламберта (Бэттин [2], Ц. В. Соловьев, Е. В. Тарасов [4], П. Е. Эльясберг [4, 2]). Ниже рассмотрен другой метод решения этой задачи, основанный на использовании уравнения изогопальных траекторий (5.1.64).

Задание величин t_0 и t_1 определяет радиусы-векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ и, следовательно, все характеристики перелета, в частности угол η_{01} . Рассматривая теперь движение КА в плоскости перелета, можем трактовать его как перелет по дуге заданного конического сечения с параметрами p , e по заданному маршруту между круговыми орбитами с радиусами r_0 и r_1 и записать

$$\eta_{01} = \eta_{01}(n, p, e), \quad (5.1.92)$$

$$t_{01} = t_{01}(n, p, e) = t_1 - t_0, \quad (5.1.93)$$

де

$$n = \frac{r_1}{r_0} = \text{const.} \quad (5.1.94)$$

Используя уравнение (5.1.64) и исключая с его помощью из (5.1.93) e , сводим задачу определения параметров конического сечения к решению одного трансцендентного уравнения от p :

$$t_{01} = t_1 - t_0 = t_{01}(n, p). \quad (5.1.95)$$

Указанный прием существенно облегчает решение ряда задач пространственных перелетов между орбитами. Примеры его использования приведены в § 12.3.

4. «Типовая» задача при использовании МСВ для отыскания переходов КА (см. § 11.2, 11.6 и Брейкуэлл, Джиллспай, Росс [1], Бэттин [1, 2], П. Е. Эльсберг [1]).

Заданы начальный r_0 и конечный r_1 радиусы-векторы. Найти параметры пассивного перелета между начальной 0 и конечной 1 точками при заданной скорости V_0 КА в точке 0 или, что то же самое, большой или действительной полуоси траектории перелета a . Все линейные размеры отнесем к r_0 , а скорости — к круговой скорости $V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ (5.1.1). В дальнейшем без ограничения общности считаем (см. раздел 5.1.1)

$$n = \frac{r_1}{r_0} > 1. \quad (5.1.96)$$

Уравнение линий $a = \text{const}$ имеет вид (см. (1.3.34), (1.3.35))

$$e^2 = 1 \mp \frac{p}{a}, \quad (5.1.97)$$

где знак «—» соответствует эллипсам, а знак «+» — гиперболам. В случае параболы вместо (5.1.97) на плоскости p, e имеем прямую $e = 1$ (рис. 5.1.14).

Обозначим через η_{01} угол между векторами r_0 и r_1 . Приравнявая e для эллиптических траекторий из (5.1.64) и (5.1.97), получим для определения двух точек пересечения этих кривых квадратное уравнение, корни которого

$$p_{1,2} = \frac{-\left(b_1 + \frac{1}{a}\right) \pm \sqrt{\left(b_1 + \frac{1}{a}\right)^2 - 4b_2(b_0 - 1)}}{2b_2} \quad (5.1.98)$$

В случае гиперболической кеплеровой дуги в (5.1.98) достаточно перед a изменить знак. Для параболической кеплеровой дуги

полагаем в (5.1.98) $a = \infty$, в результате чего

$$p_{1,2} = \frac{(1 - \cos \eta_{01}) \left[1 + \frac{1}{n} \pm \sqrt{\frac{2}{n} (1 + \cos \eta_{01})} \right]}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \cos \eta_{01}}. \quad (5.1.99)$$

Используя таблицу 5.1.1, корням p_1 и p_2 можно однозначно поставить в соответствие маршруты перелета (рис. 5.1.14).

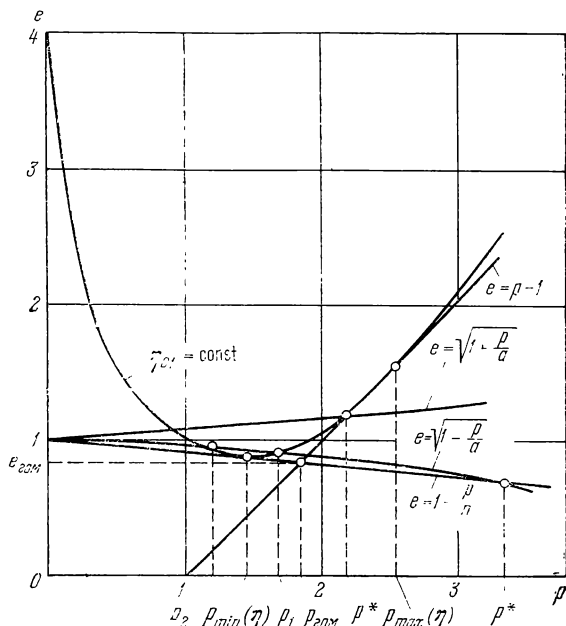


Рис. 5.1.14.

§ 5.2. Выход на круговую орбиту после торможения в атмосфере

5.2.1. Постановка задачи. Наличие на Земле, Марсе и Венере атмосферы позволяет использовать ее для торможения КА при подлете к планете. Хотя осуществление торможения в атмосфере при входе со скоростью, превышающей вторую космическую, является весьма сложной задачей, реализация этой идеи весьма заманчива, так как позволяет добиться значительного снижения начального веса КА. Именно это обстоятельство является причиной того, что рассмотрению данного вопроса уделяется достаточно большое внимание (см., например, Лох [1], Сейферт [1], Уингроу [1], Чепмен [1], Эггерс, Уонг [1]).

Траектории с торможением в плотных слоях атмосферы схематически изображены на рис. 5.2.1 и могут быть разделены на три типа. К I типу можно отнести траектории с однократным погружением в атмосферу и максимально интенсивным торможением, вследствие чего может быть получена малая дальность полета КА (рис. 5.2.1, а). Положительным свойством этих траекторий является малое рассеивание точки посадки КА. Однако если необходимо получить малую дальность, то значительная часть полета

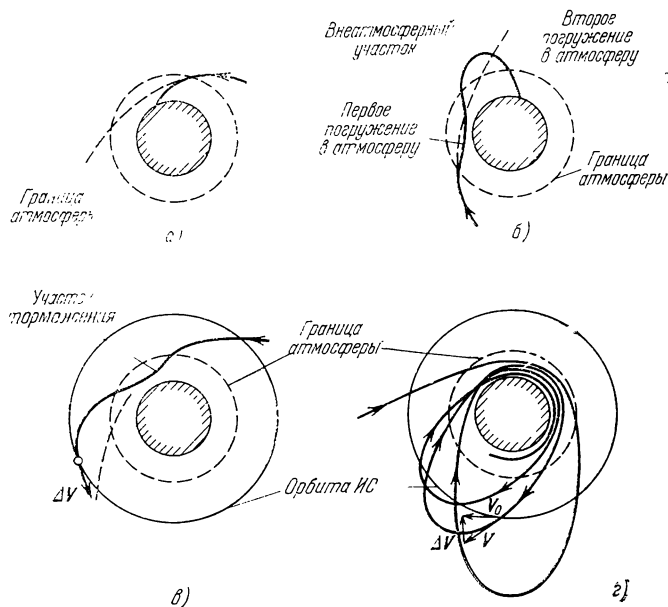


Рис. 5.2.1.

происходит при максимально допустимых перегрузках. В случае траекторий II типа (рис. 5.2.1, б) КА совершает первое погружение в атмосферу, гасит скорость до близкой к первой космической, выходит из атмосферы и по дуге эллипса совершает подлет к району посадки, после чего входит снова в атмосферу и совершает посадку на поверхности планеты. Одним из основных недостатков таких траекторий является большое рассеивание точки посадки, обусловленное наличием участка неуправляемого движения вне атмосферы. Траектории такого типа подробно исследованы в работе Чепмена [1]. К III типу можно отнести траектории с выходом на орбиту ИС после частичного торможения в атмосфере (рис. 5.2.1, в). Одним из вариантов такого маневра является схема, при которой аппарат, двигаясь по эллиптическим орбитам

ИС, многократно тормозится в атмосфере, после чего выходит на заданную орбиту ИС (рис. 5.2.1, з).

Основным достоинством траекторий III типа является независимое решение задачи подлета КА к планете и задачи посадки аппарата на планету, что при реализации космических полетов в ряде случаев может оказаться одним из решающих факторов при выборе схемы полета. В отличие от первых двух схем, реализация III схемы требует дополнительного импульса для перехода на орбиту ИС, в связи с чем возникает задача оптимизации этого перехода. Эта задача впервые была рассмотрена, по-видимому, в работе В. А. Ильина [1]. Эта же задача подробно исследовалась А. А. Шиловым [4].

5.2.2. Оптимальный одноимпульсный переход с тормозных эллипсов на орбиту ИС. Будем считать, что

1) гравитационное поле планеты является ньютоновским полем,

2) заданная орбита ИС планеты является круговой и высота ее много больше высоты «границы» атмосферы,

3) движение КА происходит в плоскости заданной орбиты спутника,

4) атмосферный участок движения аппарата настолько мал по сравнению с длиной одного витка, что траекторию аппарата на каждом витке можно считать эллипсом.

Заметим, что имеющий место поворот большой оси тормозных эллипсов (Сейферт [1], Чепмен [1]) не оказывает какого-либо влияния на дальнейшие рассуждения.

Рассмотрим приращение скорости ΔV , потребное для перехода с эллиптической орбиты с фокальным параметром p и эксцентриситетом e на круговую орбиту высотой H_0 (рис. 5.2.1, з). Используя интегралы энергии и момента количества движения, получим

$$\Delta V^2 = V_0^2 \left(3 - 2 \sqrt{p} - \frac{1 - e^2}{p} \right), \quad (5.2.1)$$

где

$$V_0 = V_{кр}(R_n + H_0) = V_I \sqrt{1 + \frac{H_0}{R_n}}. \quad (5.2.2)$$

В формулах (5.2.1), (5.2.2) R_n — радиус планеты, H_0 — высота заданной круговой орбиты, $V_I = \sqrt{\frac{\mu}{R_n}}$ — первая космическая скорость.

$V_0 = \sqrt{\mu/R_0}$ — скорость движения искусственного спутника по круговой орбите с радиусом $R_0 = R_n + H_0$, μ — гравитационная постоянная планеты. Здесь и далее все линейные размеры отнесены к R_0 .

Используя соотношения (1.3.27), (1.3.34), перепишем (5.2.1) в виде

$$\Delta V^2 = V_0^2 \left(3 - 2 \sqrt{r_\pi (1+e)} - \frac{1-e}{r_\pi} \right). \quad (5.2.3)$$

Поскольку $r_\pi \approx R_\pi$ и в процессе торможения изменяется слабо, в дальнейшем будем полагать $r_\pi = \text{const}$. Из (5.2.3) получим

$$\frac{\partial(\Delta V^2)}{\partial e} = V_0^2 \left(\frac{1}{r_\pi} - \sqrt{\frac{r_\pi}{1+e}} \right). \quad (5.2.4)$$

Из (5.2.4) видим, что минимум ΔV^2 достигается при максимально допустимом e . Замечая, что

$$r_\pi = a(1+e), \quad (5.2.5)$$

получаем, что $\min \Delta V^2$ достигается при минимально допустимом a .

Но указанному условию соответствует касание тормозного эллипса в апоцентре заданной орбиты ИС. Таким образом, для того чтобы дополнительный импульс, потребный для перехода с эллиптической тормозной орбиты на круговую, был минимален, переход должен осуществляться в момент касания тормозного эллипса в апоцентре заданной круговой орбиты (рис. 5.2.2), т. е. тормозной эллипс, с которого происходит сход на круговую орбиту, соответствует гомановскому перелету между круговыми орбитами с радиусами r_π и R_0 (см. раздел 5.1.1).

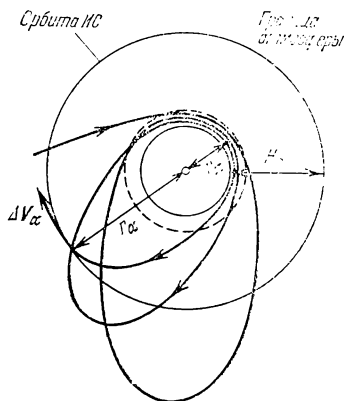


Рис. 5.2.2.

Учитывая, что при оптимальном переходе на орбиту расстояние до апоцентра $r_a = 1$, приведем выражение (5.2.3) для оптимального приращения скорости ΔV_a к виду, аналогичному выражению для гомановского импульса в апоцентре (см. (5.1.12)):

$$\Delta V_a = V_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2r_\pi}{1+r_\pi}} \right), \quad (5.2.6)$$

или

$$\Delta V_a = V_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1 + H_\pi/R_\pi}{1 + (H_0 + H_\pi)/2R_\pi}} \right), \quad (5.2.7)$$

где H_π — высоты перицентров тормозных эллипсов над поверхностью планеты.

Поскольку практически всегда

$$H_0/R_{\pi} \ll 1, \quad (5.2.8)$$

формулу (5.2.7) приближенно можно записать в виде

$$\Delta V_{\alpha} \approx V_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1 + H_0/2R_{\pi}}} \right). \quad (5.2.9)$$

Из (5.2.2) и (5.2.7) следует, что

$$\Delta V_{\alpha}(H_0 = 0) = \Delta V_{\alpha}(H_0 = \infty) = 0. \quad (5.2.10)$$

Более подробный анализ показывает, что кривая $\Delta V_{\alpha}(H_0)$, взятая в соответствии с уравнением (5.2.9), достигает максимума при значениях H_0 , определяемых из уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 12x - 10 = 0, \quad (5.2.11)$$

где

$$x = H_0/R_{\pi}. \quad (5.2.12)$$

Корень уравнения (5.2.11), соответствующий $\max \Delta V_{\alpha}$, равен $x = 4,879$. При этом

$$\max \Delta V_{\alpha} \approx 0,19V_I. \quad (5.2.13)$$

На рис. 5.2.3 приведены зависимости $\Delta V_{\alpha}(H_0)$, подсчитанные по формуле (5.2.9), для Земли, Марса и Венеры.

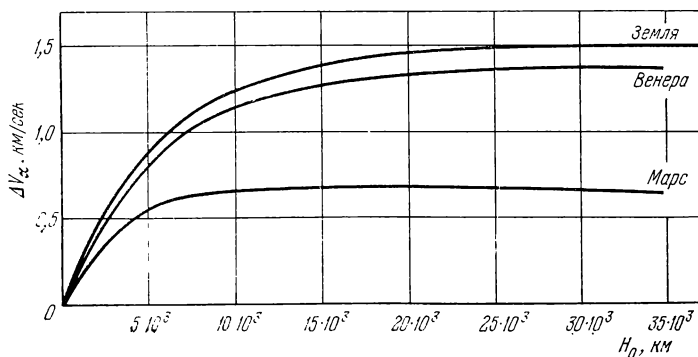


Рис. 5.2.3.

Значения $\max \Delta V_{\alpha}$, определенные по формуле (5.2.13), и соответствующие значения H_0 приведены в таблице 5.2.1.

Если $H_0/R_{\pi} \ll 1$, то из (5.2.2), (5.2.9) с точностью до членов порядка $(H_0/R_{\pi})^2$ получаем

$$\Delta V_{\alpha} \approx V_I \frac{H_0}{4R_{\pi}}. \quad (5.2.14)$$

Из приведенных данных следует, что практически для всех высот орбит ИС у указанных планет $\Delta V_a \leq 1,5$ км/сек, т. е. оказывается в несколько раз меньше величин характеристических скоростей, потребных для торможения КА при помощи двигательной установки (см. разделы 12.4.1, 12.4.2).

Таблица 5.2.1

	Земля	Марс	Венера
H_0 , км	$31,09 \cdot 10^3$	$16,12 \cdot 10^3$	$30,25 \cdot 10^3$
$\max \Delta V_a$, км/сек	1,503	0,685	1,374

Полученные оценки показывают, что использование торможения в атмосферах планет с последующим выходом КА на орбиту ИС планеты является эффективным средством уменьшения суммарной характеристической скорости перелета при перелетах между орбитами ИС планет (подробнее см. разделы 12.3.3, 12.4.3).

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ ПО ОРБИТАМ, БЛИЗКИМ К КРУГОВОЙ

§ 6.1. Вводные замечания. Основные соотношения для движения с конечной тягой

6.1.1. Основные соотношения. В настоящей и следующих главах основное внимание уделяется решению вариационных задач о перелетах в линеаризованной постановке, которая обеспечивает достаточную точность в случае движений в близкой окрестности круговой орбиты. При этом возможно получение наиболее полных решений задач об оптимальных перелетах в импульсной постановке, что дает основу для решения вариационных задач при наличии

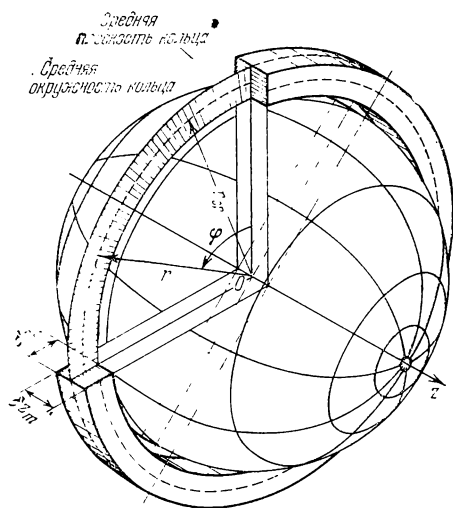


Рис. 6.1.1.

ограничений на величину тяговооруженности или тяги. Кроме того, в линеаризованной постановке, вследствие малости потребных характеристических скоростей, импульсные схемы оказываются пригодными для построения оптимальных перелетов с протяженными активными участками при значительно меньших значениях тяговооруженности, чем в случае перелетов между далекими орбитами. Интересной особенностью линеаризованных решений является то, что в ряде случаев при малых деформациях начальной и конечной орбит возможны радикальные изменения схемы перелета.

Итак, предположим, что все рассматриваемые траектории располагаются в малой окрестности некоторой базовой круговой орбиты радиуса $r = r_{\text{ср}}$ и движение по ним происходит со скоростями, близкими к ее круговой скорости. Схема расположения траекторий для рассматриваемого случая изображена на рис. 6.1.1. Поскольку рассматриваются движения в окрестности плоскости,

проходящей через базовую круговую орбиту, их удобно описывать в цилиндрической системе координат. Плоскость $O\varphi$ этой системы выберем совпадающей с плоскостью базовой круговой орбиты, ось Oz направим перпендикулярно к ней, а начало системы поместим в центре притяжения. Угол φ будем отсчитывать от некоторого фиксированного направления. При исследовании движения по околорытовым орбитам угол φ удобно выбрать в качестве независимой переменной. Уравнения движения материальной точки в цилиндрической системе координат, выписанные в § 1.3, после перехода к независимой переменной φ могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= V_r \frac{r}{V_\tau}, \\ \frac{dz}{d\varphi} &= V_z \frac{r}{V_\tau}, \\ \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{r}{V_\tau}, \\ \frac{d\dot{r}}{d\varphi} &= V_\tau + g(r_{cp}) \frac{dt}{d\varphi} \left[n_r - \left(\frac{r_{cp}}{\rho} \right)^2 \frac{r}{\rho} \right], \\ \frac{dV_\tau}{d\varphi} &= -V_r + g(r_{cp}) \frac{dt}{d\varphi} n_\tau, \\ \frac{dV_z}{d\varphi} &= g(r_{cp}) \frac{dt}{d\varphi} \left[n_z - \left(\frac{r_{cp}}{\rho} \right)^2 \frac{z}{\rho} \right], \\ \frac{dq}{d\varphi} &= g(r_{cp}) \frac{dt}{d\varphi} n. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.1)$$

Здесь V_r , V_τ , V_z — соответственно радиальная, трансверсальная и боковая компоненты скорости; $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$; $q = c \ln \frac{m_0}{m}$ — характеристическая скорость, где c — скорость истечения, m_0 и m — соответственно начальная и текущая массы; t — время; n_r , n_τ , n_z и $n = \sqrt{n_r^2 + n_\tau^2 + n_z^2}$ — компоненты реактивного ускорения и его модуль, отнесенные к ускорению силы тяжести $g(r)$ при $r = r_{cp}$. Все обозначения, которые используются в данной и в следующих главах, в ряде деталей отличаются от обозначений, введенных в гл. I, поэтому они будут поясняться в процессе изложения.

Все переменные системы (6.1.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} V_r &= V_{r0} + V_{кр} \Delta \bar{V}_r, \quad V_\tau = V_{\tau0} + V_{кр} \Delta \bar{V}_\tau, \\ V_z &= V_{z0} + V_{кр} \Delta \bar{V}_z, \quad r = r_0 + r_{cp} \Delta \bar{r}, \\ z &= z_0 + r_{cp} \Delta \bar{z}, \quad t = t_0 + \frac{r_{cp}}{V_{кр}} \Delta \bar{t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2)$$

Здесь $V_{кр} = \sqrt{\mu/r_{ср}}$ — круговая скорость для орбиты радиуса $r_{ср}$, μ — гравитационная постоянная притягивающего тела; индексом «0» обозначены параметры начальной орбиты. Обозначениями $\Delta \bar{V}_r$, $\Delta \bar{V}_\tau$, $\Delta \bar{V}_z$, $\Delta \bar{r}$, $\Delta \bar{z}$ и $\Delta \bar{t}$ представлены безразмерные приращения компонент скорости, координат и времени, которые в начальный момент перелета равны нулю. Величины V_{r0} , $V_{\tau0}$, V_{z0} , r_0 , z_0 и t_0 являются известными функциями от φ . Предполагается, что они удовлетворяют системе уравнений (6.1.1) при $n_r = n_\tau = n_z = 0$.

Величины $\Delta \bar{V}_r$, $\Delta \bar{V}_\tau$, а также V_{r0} , $r_0 - r_{ср}$, $\frac{dt_0}{d\varphi} - \frac{r_{ср}}{V_{кр}}$, $V_{\tau0} - V_{кр}$, V_{z0} и z_0 предполагаются малыми, и все исследование ведется с учетом только их первых степеней. Малыми величинами того же порядка предполагаются интегральные воздействия компонент тяговооруженности на параметры траектории, или, что то же самое, как малая величина рассматривается потребный для перелета расход характеристической скорости. Это предположение позволяет при линеаризации уравнений (6.1.1) рассматривать произведения указанных выше малых величин на n_r , n_τ и n_z как величины второго порядка малости (см. раздел 1.3.2).

С учетом сказанного система (6.1.1) после линеаризации переходит в систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta \bar{r}}{d\varphi} &= \Delta \bar{V}_r, \\ \frac{d\Delta \bar{z}}{d\varphi} &= \Delta \bar{V}_z, \\ \frac{d\Delta \bar{t}}{d\varphi} &= \Delta \bar{r} - \Delta \bar{V}_\tau, \\ \frac{d\Delta \bar{V}_r}{d\varphi} &= 2\Delta \bar{V}_\tau + \Delta \bar{r} + n_r, \\ \frac{d\Delta \bar{V}_\tau}{d\varphi} &= -\Delta \bar{V}_r + n_\tau, \\ \frac{d\Delta \bar{V}_z}{d\varphi} &= -\Delta \bar{z} + n_z, \\ \frac{d\bar{q}}{d\varphi} &= n. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.3)$$

Здесь $\bar{q} = q/V_{кр}$. Эти уравнения несколько отличаются от линеаризованных уравнений, приведенных в разделе 1.3.2, из-за другого выбора независимой переменной. Всюду далее черточки, обозначающие безразмерные величины, будем опускать.

Входящие в (6.1.3) компоненты тяговооруженности связаны с компонентами реактивной тяги $\mathbf{T} = (T_r, T_\tau, T_z)$ формулами

(см. (1.3.49))

$$n_i = \frac{T_i}{m_0 g(r_{cp})} e^{q/c} \quad (i = r, \tau, z), \quad (6.1.4)$$

$$n = \frac{T}{m_0 g(r_{cp})} e^{q/c}. \quad (6.1.5)$$

Далее будут параллельно рассматриваться случаи, когда либо ограничивается модуль тяговооруженности, $n \leq n_{\max}$, либо ограничивается модуль тяги, $T \leq T_{\max}$. В первом из них в (6.1.3) управляющими функциями являются n_r , n_τ и n_z , а во втором — компоненты тяги T_r , T_τ и T_z , которые надо ввести в (6.1.3) при помощи формул (6.1.4).

Ставится задача о таком выборе управляющих функций, когда переход КА с начальной орбиты в некоторое конечное состояние осуществляется с минимальными затратами характеристической скорости q . Эта задача решается при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. § 1.2).

Получим сначала условия оптимальности управления, когда ограничивается тяговооруженность. Для уравнений (6.1.3) функция H может быть записана в виде

$$H = [(s, n) + p_q n] + s_r(2\Delta V_r + \Delta r) + s_\tau(-\Delta V_r) + s_z(-\Delta z) + p_r \Delta V_r + p_z \Delta V_z + p_t(\Delta r - \Delta V_\tau), \quad (6.1.6)$$

где $n = (n_r, n_\tau, n_z)$ — вектор тяговооруженности; $s = (s_r, s_\tau, s_z)$ — вектор, сопряженный вектору скорости $V = (V_r, V_\tau, V_z)$; p_r , p_z и p_t — переменные, сопряженные Δr , Δz и Δt . В соответствии с изложенным в §§ 1.2 и 1.3 условия максимума H , обеспечивающие минимум функционалу $G = q(\varphi_N)$, где φ_N — конечное значение переменной φ , имеют вид

$$n_i = n \frac{s_i}{s}; \quad n = \begin{cases} n_{\max} & \text{при } \vartheta > 0, \\ 0 & \text{при } \vartheta < 0; \end{cases} \quad p_q(\varphi_N) = -1, \quad (6.1.7)$$

где $s = \sqrt{s_r^2 + s_\tau^2 + s_z^2}$, $\vartheta = s + p_q$ — функция переключения, а сопряженные переменные определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_r}{d\varphi} &= -s_r - p_t, & \frac{ds_r}{d\varphi} &= s_\tau - p_r, \\ \frac{dp_z}{d\varphi} &= s_z, & \frac{ds_\tau}{d\varphi} &= -2s_r - p_t, \\ \frac{dp_q}{d\varphi} &= \frac{dp_t}{d\varphi} = 0, & \frac{ds_z}{d\varphi} &= -p_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.8)$$

Общее решение этой системы уравнений записывается так:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= -A \sin \varphi + B \cos \varphi - 3p_t \varphi + C, \\ p_z &= D \sin \varphi - E \cos \varphi, \\ p_q &= -1, \\ p_t &= \text{const}, \\ s_r &= A \cos \varphi + B \sin \varphi + 2p_t, \\ s_\tau &= -2A \sin \varphi + 2B \cos \varphi - 3p_t \varphi + C, \\ s_z &= D \cos \varphi + E \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.9)$$

Здесь A, B, C, D, E и p_t — произвольные постоянные.

В случае задачи с ограниченной тягой все условия оптимальности получаются из выражений (6.1.6) — (6.1.9) простой заменой компонент тяговооруженности компонентами тяги с помощью равенств (6.1.4), кроме уравнения для p_q . Оно может быть записано в виде

$$\frac{dp_q}{d\varphi} = \frac{-e^{q/c} \vartheta}{c} n_{\max, 0} \frac{T}{T_{\max}}, \quad (6.1.10)$$

где

$$T = \begin{cases} T_{\max} & \text{при } \vartheta > 0, \\ 0 & \text{при } \vartheta < 0; \end{cases} \quad p_q(\varphi_N) = -1.$$

Здесь

$$n_{\max, 0} = T_{\max}/m_0 g(r_{cp})$$

— величина максимальной тяговооруженности в начальный момент.

С учетом равенств (6.1.7) выражение для H может быть записано так:

$$\begin{aligned} H = \vartheta n + s_r(2\Delta V_r + \Delta r) + s_\tau(-\Delta V_\tau) + s_z(-\Delta z) + \\ + p_r \Delta V_r + p_z \Delta V_z + p_t(\Delta r - \Delta V_\tau). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

В начальный момент, когда $\varphi = \varphi_0$, все приращения $\Delta V_r, \Delta V_\tau, \dots$ равняются нулю и

$$H(\varphi_0) = \vartheta(\varphi_0)n. \quad (6.1.12)$$

Если момент φ_0 выбирается оптимально и $H(\varphi) = 0$ (см. раздел 1.2.2), то из (6.1.12) и (6.1.7) следует, что $\vartheta(\varphi_0) \leq 0$. Это значит, что при оптимальном выборе момента старта и $H(\varphi) = 0$ движение начинается с пассивного участка либо оптимальное зна-

чение φ_0 является нулем функции переключения. Этот результат находится в согласии с «принципом окаймления», изложенным в разделе 2.2.3.

Рассмотрим далее вопрос об оптимальном определении конца перелета $\varphi = \varphi_N$. Так как при изменении φ_N конечные условия также изменяются, то условие трансверсальности должно быть написано с учетом подвижности конечного многообразия. Ограничиваясь случаями, когда в конце траектории задаются значения некоторых из координат, такое условие на основании условий трансверсальности, приведенных в разделе 1.2.2, можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_r(\varphi_N) \frac{d\Delta V_r(\varphi_N)}{d\varphi_N} + s_\tau(\varphi_N) \frac{d\Delta V_\tau(\varphi_N)}{d\varphi_N} + s_z(\varphi_N) \frac{d\Delta V_z(\varphi_N)}{d\varphi_N} + \\ + p_r(\varphi_N) \frac{d\Delta r(\varphi_N)}{d\varphi_N} + p_z(\varphi_N) \frac{d\Delta z(\varphi_N)}{d\varphi_N} + p_t(\varphi_N) \frac{d\Delta t(\varphi_N)}{d\varphi_N} - H(\varphi_N) = 0. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

В силу автономности системы уравнений (6.1.3) $H(\varphi_N) = H(\varphi_0)$, и в случаях, когда $H(\varphi) = 0$, последний член в этом равенстве отсутствует. Если вспомнить определение функции H , то условие (6.1.13) может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} s_r(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta V_r(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \left(\frac{d\Delta V_r}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] + \\ + s_\tau(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta V_\tau(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \left(\frac{d\Delta V_\tau}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] + \\ + s_z(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta V_z(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \left(\frac{d\Delta V_z}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] + p_r(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta r(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \right. \\ \left. - \left(\frac{d\Delta r}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] + p_z(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta z(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \left(\frac{d\Delta z}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] + \\ + p_t(\varphi_N) \left[\frac{d\Delta t(\varphi_N)}{d\varphi_N} - \left(\frac{d\Delta t}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} \right] - p_q(\varphi_N) \left(\frac{dq}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Входящие в эти равенства функции $\Delta V_r(\varphi_N)$, $\Delta V_\tau(\varphi_N)$, ... определяются условиями, данными в конце перелета. Что же касается производных $\left(\frac{d\Delta V_r}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N}$, $\left(\frac{d\Delta V_\tau}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N}$, ..., то они определяются из уравнений (6.1.3).

Заменим далее уравнения движения (6.1.3) интегральными соотношениями, которые более удобны для записи граничных условий и перехода к уравнениям, определяющим оптимальный перелет при решении задачи в импульсной постановке. Приведем

вывод таких соотношений для группы уравнений системы (6.1.3), которые описывают изменение Δz и ΔV_z . Эти уравнения вместе с соответствующими уравнениями для сопряженных переменных могут рассматриваться независимо от остальных уравнений систем (6.1.3) и (6.1.8). Основываясь на формуле Блисса (см. Приложение, формулу (П. 22)) и учитывая, что при $\varphi = \varphi_0$ $\Delta V_z = \Delta z = 0$, нетрудно с помощью (6.1.3) и (6.1.8) доказать тождество

$$s_z(\varphi) \Delta V_z(\varphi) + p_z(\varphi) \Delta z(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} s_z(\xi) n_z(\xi) d\xi. \quad (6.1.15)$$

Чтобы из этой формулы получить выражения для $\Delta V_z(\varphi)$ и $\Delta z(\varphi)$, необходимо определить сопряженные переменные так, чтобы, соответственно, $s_z(\varphi) = 1$, $p_z(\varphi) = 0$, а затем так, чтобы $s_z(\varphi) = 0$, $p_z(\varphi) = 1$. Определяя отсюда произвольные постоянные в равенствах (6.1.9) для p_z и s_z , получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_z(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} n_z(\xi) \cos(\varphi - \xi) d\xi, \\ \Delta z(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} n_z(\xi) \sin(\varphi - \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.16)$$

Аналогичным способом находим выражения для остальных неизвестных системы (6.1.3):

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_r(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} [n_r(\xi) \cos(\varphi - \xi) + n_\tau(\xi) 2 \sin(\varphi - \xi)] d\xi, \\ \Delta V_\tau(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \{-n_r(\xi) \sin(\varphi - \xi) + n_\tau(\xi) [2 \cos(\varphi - \xi) - 1]\} d\xi, \\ \Delta r(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \{n_r(\xi) \sin(\varphi - \xi) + 2n_\tau(\xi) [1 - \cos(\varphi - \xi)]\} d\xi, \\ \Delta t(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \{n_r(\xi) \cdot 2 [1 - \cos(\varphi - \xi)] + n_\tau(\xi) [3(\varphi - \xi) - \\ &\quad - 4 \sin(\varphi - \xi)]\} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.17)$$

При $\varphi = \varphi_N$ эти соотношения дают значения параметров траектории в конце перелета; при $\varphi > \varphi_N$ они описывают траекторию, которая получается после перелета. Равенства (6.1.16) и (6.1.17) позволяют в простой и удобной для дальнейшего исследования форме задавать произвольные граничные условия.

6.1.2. Граничные условия для ряда конкретных типов перелетов. Конкретизируем приведенные соотношения для ряда типичных задач о перелетах.

1. Перелет в точку. Рассмотрим задачу о перелете с исходной орбиты в момент, соответствующий $\varphi = \varphi_0$, в некоторую точку с координатами φ_N , $\Delta r(\varphi_N)$ и $\Delta z(\varphi_N)$. На время перелета и скорость в конце перелета ограничения не накладываются. Начальное угловое положение $\varphi = \varphi_0$ и конечное $\varphi = \varphi_N$ могут быть либо заданы, либо выбираться оптимально. Условия в конце перелета для сопряженных переменных и координат записываются в виде

$$s_r(\varphi_N) = s_\tau(\varphi_N) = s_z(\varphi_N) = p_t = 0, \quad (6.1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \{s_r(\xi) \sin(\varphi_N - \xi) + 2s_\tau(\xi) [1 - \cos(\varphi_N - \xi)]\} \times \\ \times \frac{n(\xi)}{s(\xi)} d\xi = \Delta r(\varphi_N), \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} s_z(\xi) \sin(\varphi_N - \xi) \frac{n(\xi)}{s(\xi)} d\xi = \Delta z(\varphi_N), \end{aligned} \right\} \quad (6.1.19)$$

где

$$s_r(\xi) = -B \sin(\varphi_N - \xi), \quad s_\tau(\xi) = -2B [1 - \cos(\varphi_N - \xi)],$$

$$s_z(\xi) = -E \sin(\varphi_N - \xi), \quad s(\xi) = \sqrt{s_r^2 + s_\tau^2 + s_z^2},$$

$$n(\xi) = \begin{cases} n_{\max} & \text{при } s(\xi) > 1, \\ 0 & \text{при } s(\xi) < 1. \end{cases}$$

При фиксированных φ_0 и φ_N уравнения (6.1.19) представляют собой уравнения для определения констант B и E . Если φ_0 определяется оптимально, то решение данной задачи становится не зависящим от φ_0 . Для определения оптимального значения φ_N следует обратиться к условию (6.1.13). С учетом равенств (6.1.18) оно записывается так:

$$p_r(\varphi_N) \frac{d\Delta z(\varphi_N)}{d\varphi_N} + p_z(\varphi_N) \frac{d\Delta r(\varphi_N)}{d\varphi_N} = H(\varphi_0), \quad (6.1.20)$$

где в силу (6.1.9) и (6.1.18) $p_r(\varphi_N) = -B$, $p_z(\varphi_N) = -E$. Из (6.1.18) и (6.1.7) для $\vartheta(\varphi)$ следует $\vartheta(\varphi_N) = -1$. Это значит, что в данной задаче оптимальная траектория оканчивается пассивным участком.

2. Жесткая встреча. Рассмотрим задачу о встрече двух спутников. В момент, соответствующий $\varphi = \varphi_0$, один из спутников начинает маневрировать с тем, чтобы в момент $\varphi = \varphi_N$ встретиться со вторым спутником без уравнивания скорости в момент

встречи. Эта задача отличается от предыдущей тем, что помимо координат $\Delta r(\varphi_N)$ и $\Delta z(\varphi_N)$ еще задается $\Delta t(\varphi_N)$ — разность времен прохождения спутников через угловые положения φ_0 и φ_N при полете по исходным орбитам.

Угловые положения φ_0 и φ_N могут быть либо заданы, либо выбираться оптимально. Граничные условия для сопряженных переменных отличаются от (6.1.18) тем, что $p_t \neq 0$, а для координат — от условий (6.1.19) дополнительным уравнением, выражающим то, что к моменту встречи приращение времени в процессе маневра равняется $\Delta t(\varphi_N)$. Условие для выбора оптимального значения φ_N отличается от (6.1.20) дополнительным слагаемым

$p_t \frac{d\Delta t(\varphi_N)}{d\varphi_N}$, стоящим в левой части. Точно так же, как и в предыдущей задаче, при жесткой встрече оптимальная траектория оканчивается пассивным участком.

3. Перелет между орбитами. Рассмотрим далее задачу о перелете между близкими околокруговыми фиксированными орбитами. В следующей главе будет показано, что взаимное расположение орбит определяется функциями

$$\left. \begin{aligned} \Delta r(\varphi) &= \Delta_0 + \Delta_c \cos \varphi + \Delta_s \sin \varphi, \\ \Delta z(\varphi) &= \Delta_z \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.21)$$

Здесь $\Delta r(\varphi)$ и $\Delta z(\varphi)$ — соответственно разности между координатами r и z на конечной и начальной орбитах, где угол φ отсчитывается от линии узлов. Угловые положения начала и конца перелета φ_0 и φ_N либо заданы, либо выбираются оптимально. На время перелета никаких ограничений не накладывается, и, следовательно, $p_t = 0$. В данной задаче для получения граничных условий необходимо потребовать, чтобы при $\varphi \geq \varphi_N$ функции $\Delta r(\varphi)$ и $\Delta z(\varphi)$, определенные согласно (6.1.16), (6.1.17) и (6.1.21), совпадали между собой. В соответствии с этим при $\varphi \geq \varphi_N$ должны тождественно выполняться равенства

$$\left. \begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \{s_r(\xi) \sin(\varphi - \xi) + 2s_r(\xi) [1 - \cos(\varphi - \xi)]\} \frac{n(\xi)}{s(\xi)} d\xi &\equiv \\ &\equiv \Delta_0 + \Delta_c \cos \varphi + \Delta_s \sin \varphi, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} s_z(\xi) \sin(\varphi - \xi) \frac{n(\xi)}{s(\xi)} d\xi &\equiv \Delta_z \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.22)$$

Верхний предел в интегралах равен φ_N , так как при $\varphi > \varphi_N$ тяга выключается. Слева и справа в этих равенствах стоят линейные функции от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Для того чтобы эти равенства выполнялись тождественно, должны равняться между собой коэффициенты этих функций, что дает следующую систему равенств,

эквивалентных тождествам (6.1.22):

$$\left. \begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} (s_r \sin \xi + 2s_\tau \cos \xi) \frac{n}{s} d\xi &= -\Delta_c, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} (s_r \cos \xi - 2s_\tau \sin \xi) \frac{n}{s} d\xi &= \Delta_s, \\ 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \frac{s_\tau n}{s} d\xi &= \Delta_0, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \frac{s_z n}{s} \sin \xi d\xi &= 0, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \frac{s_z n}{s} \cos \xi d\xi &= \Delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.23)$$

Наличие этих пяти граничных условий эквивалентно заданию при $\varphi = \varphi_N$ величин $\Delta r(\varphi_N)$, $\Delta z(\varphi_N)$, $\Delta V_r(\varphi_N)$, $\Delta V_\tau(\varphi_N)$ и $\Delta V_z(\varphi_N)$. В соответствии с этим значения всех сопряженных переменных при $\varphi = \varphi_N$, кроме $p_i = 0$, остаются неопределенными, выражения для них даются равенствами (6.1.9) при $p_i = 0$, где константы A, B, C, D и E подлежат определению. Полученные пять условий (6.1.23) как раз и представляют собой уравнения для определения этих пяти констант. Если момент φ_0 определяется оптимально, то из (6.1.12) и (6.1.23) следует, что его можно считать совпадающим с нулем функции переключения. Для того чтобы получить условие определения оптимального значения φ_N , обратимся к равенству (6.1.14). Так как при $\varphi = \varphi_N$ координаты и скорости для конца оптимальной траектории должны совпадать с граничными условиями, то из уравнений (6.1.3) следует:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Delta V_r}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} &= \frac{d\Delta V_r(\varphi_N)}{d\varphi_N} + n_r(\varphi_N), \\ \left(\frac{d\Delta V_\tau}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} &= \frac{d\Delta V_\tau(\varphi_N)}{d\varphi_N} + n_\tau(\varphi_N), \\ \left(\frac{d\Delta V_z}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} &= \frac{d\Delta V_z(\varphi_N)}{d\varphi_N} + n_z(\varphi_N), \\ \left(\frac{d\Delta r}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} &= \frac{d\Delta r(\varphi_N)}{d\varphi_N}, \\ \left(\frac{d\Delta z}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_N} &= \frac{d\Delta z(\varphi_N)}{d\varphi_N}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.24)$$

Равенства (6.1.24) и (6.1.7) с учетом $p_i = 0$ позволяют записать (6.1.14) в виде

$$\vartheta(\varphi_N)n = 0. \quad (6.1.25)$$

Из этого равенства следует, что $\vartheta(\varphi_N) \leq 0$, т. е. момент φ_N , так же как φ_0 , можно считать совпадающим с нулем функции переключения.

4. Мягкая встреча. Рассмотрим задачу о встрече двух спутников, когда в момент встречи, помимо координат и времени, должны также совпадать V_r , V_τ , V_z — компоненты скорости. От предыдущей эта задача отличается тем, что при всех $\varphi \geq \varphi_N$ аппараты должны двигаться совместно. Вследствие того, что время в этой задаче задается, сопряженную переменную p_t нельзя заранее считать равной нулю. Для определения шести констант A , B , C , D , E и p_i имеется пять уравнений (6.1.23) и дополнительное равенство, следующее из условия совпадения времен. Получим его.

Обозначим через $\Delta t(\varphi)$ разность между временами прохождения спутника, движущегося по конечной орбите, и спутника, движущегося по начальной орбите, через фиксированное угловое положение φ_0 . В силу равенств (6.1.17) и (6.1.7) при $\varphi \geq \varphi_N$ должно выполняться тождество

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \{2s_r(\xi) [1 - \cos(\varphi - \xi)] + s_\tau(\xi) [3(\varphi - \xi) - 4 \sin(\varphi - \xi)]\} \frac{n(\xi)}{s(\xi)} d\xi = \Delta t(\varphi). \quad (6.1.26)$$

Если в левой части этого равенства выделить свободный член, член, пропорциональный φ , а также собрать вместе члены, содержащие $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, то с учетом равенств (6.1.23) его можно переписать в виде

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_N} (2s_r - 3\xi s_\tau) \frac{n}{s} d\xi = \Delta_t. \quad (6.1.27)$$

Здесь Δ_t — константа, которая входит в выражение для $\Delta t(\varphi)$:

$$\Delta t(\varphi) = \Delta_t + 2 \left(\frac{3}{4} \Delta_0 \varphi + \Delta_c \sin \varphi - \Delta_s \cos \varphi \right). \quad (6.1.28)$$

Эта формула получается путем линеаризации выражений для $t(\varphi)$ при движении по конечной и начальной орбитам (см. § 7.3). Константу Δ_t можно определить, если известно $\Delta_t(\varphi)$ при каком-либо одном значении φ . Заметим, что это значение φ может быть расположено как внутри, так и вне интервала (φ_0, φ_N) . Равенство (6.1.27) и уравнения (6.1.23) представляют собой систему из ше-

сти уравнений для шести произвольных постоянных, входящих в выражения для сопряженных переменных (6.1.9). Легко проверить, что в данной задаче оптимальные значения φ_0 и φ_N , так же как и в предыдущей, должны являться нулями функции переключения.

§ 6.2. Исследование режимов управления с регулируемой тягой

Рассмотрим режимы, при которых величина тяги может регулироваться (режимы особого управления). Такие режимы возможны при условии $\dot{\vartheta} \equiv 0$. В линеаризованной теории это исследование может быть проведено достаточно полно. Из (6.1.10) и (6.1.7) следует, что как для случая ограничения по перегрузке, так и для случая ограничения по тяге $p_q = -1$ и условие $\dot{\vartheta} \equiv 0$ эквивалентно равенству

$$s^2 = s_r^2 + s_t^2 + s_z^2 \equiv 1. \quad (6.2.1)$$

Из выражений (6.1.9) видно, что это равенство может быть выполнено только при $p_t = 0$, т. е. в тех случаях, когда не задается время перелета. Этот результат очевиден для перелетов с достаточно большими значениями φ , так как при $p_t \neq 0$ выражение для s путем выбора φ всегда может быть сделано больше единицы. Для случая же перелетов с малым, но конечным изменением φ , из выполнения тождества (6.2.1) для этого интервала, в силу аналитичности функций (6.1.9), следует, что оно должно выполняться и для больших значений φ . Последнее же, как об этом сказано выше, возможно только при $p_t = 0$. В соответствии с этим результатом в задачах встречи, когда время перелета задано, особые управления возможны только в таких частных ситуациях, когда в результате определения произвольных постоянных из граничных условий оказывается $p_t = 0$.

Дифференцируя (6.2.1) по φ и используя выражения для производных из уравнений (6.1.8) при $p_t = 0$, получим

$$s_r(s_t + p_r) + s_z p_z \equiv 0. \quad (6.2.2)$$

Дифференцируя это равенство и пользуясь уравнениями (6.1.8) и (6.2.1), будем иметь

$$4s_r^2 + p_r^2 + p_z^2 \equiv 1. \quad (6.2.3)$$

Результат дифференцирования равенства (6.2.3) запишем в следующем виде:

$$s_r(4s_t - 5p_r) + p_z s_z \equiv 0. \quad (6.2.4)$$

Вычтем далее (6.2.2) из последнего равенства. В результате получим

$$s_r(s_\tau - 2p_r) \equiv 0. \quad (6.2.5)$$

Отсюда видно, что особые управления возможны либо при $s_r = 0$, либо при $s_\tau = 2p_r$.

Рассмотрим сначала первый случай. При $s_r = 0$ и $p_t = 0$ из (6.1.9) следует: $A = B = 0$ и $s_\tau = C$. Равенство (6.2.1) для этого случая принимает вид

$$C^2 + s_z^2 = 1. \quad (6.2.6)$$

Отсюда и из (6.1.9) следует, что $D = E = 0$ и $C = \pm 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$s_r \equiv s_z \equiv 0, \quad s_\tau = \pm 1. \quad (6.2.7)$$

Из (6.2.7) видно, что при таких условиях осуществляются плоские перелеты с трансверсальной тягой. Так как в рассматриваемом случае $s_\tau(\varphi_N) = \pm 1$, то данный тип перелетов, в соответствии с равенством (6.1.18), невозможен для задач 1 и 2 и, наоборот, возможен для задач 3 и 4.

Рассмотрим далее случай, когда $s_r \neq 0$ и в силу (6.2.5) выполняется условие

$$s_\tau = 2p_r. \quad (6.2.8)$$

Исключая p_r из (6.2.2) и (6.2.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{9}{4} s_r^2 s_\tau^2 &\equiv s_z^2 p_z^2, \\ 4s_r^2 + \frac{s_\tau^2}{4} + p_z^2 &\equiv 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.9)$$

Если p_z^2 найти по второму из этих уравнений и подставить в первое, а затем исключить s_τ^2 с помощью (6.2.1), то

$$9s_r^2(1 - s_r^2 - s_z^2) = s_z^2(3 - 15s_r^2 + s_z^2).$$

Это же равенство может быть преобразовано к форме

$$(s_z - \sqrt{3}s_r)(s_z + \sqrt{3}s_r)[s_z^2 + 3(1 - s_r^2)] = 0. \quad (6.2.10)$$

Квадратная скобка в этом равенстве обращается в нуль при $s_z = 0$ и $s_r^2 = 1$. В соответствии с (6.2.1) отсюда следует, что $s_\tau = 0$. Последнее же из равенств (6.2.9) в этом случае дает $p_z^2 = -3$, чего, очевидно, быть не может. Таким образом, квадратная скобка в равенстве (6.2.10) всегда положительна. Поэтому в рассматриваемом случае особые управления могут быть только при

$$s_z = \pm \sqrt{3}s_r. \quad (6.2.11)$$

Из этого условия и (6.1.7) следует, что в рассматриваемом типе особых управлений вектор тяги располагается в плоскостях, проходящих через трансверсаль и составляющих угол $\pm 30^\circ$ с горизонтальной плоскостью (рис. 6.2.1).

Определим далее произвольные постоянные в равенствах (6.1.9) для этого типа перелетов. Из (6.2.8) следует, что $C = 0$. Из равенств (6.2.9) с учетом (6.2.11) вытекает тождество

$$4s_r^2 + s_\tau^2 = 1. \quad (6.2.12)$$

Подставляя выражения (6.1.9) для s_r , s_τ и s_z при $p_i = C = 0$ в (6.2.11) и (6.2.12), получим

$$\left. \begin{aligned} D = \pm \sqrt{3}A, E = \pm \sqrt{3}B, \\ A^2 + B^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.13)$$

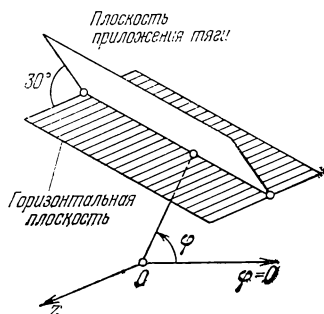


Рис. 6.2.1.

Из изложенного следует, что в рассматриваемом случае только одну из констант A , B , D и E можно считать произвольной. Для того чтобы записать выражения (6.1.9) в симметричной форме, введем новую произвольную постоянную δ с помощью равенств

$$A = -\frac{1}{2} \cos \delta, \quad B = -\frac{1}{2} \sin \delta. \quad (6.2.14)$$

С использованием этой постоянной и (6.1.9) при $p_i = C = 0$ выражения для s_r , s_τ и s_z могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} s_r &= -\frac{1}{2} \cos(\varphi - \delta), \\ s_\tau &= \sin(\varphi - \delta), \\ s_z &= \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.15)$$

Поскольку s_r , s_τ и s_z ни при каком значении φ не могут одновременно обратиться в нуль, то данный тип особого управления, так же как и предыдущий, не может иметь места для задач 1 и 2, наоборот, возможен для задач 3 и 4.

Заметим, что для задачи 4 особые управления возможны только в тех случаях, когда всем равенствам (6.1.23) и (6.1.27) удастся удовлетворить при $p_i = 0$. Так как при особом управлении $\vartheta \equiv 0$, то из изложенного в разделе 6.1.2 следует, что любые значения φ_0 и φ_N , при которых удастся удовлетворить граничным условиям, являются оптимальными значениями для этих величин.

Выведем далее, какие ограничения налагают граничные условия на возможные законы регулирования тяги. Рассмотрим сначала случай особого управления с помощью трансверсальной тяги, для которого сопряженные переменные определяются формулами (6.2.7). С учетом (6.2.7) равенства (6.1.23), обеспечивающие выполнение перелета между орбитами, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n(\xi) \cos \xi d\xi &= -\frac{\Delta_c}{2}, \\ \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n(\xi) \sin \xi d\xi &= -\frac{\Delta_s}{2}, \\ \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n(\xi) d\xi &= \frac{\Delta_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.16)$$

Ограничимся далее рассмотрением случая, когда $\Delta_0 > 0$. Из последнего уравнения этой системы следует, что при таком условии перед интегралами следует взять знак плюс. Если в качестве переменной интегрирования взять q , то в силу $\frac{dq}{d\xi} = n(\xi)$ эти урав-

нения записываются в форме, допускающей простую геометрическую интерпретацию:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{q(\varphi_N)} \cos \xi(q) dq &= -\frac{\Delta_c}{2}, \\ \int_0^{q(\varphi_N)} \sin \xi(q) dq &= -\frac{\Delta_s}{2}, \\ q(\varphi_N) &= \frac{\Delta_0}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.17)$$

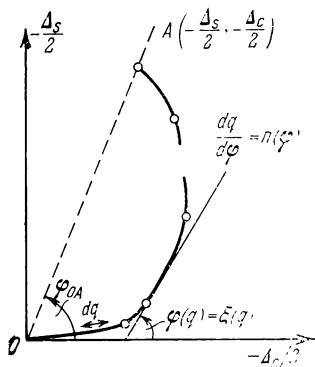


Рис. 6.2.2.

Проведем на плоскости $-\Delta_c/2, -\Delta_s/2$ (рис. 6.2.2) кривую, длина дуги которой от начала координат до некоторой точки на ней равняется q , а угол между касательной и осью абсцисс равен $\xi(q) = \varphi(q)$. Функция $\xi(q)$ должна быть монотонно возрастающей от $\varphi_0 = \xi(0)$ до $\varphi_N = \xi[q(\varphi_N)]$ и кусочно-непрерывной. В точках разрыва этой функции рассматриваемая кривая имеет угловые точки. Из (6.2.17) следует, что полная длина этой кривой должна быть равна $\Delta_0/2$, а проекции ее на ось абсцисс и ось ординат соответственно равны $-\Delta_c/2$ и $-\Delta_s/2$. Угловые точки кривой соответствуют пассивным участкам: в них угловая даль-

ность φ получает конечное приращение без увеличения характеристической скорости q . Участки кривой между угловыми точками являются активными. Кривизна этих участков ограничивается снизу: при ограниченной тяговооруженности должно быть $\frac{d\varphi}{dq} \geq \frac{1}{n_{\max}}$, а при ограниченной тяге, в силу (6.1.4),

$$\frac{d\varphi}{dq} \geq \frac{1}{n_{\max,0}} e^{-q/c},$$

где $n_{\max,0} = \frac{T_{\max}}{m_0 g(r_{\text{ср}})}$ — максимальная тяговооруженность в начальный момент. Указанную кривую можно построить в случаях, когда длина хорды OA (рис. 6.2.2), соединяющей ее начало и конец, не менее $\frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}$. Так как при этом необходимо $\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2} \leq \Delta_0$, то рассматриваемый тип перелетов, в силу (6.1.21), возможен только для непересекающихся орбит. Длина хорды OA при заданной длине кривой будет наибольшей в тех случаях, когда у кривой нет угловых точек, что соответствует отсутствию пассивных участков, а кривизна наименьшая, что достигается при максимально возможных значениях тяги. Условие существования перелетов рассматриваемого типа может быть записано в виде

$$\int_0^{\Delta_0/2} \cos[\varphi_{OA} - \varphi(q)] dq \geq \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}. \quad (6.2.18)$$

Через φ_{OA} здесь обозначен угол наклона хорды OA к оси абсцисс. В соответствии со сказанным выше на границе области существования перелетов этого типа тяга в течение всего перелета включена и имеет максимально возможное значение. Для случая, когда ограничивается тяговооруженность, рассматриваемая кривая представляет собой дугу окружности. Основываясь на этом, условие (6.2.18) можно записать в более простой форме:

$$\Delta_0 \sin\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right) / \frac{\varphi_N - \varphi_0}{2} \geq \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}, \quad (6.2.19)$$

где $\varphi_N - \varphi_0 = \Delta_0/2n_{\max}$.

Из этой формулы видно, что при уменьшении $n_{\max}$ область существования перелетов рассматриваемого типа сужается. Если условие (6.2.18) или (6.2.19) выполняется с запасом, то появляется произвол в построении указанной кривой и можно попытаться удовлетворить равенству (6.1.27), при котором осуществляется перелет между орбитами с заданным временем. В рассматриваемом

случае равенство (6.1.27) может быть записано так:

$$\int_0^{q(\varphi_N)} \xi(q) dq = -\frac{\Delta_t}{3}.$$

Заметим, что для всех возможных зависимостей $\xi(q)$, удовлетворяющих указанным условиям, характеристическая скорость перелета неизменна и равняется $\Delta_0/2$.

Рассмотрим второй класс особых управлений, для которого сопряженные переменные определяются равенствами (6.2.15). С учетом этих равенств граничные условия (6.1.23) для задачи о перелетах между орбитами могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n \sin(\xi - \delta) \cos \xi d\xi &= -\frac{\Delta_c}{2}, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n \sin(\xi - \delta) \sin \xi d\xi &= -\frac{\Delta_s}{2} \pm \frac{\Delta_z}{2\sqrt{3}}, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n \sin(\xi - \delta) d\xi &= \frac{\Delta_0}{2}, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n \cos(\xi - \delta) \sin \xi d\xi &= 0, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n \cos(\xi - \delta) \cos \xi d\xi &= \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.20)$$

Из этих равенств следуют формулы

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n d\xi &= \frac{\Delta_c}{2}, \\ \cos \delta \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n d\xi &= -\left(\frac{\Delta_s}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_z\right), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.21)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} q(\varphi_N) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} n d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + (\Delta_s \pm \sqrt{3} \Delta_z)^2}, \\ \sin \delta &= \frac{\Delta_c}{2q(\varphi_N)}, \\ \cos \delta &= \frac{-(\Delta_s \pm \sqrt{3} \Delta_z)}{2q(\varphi_N)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.22)$$

Таким образом, в этом случае, так же как и в предыдущем, величина характеристической скорости одна и та же для достаточно широкого класса перелетов. При известных $q(\varphi_N)$ и δ среди равенств (6.2.20) остается только три независимых. Эти равенства могут быть преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{q(\varphi_N)} \cos 2\eta(q) dq &= \alpha, \\ \int_0^{q(\varphi_N)} \sin 2\eta(q) dq &= \beta, \\ \int_0^{q(\varphi_N)} \sin \eta(q) dq &= h, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.23)$$

где

$$\eta(q) = \xi(q) - \delta, \quad \alpha = \mp \frac{4\Delta_z \cos \delta}{\sqrt{3}} - q(\varphi_N),$$

$$\beta = \pm \frac{4\Delta_z \cos \delta}{\sqrt{3}}, \quad h = \frac{\Delta_0}{2}.$$

В этих равенствах произвольной функцией, подлежащей определению, является $\eta(q)$, связанная с тяговооруженностью равенством $\frac{d\eta}{dq} = \frac{1}{n}$. Помимо условий (6.2.23), функция $\eta(q)$ должна удовлетворять неравенствам: при ограничении по тяговооруженности должно быть $\frac{d\eta}{dq} \geq \frac{1}{n_{\max}}$, а при ограничении по тяге $\frac{d\eta}{dq} \geq \frac{1}{n_{\max,0}} e^{-q/c}$. Функция $\eta(q)$, удовлетворяющая всем этим условиям, существует в некоторой замкнутой области пространства параметров α, β, h и $n_{\max}$ (или $n_{\max,0}$). Можно доказать, что на границе области существования перелетов этого типа располагаются перелеты с не более чем двумя активными участками, на каждом из которых тяговооруженность или тяга имеют максимально возможное значение. Внутри области существования имеется произвол в определении зависимостей $\eta(q)$. В этом случае, помимо указанных условий, можно попытаться удовлетворить еще условию (6.1.27), при котором перелет между орбитами происходит за заданное время.

С учетом равенств (6.2.15) и (6.2.23) условие (6.1.27) можно записать в виде

$$\int_0^{q(\varphi_N)} [\cos \eta(q) + 3\eta(q) \sin \eta(q)] dq = -\Delta_t - 3\delta h. \quad (6.2.24)$$

Из сказанного следует, что при особых управлениях существует

© В. А. Ильин, Г. Е. Кузман

совокупность начальных и конечных орбит, для которых задача мягкой встречи осуществляется при $p_i = 0$.

В заключение настоящего параграфа остановимся на выборе знака перед Δ_z в формулах (6.2.20)—(6.2.23). Этот вопрос может быть решен при анализе условий существования рассмотренного типа перелетов. В импульсной постановке это будет сделано в следующей главе при решении задачи об оптимальных перелетах между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами.

§ 6.3. Основные соотношения для линеаризованных многоимпульсных перелетов

6.3.1. Линеаризованные граничные условия. Будем считать выполненными все предположения, сделанные в разделе 6.1.1. Так же как и ранее, будем предполагать, что движение происходит с околокруговыми скоростями в окрестности некоторой базовой круговой орбиты радиуса $r = r_{cp}$ и рассматривается в указанной на рис. 6.1.1 цилиндрической системе координат $Or\varphi z$. Такое движение описывается линеаризованными уравнениями (6.1.3), с той лишь особенностью, что управляющие функции n_r , n_i , n_z в окрестности некоторых значений $\varphi = \varphi_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, при которых прикладываются импульсы, принимают бесконечно большие значения таким образом, что имеют место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta\varphi_k \rightarrow 0} \int_{\varphi_k - \frac{\Delta\varphi_k}{2}}^{\varphi_k + \frac{\Delta\varphi_k}{2}} n_r d\varphi &= \Delta V_{rk}, \\ \lim_{\Delta\varphi_k \rightarrow 0} \int_{\varphi_k - \frac{\Delta\varphi_k}{2}}^{\varphi_k + \frac{\Delta\varphi_k}{2}} n_\tau d\varphi &= \Delta V_{\tau k}, \\ \lim_{\Delta\varphi_k \rightarrow 0} \int_{\varphi_k - \frac{\Delta\varphi_k}{2}}^{\varphi_k + \frac{\Delta\varphi_k}{2}} n_z d\varphi &= \Delta V_{zk}, \\ \lim_{\Delta\varphi_k \rightarrow 0} \int_{\varphi_k - \frac{\Delta\varphi_k}{2}}^{\varphi_k + \frac{\Delta\varphi_k}{2}} n d\varphi &= \Delta V_k, \\ k &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.1)$$

Ясно, что ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} представляют собой приращения компонент вектора скорости после сообщения импульса при $\varphi = \varphi_k$, величина ΔV_k — модуль приращения вектора скорости. Эти величины связаны между собой равенством

$$\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2 = \Delta V_k^2, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (6.3.2)$$

которое является следствием аналогичного соотношения для компонент тяговооруженности

$$n_r^2 + n_\tau^2 + n_z^2 = n^2 \quad (6.3.3)$$

и легко выводится из предельных равенств (6.3.1).

Будем далее считать, что в процессе перелета прикладывается $N + 1$ импульс при $\varphi = \varphi_k$, $k = 0, 1, \dots, N$. Импульс, прикладываемый при $\varphi = \varphi_0$, обеспечивает сход с начальной орбиты, а импульс, прикладываемый при $\varphi = \varphi_N$, обеспечивает выход на конечную орбиту. Эти граничные импульсы будем называть, соответственно, начальным и конечным. Остальные импульсы будем называть промежуточными.

Получим выражения для вариаций параметров траектории после приложения всех импульсов. Такие выражения выводятся наиболее простым образом, если исходить из равенств (6.1.16) и (6.1.17). Будем считать, что активные участки располагаются в окрестности $\varphi = \varphi_k$ ($k = 0, 1, \dots, N$), устремим их длину к нулю и затем воспользуемся предельными равенствами (6.3.1). После выполнения такого предельного перехода (6.1.16) и (6.1.17) могут быть записаны в виде

$$\Delta r(\varphi) = \sum_{k=0}^N \{\Delta V_{rk} \sin(\varphi - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi - \varphi_k)]\}, \quad (6.3.4)$$

$$\Delta V_r(\varphi) = \sum_{k=0}^N \{\Delta V_{rk} \cos(\varphi - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} \sin(\varphi - \varphi_k)\}, \quad (6.3.5)$$

$$\Delta V_\tau(\varphi) = \sum_{k=0}^N \{-\Delta V_{rk} \sin(\varphi - \varphi_k) + \Delta V_{\tau k} [2 \cos(\varphi - \varphi_k) - 1]\}, \quad (6.3.6)$$

$$\Delta z(\varphi) = \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin(\varphi - \varphi_k), \quad (6.3.7)$$

$$\Delta V_z(\varphi) = \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \cos(\varphi - \varphi_k), \quad (6.3.8)$$

$$\Delta t(\varphi) = \sum_{k=0}^N \{2\Delta V_{rk} [1 - \cos(\varphi - \varphi_k)] + \Delta V_{\tau k} [3(\varphi - \varphi_k) - 4 \sin(\varphi - \varphi_k)]\}. \quad (6.3.9)$$

Эти равенства справедливы при $\varphi > \varphi_N$. Они позволяют задать произвольные граничные условия при решении задач о перелетах в линеаризованной импульсной постановке. В качестве примера приведем систему соотношений, обеспечивающих выполнение граничных условий в задаче о перелетах между орбитами. По-прежнему будем исходить из того, что взаимное расположение орбит определяется функциями (6.1.21). Для того чтобы перелет между орбитами был выполнен, необходимо и достаточно, чтобы при $\varphi > \varphi_N$ правые части этих равенств для $\Delta r(\varphi)$ и $\Delta z(\varphi)$ тождественно равнялись правым частям равенств (6.3.4) и (6.3.7):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 + \Delta_c \cos \varphi + \Delta_s \sin \varphi &\equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^N \{ \Delta V_{rk} \sin(\varphi - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi - \varphi_k)] \}, \\ \Delta_z \sin \varphi &\equiv \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin(\varphi - \varphi_k) \quad (\varphi > \varphi_N). \end{aligned} \right\} \quad (6.3.10)$$

Для того чтобы эти равенства тождественно выполнялись при $\varphi > \varphi_N$, достаточно приравнять друг другу свободные члены и коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, стоящие в их правых и левых частях. Это дает следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^N \Delta V_{\tau k} &= \Delta_0, \\ \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2\Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) &= -\Delta_c, \\ \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - 2\Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k) &= \Delta_s, \\ \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin \varphi_k &= 0, \\ \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \cos \varphi_k &= \Delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.11)$$

Эти же соотношения можно сразу получить из равенств (6.1.23) с помощью рассмотренного выше предельного перехода.

6.3.2. Условия оптимальности. Полученные только что соотношения, а также соотношения (6.3.4) — (6.3.9) представляют собой связи, налагаемые на варьируемые параметры ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} и φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$. При удовлетворении этих равенств обеспечивается выполнение граничных условий. Если ставится вопрос об

оптимальном выборе этих параметров с точки зрения минимизации суммарной характеристической скорости

$$q(\varphi_N) = \Delta V_\Sigma = \sum_{k=0}^N \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2}, \quad (6.3.12)$$

то можно установить связи между величинами компонент прикладываемых импульсов ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} и значениями угловой дальности φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, при которых они прикладываются. Такие связи получаются из условий (6.1.7) для определения оптимальной величины и направления вектора тяговооруженности путем предельного перехода при $\Delta\varphi_k$, стремящемся к нулю. Ясно, что в момент приложения импульса выполняются равенства (см. раздел 2.2.1)

$$s(\varphi_k) = 1, \quad \left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (6.3.13)$$

Последние равенства выполняются, если значения φ_0 и φ_N выбираются оптимально. Если же значения φ_0 и φ_N заданы, то эти равенства выполняются только для промежуточных импульсов ($k = 1, 2, \dots, N-1$). При выполнении этих соотношений все активные участки имеют нулевую длину. Ясно, что это в пределе должно выполняться при переходе от схемы перелета с распределенными активными участками к импульсной схеме. Интегрируя обе части (6.1.7) от $\varphi_k - \frac{\Delta\varphi_k}{2}$ до $\varphi_k + \frac{\Delta\varphi_k}{2}$ и используя затем (6.3.1), получим искомые связи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} &= s_r(\varphi_k) = A \cos \varphi_k + B \sin \varphi_k + 2p_t, \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} &= s_\tau(\varphi_k) = -2A \sin \varphi_k + 2B \cos \varphi_k - 3p_t \varphi_k + C, \\ \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} &= s_z(\varphi_k) = D \cos \varphi_k + E \sin \varphi_k, \\ k &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.14)$$

Отметим, что, в соответствии с равенствами (6.3.2) и (6.3.13), сумма квадратов правых частей (6.3.14) должна равняться единице.

Из равенств (6.3.14) следует, что в случае многооборотных перелетов характер изменения ориентации импульсов существенно связан с величиной константы p_t . При $p_t = 0$ изменение ориентации импульсов при переходе от одного оборота к другому

имеет периодический характер, при $p_i \neq 0$ периодичность сохраняется только для компонент $\Delta V_{rk}/\Delta V_k$ и $\Delta V_{zk}/\Delta V_k$.

Для того чтобы иметь возможность выяснить далее физический смысл второго из равенств (6.3.13), заменим его следующим:

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_k} = \left[s_r(\varphi) \frac{ds_r}{d\varphi} + s_\tau \frac{ds_\tau}{d\varphi} + s_z(\varphi) \frac{ds_z}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_k} = 0. \quad (6.3.15)$$

Воспользовавшись равенствами (6.3.14), перепишем (6.3.15) так (см. (2.2.48) — (2.2.50)):

$$\left(\Delta V_{rk} \frac{ds_r}{d\varphi} + \Delta V_{\tau k} \frac{ds_\tau}{d\varphi} + \Delta V_{zk} \frac{ds_z}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_k} = 0. \quad (6.3.16)$$

Равенства (6.3.14) — (6.3.16) представляют собой условия оптимального выбора параметров прикладываемых импульсов.

При решении задач оптимизации импульсных перелетов в рамках экстремального подхода часто используется метод неопределенных множителей Лагранжа (см. Л. Д. Кудрявцев [1], т. II). Для того чтобы установить связь между полученными выше соотношениями и соотношениями, которые получаются при использовании этого метода, рассмотрим задачу о переходе между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами с заданным временем перехода. Граничные условия для нее были получены выше и представляют собой равенства (6.3.11). Функция Лагранжа записывается в виде

$$\begin{aligned} L = & \sum_{k=0}^N \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2} + \lambda_1 \sum_{k=0}^N 2\Delta V_{\tau k} + \\ & + \lambda_2 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2\Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) + \lambda_3 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - \\ & - 2\Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k) + \lambda_4 \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin \varphi_k + \lambda_5 \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ — неопределенные множители Лагранжа, являющиеся константами. Перепишем далее выражение (6.3.17) в виде, более удобном для дальнейшего исследования. Группируя вместе слагаемые с одними и теми же компонентами импульсов, можем написать

$$\begin{aligned} L = & \sum_{k=0}^N \left[\sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2} + \Delta V_{rk} (\lambda_2 \sin \varphi_k + \lambda_3 \cos \varphi_k) + \right. \\ & \left. + 2\Delta V_{\tau k} (\lambda_1 + \lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k) + \Delta V_{zk} (\lambda_4 \sin \varphi_k + \lambda_5 \cos \varphi_k) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

В методе Лагранжа для определения оптимальных значений варьируемых параметров ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} и φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, необходимо найти частные производные от функции H по ним и затем приравнять эти производные нулю. Выполняя дифференцирование выражения (6.3.18) для L по ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$ и ΔV_{zk} и приравнявая результаты дифференцирования нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} &= -(\lambda_2 \sin \varphi_k + \lambda_3 \cos \varphi_k), \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} &= -2(\lambda_1 + \lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k), \\ \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} &= -(\lambda_4 \sin \varphi_k + \lambda_5 \cos \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (6.3.19)$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Сопоставляя эти равенства с равенствами (6.3.14) при условии $p_t = 0$, которое всегда имеет место в задачах с незадаанным временем, можно установить следующие связи между константами A, B, C, D, E и множителями Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_5$:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\lambda_2, \quad B = -\lambda_3, \quad C = -2\lambda_1, \\ D &= -\lambda_5, \quad E = -\lambda_4. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.20)$$

Таким образом, правые части в (6.3.19) суть не что иное, как выражения для сопряженных переменных $s_r(\varphi_k)$, $s_\tau(\varphi_k)$ и $s_z(\varphi_k)$, а константы в этих выражениях с точностью до постоянных множителей представляют собой множители Лагранжа (см. раздел 2.2.1). С учетом этих сопоставлений выражение (6.3.18) для функции L можно переписать в виде

$$L = \sum_{k=0}^N \left[\sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2} - \Delta V_{rk} s_r(\varphi_k) - \Delta V_{\tau k} s_\tau(\varphi_k) - \Delta V_{zk} s_z(\varphi_k) \right]. \quad (6.3.21)$$

Чтобы получить условия для определения оптимальных значений φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, выполним дифференцирование последнего равенства по этим параметрам и результат дифференцирования приравняем нулю. В итоге получим равенство (6.3.16), являющееся следствием условия

$$\left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (6.3.22)$$

Таким образом, это условие дает систему равенств для определения оптимальных угловых положений φ_k прикладываемых импульсов.

6.3.3. Линеаризованные формулы для свободного движения по околокруговым орбитам. Укажем далее линеаризованные соотношения, описывающие свободное движение по околокруговым орбитам. Получим прежде всего выражения для параметров движения в плоскости $O\Gamma\varphi$ при малых z . Кеплерово движение описывается соотношениями

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_\pi)}, \quad (6.3.23)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin(\varphi - \varphi_\pi), \quad (6.3.24)$$

$$V_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [1 - e \cos(\varphi - \varphi_\pi)], \quad (6.3.25)$$

$$p = \frac{(r\Gamma_\tau)^2}{\mu}. \quad (6.3.26)$$

Через φ_π здесь обозначено угловое положение перицентра. Эксцентриситет орбиты будем считать малой величиной. Приведем далее выражение для времени перелета T :

$$T = \int_{\varphi_0}^{\varphi_N} \frac{r(\varphi)}{V_\tau(\varphi)} d\varphi. \quad (6.3.27)$$

Эти выражения справедливы с погрешностью порядка z^2 . Произведем линеаризацию этих выражений по e , одновременно переходя к безразмерным переменным, которые, как и ранее, будем обозначать черточкой сверху. Положим

$$\left. \begin{aligned} V_\tau &= V_{\text{кр}} (1 + \Delta \bar{V}_\tau), \\ r &= r_{\text{ср}} (1 + \Delta \bar{r}), \end{aligned} \right\} \quad (6.3.28)$$

где $\Delta \bar{V}_\tau$ и $\Delta \bar{r}$ — малые величины.

Формулы (6.3.26) и (6.3.28) в результате пренебрежения членами второго порядка и выше дают

$$\bar{p} = \frac{p}{r_{\text{ср}}} = 1 + \Delta \bar{p}, \quad (6.3.29)$$

где $\Delta \bar{p} = 2(\Delta \bar{V}_\tau + \Delta \bar{r})$. С учетом этого результата линеаризованные выражения для $\bar{r} = r/r_{\text{ср}}$, $\bar{V}_r = V_r/V_{\text{кр}}$, $\bar{V}_\tau = V_\tau/V_{\text{кр}}$, где $V_{\text{кр}} = \sqrt{\mu/r_{\text{ср}}}$, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= 1 + \Delta \bar{p} - e \cos(\varphi - \varphi_\pi), \\ \bar{V}_r &= e \sin(\varphi - \varphi_\pi), \\ \bar{V}_\tau &= 1 - \frac{\Delta \bar{p}}{2} + e \cos(\varphi - \varphi_\pi). \end{aligned} \right\} \quad (6.3.30)$$

Из (6.3.30) с погрешностью порядка квадратов малых величин имеем

$$\frac{\bar{r}(\varphi)}{\bar{V}_\tau(\varphi)} = 1 + \frac{3}{2} \Delta \bar{p} - 2e \cos(\varphi - \varphi_\pi). \quad (6.3.31)$$

Подставляя это выражение в (6.3.27) и выполняя интегрирование, приходим для безразмерного времени перелета $\bar{T} = \frac{T}{r_{cp}/V_{кр}}$ к выражению

$$\bar{T} = \left(1 + \frac{3}{2} \Delta \bar{p}\right) (\varphi_N - \varphi_0) - 4e \sin\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right) \cos\left[\left(\frac{\varphi_N + \varphi_0}{2}\right) - \varphi_\pi\right]. \quad (6.3.32)$$

Укажем в заключение соотношения, определяющие боковое отклонение $\bar{z}(\varphi)$ и боковую компоненту скорости $\bar{V}_z(\varphi)$. Такие выражения удовлетворяют уравнениям (6.1.3) при $n_z = 0$ и могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}(\varphi) &= \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi, \\ \bar{V}_z(\varphi) &= -\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.33)$$

где $\bar{z} = z/r_{cp}$, $\bar{V}_z = V_z/V_{кр}$, α и β — произвольные постоянные.

Полученные линеаризованные выражения будут использоваться в следующей главе при записи граничных условий.

§ 6.4. Приближенное построение оптимальных перелетов для случая активных участков малой протяженности

6.4.1. Правило пересчета. Общий анализ этой задачи дан в гл. IV. Наличие для околосредовых перелетов явного решения сопряженной системы (6.1.9) позволяет в этом случае получить результаты более простым путем.

Сосредоточим внимание на случаях, когда закон регулирования тяги имеет граничный характер. Такие случаи имеют место всегда при $\Phi \neq 0$. Они достаточно интересны и для особых управлений, так как при граничном законе регулирования тяги область существования перелетов с особыми управлениями оказывается наибольшей. Будем предполагать, что протяженности активных участков являются малыми величинами. Обозначим через φ_k^- , φ_k и φ_k^+ соответственно начало, середину и конец k -го активного участка и упростим граничные условия, пользуясь малостью длин активных участков. Способ упрощения одинаков для любого из граничных условий, приведенных в § 6.1. Поэтому вычисления можно выполнить для любого из них. Проведем их на примере уравнения (6.1.27). Исключая из этого равенства промежуток

интегрирования, соответствующие пассивным участкам, можем записать

$$\sum_{k=0}^N \int_{\varphi_k^-}^{\varphi_k^+} (2s_r - 3\xi s_\tau) \frac{n}{s} d\xi = \Delta_t. \quad (6.4.1)$$

Здесь $\varphi_0^- = \varphi_0$, $\varphi_N^+ = \varphi_N$. Обозначим через $f(\xi)$ подынтегральное выражение в этом равенстве и разложим $f(\xi)$ в ряд Тейлора в окрестности $\xi = \varphi_k$:

$$f(\xi) = f(\varphi_k) + f'(\varphi_k)(\xi - \varphi_k) + \frac{f''(\varphi_k)}{2!}(\xi - \varphi_k)^2 + \dots \quad (6.4.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_k^-}^{\varphi_k^+} f(\xi) d\xi &= f(\varphi_k) \Delta\varphi_k + \frac{f''(\varphi_k)}{24} \Delta\varphi_k^3 + \dots = \\ &= f(\varphi_k) \Delta\varphi_k + O(\Delta\varphi_k^3), \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

где $\Delta\varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Обозначая индексом k внизу значения функций при $\varphi = \varphi_k$, перепишем (6.4.1) в виде

$$\sum_{k=0}^N \left[\left(2 \frac{s_{rk}}{s_k} n_k \Delta\varphi_k - 3\varphi_k \frac{s_{\tau k}}{s_k} n_k \Delta\varphi_k \right) + O(n_{\max} \Delta\varphi_k^3) \right] = 0. \quad (6.4.4)$$

Применение (6.4.3) к уравнению $\frac{dq}{d\varphi} = n$ с последующим использованием (6.1.7) позволяет получить следующие результаты:

$$\Delta q_k = \Delta V_k = n_k \Delta\varphi_k + O(n_{\max} \Delta\varphi_k^3), \quad \Delta V_{ik} = \frac{s_{ik}}{s_k} \Delta V_k. \quad (6.4.5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N; \quad i = r, \tau, z.$$

С учетом этих равенств условие (6.4.4) можно переписать так:

$$\sum_{k=0}^N [(2\Delta V_{rk} - 3\varphi_k \Delta V_{\tau k}) + O(n_{\max} \Delta\varphi_k^3)] = 0. \quad (6.4.6)$$

Ясно, что ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} представляют собой компоненты импульса, приложенного в средней точке k -го активного участка, направленного по оптимальному направлению тяги в этой точке и имеющего величину, равную характеристической скорости, расходуемой на этом активном участке. При определении связи между параметрами импульса и параметрами активного участка граничное условие (6.4.6) лишь на члены $O(n_{\max} \Delta\varphi_k^3)$ отличается от

аналогичного условия, получающегося при решении задачи в импульсной постановке. Относительная погрешность составляет при этом величину $O(\Delta\varphi_k^2)$. Упростим далее уравнения, определяющие начала и концы активных участков. Ограничимся рассмотрением случая, когда начало и конец перелета выбираются оптимально и $H(\varphi) = 0$. В соответствии с результатами § 6.1 в этом случае можно считать, что

$$\vartheta(\varphi_k^-) = \vartheta(\varphi_k^+) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (6.4.7)$$

Примерный вид зависимости $\vartheta(\varphi)$ в окрестности k -го активного участка изображен на рис. 6.4.1. Очевидно, что $\max \vartheta(\varphi)$ при $\varphi_k^- \leq \varphi \leq \varphi_k^+$ представляет собой величину $O(\Delta\varphi_k^2)$. Соответственно площадь, ограниченная кривой $\vartheta(\varphi)$ на активном участке, представляет собой величину $O(\Delta\varphi_k^3)$. Основываясь на этом, рассмотрим вопрос об определении зависимости $p_q(\varphi)$ в случае, когда

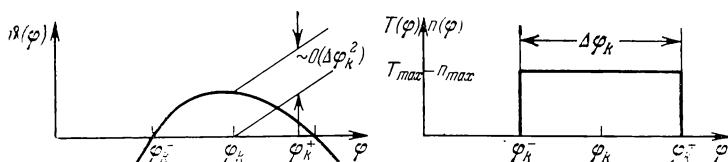


Рис. 6.4.1.

ограничивается тяга (в случае ограничения по тяговооруженности $p_q = -1$). Из уравнения (6.1.10) следует, что

$$p_q = -1 + O(n_{\max}\Delta\varphi_k^3), \quad (6.4.8)$$

т. е. импульс p_q можно считать тождественно равным -1 как при ограничении по тяговооруженности, так и при ограничении по тяге, с той же точностью, с которой выполняются граничные условия при замене активного участка импульсом. Из (6.4.7) и (6.4.8) следует, что $s(\varphi_k^-) = s(\varphi_k^+) = 1$. Разлагая левые части этих равенств в ряд в окрестности $\varphi = \varphi_k$, получим

$$\begin{aligned} s_k - \frac{s_k'}{2} \Delta\varphi_k + \frac{s_k''}{8} \Delta\varphi_k^2 + O(\Delta\varphi_k^3) &= 1, \\ s_k + \frac{s_k'}{2} \Delta\varphi_k + \frac{s_k''}{8} \Delta\varphi_k^2 + O(\Delta\varphi_k^3) &= 1. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Из этих равенств следует, что

$$s_k = 1 + O(\Delta\varphi_k^2), \quad s_k' = O(\Delta\varphi_k^2), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (6.4.10)$$

Первые члены этих равенств соответствуют решению задачи в импульсной постановке. Таким образом, как граничные условия, так и соотношения для определения концов активных участков с относительной ошибкой $O(\Delta\varphi_k^2)$ совпадают с аналогичными соотношениями, полученными при решении задачи в импульсной постановке, которое будем считать известным.

Из полученных выше результатов следует (см. раздел 4.2.1) *правило пересчета*:

1) середины активных участков должны совпадать с моментами приложения импульсов;

2) направление тяги может быть выбрано постоянным на всем активном участке и совпадающим с направлением импульса;

3) величина характеристической скорости, расходуемой на активном участке, равняется величине импульса.

Получим далее формулы для определения угловой дальности активных участков. Такие формулы выводятся из уравнения $\frac{dq}{d\varphi} = n$ (см. (6.1.3)). В случае ограничения тяговооруженности на активных участках $n = n_{\max}$ и для $\Delta\varphi_k$ получается формула

$$\Delta\varphi_k = \frac{\Delta\Gamma_k}{n_{\max}}, \quad (6.4.11)$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Если же на активных участках ограничена тяга, то $n = n_{\max, 0} e^{q/c}$ и уравнение для q можно переписать так:

$$\frac{de^{-q/c}}{d\varphi} = \frac{n_{\max, 0}}{c}. \quad (6.4.12)$$

Интегрируя его от φ_k^- до φ_k^+ при начальном условии $q(\varphi_k^-) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta V_i$ и учитывая, что $q(\varphi_k^+) = q(\varphi_k^-) + \Delta V_k$, получим искомую формулу в виде

$$\Delta\varphi_k = \frac{c}{n_{\max, 0}} e^{-\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{k-1} \Delta V_i} \left(1 - e^{-\frac{\Delta V_k}{c}} \right), \quad (6.4.13)$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Заметим, что исходное для формул (6.4.11) и (6.4.13) уравнение $\frac{dq}{d\varphi} = n$ является приближенным и применимо лишь для случая околокруговых орбит. При точном решении задачи $\frac{dq}{dt} = n$, где q отнесено к круговой скорости, а t — к $r_{\text{ср}}/V_{\text{кр}}$. Поэтому (6.4.11)

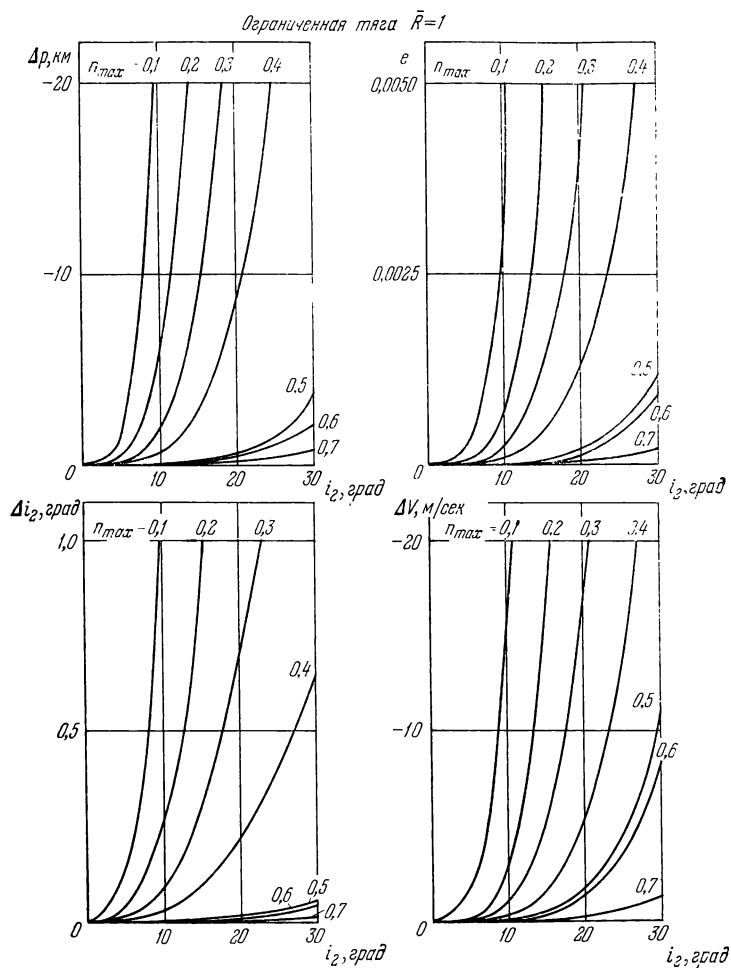


Рис. 6.4.2.

и (6.4.13) следует рассматривать как точные формулы для продолжительности активного участка и лишь как приближенные для его угловой дальности.

При известном импульсном решении задачи найденные результаты позволяют определить все параметры оптимального перелета. Абсолютная погрешность, возникающая из-за приближенного учета протяженностей активных участков, представляет собой величину $O(n_{\max} \Delta \Phi_k^3) = O(\Delta V_k^3 / n_{\max}^2)$. В то же время абсолютная погрешность линеаризованных уравнений (6.1.3) представляет собой величину $O(\Delta V_k^2)$. Поэтому приближенный учет протяженностей активных участков не будет увеличивать погрешностей исходных линеаризованных уравнений при $n_{\max} \geq O(\sqrt{\Delta V_k})$.

6.4.2. Оценка точности. Точность указанных выше правил приближенного построения оптимальных перелетов оценивалась на примере перелетов между некомпланарными круговыми орбитами. Импульсное решение задачи для этого случая было взято из

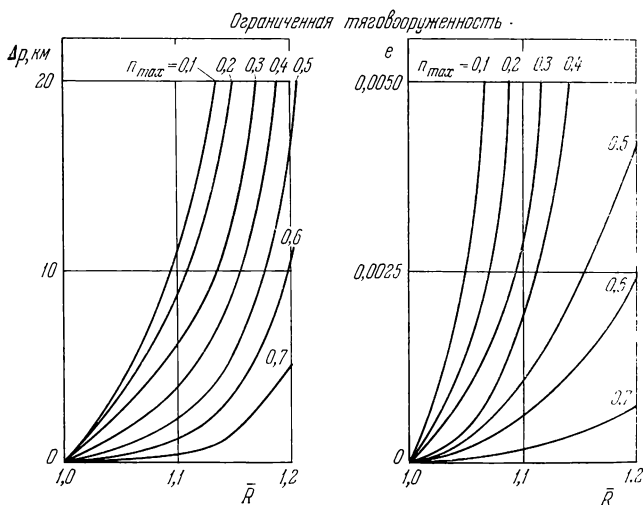


Рис. 6.4.3.

работы Райдера [1]. Параметры перелета с протяженными активными участками определялись с помощью результатов предыдущего раздела, а в качестве критерия точности рассматривались величины невязок в граничных условиях в конце перелета: разность между фокальным параметром p конечной орбиты и радиусом R_1 круговой орбиты, которая должна была получиться в конце перелета ($\Delta p = p - R_1$ [км]), эксцентриситет конечной орбиты e , погрешность в угле наклона плоскости конечной орбиты Δi

[град], смещение оси узлов $\Delta\Omega$ [град], разность ΔV между скоростью в конечной точке перелета и скоростью движения по конечной круговой орбите. Перелет рассчитывался по точным уравнениям движения. Расчеты были проведены как для случая компланарных орбит, так и для достаточно больших углов поворота i плоскости орбиты и отношения $\bar{R} = R_1/R_0$ радиусов начальной и конечной орбит. В связи с этим для увеличения точности в случае немалых значений i и $\bar{R}$ результаты раздела 6.4.1 были несколько модифицированы.

1. Угловая дальность активного участка измерялась в плоскости развертки линейчатой поверхности, описываемой радиус-вектором центра масс летательного аппарата (см. работу Ю. М. Коппина [1]). Такая модификация является естественным обобщением вышеизложенного на нелинейный случай, когда мгновенная орбитальная плоскость заметно изменяет свою ориентацию в пространстве.

2. Формулы (6.4.11) и (6.4.13) рассматривались как формулы, определяющие безразмерные продолжительности Δt_k активных

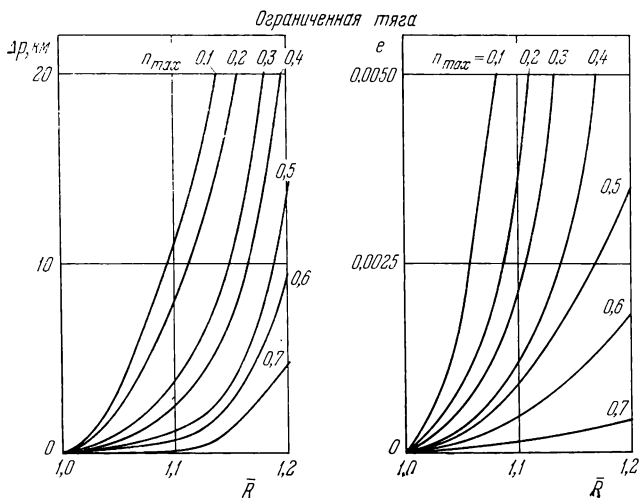


Рис. 6.4.4.

участков, а угловая дальность их $\Delta\varphi_k$, в соответствии с уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_{\tau}}{r}, \text{ определялась по формуле } \Delta\varphi_k \approx \frac{V_{\tau \text{ ср}}}{r_{\text{ср}}} \Delta t_k.$$

Значение $r_{\text{ср}}$ полагалось равным радиусу той орбиты, в окрестности которой прикладывается импульс, а значение $V_{\tau \text{ ср}}$ определялось с учетом ΔV_{τ} — трансверсальной компоненты прикладываемого импульса: $V_{\tau \text{ ср}} = 1 + \frac{\Delta V_{\tau}}{2}$.

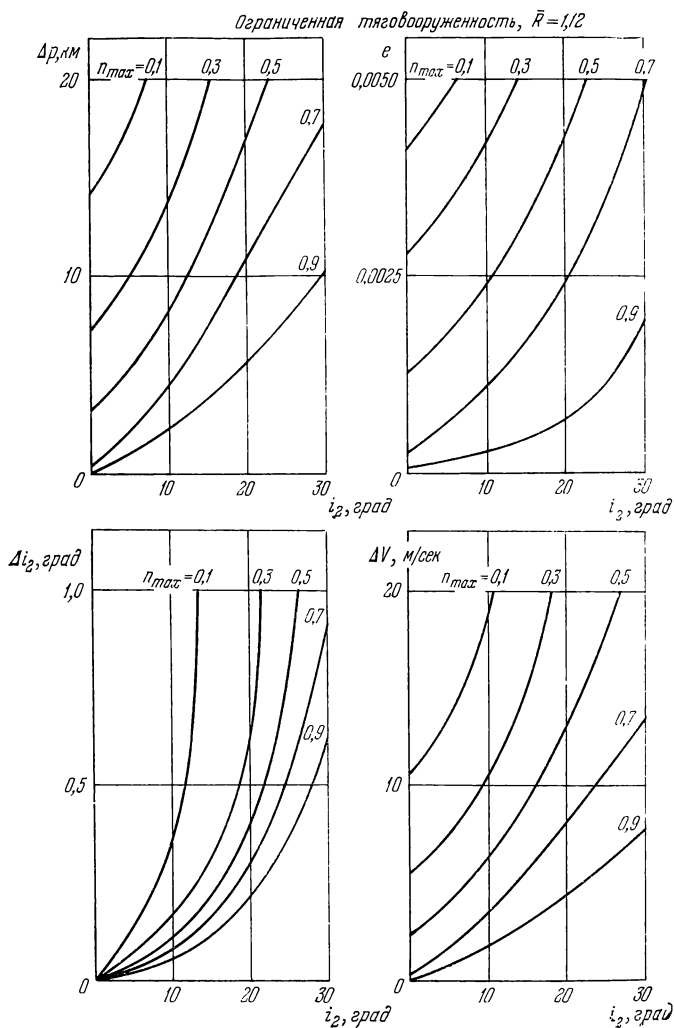


Рис. 6.4.5.

Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 6.4.2—6.4.5; рис. 6.4.2 — перелеты между некопланарными орбитами одного и того же радиуса для случая ограниченной тяги; рис. 6.4.3, 6.4.4 — перелеты между копланарными круговыми орбитами для случаев ограниченной тяговооруженности и тяги соответственно; рис. 6.4.5 — перелеты с одновременным поворотом плоскости орбиты и изменением радиуса для случая ограниченной тяговооруженности. Смещение оси узлов $\Delta\Omega$ на упомянутых рисунках не строилось, так как во всех случаях его величина не превышает 10^{-4} — 10^{-8} град. По этим графикам видно, что погрешность предложенных выше правил приближенного построения оптимальных перелетов при $\bar{R} \leq 1,2$, $i \leq 30^\circ$ и $n_{\max} \geq 0,1$ не превосходит 25 км для линейных величин, 20 м/сек для скорости, 0,005 для эксцентриситета и 1° для угла поворота плоскости орбиты.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ ПО ОКОЛОКРУГОВЫМ ОРБИТАМ

§ 7.1. Перелет с околокруговой орбиты в точку, расположенную в ее окрестности

7.1.1. Исходные соотношения. Рассмотрим сначала сравнительно простую задачу о перелете с эллиптической орбиты в некоторую фиксированную точку пространства. Для того чтобы изложенная выше теория могла быть применена, необходимо, чтобы исходная орбита и конечная точка были расположены в малой окрестности некоторой круговой орбиты радиуса $r_{\text{ср}}$. Будем отсчитывать угол φ начальной орбиты от ее перигея. В этом случае ее уравнение с погрешностью порядка квадратов малых величин может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} r_0(\varphi) &= p_0(1 - e_0 \cos \varphi), \\ z_0(\varphi) &= \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1)$$

Будем предполагать, что перелет начинается из точки орбиты с полярным углом $\varphi = \varphi_0$ и заканчивается в некоторой точке N с координатами φ_N, r_N, z_N . Угловое положение начала перелета φ_0 может быть либо задано, либо выбрано оптимально. Так как ограничения на компоненты скорости в конце перелета при $\varphi = \varphi_N$ не накладываются, то в данной задаче имеются только два граничных условия. В соответствии с

равенствами (6.3.4) и (6.3.7) эти условия могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^N \{ \Delta V_{rk} \sin(\varphi_N - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] \} &= \Delta r(\varphi_N), \\ \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin(\varphi_N - \varphi_k) &= \Delta z(\varphi_N), \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2)$$

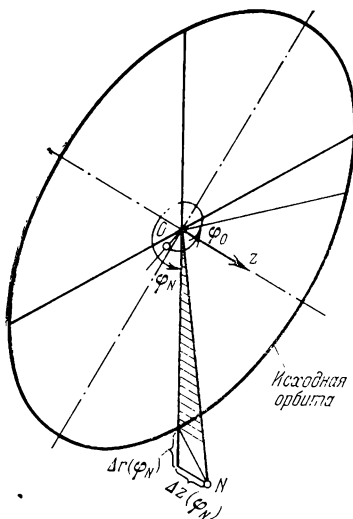


Рис. 7.1.1.

где $\Delta r(\varphi_N) = r_N - r_0(\varphi_N)$, $\Delta z(\varphi_N) = z_N - z_0(\varphi_N)$. Геометрический смысл величин $\Delta r(\varphi_N)$ и $\Delta z(\varphi_N)$ поясняется на рис. 7.1.1. Все входящие в формулы (7.1.2) величины являются безразмерными.

Рассматриваемая задача состоит в определении значений параметров ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} для $k = 0, 1, 2, \dots, N$ и φ_k для $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ и числа N , дающих минимальное значение для характеристической скорости ΔV_{Σ} , которая определяется формулой (6.3.12), при выполнении граничных условий (7.1.2). Для решения этой задачи воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа записывается в виде

$$L = \sum_{k=0}^N \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2} + \\ + \lambda_1 \sum_{k=0}^N \{ \Delta V_{rk} \sin(\varphi_N - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] \} + \\ + \lambda_2 \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin(\varphi_N - \varphi_k). \quad (7.1.3)$$

Дифференцируя ее по ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} и φ_k и приравнявая результаты дифференцирования нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + \lambda_1 \sin(\varphi_N - \varphi_k) &= 0, \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2\lambda_1 [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] &= 0, \\ \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} + \lambda_2 \sin(\varphi_N - \varphi_k) &= 0, \\ k &= 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.4)$$

$$\lambda_1 [\Delta V_{rk} \cos(\varphi_N - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} \sin(\varphi_N - \varphi_k)] + \\ + \lambda_2 \Delta V_{zk} \cos(\varphi_N - \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.1.5)$$

В этих уравнениях

$$\Delta V_k = \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2}. \quad (7.1.6)$$

Когда угловое положение начала перелета φ_0 не варьируется, уравнение (7.1.5) при $k = 0$ не рассматривается. Уравнений (7.1.4) и (7.1.5) столько же, сколько варьируемых параметров ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$, ΔV_{zk} и φ_k . Множители же Лагранжа λ_1 и λ_2 должны быть определены так, чтобы выполнялись граничные условия (7.1.2). Таким образом, далее следует рассматривать систему, состоящую из уравнений (7.1.2), (7.1.4) и (7.1.5). Отметим, что

из уравнений (7.1.4) при $k = N$ сразу следует, что в конечный момент оптимального перелета импульс не прикладывается. Это, очевидно, является следствием того, что при $\varphi = \varphi_N$ никаких условий на вектор скорости наложено не было.

Было проведено детальное исследование системы уравнений (7.1.2), (7.1.4) и (7.1.5) и выяснен характер всех возможных в данной задаче типов перелетов. Чтобы можно было судить о том, как такое исследование проводится, приведем все необходимые выкладки для случая плоского перелета. Что же касается случая пространственного движения, то для него в конце параграфа будут изложены полученные результаты.

7.1.2. Плоские перелеты. При плоском движении

$$\left. \begin{aligned} \Delta z(\varphi_N) = 0, \quad \Delta V_{zh} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1.7)$$

и система уравнений (7.1.2), (7.1.4) и (7.1.5) записывается в виде

$$\frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + \lambda_1 \sin(\varphi_N - \varphi_k) = 0, \quad (7.1.8)$$

$$\frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2\lambda_1 [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] = 0, \quad (7.1.9)$$

$$\Delta V_{rk} \cos(\varphi_N - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} \sin(\varphi_N - \varphi_k) = 0, \quad (7.1.10)$$

$$\sum_{k=0}^N \{ \Delta V_{rk} \sin(\varphi_N - \varphi_k) + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] \} = \Delta r(\varphi_N), \quad (7.1.11)$$

$$\Delta V_k = \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2}. \quad (7.1.12)$$

Умножая равенства (7.1.8) и (7.1.9) соответственно на ΔV_{rk} и $\Delta V_{\tau k}$, складывая их почленно и используя (7.1.12), получим

$$\begin{aligned} \Delta V_k + \lambda_1 \{ \Delta V \sin_{rk}(\varphi_N - \varphi_k) + \\ + 2\Delta V_{\tau k} [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_k)] \} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Суммируя эти равенства по k от 0 до N и учитывая (7.1.11), будем иметь

$$\sum_{k=0}^N \Delta V_k + \lambda_1 \Delta r(\varphi_N) = 0. \quad (7.1.14)$$

Это равенство, очевидно, эквивалентно граничному условию (7.1.11). С его помощью выражение для характеристической скорости (6.3.12) записывается в виде

$$\Delta V_{\Sigma} = |\lambda_1| |\Delta r(\varphi_N)|, \quad (7.1.15)$$

откуда видно, что множитель Лагранжа λ_1 характеризует собой величину потребной энергии.

Перейдем теперь к решению системы (7.1.8) — (7.1.12). Отметим прежде всего, что несмотря на то, что число уравнений равняется числу неизвестных, эта система при одних и тех же значениях λ_1 и φ_k имеет бесконечно большое количество решений для ΔV_{rk} и $\Delta V_{\tau k}$. В самом деле, пусть известно какое-либо одно решение $\Delta V_{rk}^{(0)}$ и $\Delta V_{\tau k}^{(0)}$. Умножим его на некоторые положительные константы c_k . Ясно, что в этом случае уравнения (7.1.8) — (7.1.10) удовлетворяются автоматически, а равенство (7.1.14), эквивалентное (7.1.11), можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^N c_k \Delta V_k^{(0)} + \lambda_1 \Delta r(\varphi_N) = 0. \quad (7.1.16)$$

Это равенство в силу того, что $\Delta V_k^{(0)}$ являются решениями наших уравнений, выполняется при $c_k = 1$, $k = 0, 1, \dots, N$. Но ясно, что при наличии по крайней мере двух ненулевых импульсов оно удовлетворяется также при бесконечно большом числе значений констант c_k . Это значит, что в рассматриваемой задаче оптимальные перелеты с фиксированным значением энергии могут быть реализованы бесконечно большим количеством способов.

При решении уравнений (7.1.8) — (7.1.12) рассмотрим прежде всего случай фиксированного начала перелета, когда параметр φ_0 не варьируется. Случай варьируемого начала перелета получится автоматически в результате этого анализа путем исключения начального импульса. При этом до момента приложения оптимального начального импульса движение происходит по начальной орбите.

Для $k = 0$ равенства (7.1.8), (7.1.9) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{r0}}{\Delta V_0} &= -\lambda_1 \sin(\varphi_N - \varphi_0), \\ \frac{\Delta V_{\tau 0}}{\Delta V_0} &= -2\lambda_1 [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.17)$$

Возводя их в квадрат и складывая, получим выражение для $|\lambda_1|$:

$$|\lambda_1| = 1/2 \left| \sin \frac{\varphi_N - \varphi_0}{2} \right| \sqrt{1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2} \right)}. \quad (7.1.18)$$

Зависимость $|\lambda_1|$ от угловой дальности перелета $\varphi_N - \varphi_0$ изображена на рис. 7.1.2. Она имеет минимум при $\varphi_N - \varphi_0 = 180^\circ$, соответствующий некоторому обобщению гомановских перелетов

на случай околокруговых орбит, при котором $\lambda_1 = 1/4$. При удалении от точки $\varphi_N - \varphi_0 = 180^\circ$ в обе стороны значения $|\lambda_1|$ увеличиваются. Заметим, что выражение (7.1.18) для $|\lambda_1|$ имеет место лишь в случае, когда $\Delta V_0 \neq 0$. Если $\Delta V_0 = 0$, то все указанные выше равенства для $k = 0$ выполняются при произвольном λ_1 .

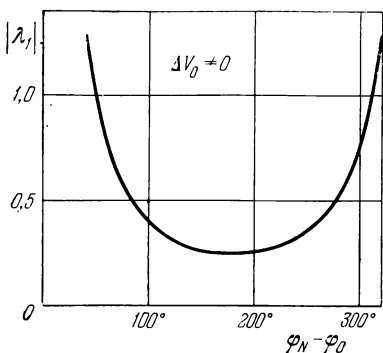


Рис. 7.1.2.

Перейдем теперь анализу соотношений для промежуточных импульсов. Обратимся прежде всего к уравнению (7.1.10), определяющему моменты приложения импульсов. Подставляя в него ΔV_{rk} и $\Delta V_{\tau k}$ из (7.1.8), (7.1.9), получим

$$\sin(\varphi_N - \varphi_k) \times \\ \times [4 - 3 \cos(\varphi_N - \varphi_k)] = 0,$$

откуда

$$\sin(\varphi_N - \varphi_k) = 0. \quad (7.1.19)$$

Отсюда следует, что промежуточные импульсы являются трансверсальными, ибо подстановка (7.1.19) в (7.1.8) дает

$$\Delta N_{rk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.1.20)$$

Из (7.1.19) также следует, что возможны две группы импульсов: импульсы, у которых $\cos(\varphi_N - \varphi_k) = 1$, и импульсы, у которых $\cos(\varphi_N - \varphi_k) = -1$. Но для первой группы (7.1.9) дает, что $\Delta V_{\tau k} = 0$. В силу (7.1.20) из этого следует, что при тех значениях φ_k , при которых $\cos(\varphi_N - \varphi_k) = 1$, импульсы не прикладываются. Таким образом, в рассматриваемой задаче промежуточные импульсы прикладываются только в точках

$$\varphi_k = \varphi_N + \pi - 2\pi s > \varphi_0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (7.1.21)$$

Эти точки расположены на противоположном конце луча, проходящего через конечную точку перелета. Из очевидного условия $\varphi_k \geq \varphi_0$ следует, что промежуточные импульсы возможны лишь для перелетов с угловой дальностью $\varphi_N - \varphi_0$, не меньшей чем π . В случае многооборотных перелетов в течение каждого оборота может быть только один промежуточный импульс.

Из уравнений (7.1.8), (7.1.9) и равенств (7.1.20), (7.1.21) и (7.1.12) следует, что

$$|\lambda_1| = 1/4. \quad (7.1.22)$$

Это равенство имеет место, если прикладывается хотя бы один промежуточный импульс.

Таким образом, экстремальные уравнения для начального и промежуточных импульсов, вообще говоря, дают различные значения для λ_1 . Но λ_1 для каждого типа перелета должно определяться единственным образом. Вследствие этого возможны экстремальные перелеты следующих типов:

а) Перелет с единственным начальным импульсом:

$$\Delta V_0 \neq 0, \quad \Delta V_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда $|\lambda_1|$ определяется выражением (7.1.18).

б) Перелеты с промежуточными импульсами, но без начального:

$$\Delta V_0 = 0, \quad \Delta V_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

В этом случае $|\lambda_1| = 1/4$.

в) Перелеты с начальным и промежуточными импульсами:

$$\Delta V_k \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Из условия совместности равенств (7.1.18) и (7.1.22) следует, что такие перелеты возможны лишь при $\varphi_N - \varphi_0 = 2\pi s - \pi$, $s = 2, 3, \dots$. При этом $|\lambda_1| = 1/4$.

Из выражения (7.1.15) для суммарной характеристической скорости ΔV_Σ видно, что ΔV_Σ задается произведением сомножителей $\Delta r(\varphi_N)$ и $|\lambda_1|$. Первый из них определяет расстояние конечной точки перелета от исходной орбиты и не зависит от того,

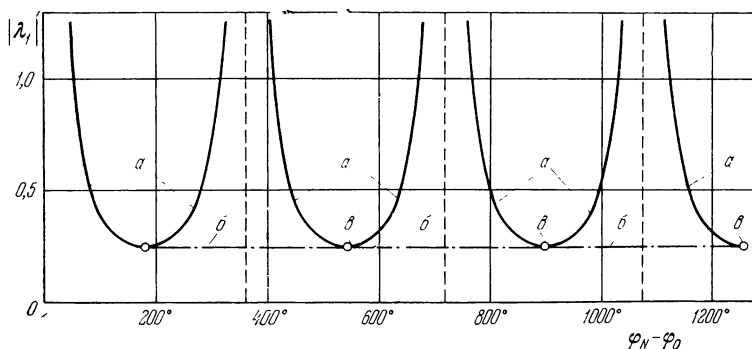


Рис. 7.1.3.

каким способом организуется перелет. Второй же, $|\lambda_1|$, определяется «качеством» перелета. Из равенств (7.1.18) и (7.1.22) следует, что $|\lambda_1|$ зависит лишь от угловой дальности перелета $\varphi_N - \varphi_0$. Для всех указанных выше трех типов перелетов зависимости $|\lambda_1|$ от $\varphi_N - \varphi_0$ изображены на рис. 7.1.3. При $\varphi_N - \varphi_0 > 180^\circ$ возможны два значения $|\lambda_1|$, соответствующие различным типам перелетов. Это, очевидно, является следствием

наличия двух решений у системы экстремальных уравнений (7.1.8) — (7.1.12). На рис. 7.1.3 видно, что при $\varphi_N - \varphi_0 > \pi$ наиболее экономичными являются перелеты типов *б* и *в* с промежуточными импульсами.

Из изложенного выше ясно также, что никаких других решений у системы экстремальных уравнений не существует.

Сосредоточим далее внимание на определении величин компонент импульсов и перелетных траекторий для оптимальных перелетов указанных выше типов *а*, *б* и *в*.

Рассмотрим прежде всего перелет типа *а* (одноимпульсный перелет с импульсом при $\varphi = \varphi_0$). Из уравнений (7.1.17) и (7.1.14) следует:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{r_0} &= \lambda_1^2 \sin(\varphi_N - \varphi_0) \Delta r(\varphi_N), \\ \Delta V_{\tau_0} &= \lambda_1^2 2 [1 - \cos(\varphi_N - \varphi_0)] \Delta r(\varphi_N). \end{aligned} \right\} \quad (7.1.23)$$

Используя выражение (7.1.18) для $|\lambda_1|$, эти формулы можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{r_0}}{\Delta r(\varphi_N)} &= \frac{\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right)}{1 + 3 \sin^2\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right)}, \\ \frac{\Delta V_{\tau_0}}{\Delta r(\varphi_N)} &= \frac{1}{1 + 3 \sin^2\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.24)$$

Графики этих зависимостей изображены на рис. 7.1.4. Следует обратить внимание на то, что радиальная компонента импульса ΔV_{r_0} меняет знак при увеличении угловой дальности перелета, переходя при $\varphi_N - \varphi_0 = \pi$ от положительных значений к отрицательным. Это означает, что при $\varphi_N - \varphi_0 > 180^\circ$ и $\Delta r(\varphi_N) > 0$ траектория перелета сразу после импульса попадает внутрь исходной орбиты. Траектория перелета в случае одного начального импульса определяется выражением

$$\Delta r(\varphi) = \Delta V_{r_0} \sin(\varphi - \varphi_0) + 2\Delta V_{\tau_0} [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (7.1.25)$$

Напомним, что через $\Delta r(\varphi)$ здесь обозначена разность между величинами расстояний от центра притяжения конечной и начальной орбит при некотором фиксированном значении φ . Примеры переходных орбит для случая старта с круговой орбиты при $\varphi_0 = 0$ для различных значений φ_N изображены на рис. 7.1.5.

Рассмотренные оптимальные одноимпульсные перелеты существуют при произвольных угловых дальностях. Но перелеты с дальностью, большей чем 2π , очевидно, осуществляются путем многократного обхода одной и той же конечной орбиты.

Практический смысл одноимпульсные перелеты в рассматриваемой задаче имеют лишь при $\varphi_N - \varphi_0 \leq \pi$, так как, в соответствии с изложенным, при больших дальностях более экономичными являются перелеты с промежуточными импульсами.

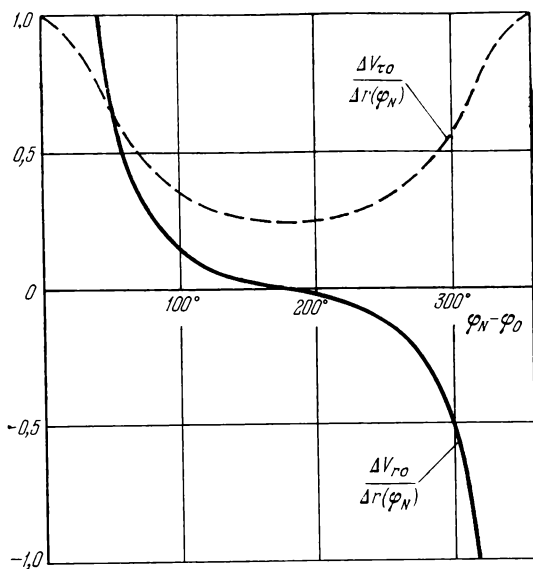


Рис. 7.1.4.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению перелетов типа б и в с промежуточными импульсами. Заметим сразу,

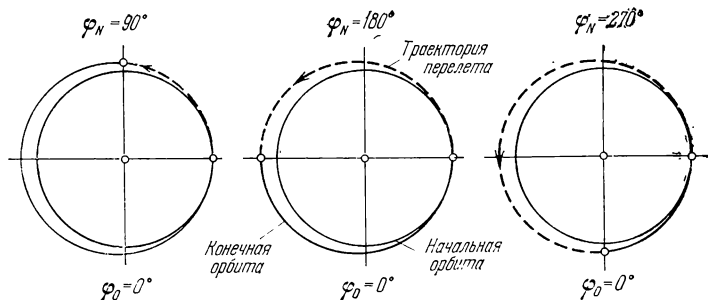


Рис. 7.1.5.

что перелеты типа в, которые возможны лишь при $\varphi_N - \varphi_0 = 2\pi s - \pi$ ($s = 2, 3, \dots$), по существу не отличаются от перелетов типа б, так как при таких угловых дальностях начальный импульс определяется точно такими же соотношениями, что и

промежуточные импульсы. Поэтому в тех случаях, когда возможны перелеты типа *в* с начальным и промежуточными импульсами, будем начальный импульс рассматривать как промежуточный, обозначать его номером $k = 1$ и рассматривать перелет типа *в* как перелет типа *б*.

В случае перелетов типа *б* прикладываемые импульсы описываются соотношениями (7.1.20)–(7.1.22). Эти соотношения следует дополнить равенством (7.1.14), которое в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{N-1} \Delta V_k = \frac{1}{4} |\Delta r(\varphi_N)|. \quad (7.1.26)$$

Равенство (7.1.26) является единственным соотношением, служащим для определения ΔV_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$. Чем больше угловая дальность перелета, тем больше произвол в определении этих величин. Из равенства (7.1.21) следует, что при $\pi \leq \varphi_N - \varphi_0 < 3\pi$ может быть только один импульс. В этом случае величина его определяется однозначно. При $3\pi \leq \varphi_N - \varphi_0 < 5\pi$ имеется два импульса. В этом случае ΔV_1 и ΔV_2 могут иметь любое положительное значение, удовлетворяющее (7.1.26). При

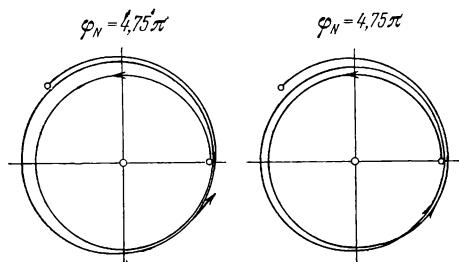


Рис. 7.1.6.

$5\pi \leq \varphi_N - \varphi_0 < 7\pi$ может быть три импульса, и т. д. Таким образом, при достаточно больших угловых дальностях существуют семейства изоэнергетических (в смысле энергетики) перелетов, в которых один перелет отличается от другого распределением энергии между промежуточными импульсами. Минимальное необходимое количество импульсов для каждого из рассмотренных перелетов равняется единице.

После того как величины ΔV_k определены, компоненты импульсов, согласно (7.1.8), (7.1.9) и (7.1.21), могут быть вычислены по формулам

$$\Delta V_{rk} = 0, \quad \Delta V_{\tau k} = \Delta V_k \frac{\Delta r(\varphi_N)}{|\Delta r(\varphi_N)|}. \quad (7.1.27)$$

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 7.1.6 построены примеры возможных перелетов с круговой орбиты при $\varphi_0 = 0$ в точку с угловой дальностью $\varphi_N = 4,75\pi$. В левой части этого рисунка изображен перелет, при котором вся необходимая энергетика вкладывается в один импульс, а в правой — перелет, при котором энергетика распределена поровну между двумя возможными в этом случае импульсами. В обоих случаях при $0 < \varphi < 1,75\pi$ полет происходит по исходной круговой орбите, после чего при $\varphi = 1,75\pi$ сообщаются импульсы. Из-за того, что орбита круговая, траектория перелета состоит из гомановских полуэллипсов.

7.1.3. Результаты исследования пространственных перелетов. Аналогичный анализ был проведен и для случая пространственных перелетов с орбиты в точку, не лежащую в ее плоскости.

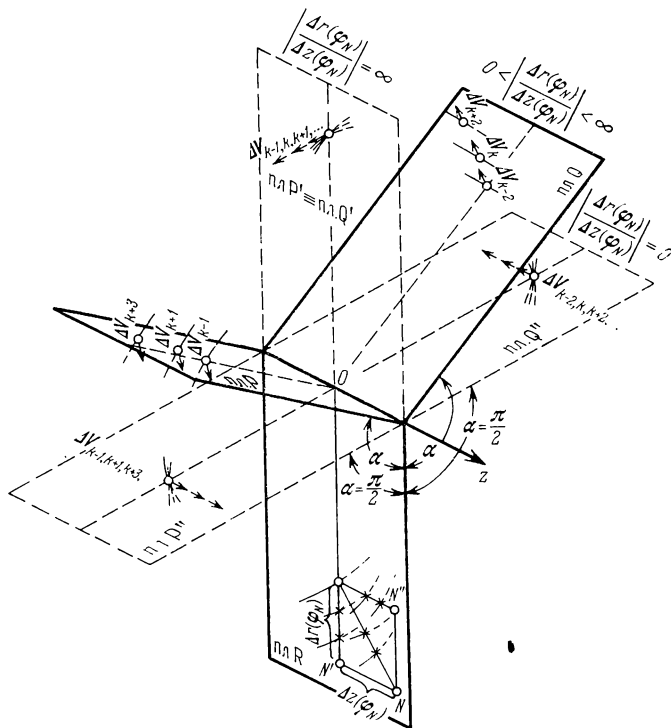


Рис. 7.1.7.

Такой анализ был проведен на базе уравнений (7.1.4), (7.1.5) и (7.1.2). Его результаты представлены на рис. 7.1.7. Установлено, что наиболее экономичные перелеты осуществляются с помощью различного сочетания начального

импульса, прикладываемого при $\varphi = \varphi_0$, и промежуточных импульсов, все точки приложения которых лежат в двух фиксированных в пространстве полуплоскостях P и Q , ограниченных осью координат z , проходящей через центр притяжения перпендикулярно плоскости исходной орбиты. Радиальные плоскости P и Q определенным образом ориентированы относительно радиальной плоскости R , в которой расположена конечная точка перелета. Двугранные углы между плоскостями R и P , Q и R равны и обозначены через α . Эти углы зависят от величины отношения $|\Delta r(\varphi_N)/\Delta z(\varphi_N)|$. При плоских перелетах ($\Delta z(\varphi_N) = 0$) плоскости P и Q совпадают, а при боковых перелетах ($\Delta r(\varphi_N) = 0$) диаметрально противоположны. Штрихами обозначены предельные положения плоскостей P и Q . Зависимость угла α от отношения $|\Delta r(\varphi_N)/\Delta z(\varphi_N)|$ изображена на рис. 7.1.8.

При угловых дальностях $\varphi_N - \varphi_0 \leq \alpha$ оптимальный перелет осуществляется единственным образом с помощью импульса, прикладываемого при $\varphi = \varphi_0$. При больших угловых дальностях

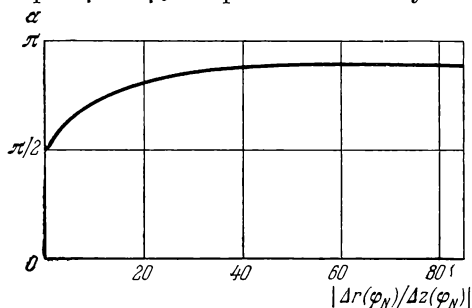


Рис. 7.1.8.

возможны как одноимпульсный перелет с импульсом при $\varphi = \varphi_0$, так и, в общем случае, семейство многоимпульсных изоэнергетических перелетов с промежуточными импульсами, которые являются более экономичными и при $\Delta z(\varphi_N) \neq 0$ изменяют плоскость движения.

В случае перелетов этого семейства при угловых дальностях, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi_N - \varphi_0 &> \alpha, \\ \varphi_N - \varphi_0 &\neq \alpha + 2\pi s, \\ \varphi_N - \varphi_0 &\neq 2\pi(s+1) - \alpha, \\ s &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.1.28)$$

импульс в начальный момент не прикладывается и до момента приложения первого промежуточного импульса движение происходит по исходной орбите (задержка старта). Промежуточные

импульсы прикладываются в точках пересечения переходных орбит с плоскостями P и Q , по два импульса за каждый оборот аппарата относительно центра притяжения. Только при плоских перелетах промежуточные импульсы прикладываются в точке, диаметрально противоположной конечной точке перелета, по одному импульсу в течение каждого оборота (см. рис. 7.1.7).

Кроме того, при некоторых значениях $|\Delta r(\varphi_N)/\Delta z(\varphi_N)|$ и $\varphi_N - \varphi_0$, наряду с указанным семейством перелетов, возможно другое семейство многоимпульсных изоэнергетических перелетов, осуществляемых с помощью импульса, прикладываемого при $\varphi = \varphi_0$, и плоских промежуточных импульсов — импульсов, не изменяющих плоскости движения. При этом первый импульс, деформируя орбиту, поворачивает ее плоскость до прохождения через конечную точку перелета N . Затем промежуточные импульсы, прикладываемые в точке, диаметрально противоположной точке N , завершают деформацию орбиты до попадания в конечную точку перелета. Оказывается, что перелеты последнего семейства экономичнее одноимпульсных перелетов с импульсом при $\varphi = \varphi_0$, но менее экономичны по сравнению с перелетами первого семейства.

Характеристическая скорость ΔV_0 оптимальных перелетов с единственным импульсом при $\varphi = \varphi_0$ определяется по формуле

$$\Delta V_0 = \frac{1}{|\sin(\varphi_N - \varphi_0)|} \sqrt{\frac{\Delta r^2(\varphi_N) + \left[1 + 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right)\right] \Delta z^2(\varphi_N)}{1 + 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}\right)}}. \quad (7.1.29)$$

График этой зависимости представлен на рис. 7.1.9. Видно, что при заданных $\Delta r(\varphi_N)$ и $\Delta z(\varphi_N)$ величина ΔV_0 существенно зависит от угловой дальности $\varphi_N - \varphi_0$. Оказывается, что при угловых дальностях

$$\varphi_N - \varphi_0 = \pi + 2\pi s, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

при которых плоские одноимпульсные перелеты наиболее экономичны, пространственные одноимпульсные перелеты наименее экономичны.

Характеристическая скорость ΔV_x первого семейства перелетов с промежуточными импульсами не зависит от угловой дальности $\varphi_N - \varphi_0$ и равна наименьшему из возможных значений ΔV_0 при тех же значениях $\Delta r(\varphi_N)$ и $\Delta z(\varphi_N)$. Минимально необходимое значение характеристической скорости ΔV_x , отнесенное к $\sqrt{\Delta r^2(\varphi_N) + \Delta z^2(\varphi_N)}$, в зависимости от угловой дальности при некоторых фиксированных значениях $|\Delta r(\varphi_N)/\Delta z(\varphi_N)|$

представлено на рис. 7.1.10. Следует обратить внимание на то, что с увеличением «пространственности» перелета ($|\Delta r(\varphi_N)|/|\Delta z(\varphi_N)| \rightarrow 0$) и увеличением расстояния конечной точки перелета от исходной орбиты ($\sqrt{\Delta r^2(\varphi_N) + \Delta z^2(\varphi_N)}$) потребное значение ΔV_Σ возрастает. Поэтому в случае, когда положение конечной точки перелета относительно исходной орбиты изменяется, для снижения потребного значения ΔV_Σ при выборе момента старта

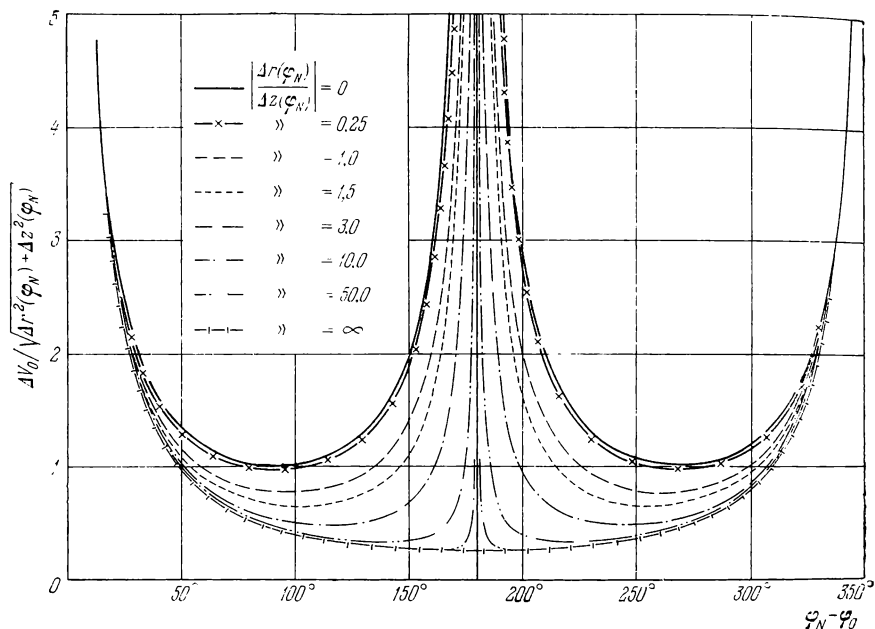


Рис. 7.1.9.

необходимо учитывать это возрастание. Диаграмма распределения потребных значений ΔV_Σ , отнесенных к $\sqrt{\Delta r^2(\varphi_N) + \Delta z^2(\varphi_N)}$, в зависимости от угла β наклона отрезка, соединяющего конечную точку перелета с точкой исходной орбиты при $\varphi = \varphi_N$, представлена на рис. 7.1.11. Видно, что наибольшее значение ΔV_Σ достигается при боковых перелетах, когда $\beta = 90^\circ$.

При уменьшении угловой дальности перелета в диапазоне $0 \leq \varphi_N - \varphi_0 \leq \alpha$ величина потребной характеристической скорости увеличивается от значений, необходимых для перелетов с промежуточными импульсами, до значений, сравнимых с круговой скоростью. В то же время при $\varphi_N - \varphi_0 = \alpha$ одноимпульсный перелет по экономичности не уступает многоимпульсному

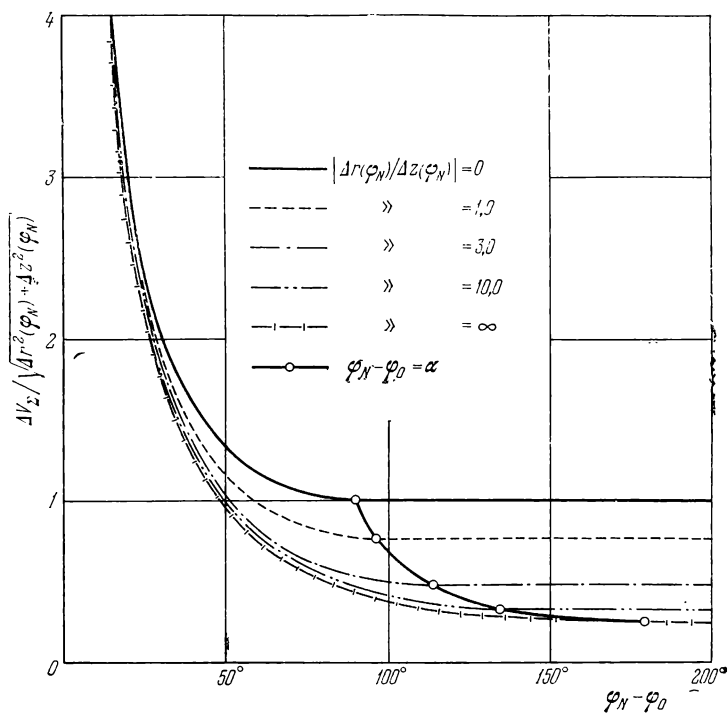


Рис. 7.1.10.

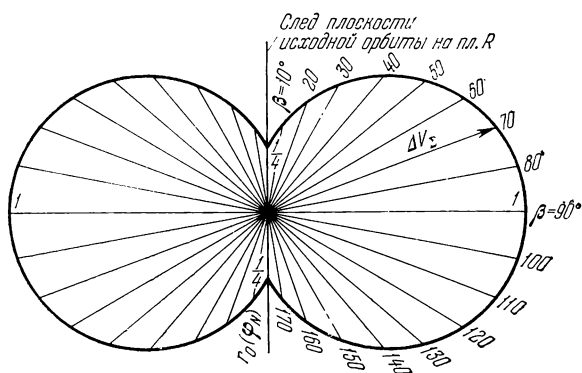


Рис. 7.1.11.

перелетам (при прочих равных условиях). На практике обычно желательны небольшие угловые дальности. В этом случае можно ориентироваться на одноимпульсный перелет с угловой дальностью $\varphi_N - \varphi_0 = \alpha$.

§ 7.2. Перелеты между близкими околокруговыми компланарными орбитами

7.2.1. Исходные соотношения. Рассмотрим задачу об оптимальных перелетах между эллиптическими орбитами, расположенными в близкой окрестности некоторой круговой орбиты. В отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, угловые положения начала $\varphi = \varphi_0$ и конца перелета $\varphi = \varphi_N$ будем считать варьируемыми параметрами. Таким образом, целью настоящего параграфа будет нахождение перелетов, требующих $\min \min \Delta V_z$ по сравнению со всеми возможными перелетами между заданными орбитами. В случае задачи о перелете с орбиты в точку варьируемым параметром можно было бы считать угловое положение старта φ_0 . В этом случае $\min \min \Delta V_z$, как это было показано выше, достигается при $\varphi_N - \varphi_0 = \alpha$, где угол α определяется величиной отношения $|\Delta r(\varphi_N)/\Delta z(\varphi_N)|$ (см. рис. 7.1.8). В случае плоских перелетов угол α равняется π .

Все исследование, как и ранее, ведется с учетом лишь малых величин первого порядка. С этой точностью уравнения начальной и конечной орбит могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} r_0(\varphi) &= p_0 - r_{cp} e_0 \cos(\varphi - \varphi_{\pi 0}), \\ r_{N+1}(\varphi) &= p_{N+1} - r_{cp} e_{N+1} \cos(\varphi - \varphi_{\pi, N+1}), \end{aligned} \right\} \quad (7.2.1)$$

где p , e , φ_π — фокальный параметр, эксцентриситет и угловое положение перигея соответственно, индексом 0 обозначаются параметры начальной орбиты, а индексом $N+1$ — параметры конечной орбиты. Все входящие в (7.2.1) величины размерны.

Назовем разность

$$\Delta r(\varphi) = r_{N+1}(\varphi) - r_0(\varphi) \quad (7.2.2)$$

относительным расстоянием между орбитами. С использованием (7.2.1) выражение для $\Delta r(\varphi)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta r(\varphi) &= r_{cp} (\Delta_0 + \Delta_c \cos \varphi + \Delta_s \sin \varphi) = \\ &= r_{cp} \left[\Delta_0 + \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2} \cos(\varphi - \varphi_{\max}) \right]. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{p_{N+1} - p_0}{r_{cp}}, \quad \Delta_c = e_0 \cos \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \cos \varphi_{\pi, N+1}, \\ \Delta_s &= e_0 \sin \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \sin \varphi_{\pi, N+1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

Относительное расстояние при некоторых $\varphi = \varphi_{\max}$ и $\varphi = \varphi_{\min}$ достигает соответственно максимального и минимального значений. Выражения, определяющие $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{\max} &= \frac{\Delta_s}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, \quad \cos \varphi_{\max} = \frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, \\ \varphi_{\min} &= \varphi_{\max} + \pi. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.5)$$

Чтобы перейти к безразмерным переменным, достаточно, очевидно, в (7.2.3) отбросить сомножитель $r_{\text{ср}}$.

Соотношения, обеспечивающие выполнение граничных условий в задаче о переходе между орбитами, были получены в § 6.3 и для случая плоского движения записываются в виде (см. формулы (6.3.11))

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^N \Delta V_{\tau k} &= \Delta_0, \\ \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2 \Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) &= -\Delta_c, \\ \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - 2 \Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k) &= \Delta_s. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6)$$

Наличие этих трех условий является следствием того, что в рассматриваемой задаче в конце накладываются ограничения как на координату, так и на компоненты вектора скорости.

Так же как и ранее, будем минимизировать характеристическую скорость ΔV_{Σ} , которая определяется выражением (6.3.12), при наличии связей (7.2.6). Тогда функция Лагранжа записывается в виде

$$\begin{aligned} L = \sum_{k=0}^N \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2} + \lambda_1 \sum_{k=0}^N 2 \Delta V_{\tau k} + \\ + \lambda_2 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2 \Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) + \\ + \lambda_3 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - 2 \Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k), \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — множители Лагранжа. Вычисляя частные производные от L по $\Delta V_{rk}, \Delta V_{\tau k}$ и $\varphi_k, k = 0, 1, \dots, N$, и приравнявая

их нулю, получим систему экстремальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + \lambda_2 \sin \varphi_k + \lambda_3 \cos \varphi_k &= 0, \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2(\lambda_1 + \lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k) &= 0, \\ \Delta V_{rk}(\lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k) - 2\Delta V_{\tau k}(\lambda_2 \sin \varphi_k + \lambda_3 \cos \varphi_k) &= 0, \\ \Delta V_k &= \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2}, \\ k &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$

Обозначим $\lambda = \lambda_1$ и введем вместо λ_2, λ_3 новые параметры v и δ с помощью формул

$$v = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad \sin \delta = \frac{\lambda_2}{v}, \quad \cos \delta = \frac{\lambda_3}{v}, \quad (7.2.9)$$

что позволяет записать (7.2.8) в более компактной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + v \cos(\varphi_k - \delta) &= 0, \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2[\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] &= 0, \\ v[\Delta V_{rk} \sin(\varphi_k - \delta) + 2\Delta V_{\tau k} \cos(\varphi_k - \delta)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.10)$$

Для определения λ, v и δ следует использовать граничные условия (7.2.6), с учетом которых общее число уравнений, равное $(3N+6)$, будет равно числу неизвестных $\Delta V_{rk}, \Delta V_{\tau k}, \varphi_k, k=0, 1, \dots, N, \lambda, v$ и δ . Несмотря на это, в исследуемой задаче, так же как и в рассмотренной выше, вообще говоря, возможно бесконечное количество решений. В этом нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были приведены в начале предыдущего параграфа. Исключая из последнего из равенств (7.2.10) ΔV_{rk} и $\Delta V_{\tau k}$ с помощью двух предыдущих, будем иметь

$$v \cos(\varphi_k - \delta) [4\lambda - 3v \sin(\varphi_k - \delta)] = 0, \quad k=0, 1, \dots, N. \quad (7.2.11)$$

7.2.2. Анализ оптимальных перелетов. Перейдем к решению полученных уравнений. При $v=0$ равенство (7.2.11) удовлетворяется при произвольных значениях φ_k . В этом случае экстремальные уравнения не определяют моментов приложения импульсов. Этот случай является простейшим и будет рассмотрен

в первую очередь. Очевидно, тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{rk} &= 0, & \Delta V_{\tau k} &= -2\lambda \Delta V_k, \\ \Delta V_k &= |\Delta V_{\tau k}|, & k &= 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12)$$

откуда следует, что все импульсы трансверсальные и имеют один и тот же знак, т. е. все импульсы либо разгоняющие, либо тормозящие. Из равенств (7.2.12) имеем

$$\lambda = -\frac{1}{2} \operatorname{sign} \Delta V_{\tau k}. \quad (7.2.13)$$

Воспользуемся далее граничными условиями (7.2.6), которые с учетом (7.2.12) и (7.2.13) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^N \Delta V_k = -\frac{\Delta_0}{4\lambda} = \frac{\Delta_0}{2 \operatorname{sign} \Delta V_{\tau k}} \geq 0, \quad (7.2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^N \Delta V_k \cos \varphi_k &= \frac{\Delta_c}{4\lambda}, \\ \sum_{k=0}^N \Delta V_k \sin \varphi_k &= \frac{\Delta_s}{4\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.15)$$

Так как $\Delta V_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, N$, то из (7.2.14) следует: $\operatorname{sign} \Delta V_{\tau k} = \operatorname{sign} \Delta_0$,

$$k = 0, 1, \dots, N, \quad (7.2.16)$$

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{|\Delta_0|}{2}. \quad (7.2.17)$$

Обратим внимание на то, что ΔV_{Σ} в рассматриваемом случае зависит только от разности фокальных параметров эллипсов $\Delta_0 = \frac{p_{N+1} - p_2}{r_{\text{ср}}}$ и не зависит от Δ_s и Δ_c .

Система уравнений (7.2.14), (7.2.15) допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим на плоскости (рис. 7.2.1) ломаную линию, состоящую из отрезков с длинами, равными $\Delta V_0, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N$, которые наклонены к оси абсцисс соответственно под углами $\varphi_0, \dots, \varphi_N$. Тогда решение системы (7.2.14), (7.2.15), очевидно, эквивалентно построению такой ломаной линии, что сумма длин всех отрезков равняется $|\Delta_0|/2$, сумма проекций всех отрезков на ось абсцисс

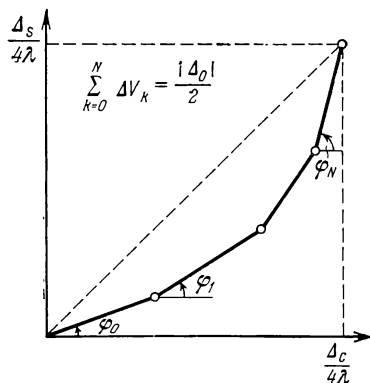


Рис. 7.2.1.

равняется $\Delta_c/4\lambda$, а сумма проекций всех отрезков на ось ординат равняется $\Delta_s/4\lambda$. Эти геометрические соображения целесообразно использовать для непосредственного решения системы уравнений (7.2.14), (7.2.15) и построения оптимального перелета в рассматриваемом случае. Указанную ломаную линию можно построить лишь в случае, когда сумма длин ее отрезков $|\Delta_0|/2$ превосходит расстояние от начала координат до точки с координатами $(\Delta_c/4\lambda, \Delta_s/4\lambda)$. Таким образом, условие существования оптимальных перелетов в случае $v = 0$ имеет вид

$$|\Delta_0| \geq \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}. \quad (7.2.18)$$

В случае, когда это неравенство выполняется, произвол в определении семейства изоэнергетических оптимальных перелетов оказывается большим, чем в случае задачи, рассмотренной в § 7.1, так как здесь в общем случае удается перераспределить не только приращения характеристической скорости между импульсами, как это было ранее, но возможно также произвольно выбирать моменты приложения импульсов и количество импульсов.

Условие (7.2.18) позволяет сразу указать класс начальных и конечных орбит, между которыми могут быть реализованы рассмотренные оптимальные перелеты. При условии (7.2.18) относительное расстояние (7.2.3) — знакопостоянная функция. Это значит, что начальная и конечная орбиты не пересекаются, т. е. рассмотренное семейство решений системы экстремальных уравнений и граничных условий соответствует перелетам между непересекающимися орбитами.

Остановимся на вопросе о минимально допустимом количестве импульсов для перелета между непересекающимися орбитами. Из схемы, приведенной на рис. 7.2.1, следует, что одноимпульсный перелет возможен лишь тогда, когда неравенство (7.2.18) обращается в равенство и начальная и конечная орбиты имеют общую точку. В этом случае из (7.2.14) — (7.2.17) следует, что

$$\cos \varphi_0 = -\frac{\Delta_c}{\Delta_0}, \quad \sin \varphi_0 = -\frac{\Delta_s}{\Delta_0}. \quad (7.2.19)$$

Из сопоставления (7.2.19) и (7.2.3) следует, что $\Delta r(\varphi_0) = 0$, т. е. импульс прикладывается в общей точке орбит. Этот результат является вполне очевидным в силу того, что рассматривается одноимпульсный перелет. В общем случае, когда начальная и конечная орбиты не имеют общих точек, из схемы, приведенной на рис. 7.2.1, следует, что для осуществления перелета необходимо по крайней мере два импульса.

Перейдем к исследованию случая, когда $v > 0$. Рассмотрим прежде всего уравнение (7.2.11), определяющее моменты при-

ложения импульсов. При $\nu > 0$ оно распадается на следующие два уравнения:

$$\cos(\varphi_k - \delta) = 0, \quad (7.2.20)$$

$$\sin(\varphi_k - \delta) = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{\nu}. \quad (7.2.21)$$

Эти уравнения имеют 4 группы решений:

$$\varphi_{k_1} = \delta + \frac{\pi}{2} + 2\pi s_1, \quad (7.2.22)$$

$$\varphi_{k_2} = \delta + \frac{3}{2} \pi + 2\pi s_2, \quad (7.2.23)$$

$$\varphi_{k_3} = \delta + \arcsin\left(\frac{4\lambda}{3\nu}\right) + 2\pi s_3, \quad (7.2.24)$$

$$\varphi_{k_4} = \delta - \arcsin\left(\frac{4\lambda}{3\nu}\right) + \pi + 2\pi s_4, \quad (7.2.25)$$

где через s_1, s_2, s_3 и s_4 обозначены некоторые целые числа. Импульсы, прикладываемые в точках $\varphi = \varphi_{k_1}$, $\varphi = \varphi_{k_2}$, $\varphi = \varphi_{k_3}$ и $\varphi = \varphi_{k_4}$ будем называть соответственно импульсами 1-й, 2-й, 3-й и 4-й групп, а их компоненты обозначать дополнительными индексами 1, 2, 3 и 4 внизу. Экстремальные уравнения (7.2.10) записываются так:

для импульсов 1-й группы

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{rk_1} &= 0, \\ \Delta V_{\tau k_1} &= -2\Delta V_{k_1}(\lambda - \nu), \\ k_1 &= 1, 2, \dots, N_1; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.26)$$

для импульсов 2-й группы

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{rk_2} &= 0, \\ \Delta V_{\tau k_2} &= -2\Delta V_{k_2}(\lambda + \nu), \\ k_2 &= 1, 2, \dots, N_2; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.27)$$

для импульсов 3-й группы

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{rk_3} &= -\Delta V_{k_3} \nu \cos(\varphi_{k_3} - \delta) = -\Delta V_{k_3} \nu \sqrt{1 - \frac{16\lambda^2}{9\nu^2}}, \\ \Delta V_{\tau k_3} &= \frac{1}{2} \Delta V_{k_3} \nu \sin(\varphi_{k_3} - \delta) = \frac{2}{3} \Delta V_{k_3} \lambda, \\ k_3 &= 1, 2, \dots, N_3; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.28)$$

для импульсов 4-й группы

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{\tau k_4} &= -\Delta V_{k_4} v \cos(\varphi_{k_4} - \delta) = \Delta V_{k_4} v \sqrt{1 - \frac{16\lambda^2}{9v^2}}, \\ \Delta V_{\tau k_4} &= \frac{1}{2} \Delta V_{k_4} v \sin(\varphi_{k_4} - \delta) = \frac{2}{3} \Delta V_{k_4} \lambda, \\ k_4 &= 1, 2, \dots, N_4. \end{aligned} \right\} (7.2.29)$$

Через N_1 , N_2 , N_3 и N_4 здесь обозначено соответственно количество импульсов каждой группы. Очевидно, что

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N + 1. \quad (7.2.30)$$

В силу последнего из равенств (7.2.8) из (7.2.26)–(7.2.29) следует:

для импульсов 1-й группы

$$\left. \begin{aligned} \lambda - v &= \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_1} < 0, \\ \lambda - v &= -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_1} > 0; \end{aligned} \right\} (7.2.31)$$

для импульсов 2-й группы

$$\left. \begin{aligned} \lambda + v &= -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_2} > 0, \\ \lambda + v &= \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_2} < 0; \end{aligned} \right\} (7.2.32)$$

для импульсов 3-й и 4-й групп

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \sqrt{3(v^2 - 1)} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_{3,4}} > 0, \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \sqrt{3(v^2 - 1)} \quad \text{при} \quad \Delta V_{\tau k_{3,4}} < 0. \end{aligned} \right\} (7.2.33)$$

С помощью (7.2.33) подкоренные выражения в равенствах (7.2.28) и (7.2.29) могут быть преобразованы к виду

$$1 - \frac{16\lambda^2}{9v^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{v^2} - 1 \right). \quad (7.2.34)$$

Из условия положительности подкоренных выражений в (7.2.28), (7.2.29) и (7.2.33) параметр v , в случае наличия импульсов 3-й и 4-й групп, должен быть заключен в промежуток

$$1, 0 \leq v \leq 2, 0. \quad (7.2.35)$$

Следует обратить внимание на то, что при фиксированных значениях λ и ν из (7.2.26) — (7.2.33) следует, что $\Delta V_{\tau k_i}$ и $\Delta V_{\tau k_i}$ для каждой из указанных групп импульсов имеют один и тот же знак для всех возможных значений k .

Равенства (7.2.31) — (7.2.33) для одного и того же перелета должны удовлетворяться при одних и тех же значениях λ и ν . Чтобы выяснить, какие группы импульсов соответствуют оптимальным перелетам, следует рассмотреть условия совместности различных групп этих равенств. Зависимости λ от ν , построенные в соответствии с равенствами (7.2.31) — (7.2.33), изображены на рис. 7.2.2. Около каждой линии на этом рисунке поставлены цифры, обозначающие номер группы импульсов. Перелеты, содержащие импульсы различных групп, соответствуют точкам A, B, C пересечения кривых на рис. 7.2.2. Точки пересечения при $\nu = 0$ в расчет не принимаются, так как этот случай был рассмотрен ранее. Около каждой из точек пересечения указаны номера групп импульсов, которые могут существовать совместно, и под ними знаки $\Delta V_{\tau k_i}$, которые указаны в соответствии с равенствами (7.2.31) — (7.2.33). Помимо перелетов, которые соответствуют точкам пересечения, очевидно, возможны перелеты, состоящие из импульсов какой-либо одной из групп.

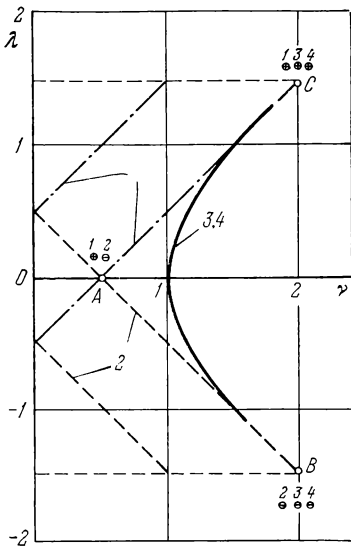


Рис. 7.2.2.

Переходим к последовательному рассмотрению возможных типов перелетов. Начнем с перелетов, определяемых импульсами 1-й и 2-й групп, соответствующих точке A на рис. 7.2.2. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{\tau k_1} &> 0, & k_1 &= 1, 2, \dots, N_1, \\ \Delta V_{\tau k_2} &< 0, & k_2 &= 1, 2, \dots, N_2, \\ \lambda - \nu &= -\frac{1}{2}, \\ \lambda + \nu &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.36)$$

С учетом этих соотношений и равенств (7.2.22), (7.2.23), (7.2.26), (7.2.27) граничные условия (7.2.6) могут быть записаны

так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2} &= \frac{\Delta_0}{2}, \\ \sin \delta \left(\sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2} \right) &= \frac{\Delta_c}{2}, \\ \cos \delta \left(\sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2} \right) &= -\frac{\Delta_s}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.37)$$

Эта система уравнений позволяет определить δ , $\sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1}$ и $\sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2}$. Решение системы уравнений (7.2.37) может быть представлено в виде

$$\cos \delta = \frac{-\Delta_s}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, \quad \sin \delta = \frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, \quad (7.2.38)$$

$$\sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}, \quad (7.2.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1} &= \frac{1}{4} (\Delta_0 + \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}), \\ \sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2} &= \frac{1}{4} (-\Delta_0 + \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.40)$$

Выражения (6.3.12) и (7.2.39) дают приращение характеристической скорости для рассматриваемого типа перелета:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}. \quad (7.2.41)$$

Из неотрицательности левых частей равенств (7.2.40) вытекает требование существования рассматриваемого типа перелета:

$$\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2} \geq |\Delta_0|. \quad (7.2.42)$$

Таким образом, область существования таких перелетов дополняет собой область существования перелетов, которые получают при $v = 0$ (см. неравенство (7.2.18)). При условии (7.2.42) относительное расстояние $\Delta r(\varphi)$ (см. равенство (7.2.3)) дважды в течение каждого оборота изменяет знак, т. е. рассмотренный перелет относится к случаю пересекающихся начальной и конечной орбит.

В рассматриваемом случае, когда $\Delta V_{\tau k_1} > 0$, $\Delta V_{\tau k_2} < 0$, импульсы 1-й группы являются разгоняющими импульсами, а импульсы 2-й группы — тормозящими. Из сопоставления формул (7.2.38) с формулами (7.2.5) и (7.2.22), (7.2.23) следует, что тормозящие импульсы прикладываются при $\varphi = \varphi_{\max} + 2\pi s_1$, когда $\Delta r(\varphi)$ достигает максимума, а разгоняющие импульсы прикладываются при $\varphi = \varphi_{\max} + 2\pi s_2$, когда $\Delta r(\varphi)$ имеет минимальное значение. Этот результат является обобщением известных результатов для соосных орбит (см. работы Смита [1], Тинга Лу [1, 2], Хорнера [1]). Следует отметить, что в соответствии с (7.2.26) и (7.2.27) все импульсы в рассматриваемом типе перелетов являются трансверсальными.

Оптимальные перелеты могут быть и многооборотными. При этом интенсивности импульсов, прикладываемых на каждом обороте, должны быть выбраны в соответствии с равенствами (7.2.40). Тормозящие и разгоняющие импульсы обязательно чередуются, причем вначале может прикладываться либо тормозящий импульс, либо разгоняющий. Этот результат, очевидно, является следствием линеаризованного подхода к задаче.

Перейдем к рассмотрению других возможных типов перелетов. Перелеты, определяемые импульсами только либо 1-й, либо 2-й групп, являются частными случаями уже рассмотренных. В этом нетрудно убедиться, если положить равной нулю либо $\sum_{k_1=1}^{N_1} \Delta V_{k_1}$, либо $\sum_{k_2=1}^{N_2} \Delta V_{k_2}$. В силу (7.2.40) они реализуются лишь в случаях, когда неравенство (7.2.42) превращается в равенство. Более подробный анализ показывает, что эти перелеты ничем не отличаются от рассмотренных выше перелетов, которые получаются при $v = 0$.

Рассмотрим далее перелеты, которые определяются импульсами 2-й, 3-й и 4-й групп либо импульсами 1-й, 3-й и 4-й групп. Эти перелеты соответствуют на рис. 7.2.2 точкам В и С. Пусть для определенности $\Delta_0 > 0$. Тогда, в силу первого из равенств (7.2.6), $\Delta V_{\tau k} > 0$, $k = 0, 1, \dots, N$, и следует рассматривать перелет, соответствующий точке С с координатами

$$v = 2, \quad \lambda = \frac{3}{2}. \quad (7.2.43)$$

При таких значениях λ и v равенства (7.2.22), (7.2.24), (7.2.25), (7.2.26), (7.2.28) и (7.2.29) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{k_1} &= \delta + \frac{\pi}{2} + 2\pi s_1, \quad \Delta V_{rk_1} = 0, \Delta V_{\tau k_1} = \Delta V_{k_1}, \\ \varphi_{k_{3,4}} &= \delta + \frac{\pi}{2} + 2\pi s_{3,4}, \\ \Delta V_{rk_{3,4}} &= 0, \quad \Delta V_{\tau k_{3,4}} = \Delta V_{k_{3,4}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.44)$$

Из этих равенств видно, что импульсы 3-й и 4-й групп совпадают с импульсами 1-й группы. Таким образом, рассматриваемый перелет, по существу, соответствует только импульсам 1-й группы и рассмотрен выше. Аналогичный результат получается также и в случае перелета, соответствующего точке B на рис. 7.2.2.

Перейдем далее к рассмотрению перелетов, определяемых импульсами 3-й и 4-й групп. В этом случае с помощью (7.2.28), (7.2.29) граничные условия (7.2.6) могут быть записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}\lambda \sum_{k=0}^N \Delta V_k &= \Delta_0, \\ v \sin \delta \sum_{k=0}^N \Delta V_k &= \Delta_c, \\ v \cos \delta \sum_{k=0}^N \Delta V_k &= -\Delta_s. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.45)$$

К этим уравнениям следует добавить одно из равенств (7.2.33), которое, с учетом первого из равенств (7.2.45), можно записать в виде

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(v^2 - 1)}}{2} \operatorname{sign} \Delta_0. \quad (7.2.46)$$

Четыре уравнения (7.2.45), (7.2.46) позволяют определить четыре неизвестных: v , λ , δ и $\sum_{k=0}^N \Delta V_k$. Установим прежде всего условия существования рассматриваемого перелета. Возводя все равенства (7.2.45) в квадрат и складывая затем последние два из них, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{16}{9} \lambda^2 \left(\sum_{k=0}^N \Delta V_k \right)^2 &= \Delta_0^2, \\ v^2 \left(\sum_{k=0}^N \Delta V_k \right)^2 &= \Delta_c^2 + \Delta_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.47)$$

Из (7.2.24) и (7.2.25) следует, что при наличии импульсов 3-й и 4-й групп должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{4\lambda}{3v} \right| \leq 1.$$

В силу этого и (7.2.47) можно сказать, что рассматриваемые перелеты, как и перелеты, соответствующие импульсам 1-й и 2-й групп, существуют при выполнении условия (7.2.42). Таким образом, этот класс перелетов, так же как и перелеты, состоящие

из импульсов 1-й и 2-й групп, относится к случаю пересекающихся начальной и конечной орбит. С тем чтобы определить, какое из двух указанных семейств изоэнергетических перелетов между пересекающимися орбитами требует меньшей характеристической скорости, вычислим $\Delta V_{\Sigma_{3,4}}$ — величину характеристической скорости для перелетов, состоящих из импульсов 3-й и 4-й групп. Из (7.2.46) и (7.2.47) имеем

$$\Delta V_{\Sigma_{3,4}} = \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2 - \frac{3}{4} \Delta_0^2}. \quad (7.2.48)$$

Чтобы сравнить величину $\Delta V_{\Sigma_{3,4}}$ с величиной $\Delta V_{\Sigma_{1,2}}$, определенной выше для перелетов, соответствующих импульсам 1-й и 2-й групп (см. формулу (7.2.44)), составим отношение

$$\frac{\Delta V_{\Sigma_{3,4}}}{\Delta V_{\Sigma_{1,2}}} = 2 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\Delta_0^2}{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}. \quad (7.2.49)$$

В области существования рассматриваемых перелетов, которая определяется неравенством (7.2.42), отношение (7.2.49) изменяется между 1 и 2. Таким образом, перелеты, определяемые импульсами 1-й и 2-й групп, являются более экономичными, чем перелеты, определяемые импульсами 3-й и 4-й групп.

Полный анализ перелетов, соответствующих импульсам 3-й и 4-й групп, легко может быть проведен с помощью указанных выше соотношений. Не останавливаясь на этом подробно из-за того, что $\Delta V_{\Sigma_{3,4}} \geq \Delta V_{\Sigma_{1,2}}$, укажем лишь, что при таких перелетах импульсы прикладываются в точках пересечения начальной и конечной орбит.

7.2.3. Иллюстрирующие примеры.

а) Изменение фокального параметра p . В этом случае

$$\Delta_0 = \frac{\Delta p}{r_{cp}}, \quad \Delta_c = \Delta_s = 0, \quad (7.2.50)$$

выполняется неравенство (7.2.18) и, следовательно, орбиты не пересекаются. Начальная и конечная орбиты для этого случая изображены на рис. 7.2.3. Импульсы прикладываются в соответствии с равенством (7.2.14) — (7.2.17), которые с учетом (7.2.50) записываются в виде

$$\sum_{k=0}^N \Delta V_k = \frac{|\Delta_0|}{2}, \quad \sum_{k=0}^N \Delta V_k \cos \varphi_k = 0, \quad (7.2.51)$$

$$\sum_{k=0}^N \Delta V_k \sin \varphi_k = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, необходимо провести ломаную линию длиной $|\Delta_0|/2$ с концом и началом в начале координат. Для этого необходимы по крайней мере два импульса. Пользуясь геометрической интерпретацией системы уравнений (7.2.14), (7.2.15), указанной выше (см. рис. 7.2.1), при $N=1$ нетрудно получить следующие результаты:

$$\Delta V_0 = \Delta V_1 = \frac{|\Delta_0|}{4},$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \pi, \quad (7.2.52)$$

где φ_0 произвольно. В силу (7.2.16) при $\Delta p > 0$ оба импульса являются разгоняющими, а при $\Delta p < 0$ — тормозящими.

В соответствии с (7.2.17) величина характеристической скорости $\Delta V_{\Sigma p}$ для этого случая вычисляется по формуле

$$\Delta V_{\Sigma p} = \frac{|\Delta p|}{2r_{cp}}. \quad (7.2.53)$$

б) Изменение эксцентриситета e . В этом случае

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_c = -\Delta e \cos \varphi_\pi,$$

$$\Delta_s = -\Delta e \sin \varphi_\pi, \quad (7.2.54)$$

орбиты пересекаются и следует воспользоваться перелетом, который состоит из импульсов 1-й и 2-й групп. В равенствах (7.2.54) $\Delta e = e_{N+1} - e_0$, а через φ_π обозначено угловое положение перигея, одинаковое для обеих орбит. Начальная и конечная орбиты для рассматриваемого случая изображены на рис. 7.2.4. Разгоняющие импульсы прикладываются при $\varphi = \varphi_{\min} = 0$, а тормозящие — при $\varphi = \varphi_{\max} = \pi$. Величина ΔV_{Σ} потребной характеристической скорости для такого маневра, в соответствии с равенствами (7.2.54) и (7.2.41), определяется выражением

$$\Delta V_{\Sigma e} = \frac{\Delta e}{2}. \quad (7.2.55)$$

Траектория двухимпульсного перелета, реализующего изменение эксцентриситета, показана на рис. 7.2.4.

в) Изменение наклона оси аписид. Рассмотрим задачу о повороте оси аписид начальной орбиты на угол $\Delta \varphi$. Из

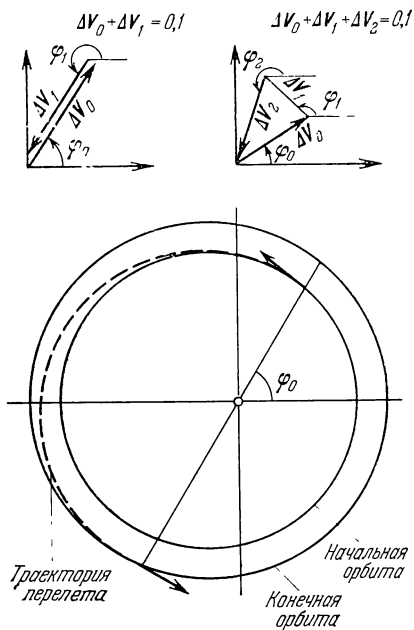


Рис. 7.2.3.

формула (7.2.4) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 = 0, \quad \Delta_c = 2e_0 \sin \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} \sin \left(\varphi_\pi + \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} \right), \\ \Delta_s = -2e_0 \sin \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} \cos \left(\varphi_\pi + \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.56)$$

В этом случае начальная и конечная орбиты пересекаются и для реализации искомого маневра следует воспользоваться тем же типом перелета, что и в предыдущем пункте. Разгоняющие импульсы

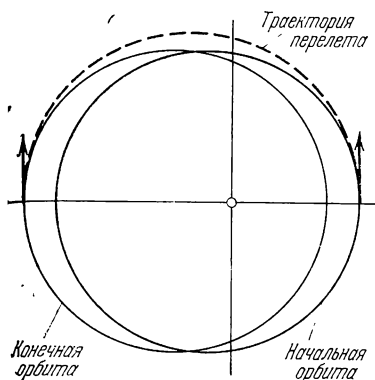


Рис. 7.2.4.

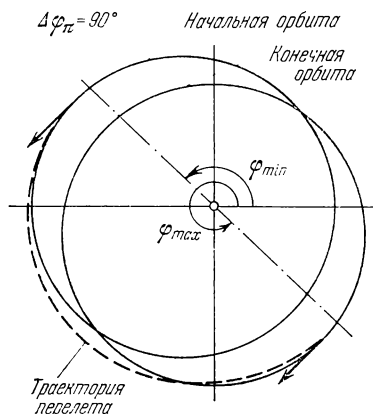


Рис. 7.2.5.

прикладываются при $\varphi = \varphi_{\min}$, а тормозящие — при $\varphi = \varphi_{\max}$. Выражения (7.2.5) для $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\max} &= \frac{3}{2} \pi + \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} + \varphi_\pi, \\ \varphi_{\min} &= \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi_\pi}{2} + \varphi_\pi \quad (0 \leq \Delta\varphi_\pi \leq 2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.57)$$

Величина потребной для такого маневра характеристической скорости $\Delta V_{\Sigma\varphi}$ в силу (7.2.56) и (7.2.41) определяется формулой

$$\Delta V_{\Sigma\varphi} = e_0 \sin \frac{\Delta\varphi_\pi}{2}. \quad (7.2.58)$$

Начальная и конечная орбиты и траектория перелета для рассматриваемого случая при $\Delta\varphi_\pi = 90^\circ$ и $\varphi_\pi = 0$ изображены на рис. 7.2.5.

Чтобы иметь возможность представить себе пределы применимости полученных результатов, сопоставим их с точным решением для хорошо изученного случая перелета между двумя круговыми орбитами (см. раздел 3.2.4, работы Гомана [1], Райдера [1]). Для него выражение (7.2.17), записанное в размерной форме,

дает

$$\frac{\Delta V_{\Sigma}}{V_{кр}} = \frac{|\Delta r|}{2r_{ср}},$$

где Δr — разность радиусов конечной и начальной орбит, а $r_{ср}$ — их полусумма. Точный расчет проведен с помощью формул, приведенных в работе Райдера [1], записанных предварительно через параметры Δr , $r_{ср}$ и $V_{кр}$ — значение круговой скорости для

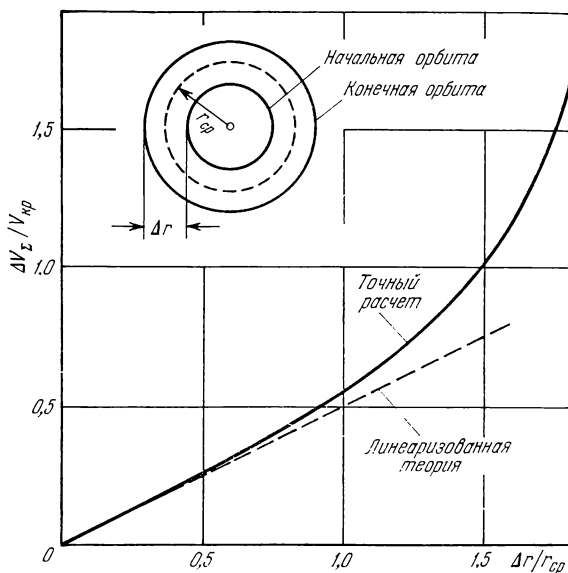


Рис. 7.2.6.

$r = r_{ср}$. Результаты точного расчета и расчета по линеаризованной теории приведены на рис. 7.2.6. Видно, что при $0 \leq \Delta r/r_{ср} \leq 0,5$ совпадение практически полное. При больших значениях $\Delta r/r_{ср}$ совпадение также достаточно удовлетворительное вплоть до значения $\Delta r/r_{ср} = 1,0$. При $\Delta r/r_{ср} = 1,0$ отношение радиусов орбит равняется 3.

§ 7.3. Исследование перелетов между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами

7.3.1. Исходные соотношения. В настоящем параграфе будет рассматриваться задача о перелетах между некомпланарными орбитами в линеаризованной постановке с оптимальным выбором моментов начала и окончания перелета. Движение будет исследоваться в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, в которой

угол φ отсчитывается от линии узлов. Угол между плоскостями орбит равен Δi и считается положительным, когда он отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть со стороны линии $\varphi = 0$. Используемая система координат и взаимное расположение орбит изображены на рис. 7.3.1. Взаимное расположение орбит полностью определяется функциями $\Delta r(\varphi)$ и $\Delta z(\varphi)$ —

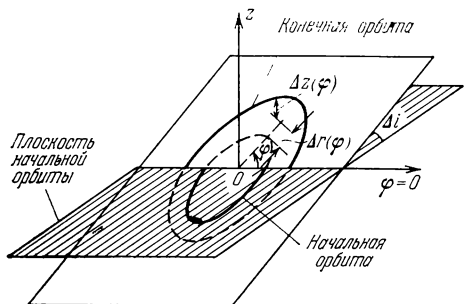


Рис. 7.3.1.

безразмерными расстояниями, отнесенными к $r_{\text{ср}}$. При отсчете угла φ от линии узлов выражения для этих функций в соответствии с (6.3.33), (7.2.2) и (7.2.3) записываются в виде

$$\Delta r(\varphi) = \Delta_0 + \Delta_c \cos \varphi + \Delta_s \sin \varphi, \quad \Delta z(\varphi) = \Delta_z \sin \varphi, \quad (7.3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{P_{N+1} - P_0}{r_{\text{ср}}}, \quad \Delta_c = e_0 \cos \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \sin \varphi_{\pi, N+1}, \\ \Delta_s &= e_0 \sin \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \sin \varphi_{\pi, N+1}, \quad \Delta_z = \Delta i. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

Все входящие в выражения для Δ_0 , Δ_c и Δ_s величины определяются так же, как в плоской задаче, и были пояснены в начале предыдущего параграфа (см. формулы (7.2.1) — (7.2.4)).

Соотношения, обеспечивающие выполнение граничных условий в рассматриваемой задаче, были выведены в § 6.3 и имеют вид (см. уравнения (6.3.11))

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^N \Delta V_{\tau k} &= \Delta_0, \quad \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2 \Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) = -\Delta_c, \\ \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - 2 \Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k) &= \Delta_s, \\ \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin \varphi_k &= 0, \quad \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \cos \varphi_k = \Delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

С учетом этих равенств и равенства (6.3.12) для ΔV_z функция Лагранжа записывается в виде

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{k=0}^N \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2} + \lambda_1 \sum_{k=0}^N 2\Delta V_{\tau k} + \\
 & + \lambda_2 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \sin \varphi_k + 2\Delta V_{\tau k} \cos \varphi_k) + \\
 & + \lambda_3 \sum_{k=0}^N (\Delta V_{rk} \cos \varphi_k - 2\Delta V_{\tau k} \sin \varphi_k) + \\
 & + \lambda_4 \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \sin \varphi_k + \lambda_5 \sum_{k=0}^N \Delta V_{zk} \cos \varphi_k, \quad (7.3.4)
 \end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ — множители Лагранжа. После дифференцирования L по $\Delta V_{rk}, \Delta V_{\tau k}, \Delta V_{zk}$ и $\varphi_k, k = 0, 1, \dots, N$, и приравнивания производных нулю получаются уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + \lambda_2 \sin \varphi_k + \lambda_3 \cos \varphi_k &= 0, \\
 \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2(\lambda_1 + \lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k) &= 0, \\
 \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} + \lambda_4 \sin \varphi_k + \lambda_5 \cos \varphi_k &= 0, \\
 \Delta V_{rk}(\lambda_2 \cos \varphi_k - \lambda_3 \sin \varphi_k) - 2\Delta V_{\tau k}(\lambda_2 \sin \varphi_k + \\
 + \lambda_3 \cos \varphi_k) + \Delta V_{zk}(\lambda_4 \cos \varphi_k - \lambda_5 \sin \varphi_k) &= 0, \\
 k = 0, 1, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

Здесь

$$\Delta V_k = \sqrt{\Delta V_{rk}^2 + \Delta V_{\tau k}^2 + \Delta V_{zk}^2}.$$

Уравнения (7.3.3) и (7.3.5) представляют собой систему из $5(N+1) + 5$ уравнений для такого же количества неизвестных $\Delta V_{rk}, \Delta V_{\tau k}, \Delta V_{zk}, \Delta V_k, \varphi_k, k = 0, 1, \dots, N$, и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$.

Обозначим $\lambda = \lambda_1$ и введем вместо $\lambda_2, \dots, \lambda_5$ новые параметры $v, \delta, \eta, \varepsilon$ с помощью формул

$$\left. \begin{aligned}
 v &= \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\
 \eta &= \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2}, \\
 \sin \delta &= \frac{\lambda_2}{v}, \quad \cos \delta = \frac{\lambda_3}{v}, \\
 \sin \varepsilon &= \frac{\lambda_4}{\eta}, \quad \cos \varepsilon = \frac{\lambda_5}{\eta},
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.6)$$

После этого система (7.3.5) записывается более компактно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk}}{\Delta V_k} + v \cos(\varphi_k - \delta) &= 0, \\ \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} + 2[\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] &= 0, \\ \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} + \eta \cos(\varphi_k - \varepsilon) &= 0, \\ v[\Delta V_{rk} \sin(\varphi_k - \delta) + 2\Delta V_{\tau k} \cos(\varphi_k - \delta)] + \\ &+ \eta \Delta V_{zk} \sin(\varphi_k - \varepsilon) = 0, \\ k &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.7)$$

Заменим в уравнениях (7.3.3) ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$ и ΔV_{zk} соответствующими соотношениями из (7.3.7). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^N [\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] \Delta V_k &= -\frac{\Delta_0}{4}, \\ \sum_{k=0}^N \{4[\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] \cos \varphi_k + v \cos(\varphi_k - \delta) \sin \varphi_k\} \Delta V_k &= \Delta_c, \\ \sum_{k=0}^N \{4[\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] \sin \varphi_k - v \cos(\varphi_k - \delta) \cos \varphi_k\} \Delta V_k &= \Delta_s, \\ \eta \sum_{k=0}^N [\cos(\varphi_k - \varepsilon) \sin \varphi_k] \Delta V_k &= 0, \\ \eta \sum_{k=0}^N [\cos(\varphi_k - \varepsilon) \cos \varphi_k] \Delta V_k &= -\Delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.8)$$

7.3.2. Правила пересчета параметров перелетов при изменении знаков констант Δ_0 , Δ_c , Δ_s и Δ_z . Наряду с параметрами Δ_0 , Δ_c , Δ_s и Δ_z далее будут использоваться параметры $\varkappa$, σ и $\varphi_{\max}$, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} \varkappa &= \frac{\Delta_0}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, & \sigma &= \frac{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}{\Delta_z}, \\ \sin \varphi_{\max} &= \frac{\Delta_s}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}, & \cos \varphi_{\max} &= \frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.9)$$

Теперь выражения (7.3.1) могут быть записаны в виде

$$\Delta r(\varphi) = \Delta_z \sigma [\varkappa + \cos(\varphi - \varphi_{\max})], \quad \Delta z(\varphi) = \Delta_z \sin \varphi. \quad (7.3.10)$$

Отсюда видно, что $\varphi_{\max}$ представляет собой такое значение φ , при котором функция $\Delta r(\varphi)$ достигает максимума. При $\kappa > 1$ проекции орбит не пересекаются, а при $\kappa < 1$ — пересекаются. При $\kappa = 1$ проекции орбит касаются в момент, когда $\varphi = \varphi_{\max} + \pi$.

Точки пересечения проекций орбит $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ определяются из равенства

$$\kappa = -\cos(\varphi^{(i)} - \varphi_{\max}), \quad i = 1, 2. \quad (7.3.11)$$

При $1 > |\kappa| > |\cos \varphi_{\max}|$ обе точки пересечения проекций орбит располагаются по одну сторону от линии узлов. При $|\kappa| = |\cos \varphi_{\max}|$ одна из точек пересечения проекций орбит находится на линии узлов, причем в этой точке пересекаются не только проекции орбит, но также и сами орбиты. При $\kappa = \pm \cos \varphi_{\max} = 0$ орбиты пересекаются в двух точках: $\varphi = 0$ и $\varphi = 180^\circ$.

Параметр σ определяет взаимное расположение орбит в пространстве. При конечных значениях κ предельный переход при $\sigma \rightarrow \infty$ соответствует переходу к плоскому случаю.

Рассмотрим далее следующую задачу. Представим себе, что нам известны параметры экстремальных перелетов при некоторых значениях Δ_0 , Δ_c , Δ_s и Δ_z . Выясним, как следует изменить это решение при изменении знаков одной или нескольких из этих констант. Рассмотрим сначала случай, когда изменяется знак только Δ_0 . Из первого уравнения системы (7.3.3) видно, что при замене Δ_0 на $-\Delta_0$ оно будет удовлетворено, если $\Delta V_{\tau k}$ заменить на $-\Delta V_{\tau k}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Второе и третье уравнения этой системы удовлетворяются, если ΔV_{rk} заменить на $-\Delta V_{rk}$ и к φ_k добавить 180° того, чтобы одновременно изменились знаки у $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$. Последние два из уравнений (7.3.3) удовлетворяются, если ΔV_{zk} заменить на $-\Delta V_{zk}$. Систематизируем это следующим образом:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \Delta_0 & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{zk} & \varphi_k \\ -\Delta_0 & -\Delta V_{\tau k} & -\Delta V_{\tau k} & -\Delta V_{zk} & \varphi_k + \pi \end{array} \right\}. \quad (7.3.12)$$

При таких преобразованиях удовлетворяются также и уравнения (7.3.5), для чего достаточно в них заменить λ_1 на $-\lambda_1$. Таким образом, при изменении знака у Δ_0 необходимо изменить направления импульсов на противоположные, а моменты их приложения сдвинуть на π .

При изменении знаков какой-либо одной из остальных констант необходимые изменения параметров перелетов определяются аналогичными рассуждениями. Опуская их, приведем сразу правила преобразований.

Изменение знака Δ_c :

$$\left. \begin{array}{ccccc} \Delta_c & \Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{zk} & \varphi_k \\ -\Delta_c & -\Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & -\Delta V_{zk} & \pi - \varphi_k \end{array} \right\} \quad (7.3.13)$$

Изменение знака Δ_s :

$$\left. \begin{array}{ccccc} \Delta_s & \Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{zk} & \varphi_k \\ -\Delta_s & -\Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{zk} & -\varphi_k \end{array} \right\} \quad (7.3.14)$$

Изменение знака Δ_z :

$$\left. \begin{array}{ccccc} \Delta_z & \Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & \Delta V_{zk} & \varphi_k \\ -\Delta_z & \Delta V_{rk} & \Delta V_{\tau k} & -\Delta V_{zk} & \varphi_k \end{array} \right\} \quad (7.3.15)$$

Здесь в верхних строках приводятся параметры исходного перелета, а в нижних — параметры перелета, получающегося при замене Δ_c на $-\Delta_c$, Δ_s на $-\Delta_s$ и Δ_z на $-\Delta_z$ соответственно. В том случае, когда изменяются знаки у нескольких из этих координат, преобразования (7.3.12) — (7.3.15) надо применять последовательно.

Полученные результаты позволяют в дальнейшем ограничиться рассмотрением случая, когда

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_0 \geq 0, \quad \Delta_c \geq 0, \quad \Delta_s \geq 0, \quad \Delta_z \geq 0, \\ \sigma \geq 0, \quad \kappa \geq 0, \quad 0 \leq \varphi_{\max} \leq 90^\circ. \end{array} \right\} \quad (7.3.16)$$

Если при этом будут найдены все решения системы (7.3.3), (7.3.5), то с помощью преобразований (7.3.12) — (7.3.15) из этих решений можно получить все решения и в случае произвольных сочетаний знаков констант Δ_0 , Δ_c , Δ_s и Δ_z . Никаких других решений у системы (7.3.3), (7.3.5) в случае, когда не выполняются условия (7.3.16), кроме тех, которые находятся таким способом, не существует. Если бы такие решения существовали, то это значило бы, что также существуют дополнительные решения и в случае, когда условия (7.3.16) выполняются. Их можно было бы найти с помощью преобразований, обратных к указанным.

7.3.3. Исследование соотношений для определения моментов приложения импульсов. Исключим из последнего уравнения системы (7.3.7) и четвертого уравнения системы (7.3.5) компоненты импульсов ΔV_{rk} , $\Delta V_{\tau k}$ и ΔV_{zk} с помощью первых трех уравнений (7.3.7), что дает

$$\left. \begin{array}{l} v \{ v \cos(\varphi_k - \delta) \sin(\varphi_k - \delta) + 4 [\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)] \times \\ \quad \times \cos(\varphi_k - \delta) \} + \eta^2 \cos(\varphi_k - \varepsilon) \sin(\varphi_k - \varepsilon) = 0, \\ v^2 \cos^2(\varphi_k - \delta) + 4 [\lambda - v \sin(\varphi_k - \delta)]^2 + \eta^2 \cos^2(\varphi_k - \varepsilon) = 1, \\ k = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right\} \quad (7.3.17)$$

Используя тригонометрические функции двойного угла, приведем уравнения (7.3.17) к виду

$$\left. \begin{aligned} [\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3\nu^2] \sin 2u_k + \eta^2 \sin 2(\delta - \varepsilon) \sin 2u_k + \\ + 8\lambda\nu \cos u_k = 0, \\ [\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3\nu^2] \cos 2u_k - \eta^2 \sin 2(\delta - \varepsilon) \sin 2u_k - \\ - 16\lambda\nu \sin u_k = 2 - 8\lambda^2 - 5\nu^2 - \eta^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.18)$$

где $u_k = \varphi_k - \delta$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициенты при $\sin 2u_k$ и $\cos 2u_k$ одновременно не обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \sqrt{[\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3\nu^2]^2 + \eta^4 \sin^2 2(\delta - \varepsilon)} = \\ &= \pm \sqrt{\eta^4 + 9\nu^4 - 6\nu^2\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon)} \neq 0. \end{aligned} \quad (7.3.19)$$

При таком условии уравнения (7.3.18) могут быть переписаны в форме

$$\begin{aligned} \sin 2(u_k + \beta) + Y \cos u_k = 0, \quad \cos 2(u_k + \beta) - 2Y \sin u_k = X, \\ k = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.3.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{2 - 5\nu^2 - 8\lambda^2 - \eta^2}{\mu}, \quad Y = \frac{8\lambda\nu}{\mu}, \\ \sin 2\beta &= \frac{\eta^2 \sin 2(\delta - \varepsilon)}{\mu}, \quad \cos 2\beta = \frac{-3\nu^2 + \eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon)}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.21)$$

Эти уравнения представляют собой параметрическое задание зависимости $Y(X, \beta)$, в которой параметром является u_k . Период уравнений (7.3.20) по u_k равен 2π , а по β — π .

Рассчитанные для $0 \leq u_k \leq 2\pi$ зависимости $Y(X)$ при нескольких значениях β из интервала $0 \leq \beta \leq \pi$ приведены на рис. 7.3.2. Равенства (7.3.20) для одного и того же перелета должны выполняться при одних и тех же значениях Y , X , δ и β . Простейший случай, в котором это условие выполняется, тот, когда моменты приложения импульсов отличаются на число, кратное 2π .

Многоимпульсные перелеты с импульсами, сообщаемыми в пределах $0 \leq \varphi_k - \delta \leq 2\pi$, возможны лишь в случаях, когда различные части кривых $Y(X, \beta)$ имеют точки пересечения или совпадают. Количество пересекающихся или совпадающих частей кривых равняется максимально возможному количеству импульсов, сообщаемых в пределах одного оборота. Из формул (7.3.20), (7.3.21) и рис. 7.3.2 видно, что в пределах одного оборота многоимпульсные перелеты возможны либо при $Y = 0$, либо при $\beta = 0$, либо при $\beta = 90^\circ$.

Случай $Y = 0$. Уравнения (7.3.20) принимают вид

$$\sin 2(u_k + \beta) = 0, \quad \cos 2(u_k + \beta) = X. \quad (7.3.22)$$

Они имеют две группы решений:

$$\begin{aligned} \varphi_{k_1} &= \varphi_0 + 2\pi k_1, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1; \\ \varphi_{k_2} &= \varphi_0 + \pi + 2\pi k_2, \quad k_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2; \\ N_1 + N_2 &= N - 1. \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Импульсы этих групп сообщаются в диаметрально противоположных точках. В пределах одного оборота сообщается не более

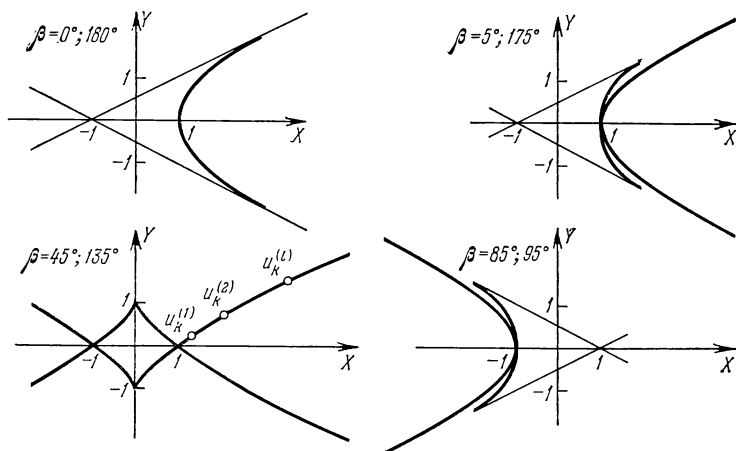


Рис. 7.3.2.

двух импульсов. С учетом (7.3.23) последние два из уравнений (7.3.8) могут быть записаны в виде

$$\eta \cos(\varphi_1 - \varepsilon) \sin \varphi_0 \Delta V_\Sigma = 0, \quad \eta \cos(\varphi_1 - \varepsilon) \cos \varphi_0 \Delta V_\Sigma = -\Delta_z, \quad (7.3.24)$$

$$\text{где } \Delta V_\Sigma = \sum_{k=0}^N \Delta V_k.$$

Отсюда при $\Delta_z \neq 0$ следует, что $\varphi_0 = 0$. Это значит, что рассматриваемый случай соответствует перелетам с импульсами в узлах.

Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 90^\circ$. В каждом из них в силу (7.3.21) $\sin 2(\delta - \varepsilon) = 0$ и уравнения (7.3.18) записываются в виде

$$\sin 2u_k + Y \cos u_k = 0, \quad \cos 2u_k - 2Y \sin u_k = X, \quad (7.3.25)$$

где

$$X = \frac{2 - 5v^2 - 8\lambda^2 - \eta^2}{\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3v^2}, \quad Y = \frac{8\lambda v}{\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3v^2},$$

$$\cos 2(\delta - \varepsilon) = \pm 1.$$

Эти уравнения имеют две группы решений:

$$\varphi_{k_1} = \delta + \arcsin \frac{Y}{2} - \pi + 2\pi k_1, \quad k_1 = 0, 1, \dots, N_1;$$

$$\varphi_{k_2} = \delta - \arcsin \frac{Y}{2} + 2\pi k_2, \quad k_2 = 0, 1, \dots, N_2; \quad (7.3.26)$$

$$N_1 + N_2 = N - 1,$$

для которых одновременно выполняется равенство

$$X = 1 + \frac{Y^2}{2}. \quad (7.3.27)$$

Здесь, как и ранее, количество импульсов, прикладываемых на одном обороте, не превышает двух. В зависимости от знака $\cos 2(\delta - \varepsilon)$ в (7.3.25) получаются различные типы перелетов. Рассмотрим сначала случай, когда $\cos 2(\delta - \varepsilon) = 1$ и соответственно $\delta = \varepsilon + \pi s$ (s — целое). Достаточно выполнить вычисления, когда

$$\delta = \varepsilon, \quad (7.3.28)$$

так как добавление к ε числа, кратного π , как это видно из (7.3.7) и (7.3.8), может быть учтено в итоговых формулах изменением знака у Δ_z . При $\varepsilon = \delta$ предпоследнее из равенств (7.3.8) с учетом (7.3.26) может быть преобразовано к виду

$$\sin \varphi_0 \sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} = \sin \varphi_1 \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2}, \quad (7.3.29)$$

где

$$\varphi_0 = \delta + \arcsin \frac{Y}{2} - \pi, \quad \varphi_1 = \delta - \arcsin \frac{Y}{2}.$$

Отсюда в силу положительности слагаемых, стоящих под знаком сумм, знак $\sin \varphi_0$ совпадает со знаком $\sin \varphi_1$, а это значит, что все импульсы (7.3.26) прикладываются по одну сторону от линии узлов. Таким образом, рассматриваемый случай соответствует перелетам с импульсами, прикладываемыми по одну сторону от линии узлов. Для этого класса перелетов из равенств (7.3.25) и (7.3.27) при $\delta = \varepsilon$ могут быть получены формулы

$$\lambda = \frac{Y(\eta^2 - 3v^2)}{8v}, \quad \frac{1}{v^2} = \left[1 + \left(\frac{\eta}{v} \right)^2 \right] \left\{ 1 + \left(\frac{Y}{4} \right)^2 \left[\left(\frac{\eta}{v} \right)^2 - 3 \right] \right\}. \quad (7.3.30)$$

Если $\cos 2(\delta - \varepsilon) = -1$, то $\delta = \varepsilon + \frac{\pi}{2} + \pi s$ (s — целое). Так же, как и ранее, достаточно выполнить вычисления для случая

$$\delta = \varepsilon + \frac{\pi}{2}. \quad (7.3.31)$$

При этом предпоследнее из равенств (7.3.8) преобразуется к виду

$$\sin \varphi_0 \sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} = - \sin \varphi_1 \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2}. \quad (7.3.32)$$

Отсюда следует, что рассматриваемый случай соответствует перелетам с импульсами, прикладываемыми по разные стороны от линии узлов. Для этого класса перелетов из (7.3.25) и (7.3.27) получаются формулы

$$\lambda = - \frac{Y(\eta^2 + 3\nu^2)}{8\nu}, \quad \frac{1}{\nu^2} = 1 + \left[\left(\frac{\eta}{\nu} \right)^2 - 1 \right] \left[3 + \left(\frac{\eta}{\nu} \right)^2 \right] \left(\frac{Y}{4} \right)^2. \quad (7.3.33)$$

Таким образом, при условии (7.3.19) существуют три типа перелетов, для каждого из которых на одном обороте КА около центра притяжения сообщается не более двух импульсов: перелеты с импульсами в узлах, перелеты с импульсами по одну сторону от линии узлов и перелеты с импульсами по разные стороны от линии узлов.

Одноимпульсные перелеты возможны, только если орбиты пересекаются. Импульс в этом случае прикладывается в точке пересечения орбит, которая совпадает с одной из узловых точек. Таким образом, одноимпульсные перелеты представляют собой частный случай перелетов с импульсами в узлах.

Рассмотрим далее случай, когда условие (7.3.19) не выполняется. Тогда имеют место равенства

$$\eta^2 \cos 2(\delta - \varepsilon) - 3\nu^2 = 0, \quad \eta^2 \sin 2(\delta - \varepsilon) = 0. \quad (7.3.34)$$

Из (7.3.7) видно, что $\eta \neq 0$, так как в противном случае $\Delta V_{zk} = 0$ и перелет оказывается плоским. При $\eta \neq 0$ из (7.3.34) следует, что $\delta = \varepsilon + \pi s$ (s — целое) и $\nu \neq 0$. При условиях (7.3.34) из первого уравнения системы (7.3.18) вытекает, что $\lambda \cos u_k = 0$. Если предположить, что $\cos u_k = 0$, то $u_{k_1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$ и

$u_{k_2} = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k_2$, где k_1 и k_2 — целые числа. Но тогда из второго уравнения системы (7.3.18) следует, что одновременно должны выполняться равенства

$$-16\lambda\nu = 2 - 8\lambda^2 - 5\nu^2 - \eta^2, \quad 16\lambda\nu = 2 - 8\lambda^2 - 5\nu^2 - \eta^2,$$

чего быть не может. Поэтому $\cos u_k \neq 0$, но тогда $\lambda = 0$. Таким образом, при условиях (7.3.34) из (7.3.18) следуют равенства

$$\begin{aligned}\lambda &= 0, \quad 5v^2 + \eta^2 = 2, \quad \eta^2 - 3v^2 = 0, \\ v &= \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \delta = \varepsilon + \pi s.\end{aligned}\quad (7.3.35)$$

При наличии равенств (7.3.35) уравнения (7.3.18) выполняются тождественно и моментов приложения импульсов не определяют. Получающиеся в этом случае перелеты будем называть вырожденными.

7.3.4. Перелеты с импульсами на линии узлов. Подставляя выражения (7.3.23) для φ_{k_1} и φ_{k_2} при $\varphi_0 = 0$ в равенства (7.3.8) и во второе из равенств (7.3.17), получим

$$\left. \begin{aligned}4(\lambda + v \sin \delta) \sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} + 4(\lambda - v \sin \delta) \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} &= -\Delta_0, \\ 4(\lambda + v \sin \delta) \sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} - 4(\lambda - v \sin \delta) \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} &= \Delta_c,\end{aligned} \right\} \quad (7.3.36)$$

$$\left. \begin{aligned}-v \cos \delta \left(\sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} + \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} \right) &= \Delta_s, \\ \eta \cos \varepsilon \left(\sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} - \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} \right) &= -\Delta_z, \\ v^2 \cos^2 \delta + 4(\lambda \pm v \sin \delta)^2 + \eta^2 \cos^2 \varepsilon &= 1.\end{aligned} \right\} \quad (7.3.37)$$

Последнее равенство должно удовлетворяться при обоих знаках. Это возможно либо при $\lambda = 0$, либо при $v = 0$, либо при $\sin \delta = 0$. Первые два случая соответствуют экстремальным перелетам, так как в силу (7.3.21) $Y = 0$ при $\lambda v = 0$. В случае же $\sin \delta = 0$, $Y \neq 0$ первое из уравнений (7.3.17) не удовлетворяется и получающийся перелет не является экстремальным. Однако если при оптимизации перелетов заранее предполагать, что импульсы прикладываются в узлах, то первое из уравнений системы (7.3.17) исключается из рассмотрения, а остальные уравнения совпадают с уравнениями (7.3.36) и (7.3.37). Следовательно, перелет, получающийся при $\sin \delta = 0$, можно рассматривать как условно экстремальный с заранее заданным расположением импульсов. Уравнения (7.3.7), (7.3.36) и (7.3.37) позволяют определить все параметры перелетов в каждом из указанных случаев. Опуская несложные выкладки, приведем получающиеся результаты.

С л у ч а й $\lambda = 0$:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + 4(\Delta_s^2 + \Delta_z^2)}, \quad (7.3.38)$$

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{2} \left(1 - \frac{\Delta_0}{\Delta_c}\right), \quad \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{2} \left(1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_c}\right), \quad (7.3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk_1}}{\Delta V_{k_1}} &= \frac{\Delta_s}{\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{\tau k_1}}{\Delta V_{k_1}} &= -\frac{\Delta_c}{2\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{zk_1}}{\Delta V_{k_1}} &= \frac{\Delta_z}{\Delta V_{\Sigma}}, \\ \frac{\Delta V_{rk_2}}{\Delta V_{k_2}} &= -\frac{\Delta_s}{\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{\tau k_2}}{\Delta V_{k_2}} &= \frac{\Delta_c}{2\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{zk_2}}{\Delta V_{k_2}} &= -\frac{\Delta_z}{\Delta V_{\Sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.40)$$

Индексами k_1 и k_2 обозначены соответственно параметры импульсов, прикладываемых при $\varphi_{k_1} = 2\pi k_1$, $k_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1$, и при $\varphi_{k_2} = \pi + 2\pi k_2$, $k_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2$, $N_1 + N_2 = N - 1$. В левых частях (7.3.39) стоят положительные величины. Следовательно, рассматриваемый перелет существует при $\Delta_0 \leq \Delta_c$ или, в силу (7.3.9), при $\kappa \leq \cos \varphi_{\max}$.

Выражение (7.3.38) для ΔV_{Σ} при $\Delta_z \rightarrow 0$ не переходит в выражение для ΔV_{Σ} экстремальных плоских перелетов, существующих при $\kappa \leq 1$ (см. Г. Е. Кузмак [1]). Величина ΔV_{Σ} при $\Delta_z = 0$ для рассматриваемого типа перелета с импульсами в узлах больше соответствующей величины ΔV_{Σ} для плоского перелета с импульсами, прикладываемыми при $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\max} + \pi$, и меньше ΔV_{Σ} для плоского перелета с импульсами, прикладываемыми в точках пересечения орбит.

С л у ч а й $\nu = 0$:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\Delta_z^2}, \quad \varphi_{k_1} = 2\pi k_1, \quad \varphi_{k_2} = \pi + 2\pi k_2, \quad (7.3.41)$$

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1} = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{2} \left(1 - \frac{\Delta_0}{\Delta_c}\right), \quad \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2} = \frac{\Delta V_{\Sigma}}{2} \left(1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_c}\right), \quad (7.3.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk_1}}{\Delta V_{k_1}} &= 0, & \frac{\Delta V_{\tau k_1}}{\Delta V_{k_1}} &= \frac{\Delta_0}{2\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{zk_1}}{\Delta V_{k_1}} &= \frac{\Delta_z}{\Delta V_{\Sigma}}, \\ \frac{\Delta V_{rk_2}}{\Delta V_{k_2}} &= 0, & \frac{\Delta V_{\tau k_2}}{\Delta V_{k_2}} &= \frac{\Delta_0}{2\Delta V_{\Sigma}}, & \frac{\Delta V_{zk_2}}{\Delta V_{k_2}} &= -\frac{\Delta_z}{\Delta V_{\Sigma}}, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} k_1 &= 0, 1, 2, \dots, N_1; & k_2 &= 0, 1, \dots, N_2; & N_1 + N_2 &= N - 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.43)$$

В силу первого из равенств (7.3.37) при $\nu = 0$ и $\Delta_s = 0$. Таким образом, в этом случае перелет существует при $\Delta_s = 0$ и $\Delta_0 \geq \Delta_c$, т. е. при $\varphi_{\max} = 0$ и $\kappa \geq 1$.

С л у ч а й $\sin \delta = 0$:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4(\Delta_s^2 + \Delta_z^2)}. \quad (7.3.44)$$

Формулы для сумм импульсов ΔV_{k_1} и ΔV_{k_2} совпадают с формулами (7.3.42), где ΔV_{Σ} определяется согласно (7.3.44). Из (7.3.42) видно, что в этом случае перелет существует при $\Delta_0 \geq \Delta_c$ или при $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$. При $\Delta_c = 0$ этот перелет переходит в предыдущий.

Проведенный анализ показывает, что перелеты с импульсами в узлах существуют всегда, однако экстремальными они являются в области $\kappa \leq \cos \varphi_{\max}$ и при $\varphi_{\max} = 0$ и $\kappa \geq 1$. Границе области $\kappa = \cos \varphi_{\max}$ соответствует случай, когда орбиты пересекаются при $\varphi = 180^\circ$. Согласно (7.3.39) и (7.3.42) в этом случае все импульсы прикладываются при $\varphi_{k_2} = \pi + 2\pi k_2$, $k_2 = 0, 1, \dots, N_2$, по одному импульсу в точке пересечения орбит в течение каждого оборота.

Из (7.3.40) и (7.3.43) видно, что все импульсы каждой из групп имеют одинаковое направление, а величины их, в силу (7.3.39) и (7.3.42), могут выбираться с большим произволом. Минимально необходимое количество импульсов равно двум, а в случае пересекающихся орбит — одному. Увеличение количества импульсов не влияет на величину ΔV_{Σ} .

7.3.5. Перелеты с импульсами по одну сторону от линии узлов. При исследовании этого класса перелетов будем исходить из уравнений (7.3.7), (7.3.8), (7.3.26) и (7.3.28). Преобразуем систему (7.3.8). Умножим второе уравнение этой системы на $\cos \delta$, третье на $\sin \delta$ и сложим, затем второе уравнение умножим на $-\sin \delta$, а третье на $\cos \delta$ и также сложим. Аналогичные операции проделаем с третьим и четвертым уравнениями. Получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^N 4(\lambda - v \sin u_k) \Delta V_k &= -\Delta_0, \\ \sum_{k=0}^N [4(\lambda - v \sin u_k) \cos u_k + v \cos u_k \sin u_k] \Delta V_k &= \\ &= \Delta_c \cos \delta + \Delta_s \sin \delta, \\ \sum_{k=0}^N [4(\lambda - v \sin u_k) \sin u_k - v \cos^2 u_k] \Delta V_k &= \Delta_s \cos \delta - \Delta_c \sin \delta, \\ \eta \sum_{k=0}^N \cos(u_k + \delta - \varepsilon) \cos u_k \Delta V_k &= -\Delta_z \cos \delta, \\ \eta \sum_{k=0}^N \cos(u_k + \delta - \varepsilon) \sin u_k \Delta V_k &= \Delta_z \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.45)$$

где $u_k = \varphi_k - \delta$.

Эта система эквивалентна (7.3.8) и справедлива для всех типов перелетов. Подставляя в (7.3.45) выражения для u_k из (7.3.26), полагая $\delta = \varepsilon$ и исключая λ с помощью первого из равенств (7.3.30), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta^2 + v^2}{2v} Y (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= -\Delta_0, \\ \left(v + \frac{\eta^2}{4v} Y^2\right) (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= \Delta_c \sin \delta - \Delta_s \cos \delta, \\ \eta \left(1 - \frac{Y^2}{4}\right) (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= -\Delta_z \cos \delta, \\ -\frac{\eta^2}{2v} Y \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}} (\Delta V_1 - \Delta V_2) &= \Delta_z \sin \delta + \Delta_c \cos \delta, \\ \eta \frac{Y}{2} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}} (\Delta V_1 - \Delta V_2) &= \Delta_z \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.46)$$

где

$$\Delta V_1 = \sum_{k_1=0}^{N_1} \Delta V_{k_1}, \quad \Delta V_2 = \sum_{k_2=0}^{N_2} \Delta V_{k_2}.$$

Эта система из пяти уравнений содержит шесть неизвестных: η , v , δ , Y , ΔV_1 и ΔV_2 . Чтобы ее замкнуть, необходимо присоединить к ней второе из уравнений (7.3.30). Физический смысл имеют действительные решения этой системы, удовлетворяющие, в соответствии с (7.3.5), (7.3.6) и (7.3.26), неравенствам

$$v \geq 0, \eta \geq 0, |Y| \leq 2, \Delta V_1 \geq 0, \Delta V_2 \leq 0. \quad (7.3.47)$$

В силу (7.3.47) из третьего уравнения системы (7.3.46) при условиях (7.3.16) следует $\cos \delta \leq 0$. Выражения для $\cos \delta$ и $\sin \delta$ получаются в результате исключения разности $\Delta V_1 - \Delta V_2$ из последних двух уравнений системы (7.3.46):

$$\cos \delta = -\frac{\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z}{\sqrt{\left(\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right)^2 + \Delta_c^2}}, \quad \sin \delta = \frac{\Delta_c}{\sqrt{\left(\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right)^2 + \Delta_c^2}} \quad (7.3.48)$$

Умножая первое, второе и третье уравнения системы (7.3.46) соответственно на $Y/2$, 1 , $-v/\eta$ и складывая почленно, а затем умножая эти уравнения соответственно на $-2/Y$, 1 и η/v и также складывая, получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_0 Y}{2} &= \left(\Delta_s - \frac{v}{\eta} \Delta_z\right) \cos \delta - \Delta_c \sin \delta, \\ \frac{2\Delta_0}{Y} &= \left(\Delta_0 + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right) \cos \delta - \Delta_c \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.49)$$

Эти уравнения после исключения $\cos \delta$ и $\sin \delta$ с помощью (7.3.48) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{-2\Delta_0}{\sqrt{\left(\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right)^2 + \Delta_c^2}}, \\ \left(\Delta_s - \frac{v}{\eta} \Delta_z\right)\left(\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right) + \Delta_c^2 &= \Delta_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.50)$$

Второе из этих равенств представляет собой уравнение для определения η/v . Его положительное решение записывается в виде

$$\frac{\eta}{v} = a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad (7.3.51)$$

где

$$a = \frac{\Delta_0^2 + \Delta_z^2 - \Delta_c^2 - \Delta_s^2}{2\Delta_z \Delta_s} = \frac{1}{2 \sin \varphi_{\max}} \left[\frac{1}{\sigma} - \sigma(1 - \kappa^2) \right].$$

При известном η/v можно найти Y с помощью (7.3.50), угол δ — с помощью (7.3.48), φ_{k_1} и φ_{k_2} — с помощью (7.3.26), v и η — с помощью (7.3.30) и (7.3.51). По данным η , v , δ и Y из (7.3.46) определяем $\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2$, ΔV_1 и ΔV_2 в следующем виде:

$$\Delta V_\Sigma = \frac{-2\Delta_0}{Yv \left[1 + \left(\frac{\eta}{v} \right)^2 \right]}, \quad \Delta V_1 = \frac{\Delta V_\Sigma}{2} (1 + \alpha), \quad \Delta V_2 = \frac{\Delta V_\Sigma}{2} (1 - \alpha), \quad (7.3.52)$$

где

$$\alpha = -\frac{2}{Y} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4} \operatorname{tg} \delta}. \quad (7.3.53)$$

Компоненты импульсов находим из (7.3.7). С учетом (7.3.26) и первого из равенств (7.3.30) эти уравнения могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rk_1}}{\Delta V_{k_1}} &= v \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}}, \quad \frac{\Delta V_{\tau k_1}}{\Delta V_{k_1}} = \frac{\Delta_0}{2\Delta V_2}, \quad \frac{\Delta V_{zk_1}}{\Delta V_{k_1}} = \eta \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}}, \\ \frac{\Delta V_{rk_2}}{\Delta V_{k_2}} &= -\frac{\Delta V_{rk_1}}{\Delta V_{k_1}}, \quad \frac{\Delta V_{\tau k_2}}{\Delta V_{k_2}} = \frac{\Delta V_{\tau k_1}}{\Delta V_{k_1}}, \quad \frac{\Delta V_{zk_2}}{\Delta V_{k_2}} = -\frac{\Delta V_{zk_1}}{\Delta V_{k_1}}, \\ k_1 &= 0, 1, \dots, N_1; \quad k_2 = 0, 1, \dots, N_2; \quad N_1 + N_2 = N - 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.54)$$

Из этих равенств видно, что все импульсы, моменты приложения которых отличаются на целое число периодов, одинаково направлены, так же как и в случае перелетов с импульсами в узлах. ΔV_1 и ΔV_2 могут быть произвольно распределены на части ΔV_{k_1} , $k_1 = 0, 1, \dots, N_1$, и ΔV_{k_2} , $k_2 = 0, 1, \dots, N_2$.

Минимально необходимое количество импульсов не превосходит двух. Зависимости моментов приложения импульсов φ_0 и φ_1

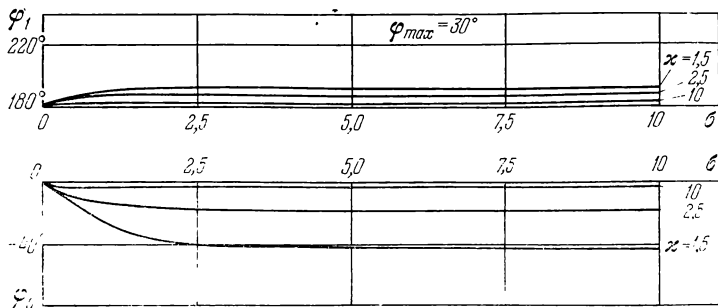


Рис. 7.3.3.

от σ построены при различных κ и $\varphi_{\max} = 90^\circ$ и 30° на рис. 7.3.3 и 7.3.4.

Определим область существования рассматриваемых перелетов. Равенства (7.3.50) позволяют доказать тождества

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{Y}\right)^2 - 1 &= \frac{\left(\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right) \Delta_z}{\Delta_0^2} \left(\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta}\right) = \\ &= \frac{\Delta_z \left(1 - \frac{\Delta_c^2}{\Delta_0^2}\right) \left(\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta}\right)}{\Delta_s - \frac{v}{\eta} \Delta_z}. \end{aligned} \quad (7.3.55)$$

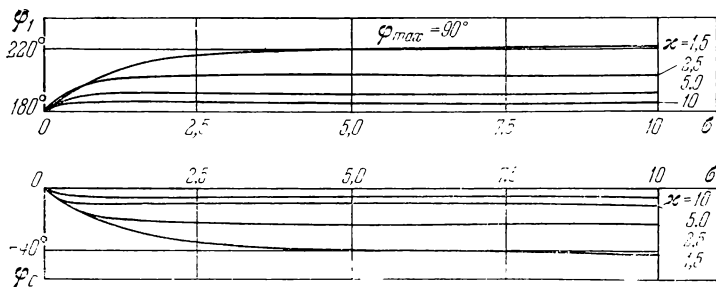


Рис. 7.3.4.

Из (7.3.51) и (7.3.30) имеем $\eta \geq 0$ и $v \geq 0$. При выполнении (7.3.16) из (7.3.55) сразу следует $|Y| \leq 2$. Чтобы равенство (7.3.30) для v всегда давало действительный результат, правая

часть его должна быть неотрицательной. Это всегда имеет место, так как минимальное значение правой части второго из равенств (7.3.30) достигается при $Y = 2$ и $\eta/v = 0$ и положительно. Поэтому и все остальные параметры перелета действительны.

Осталось проверить неравенства $\Delta V_1 \geq 0$ и $\Delta V_2 \geq 0$. Для их выполнения достаточно, чтобы $|\alpha| \leq 1$. Из (7.3.16), (7.3.48) и (7.3.53) следует, что для того, чтобы было $|\alpha| \leq 1$, должно выполняться неравенство

$$\frac{\Delta_c}{\Delta_s + \frac{\eta}{v} \Delta_z} \sqrt{\frac{2}{Y} - 1} \leq 1. \quad (7.3.56)$$

Из (7.3.56) с помощью (7.3.55) получим

$$\left(\frac{\Delta_c^2}{\Delta_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta} \right) - \frac{\Delta_s}{\Delta_z} + \frac{v}{\eta} \leq 0. \quad (7.3.57)$$

Используя второе из равенств (7.3.50), преобразуем (7.3.57) к виду

$$\left(\frac{\Delta_c^2}{\Delta_0^2} - 1 \right) \left[\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta} + \frac{\Delta_0^2/\Delta_z^2}{\frac{\Delta_s}{\Delta_z} + \frac{\eta}{v}} \right] \leq 0. \quad (7.3.58)$$

Отсюда с учетом (7.3.16) и условий $v \geq 0$ и $\eta \geq 0$ видно, что рассматриваемый перелет существует при $\Delta_c \leq \Delta_0$ или при $\cos \varphi_{\max} \leq \kappa$. Эта область дополняет область существования перелета с импульсами в узлах.

Докажем, что перелет, в котором $\varepsilon = \delta + \pi$, при условии (7.3.16) не существует. Формулы для этого случая получаются из приведенных выше путем изменения знака перед Δ_z . Выражения (7.3.55) и (7.3.57) после изменения знака перед Δ_z записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2}{Y} \right)^2 - 1 &= \frac{-\Delta_z \left(1 - \frac{\Delta_c^2}{\Delta_0^2} \right) \left(\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta} \right)}{\Delta_s + \frac{v}{\eta} \Delta_z} \\ \left(\frac{\Delta_c^2}{\Delta_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\eta}{v} + \frac{v}{\eta} \right) + \frac{\Delta_s}{\Delta_z} + \frac{v}{\eta} &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.59)$$

Из условия $|Y| \leq 2$ следует, что $\Delta_c \geq \Delta_0$. Но при этом в левой части неравенства (7.3.59) все слагаемые положительны, и оно не выполняется, что и доказывает требуемое утверждение.

Область существования перелета, в котором $\varepsilon = \delta$, совпадает с областью существования условно экстремального перелета с импульсами в узлах, ΔV_{Σ} которого определяется равенством (7.3.44). Вследствие этого удобно при проведении расчетов относить $\Delta V_{\Sigma 0}$ — характеристическую скорость перелета с импульсами

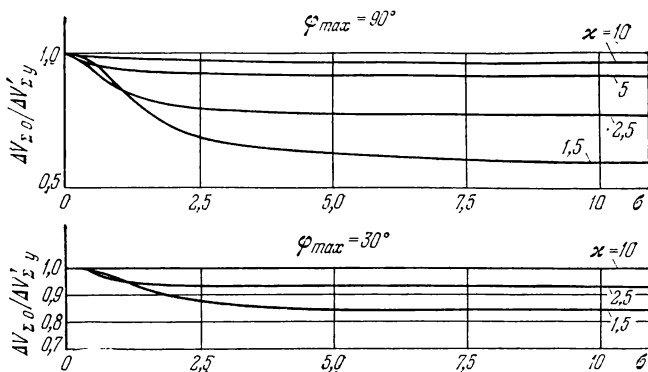


Рис. 7.3.5.

по одну сторону от линии узлов — к $\Delta V'_{\Sigma y}$ — характеристической скорости условно экстремального перелета с импульсами в узлах. Зависимости отношения $\Delta V_{\Sigma 0}/\Delta V'_{\Sigma y}$ от σ при $\varphi_{\max} = 90^\circ$ и 30° и различных $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$ построены на рис. 7.3.5.

Исследуем предельные свойства перелета, в котором $\varepsilon = \delta$, при $\Delta_z \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow \infty$). Из (7.3.51) видно, что необходимо рассмотреть три случая: $\kappa > 1$, $\kappa = 1$ и $\cos \varphi_{\max} \leq \kappa < 1$. При $\kappa > 1$ из (7.3.30), (7.3.50) — (7.3.54) при $\Delta_z \rightarrow 0$ последовательно получим:

$$\frac{\eta}{v} \approx 2a \rightarrow \infty, \quad Y \rightarrow Y_{\text{пр}}, \quad v \approx \frac{-4}{Y_{\text{пр}} \left(\frac{\eta}{v} \right)^2},$$

$$\Delta V_{\Sigma} \approx \frac{-2\Delta_0}{Y_{\text{пр}} v \left(\frac{\eta}{v} \right)^2} = \frac{\Delta_0}{2}. \quad (7.3.60)$$

Последнее из этих равенств показывает, что в этом случае рассматриваемый перелет переходит в оптимальный плоский перелет, существующий в случае пересекающихся орбит (см. Г. Е. Кузмак [1]). При $\kappa = 1$, несмотря на то что $\eta/v \rightarrow 0$ при $\Delta_z \rightarrow 0$, для предельного значения ΔV_{Σ} получается такой же результат. Если же $\cos \varphi_{\max} \leq \kappa < 1$, то можно показать, что предельное значение ΔV_{Σ} совпадает с ΔV_{Σ} экстремального плоского перелета с импульсами в точках пресечения орбит.

Как показано в работе Г. Е. Кузмака [1], этот перелет не дает абсолютного минимума ΔV_{Σ} .

Представляет интерес предельный случай рассматриваемого перелета, который получается при $\varphi_{\max} \rightarrow 0$ и $\kappa \geq 1$. Оказывается, что он является перелетом с импульсами в узлах, параметры которого определяются формулами (7.3.41)–(7.3.43). Отсюда, в частности, следует, что при $\varphi_{\max} = 0$ отношение $\frac{\Delta V_{\Sigma 0}}{\Delta V_{\Sigma y}}$ равняется единице, а φ_0 и φ_1 при $\varphi_{\max} \rightarrow 0$ соответственно стремятся к нулю и к 180° .

7.3.6. Перелеты с импульсами по разные стороны от линии узлов. Уравнения для определения характеристик перелетов с импульсами по разные стороны от линии узлов получаются в результате подстановки выражений (7.3.26) для φ_{h_1} и φ_{h_2} и равенства $\varepsilon = \delta + \frac{\pi}{2}$ в (7.3.45). После исключения λ с помощью (7.3.33) искомая система приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\eta^2 - \nu^2)}{\nu} \frac{Y}{2} (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= \Delta_0, \\ \left(\frac{\eta^2}{\nu} \frac{Y^2}{4} - \nu \right) (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= \Delta_s \cos \delta - \Delta_c \sin \delta, \\ \eta \frac{Y^2}{4} (\Delta V_1 + \Delta V_2) &= \Delta_z \sin \delta, \\ \frac{\eta^2}{\nu} \frac{Y}{2} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}} (\Delta V_1 - \Delta V_2) &= \Delta_c \cos \delta + \Delta_s \sin \delta, \\ \eta \frac{Y}{2} \sqrt{1 - \frac{Y^2}{4}} (\Delta V_1 - \Delta V_2) &= -\Delta_z \cos \delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.61)$$

где $\Delta V_1 = \sum_{h_1=0}^{N_1} \Delta V_{h_1}$, $\Delta V_2 = \sum_{h_2=0}^{N_2} \Delta V_{h_2}$.

Для замыкания этой системы необходимо добавить второе из уравнений (7.3.33). Система (7.3.61) решается аналогично системе (7.3.46). Приведем последовательность формул, необходимых для определения $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2$. Прежде всего определим η/ν из уравнения

$$\frac{\eta}{\nu} \left\{ \frac{(\Delta_0/\Delta_z)^2}{\left[\left(\frac{\eta}{\nu} \right)^2 - 1 \right]^2} - 1 \right\} = \frac{\Delta_c}{\Delta_z}. \quad (7.4.62)$$

Далее находим

$$Y = \frac{2\Delta_0}{\left[\left(\frac{\eta}{\nu} \right)^2 - 1 \right] \sqrt{\left(\Delta_c + \frac{\eta}{\nu} \Delta_z \right)^2 + \Delta_s^2}} \quad (7.3.63)$$

и v с помощью (7.3.33). При известных η/v и v характеристическая скорость ΔV_z дается формулой

$$\Delta V_z = \frac{1}{v} \sqrt{\left(\Delta_c + \frac{\eta}{v} \Delta_z\right)^2 + \Delta_s^2}. \quad (7.3.64)$$

Для расчета перелета, в котором $\varepsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$, в уравнениях (7.3.61) — (7.3.64) необходимо изменить знаки перед Δ_z . Зависимость $\frac{\eta}{v}$ от $\frac{\Delta_c}{\Delta_z} \geq 0$ и $\left|\frac{\Delta_0}{\Delta_z}\right|$ для перелетов, в которых $\varepsilon = \delta \pm \frac{\pi}{2}$,

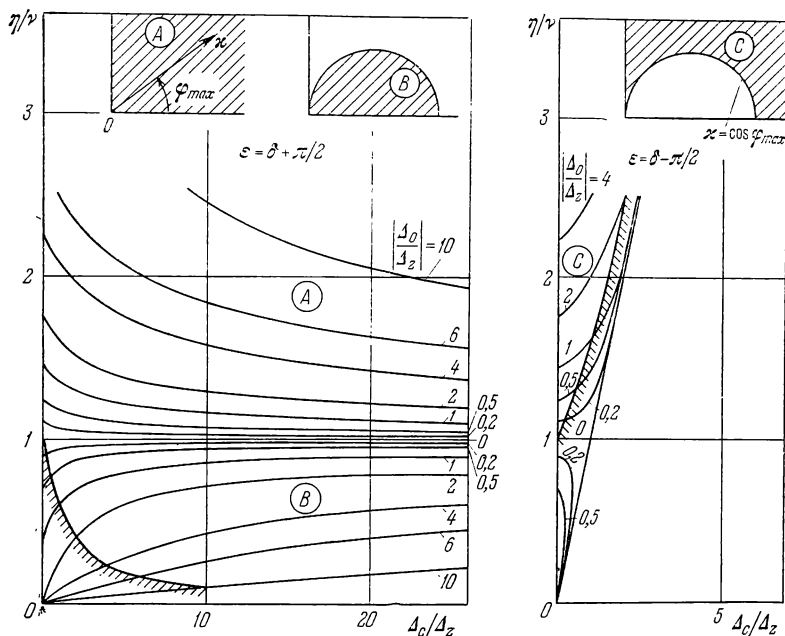


Рис. 7.3.6.

изображена на рис. 7.3.6. Физический смысл имеют те части графиков, для которых выполняются условия существования перелетов (7.3.47). Исследование этого вопроса было проведено с помощью массовых численных расчетов. Было выяснено, что перелет, в котором $\varepsilon = \delta + \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\eta}{v} \geq 1$, существует при всех значениях σ , κ и $\varphi_{\max}$ из области (7.3.16). Перелет, в котором $\varepsilon = \delta + \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\eta}{v} \leq 1$, существует при $\kappa \leq \cos \varphi_{\max}$. Перелет, в котором $\varepsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$,

существует при $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$. От параметра σ области существования этих перелетов не зависят. Части графиков на рис. 7.3.6, имеющие физический смысл, располагаются выше штрихованных кривых и обозначены буквами A, B и C . Соответствующие A, B, C области существования перелетов построены на рис. 7.3.6 и в полярных координатах $O\kappa\varphi_{\max}$.

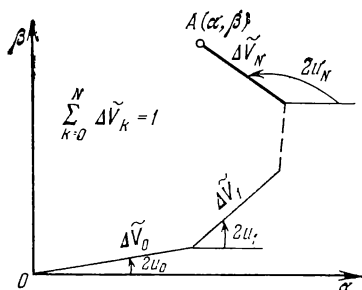


Рис. 7.3.7.

уравнений (7.3.45) с учетом (7.3.35) сразу могут быть получены выражения для ΔV_{Σ} и δ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{\Sigma} &= \frac{\sqrt{\Delta_c^2 + (\Delta_s + \sqrt{3}\Delta_z)^2}}{2}, \\ \cos \delta &= \frac{-(\Delta_s + \sqrt{3}\Delta_z)}{2\Delta V_{\Sigma}}, \quad \sin \delta = \frac{\Delta_c}{2\Delta V_{\Sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.65)$$

Остальные уравнения системы (7.3.45) определяют величины импульсов ΔV_k и моменты их приложения $\varphi_k = u_k + \delta$ и могут быть преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k &= 1, \quad \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \cos 2u_k = \alpha, \\ \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin 2u_k &= \beta, \quad \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin u_k = h, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.66)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{4\Delta_z \cos \delta}{\sqrt{3}\Delta V_{\Sigma}} - 1, \quad \beta = \frac{4\Delta_z \sin \delta}{\sqrt{3}\Delta V_{\Sigma}}, \\ h &= \frac{\Delta_0}{2\Delta V_{\Sigma}}, \quad \Delta \tilde{V}_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta V_{\Sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.67)$$

Построим в плоскости $O\alpha\beta$ (рис. 7.3.7) ломаную линию из отрезков $\Delta \tilde{V}_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, составляющих с осью абсцисс углы $2u_k$. В силу первых трех уравнений системы (7.3.66) сумма длин отрезков ломаной равняется единице, а суммы проекций их на ось абсцисс и на ось ординат равняются α и β . Решение этих уравнений можно построить только в том случае, когда длина

ломаной не меньше расстояния от ее конца до начала координат:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq 1. \quad (7.3.68)$$

При этом условии указанную ломаную линию можно построить бесчисленным количеством способов. Для каждого из них можно вычислить $\sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin u_k$ и определить наибольшее значение этой величины. Обозначим его через $h_{\max}$. Если $h > h_{\max}$, то система (7.3.66) решений не имеет. Определим $h_{\max}$. Для этой величины $\Delta \tilde{V}_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, и u_k будем рассматривать как варьируемые параметры, удовлетворяющие связям — первым трем уравнениям системы (7.3.66), и определим условный максимум $\sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin u_k$. Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin u_k + \mu_1 \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k + \mu_2 \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \cos 2u_k + \mu_3 \sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin 2u_k, \quad (7.3.69)$$

по которой получим

$$\left. \begin{aligned} \sin u_k + \mu_1 + \mu_2 \cos 2u_k + \mu_3 \sin 2u_k &= 0, \\ \cos u_k - 2\mu_2 \sin 2u_k + 2\mu_3 \cos 2u_k &= 0, \\ k &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.70)$$

Если $\mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$, то эта система преобразуется к виду (7.3.20) при следующих значениях Y , X и β :

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{1}{2 \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}, & X &= \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}, \\ \cos 2\beta &= \frac{-\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}, & \sin 2\beta &= \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.71)$$

Исследование, проведенное в разделе 7.3.3, показало, что система (7.3.20) при $0 \leq u_k \leq 2\pi$ может иметь либо одно, либо два решения, а также бесчисленное множество решений, отличающихся от этих решений на числа, кратные 2π . Рассмотрим сначала случай, когда при $0 \leq u_k \leq 2\pi$ может быть одно решение; тогда из (7.3.66) при $N = 1$ получим

$$\Delta \tilde{V}_1 = 1, \quad \cos 2u_k = \alpha, \quad \sin 2u_k = \beta, \quad h_{\max} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad (7.3.72)$$

при $N = 1$ необходимо должно быть $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Два решения при $0 \leq u_k \leq 2\pi$ у системы (7.3.20) могут быть в случаях $\beta = 0$, $\beta = 90^\circ$ и $Y = 0$. Рассмотрим первый из них.

При $\beta = 0$ из (7.3.20) следует $u_1 = \pi - u_0$. С учетом уравнений (7.3.66) получается

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{V}_0 + \Delta \tilde{V}_1 &= 1, \cos 2u_0 = \alpha, \\ (\Delta \tilde{V}_0 - \Delta \tilde{V}_1) \sin 2u_0 &= \beta, h_{\max} = \sin u_0 = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.73)$$

Если $\beta = 90^\circ$ и $Y = 0$, анализ аналогичен, и для $h_{\max}$ получается такое же выражение, как и выше. Если же $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$, то (7.3.70) принимают вид

$$\sin u_k + \mu_1 = 0, \quad \cos u_k = 0.$$

Отсюда видно, что при $0 \leq u_k \leq 2\pi$ эти уравнения удовлетворяются только одним значением u_k . Следовательно, в этом случае для $h_{\max}$ также получится выражение (7.3.72). Таким образом, во всех случаях максимум $\sum_{k=0}^N \Delta \tilde{V}_k \sin u_k$ достигается на ломаной линии, состоящей не более чем из двух отрезков, и определяется формулой (7.3.72). При $h > h_{\max}$, как уже указывалось, вырожденные перелеты не существуют. Чтобы получить условие существования перелета, необходимо убедиться, что при $0 \leq h \leq h_{\max}$ всегда можно построить решение системы (7.3.66). Это видно из формул (7.3.77), полученных ниже для случая двух импульсов. Таким образом, условия существования вырожденного перелета представляют собой неравенства (7.3.68) и $0 \leq h \leq h_{\max}$. Будучи выражены через параметры Δ_0 , Δ_c , Δ_s и Δ_z , они преобразуются к виду

$$\Delta_z (\Delta_z - \sqrt{3} \Delta_s) \leq 0, \quad \Delta_0^2 + \Delta_z^2 \leq \Delta_c^2 + \Delta_s^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta_s \Delta_z. \quad (7.3.74)$$

Чтобы получить условия существования перелета, в котором $\varepsilon = \delta + \pi$, в этих неравенствах необходимо изменить знаки перед Δ_z . Из (7.3.74) видно, что при условиях (7.3.16) перелет $\varepsilon = \delta + \pi$ не существует.

Области существования (7.3.74) перелета, в котором $\varepsilon = \delta$, построены в полярных координатах $O\kappa_{\max}$ при различных σ на рис. 7.3.8. При $\sigma \rightarrow \infty$ область существования переходит в четверть круга $\kappa \leq 1$, а при уменьшении σ до $\sigma_{\min} = 1/\sqrt{3}$ стягивается в точку. При $\sigma \leq 1/\sqrt{3}$ вырожденные перелеты не существуют. На рис. 7.3.8 также изображены области существова-

ния перелетов с импульсами в узлах и с импульсами по одну сторону от линии узлов.

Компоненты импульсов в вырожденных перелетах определяются формулами, следующими из (7.3.7), если там положить $\vartheta = \delta$, $\lambda = 0$, $\nu = 1/2$ и $\eta = \sqrt{3}/2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_{rh}}{\Delta V_k} &= -\frac{1}{2} \cos u_k, & \frac{\Delta V_{\tau k}}{\Delta V_k} &= \sin u_k, \\ \frac{\Delta V_{zk}}{\Delta V_k} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u_k, \\ u_k &= \varphi_k - \delta, & k &= 0, 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (7.3.75)$$

Из этих формул видно, что импульсы всегда располагаются в

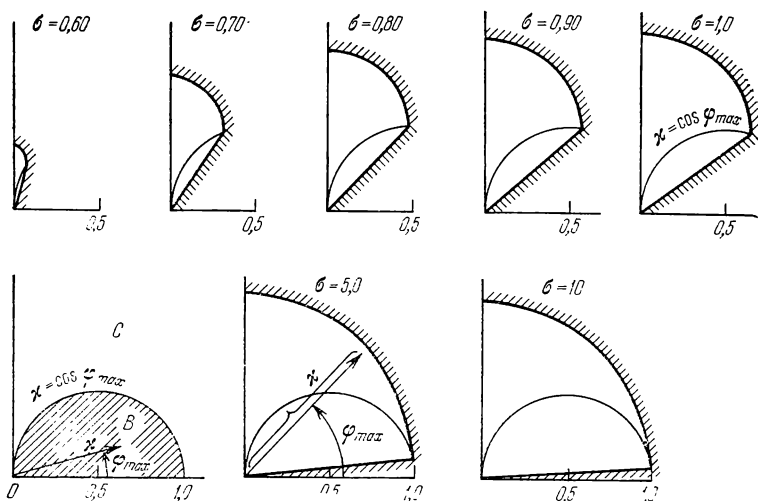


Рис. 7.3.8.

плоскости, проходящей через трансверсаль и наклоненной на 30° к местному горизонту (рис. 7.3.9).

При $\Delta_z = 0$ из (7.3.9), (7.3.65), (7.3.67), (7.3.75) следуют равенства

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_\Sigma &= \frac{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}{2}, & \delta &= \frac{\pi}{2} + \varphi_{\max}, & \alpha &= -1, & \beta &= 0, \\ \cos 2u_k &= -1, & k &= 0, 1, \dots, N, \\ \varphi_{k_1} &= \varphi_{\max} + \pi + 2\pi k_1, & k_1 &= 0, 1, \dots, N_1; \\ \varphi_{k_2} &= \varphi_{\max} + 2\pi k_2, & k_2 &= 0, 1, \dots, N_2; \\ \Delta V_{rh} &= \Delta V_{zk} = 0, & k &= 0, 1, \dots, N; \\ N_1 + N_2 &= N - 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.76)$$

Таким образом, при стремлении к нулю угла между плоскостями орбит вырожденный перелет переходит в наиболее экономичный плоский перелет (см. Г. Е. Кузмак [4]) с трансверсальными импульсами, существующий при $\kappa \leq 1$.

Приведем формулы для расчета параметров вырожденного перелета в случае двух импульсов, когда область его существования максимальна. При $N=1$ система (7.3.66) может быть преобразована к одному уравнению для $\varphi_0 = u_0 + \delta$:

$$h = \Delta \tilde{V}_0(u_0) \sin u_0 + \Delta \tilde{V}_1(u_0) \sin u_1(u_0), \quad \Delta \tilde{V}_1 = 1 - \Delta \tilde{V}_0, \quad (7.3.77)$$

где

$$\Delta \tilde{V}_0 = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2(1 - \alpha \cos 2u_0 - \beta \sin 2u_0)},$$

$$\sin u_1 = \frac{\sqrt{\Delta \tilde{V}_0} [\beta \sin u_0 - (1 - \alpha) \cos u_0]}{\sqrt{(1 - \Delta \tilde{V}_0)(1 - \alpha^2 - \beta^2)}}.$$

Зависимости $\varphi_0(\kappa, \varphi_{\max})$ при различных σ , рассчитанные с помощью (7.3.77), построены на рис. 7.3.10. При известном φ_0 параметры $\Delta \tilde{V}_0$, $\Delta \tilde{V}_1$ и $\varphi_1 = u_1 + \delta$ определяются с помощью (7.3.77). При этом следует брать то значение угла u_1 , при котором

$$\text{sign}(\Delta \tilde{V}_1 \sin 2u_1) = \text{sign}(\beta - \Delta V_0 \sin 2u_0). \quad (7.3.78)$$

Компоненты импульсов определяются с помощью равенств (7.3.75). Из графиков рис. 7.3.10, определяющих φ_0 , видно, что при данных σ , κ и $\varphi_{\max}$ всегда можно определить два значения φ_0 .

Каждое из этих значений φ_0 порождает свои значения параметров перелета. Таким образом, существуют два изоэнергетических вырожденных перелета, отличающихся параметрами обоих импульсов.

7.3.8. Общая характеристика перелетов, дающих абсолютный минимум ΔV_z . Никаких других решений, кроме решений, исследованных в разделах 7.3.4—7.3.7, у системы уравнений (7.3.3) и (7.3.5), определяющей параметры экстремальных перелетов, не существует. Каждое из ис-

следованных решений определяет свой локальный экстремум или стационарное значение ΔV_z .

Вясним, какие из этих перелетов дают абсолютный минимум ΔV_z . Перелеты с импульсами в узлах существуют при $0 \leq \kappa \leq \cos \varphi_{\max}$. Перелеты с импульсами по одну сторону от линии узлов возможны в области $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$, дополняющей область

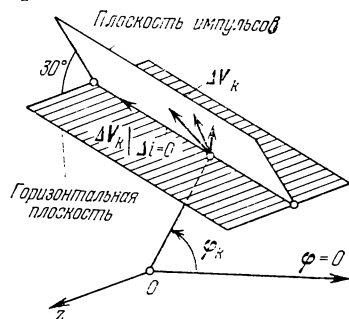


Рис. 7.3.9.

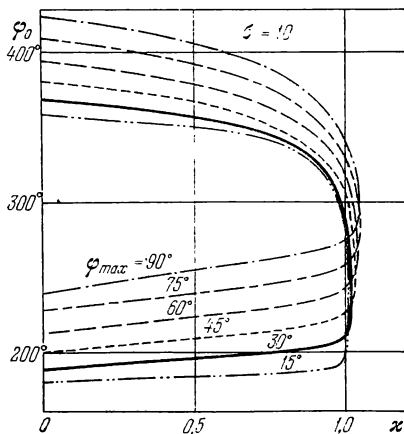
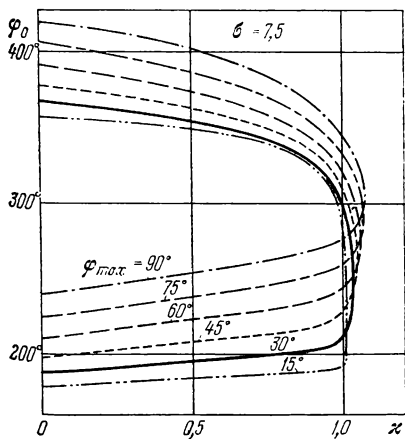
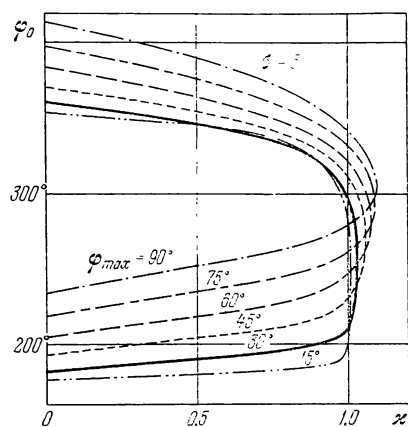
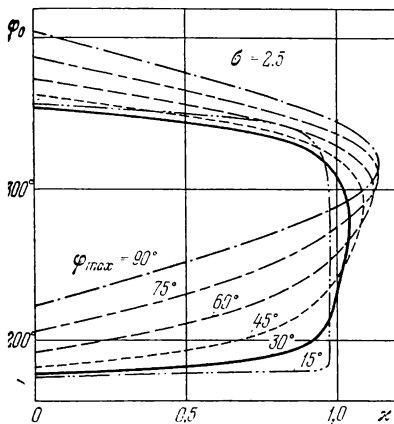
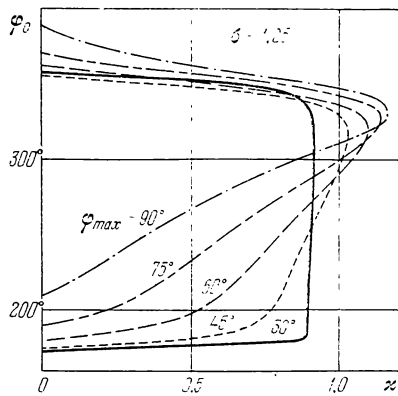
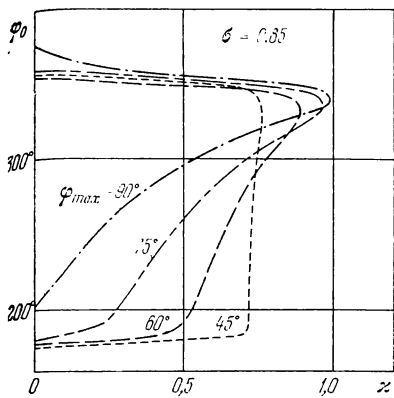


Рис. 7.3.10.

существования перелетов с импульсами в узлах (рис. 7.3.8). Далее, для каждой комбинации σ , κ и $\varphi_{\max}$ имеются два типа перелетов с импульсами по разные стороны от линии узлов. При $0 \leq \kappa \leq \cos \varphi_{\max}$ существуют перелеты, соответствующие областям A и B на рис. 7.3.6, при $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$ — перелеты, соответствующие областям A и C этого рисунка.

Снабдим индексом «у» внизу ΔV_{Σ} для перелетов с импульсами в узлах, индексом «0» внизу ΔV_{Σ} для перелетов с импульсами по одну сторону от линии узлов, индексами A , B и C вверху ΔV_{Σ} для перелетов с импульсами по разные стороны от линии узлов, рассчитанные соответственно с помощью кривых из областей A , B и C (рис. 7.3.6). С помощью формул разделов 7.3.4—7.3.6 были проведены массовые расчеты отношений $\Delta V_{\Sigma A}/\Delta V_{\Sigma y}$ и $\Delta V_{\Sigma B}/\Delta V_{\Sigma y}$ для $0 \leq \kappa \leq \cos \varphi_{\max}$ и $0 \leq \sigma < \infty$ и отношений $\Delta V_{\Sigma A}/\Delta V_{\Sigma 0}$ и $\Delta V_{\Sigma C}/\Delta V_{\Sigma 0}$ для $\kappa \geq \cos \varphi_{\max}$ и $0 \leq \sigma < \infty$. Было установлено, что эти отношения не меньше единицы. Вследствие этого перелеты с

импульсами по разные стороны от линии узлов исключены из рассмотрения.

Область существования вырожденного перелета (рис. 7.3.8) пересекается с областями существования перелетов с импульсами в узлах и перелетов с импульсами по одну сторону от линии узлов. Снабдим индексом «в» ΔV_{Σ} для вырожденного перелета и определим отношения $\Delta V_{\Sigma 0}/\Delta V_{\Sigma в}$ и $\Delta V_{\Sigma y}/\Delta V_{\Sigma в}$. Отношение $\Delta V_{\Sigma 0}/\Delta V_{\Sigma в}$ рассчитывалось численно. Результаты расчетов этого отношения для точек, координаты которых задаются в полярной системе координат $O\kappa\varphi_{\max}$ (рис. 7.3.11), представлены в таблице 7.3.1. Видно, что всегда $\Delta V_{\Sigma 0}/\Delta V_{\Sigma в} \geq 1$.

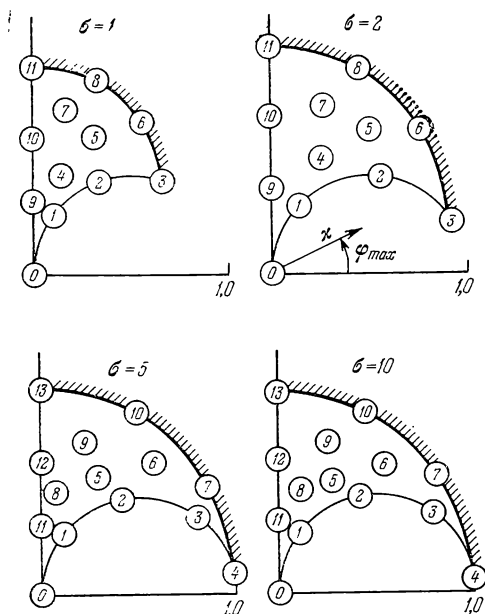


Рис. 7.3.11.

Из формул (7.3.38) и (7.3.65) имеем

$$\frac{\Delta V_{\Sigma y}}{\Delta V_{\Sigma в}} = \sqrt{\frac{\Delta_c^2 + 4(\Delta_s^2 + \Delta_z^2)}{\Delta_c^2 + (\Delta_s + \sqrt{3}\Delta_z)^2}} = \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{3}\Delta_s - \Delta_z)^2}{\Delta_c^2 + (\Delta_s + \sqrt{3}\Delta_z)^2}} \geq 1. \quad (7.3.79)$$

Таким образом, если вырожденный перелет существует, то он экономичнее всех остальных экстремальных перелетов. Однако область его существования не охватывает всех возможных значений параметров σ , κ и $\varphi_{\max}$. Вне области его существования наиболее экономичными являются перелеты с импульсами в узлах

Таблица 7.3.1

$N_T^*)$	$\Delta V_{\Sigma 0} / \Delta V_{\Sigma B}$				$N_T^*)$	$\Delta V_{\Sigma 0} / \Delta V_{\Sigma B}$			
	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=5$	$\sigma=10$		$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=5$	$\sigma=10$
0	1,035	1,195	1,520	1,715	7	1,005	1,025	1,000	1,000
1	1,031	1,170	1,475	1,655	8	1,000	1,000	1,260	1,535
2	1,015	1,070	1,340	1,470	9	1,025	1,155	1,130	1,230
3	1,000	1,000	1,170	1,160	10	1,019	1,150	1,000	1,000
4	1,019	1,100	1,000	1,000	11	1,000	1,000	1,440	1,625
5	1,008	1,008	1,300	1,478	12			1,235	1,370
6	1,000	1,000	1,065	1,175	13			1,000	1,000

*) N_T — номер точки на рис. 7.3.11. Точка бралась в центре соответствующей окружности на рис. 7.3.11.

и перелеты с импульсами, сообщаемыми по одну сторону от линии узлов. Можно показать, что все эти перелеты непрерывно переходят один в другой. Экстремальные перелеты, дающие абсолютный минимум ΔV_{Σ} , будем называть оптимальными.

Каждый из оптимальных перелетов может быть реализован с помощью двух импульсов. В случае, когда орбиты имеют точку пересечения, перелет с импульсами в узлах вырождается в одноимпульсный перелет. Увеличение количества импульсов не приводит к уменьшению ΔV_{Σ} . Существуют семейства изоэнергетических многоимпульсных перелетов с ΔV_{Σ} , равным ΔV_{Σ} двухимпульсных перелетов. Моменты приложения импульсов в этих перелетах отличаются от моментов приложения импульсов в двухимпульсных перелетах на целое число периодов, а направление импульсов то же самое. По аналогии с работой Райдера [1] можно ожидать, что увеличение количества импульсов приведет к уменьшению ΔV_{Σ} , если решать задачу о перелетах с учетом протяженности активных участков.

При $\Delta i \rightarrow 0$ вырожденные перелеты и перелеты с импульсами по одну сторону от линии узлов переходят в оптимальные плоские перелеты, существующие соответственно для случая пересекающихся и непересекающихся орбит. Перелет с импульсами в узлах ни в один из плоских экстремальных перелетов не переходит. Он при $\Delta i \rightarrow 0$ превращается в перелет с некоторым заданным расположением импульсов.

Безразмерные характеристики оптимальных пространственных перелетов являются функциями трех безразмерных параметров σ , κ и $\varphi_{\max}$, что позволяет затабулировать решение рассматриваемой задачи.

7.3.9. Примеры пространственных маневров. Оценка точности линеаризованной теории. Рассмотрим сначала перелеты между некомпланарными орбитами в случае, когда параметр $\varphi_{\max} = 0$. Из (6.3.10), (7.3.2) и (7.3.9) видно, что это имеет место при условиях

$$\left. \begin{aligned} \Delta_c &= e_0 \cos \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \cos \varphi_{\pi, N+1} \geq 0, \\ \Delta_s &= e_0 \sin \varphi_{\pi 0} - e_{N+1} \sin \varphi_{\pi, N+1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.80)$$

Этот случай, в частности, реализуется, когда плоскость орбиты поворачивается относительно оси апсид и одновременно изменяются фокальный параметр и эксцентриситет орбиты либо когда изменяется только фокальный параметр орбиты, а плоскость орбиты поворачивается относительно произвольного направления. При условиях (7.3.80)

$$\sigma = \frac{\Delta_c}{\Delta_i}, \quad \kappa = \frac{\Delta_0}{\Delta_c}, \quad \Delta_0 = \frac{p_{N+1} - p_0}{r_{cp}} \geq 0. \quad (7.3.81)$$

При $\varphi_{\max} = 0$ абсолютный минимум ΔV_z достигается при $\kappa \leq 1$ с помощью перелета с импульсами в узлах, параметры которого определяются формулами (7.3.38) — (7.3.40), при $\kappa \geq 1$ — с помощью перелета с импульсами по одну сторону от линии узлов, который, как показано в конце раздела 7.3.5, при $\varphi_{\max} = 0$ также представляет собой перелет с импульсами в узлах, описываемый формулами (7.3.41) — (7.3.43).

Из (7.3.38) — (7.3.40) видно, что при $\kappa \leq 1$ ΔV_z не зависит от Δ_0 , а при $\kappa \geq 1$ ΔV_z не зависит от Δ_c , т. е. ΔV_z всегда определяется наибольшим из этих параметров. Из (7.3.40), (7.3.43), (7.3.80) и (7.3.81) видно, что при $\varphi_{\max} = 0$ радиальные компоненты импульсов отсутствуют. При $\kappa < 1$ импульс, прикладываемый при $\varphi = 0$, является тормозящим, а при $\varphi = \pi$ — разгоняющим. При $\kappa > 1$ оба импульса разгоняющие. При $\kappa = 1$ импульсы прикладываются только при $\varphi = \pi$.

Рассмотрим далее случай, когда одновременно с поворотом плоскости орбиты изменяется направление оси апсид, а параметры p и e не изменяются. В этом случае из (6.3.10), (7.3.2), (7.3.9) при $\varphi_{\pi, N+1} \geq \varphi_{\pi 0}$ получаются формулы

$$\kappa = 0, \quad \sigma = \frac{2e}{\Delta_i} \sin \left(\frac{\varphi_{\pi, N+1} - \varphi_{\pi 0}}{2} \right), \quad \varphi_{\max} = \frac{\varphi_{\pi 0} + \varphi_{\pi, N+1}}{2} - \frac{\pi}{2}. \quad (7.3.82)$$

При $\kappa = 0$ абсолютный минимум $\Delta V_z = \Delta V_{z \text{ опт}}$ достигается либо при перелетах с импульсами в узлах, либо при вырожденных

перелетах. При $\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{\max}$ оптимальными являются перелеты с импульсами в узлах, а при $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{\max}$ — вырожденные перелеты. Зависимости отношения $\frac{\Delta V_{\Sigma \text{opt}}}{\Delta i}$ от σ , рассчитанные с помощью формул (7.3.38) и (7.3.65) для $0 \leq \varphi_{\max} \leq 90^\circ$, изображены на рис. 7.3.12. Штриховой линией на этом рисунке изображена граница, на которой происходит переход от перелетов

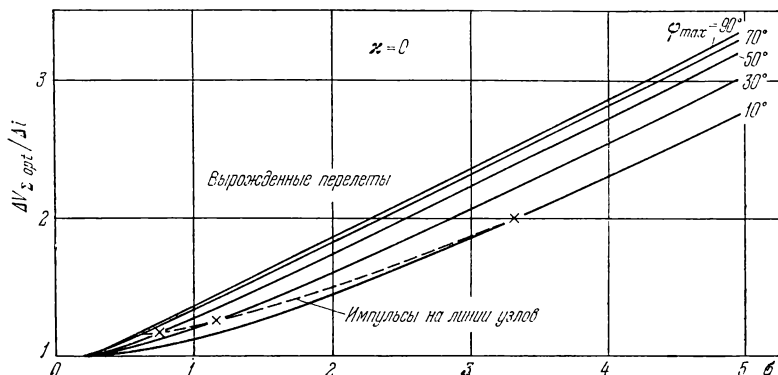


Рис. 7.3.12.

с импульсами в узлах к вырожденным перелетам. Зависимости моментов приложения импульсов и отношений $\frac{\Delta V_0}{\Delta V_{\Sigma}}$ от σ при $\varphi_{\max} = 90^\circ$ изображены на рис. 7.3.13.

В качестве последнего примера рассмотрим перелеты между некомпланарными орбитами, отличающимися только значениями эксцентриситета. От первого примера этот случай отличается тем, что линия узлов не совпадает с линией апсид. Тогда из (7.3.2) и (7.3.9) при $e_{N+1} \geq e_0$ для κ , σ и $\varphi_{\max}$ имеем

$$\kappa = 0, \quad \sigma = \frac{e_{N+1} - e_0}{\Delta i}, \quad \varphi_{\max} = \varphi_{\pi} + \pi. \quad (7.3.83)$$

Из сопоставления (7.3.82) и (7.3.83) видно, что случай, когда изменяется эксцентриситет орбиты, отличается от предыдущего случая лишь значениями σ и $\varphi_{\max}$. Поэтому, как и ранее, при малых σ $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ достигается при перелетах с импульсами в узлах, а при больших σ — при вырожденных перелетах. Для расчета этого элементарного маневра можно воспользоваться графиками, изображенными на рис. 7.3.12 и 7.3.13.

Сопоставим ΔV_{Σ} оптимальных перелетов с ΔV_{Σ} неоптимальных рациональных перелетов для трех случаев. Сначала рассмотрим

случай, когда орбиты пересекаются в узле $\varphi = 180^\circ$. При этом переход между орбитами можно осуществить с помощью одного импульса, прикладываемого при $\varphi = 180^\circ$. При $\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{\max}$

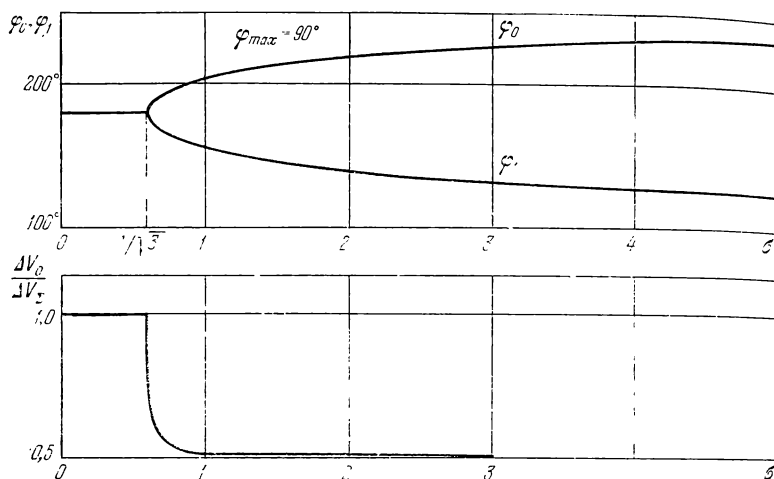


Рис. 7.3.13.

одноимпульсный перелет является оптимальным, а при больших σ оптимальным становится двухимпульсный вырожденный перелет. Однако в силу простоты при $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{\max}$ одноимпульсный

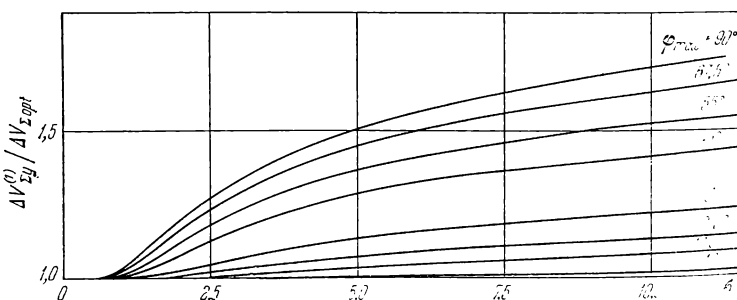


Рис. 7.3.14.

перелет можно рассматривать как рациональный перелет. Сопоставим $\Delta V_{\Sigma}^{(1)}$ — характеристическую скорость одноимпульсного перелета — с $\Delta V_{\Sigma \text{ opt}}$. На рис. 7.3.14 представлены результаты

расчетов отношения $\frac{\Delta V_{\Sigma y}^{(1)}}{\Delta V_{\Sigma \text{opt}}}$. Особенно невыгоден одноимпульсный перелет при $\varphi_{\max} = 90^\circ$ и $\kappa = 0$. Зависимости моментов приложения импульсов φ_0 и φ_1 для оптимальных перелетов от σ в этом случае изображены на рис. 7.3.13. Видно, как при увеличении σ одноимпульсный перелет с импульсами при $\varphi = 180^\circ$ превращается в вырожденный двухимпульсный перелет. Расщеплением импульсов объясняется получающийся выигрыш в ΔV_{Σ} .

В качестве второго примера рационального перелета рассмотрим трехимпульсный перелет. Первый импульс используется для совмещения плоскостей орбит, а последующие два — для оптимального плоского перехода (см. Г. Е. Кузмяк [1]). Характеристическая скорость $\Delta V_{\Sigma}^{(3)}$ этого перелета определяется формулами

$$\Delta V_{\Sigma}^{(3)} = \begin{cases} \Delta i + \frac{\sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_s^2}}{2} & \text{при } \kappa \leq 1, \\ \Delta i + \frac{\Delta_0}{2} & \text{при } \kappa \geq 1. \end{cases} \quad (7.3.84)$$

Сопоставим $\Delta V_{\Sigma}^{(3)}$ с $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ при $\Delta_s = 0$. В этом случае

$$\Delta V_{\Sigma \text{opt}} = \begin{cases} \sqrt{\Delta i^2 + \left(\frac{\Delta_c}{2}\right)^2} & \text{при } \kappa \leq 1, \\ \sqrt{\Delta i^2 + \left(\frac{\Delta_0}{2}\right)^2} & \text{при } \kappa \geq 1. \end{cases} \quad (7.3.85)$$

Из (7.3.84) и (7.3.85) видно, что $\Delta V_{\Sigma}^{(3)}$ и $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ при $\Delta_s = 0$ находятся между собой в таком же соотношении, как сумма катетов прямоугольного треугольника с длинами Δi и $\Delta_c/2$ (или $\frac{\Delta_0}{2}$) с его гипотенузой.

В качестве третьего примера рационального перелета рассмотрим условно экстремальный двухимпульсный перелет с импульсами в узлах с выражением $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V'_{\Sigma y}$, определяемым формулой (7.3.44). Сопоставим $\Delta V'_{\Sigma y}$ с $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ для случая, когда $\varphi_{\max} = 90^\circ$.

Результаты расчетов отношения $\Delta V'_{\Sigma y}/\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ в зависимости от κ для ряда значений σ представлены на рис. 7.3.15. При малых κ и $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ равняется ΔV_{Σ} вырожденного перелета, а при больших κ $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ достигается при перелетах с импульсами по одну сторону от линии узлов. Штрихами на рис. 7.3.15 изображена линия, на которой при увеличении κ происходит переход от вырожденных перелетов к перелетам с импульсами по одну сторону от линии узлов. Особенно невыгоден условно

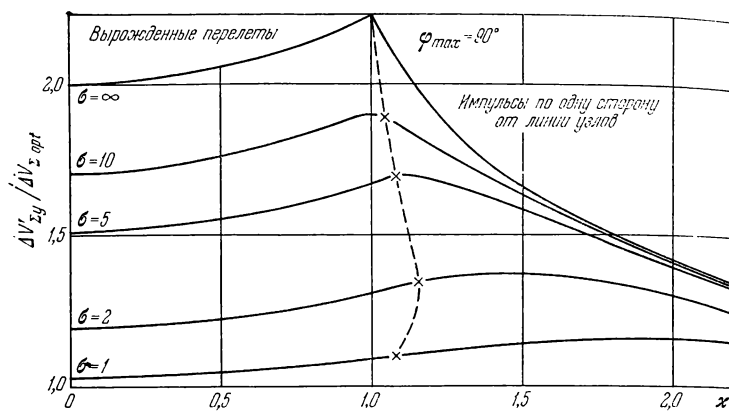


Рис. 7.3.15.

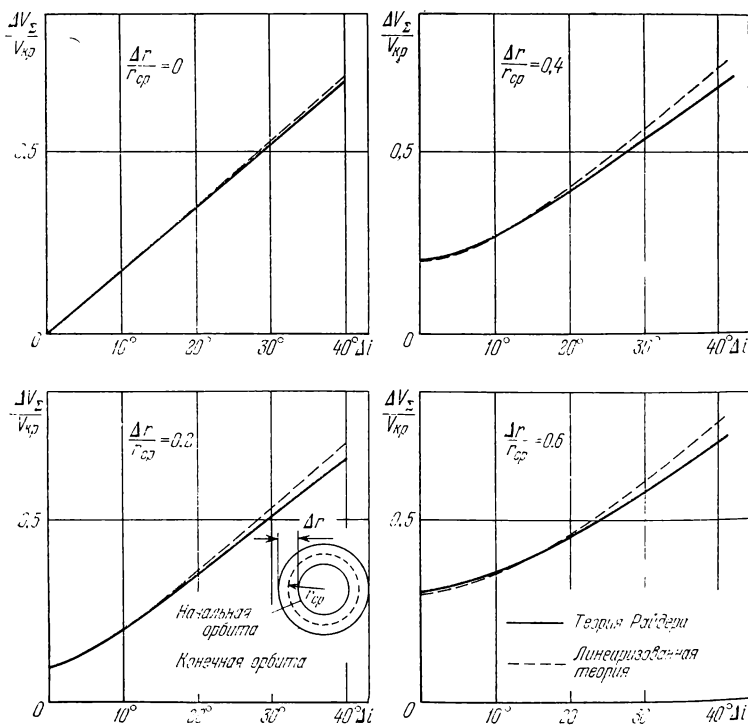


Рис. 7.3.16.

экстремальный перелет с импульсами в узлах при $\Delta i \rightarrow 0$. При $\sigma = \infty$ и $\kappa \approx 1$ $\Delta V'_{\Sigma y} / \Delta V_{\Sigma \text{opt}} \approx 2,24$. Однако при больших κ условно экстремальный перелет с импульсами в узлах близок к оптимальному. Это также видно из графиков, приведенных на рис. 7.3.3 и 7.3.4, где представлены результаты расчетов моментов приложения импульсов для перелета с импульсами по одну сторону от линии узлов. При увеличении κ моменты приложения импульсов приближаются к узловым точкам.

В заключение сопоставим результаты расчета ΔV_z по линеаризованной теории с результатами расчетов по методике Райдера [1] для случая перелетов между некомпланарными круговыми орбитами. По теории Райдера при малых Δi и Δr оптимальный перелет осуществляется с помощью двух пространственных импульсов, прикладываемых в узловых точках. Это совпадает с выводами линеаризованной теории. Результаты расчетов ΔV_z по линеаризованной теории и по методике Райдера представлены на рис. 7.3.16. При определении ΔV_z — безразмерной характеристической скорости — по методике Райдера она относилась к круговой скорости, определенной для $r_{\text{ср}}$, равного полусумме радиусов начальной и конечной орбит. Видно, что при $\Delta r / r_{\text{ср}} \leq 0,6$ и $\Delta i \leq 30^\circ$ погрешность не превышает 6%.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
МАНЕВРИРОВАНИЯ В ТОНКИХ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ

§ 8.1. Постановка задачи. Основные уравнения

8.1.1. Вводные замечания. Цель этой и следующей глав — рассмотрение задач околопланетного маневрирования с ограниченными угловыми дальностями, что характерно для внеатмосферных участков траектории при выведении и спуске КА. В таких задачах можно считать, что угловая дальность перелета не превосходит $\pi/2$. Для Земли это соответствует траекториям с дальностями не более 10 000 км. Для этого класса задач характерна значительная протяженность активных участков, что делает невозможным использование импульсных схем перелетов и существенно усложняет расчет оптимальных траекторий. Непосредственное применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к таким задачам позволяет довольно просто исследовать качественный характер оптимального управления, однако доведение задачи до конца требует преодоления довольно серьезных вычислительных трудностей. Установление связи между законом оптимального управления и граничными условиями сводится к краевой задаче для нелинейной системы дифференциальных уравнений, для решения которой нет достаточно эффективных методов. Поэтому для данного класса задач важным является развитие эффективных приближенных методов, учитывающих их специфические особенности. Основной особенностью рассматриваемого класса задач является то, что при околопланетном маневрировании выведение и спуск КА происходит в сферическом слое, толщину которого можно считать малой по сравнению с расстоянием до центра притяжения. Однако, в отличие от изложенной выше линеаризованной теории, в задачах выведения и спуска не выполняется предположение о близости величины скорости полета к величине круговой скорости. Величина скорости может изменяться от очень малых значений в начале выведения до значений, заметно превышающих первую космическую скорость в конце траектории выведения. Поэтому результаты предыдущих двух глав, вообще говоря, неприменимы для решения задач выведения и спуска, и необходимо развитие теории, основанной на единственном предположении о тонкости слоя.

Рассмотрению такой теории, основные положения которой изложены в статьях Г. Е. Кузмака [5, 6, 7] и Г. Е. Кузмака, А. З. Брауде [2], посвящены настоящая и следующая главы.

8.1.2. Основные уравнения и вариационная задача. Итак, будем рассматривать задачу об оптимальном управлении движением материальной точки в пустоте в тонком сферическом слое ньютоновского поля тяготения. Толщина слоя $|\delta r_m|$ предполагается малой по сравнению со средним радиусом слоя r_{cp} . Точное уравнение движения в декартовой системе координат $Oxyz$ с началом в центре притяжения, записанное в векторной форме, имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{g(r)}{r} \mathbf{r} = \mathbf{a}(t). \quad (8.1.1)$$

Здесь t — время, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $g(r) = \mu/r^2$ — ускорение силы тяжести, где $\mu = \text{const}$ — гравитационная постоянная, $\mathbf{a}(t)$ — вектор ускорения от силы тяги. В силу тонкости слоя функция $g(r)/r$ близка к постоянной величине μ/r_{cp}^3 , а ее изменение с достаточной точностью можно учесть, сохранив в разложении по степеням $\delta r = r - r_{cp}$ линейный член:

$$\frac{g(r)}{r} = v^2 \left(1 - \frac{3\delta r}{r_{cp}} \right) + \dots, \quad (8.1.2)$$

где

$$v^2 = \frac{\mu}{r_{cp}^3} = \frac{g(r_{cp})}{r_{cp}} = \left[\frac{V_{кр}(r_{cp})}{r_{cp}} \right]^2.$$

Всюду далее линейные величины будем относить к r_{cp} , скорости — к $V_{кр}(r_{cp})$ (круговой скорости для средней точки слоя), ускорение $\mathbf{a}(t)$ — к $g(r_{cp})$, а время — к интервалу, равному $1/v = r_{cp}/V_{кр}(r_{cp}) = 1/2\pi$ от периода обращения спутника по круговой орбите с радиусом r_{cp} . Сохраняя старые обозначения для безразмерных величин, уравнение (8.1.1) с учетом (8.1.2) с относительной погрешностью порядка $(\delta r)^2$ можно записать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + (1 - 3\delta r) \mathbf{r} = \mathbf{a}(t). \quad (8.1.3)$$

Поскольку второй член в круглых скобках много меньше единицы, зависимость его от t можно определить приближенно, основываясь на краевых условиях, которым должна удовлетворять траектория. При $t = 0$ обычно известны $r = r_0$ и радиальная компонента скорости $V_r = dr/dt = d\delta r/dt = V_{r0}$. В конечный момент времени $t = T$ в задачах выведения в заданное положение известно $r = r_1$. Если же при $t = T$ задается вектор скорости, то в этот момент известно также значение $V_r = V_{r1}$. Этим условиям можно удовлетворить, если аппроксимировать зависимость $\delta r(t)$

с помощью многочлена третьей степени

$$\delta r(t) = \delta r_m (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3), \quad (8.1.4)$$

где $\delta r_m = r_1 - r_0$ — толщина слоя, выраженная в долях r_{cp} , которая является малым параметром. Если считать, что $r_{cp} = (r_0 + r_1)/2$, то для коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) получаются выражения

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= \frac{V_{r0}}{\delta r_m} \\ a_2 &= \begin{cases} \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m}\right) \frac{1}{T^2}, & \text{если заданы } r_0, V_{r0}, r_1, \\ \left(3 - \frac{2V_{r0} + V_{r1}}{\delta r_m} T\right) \frac{1}{T^2}, & \text{» » } r_0, V_{r0}, r_1, V_{r1}, \end{cases} \\ a_3 &= \begin{cases} 0, & \text{если заданы } r_0, V_{r0}, r_1, \\ \left(-2 + \frac{V_{r0} + V_{r1}}{\delta r_m} T\right) \frac{1}{T^3}, & \text{» » } r_0, V_{r0}, r_1, V_{r1}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8.1.5)$$

При задании $\delta r(t)$ в виде функции от времени (8.1.4) уравнение (8.1.3) превращается в линейное уравнение с переменным коэффициентом и его решение может быть представлено в форме (см. формулу (П. 17) Приложения)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{00} c(t) + \mathbf{V}_{00} s(t) + \int_0^t K(t, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi, \\ \mathbf{V}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_{00} \frac{dc}{dt} + \mathbf{V}_{00} \frac{ds}{dt} + \int_0^t L(t, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.6)$$

где $\mathbf{r}_{00}$ и $\mathbf{V}_{00}$ — значения радиуса-вектора и вектора скорости при $t = 0$; $c(t)$ и $s(t)$ — частные решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + [1 - 3\delta r_m (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)] u = 0, \quad (8.1.7)$$

удовлетворяющие при $t = 0$ соответственно условиям $c(0) = 1$, $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = 0$ и $s(0) = 0$, $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 1$. Функции влияния $K(t, \xi)$ и $L(t, \xi)$ при $t = \text{const}$ удовлетворяют аналогичному уравнению

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + [1 - 3\delta r_m (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3)] u = 0 \quad (8.1.8)$$

с граничными условиями, заданными при $\xi = t$:

$$\begin{aligned} K(t, \xi)|_{\xi=t} &= 0, & \frac{dK}{d\xi}\bigg|_{\xi=t} &= -1, \\ L(t, \xi)|_{\xi=t} &= 1, & \frac{dL}{d\xi}\bigg|_{\xi=t} &= 0. \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

В уравнениях (8.1.7) и (8.1.8) под u подразумеваются соответственно функции $c(t)$, $s(t)$ и $K(t, \xi)$, $L(t, \xi)$. Точные решения уравнений (8.1.7) и (8.1.8) через известные функции не выражаются. Но поскольку они содержат малый параметр δr_m , решение можно найти приближенно методом малого параметра (см. Коул [1], И. Г. Малкин [1]). Так как исходное уравнение (8.1.3) справедливо с относительной погрешностью порядка $(\delta r_m)^2$, то и решение уравнений (8.1.7) и (8.1.8) следует искать с такой же точностью. Таким образом, при построении рядов по степеням малого параметра можно ограничиться определением лишь членов нулевого и первого порядков относительно δr_m . Наметим основные этапы вычисления функции $c(t)$. В соответствии со сказанным выше выражение для нее будем искать в виде

$$c(t) = \cos t + \delta r_m \cdot \sigma(t) + O(\delta r_m^2). \quad (8.1.10)$$

Подставляя это выражение в (8.1.7), получим

$$\frac{d^2 \cos t}{dt^2} + \cos t + \delta r_m \left[\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \sigma - 3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \cos t \right] + O(\delta r_m^2) = 0.$$

Члены порядка единицы в этом уравнении взаимно уничтожаются, членами $O(\delta r_m^2)$ пренебрегаем, а для того, чтобы скомпенсировать члены порядка δr_m , функция $\sigma(t)$ должна быть определена из уравнения

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \sigma = 3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \cos t \quad (8.1.11)$$

с начальными условиями

$$\sigma|_{t=0} = \frac{d\sigma}{dt}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Путь вычисления функции $s(t)$ аналогичен. Опуская несложные выкладки, приведем получающиеся приближенные выражения для функций $c(t)$, $s(t)$ и производных от них:

$$c(t) = \cos t + \delta r_m \sum_{i=0}^3 a_i c_i(t), \quad s(t) = \sin t + \delta r_m \sum_{i=0}^3 a_i s_i(t), \quad (8.1.12)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\sin t + \delta r_m \sum_{i=0}^3 a_i \frac{dc_i}{dt}, \quad \frac{ds}{dt} = \cos t + \delta r_m \sum_{i=0}^3 a_i \frac{ds_i}{dt}. \quad (8.1.13)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 c_0(t) &= \frac{3}{2} t \sin t, \quad c_1(t) = \frac{3}{4} [t \cos t + (t^2 - 1) \sin t], \\
 c_2(t) &= \frac{3}{4} t \left[t \cos t + \left(\frac{2}{3} t^2 - 1 \right) \sin t \right], \\
 c_3(t) &= \frac{3}{4} t \left[\left(t^2 - \frac{3}{2} \right) \cos t + \frac{1}{2} (t^4 - 3t^2 + 3) \sin t \right], \\
 s_0(t) &= \frac{3}{2} (\sin t - t \cos t), \quad s_1(t) = \frac{3}{4} t (\sin t - t \cos t), \\
 s_2(t) &= \frac{3}{4} \left[(t^2 - 1) \sin t - t \left(\frac{2}{3} t^2 - 1 \right) \cos t \right], \\
 s_3(t) &= \frac{3}{4} t \left[\left(t^2 - \frac{3}{2} \right) \sin t - \frac{1}{2} (t^2 - 3) t \cos t \right], \\
 \frac{dc_0}{dt} &= \frac{3}{2} (\sin t + t \cos t), \quad \frac{dc_1}{dt} = \frac{3}{4} t (t \cos t + \sin t), \\
 \frac{dc_2}{dt} &= \frac{3}{4} t \left[t \left(\frac{2}{3} t^2 + 1 \right) \cos t + (t^2 - 1) \sin t \right], \\
 \frac{dc_3}{dt} &= \frac{3}{4} t \left[\left(t^2 - \frac{3}{2} \right) \sin t + \frac{1}{2} (t^2 + 3) \cos t \right], \\
 \frac{ds_0}{dt} &= \frac{3}{2} t \sin t, \quad \frac{ds_1}{dt} = \frac{3}{4} [(t^2 + 1) \sin t - t \cos t], \\
 \frac{ds_2}{dt} &= \frac{3}{4} t \left[\left(\frac{2}{3} t^2 + 1 \right) \sin t - t \cos t \right], \\
 \frac{ds_3}{dt} &= \frac{3}{4} t \left[\frac{1}{2} (t^4 + 3t^2 - 3) \sin t - t \left(t^2 - \frac{3}{2} \right) \cos t \right].
 \end{aligned} \right\} (8.1.14)$$

Графики этих функций приведены на рис. 8.1.1.

Функции влияния можно выразить через функции $c(t)$ и $s(t)$, для чего перейдем в равенствах (8.1.8) и (8.1.9) от переменной ξ к новой переменной $\eta = t - \xi$:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \{1 - 3\delta r_m [\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\eta + \\
 + \alpha_2(t)\eta^2 + \alpha_3(t)\eta^3]\} u &= 0, \\
 K|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{dK}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= 1, \\
 L|_{\eta=0} = 1, \quad \frac{dL}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= 0,
 \end{aligned} \right\} (8.1.15)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad \alpha_1(t) = -(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2), \\ \alpha_2(t) &= a_2 + 3a_3 t, \quad \alpha_3 = -a_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.16)$$

Сопоставление этих равенств с (8.1.7) и начальными условиями

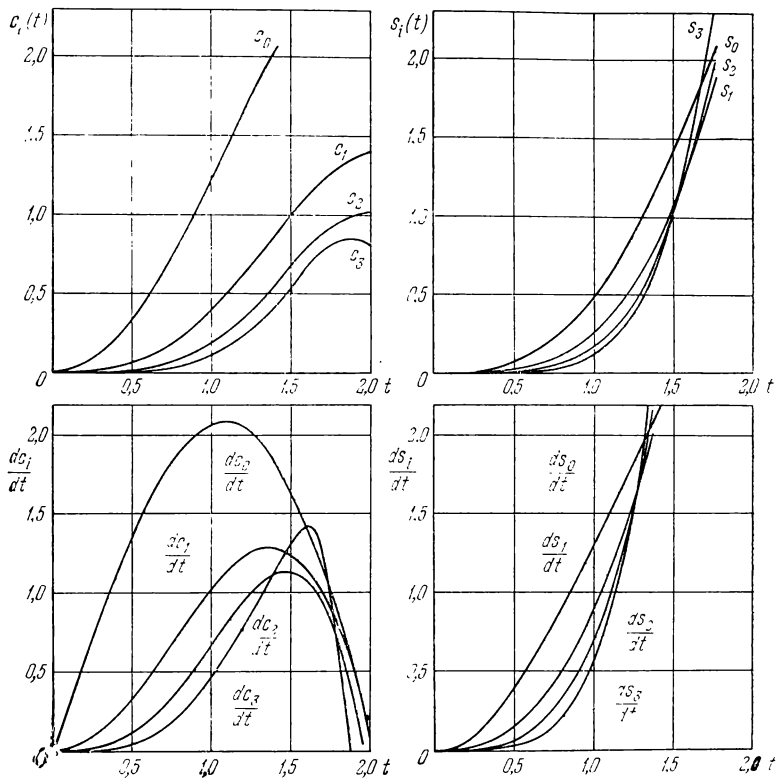


Рис. 8.1.1.

для функций $c(t)$ и $s(t)$ дает

$$K(t, \xi) = s(\eta)|_{\alpha_i=\alpha_i(t)} = \sin(t - \xi) + \delta r_m \sum_{i=0}^3 \alpha_i(t) s_i(t - \xi), \quad (8.1.17)$$

$$L(t, \xi) = c(\eta)|_{\alpha_i=\alpha_i(t)} = \cos(t - \xi) + \delta r_m \sum_{i=0}^3 \alpha_i(t) c_i(t - \xi). \quad (8.1.18)$$

Из (8.1.14) и (8.1.16) видим, что

$$\frac{ds_0}{dt} = c_0, \quad \frac{ds_1}{dt} = c_1 + s_0, \quad \frac{ds_2}{dt} = c_2 + 2s_2, \quad \frac{ds_3}{dt} = c_3 + 3c_2,$$

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = -\alpha_1, \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = -2\alpha_2, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -3\alpha_3.$$

Отсюда следует: $L(t, \xi) = \partial K(t, \xi) / \partial t$, что обеспечивает совместность обоих равенств (8.1.6).

Обозначим внеинтегральные члены в равенствах (8.1.6), описывающие свободное движение КА, следующим образом:

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_{00} c(t) + \mathbf{V}_{00} s(t), \quad \mathbf{V}_0(t) = \mathbf{r}_{00} \frac{dc}{dt} + \mathbf{V}_{00} \frac{ds}{dt}. \quad (8.1.19)$$

Тогда (8.1.6) для конечного момента времени $t = T$ можно представить так:

$$\int_0^T K(T, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{r}(T), \quad \int_0^T L(T, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{V}(T), \quad (8.1.20)$$

где

$$\Delta \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}(T) - \mathbf{r}_0(T), \quad \Delta \mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(T) - \mathbf{V}_0(T). \quad (8.1.21)$$

Векторы $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ представляют собой невязки в граничных условиях, которые должны быть выбраны с помощью управляющего ускорения $\mathbf{a}(t)$. Эти векторы далее будем называть *векторами конечного промаха*. Заметим, что при $t = T$ выражения (8.1.16) для определения коэффициентов $\alpha_i(t)$ могут быть упрощены. Опуская несложные выкладки, приведем окончательные результаты:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}, \\ \alpha_1 &= \begin{cases} -\left(2 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m}\right) \frac{1}{T}, & \text{если заданы } r_0, V_{r0}, r_1, \\ -\frac{V_{r1}}{\delta r_m}, & \text{» » } r_0, V_{r0}, r_1, V_{r1}, \end{cases} \\ \alpha_2 &= \begin{cases} \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m}\right) \frac{1}{T^2}, & \text{если заданы } r_0, V_{r0}, r_1, \\ -\left(3 - \frac{V_{r0} + 2V_{r1}}{\delta r_m} T\right) \frac{1}{T^2}, & \text{» » } r_0, V_{r0}, r_1, V_{r1}, \end{cases} \\ \alpha_3 &= \begin{cases} 0, & \text{если заданы } r_0, V_{r0}, r_1, \\ \left(2 - \frac{V_{r0} + V_{r1}}{\delta r_m} T\right) \frac{1}{T^3}, & \text{» » } r_0, V_{r0}, r_1, V_{r1}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8.1.22)$$

Равенства (8.1.20) обеспечивают выполнение граничных условий. Им можно удовлетворить с помощью достаточно широкого класса зависимостей $a(t)$. Чтобы сделать задачу определенной, потребуем от $a(t)$ удовлетворения условия (8.1.20) и ограничения на $a(t) = |a(t)|$ и минимизации интеграла

$$I = \int_0^T a(\xi) d\xi. \quad (8.1.23)$$

Этот интеграл представляет собой величину характеристической скорости, необходимой для перелета (см. раздел 1.1.1). Таким образом, вариационная задача, которая будет рассматриваться далее, формулируется следующим образом: необходимо найти закон изменения управляющего вектора $a(t)$ при условии

$$|a(t)| \leq a_{\max}(t), \quad (8.1.24)$$

где $a_{\max}(t)$ — заданная функция, такой, чтобы выполнялись условия (8.1.20) и был бы минимален интеграл (8.1.23). Вектор-функция $a(t)$ будет выбираться из класса кусочно-непрерывных вектор-функций.

§ 8.2. Однородные поля тяготения

8.2.1. Равенство функций влияния и определение однородных полей тяготения. Важным обстоятельством, характеризующим предложенный метод, является возможность записи граничных условий (8.1.20) в векторной форме. Как будет показано далее, но с этим связано существование целого ряда простых оптимального управления. Возможность векторной записи граничных условий является следствием равенства между функциями влияния по различным координатам. На этом рассматриваемые поля тяготения, в которых g' симметрируются полиномом от времени, можно назвать полями тяготения. В таких полях вследствие равенства функций влияния по различным координатам одинаковые вариации координат управляющего ускорения $a(t)$ приводят к одинаковым компонентам радиуса-вектора и вектора скорости. Таким образом, аппроксимации вектора ускорения $a(t)$ по его направлению и приближенно — по его величине. Вследствие того, что при движении в тополе тяготения $g(r)$ и $g(r)/r$ изменяются по постоянным величинам, рассматриваемые поля тяготения можно называть тополе тяготения по аналогии

тяготения, в котором вектор силы тяготения принимается постоянным как по величине, так и по направлению. В дальнейшем указанную модель центрального поля тяготения будем называть *однородным центральным полем*.

В однородном центральном поле тяготения все определяется функциями влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ и векторами $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{V}_0(t)$, которые даются формулами (8.1.19) и описывают свободное движение. Особенно простые выражения для этих величин получаются, если в выражениях (8.1.17) — (8.1.19) пренебречь членами порядка δr_m по сравнению с членами порядка единицы. При таком упрощении задачи формулы для векторов $\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{V}_0(t)$ и функций влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{r}_{00} \cos t + \mathbf{V}_{00} \sin t, \\ \mathbf{V}_0(t) &= -\mathbf{r}_{00} \sin t + \mathbf{V}_{00} \cos t, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.1)$$

$$K(T, \xi) = \sin(T - \xi), \quad L(T, \xi) = \cos(T - \xi). \quad (8.2.2)$$

Эти формулы являются точными для случая движения по сфере.

8.2.2. Формулы для малых значений T . Упростим выражения для векторов $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{V}_0(t)$ и функций влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ при $\delta r_m \neq 0$, когда T мало. Выпишем с этой целью главные члены при малых t в выражениях (8.1.14) для функций $c_i(t)$, $s_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, и их производных:

$$\left. \begin{aligned} c_0(t) &= \frac{3}{2} t^2 + O(t^4), & c_1(t) &= \frac{1}{2} t^3 + O(t^5), \\ c_2(t) &= \frac{1}{4} t^4 + O(t^6), & c_3(t) &= \frac{3}{20} t^5 + O(t^7), \\ s_0(t) &= \frac{1}{2} t^3 + O(t^5), & s_1(t) &= \frac{1}{4} t^4 + O(t^6), \\ s_2(t) &= \frac{3}{20} t^5 + O(t^7), & s_3(t) &= \frac{1}{10} t^6 + O(t^8), \\ \frac{dc_0}{dt} &= 3t + O(t^3), & \frac{dc_1}{dt} &= \frac{3}{2} t^2 + O(t^4), \\ \frac{dc_2}{dt} &= t^3 + O(t^5), & \frac{dc_3}{dt} &= \frac{3}{4} t^4 + O(t^6), \\ \frac{ds_0}{dt} &= \frac{3}{2} t^2 + O(t^4), & \frac{ds_1}{dt} &= t^3 + O(t^5), \\ \frac{ds_2}{dt} &= \frac{3}{4} t^4 + O(t^6), & \frac{ds_3}{dt} &= \frac{3}{5} t^5 + O(t^7). \end{aligned} \right\} \quad (8.2.3)$$

Для того чтобы выделить главные члены при малых t и T в выражениях для функций влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ и векторов $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{V}_0(t)$, необходимо оценить порядок коэффициентов a_i и b_i в формулах (8.1.5) и (8.1.22). При проведении таких оценок необходимо основываться на том, что при

$) \leq t \leq T$ движение не выходит за пределы сферического слоя с толщиной δr_m . Условия, при которых это имеет место, могут быть записаны в виде следующих неравенств:

$$\frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \leq O(1), \quad \frac{V_{r1}T}{\delta r_m} \leq O(1). \quad (8.2.4)$$

Основываясь на этих неравенствах, можно заключить, что

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= O(1), & \alpha_0 &= O(1), \\ a_1 &= O\left(\frac{1}{T}\right), & \alpha_1 &= O\left(\frac{1}{T}\right), \\ a_2 &= O\left(\frac{1}{T^2}\right), & \alpha_2 &= O\left(\frac{1}{T^2}\right), \\ a_3 &= O\left(\frac{1}{T^3}\right), & \alpha_3 &= O\left(\frac{1}{T^3}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5)$$

Эти оценки позволяют выделить основные и главные поправочные члены в выражениях для $r_0(t)$ и $V_0(t)$. Приведем получающиеся выражения для случая, когда краевыми условиями задаются значения r_0 , V_{r0} и r_1 :

$$\left. \begin{aligned} r_0(t) &= r_{00} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \delta r_m \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \left(\frac{t}{T} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + V_{00} \left\{ t - \frac{t^3}{6} + t^3 \delta r_m \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \left(\frac{t}{T} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \right\}, \\ V_0(t) &= r_{00} \left\{ -t + \frac{t^3}{6} + t \delta r_m \left[-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \left(\frac{t}{T} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \right\} + V_{00} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \delta r_m \left[-\frac{3}{4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \left(\frac{t}{T} \right) + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{V_{r0}T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

Когда задается еще значение V_{r1} , получаются аналогичные выражения. В формулах (8.2.6) четко видно влияние членов порядка δr_m , которые учитывают изменение величины гравитационного ускорения. Напомним, что все величины, входящие в эти формулы, являются безразмерными (см. начало предыдущего параграфа).

Для определения векторов конечного промаха необходимо знать $\mathbf{r}_0(T)$ и $\mathbf{V}_0(T)$. При $t = T$ формулы (8.2.6) заметно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0(T) &= \mathbf{r}_{00} \left[1 - \frac{T^2}{2} + T^2 \delta r_m \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{V}_{00} \left[T - \frac{T^3}{6} + T^3 \delta r_m \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \right], \\ \mathbf{V}_0(T) &= \mathbf{r}_{00} \left[-T + \frac{T^3}{6} + T \delta r_m \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{V}_{00} \left(1 - \frac{T^2}{2} + T^2 \delta r_m \cdot \frac{1}{4} \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.2.7)$$

Упрощенные выражения для функций влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ получаются на основании (8.1.17), (8.1.18), формул (8.1.22) для случая задания r_0 , V_{r0} , r_1 , (8.2.3) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} K(T, \xi) &= T - \xi - \frac{(T - \xi)^3}{6} + \\ &+ \delta r_m (T - \xi)^3 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{T - \xi}{T} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{T - \xi}{T} \right)^2 \right], \\ L(T, \xi) &= 1 - \frac{(T - \xi)^2}{2} + \delta r_m (T - \xi)^2 \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{T - \xi}{T} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{V_{r0} T}{\delta r_m} \right) \left(\frac{T - \xi}{T} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

Эти формулы, так же как и предыдущие (8.2.7), получены для случая, когда красвыми условиями задаются значения r_0 , V_{r0} и r_1 .

Из приведенных приближенных формул хорошо видно, что изложенный метод обладает высокой точностью, если траектория движения выбирается таким образом, что $\delta r_m \ll 1$.

8.2.3. Однородное поле тяготения. Получим для этого поля векторные формулы, описывающие свободное движение, и выражения для функций влияния. В плоскопараллельном постоянном поле вектор ускорения силы тяготения $\mathbf{g}$ является постоянным

котором и уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{a}(t) + \mathbf{g}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.9)$$

общее решение (8.2.9) может быть записано так:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0(t) + \int_0^t (t - \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi, \\ \mathbf{V}(t) &= \mathbf{V}_0(t) + \int_0^t \mathbf{a}(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.10)$$

десь

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}, \\ \mathbf{V}_0(t) &= \mathbf{V}_{00} + \mathbf{g}t, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.11)$$

где $\mathbf{r}_{00}$ и $\mathbf{V}_{00}$ — значения радиуса-вектора и вектора скорости при $t = 0$.

Очевидно, что функции влияния таковы:

$$K(t, \xi) = t - \xi, \quad L(t, \xi) = 1. \quad (8.2.12)$$

С использованием этих обозначений граничные условия при $t = T$ могут быть записаны, так же как и ранее, в виде (8.1.20). Специфика рассматриваемого поля, очевидно, проявляется в виде формул, описывающих свободное движение и функции влияния.

Для случая однородного поля тяготения введенные выше безразмерные величины не являются достаточно характерными. Поэтому всюду далее, когда речь будет идти о движении в этом поле, под $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ и t следует подразумевать размерные величины.

Формулы (8.2.11) и (8.2.12) могут быть получены из формул (8.2.7) и (8.2.8), которые описывают движение в однородном центральном поле тяготения при малых T . Для того чтобы в этом убедиться, необходимо в формулах (8.2.7) и (8.2.8) положить $d\mathbf{r}_m = 0$, отбросить старшие степени T и затем перейти к размерным величинам.

Использование векторной формы (8.1.20) для записи граничных условий позволяет единым образом исследовать особенности оптимального управления для всех рассмотренных однородных полей тяготения.

8.2.4. Сравнение с точным решением. Оценка погрешности.
Для сравнения приближенных решений с точными ограничимся

случае свободного движения. Помимо самостоятельного значения, это необходимо и для задачи с управляющим ускорением, так как, в соответствии с результатами §§ 8.4 и 8.5, движение в

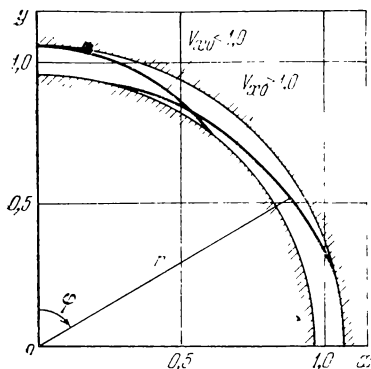


Рис. 8.2.1.

направлениях, перпендикулярных к плоскости и к прямой управления, происходит без воздействия тяги. Точные решения для свободного движения рассчитывались по кеплеровым формулам, описывающим движение в ньютоновском поле тяготения. Сравнение проводилось для слоя с $|\delta r_m| = 0,1$. Схема расположения траекторий изображена на рис. 8.2.1. Предполагалось, что движение начинается из апсидальной точки, лежащей на границе слоя. Для получения расположенных в слое траекторий с различной продолжительностью

перелета варьировалась величина начальной скорости $V_{00} = V_{x0}$. При $V_{x0} < 1,0$ траектории начинались с верхней границы слоя, а при $V_{x0} > 1,0$ — с нижней границы. При сравнении точных решений с приближенными сопоставлялись зависимости расстояния до центра тяготения $r(t)$ и угловой дальности $\varphi(t)$. Результаты для $V_{x0} < 1,0$ изображены на рис. 8.2.2 и 8.2.3, а для значений $V_{x0} > 1,0$ — на рис. 8.2.4 и 8.2.5 (1 — точные решения, 2 — однородное центральное поле, $\delta r_m \neq 0$). Расчет коэффициентов a_i , входящих в формулу (8.1.12), проводился по формулам (8.1.5) при заданных r_0 , $V_{r0} = 0$, r_1 и значениях T , определенных из точного решения и представляющих собой момент попадания точного решения на границу слоя. Для сравнения на рис. 8.2.2—8.2.5 нанесены также результаты расчетов для однородного поля тяготения (4), в котором ускорение силы тяготения вычисляется в точке с координатами $(x = 0, y = 1,0)$ (см. рис. 8.2.1), для однородного центрального поля (5) при $\delta r_m = 0$ и для линеаризованного в окрестности точки $(x = 0, y = 1,0)$ поля тяготения (3), которое впервые было предложено использовать для задачи выведения искусственного спутника на орбиту в работе Д. Е. Охочимского и Т. М. Энеева [1]. Из сопоставления кривых, приведенных на рис. 8.2.2—8.2.5, видно, что погрешность результатов расчета по модели однородного центрального поля при $\delta r_m \neq 0$ не превышает нескольких процентов от $|\delta r_m|$ при $\varphi \leq 1,2$. Такому же неравенству удовлетворяет безразмерное время t . При $r_{cp} \approx 6500$ км это соответствует интервалам времени, не превосходящим величин порядка 1000 сек. Таким образом, изложенный метод обладает достаточно широкой областью

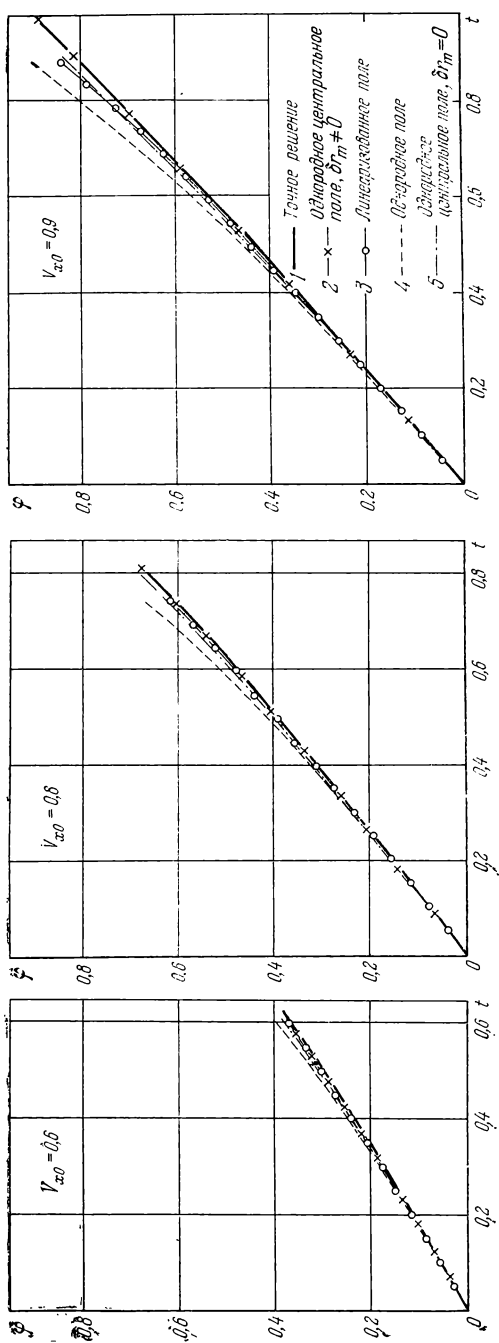


Рис. 8.2.3.

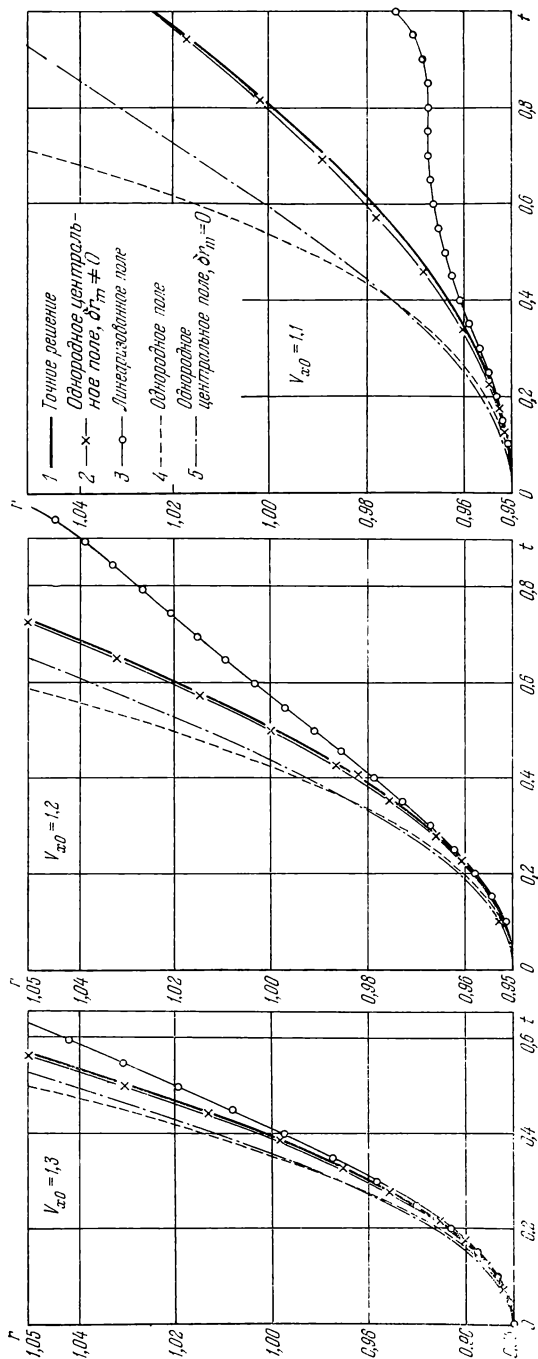


Рис. 8.24.

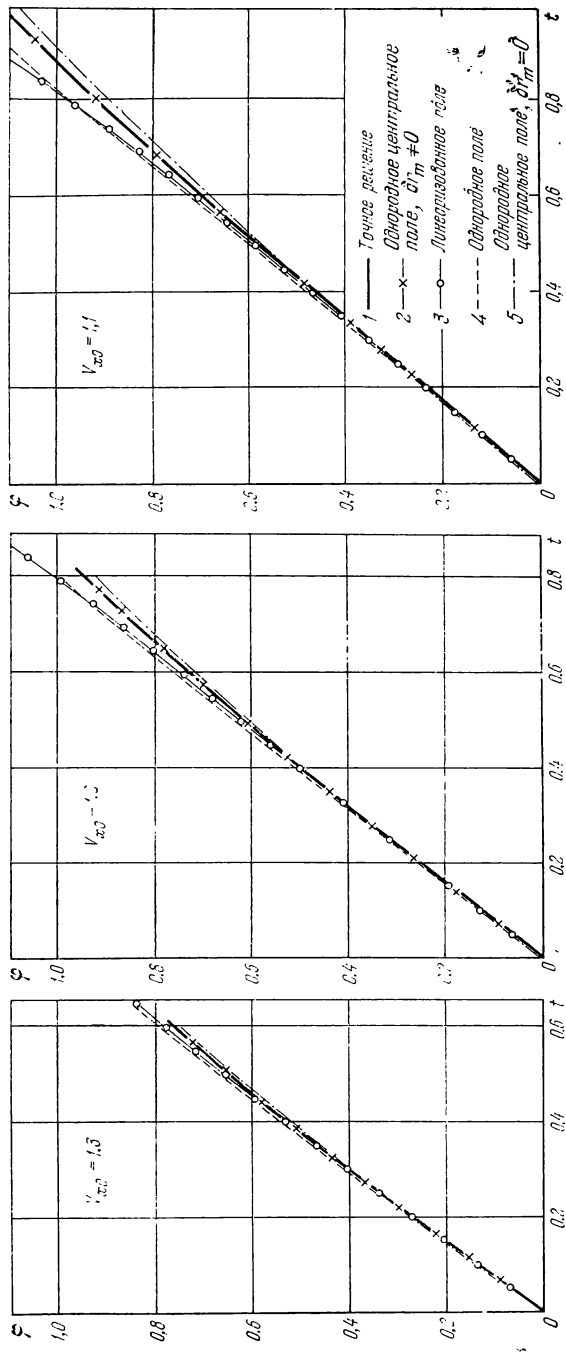


Рис. 8.2.5.

применимости. Результаты расчетов для линеаризованного поля имеют погрешность порядка нескольких процентов при $\varphi \leq 0,4$ ($t \leq 0,4$). При использовании однородного поля погрешность такого же порядка получается лишь при $\varphi \leq 0,25$ ($t \leq 0,25$). При определении формы траектории точность однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$ примерно такая же, как и точность однородного поля. Основное его значение состоит в том, что оно определяет главные члены при малых значениях $|\delta r_m|$ во всех формулах § 8.1. Из § 8.1 следует, что структура оптимального управления при $\delta r_m \neq 0$ точно такая же, как и при $\delta r_m = 0$.

В заключение этого раздела оценим погрешность в величине управляющего ускорения, которая возникает за счет приближенной аппроксимации зависимости $\delta r(t)$ в уравнении (8.1.3). Будем далее обозначать приближенное значение $\delta r(t)$, определяемое из (8.1.4), тильдой сверху. Используя это обозначение, (8.1.3) перепишем так:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + [1 + 3\tilde{\delta}r(t)] \mathbf{r} = \mathbf{a}(t) + 3[\delta r - \tilde{\delta}r(t)] \mathbf{r}. \quad (8.2.13)$$

Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, можно рассматривать как новый управляющий вектор $\mathbf{a}_1(t)$:

$$\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}(t) + 3[\delta r - \tilde{\delta}r(t)] \mathbf{r}. \quad (8.2.14)$$

Все приводимые результаты имеют погрешность порядка $(\delta r_m)^2$ и для движений в тонких сферических слоях могут рассматриваться как практически точные, если решать задачу об оптимальном определении вектора $\mathbf{a}_1(t)$. Из (8.2.14) видно, что ошибка $\Delta \mathbf{a}(t)$ в определении искомого вектора $\mathbf{a}_1(t)$, отнесенная к $g(r_{cp})$, дается выражением

$$\Delta \mathbf{a}(t) = 3[\delta r - \tilde{\delta}r(t)] \mathbf{r}. \quad (8.2.15)$$

Если принять, что $\delta r_m \approx 0,05 \div 0,1$, и считать, что зависимость $\tilde{\delta}r(t)$ аппроксимирует точную зависимость $\delta r(t)$ с погрешностью, не превышающей 20% от δr_m , то из равенства (8.2.15) видно, что $|\Delta \mathbf{a}(t)|$ не превосходит величин порядка $0,03 \div 0,06$. Таким образом, если значения управляющего ускорения являются величинами порядка $g(r_{cp})$, то при достаточно длительных активных участках можно ожидать, что изложенный приближенный метод будет обладать высокой точностью.

§ 8.3. Сведение пространственной задачи к задачам меньшей размерности

8.3.1. Геометрическая интерпретация. Важной особенностью однородных полей тяготения является возможность сведения пространственной задачи к задачам меньшей размерности. Чтобы это показать, свяжем с движущейся точкой систему координат $O'x'y'z'$,

оси которой параллельны осям системы $Oxyz$, а начало совпадает с движущейся точкой (рис. 8.3.1). Будем предполагать, что известны неколлинеарные векторы $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$.

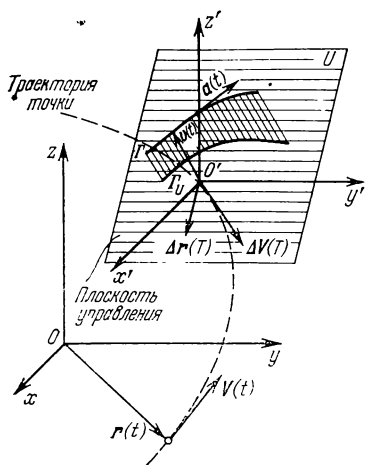


Рис. 8.3.1.

Отложим их от начала системы координат $O'x'y'z'$ и проведенную через них плоскость обозначим буквой U . Докажем, что при оптимальном управлении, минимизирующем интеграл I и обеспечивающем выполнение условий (8.1.20) и неравенства (8.1.24), вектор управляющего ускорения $a(t)$ при $0 \leq t \leq T$ располагается в плоскости U .

Введем в рассмотрение вектор $v(t)$ с помощью формулы

$$\frac{dv}{dt} = a(t). \quad (8.3.1)$$

Будем откладывать его из начала системы координат $O'x'y'z'$. В процессе движения конец этого вектора опишет некоторую, вообще говоря, пространственную кривую Γ —

годограф вектора $v(t)$. Метод доказательства с использованием годографа вектора $v(t)$ применялся В. М. Шурыгиным (1960 г.) для определения оптимального управления при плоском движении в однородном поле тяготения. В соответствии с равенствами (8.1.23) и (8.3.1) длина кривой Γ равняется I . Каждая кривая Γ определяет закон изменения управляющего ускорения $a(t)$. Будем далее рассматривать только такие кривые Γ , для которых выполняются условия (8.1.20) и условия, налагаемые на $a(t)$, ограничивающие скорость движения конца вектора $v(t)$ по кривой Γ . Решение рассматриваемой вариационной задачи определяется той из этих кривых, которая имеет наименьшую длину. Обозначим через Γ_U проекцию кривой Γ на плоскость U . Если для кривой Γ выполняются условия (8.1.20), то они также выполняются и для ее проекции Γ_U . Для того чтобы в этом убедиться, достаточно векторные равенства (8.1.20) спроектировать на плоскость U и учесть то, что компонента вектора $a(t)$ по нормали к плоскости U никак не влияет на выполнение условий (8.1.20). Точно так же обстоит дело с ограничениями, налагаемыми на $a(t)$. Длина кривой Γ_U всегда не более длины кривой Γ . Поэтому минимальное значение I достигается для кривых, расположенных в плоскости U (Г. Е. Кузмак, В. К. Исасев, Б. Х. Давидсон [1]).

Таким образом, доказано, что при оптимальном пространственном движении вектор $a(t)$ расположен в плоскости U , сохраняющей свою ориентацию в пространстве.

8.3.2. Правило для определения ориентации плоскости управления. Из доказанного в предыдущем разделе следует, что в процессе движения вектор $\mathbf{a}(t)$ остается параллельным плоскости U , имеющей неизменную ориентацию в пространстве. Эту плоскость далее будем называть *плоскостью управления*. Ее ориентация определяется векторами $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$, откладываемыми из какой-либо фиксированной в инерциальном пространстве точки. При неколлинеарных векторах $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ построенная таким образом плоскость определяется однозначно и параллельна перемещающейся поступательно плоскости управления U .

При известной ориентации плоскости управления задача об оптимальном управлении пространственным движением сводится к плоской задаче. Чтобы это сделать, плоскость Oxy системы координат $Oxyz$ следует выбрать параллельной плоскости управления. При такой ориентации системы координат проекция траектории на плоскость Oxy должна удовлетворять условиям (8.1.20), ограничениям на $\mathbf{a}(t)$, где все входящие в них векторы являются двумерными, и минимизировать интеграл I . Движение же точки в направлении оси z , перпендикулярной к плоскости управления, определяется проекцией вектора $\mathbf{r}_0(t)$ на эту ось. Оно не зависит от закона управления и целиком определяется начальными условиями. Таким образом, *задача построения оптимальной пространственной траектории всегда сводится к оптимизации ее проекции на плоскость Oxy , параллельную плоскости управления.*

В тех случаях, когда при $t = T$ не задаются некоторые из компонент векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$, векторы $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ оказываются определенными с точностью до ряда параметров, которые следует выбрать оптимально. Тогда указанная плоская вариационная задача оказывается задачей с параметрами, которые входят в правые части равенств (8.1.20). После того как она решена, эти параметры становятся известными и плоскость управления может быть построена так же, как и ранее.

8.3.3. Случаи существования прямой управления. Остановимся далее на случаях, когда задача об управлении оптимальным пространственным движением сводится к одномерной задаче. При одномерном управлении вектор управляющего ускорения $\mathbf{a}(t)$ при $0 \leq t \leq T$ параллелен некоторому фиксированному в пространстве направлению — *прямой управления U* ; в процессе движения возможно лишь изменение ориентации вектора $\mathbf{a}(t)$ на противоположное. Из (8.1.20) видно, что при таких условиях векторы $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ должны быть коллинеарными. Таким образом, прямая управления может существовать в одном из следующих трех случаев:

- а) задан вектор $\Delta \mathbf{r}(T)$, а вектор $\Delta \mathbf{V}(T)$ произволен;
- б) задан вектор $\Delta \mathbf{V}(T)$, а вектор $\Delta \mathbf{r}(T)$ может быть любым;
- в) заданы оба вектора $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$, и они коллинеарны.

Докажем, что во всех этих случаях, когда граничные условия определяют лишь одно фиксированное направление в пространстве, вектор $\mathbf{a}(t)$ при оптимальном управлении лежит на прямой управления U , которая проходит через движущуюся точку и параллельна в случае а) вектору $\Delta \mathbf{r}(T)$, в случае б) вектору $\Delta \mathbf{V}(T)$ и в случае в) обоим заданным векторам $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$. Для доказательства, также как и ранее, рассмотрим годограф вектора $\mathbf{v}(t)$ (см. (8.3.1)). Длина дуги I этого годографа должна быть минимальна. Рассуждениями, аналогичными проведенным выше, нетрудно установить, что минимальное значение I достигается в случаях, когда годограф вектора $\mathbf{v}(t)$ состоит из отрезков прямых, совпадающих с прямой U , причем на отдельных участках прямой U эти отрезки могут совпадать. В последнем случае конец вектора $\mathbf{v}(t)$ проходит вдоль прямой управления сначала в одном, а затем в противоположном направлении. При этом направление вектора $\mathbf{a}(t)$, совпадающее с прямой U , изменяется на противоположное. Указанный тип годографа $\mathbf{v}(t)$, соответствующий оптимальному управлению, очевидно, доказывает искомое утверждение.

После того как ориентация прямой управления определена, движение по направлению этой прямой устанавливается законом изменения величины и знака ускорения $\mathbf{a}(t)$, движение же в направлениях, ортогональных к прямой управления, происходит свободно, без воздействия управляющего ускорения. Таким образом, в рассматриваемых случаях исходная пространственная задача сводится к одномерной.

§ 8.4. Оптимальное управление в плоскости управления

8.4.1. Исходные соотношения. Как было показано в предыдущем параграфе, при неколлинеарных векторах конечного промаха задача об оптимальном пространственном движении сводится к плоской задаче оптимизации проекции траектории на плоскость управления U , которая параллельна векторам $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$. Движение по нормали к этой плоскости происходит свободно, без воздействия управляющего ускорения. Поэтому вариационная задача ставится следующим образом. Необходимо так выбрать управляющее ускорение $\mathbf{a}(t)$, удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{a}(t) \leqslant a_{\max}(t), \quad (8.4.1)$$

$$\int_0^T K(T, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{r}(T, \tau_1, \dots, \tau_n), \quad (8.4.2)$$

$$\int_0^T L(T, \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{V}(T, \tau_1, \dots, \tau_n), \quad (8.4.3)$$

чтобы был минимален интеграл

$$I = \int_0^T a(\xi) d\xi, \quad (8.4.4)$$

Все входящие в эти условия векторы располагаются в плоскости управления U и соответственно являются двумерными векторами. Через $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$ обозначены невязки в граничных условиях соответственно по радиусу-вектору и вектору скорости, которые получаются, если движение при $0 \leq t \leq T$ происходит без воздействия управляющего ускорения. Через $\tau_1, \dots, \tau_n$ в равенствах (8.4.2), (8.4.3) обозначены свободные параметры, характеризующие возможный произвол в задании начала и конца перелета. При наличии такого произвола возникает задача об оптимальном определении этих параметров. Время перелета T может быть либо задано, либо выбрано оптимально. Через $a_{\max}(t)$ обозначена известная функция времени.

Приведем эту плоскую вариационную задачу к виду, удобному для применения принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. начало раздела 1.2.2 и Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [4]). Введем двумерные векторы α и β , скалярную переменную ρ и зададим для их определения следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\xi} &= K(T, \xi) a_{\max}(\xi) \mathbf{u}(\xi), \\ \frac{d\beta}{d\xi} &= L(T, \xi) a_{\max}(\xi) \mathbf{u}(\xi), \\ \frac{d\rho}{d\xi} &= a_{\max}(\xi) \mathbf{u}(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (8.4.5)$$

Здесь $\mathbf{u}(\xi)$ — новый управляющий вектор:

$$\mathbf{u}(\xi) = \frac{\mathbf{a}(\xi)}{a_{\max}(\xi)}, \quad |\mathbf{u}(\xi)| \leq 1. \quad (8.4.6)$$

Пусть при $\xi = 0$ векторы $\alpha = \beta = 0$ и $\rho = 0$, а при $\xi = T$

$$\alpha(T) = \Delta \mathbf{r}(T, \tau_1, \dots, \tau_n), \quad \beta(T) = \Delta \mathbf{V}(T, \tau_1, \dots, \tau_n). \quad (8.4.7)$$

Сопоставляя равенство (8.4.4) с последним из уравнений (8.4.5), находим $\rho(T) = I$. Следовательно, исходная задача эквивалентна задаче выбора вектора $\mathbf{u}(t)$, входящего в уравнения (8.4.5), обеспечивающего выполнение условий (8.4.7) и минимизирующего конечное значение ρ . Последняя задача является стандартной для принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Введем двумерные векторы сопряженных переменных $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$, соответствующие векторам α и β , и переменную p_ρ , сопряженную

с ρ . Тогда гамильтониан H для (8.4.5) можно записать в виде

$$H = a_{\max}(\xi) \{ [K(T, \xi) p_\alpha + L(T, \xi) p_\beta] u + p_\rho u \}. \quad (8.4.8)$$

Так как H не зависит от α , β и ρ , то сопряженные переменные p_α , p_β и p_ρ постоянны, причем из условия минимума $\rho(T)$ следует $p_\rho = -1$ (см. В. П. Апоров [1], Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [1]). Тогда из условия максимума функции H получается следующий закон оптимального управления:

$$u = u_i(T, \xi), \quad u = \frac{a(\xi)}{a_{\max}(\xi)} = \begin{cases} 1 & \text{при } |b(T, \xi)| > 1, \\ 0 & \text{при } |b(T, \xi)| < 1, \end{cases} \quad (8.4.9)$$

где

$$b(T, \xi) = K(T, \xi) p_\alpha + L(T, \xi) p_\beta, \quad i(T, \xi) = \frac{b(T, \xi)}{|b(T, \xi)|}. \quad (8.4.10)$$

Характер оптимального управления определяется поведением функций влияния $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$. В § 8.1 установлено, что при движении в тонком сферическом слое центрального поля тяготения функции влияния приближенно определяются формулами

$$K(T, \xi) \approx \sin(T - \xi), \quad L(T, \xi) \approx \cos(T - \xi). \quad (8.4.11)$$

Напомним, что в этих формулах в качестве единицы времени взята $1/(2\pi)$ -я доля периода обращения спутника по круговой орбите, расположенной в середине слоя. Как об этом уже говорилось ранее, анализ будем проводить в предположении $T \ll \pi/2$. Основываясь на формулах (8.4.11), установим возможные типы оптимального управления величиной тяги. Выражение для $|b(T, \xi)|$ с учетом (8.4.11) можно записать в виде

$$|b(T, \xi)| = \sqrt{A_0 + A_c \cos 2(T - \xi) + A_s \sin 2(T - \xi)}, \quad (8.4.12)$$

где A_0 , A_c и A_s — константы. Функция $|b(T, \xi)|$ имеет не более одного экстремума при $0 \leq t \leq T \leq \pi/2$. Поэтому при $T \leq \pi/2$ возможны два режима оптимального управления величиной тяги: режим с одним активным участком, который принадлежит отрезку $[0, T]$, и режим с двумя активными участками, примыкающими к концам отрезка $[0, T]$.

8.4.2. Уравнения для определения произвольных постоянных. Получим уравнения для определения векторов p_α и p_β и свободных параметров $\tau_1, \dots, \tau_n$ и T .

Для вывода уравнений относительно векторов p_α и p_β оптимальные зависимости (8.4.9) необходимо подставить в соотношения (8.4.2), (8.4.3). При этом

$$|K p_\alpha + L p_\beta| = \sqrt{K^2 p_\alpha^2 + L^2 p_\beta^2 + 2KL(p_\alpha, p_\beta)} \quad (8.4.13)$$

и получающиеся уравнения записываем в форме

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \frac{Ka(K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta) d\xi}{|K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta|} &= \Delta\mathbf{r}, \\ \int_0^T \frac{La(K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta) d\xi}{|K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta|} &= \Delta\mathbf{V}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.14)$$

где

$$a = \begin{cases} a_{\max}(\xi) & \text{при } |K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta| > 1, \\ 0 & \text{при } |K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta| < 1. \end{cases} \quad (8.4.15)$$

Система (8.4.14) эквивалентна четырем скалярным уравнениям. Однако из нее можно выделить независимую систему из трех уравнений. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} I_{KK}(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_\beta) &= \int_0^T \frac{K^2 a d\xi}{|K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta|}, \\ I_{KL}(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_\beta) &= \int_0^T \frac{KL a d\xi}{|K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta|}, \\ I_{LL}(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_\beta) &= \int_0^T \frac{L^2 a d\xi}{|K\mathbf{p}_\alpha + L\mathbf{p}_\beta|}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.16)$$

Тогда уравнения (8.4.14) записываются так:

$$I_{KK}\mathbf{p}_\alpha + I_{KL}\mathbf{p}_\beta = \Delta\mathbf{r}, \quad I_{KL}\mathbf{p}_\alpha + I_{LL}\mathbf{p}_\beta = \Delta\mathbf{V}. \quad (8.4.17)$$

Возводя каждое из равенств (8.4.17) в квадрат, а затем умножая их скалярно одно на другое, получим

$$\left. \begin{aligned} I_{KK}^2 \mathbf{p}_\alpha^2 + I_{KL}^2 \mathbf{p}_\beta^2 + 2I_{KK}I_{KL}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) &= \Delta\mathbf{r}^2, \\ I_{KL}^2 \mathbf{p}_\alpha^2 + I_{LL}^2 \mathbf{p}_\beta^2 + 2I_{KL}I_{LL}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) &= \Delta\mathbf{V}^2, \\ I_{KK}I_{KL}\mathbf{p}_\alpha^2 + I_{KL}I_{LL}\mathbf{p}_\beta^2 + (I_{KK}I_{LL} + I_{KL}^2)(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) &= \\ &= (\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{V}). \end{aligned} \right\} \quad (8.4.18)$$

Система (8.4.18) является искомой системой из трех уравнений для трех неизвестных $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_\beta$ и $(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$. После того, как они определены, интегралы (8.4.16) также известны, и, разрешая систему (8.4.17), выражения для $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$ можно записать в виде

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{I_{LL}\Delta\mathbf{r} - I_{KL}\Delta\mathbf{V}}{I_{KK}I_{LL} - I_{KL}^2}, \quad \mathbf{p}_\beta = \frac{I_{KK}\Delta\mathbf{V} - I_{KL}\Delta\mathbf{r}}{I_{KK}I_{LL} - I_{KL}^2}. \quad (8.4.19)$$

Если параметры $\tau_1, \dots, \tau_n, T$ и соответственно векторы $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$ известны, задача сводится к решению системы (8.4.18). Если же параметры $\tau_1, \dots, \tau_n$ и T не заданы и должны быть выбраны оптимально, то вместе с системой (8.4.18) необходимо рассматривать соотношения, следующие из условий трансверсальности. Эти условия будут написаны исходя из той формы, в которой они приведены в работе В. П. Анорова [1]. Непосредственное применение формул этой работы становится возможным, если уравнения движения (8.4.5) дополнить уравнениями

$$\frac{d\tau_i}{d\xi} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{dT}{d\xi} = 0. \quad (8.4.20)$$

Они позволяют рассматривать параметры τ_i и T как новые фазовые переменные. Непосредственное применение формул работы В. П. Анорова [1] к системе уравнений (8.4.5), (8.4.20) с указанными выше граничными условиями позволяет преобразовать условия трансверсальности к виду

$$\left(\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial \tau_i} \right) + \left(\mathbf{p}_\beta, \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \tau_i} \right) = 0, \quad (8.4.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial T} \right) + \left(\mathbf{p}_\beta, \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial T} \right) = & (\mathbf{p}_\beta - 1) \mathbf{a}(T) + \\ & + \int_0^T \left(\frac{\partial K}{\partial T} \mathbf{p}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial T} \mathbf{p}_\beta \right) \mathbf{a} d\xi. \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

Первое из этих равенств является следствием произвола в выборе τ_i , а второе является условием для выбора T . Если какой-либо из параметров τ_i, T задается заранее, то соответствующее ему условие трансверсальности должно быть исключено из рассмотрения.

§ 8.5. Оптимальные управления на прямой управления

8.5.1. Закон оптимального управления. Как уже указывалось выше, при наличии прямой управления исходная пространственная вариационная задача становится одномерной — сводится к определению закона изменения вектора $\mathbf{a}(t)$, направленного вдоль прямой управления. При помощи преобразований, аналогичных преобразованиям предыдущего параграфа, она может быть описана следующими скалярными уравнениями:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = K(T, \xi) a_{\max}(\xi) u, \quad \frac{d\beta}{d\xi} = L(T, \xi) a_{\max}(\xi) u, \quad \frac{d\rho}{d\xi} = a_{\max}(\xi) u, \quad (8.5.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha|_{\xi=0} = \beta|_{\xi=0} = \rho|_{\xi=0} = 0, \quad \alpha|_{\xi=T} = \Delta r(T), \\ \beta|_{\xi=T} = \Delta V(T), \quad |u| \leq 1. \end{aligned}$$

$$(8.5.2)$$

Здесь α , β и ρ — новые неизвестные; $a_{\max}(\xi)$ — заданная функция, ограничивающая значения модуля управляющего ускорения $a(\xi)$; $u = a(\xi)/a_{\max}(\xi)$ — новая управляющая функция, которая должна быть выбрана так, чтобы значение $\rho|_{\xi=T}$ было минимально.

Уравнения (8.5.1), граничные условия (8.5.2) и указанная задача об оптимальном определении функции $u(t)$ являются стандартными для оптимизации с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Применение этого принципа позволяет получить следующее правило для определения $u(t)$:

$$u(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } [p_\alpha K(T, \xi) + p_\beta L(T, \xi)] > 1, \\ 0 & \text{при } [p_\alpha K(T, \xi) + p_\beta L(T, \xi)] < 1, \\ -1 & \text{при } [p_\alpha K(T, \xi) + p_\beta L(T, \xi)] < -1, \end{cases} \quad (8.5.3)$$

где p_α и p_β — сопряженные переменные для функций α и β . Уравнения (8.5.1) показывают, что обе они — постоянные. Из условий трансверсальности следует, что если при $\xi = T$ какая-либо из функций α и β не задана, то соответствующая ей сопряженная переменная равняется нулю (см. § 8.3), т. е. в случае а), когда дано значение $\Delta \mathbf{r}(T)$, $p_\beta = 0$ и в случае б), когда задано значение $\Delta \mathbf{V}(T)$, постоянная $p_\alpha = 0$. Остающиеся неизвестными сопряженные переменные должны быть определены из граничных условий, которые налагаются на функции α и β при $\xi = T$.

Из равенств (8.5.2) следует, что расположение активных участков и направление управляющего ускорения на прямой управления определяются характером зависимости функций влияния от ξ ($0 \leq \xi \leq T$). Из (8.1.8) и (8.1.9) видно, что

$$\left. \begin{aligned} K(T, \xi)|_{\xi=T} = 0, \quad \frac{dK}{d\xi} \Big|_{\xi=T} = -1, \quad \frac{d^2 K}{d\xi^2} \Big|_{\xi=T} = 0, \\ L(T, \xi)|_{\xi=T} = 1, \quad \frac{dL}{d\xi} \Big|_{\xi=T} = 0, \quad \frac{d^2 L}{d\xi^2} \Big|_{\xi=T} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.4)$$

Из равенств (8.1.17), (8.1.18), (8.1.22) и графиков, приведенных на рис. 8.1.1, следует, что при $|\delta r_m| \ll 1$ функции $K(T, \xi)$ и $L(T, \xi)$ мало отличаются соответственно от функций $\sin(T - \xi)$ и $\cos(T - \xi)$. Основываясь на этом и на соотношениях (8.5.4), можно заключить, что при $0 \leq \xi \leq T \leq \pi/2$ функция $K(T, \xi)$ — монотонно убывающая функция от ξ , а $L(T, \xi)$ — монотонно возрастающая, причем это справедливо при произвольных значениях коэффициентов α_i . Установленный характер изменения функций влияния и равенства (8.5.3) позволяют заключить, что при $T \leq \pi/2$ в случае а), когда дано значение $\Delta \mathbf{r}(T)$, активный участок один и он располагается в промежутке $0 \leq \xi \leq t_{\text{выкл}}$, а в случае б), когда дано $\Delta \mathbf{V}(T)$, активный участок также один, но он располагается в конце траектории при $t_{\text{выкл}} \leq \xi \leq T$. Здесь

$t_{\text{выкл}}$ и $t_{\text{вкл}}$ — подлежащие определению моменты выключения и включения двигателя соответственно. Для их определения из (8.5.1) и (8.5.2) получаются соотношения:

в случае а)

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} K(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta r(T); \quad (8.5.5)$$

в случае б)

$$\int_{t_{\text{вкл}}}^T L(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta V(T). \quad (8.5.6)$$

Несколько более сложным является доведение до конца решения задачи в), когда известны $\Delta \mathbf{r}(T)$, и $\Delta \mathbf{V}(T)$, так как здесь искомыми неизвестными — обе константы p_α и p_β или связанные с ними моменты включения и выключения двигателя. В этом случае при $T \leq \pi/2$ возможны два режима оптимального управления: режим с одним активным участком, расположенным в середине отрезка $0 \leq \xi \leq T$, и режим с двумя активными участками, которые примыкают к концам этого отрезка, причем направления управляющего ускорения на них противоположны. После того как расположение активных участков установлено, можно, так же как и ранее, составить уравнения для определения моментов включения и выключения двигателя.

Рассмотрим далее вопрос о нахождении оптимальных значений времени T и параметров $\tau_1, \dots, \tau_n$ в задаче о попадании в заданную точку. На величину скорости в начале и в конце перелета условия не накладываются. Эта задача может быть решена с помощью условий трансверсальности (8.4.21) и (8.4.22). В задаче с заданной зависимостью $\Delta \mathbf{r}(T, \tau_1, \dots, \tau_n)$ и произвольным $\Delta \mathbf{V}$ вектор $\mathbf{a}(t)$ коллинеарен $\Delta \mathbf{r}$, его величина равна $a_{\max}(t)$, а активный участок располагается в начале перелета. Момент выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$ определяется из (8.5.5), где вектор $\Delta \mathbf{r}$ следует считать зависящим от параметров $\tau_1, \dots, \tau_n$.

В силу произвольности $\Delta \mathbf{V}$ можно считать, что этот вектор определяется параметрами $\tau_1^{(V)}, \dots, \tau_m^{(V)}$, от которых вектор $\Delta \mathbf{r}$ не зависит. Для этих параметров уравнение (8.4.21) записывается так:

$$\left(\mathbf{p}_\beta, \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \tau_i^{(V)}} \right) = 0, \quad (8.5.7)$$

откуда $p_\beta = 0$. При этом из равенств (8.4.17) следует, что векторы $\mathbf{p}_\alpha$ и $\Delta \mathbf{r}$ коллинеарны. Поэтому равенство (8.4.21) можно

записать в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{p}_\alpha, \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial \tau_i} \right) &= \pm p_\alpha \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r}, \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial \tau_i} \right) = \\ &= \pm \frac{p_\alpha}{\Delta r} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_i} (\Delta r^2) = \pm p_\alpha \frac{\partial \Delta r}{\partial \tau_i} = 0. \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

Так как $p_\alpha \neq 0$, оптимальные значения параметров τ_i соответствуют стационарной точке функции $\Delta r(T, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Кроме того, как видно из (8.5.5), наименьшая длина активного участка будет при минимально возможных значениях Δr , которые могут достигаться и не только в стационарных точках.

Указанные свойства векторов $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$ позволяют упростить условие (8.4.22). Так как в рассматриваемой задаче $a(T) = 0$, то (8.4.22) можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r}, \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial T} \right) = \frac{\partial \Delta r}{\partial T} = \int_0^{t_{\text{выкл}}} \frac{\partial K_{\text{л}}}{\partial T} a_{\text{max}} d\tilde{\tau}. \quad (8.5.9)$$

С помощью этого уравнения можно найти стационарное значение T , если оно существует.

8.5.2. Возможные случаи коллинеарности векторов конечного промаха. Выясним далее, в каких случаях имеет место условие $\Delta \mathbf{r}(T) \parallel \Delta \mathbf{V}(T)$. Рассмотрим сначала движение в однородном поле тяготения. Будем считать, что до начала и после окончания перелета движение происходит по орбитам, которые описываются формулами для свободного движения. В соответствии с (8.2.11) уравнения, описывающие движение по начальной и конечной орбитам, имеют вид

$$\mathbf{r}_0(\tau_0) = \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}\tau_0 + \frac{\mathbf{g}\tau_0^2}{2}, \quad \mathbf{V}_0(\tau_0) = \mathbf{V}_{00} + \mathbf{g}\tau_0, \quad (8.5.10)$$

$$\mathbf{r}(\tau_1) = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{V}_{10}\tau_1 + \frac{\mathbf{g}\tau_1^2}{2}, \quad \mathbf{V}(\tau_1) = \mathbf{V}_{10} + \mathbf{g}\tau_1, \quad (8.5.11)$$

где через τ_0 и τ_1 обозначены времена движения от некоторых начальных состояний по начальной и конечной орбитам, характеризующихся, соответственно, векторами $\mathbf{r}_{00}$, $\mathbf{V}_{00}$ и $\mathbf{r}_{10}$, $\mathbf{V}_{10}$. Будем предполагать, что $\tau_0 = \tau_1 = t$. Это условие эквивалентно специальному выбору начального состояния для одной из орбит. При таком предположении выражения (8.1.21) для $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ записываются в виде

$$\Delta \mathbf{r}(T) = \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{V}_0 T, \quad \Delta \mathbf{V}(T) = \Delta \mathbf{V}_0, \quad (8.5.12)$$

где $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{00}$, $\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}$.

Отсюда видно, что $\Delta \mathbf{r}(T) \parallel \Delta \mathbf{V}(T)$ либо при $\Delta \mathbf{r}_0 = 0$, либо при $\Delta \mathbf{V}_0 = 0$, либо при $\Delta \mathbf{r}_0 \parallel \Delta \mathbf{V}_0$. Случай $\Delta \mathbf{r}_0 = 0$ соответствует переходу между орбитами, пересекающимися при $\tau = 0$, а случай $\Delta \mathbf{V}_0 = 0$ имеет место при переходе между орбитами, у которых при $\tau = 0$ совпадают векторы скорости.

Аналогичные результаты могут быть получены и для более сложного движения в однородном центральном поле тяготения. В этом случае формулы, описывающие свободное движение по начальной и конечной орбитам, записываются так (см. формулы (8.1.19)):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{r}_{00} c^{(0)}(t) + \mathbf{V}_{00} s^{(0)}(t), \\ \mathbf{V}_0(t) &= \mathbf{V}_{00} \frac{ds^{(0)}}{dt} + \mathbf{r}_{00} \frac{dc^{(0)}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (8.5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}_{10} c^{(1)}(t) + \mathbf{V}_{10} s^{(1)}(t), \\ \mathbf{V}_1(t) &= \mathbf{V}_{10} \frac{ds^{(1)}}{dt} + \mathbf{r}_{10} \frac{dc^{(1)}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.14)$$

Индексом «0» обозначена начальная орбита, а индексом «1» — конечная. При $t = 0$ эти орбиты характеризуются, соответственно, векторами $\mathbf{r}_{10}$, $\mathbf{V}_{10}$ и $\mathbf{r}_{00}$, $\mathbf{V}_{00}$. Отмеченное индексами «0» и «1» различие в функциях $c(t)$ и $s(t)$ связано с возможным отличием в малых членах порядка δr_m , которые входят в выражения (8.1.13) для этих функций. В дальнейшем этим различием будем пренебрегать, предполагая, что равенства

$$\left. \begin{aligned} c^{(0)}(t) &= c^{(1)}(t) = c(t), \\ s^{(0)}(t) &= s^{(1)}(t) = s(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.5.15)$$

выполняются с достаточной точностью.

При таком предположении выражения (8.1.21) для векторов конечного промаха $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{r}(T) &= \Delta \mathbf{r}_0 c(T) + \Delta \mathbf{V}_0 s(T), \\ \Delta \mathbf{V}(T) &= \Delta \mathbf{V}_0 \frac{ds}{dt} \Big|_{t=T} + \Delta \mathbf{r}_0 \frac{dc}{dt} \Big|_{t=T}, \end{aligned} \right\} \quad (8.5.16)$$

где по-прежнему $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{00}$, $\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}$. Условие коллинеарности векторов $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ может быть записано в виде равенства нулю векторного произведения:

$$[\Delta \mathbf{r}(T), \Delta \mathbf{V}(T)] = 0. \quad (8.5.17)$$

Подставляя сюда (8.5.16), это условие можем переписать в виде

$$[\Delta \mathbf{r}(T), \Delta \mathbf{V}(T)] = \left[\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{V}_0 \left(c(T) \frac{ds}{dt} \Big|_{t=T} - s(T) \frac{dc}{dt} \Big|_{t=T} \right) \right]. \quad (8.5.18)$$

Вспоминая, что функции $c(t)$ и $s(t)$ являются частными решениями уравнения (8.1.7) со специальными начальными условиями, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$c(T) \frac{ds}{dt} \Big|_{t=T} - s(T) \frac{dc}{dt} \Big|_{t=T} \equiv 1. \quad (8.5.19)$$

С учетом этого тождества из равенства (8.5.18) получаем следующий важный результат:

$$[\Delta \mathbf{r}(T), \Delta \mathbf{V}(T)] \equiv [\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{v}_0]. \quad (8.5.20)$$

Отметим, что этот результат справедлив в предположении о несущественности влияния возможного различия в коэффициентах a_i , $i = 0, 1, 2, 3$, входящих в формулы (8.1.12) и (8.1.13), на начальной и конечной орбитах.

Из равенства (8.5.20) следует, что векторы $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ коллинеарны в следующих случаях:

$$1) \Delta \mathbf{r}_0 = 0, 2) \Delta \mathbf{V}_0 = 0, 3) \Delta \mathbf{r}_0 \parallel \Delta \mathbf{V}_0. \quad (8.5.21)$$

Случай $\Delta \mathbf{r}_0 = 0$ соответствует переходу между орбитами, имеющими точку пересечения; случай $\Delta \mathbf{V}_0 = 0$ — переходу между орбитами, у которых в некоторых точках совпадают векторы скорости. Третий случай, когда $\Delta \mathbf{r}_0 \parallel \Delta \mathbf{V}_0$, представляет собой обобщение первых двух. В этом случае, в частности, может быть как $\Delta \mathbf{r}(T) = 0$, так и $\Delta \mathbf{V}(T) = 0$.

В заключение заметим, что из равенства (8.5.20) при указанных в процессе его вывода предположениях следует, что коль скоро коллинеарность векторов $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ имеет место при каком-либо одном значении T , то она имеет место и при всех остальных его значениях.

§ 8.6. Линеаризованное решение

8.6.1. Постановка задачи. Основные соотношения. Пусть известно некоторое оптимальное решение, соответствующее векторам $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_{\alpha 0}$, $\mathbf{p}_\beta = \mathbf{p}_{\beta 0}$. Тогда с помощью линеаризации можно аналитически найти все оптимальные решения, расположенные в его окрестности. Они могут быть положены в основу системы коррекции траектории, обеспечивающей возвращение из возмущенного состояния в номинальное оптимальным образом. Итак, положим

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_{\alpha 0} + \delta \mathbf{p}_\alpha, \quad \mathbf{p}_\beta = \mathbf{p}_{\beta 0} + \delta \mathbf{p}_\beta, \quad (8.6.1)$$

где $\delta \mathbf{p}_\alpha$, $\delta \mathbf{p}_\beta$ — малые величины, старшими степенями которых можно пренебречь.

Номинальные значения векторов $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_{\alpha 0}$, $\mathbf{p}_\beta = \mathbf{p}_{\beta 0}$ соответствуют номинальным значениям векторов конечного промаха $\Delta \mathbf{r} =$

$= \Delta g_0$, $\Delta V = \Delta V_0$ и параметров $\tau_i = \tau_{i0}$ и $T = T_0$. Возмущенные значения векторов конечного промаха определяются формулами

$$\Delta g = \Delta g_0 + \delta \Delta g, \quad \Delta V = \Delta V_0 + \delta \Delta V, \quad (8.6.2)$$

где $\delta \Delta g$ и $\delta \Delta V$ предполагаются малыми одного порядка с δr_a , δr_b .

Основное внимание будет уделено линеаризации граничных условий (8.4.2), (8.4.3) и условий оптимальности (8.4.9). При этом с целью сокращения вычислений время перелета T и параметры τ_i будут считаться равными их номинальным значениям.

Получим две вспомогательные формулы. Пусть $\mathbf{b}$ — некоторый вектор, номинальное значение которого равно $\mathbf{b}_0$, а возмущенное равно $\mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{b}$; пусть, кроме того, $\mathbf{i}$ — его орт. Вычислим $\delta |\mathbf{b}|$ и $\delta \mathbf{i}$. Сначала выведем формулу для $\delta |\mathbf{b}|$. Имеют место равенства

$$|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^2, \quad |\mathbf{b}_0| \delta |\mathbf{b}| = (\mathbf{b}_0, \delta \mathbf{b}), \quad \mathbf{i}_0 = \frac{\mathbf{b}_0}{|\mathbf{b}_0|}, \quad (8.6.3)$$

где $\mathbf{i}_0$ — номинальное значение $\mathbf{i}$. Комбинируя эти выражения, приходим к следующей формуле для $\delta |\mathbf{b}|$:

$$\delta |\mathbf{b}| = (\mathbf{i}_0, \delta \mathbf{b}). \quad (8.6.4)$$

Эта формула имеет простой геометрический смысл: приращение модуля вектора с точностью до малых второго порядка равняется проекции приращения вектора на его номинальное направление. Вычислим далее $\delta \mathbf{i}$. Исходя из определения этого вектора и используя формулы (8.6.3) и (8.6.4), получим

$$\delta \mathbf{i} = \delta \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right) = \frac{\delta \mathbf{b}}{|\mathbf{b}_0|} - \mathbf{i}_0 \left(\mathbf{i}_0, \frac{\delta \mathbf{b}}{|\mathbf{b}_0|} \right). \quad (8.6.5)$$

Введем в рассмотрение орт $\mathbf{j}_0$, перпендикулярный орту $\mathbf{i}_0$. Имеет место равенство

$$\delta \mathbf{b} = (\mathbf{i}_0, \delta \mathbf{b}) \mathbf{i}_0 + (\mathbf{j}_0, \delta \mathbf{b}) \mathbf{j}_0, \quad (8.6.6)$$

с помощью которого формулу (8.6.5) можно преобразовать к более компактной форме:

$$\delta \mathbf{i} = \left(\mathbf{j}_0, \frac{\delta \mathbf{b}}{|\mathbf{b}_0|} \right) \mathbf{j}_0. \quad (8.6.7)$$

Это равенство, так же как и равенство (8.6.4), допускает следующую геометрическую интерпретацию: векторы $\delta \mathbf{i}$ и $\mathbf{j}_0$ параллельны, а $|\delta \mathbf{i}|$ представляет собой угол между векторами $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{b}$, который с точностью до малых второго порядка равен проекции вектора $\delta \mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{j}_0$, отнесенной к $|\mathbf{b}_0|$.

В рассматриваемой задаче вектор $\mathbf{b}$ определяется формулой (8.4.10). Соответственно, если зафиксировать значение ξ , прира-

щение его при переходе от номинального режима к возмущенному записывается так:

$$\delta \mathbf{b} = K(T, \xi) \delta \mathbf{p}_\alpha + L(T, \xi) \delta \mathbf{p}_\beta. \quad (8.6.8)$$

Как было показано выше, возможны два режима оптимального управления величиной тяги: режим с одним активным участком и режим с двумя активными участками, примыкающими к концам отрезка $0 \leq \xi \leq T$. Рассмотрим далее режим с одним активным участком. Обозначим через $t_{\text{вкл}}$ и $t_{\text{выкл}}$ соответственно моменты включения и выключения двигателя. Для этого режима линеаризованные граничные условия (8.4.2), (8.4.3) можно представить в виде

$$\delta \left(\int_{t_{\text{вкл}}}^{t_{\text{выкл}}} K a_{\text{max}} \mathbf{i} d\xi \right) = \delta \Delta \mathbf{r}, \quad \delta \left(\int_{t_{\text{вкл}}}^{t_{\text{выкл}}} L a_{\text{max}} \mathbf{i} d\xi \right) = \delta \Delta \mathbf{V}. \quad (8.6.9)$$

При переходе от номинального режима к возмущенному моменты времени $t_{\text{вкл}}$ и $t_{\text{выкл}}$ изменяются:

$$t_{\text{вкл}} = t_{\text{вкл},0} + \delta t_{\text{вкл}}, \quad t_{\text{выкл}} = t_{\text{выкл},0} + \delta t_{\text{выкл}}. \quad (8.6.10)$$

В соответствии с (8.4.9) $t_{\text{вкл}}$ и $t_{\text{выкл}}$ являются корнями уравнения

$$|\mathbf{b}(T, \xi)|_{\xi=t_{\text{вкл}}, t_{\text{выкл}}} = 1. \quad (8.6.11)$$

Варьируя обе части этого уравнения и используя при этом формулы (8.6.4) и (8.6.8), получим уравнения для $\delta t_{\text{вкл}}$ и $\delta t_{\text{выкл}}$:

$$\left\{ \left[\frac{\partial K}{\partial \xi} (\mathbf{p}_{\alpha 0}, \mathbf{i}_0) + \frac{\partial L}{\partial \xi} (\mathbf{p}_{\beta 0}, \mathbf{i}_0) \right] \delta t_{\text{вкл}} + K(\delta \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{i}_0) + L(\delta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{i}_0) \right\}_{\xi=t_{\text{вкл}}, t_{\text{выкл}}} = 0. \quad (8.6.12)$$

Отсюда следует, что изменение длины активного участка определяется проекциями векторов $\delta \mathbf{p}_\alpha$ и $\delta \mathbf{p}_\beta$ на номинальное направление тяги $\mathbf{i}_0$.

Векторы $\delta \mathbf{p}_\alpha$ и $\delta \mathbf{p}_\beta$ определяются уравнениями (8.6.9). Для того чтобы в этом убедиться, необходимо проварьировать интегралы в левых частях уравнений (8.6.9) и воспользоваться формулами (8.6.7), (8.6.8) и (8.4.10). В результате условия (8.6.9) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} & (K a_{\text{max}} \mathbf{i}_0)_{\xi=t_{\text{выкл}},0} \delta t_{\text{выкл}} - (K a_{\text{max}} \mathbf{i}_0)_{\xi=t_{\text{вкл}},0} \delta t_{\text{вкл}} + \\ & + \int_{t_{\text{вкл},0}}^{t_{\text{выкл},0}} [(\delta \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{j}_0) K^2 + (\delta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{j}_0) K L] \frac{a_{\text{max}}}{|\mathbf{b}_0|} \mathbf{j}_0 d\xi = \delta \Delta \mathbf{r}, \end{aligned} \right\} \quad (8.6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} & (La_{\max} \mathbf{i}_0)_{\xi=t_{\text{ВЫКЛ}},0} \delta t_{\text{ВЫКЛ}} - (La_{\max} \mathbf{i}_0)_{\xi=t_{\text{ВКЛ}},0} \delta t_{\text{ВКЛ}} + \\ & + \int_{t_{\text{ВКЛ}},0}^{t_{\text{ВЫКЛ}},0} [(\delta \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{j}_0) LK + (\delta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{j}_0) L^2] \frac{a_{\max}}{|b_0|} \mathbf{j}_0 d\xi = \delta \Delta \mathbf{V}, \end{aligned} \right\} \quad (8.6.13)$$

где

$$|b_0| = \sqrt{K^2 p_{\alpha 0}^2 + L^2 p_{\beta 0}^2 + 2KL(\mathbf{p}_{\alpha 0}, \mathbf{p}_{\beta 0})}. \quad (8.6.14)$$

Выражая здесь $\delta t_{\text{ВКЛ}}$ и $\delta t_{\text{ВЫКЛ}}$ через $\delta \mathbf{p}_\alpha$ и $\delta \mathbf{p}_\beta$ с помощью (8.6.12) и проектируя уравнения (8.6.13) на некоторые фиксированные направления, получаем системы скалярных уравнений для четырех компонент векторов $\delta \mathbf{p}_\alpha$ и $\delta \mathbf{p}_\beta$.

Если при переходе от номинального режима к возмущенному помимо векторов $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$ варьируются также параметры τ_i и T , то в (8.6.13) появляются дополнительные слагаемые, содержащие вариации δT и $\delta \tau_i$. Если эти вариации необходимо определить оптимально, то соотношения, замыкающие (8.6.13), (8.6.14), получаются в результате варьирования условий трансверсальности.

Пусть теперь в номинальном режиме ориентация тяги не изменяется — существует прямая управления. При таком предположении $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{j}_0$ — постоянные векторы, что существенно упрощает систему (8.6.13) и позволяет ее записать в виде

$$\left. \begin{aligned} & [(Ka_{\max})_{\xi=t_{\text{ВЫКЛ}},0} \delta t_{\text{ВЫКЛ}} - (Ka_{\max})_{\xi=t_{\text{ВКЛ}},0} \delta t_{\text{ВКЛ}}] \mathbf{i}_0 + \\ & + [I_{KK}^{(0)} (\delta \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{j}_0) + I_{KL}^{(0)} (\delta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{j}_0)] \mathbf{j}_0 = \delta \Delta \mathbf{r}, \\ & [(La_{\max})_{\xi=t_{\text{ВЫКЛ}},0} \delta t_{\text{ВЫКЛ}} - (La_{\max})_{\xi=t_{\text{ВКЛ}},0} \delta t_{\text{ВКЛ}}] \mathbf{i}_0 + \\ & + [I_{KL}^{(0)} (\delta \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{j}_0) + I_{LL}^{(0)} (\delta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{j}_0)] \mathbf{j}_0 = \delta \Delta \mathbf{V}, \end{aligned} \right\} \quad (8.6.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{KK}^{(0)} &= \int_{t_{\text{ВКЛ}},0}^{t_{\text{ВЫКЛ}},0} \frac{K^2 a_{\max}}{|b_0|} d\xi, \\ I_{KL}^{(0)} &= \int_{t_{\text{ВКЛ}},0}^{t_{\text{ВЫКЛ}},0} \frac{KL a_{\max}}{|b_0|} d\xi, \quad I_{LL}^{(0)} = \int_{t_{\text{ВКЛ}},0}^{t_{\text{ВЫКЛ}},0} \frac{L^2 a_{\max}}{|b_0|} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.16)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае векторы $\mathbf{p}_{\alpha 0}$ и $\mathbf{p}_{\beta 0}$ коллинеарны и $|b_0|$ (см. (8.6.14)) представляет собой линейную комбинацию функций K и L . Это обстоятельство позволяет интегралы (8.6.16) вычислить аналитически.

Для получения скалярных уравнений спроектируем векторные равенства (8.6.15) на направления векторов i_0 и j_0 . В результате получим две зависимые группы уравнений.

$$\left. \begin{aligned} (K a_{\max})_{\xi=t_{\text{выкл}}, 0} \delta t_{\text{выкл}} - (K a_{\max})_{\xi=t_{\text{вкл}}, 0} \delta t_{\text{вкл}} &= (\delta \Delta \mathbf{r}, i_0), \\ (L a_{\max})_{\xi=t_{\text{выкл}}, 0} \delta t_{\text{выкл}} - (L a_{\max})_{\xi=t_{\text{вкл}}, 0} \delta t_{\text{вкл}} &= (\delta \Delta \mathbf{V}, i_0). \end{aligned} \right\} \quad (8.6.17)$$

Система уравнений для определения вариаций $(\delta p_\alpha, j_0)$ и $(\delta p_\beta, j_0)$:

$$\left. \begin{aligned} I_{KK}^{(0)}(\delta p_\alpha, j_0) + I_{KL}^{(0)}(\delta p_\beta, j_0) &= (\delta \Delta \mathbf{r}, j_0), \\ I_{KL}^{(0)}(\delta p_\alpha, j_0) + I_{LL}^{(0)}(\delta p_\beta, j_0) &= (\delta \Delta \mathbf{V}, j_0), \end{aligned} \right\} \quad (8.6.18)$$

Решения системы уравнений (8.6.18) позволяют определить изменение ориентации тяги. Выражение для δi , согласно (8.6.7) и (8.6.8), имеет вид

$$\delta i = \frac{(\delta p_\alpha, j_0) K(\xi) + (\delta p_\beta, j_0) L(\xi)}{|p_{\alpha 0} K(\xi) + p_{\beta 0} L(\xi)|}. \quad (8.6.19)$$

Зависимость K и L от T здесь не указана. Исключая из этой формулы решения системы (8.6.18), выражение для δi можем записать в форме

$$\delta i = \frac{j_0}{[I_{KK}^{(0)} I_{LL}^{(0)} - I_{KL}^{(0)2}]} \left[\frac{I_{LL}^{(0)} K(\xi) - I_{KL}^{(0)} L(\xi)}{|p_{\alpha 0} K(\xi) + p_{\beta 0} L(\xi)|} (\delta \Delta \mathbf{r}, j_0) + \frac{I_{KK}^{(0)} L(\xi) - I_{KL}^{(0)} K(\xi)}{|p_{\alpha 0} K(\xi) + p_{\beta 0} L(\xi)|} (\delta \Delta \mathbf{V}, j_0) \right]. \quad (8.6.20)$$

Таким образом, при линеаризации в окрестности прямой управления изменения моментов включения и выключения двигателя определяются проекциями $\delta \Delta \mathbf{r}$ и $\delta \Delta \mathbf{V}$ на номинальное направление тяги, а изменение ориентации тяги определяется проекциями $\delta \Delta \mathbf{r}$ и $\delta \Delta \mathbf{V}$ на направление, ортогональное к нему.

Характер зависимости δi от времени ξ оказывается различным для разных задач с прямой управления. Нетрудно показать, что в задаче о перелете в точку (дан $\Delta \mathbf{r}_0$, $\Delta \mathbf{V}_0$ произволен) δi является функцией, близкой к дробно-линейной функции времени; в задаче же о повороте вектора скорости (дан $\Delta \mathbf{V}_0$, а $\Delta \mathbf{r}_0$ произволен) δi оказывается функцией, близкой к линейной.

8.6.2. Решение для малого угла между векторами конечного промаха. В качестве примера приложения результатов раздела 8.6.1 найдем оптимальное управление при малых значениях угла ϵ между векторами $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$. Проведем плоскость через векторы $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$ и в этой плоскости прямую u с ортом i_0 , составляющим угол η с вектором $\Delta \mathbf{r}$. Перпендикулярно орту i_0 проведем орт j ,

(рис. 8.6.1). Угол η выберем так, чтобы линейаризованное решение было возможно более точным. Представим векторы $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{V}$ следующим образом:

$$\Delta \mathbf{r} = (\Delta r, i_0) i_0 + (\Delta r, j_0) j_0, \quad \Delta \mathbf{V} = (\Delta V, i_0) i_0 + (\Delta V, j_0) j_0. \quad (8.6.21)$$

Первые слагаемые в формулах (8.6.21) коллинеарны между собой, и, соответственно, можно считать, что для таких векторов конечного промаха задача выбора оптимального управления решена. Вторые слагаемые в формулах (8.6.21) будем рассматривать как возмущения:

$$\delta \Delta \mathbf{r} = (\Delta r, j_0) j_0, \quad \delta \Delta \mathbf{V} = (\Delta V, j_0) j_0. \quad (8.6.22)$$

Так как эти векторы ортогональны к вектору i_0 , то из уравнений (8.6.17), (8.6.22) следует:

$$\delta t_{\text{вкл}} = \delta t_{\text{выкл}} = 0. \quad (8.6.23)$$

Можно доказать, что этот результат верен как для режима с одним активным участком, так и для режима с прямой управления, имеющего два активных участка. Таким образом, при возмущениях векторов конечного промаха типа (8.6.22) программа изменения величины тяги сохраняется.

Влияние этих возмущений проявляется в изменении ориентации тяги — номинальный режим с прямой управления переходит в возмущенный режим с плоскостью управления.

Угол $\vartheta = |\delta i|$ определяется выражением (8.6.20), где проекция возмущений (8.6.22) на направление вектора j_0 с точностью до малых более высокого порядка, чем ε , определяются формулами (см. рис. 8.6.1)

Угол $\vartheta = |\delta i|$ определяется выражением (8.6.20), где проекция возмущений (8.6.22) на направление вектора j_0 с точностью до малых более высокого порядка, чем ε , определяются формулами (см. рис. 8.6.1)

$$(\delta \Delta \mathbf{r}, j_0) = -\Delta r \eta, \quad (\delta \Delta \mathbf{V}, j_0) = \Delta V (\varepsilon - \eta), \quad (8.6.24)$$

Для окончательного решения задачи следует определить угол η , задающий направление прямой управления в номинальном режиме. Выберем его таким образом, чтобы минимизировать величину членов, отброшенных при линейаризации равенств (8.4.2), (8.4.3). Порядок этих членов в случае одного активного участка можно охарактеризовать интегралом

$$S = \int_{t_{\text{вкл}}, 0}^{t_{\text{выкл}}, 0} |\mathbf{b}_0| \vartheta^2 a_{\max} d\xi, \quad \text{где } |\mathbf{b}_0| = |\mathbf{p}_{\alpha 0} K + \mathbf{p}_{\beta 0} L|. \quad (8.6.25)$$

Выберем угол η таким образом, чтобы этот интеграл был мини-

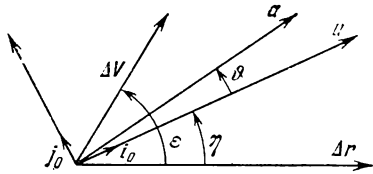


Рис. 8.6.1.

мален. Выражение (8.6.19) для Φ удобно записать в форме

$$\Phi = \frac{aK + bL}{|b_0|}, \quad (8.6.2)$$

где константы a и b , в соответствии с (8.6.18) и (8.6.24), удовлетворяют уравнениям

$$I_{KK}^{(0)}a + I_{KL}^{(0)}b = -\Delta r\eta, \quad I_{KL}^{(0)}a + I_{LL}^{(0)}b = \Delta V(\varepsilon - \eta). \quad (8.6.27)$$

Подставляя выражение (8.6.26) для Φ в формулу (8.6.25) для S и вспоминая выражения (8.6.16) для интегралов $I_{KK}^{(0)}$, $I_{LL}^{(0)}$ и $I_{KL}^{(0)}$, получим

$$S = a^2 I_{KK}^{(0)} + 2ab I_{KL}^{(0)} + b^2 I_{LL}^{(0)} = -a\Delta r\eta + b\Delta V(\varepsilon - \eta). \quad (8.6.28)$$

Исключая отсюда a и b с помощью равенств (8.6.27), выражение для S можно преобразовать к виду

$$S = m_0\eta^2 + m_1\eta + m_2, \quad (8.6.29)$$

где

$$m_0 = \frac{I_{LL}^{(0)}\Delta r^2 - 2I_{KL}^{(0)}\Delta r\Delta V + I_{KK}^{(0)}\Delta V^2}{I_{KK}^{(0)}I_{LL}^{(0)} - (I_{KL}^{(0)})^2},$$

$$m_1 = \frac{(I_{KL}^{(0)}\Delta r - I_{KK}^{(0)}\Delta V)2\Delta V\varepsilon}{I_{KK}^{(0)}I_{LL}^{(0)} - (I_{KL}^{(0)})^2}, \quad m_2 = \frac{I_{KK}^{(0)}\Delta V^2\varepsilon^2}{I_{KK}^{(0)}I_{LL}^{(0)} - (I_{KL}^{(0)})^2}.$$

Так как $S \geq 0$, то зависимость (8.6.29) имеет минимум при

$$\eta_{\text{opt}} = -\frac{m_1}{2m_0} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 + [(I_{LL}^{(0)}\Delta r - I_{KL}^{(0)}\Delta V)(I_{KK}^{(0)}\Delta V - I_{KL}^{(0)}\Delta r)]\Delta r/\Delta V}. \quad (8.6.30)$$

Отсюда видно, что при $\Delta r = 0$ $\eta_{\text{opt}} = \varepsilon$, а при $\Delta V = 0$ $\eta_{\text{opt}} = 0$. Таким образом, направление прямой управления, минимизирующее погрешность линеаризации, при изменении отношения $\Delta r/\Delta V$ перемещается между векторами Δr и ΔV .

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ В ТОНКИХ СЛОЯХ

§ 9.1. Жесткая встреча

9.1.1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим задачу о встрече двух летательных аппаратов, маневрирующих в пустоте. Предполагается, что в момент встречи значения скоростей не подравниваются — отсюда название «*жесткая встреча*». При такой встрече летательные аппараты в один и тот же момент времени $t = T$ пролетают через одну и ту же точку пространства, а затем разлетаются. Эта задача соответствует ситуации, когда в конце перелета задан вектор конечного промаха по радиусу-вектору $\Delta \mathbf{r}(T)$, а вектор конечного промаха по скорости $\Delta \mathbf{V}(T)$ произволен. Без углубления в детали эта задача рассматривалась в § 8.5. Было показано, что при таких граничных условиях вектор $\mathbf{a}(t)$ фиксирован в инерциальном пространстве, его направление совпадает с направлением вектора $\Delta \mathbf{r}(T)$, величина этого вектора максимальна, а активный участок расположен в начале траектории при $0 \leq t \leq t_{\text{выкл}}$, где момент выключения двигателя определяется уравнением

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} K(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta r(T). \quad (9.1.1)$$

Величина функционала определяется выражением

$$I = \int_0^{t_{\text{выкл}}} a_{\max}(\xi) d\xi \quad (9.1.2)$$

и, очевидно, тем меньше, чем раньше выключается двигатель. Заметим, что уравнение (9.1.1) справедливо при произвольных вариациях в величине управляющего ускорения и в силу этого может быть положено в основу системы управления, обеспечивающей оптимальный перелет в заданную точку пространства при наличии возмущений.

Различные варианты в постановке и решении этой задачи связаны с различием в определении момента окончания перелета T и в определении произвольных параметров, входящих в выра-

жение для $\Delta r(T)$. Напомним, что $\Delta r(T)$ определяется выражением

$$\Delta r(T) = |\mathbf{r}_1(T) - \mathbf{r}_0(T)|. \quad (9.1.3)$$

Входящая сюда вектор-функция $\mathbf{r}_1(T)$ определяется законом движения летательного аппарата-цели, с которым происходит встреча, а через $\mathbf{r}_0(T)$ обозначена вектор-функция, описывающая свободное движение летательного аппарата, закон управления которым ищется.

Рассмотрим сначала случай, когда в некоторый момент времени заданы координаты и скорости обоих летательных аппаратов и встреча должна произойти через вполне определенный промежуток времени T . Если указанный момент времени принять за $t = 0$, то необходимо построить движение на фиксированном интервале времени $0 \leq t \leq T$. При таком задании граничных условий вектор $\Delta r(T)$ полностью определен и для полного решения задачи необходимо только найти момент выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$ из уравнения (9.1.1). Проведем вычисления для случая, когда

$$a_{\max}(\xi) = a_{\max} = \text{const}. \quad (9.1.4)$$

Рассмотрим сначала движение в однородном поле тяготения. Тогда

$$K(T, \xi) = T - \xi, \quad (9.1.5)$$

и после несложных выкладок уравнение (9.1.1) записывается в виде

$$t_{\text{выкл}} \left(T - \frac{t_{\text{выкл}}}{2} \right) = \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}}. \quad (9.1.6)$$

Левая часть этого равенства является монотонно возрастающей функцией $t_{\text{выкл}}$ при $t_{\text{выкл}} \leq T$. Так как $t_{\text{выкл}}$ не должно быть больше T , то из этого следует, что решение данной задачи существует при условии

$$\Delta r(T) \leq \frac{a_{\max} T^2}{2}. \quad (9.1.7)$$

Это условие имеет очевидную физическую интерпретацию. Решение рассматриваемой задачи может быть получено только в случаях, когда величина вектора конечного промаха не превосходит расстояния, которое летательный аппарат проходит за время T , двигаясь с постоянным ускорением $a_{\max}$. Из уравнения (9.1.6) может быть также получена формула для $t_{\text{выкл}}$. Физический смысл имеет решение этого уравнения, меньшее T ,

$$t_{\text{выкл}} = T - \sqrt{T^2 - \frac{2\Delta r(T)}{a_{\max}}}. \quad (9.1.8)$$

Получим далее аналогичную формулу для движения в очень тонком сферическом слое поля тяготения. В этом случае, в соответствии с (8.2.2), можно считать

$$K(T, \xi) = \sin(T - \xi). \quad (9.1.9)$$

При таком виде функции $K(T, \xi)$ интеграл в уравнении (9.1.1) вычисляется без особых затруднений, и это уравнение может быть преобразовано к форме

$$2 \sin \frac{t_{\text{выкл}}}{2} \sin \left(T - \frac{t_{\text{выкл}}}{2} \right) = \frac{\Delta r(T)}{a_{\text{max}}}. \quad (9.1.10)$$

При малых значениях T и $t_{\text{выкл}}$ полученный результат переходит в равенство (9.1.6). Зависимость $t_{\text{выкл}}$ от $\Delta r(T)/a_{\text{max}}$ при различных значениях T , рассчитанная с помощью уравнения (9.1.10), изображена на рис. 9.1.1. На этом рисунке видно, что с ростом

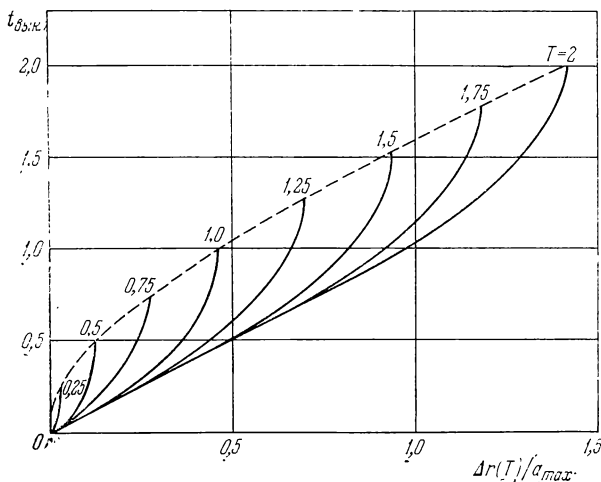


Рис. 9.1.1.

$\Delta r(T)/a_{\text{max}}$ продолжительность активного участка увеличивается до тех пор, пока он не становится равным T . Этот момент определяет максимальные значения $\Delta r(T)/a_{\text{max}}$, при которых решение существует. В соответствии со сказанным равенство (9.1.10) позволяет записать условие существования решения для рассматриваемого случая в виде неравенства

$$\Delta r(T) \leq 2a_{\text{max}} \sin^2 \frac{T}{2}. \quad (9.1.11)$$

Решение, когда функция влияния $K(T, \xi)$ взята в виде (9.1.9), является исходным и при определении $t_{\text{выкл}}$ с учетом членов по-

рядка δr_m в выражении (8.1.17) для $K(T, \xi)$. Перепишем уравнение (9.1.1), выделив в нем члены различного порядка относительно δr_m под знаком интеграла:

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} [K_0(T, \xi) + \delta r_m K_1(T, \xi)] a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta r(T). \quad (9.1.12)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} K_0(T, \xi) &= \sin(T - \xi), \\ K_1(T, \xi) &= \sum_{i=0}^3 \alpha_i(T) s_i(T - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (9.1.13)$$

Будем искать момент времени $t_{\text{выкл}}$ в виде

$$t_{\text{выкл}} = t_{\text{выкл}}^{(0)} + \delta r_m t_{\text{выкл}}^{(1)}. \quad (9.1.14)$$

Подставляя это выражение в равенство (9.1.12), последнее можно с погрешностью порядка $(\delta r_m)^2$ заменить следующими двумя равенствами:

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}^{(0)}} K_0(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta r(T), \quad (9.1.15)$$

$$t_{\text{выкл}}^{(1)} = - \frac{1}{K_0(T, t_{\text{выкл}}^{(0)}) a_{\max}(t_{\text{выкл}}^{(0)})} \int_0^{t_{\text{выкл}}^{(0)}} K_1(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi. \quad (9.1.16)$$

Уравнение (9.1.15) соответствует рассмотренному выше случаю движения при $\delta r_m = 0$. После того, как величина $t_{\text{выкл}}^{(0)}$ из него определена, величина $t_{\text{выкл}}^{(1)}$ вычисляется с помощью равенства (9.1.16). Указанная процедура определения моментов включения и выключения двигателя применима для решения широкого класса задач, за исключением некоторых особых случаев, связанных со стремлением к бесконечности производной $dt_{\text{выкл}}/d\delta r_m$.

9.1.2. Определение оптимального времени перелета. Решение задачи, полученное для фиксированного времени перелета T , является исходным для решения значительно более важной задачи, в которой время перелета T является варьируемым параметром. В этом случае все приведенные выше соотношения сохраняются, с тем лишь отличием, что время перелета должно быть определено оптимально. Вопрос об оптимальном определении времени перелета T кратко обсуждался в § 8.5. Там для оптимального значения времени перелета было получено уравнение (8.5.9).

Выведем это уравнение еще раз непосредственно из условия

$$\frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} = 0. \quad (9.1.17)$$

Продифференцируем уравнение (9.1.1) по T :

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} \frac{\partial K}{\partial T} a_{\text{max}} d\xi + K(T, t_{\text{выкл}}) a_{\text{max}}(t_{\text{выкл}}) \frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} = \frac{d\Delta r(T)}{dT}. \quad (9.1.18)$$

Используя (9.1.17), получим искомое уравнение, которому должны удовлетворять параметры перелета при оптимальном значении T :

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} \frac{\partial K}{\partial T} a_{\text{max}}(\xi) d\xi = \frac{d\Delta r(T)}{dT}. \quad (9.1.19)$$

Выпишем выражение для $\frac{\partial K}{\partial T}$. Дифференцируя равенство (8.1.17), получим

$$\frac{\partial K}{\partial T} = \cos(T - \xi) + O(\delta r_m). \quad (9.1.20)$$

Отсюда видно, что для $0 \leq \xi \leq T$ при условии, что T меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, на величину порядка δr_m имеет место неравенство

$$\frac{\partial K}{\partial T} > 0. \quad (9.1.21)$$

Аналогичный результат получается и в однородном поле тяготения, где

$$\frac{\partial K}{\partial T} \equiv 1. \quad (9.1.22)$$

Основываясь на (9.1.21), из (9.1.19) получаем, что при оптимальном значении T

$$\left. \frac{d\Delta r}{dT} \right|_{T_{\text{opt}}} > 0. \quad (9.1.23)$$

Таким образом, оптимальные значения T лежат в интервале значений T , на котором зависимость $\Delta r(T)$ имеет монотонно возрастающий характер. Поясним этот результат на примере однородного поля. В этом случае момент выключения двигателя определяется формулой (9.1.8). Рассмотрим зависимость $t_{\text{выкл}}$ от T при $\Delta r(T) = \text{const}$. Из формулы (9.1.8) видно, что в этом случае $t_{\text{выкл}}$ с увеличением T монотонно убывает. Зависимость $t_{\text{выкл}}$ от T , построенная с помощью формулы (9.1.8), изображена на рис. 9.1.2. Этот результат имеет место и в общем случае однородного центрального поля тяготения при условии (9.1.21), что следует из

уравнения (9.1.1), ибо при $\frac{\partial K}{\partial T} > 0$ и $\Delta r(T) = \text{const}$ возрастание T приводит к увеличению подынтегрального выражения и, следовательно, промежуток интегрирования может быть уменьшен. Ясно также, что если бы с возрастанием T функция $\Delta r(T)$

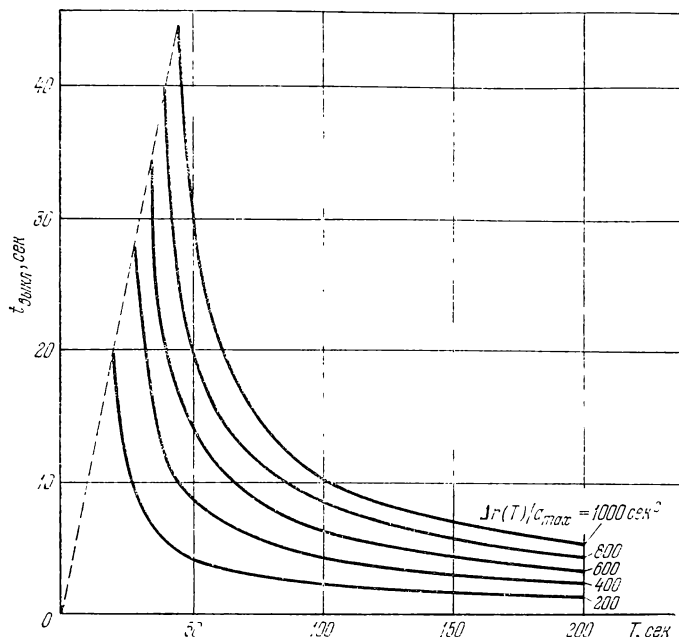


Рис. 9.1.2.

убывала, то одновременно уменьшалось бы время работы двигателя. Таким образом, минимум у зависимости $t_{\text{выкл}}$ от T может быть только в случае, когда зависимость $\Delta r(T)$ имеет такие интервалы изменения T , на которых она является монотонно возрастающей функцией. Из сказанного следует, что определение оптимального значения T существенно связано с характером зависимости $\Delta r(T)$.

Рассмотрим случай, когда движение летательного аппарата, с которым организуется встреча, и свободное движение летательного аппарата, закон управления которым определяется, описываются формулами (8.2.11) для однородного поля тяготения:

$$\left. \begin{aligned} r_1(T) &= r_{10} + V_{10}T + \frac{gT^2}{2}, \\ r_0(T) &= r_{00} + V_{00}T + \frac{gT^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.24)$$

Соответственно формула для вектора $\Delta \mathbf{r}(T)$ записывается в виде

$$\Delta \mathbf{r}(T) = \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{V}_0 T. \quad (9.1.25)$$

Здесь $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{00}$, $\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}$ — векторы, определяющие различие в координатах и скоростях летательных аппаратов при $t = 0$.

Характер зависимости $\Delta \mathbf{r}(T)$, очевидно, связан с взаимным расположением векторов $\Delta \mathbf{r}_0$ и $\Delta \mathbf{V}_0$. Если эти векторы образуют

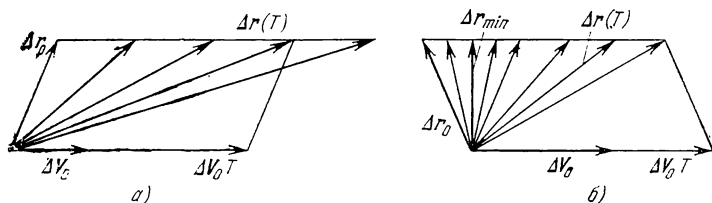


Рис. 9.1.3.

между собой острый угол, то из рис. 9.1.3, а ясно, что $\Delta r(T)$ при всех значениях T возрастает с увеличением T . Если же угол между векторами $\Delta \mathbf{r}_0$ и $\Delta \mathbf{V}_0$ тупой (рис. 9.1.3, б), то $\Delta r(T)$ при увеличении T сначала убывает до некоторого минимального значения $\Delta r_{\min}$, а затем монотонно возрастает. При больших значениях T величина вектора $\Delta \mathbf{r}(T)$ определяется формулой

$$\Delta \mathbf{r}(T) \approx \Delta \mathbf{V}_0 T. \quad (9.1.26)$$

Представим себе качественный характер зависимости $t_{\text{выкл}}$ от T , данной формулой (9.1.8). При очень малых значениях T эта формула дает комплексные значения для $t_{\text{выкл}}$, что соответствует отсутствию решения. Лишь при $T \geq T_{\min}$, где $T_{\min}$ является наименьшим действительным корнем уравнения

$$\Delta r(T)|_{T_{\min}} = \frac{a_{\max} T_{\min}^2}{2}, \quad (9.1.27)$$

возможен перелет с рассматриваемыми граничными условиями. Заметим, что в общем случае уравнение (9.1.27) может иметь несколько корней. Так, например, в случае, когда вектор $\Delta \mathbf{r}(T)$ определяется формулой (9.1.25), это уравнение может иметь от одного до трех действительных положительных корней. В последнем случае при $T \geq T_{\min}$ существует конечный интервал значений T , на котором рассматриваемая задача не имеет решения. Покажем, что оптимальное значение $T = T_{\text{opt}}$ всегда больше, чем $T_{\min}$. Вычислим производную $dt_{\text{выкл}}/dT$, основываясь на

равенстве (9.1.8):

$$\frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} = 1 - \frac{\frac{d}{dT} \left[T^2 - \frac{2\Delta r(T)}{a_{\text{max}}} \right]}{2 \sqrt{T^2 - \frac{2\Delta r(T)}{a_{\text{max}}}}}. \quad (9.1.28)$$

Так как T^2 возрастает быстрее, чем $\Delta r(T)$, при T , близких к T_{min} , то ясно, что при T , стремящемся к $T_{\text{min}} + 0$, производная, стоящая в числителе второго слагаемого, положительна. Из этого следует неравенство

$$\lim_{T \rightarrow T_{\text{min}} + 0} \frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} < 0. \quad (9.1.29)$$

Таким образом, в малой окрестности T_{min} при увеличении T величина $t_{\text{выкл}}$ всегда убывает. Это значит, что оптимальное значение T всегда больше, чем T_{min} .

Вясним далее, к чему стремится $t_{\text{выкл}}$ при T , стремящемся к ∞ . Воспользуемся для этого выражением (9.1.26) для $\Delta r(T)$, которое является тем более точным, чем больше значение T . Для вычисления искомого предела перепишем выражение (9.1.8) для $t_{\text{выкл}}$ в следующем виде:

$$t_{\text{выкл}} = \frac{\frac{2\Delta r(T)}{a_{\text{max}}}}{T + \sqrt{T^2 - \frac{2\Delta r(T)}{a_{\text{max}}}}}. \quad (9.1.30)$$

Отсюда с использованием равенства (9.1.26) сразу получается искомый предельный результат:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} t_{\text{выкл}} = \frac{\Delta V_0}{a_{\text{max}}}. \quad (9.1.31)$$

Таким образом, при больших значениях T величина характеристической скорости

$$I = a_{\text{max}} t_{\text{выкл}} \quad (9.1.32)$$

определяется главным образом различием между векторами скоростей обоих летательных аппаратов в момент $t = 0$. Этот факт характерен не только для рассмотренного предельного случая, но и для целого ряда других задач аэродинамики. Этот класс задач отличается тем, что в нем величина вектора $\Delta r(T)$ в основном определяется величиной вектора ΔV_0 . Приведем некоторые численные оценки. Пусть

$$\Delta r_0 = 100\,000 \text{ м}, \Delta V_0 = 6000 \text{ м/сек}, T = 200 \text{ сек},$$

что является достаточно характерным для задач выведения. В этом случае

$$\Delta r_0 = \frac{1}{12} \Delta V_0 T \quad (9.1.33)$$

и можно считать, что

$$\Delta r_0 \ll \Delta V_0 T. \quad (9.1.34)$$

При наличии такого неравенства для всего практически важного диапазона значений T приближенно выполняется равенство (9.1.26).

При таком предположении можно выяснить все особенности зависимости $t_{\text{выкл}}$ от T во всем диапазоне изменения T от $T = T_{\min}$ до $T = \infty$. Вычислим сначала $T_{\min}$. Из уравнения (9.1.27) имеем

$$T_{\min} = \frac{2\Delta V_0}{a_{\max}}. \quad (9.1.35)$$

При $T = T_{\min}$, в соответствии с равенством (9.1.8), величина $t_{\text{выкл}}$ определяется формулой

$$t_{\text{выкл}}|_{T=T_{\min}} = \frac{2\Delta V_0}{a_{\max}}. \quad (9.1.36)$$

Для рассматриваемого случая, очевидно, по-прежнему имеет место предельный результат (9.1.31). Сопоставляя этот результат с формулой (9.1.36), получаем что за счет увеличения T можно уменьшить величину характеристической скорости по крайней мере в два раза. Для того чтобы показать, что значение $t_{\text{выкл}}$ нельзя выбором T уменьшить еще более, очевидно, достаточно установить, что зависимость $t_{\text{выкл}}$ от T при $T \in [T_{\min}, \infty)$ имеет монотонно убывающий характер. Выпишем с этой целью выражение для производной $dt_{\text{выкл}}/dT$. Обращаясь к формулам (9.1.28) и (9.1.26), имеем

$$\frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} = 1 - \frac{\left(T - \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}\right)}{\sqrt{T^2 - \frac{2\Delta V_0 T}{a_{\max}}}}. \quad (9.1.37)$$

Можно показать, что правая часть этого равенства не равна нулю. Из этого, а также из результатов, полученных выше, следует, что

$$\frac{dt_{\text{выкл}}}{dT} < 0 \quad (9.1.38)$$

при $T \in [T_{\min}, \infty)$. Таким образом, при всех допустимых значениях T в рассматриваемом случае зависимость $t_{\text{выкл}}$ от T имеет монотонно убывающий характер.

Заметим, что формула (9.1.30) позволяет также решить вопрос о минимизации характеристической скорости перелета I с помощью выбора величины $a_{\max}$. Из этой формулы видно, что величина I , определяемая выражением (9.1.32), является монотонно убывающей функцией от $a_{\max}$. Чем больше $a_{\max}$, тем меньше значение I .

Отсутствие минимума у зависимости $t_{\text{выкл}}$ от T не является общим правилом. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай, когда величина активного участка $t_{\text{выкл}}$ мала по сравнению с полным временем движения T :

$$\frac{t_{\text{выкл}}}{T} \ll 1. \quad (9.1.39)$$

Данная ситуация имеет место, когда величина располагаемого ускорения $a_{\max}$ велика и реализуется квазимпульсная схема движения. В соответствии с формулой (9.1.30) условие реализации этого случая может быть записано также в виде

$$\frac{\Delta r(T)}{a_{\max} T^2} \ll 1. \quad (9.1.40)$$

Если пренебречь квадратом $t_{\text{выкл}}/T$ по сравнению с первой степенью этой величины, то выражение (9.1.30) для $t_{\text{выкл}}$ может быть записано в виде

$$t_{\text{выкл}} \approx \frac{\Delta r(T)}{a_{\max} T}. \quad (9.1.41)$$

Чтобы иметь возможность проанализировать зависимость этого выражения от T , выпишем выражение для $\Delta r(T)$. Из формулы (9.1.25) имеем

$$\Delta r(T) = \sqrt{\Delta r_0^2 + 2(\Delta r_0, \Delta \mathbf{V}_0) T + \Delta V_0^2 T^2}. \quad (9.1.42)$$

С использованием этого выражения формула (9.1.41) для $t_{\text{выкл}}$ может быть написана в виде

$$t_{\text{выкл}} \approx \frac{1}{a_{\max}} \sqrt{\Delta r_0^2 \frac{1}{T^2} + 2(\Delta r_0, \Delta \mathbf{V}_0) \frac{1}{T} + \Delta V_0^2}. \quad (9.1.43)$$

Минимальное значение этого выражения достигается при

$$T_{\text{opt}} = -\frac{\Delta r_0^2}{(\Delta r_0, \Delta \mathbf{V}_0)} = -\frac{\Delta r_0}{\Delta V_0 \cos(\Delta r_0, \Delta \mathbf{V}_0)}. \quad (9.1.44)$$

Физический смысл имеют лишь значения $T_{\text{opt}} > 0$, получающиеся при условии

$$(\Delta r_0, \Delta \mathbf{V}_0) < 0, \quad (9.1.45)$$

т. е. тогда, когда угол между векторами $\Delta \mathbf{r}_0$ и $\Delta \mathbf{V}_0$ тупой; и зависимость $\Delta r(T)$ имеет минимум (см. рис. 9.1.3). Если эта зависимость минимального значения не имеет, то минимальное значение $t_{\text{выкл}}$, так же как и ранее, достигается при $T_{\text{опт}} = \infty$ и определяется формулой (9.1.31). При наличии минимума у зависимости $\Delta r(T)$ наименьшее значение $t_{\text{выкл}} = t_{\text{выкл}}^{(\text{opt})}$ определяется формулой

$$t_{\text{выкл}}^{(\text{opt})} = \frac{\Delta V_0}{a_{\text{max}}} \sin(\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{V}_0). \quad (9.1.46)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (9.1.31), можно заключить, что минимальное значение $t_{\text{выкл}}$, достигающееся при $T_{\text{опт}}$, может быть заметно ниже, чем значение $t_{\text{выкл}}$, которое достигается при $T = \infty$.

Приведем далее формулу для отношения $t_{\text{выкл}}^{(\text{opt})}/T_{\text{опт}}$. Используя формулы (9.1.44) и (9.1.46), сможем написать

$$\frac{t_{\text{выкл}}^{(\text{opt})}}{T_{\text{опт}}} = - \frac{\Delta V_0^2/2}{a_{\text{max}} \Delta r_0} \sin 2(\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{V}_0). \quad (9.1.47)$$

С использованием этого равенства условие реализации только что рассмотренного квазимпульсного случая движения может быть записано так:

$$\frac{\Delta V_0^2/2}{a_{\text{max}} \Delta r_0} |\sin 2(\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{V}_0)| \leq 1. \quad (9.1.48)$$

Отметим, что это условие выполняется, в частности, в случаях, когда векторы $\Delta \mathbf{r}_0$ и $\Delta \mathbf{V}_0$ антиколлинеарны или взаимно перпендикулярны. Независимо от направления этих векторов условие (9.1.48) всегда выполняется, если «кинетическая энергия» $\Delta V_0^2/2$ много меньше «потенциальной энергии» $a_{\text{max}} \Delta r_0$.

Выше была детально рассмотрена задача об определении оптимального значения T в наиболее простом случае, когда движение происходит в однородном поле тяготения и движение летательного аппарата-цели является неуправляемым свободным движением. Приведенный анализ показал, что рассмотренная задача имеет достаточно большое количество интересных особенностей. Эти особенности следует иметь в виду и в более сложных случаях задания вектор-функции $\mathbf{r}_1(T)$. Определение характера зависимости $t_{\text{выкл}}$ от T в общем случае следует производить с помощью численного расчета по формулам (9.1.8) или (9.1.10) или непосредственно с помощью исходного уравнения (9.1.1).

9.1.3. Оптимизация положения летательных аппаратов в момент начала управления. Рассмотрим далее задачу оптимального определения произвольных параметров, от которых может зави-

сеть вектор конечного промаха $\Delta r(T)$. Если от этих параметров не зависят одновременно функция влияния $K(T, \xi)$ и максимальная величина управляющего ускорения $a_{\max}(\xi)$, то из уравнения (9.1.1) вытекает простое правило для минимизации момента выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$. А именно, из уравнения (9.1.1) следует, что чем меньше $\Delta r(T)$, тем меньше и $t_{\text{выкл}}$. Таким образом, при оптимальном решении задачи произвольные параметры, от которых зависит только величина $\Delta r(T)$, должны быть выбраны таким образом, чтобы $\Delta r(T)$ имело минимально возможное значение. Проиллюстрируем применение этого правила на следующей задаче.

Пусть нам даны орбиты, по которым свободно, без использования управляющего ускорения, двигаются летательные аппараты. Соответствующая схема изображена на рис. 9.1.4. На этом рисунке буквой A обозначен летательный аппарат, закон управления которым должен быть выбран для обеспечения встречи, а буквой B — летательный аппарат-цель, с которым организуется встреча. Законы движения обоих летательных аппаратов по своим орбитам будем считать заданными. В отличие от задачи, рассматривавшейся в предыдущем разделе, будем предполагать, что момент начала управления не задан и должен быть выбран оптимально. От этого момента зависят радиусы-векторы обоих летательных аппаратов при $t=0$ в момент начала управления и, соответственно, величина конечного промаха $\Delta r(T)$. Из сказанного выше следует, что при оптимальном выборе этого момента величина вектора конечного промаха должна быть минимальна. Ясно, что минимальное значение этой величины может быть определено в результате рассмотрения свободного движения летательных аппаратов. При свободном движении в какой-то момент времени летательные аппараты максимально сближаются, так что разность их радиусов-векторов становится равной известному фиксированному вектору $\Delta r_{\min}$. Положения летательных аппаратов в этот момент времени обозначены на рис. 9.1.4 буквами A_0 и B_0 . Если считать, что в результате управления встреча летательных аппаратов происходит в точке B_0 , то ясно, что в этом случае

$$\Delta r(T) = \Delta r_{\min} \quad (9.1.49)$$

и уменьшить величину $\Delta r(T)$ более невозможно. Зафиксируем время перелета T . Тогда оптимальные положения летательных

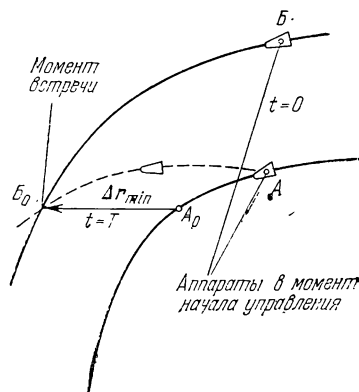


Рис. 9.1.4.

аппаратов в момент начала управления при фиксированном значении T , очевидно, совпадут с теми их положениями, которые они занимали в прошлом в момент времени, отстоящий от момента попадания в точки A_0 и B_0 на промежуток времени T . Заметим, что при таком оптимальном выборе момента начала управления величина конечного промаха перестает зависеть от T и равна $\Delta r_{\min}$. Соответственно не зависит от T и ориентация управляющего ускорения a . Направление вектора a при всех значениях T совпадает с направлением вектора $\Delta r_{\min}$. От T зависит только момент выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$. В данном случае очень просто решается вопрос об оптимальном выборе величины T . А именно, из рассмотрения (9.1.1) сразу видно, что если $K(T, \xi)$ при всех $\xi \in [0, T]$ возрастает с увеличением T , то $t_{\text{выкл}}$ при увеличении T уменьшается. В однородном поле тяготения функция $K(T, \xi)$ возрастает при всех значениях T (см. (9.1.5)), а в однородном центральном поле тяготения (см. (8.1.17)) этот факт имеет место при значениях безразмерного времени T , меньших $\pi/2$ на величину порядка δr_m . Таким образом, для достаточно больших значений времени перелета T увеличение его приводит к уменьшению $t_{\text{выкл}}$. Из (9.1.1) видно, что существует диапазон малых значений T , при которых это уравнение не имеет решения для $t_{\text{выкл}}$. Возникает вопрос об определении минимально возможного значения $T = T_{\min}$, такого, что при

$$T \geq T_{\min} \quad (9.1.50)$$

возможен перелет при заданном значении $\Delta r_{\min}$. Из (9.1.1) следует, что такое значение T удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{T_{\min}} K(T_{\min}, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta r_{\min}. \quad (9.1.51)$$

Ясно, что левая часть этого уравнения является монотонно возрастающей функцией от $T_{\min}$ при всех тех значениях $T_{\min}$, при которых такой же функцией является $K(T_{\min}, \xi)$. Для этого интервала значений $T_{\min}$ уравнение (9.1.51) имеет единственное решение для $T_{\min}$.

Продолжим далее анализ рассматриваемой задачи в несколько модифицированной постановке. А именно, примем, что в нашем распоряжении имеется не только выбор момента начала управления летательным аппаратом A (см. рис. 9.1.4), но также и выбор момента выведения его на свою орбиту. Другими словами, будем считать незадаанным его положение, которое он имел бы при свободном движении по своей орбите в момент окончания перелета. Такая модификация постановки задачи соответствует достаточно интересному практическому случаю, когда оптимально выбирается момент старта летательного аппарата A . Данная задача отличается от рассмотренной только способом задания

вектора $\Delta \mathbf{r}_{\min}$, который теперь определяет минимальное расстояние между орбитами летательных аппаратов A и B . Заметим, что в исходной постановке величина $\Delta r_{\min}$ представляла собой кратчайшее расстояние между летательными аппаратами при данном движении их по орбитам. Теперь же

$$\Delta r_{\min} = \min_{\{A, B\}} |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|. \quad (9.1.52)$$

Здесь $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ — радиусы-векторы летательных аппаратов A и B , а минимум вычисляется среди всех возможных положений A и B на своих орбитах.

Особенно простой вид имеет решение рассматриваемой задачи в случае, когда орбиты летательных аппаратов A и B расположены в одной плоскости и, кроме того, орбита B является круговой. Схема, на которой изображено взаимное расположение орбит для этого случая, показана на рис. 9.1.5. Ясно, что в этом случае вектор $\Delta \mathbf{r}_{\min}$ имеет начало в апоцентре орбиты A и направлен по вертикали в этой точке. Соответственно по вертикали направлено и управляющее ускорение. Увеличение времени перелета T , также как и ранее, при выполнении условия

$$\frac{\partial K}{\partial T} \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq T \quad (9.1.53)$$

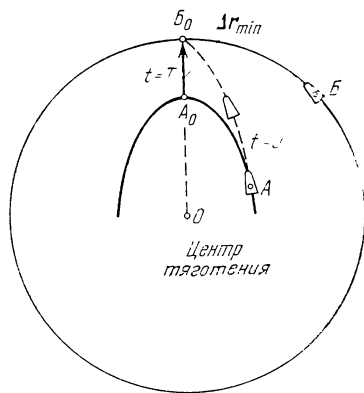


Рис. 9.1.5.

приводит к уменьшению затрат характеристической скорости.

§ 9.2. Изменение вектора скорости

9.2.1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим задачу об оптимальном изменении вектора скорости с минимальными затратами характеристической скорости. Эта задача относится к числу тех, когда существует прямая управления.

В § 8.5 с использованием результатов общей теории было показано, что величина управляющего ускорения принимает свое максимальное значение, ориентация его постоянна в пространстве и совпадает с направлением вектора конечного промаха по скорости $\Delta \mathbf{V}(T)$, активный участок один и располагается в конце траектории. Для момента включения двигателя $t_{\text{вкл}}$ было получено уравнение

$$\int_{t_{\text{вкл}}}^T L(T, \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta V(T). \quad (9.2.1)$$

Напомним, что в однородном поле тяготения

$$L(T, \xi) = 1, \quad (9.2.2)$$

а в однородном центральном поле тяготения при $\delta r_m \rightarrow 0$

$$L(T, \xi) = \cos(T - \xi). \quad (9.2.3)$$

Равенство (9.2.1) можно рассматривать как условие для определения момента окончания работы двигателя $t = T$ после того, как будет достигнуто нужное значение $\Delta V(T)$. Важным является то, что этот результат справедлив при произвольных вариациях в величине $a_{\max}(\xi)$.

Введем в рассмотрение продолжительность активного участка

$$\Delta t_a = T - t_{\text{вкл.}} \quad (9.2.4)$$

В случае $a_{\max}(\xi) = \text{const}$ уравнение (9.2.1) позволяет получить формулы для определения этой величины. В однородном поле тяготения

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \quad (9.2.5)$$

При использовании же для $L(T, \xi)$ выражения (9.2.3) получается следующий результат:

$$\sin \Delta t_a = \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \quad (9.2.6)$$

Очевидно, что Δt_a должно быть меньше, чем T . Поэтому в случае однородного поля тяготения

$$\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \leq T. \quad (9.2.7)$$

В случае же однородного центрального поля тяготения при $\delta r_m \rightarrow 0$ и $T \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \leq \sin T. \quad (9.2.8)$$

Эти неравенства позволяют сформулировать некоторые требования к величине времени перелета T .

В заключение настоящего раздела приведем выражение для $\Delta V(T)$ в случае однородного поля тяготения. Обычно значение вектора скорости, которое должно быть в конце перелета, не зависит от T . Обозначим его через V_1 . Зависимость же от T вектора скорости $V_0(T)$ летательного аппарата, закон управления которым определяется, записывается в виде

$$V_0(T) = V_{00} + gT. \quad (9.2.9)$$

соответственно

$$\begin{aligned} \Delta V(T) &= |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{00} - \mathbf{g}T| = |\Delta \mathbf{V}_0 - \mathbf{g}T| = \\ &= \sqrt{\Delta V_0^2 - 2(\Delta \mathbf{V}_0, \mathbf{g})T + g^2 T^2}, \quad (9.2.10) \end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{00}$ — разность между векторами скорости в конце и в начале перелета.

9.2.2. Оптимизация времени перелета. Обычно в задачах, связанных с изменением вектора скорости, величина времени перелета T не задается заранее и может быть выбрана оптимально. Рассмотрим эту задачу для случая однородного поля тяготения. Выражение для Δt_a в этом случае с помощью формул (9.2.5) и (9.2.10) можно записать в виде

$$a_{\max} \Delta t_a = \sqrt{\Delta V_0^2 - 2(\Delta \mathbf{V}_0, \mathbf{g})T + g^2 T^2}. \quad (9.2.11)$$

Величина $T \geq \Delta t_a$ должна быть выбрана так, чтобы длина активного участка Δt_a была минимальна. Рассмотрим сначала эту задачу при условии

$$(\Delta \mathbf{V}_0, \mathbf{g}) \leq 0. \quad (9.2.12)$$

В этом случае угол между векторами $\Delta \mathbf{V}_0$ и $\mathbf{g}$ тупой и ускорение силы тяжести действует противоположно нужному изменению вектора скорости.

При условии (9.2.12) выражение в правой части равенства (9.2.11) является монотонно возрастающей функцией T . Отсюда следует, что минимальное значение Δt_a достигается при

$$T = \Delta t_a. \quad (9.2.13)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оптимальная траектория не содержит пассивного участка. С использованием последнего равенства уравнение (9.2.11) может быть переписано в виде

$$a_{\max}^2 \Delta t_a^2 = \Delta V_0^2 - 2(\Delta \mathbf{V}_0, \mathbf{g}) \Delta t_a + g^2 \Delta t_a^2. \quad (9.2.14)$$

Это уравнение является уравнением для Δt_a . Заметим прежде всего, что при условии (9.2.12) это уравнение имеет неотрицательное решение только при условии

$$a_{\max} > g. \quad (9.2.15)$$

Это сразу видно из сопоставления между собой правой и левой частей уравнения (9.2.14). При $a_{\max} \leq g$ и условии (9.2.12) правая часть этого уравнения при всех неотрицательных значениях Δt_a больше, чем левая. Полученный результат следует из того, что при условии (9.2.12) действие силы тяжести является вредным и при $a_{\max} \leq g$ оно не может быть преодолено с помощью

управляющего ускорения. Поэтому далее будем предполагать, что одновременно с неравенством (9.2.12) выполняется также неравенство (9.2.15). Перепишем уравнение (9.2.14) в следующем виде:

$$(a_{\max}^2 - g^2) \Delta t_a^2 + 2(\Delta V_0, g) \Delta t_a - \Delta V_0^2 = 0. \quad (9.2.16)$$

При $a_{\max} > g$ уравнение (9.2.16) имеет один неотрицательный корень:

$$\Delta t_a = \frac{-(\Delta V_0, g) + \sqrt{(\Delta V_0, g)^2 + \Delta V_0^2 (a_{\max}^2 - g^2)}}{a_{\max}^2 - g^2} =$$

$$= \frac{\Delta V_0}{a_{\max}} \left[\frac{\sqrt{1 - (g/a_{\max})^2 \sin^2(\Delta V_0, g)} - (g/a_{\max}) \cos(\Delta V_0, g)}{1 - (g/a_{\max})^2} \right]. \quad (9.2.17)$$

Отметим два предельных случая. Пусть сначала $a_{\max} \rightarrow g + 0$. Из полученной формулы видно, что в этом случае $\Delta t_a \rightarrow \infty$. Далее пусть $a_{\max} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{a_{\max} \rightarrow \infty} \Delta t_a = \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}. \quad (9.2.18)$$

В последнем случае получающаяся формула, очевидно, соответствует решению задачи в импульсной постановке. Результаты

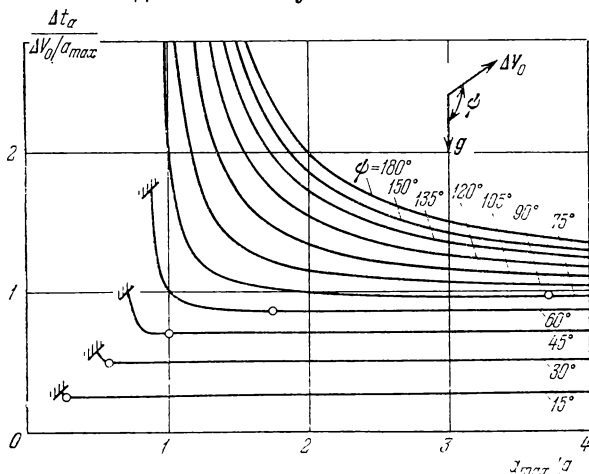


Рис. 9.2.1.

расчетов величины $\Delta t_a / \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}$ в зависимости от величины отношения $a_{\max}/g$ для различных значений угла ϕ между векторами g и ΔV_0 представлены на рис. 9.2.1. Из графиков, изображенных на этом рисунке, а также из формулы (9.2.17) следует, что

при $90^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ предельное значение (9.2.18) практически достигается при

$$\frac{a_{\max}}{g} > 10. \quad (9.2.19)$$

При увеличении угла ψ продолжительность активного участка увеличивается. Этот результат является следствием того, что при увеличении ψ в интервале от 90° до 180° действие силы тяжести является тем более вредным, чем больше значение ψ .

Перейдем далее к исследованию случая, когда выполняется неравенство, противоположное неравенству (9.2.12):

$$(\Delta V_0, g) \geq 0. \quad (9.2.20)$$

Тогда сила тяжести способствует изменению вектора скорости в нужную сторону. В основу исследования, так же как и ранее, положим уравнение (9.2.14). Однако в рассматриваемом случае при наличии неравенства (9.2.20) правая часть равенства (9.2.14) не является монотонно возрастающей функцией T , как это было ранее, а имеет при некотором $T = T_{\text{opt}}$ минимальное значение. Обозначим через $\Delta t_a^{(\text{opt})}$ соответствующее минимальное значение Δt_a . Если

$$\Delta t_a^{(\text{opt})} \leq T_{\text{opt}}, \quad (9.2.21)$$

то это значение T , очевидно, является искомым оптимальным значением времени перелета. Ясно, что тогда оптимальное решение задачи имеет пассивный участок, на котором изменение вектора скорости в нужную сторону происходит под воздействием силы тяжести.

Если же

$$\Delta t_a^{(\text{opt})} > T_{\text{opt}}, \quad (9.2.22)$$

в интервале значений T , имеющих физический смысл, правая часть равенства (9.2.11) является монотонно возрастающей функцией T и следует положить $\Delta t_a = T$. В этом случае для определения Δt_a получается уравнение (9.2.16). Физический смысл, очевидно, имеет наименьший неотрицательный корень этого уравнения. При $a_{\max} < g$ у уравнения (9.2.16) может быть два таких корня.

Проведем необходимые вычисления. Из (9.2.11) для T_{opt} и $\Delta t_a^{(\text{opt})}$ получаем

$$T_{\text{opt}} = \frac{\Delta V_0}{g} \cos(\Delta \mathbf{V}_0, g), \quad (9.2.23)$$

$$\Delta t_a^{(\text{opt})} = \frac{\Delta V_0}{a_{\max}} \sin(\Delta \mathbf{V}_0, g) \quad (9.2.24)$$

Неравенство (9.2.21) выполняется при условии

$$\frac{g}{a_{\max}} \operatorname{tg}(\Delta V_0, g) \leq 1 \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.2.25)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи содержит пассивный участок при малых значениях угла ψ и больших значениях отношения $a_{\max}/g$. Отметим, что согласно (9.2.24)

$$\Delta t_a^{(\text{opt})}|_{\psi=0} = 0. \quad (9.2.26)$$

В этом случае изменение вектора скорости происходит только за счет благоприятного действия силы тяжести, без каких-либо затрат характеристической скорости.

Если неравенство (9.2.25) не выполняется, то в соответствии со сказанным выше Δt_a находится из уравнения (9.2.16). При $a_{\max} > g$ это уравнение имеет только один неотрицательный корень, который определяется формулой (9.2.17). В рассматриваемом случае, когда $\cos \psi \geq 0$, эту формулу целесообразно переписать в виде

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V_0/a_{\max}}{\sqrt{1 - (g/a_{\max})^2 \sin^2(\Delta V_0, g) + (g/a_{\max}) \cos(\Delta V_0, g)}}. \quad (9.2.27)$$

Отсюда видно, что, в отличие от ранее рассмотренного случая, Δt_a имеет конечный предел при $a_{\max}/g \rightarrow 1 + 0$:

$$\lim_{\frac{a_{\max}}{g} \rightarrow 1+0} \Delta t_a = \frac{\Delta V_0/a_{\max}}{2 \cos(\Delta V_0, g)}. \quad (9.2.28)$$

При $a_{\max} < g$ и условии (9.2.20), как уже указывалось, (9.2.16) имеет два положительных корня. Однако наименьший из них по-прежнему дается формулой (9.2.17) или (9.2.27). В этом случае решение существует для таких значений отношения $a_{\max}/g$, при которых подкоренное выражение в указанных формулах положительно. Условие существования решения, как это видно из (9.2.27), представляет собой неравенство

$$\frac{g}{a_{\max}} \sin(\Delta V_0, g) \leq 1. \quad (9.2.29)$$

Таким образом, в случаях, когда сила притяжения способствует изменению вектора скорости в нужную сторону, в отличие от ранее рассмотренного случая, решение задачи существует для некоторого интервала значений $a_{\max}/g$, меньших чем единица.

Результаты расчетов по полученным формулам для Δt_a в указанных выше областях их применимости приведены на рис. 9.2.1. Прямые линии на этом рисунке, как это следует из формулы

(9.2.24), соответствуют случаям, когда оптимальное решение задачи содержит пассивный участок.

9.2.3. Иллюстрирующий пример. Рассмотрим задачу, в которой начальное и конечное значения вектора скорости горизонтальны. В этом случае вектор $\Delta \mathbf{V}_0$ также горизонтален и, соответственно, имеет место равенство

$$(\Delta \mathbf{V}_0, \mathbf{g}) = 0. \quad (9.2.30)$$

Из (9.2.25) следует, что при таком условии режим с пассивным участком при конечных значениях $a_{\max}$ отсутствует и решение задачи дается формулой (9.2.27). При условии (9.2.30) она записывается в виде

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V_0}{\sqrt{a_{\max}^2 - g^2}}. \quad (9.2.31)$$

Вычислим величину вертикальной составляющей управляющего ускорения. В рассматриваемом случае $T = \Delta t_a$ и, в соответствии с полученными выше результатами и условием (9.2.30), вектор управляющего ускорения определяется формулой

$$a = a_{\max} \frac{\Delta \mathbf{V}_0 - \mathbf{g} \Delta t_a}{\sqrt{\Delta V_0^2 + g^2 \Delta t_a^2}}. \quad (9.2.32)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор $-\mathbf{g}/g$, получим вертикальную компоненту управляющего ускорения a_v :

$$a_v = -a_{\max} \frac{\left(\Delta \mathbf{V}_0, \frac{\mathbf{g}}{g}\right) - \left(\mathbf{g}, \frac{\mathbf{g}}{g}\right) \Delta t_a}{\sqrt{\Delta V_0^2 + g^2 \Delta t_a^2}}. \quad (9.2.33)$$

Используя условие (9.2.30), перепишем это выражение в виде

$$a_v = \frac{a_{\max} g \Delta t_a}{\sqrt{\Delta V_0^2 + g^2 \Delta t_a^2}}. \quad (9.2.34)$$

Подставляя сюда Δt_a из (9.2.31), после несложных преобразований получим

$$a_v = g. \quad (9.2.35)$$

Отсюда следует важный результат: если вектор $\Delta \mathbf{V}_0$ расположен в горизонтальной плоскости, то и вся оптимальная траектория располагается в горизонтальной плоскости, содержащей векторы начальной и конечной скорости. Ясно также, что горизонтальная компонента управляющего ускорения направлена по вектору $\Delta \mathbf{V}_0$, а ее величина равняется $\sqrt{a_{\max}^2 - g^2}$. Решение данной задачи, очевидно, возможно только в случаях, когда $a_{\max} > g$.

Отметим, далее, что когда изменение вектора скорости состоит из разворота его и разгона, то из формулы (9.2.31) следует, что выгоднее это делать одновременно, а не последовательно. По-

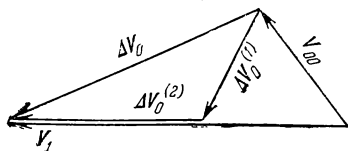


Рис. 9.2.2.

ним это с помощью схемы, изображенной на рис. 9.2.2. На этом рисунке через V_{00} и V_1 , так же как и ранее, обозначены начальное и конечное значения вектора скорости. Через $\Delta V_0^{(1)}$ обозначено приращение вектора скорости, необходимое для разворота вектора V_{00} , а через

$\Delta V_0^{(2)}$ — приращение, связанное с изменением его длины. Поскольку векторы ΔV_0 , $\Delta V_0^{(1)}$ и $\Delta V_0^{(2)}$ образуют треугольник, то

$$\Delta V_0^{(1)} + \Delta V_0^{(2)} > \Delta V_0. \quad (9.2.36)$$

Из формулы (9.2.31) видно, что для каждого маневра характеристическая скорость пропорциональна величине изменения вектора скорости.

Дополнительное рассмотрение задачи об изменении вектора скорости дано в работе А. З. Брауде, Г. Е. Кузмака [1].

§ 9.3. Синтез оптимального управления в случае коллинеарных векторов конечного промаха при $a_{\max} = \text{const.}$

9.3.1. Решение для однородного поля. Рассмотрим далее наиболее сложный случай из числа тех, в которых существует прямая управления, а именно случай, когда одновременно задаются оба вектора $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$, однако предполагается, что они коллинеарны. Основное упрощающее предположение, которое будет использоваться в настоящем параграфе, выражается равенством

$$a_{\max}(t) = \text{const.} \quad (9.3.1)$$

В настоящем разделе рассмотрим эту задачу для однородного поля. Тогда вектор управляющего ускорения, удовлетворяющий ограничению $|\mathbf{a}(t)| \leq a_{\max}(t)$, должен обеспечить выполнение равенств

$$\int_0^T \mathbf{a}(\xi)(T - \xi) d\xi = \Delta \mathbf{r}(T), \quad \int_0^T \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{V}(T) \quad (9.3.2)$$

и минимизировать величину характеристической скорости.

В § 8.5 было показано, что направление вектора $\mathbf{a}$ параллельно коллинеарным векторам $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$. Закон же изменения величины вектора $\mathbf{a}(\xi)$ определяется формулами (8.5.3). При

$X(T, \xi) = T - \xi$ и $L(T, \xi) = 1$ из этих формул следует, что возможны два режима оптимального управления:

- а) с одним активным участком внутри отрезка $0 \leq t \leq T$;
- б) с двумя активными участками, примыкающими к концам отрезка $0 \leq t \leq T$, на которых направления управляющего ускорения противоположны.

Таким образом, вектор $a(\xi)$ располагается на прямой управления и в процессе движения возможно изменение направления этого вектора на противоположное.

В качестве положительного направления на прямой управления выберем направление управляющего ускорения $a(\xi)$ на первом по времени активном участке. Соответственно скалярные величины $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$ будем считать положительными, если направления соответствующих им векторов $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$ совпадают с направлением вектора $a(\xi)$ на первом активном участке, и отрицательными в противном случае.

Рассмотрим сначала режим оптимального управления с одним активным участком. Для этого режима граничные условия (9.3.2) после вычисления интегралов могут быть записаны в виде

$$\Delta t_a (T - t_{a \text{ ср}}) = \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}}, \quad (9.3.3)$$

$$\Delta t_a = \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \quad (9.3.4)$$

Через Δt_a здесь обозначена продолжительность активного участка, а через $t_{a \text{ ср}}$ — положение его середины. Решение этой системы уравнений, имеющее физический смысл, должно удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_a &\geq 0, \\ t_{a \text{ ср}} - \frac{\Delta t_a}{2} &\geq 0, \\ t_{a \text{ ср}} + \frac{\Delta t_a}{2} &\leq T, \end{aligned} \right\} \quad (9.3.5)$$

выражающим собой факт существования активного участка внутри отрезка $0 \leq t \leq T$. Из уравнений (9.3.3) и (9.3.4) получают следующие формулы для Δt_a и $t_{a \text{ ср}}$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_a &= \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}, \\ t_{a \text{ ср}} &= T - \frac{\Delta r(T)/a_{\max}}{\Delta V(T)/a_{\max}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.3.6)$$

с использованием которых условия существования режима с одним активным участком (9.3.5) могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &\geq 0, \\ \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &\leq -\frac{1}{2} \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2 + T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}, \\ \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &\geq \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.7)$$

Первое и последнее из неравенств (9.3.7) позволяют заключить, что режим управления с одним активным участком возможен лишь при положительных значениях $\Delta V(T)$ и $\Delta r(T)$.

Получим аналогичные формулы для режима с двумя активными участками. В этом случае, после вычисления интегралов, равенства (9.3.2) могут быть записаны так:

$$-T^2 + 4Tt_{\text{п ср}} - 2t_{\text{п ср}}^2 - \frac{\Delta t_{\text{п}}^2}{2} = 2 \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}}, \quad (9.3.8)$$

$$2t_{\text{п ср}} - T = \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \quad (9.3.9)$$

Режим с двумя активными участками можно рассматривать и как режим с одним пассивным участком, расположенным при $0 \leq t \leq T$. В формулах (9.3.8) и (9.3.9) через $\Delta t_{\text{п}}$ и $t_{\text{п ср}}$ обозначены, соответственно, продолжительность этого пассивного участка и положение его середины. Режим с двумя активными участками, очевидно, существует лишь в случаях, когда разделяющий их пассивный участок располагается внутри промежутка $0 \leq t \leq T$. Соответственно условия существования такого режима могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_{\text{п}} &\geq 0, \\ t_{\text{п ср}} - \frac{\Delta t_{\text{п}}}{2} &\geq 0, \\ t_{\text{п ср}} + \frac{\Delta t_{\text{п}}}{2} &\leq T. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.10)$$

Из равенства (9.3.9) получается следующая формула для $t_{\text{п ср}}$:

$$t_{\text{п ср}} = \frac{1}{2} \left(T + \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right). \quad (9.3.11)$$

Подставляя это выражение для $t_{\text{п ср}}$ в (9.3.8), можно получить выражение для $\Delta t_{\text{п}}$:

$$\Delta t_{\text{п}} = \sqrt{T^2 - 4 \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} + 2T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} - \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2}. \quad (9.3.12)$$

Формулы для $t_{\text{пер}}$ и $\Delta t_{\text{п}}$ позволяют выразить условия существования режима управления с двумя активными участками (9.3.10) через величины векторов конечного промаха $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$. Соответствующие неравенства записываются так:

$$T^2 - 4 \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} + 2T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} - \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2 \geq 0, \quad (9.3.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{T^2 - 4 \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} + 2T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} - \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2} &\leq T + \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}, \\ \sqrt{T^2 - 4 \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} + 2T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} - \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2} &\leq T - \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.14)$$

Последние два неравенства могут быть упрощены. Ясно, что правые и левые части этих неравенств положительны. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &\geq -\frac{1}{2} \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2, \\ \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &\geq -\frac{1}{2} \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2 + T \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.15)$$

Из сопоставления между собой неравенств (9.3.7) и (9.3.15) видно, что область существования режима с двумя активными участками примыкает к области существования режима с одним активным участком. Следует отметить, что режим с двумя активными участками, в отличие от режима с одним активным участком, существует как при положительных, так и при отрицательных значениях $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$.

Области существования рассмотренных режимов оптимального управления могут быть построены в плоскости параметров $\Delta r(T)/a_{\max}$, $\Delta V(T)/a_{\max}$ при различных значениях T . Такие результаты будут получены далее в процессе решения аналогичной задачи для однородного центрального поля.

9.3.2. Геометрическая интерпретация для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$. В случае движения в очень тонких слоях центрального поля, когда можно считать, что $\delta r_m = 0$, граничные условия записываются (см. §§ 8.1, 8.2) в форме

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \mathbf{a}(\xi) \sin(T - \xi) d\xi &= \Delta \mathbf{r}(T), \\ \int_0^T \mathbf{a}(\xi) \cos(T - \xi) d\xi &= \Delta \mathbf{V}(T), \end{aligned} \right\} \quad (9.3.16)$$

где в рассматриваемом случае векторы $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ коллинеарны.

Управляющее ускорение $\mathbf{a}(t)$ должно быть выбрано таким образом, чтобы выполнялись равенства (9.3.16), неравенство

$$|\mathbf{a}(t)| \leq a_{\max}(t), \quad (9.3.17)$$

где $a_{\max}(t)$ — заданная функция, и был минимален интеграл

$$I = \int_0^T a(\xi) d\xi. \quad (9.3.18)$$

Для данной задачи при оптимальном управлении вектор $\mathbf{a}(\xi)$ коллинеарен с векторами $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$. В процессе движения возможно изменение направления этого вектора на противоположное. Так же как и в предыдущем разделе, величины $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ будем считать положительными, если они совпадают с направлением $\mathbf{a}(t)$ на первом активном участке, и отрицательными в противном случае. Введем в равенствах (9.3.16) и (9.3.18) новую переменную интегрирования q , связанную с ξ соотношением

$$\frac{dq}{d\xi} = a(\xi). \quad (9.3.19)$$

С учетом этого равенства и замечаний, сделанных выше, (9.3.16) и (9.3.18) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} I &= q(T), \\ \int_0^I \sigma(q) \sin[T - \xi(q)] dq &= \Delta r(T), \\ \int_0^I \sigma(q) \cos[T - \xi(q)] dq &= \Delta V(T), \end{aligned} \right\} \quad (9.3.20)$$

где через $\sigma(q)$ обозначена функция, принимающая значение, равное единице, на первом активном участке и на всех остальных участках, на которых вектор $\mathbf{a}(t)$ направлен в положительную сторону прямой управления, и значение, равное минус единице, на тех активных участках, на которых вектор $\mathbf{a}(t)$ направлен в отрицательную сторону.

Введем в рассмотрение угол ω :

$$\omega = [T - \xi(q)]. \quad (9.3.21)$$

Из (9.3.19) следует:

$$\frac{d\omega}{dq} = -\frac{1}{a(\xi)}. \quad (9.3.22)$$

Функция $a(\xi)$ представляет собой модуль управляющего ускорения и принимает либо положительное, либо нулевые значения.

Поэтому ясно, что с ростом q угол ω убывает, причем в соответствии с (9.3.21),

$$\omega|_{q=0} = T, \quad \omega|_{q=I} = 0. \quad (9.3.23)$$

Неравенство (9.3.17), ограничивающее величину управляющего ускорения, накладывает, в свою очередь, ограничение на скорость изменения угла ω . Из этого неравенства и (9.3.22) следует:

$$\left| \frac{d\omega}{dq} \right| \geq \frac{1}{a_{\max}(\xi)}. \quad (9.3.24)$$

С использованием угла ω равенства (9.3.20) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} I &= q(T), \\ \int_0^I \sigma(q) \sin \omega(q) dq &= \Delta r(T), \\ \int_0^I \sigma(q) \cos \omega(q) dq &= \Delta V(T). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.25)$$

Такая форма записи допускает простую геометрическую интерпретацию.

Возьмем декартову систему координат, по оси абсцисс которой будем откладывать значения $\Delta V(T)$, а по оси ординат значения $\Delta r(T)$ (рис. 9.3.1), и рассмотрим кривую, длина дуги которой до некоторой точки A на ней равняется q , а угол между касательной к ней в точке A и осью абсцисс равняется $\omega(q)$. Если считать, что эта кривая соответствует движению, то получающаяся для нее зависимость $\omega(q)$, в соответствии с равенствами (9.3.21) и (9.3.22), определяет закон изменения управляющего ускорения $a(t)$. Будем, далее, предполагать, что при тех значениях q , при которых функция $\sigma(q)$ меняет свои значения с 1 на -1 и, наоборот, с -1 на 1, угол $\omega(q)$ мгновенно получает приращение, равное π . Если такие точки существуют, то конечное значение ω , в дополнение к значениям (9.3.23), будет равняться $k\pi$, где k — число перемен знака функций $\sigma(q)$. При таком определении угла ω интегралы, стоящие в левых частях равенств (9.3.25), представляют собой проекции указанной кривой на оси координат. В соответствии с этим любая кривая, выходящая из начала координат и оканчивающаяся в точке B с координатами $\Delta V(T)$

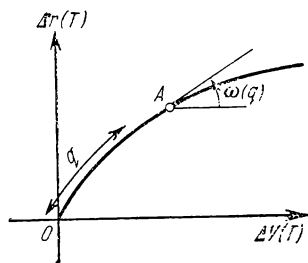


Рис. 9.3.1.

и $\Delta r(T)$ (см. рис. 9.3.2 и 9.3.3), обеспечивает выполнение граничных условий; длина же этой кривой равняется l . Решение рассматриваемой вариационной задачи дается той из этих кривых, которая имеет наименьшую длину и, кроме того, удовлетворяет неравенству (9.3.24), представляющему собой ограничение, налагаемое на $\frac{d\omega}{dq}$ — кривизну рассматриваемой кривой.

Ясно, что на пассивных участках приращение q равняется нулю, а приращение угла ω , в соответствии с (9.3.21), равняется $-\Delta t_n$, где Δt_n — продолжительность пассивного участка. Таким образом, пассивные участки моделируются на указанной кривой угловыми точками, причем мгновенное изменение ω в этих точках всегда приводит к его уменьшению. Изложенная геометрическая интерпретация рассматриваемой вариационной задачи позволяет получить сведения о возможных режимах управления и наметить области существования каждого из них.

Ясно, что длина дуги кривой, соединяющей начало координат и конечную точку B с координатами $\Delta V(T)$ и $\Delta r(T)$ (см. рис. 9.3.2 и 9.3.3), будет наименьшей в том случае, когда используемая кривая во всех своих точках имеет наименьшую кривизну. Отсюда, в соответствии с (9.3.22) и (9.3.24), следует, что величина ускорения $a(t)$ при оптимальном управлении всегда должна иметь граничное значение $a_{\max}(t)$.

Рассмотрим далее случай отсутствия активных участков, на которых вектор ускорения $a(t)$ направлен в отрицательную сторону прямой управления. Соединим начало координат и конечную точку кривой с наименьшей возможной кривизной во всех ее точках. Эта кривая соответствует режиму управления с активным участком, расположенным в середине промежутка $0 \leq t \leq T$.

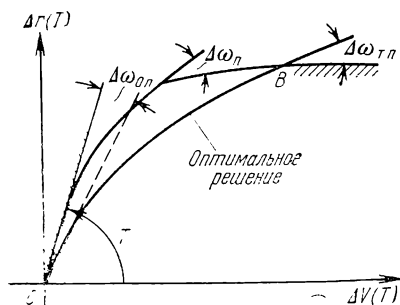


Рис. 9.3.2.

Пассивные участки в этом случае располагаются в начале и в конце траектории и их величины определяются углами $\Delta\omega_{0n}$ и $\Delta\omega_{Tn}$, указанными на рис. 9.3.2. Введение пассивного участка где-то внутри промежутка $0 \leq t \leq T$ соответствует кривой с изломом в середине, которая имеет большую длину, чем кривая без излома, и, следовательно, такой режим управления не является оптимальным. Вклю-

чение активного участка с отрицательным направлением $a(t)$, очевидно, также приведет лишь к увеличению длины кривой. Таким образом, во всех тех случаях, когда конечная точка B может быть достигнута с помощью кривой, соответствующей режиму

управления с одним активным участком, расположенным в середине промежутка, этот режим является оптимальным и обеспечивает минимальное значение I . Из схемы, изображенной на рис. 9.3.2, видно, что при управлении с одним активным участком можно построить решения лишь для конечных точек B , лежащих между положительным направлением оси абсцисс и прямой, выходящей из начала координат и составляющей угол T с этой осью. Очевидно, что при таком управлении нельзя достигнуть конечной точки, расположенной во II—IV квадрантах.

Остановимся далее на случае, когда после первого активного участка с положительным направлением $a(t)$ существует второй активный участок, на котором направление $a(t)$ отрицательно.

Возможные расположения кривых изображены на рис. 9.3.3.

Кривая наименьшей длины в этом случае строится следующим образом. Из начала координат проводится кривая 1, имеющая наименьшую кривизну и касающаяся в начале координат прямой, наклоненной к оси абсцисс под углом T . Далее из конечной точки B по касательной к линии $\Delta r = \text{const}$ выпускается кривая 2, также имеющая во всех своих точках наименьшую возможную кривизну. Кривые 1 и 2

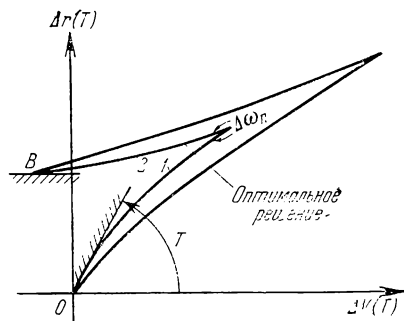


Рис. 9.3.3.

и 2 продолжают до момента пересечения их друг с другом. Угол $\Delta\omega$, который они образуют в точке пересечения, определяет продолжительность пассивного участка, разделяющего активные участки с противоположными направлениями управляющего ускорения $a(t)$. Построенная таким образом кривая определяет оптимальное решение, позволяющее достигнуть конечных точек, расположенных во II и III квадрантах. Таким образом, рассмотренный режим оптимального управления весьма существенно расширяет область возможных значений $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$, при которых имеем решение рассматриваемой задачи.

Более детальный анализ возможных расположений кривых в указанной плоскости показывает, что при $T \leq \pi/2$ никаких других режимов оптимального управления, кроме рассмотренных, не существует. Этот результат согласуется с результатами § 8.5, где анализ возможных режимов оптимального управления был проведен с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина.

9.3.3. Решение задачи для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$. Перейдем к аналитическому решению задачи, сформулированной в начале предыдущего раздела, в предположении,

что $a_{\max}(t) = \text{const}$. Снова рассмотрим сначала режим оптимального управления с одним активным участком. Для этого режима граничные условия (9.3.16) после вычисления интегралов могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{\Delta t_a}{2} \sin (T - t_{a \text{ ср}}) &= \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}}, \\ 2 \sin \frac{\Delta t_a}{2} \cos (T - t_{a \text{ ср}}) &= \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.26)$$

Здесь через Δt_a снова обозначена продолжительность активного участка, а через $t_{a \text{ ср}}$ — положение его середины. Эти обозначения поясняются на рис. 9.3.4. Решение системы уравнений (9.3.26),

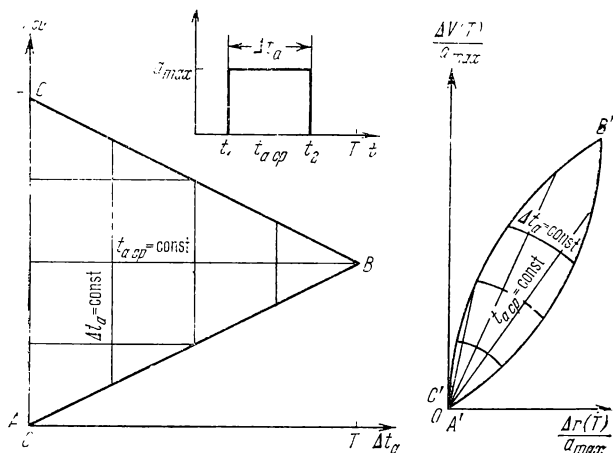


Рис. 9.3.4.

имеющее физический смысл, так же как это было в случае однородного поля, должно удовлетворять неравенствам (9.3.5). Область допустимых значений Δt_a и $t_{a \text{ ср}}$ изображена на рис. 9.3.4 и представляет собой внутренность треугольника ABC . Отображение границ этой области на плоскость параметров $\Delta r(T)/a_{\max}$, $\Delta V(T)/a_{\max}$ может быть получено с помощью равенств (9.3.26). Сторона AC , на которой $\Delta t_a = 0$, переходит в начало координат. Стороны же AB и BC переходят в дуги окружностей, параметрические уравнения которых могут быть записаны в виде:

Уравнение окружности, соответствующей стороне AB :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= -\cos T + \cos (T - \Delta t_a), \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= \sin T - \sin (T - \Delta t_a). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.27)$$

Центр этой окружности располагается в точке E (см. рис. 9.3.6), имеющей координаты $(-\cos T, \sin T)$, а радиус равен единице. При изменении T точка E — центр окружности — в свою очередь перемещается по окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Уравнение окружности, соответствующей стороне BC :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= 1 - \cos \Delta t_a, \\ \frac{\Delta l'(T)}{a_{\max}} &= \sin \Delta t_a. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.28)$$

Центр этой окружности располагается в точке G (см. рис. 9.3.6) с координатами $(1, 0)$, а радиус равен единице. Эта окружность не зависит от T . Влияние же T проявляется лишь в том, что при различных значениях его в качестве границы используются различные части окружности. Таким образом, треугольник ABC на рис. 9.3.4 при отображении с помощью преобразования (9.3.26) переходит в чечевицеобразную область $A'B'C'$. Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании внутренние точки треугольника ABC переходят во внутренние точки области $A'B'C'$.

Приведем еще значения координат точки B' . Этой точке соответствует значение $\Delta t_a = T$, и из формул (9.3.27) получаем

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} \right]_{B'} &= 1 - \cos T, \\ \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]_{B'} &= \sin T. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.29)$$

Расстояние $R_{B'}$ от начала координат до точки B' равняется

$$R_{B'} = 2 \sin \frac{T}{2}. \quad (9.3.30)$$

При изменении T точка B' перемещается по окружности с центром в точке G (см. рис. 9.3.6) и радиусом, равным единице.

Проведенный анализ позволяет построить области существования оптимального решения с одним активным участком в координатах $\Delta r(T)/a_{\max}$, $\Delta V(T)/a_{\max}$. Такие области построены на рис. 9.3.6 при различных значениях T . Видно, что при уменьшении T области существования быстро уменьшаются. При малых T получающиеся области соответствуют решению аналогичной задачи для однородного поля тяготения, которое определяется неравенствами (9.3.7). С помощью формул (9.3.26) нетрудно указать уравнения семейств линий $\Delta t_a = \text{const}$ и $t_{a \text{ ср}} = \text{const}$.

Семейство линий $\Delta t_a = \text{const}$ представляет собой дуги окружностей с центром в начале координат и радиусом, равным

$2 \sin \frac{\Delta t_a}{2}$. Семейство линий $t_{a\text{cp}} = \text{const}$ представляет собой семейство прямых, выходящих из начала координат и составляющих угол, равный $(T - t_{a\text{cp}})$, с осью ординат.

Физический смысл имеют части указанных линий, расположенные внутри области существования. Семейства линий $\Delta t_a = \text{const}$ и $t_{a\text{cp}} = \text{const}$, имеющие физический смысл, изображены на рис. 9.3.4, 9.3.7, 9.3.8.

Проведенные рассуждения позволяют получить выражение для Δt_a :

$$2 \sin \frac{\Delta t_a}{2} = \sqrt{\left[\frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} \right]^2 + \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]^2}. \quad (9.3.31)$$

Интересно отметить, что Δt_a не зависит явно от продолжительности движения T . Зависимость от T проявляется только через посредство $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$. Нет явной зависимости от T также у $T - t_{a\text{cp}}$ — времени движения от середины активного участка до конечного момента времени $t = T$. Для этой величины из (9.3.26) получается формула

$$\text{tg}(T - t_{a\text{cp}}) = \frac{\Delta r(T)/a_{\max}}{\Delta V(T)/a_{\max}}, \quad (9.3.32)$$

откуда и следует это утверждение. Влияние же параметра T сказывается на размерах области существования решения и на длительности пассивного участка, с которого начинается движение.

Перейдем далее к анализу режима оптимального управления с двумя активными участками, на которых направления управляющего ускорения $a(t)$ противоположны. Для этого случая граничные условия (9.3.16) при $a_{\max}(t) = \text{const}$ могут быть преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \frac{\Delta t_{\pi}}{2} \cos(T - t_{\pi\text{cp}}) &= \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} + 1 + \cos T, \\ 2 \cos \frac{\Delta t_{\pi}}{2} \sin(T - t_{\pi\text{cp}}) &= -\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} + \sin T. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.33)$$

Здесь снова через Δt_{π} обозначена продолжительность пассивного участка, разделяющего активные участки, а через $t_{\pi\text{cp}}$ — положение его середины. Эти обозначения поясняются на рис. 9.3.5. Полученные равенства (9.3.33) по виду очень близки к равенствам (9.3.26) для случая одного активного участка. Основное отличие (9.3.33) от (9.3.26) состоит в том, что в них входят параметры, характеризующие пассивный участок, вместо параметров активного участка, которые использовались ранее. Условия существования рассматриваемого режима управления определяются нера-

венствами (9.3.10), выражающими собой факт существования пассивного участка внутри промежутка $0 \leq t \leq T$. Значения параметров Δt_n и $t_{n\text{ ср}}$, удовлетворяющие неравенствам (9.3.10), располагаются внутри треугольника $A'B'C'$, изображенного на

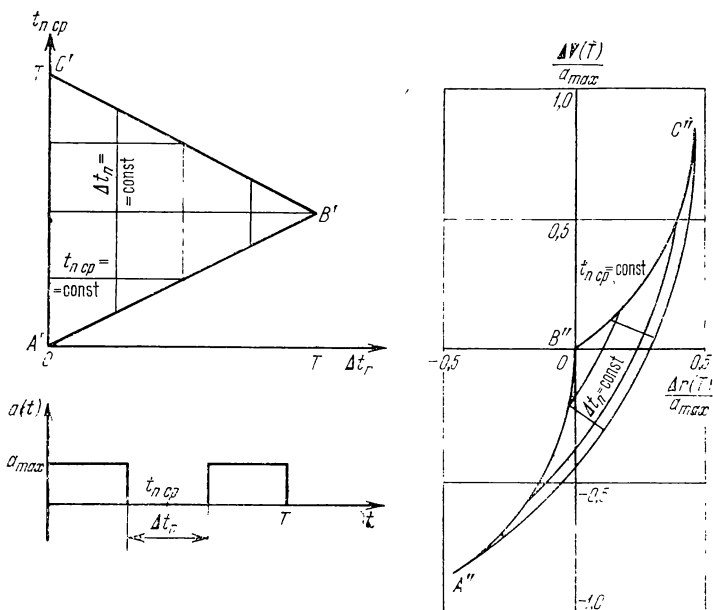


Рис. 9.3.5.

рис. 9.3.5. Отображение этого треугольника на плоскость параметров $\Delta r(T)/a_{\max}$, $\Delta V(T)/a_{\max}$ с помощью (9.3.33) позволяет получить область существования рассматриваемого режима оптимального управления. Все стороны треугольника $A'B'C'$ переходят в дуги окружностей, параметрические уравнения которых приведены ниже.

Уравнение окружности, соответствующей стороне $A'C'$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= -(1 + \cos T) + 2 \cos (T - t_{\text{пер}}), \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= \sin T - 2 \sin (T - t_{\text{п ср}}). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.34)$$

Центр этой окружности располагается в точке D (см. рис. 9.3.6) с координатами $(-(1 + \cos T), \sin T)$, а радиус равен 2. При изменении T точка D в свою очередь перемещается по окружности с центром в точке F с координатами $(-1, 0)$ и радиусом, равным единице.

Уравнение окружности, соответствующей стороне $A'B'$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= -1 + \cos(T - \Delta t_n), \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= -\sin(T - \Delta t_n). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.35)$$

Центр этой окружности располагается в точке F (см. рис. 9.3.6), а радиус равен единице. При изменении T эта окружность не изменяется, изменяется лишь величина ее дуги, используемой в качестве границы области существования решения.

Уравнение окружности, соответствующей стороне $B'C'$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= -\cos T + \cos \Delta t_n, \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= \sin T - \sin \Delta t_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.36)$$

Эта окружность, очевидно, совпадает с окружностью, описываемой (9.3.27), определяющей границу существования оптимального режима управления с одним активным участком. Таким образом, эта окружность является границей, отделяющей область существования режима оптимального управления с одним активным участком от области существования режима управления с двумя активными участками.

Равенства (9.3.34) — (9.3.36) позволяют построить область существования оптимального режима управления с двумя активными участками. Эта область изображена на рис. 9.3.5. Буквами A'' , B'' и C'' обозначены точки, соответствующие вершинам треугольника $A'B'C'$. Выпишем выражения для координат точки A'' . Эта точка соответствует $t_{n\text{ ср}} = 0$ и $\Delta t_n = 0$. Основываясь на (9.3.33), получим

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} \right]_{A''} &= -1 + \cos T, \\ \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} \right]_{A''} &= -\sin T. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.37)$$

Сопоставляя эти равенства с (9.3.29), можно заключить, что точка A'' имеет координаты, отличающиеся лишь знаком от координат точки B' . Из этого, в частности, следует, что

$$R_{A''} = R_{B'} = 2 \sin \frac{T}{2}, \quad (9.3.38)$$

где через $R_{A''}$ обозначено расстояние от точки A'' до начала координат.

Семейство же $t_{п\text{ ср}} = \text{const}$ представляет собой связку прямых, проходящих через точку D с координатами $(-(1 + \cos T), \sin T)$ и составляющих угол $-(T - t_{п\text{ ср}})$ с положительным направлением оси абсцисс на рис. 9.3.5, а также на рис. 9.3.7, 9.3.8.

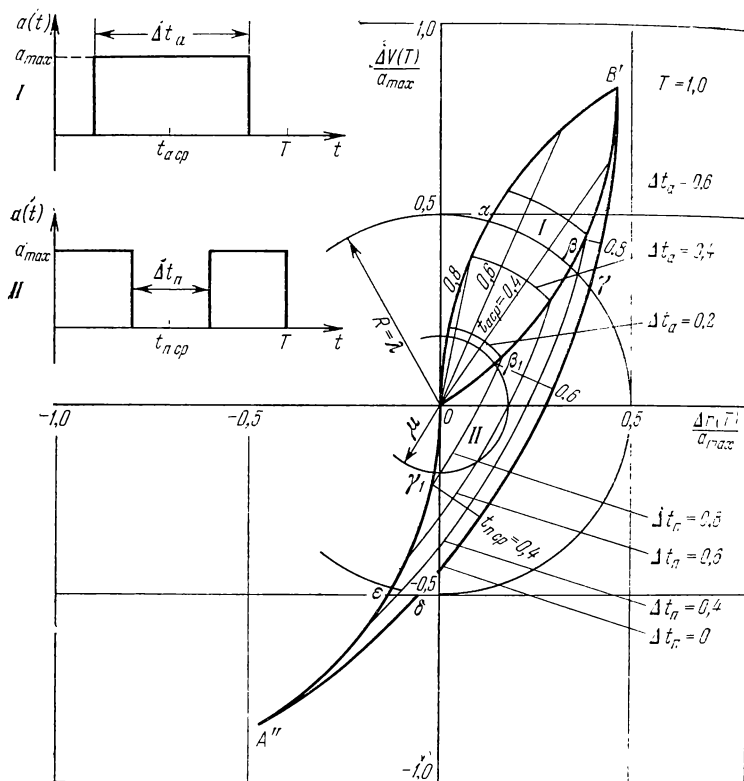


Рис. 9.3.7.

Семейства линий $\Delta t_n = \text{const}$ и $t_{п\text{ ср}} = \text{const}$ изображены при различных значениях T на рис. 9.3.5 и 9.3.7, 9.3.8. Там же указаны границы области существования.

Величина интеграла I для перелетов с двумя активными участками при $a_{\text{max}}(t) = \text{const}$ определяется формулой

$$I = a_{\text{max}}(T - \Delta t_n). \quad (9.3.40)$$

Выражение для Δt_n получаем из (9.3.33):

$$2 \cos \frac{\Delta t_n}{2} = \sqrt{\left[\frac{\Delta r(T)}{a_{\text{max}}} + 1 + \cos T \right]^2 + \left[\frac{\Delta V(T)}{a_{\text{max}}} + \sin T \right]^2}. \quad (9.3.41)$$

§ 9.4. Перелет между произвольными пересекающимися орбитами

9.4.1. Постановка задачи и решение для однородного поля.

Рассмотрим задачу о перелете между произвольными пересекающимися орбитами. Схема взаимного расположения орбит в окрестности точки пересечения указана на рис. 9.4.1. Радиусом-вектором точки пересечения орбит на этом рисунке является вектор r_{00} . Через V_{00} и V_{10} обозначены векторы скоростей, с которыми происходит движение на начальной и конечной орбитах в точке их пересечения. Через ΔV_0 обозначен вектор

$$\Delta V_0 = V_{10} - V_{00}. \quad (9.4.1)$$

Рис. 9.4.1.

Моменты начала и окончания перелета предполагаются заданными и подлежат радио-

нальному выбору. В данной задаче можно, очевидно, предполагать, что эти моменты совпадают с моментами включения и выключения двигателя. Строгое обоснование этого утверждения будет проведено в разделе 9.4.3.

При задании уравнений, описывающих движение по начальной и конечной орбитах, будем предполагать, что начальные условия для них заданы в точке пересечения. Соответственно отсчет времени при записи уравнений движения по этим орбитах будет производиться от точки пересечения. Обозначим это время буквой τ . С учетом сделанных замечаний уравнения для движения по начальной орбите имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= r_{00} + V_{00}\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \\ V_0 &= V_{00} + g\tau; \end{aligned} \right\} \quad (9.4.2)$$

для движения по конечной орбите —

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_{00} + V_{10}\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \\ V_1 &= V_{10} + g\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.3)$$

Через g в этих формулах обозначен постоянный вектор силы тяжести. Обозначим буквами B и C точки соответственно на конечной и начальной орбитах (рис. 9.4.2), которые определяются формулами (9.4.2) и (9.4.3) в некоторый момент τ . Таким образом, это такие точки, которые достигаются за один и тот же про-

межутков времени, если движение по этим орбитам начинается в один и тот же момент времени в точке пересечения орбит. Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что точка C соответствует моменту $t = T$, в который оканчивается перелет. Основное упрощающее предположение, которое необходимо сделать для того, чтобы было можно свести рассматриваемую задачу к задаче, в которой при оптимальном управлении существует прямая управления, состоит в том, что траектория перелета оканчивается при $t = T$ в точке B , которая определяется формулами (9.4.3) при некотором значении τ . В разделе 9.4.4 будет выяснено, в каких случаях это предположение не приводит к перерасходу характеристической скорости. Данное предположение, очевидно, эквивалентно специальному заданию точки D (см. рис. 9.4.2), в которой в момент времени $t = 0$ начинается перелет.

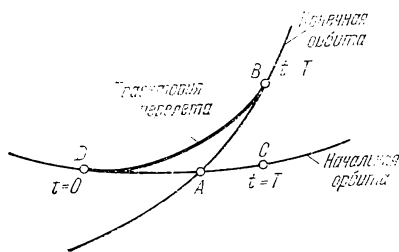


Рис. 9.4.2.

В настоящем и следующем разделах основное внимание будет уделено рассмотрению перелета с одним активным участком при произвольной зависимости $a_{\max}(t)$. Это связано с тем, что в данной задаче перелеты с двумя активными участками нецелесообразны. Факт этот достаточно очевиден, тем не менее строгое доказательство его будет дано далее, в разделе 9.4.3.

В случае однородного поля, для которого решается задача в настоящем разделе, выражения для векторов конечного промаха с помощью (9.4.2), (9.4.3) могут быть записаны в виде

$$\Delta \mathbf{r}(T) = \Delta \mathbf{V}_0 \tau, \quad \Delta \mathbf{V}(T) = \Delta \mathbf{V}_0, \quad (9.4.4)$$

где вектор $\Delta \mathbf{V}_0$ определяется формулой (9.4.1). В соответствии с результатами, полученными в § 8.5, вектор управляющего ускорения $\mathbf{a}(t)$ направлен по вектору $\Delta \mathbf{V}_0$. С учетом этого факта граничные условия для рассматриваемого случая записываются в виде

$$\int_0^T (T - \xi) a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta V_0 \tau, \quad (9.4.5)$$

$$\int_0^T a_{\max}(\xi) d\xi = \Delta V_0. \quad (9.4.6)$$

Из последнего равенства видно, что потребная величина характеристической скорости для рассматриваемого класса перелетов

совпадает с величиной характеристической скорости, которая получается при решении данной задачи в импульсной постановке (при переходе с помощью одного импульса).

Равенства (9.4.5) и (9.4.6) представляют собой систему уравнений для нахождения времени перелета T и параметра τ , определяющего координаты точки B , в которой оканчивается перелет. Равенство (9.4.6) служит для определения величины T . Затем из (9.4.5) можно определить τ . Перепишем теперь (9.4.5) так:

$$\tau = T - \frac{1}{\Delta V_0} \int_0^T \xi a_{\max}(\xi) d\xi, \quad (9.4.7)$$

и попытаемся найти координаты точки, соответствующей началу перелета $t = 0$. При этом рассуждать будем следующим образом. Если бы точка двигалась по начальной орбите, то за время T она передвинулась бы в точку, время движения до которой по начальной орбите от точки пересечения равнялось τ . Поэтому время движения по начальной орбите до точки пересечения орбит равняется $T - \tau$. Поэтому радиус-вектор и вектор скорости, соответствующие начальной точке траектории перехода, определяются равенствами (9.4.2) при $\tau_0 = \tau - T$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0|_{t=0} &= \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}(\tau - T) + \frac{\mathbf{g}(\tau - T)^2}{2}, \\ \mathbf{V}_0|_{t=0} &= \mathbf{V}_{00} + \mathbf{g}(\tau - T). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.8)$$

Проведем далее вычисления для случая $a_{\max}(t) = \text{const}$. Из формул (9.4.6) и (9.4.7) имеем

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}, \\ \tau &= T - \frac{a_{\max} T^2}{2\Delta V_0} = \frac{T}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.9)$$

С учетом этих результатов равенства (9.4.8) переписываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0|_{t=0} &= \mathbf{r}_{00} - \mathbf{V}_{00} \frac{T}{2} + \mathbf{g} \frac{T^2}{8}, \\ \mathbf{V}_0|_{t=0} &= \mathbf{V}_{00} - \mathbf{g} \frac{T}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.10)$$

Таким образом, в однородном поле траектория перелета симметрична относительно точки пересечения орбит.

9.4.2. Решение задачи для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$. В настоящем разделе задача о переходе между пересекающимися орбитами будет рассматриваться в точно такой же постановке, в которой она рассматривалась выше. Отличия появ-

ляются из-за того, что в однородном центральном поле свободное движение и функции влияния описываются более сложными формулами, чем это было ранее. В рассматриваемом случае, когда $\delta r_m = 0$, начальная и конечная орбиты задаются формулами (8.2.1). Соответственно уравнения движения по начальной и конечной орбитам при задании начальных условий в точке их пересечения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_{00} \cos \tau + \mathbf{V}_{00} \sin \tau, \\ \mathbf{V}_0 &= -\mathbf{r}_{00} \sin \tau + \mathbf{V}_{00} \cos \tau, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{00} \cos \tau + \mathbf{V}_{10} \sin \tau, \\ \mathbf{V}_1 &= -\mathbf{r}_{00} \sin \tau + \mathbf{V}_{10} \cos \tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.11)$$

В этих формулах все обозначения те же самые, что и в предыдущем разделе. В соответствии с этими равенствами выражения для векторов конечного промаха $\Delta \mathbf{r}(T)$ и $\Delta \mathbf{V}(T)$ записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{r}(T) &= \Delta \mathbf{V}_0 \sin \tau, \\ \Delta \mathbf{V}(T) &= \Delta \mathbf{V}_0 \cos \tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.12)$$

Отсюда видно, что при $0 \leq T \leq \pi/2$ управляющее ускорение $\mathbf{a}(t)$ направлено параллельно вектору $\Delta \mathbf{V}_0$. Это направление совпадает с направлением управляющего ускорения при решении задачи в импульсной постановке.

Рассмотрим сначала случай оптимального управления с одним активным участком при произвольной зависимости $a_{\max}(t)$. По-прежнему будем предполагать, что двигатель включается при $t = 0$ и выключается при $t = T$, а до и после этих моментов движение происходит соответственно по начальной и конечной орбитам. При таких предположениях, в соответствии с формулами (8.2.2), граничные условия записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T a_{\max}(\xi) \sin(T - \xi) d\xi &= \Delta V_0 \sin \tau, \\ \int_0^T a_{\max}(\xi) \cos(T - \xi) d\xi &= \Delta V_0 \cos \tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.13)$$

Эти равенства представляют собой систему уравнений для определения полного времени движения T и времени движения τ по начальной или конечной орбитам от точки пересечения орбит до момента окончания перелета.

Пользуясь известными формулами тригонометрии, перепишем (9.4.13) так:

$$\left. \begin{aligned} I_c \sin T - I_s \cos T &= \Delta V_0 \sin \tau, \\ I_c \cos T + I_s \sin T &= \Delta V_0 \cos \tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_c &= \int_0^T a_{\max}(\xi) \cos \xi \, d\xi, \\ I_s &= \int_0^T a_{\max}(\xi) \sin \xi \, d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.15)$$

Из равенств (9.4.14) для интегралов I_c и I_s имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} I_c &= \Delta V_0 \cos(T - \tau), \\ I_s &= \Delta V_0 \sin(T - \tau). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.16)$$

После возведения этих равенств в квадрат и сложения получим следующее уравнение для определения момента окончания перелета T :

$$I_c^2 + I_s^2 = \Delta V_0^2. \quad (9.4.17)$$

С учетом (9.4.15) это равенство можно переписать так:

$$\sqrt{\left[\int_0^T a_{\max}(\xi) \cos \xi \, d\xi \right]^2 + \left[\int_0^T a_{\max}(\xi) \sin \xi \, d\xi \right]^2} = \Delta V_0. \quad (9.4.18)$$

При известном T можно считать известными интегралы I_c и I_s и определить τ из равенств (9.4.16).

Определим далее координаты точки, соответствующей началу перелета при $t = 0$. Рассуждая точно так же, как и в предыдущем разделе, нетрудно убедиться в том, что время движения из точки A в точку D на рис. 9.4.2 равняется $T - \tau$. Поэтому радиус-вектор и вектор скорости, соответствующие точке D — начальной точке траектории перелета, определяются равенствами (9.4.11) при $\tau_0 = \tau - T$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0|_{t=0} &= \mathbf{r}_{00} \cos(T - \tau) - \mathbf{V}_{00} \sin(T - \tau), \\ \mathbf{V}_0|_{t=0} &= \mathbf{V}_{00} \cos(T - \tau) + \mathbf{r}_{00} \sin(T - \tau). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.19)$$

Если воспользоваться (9.4.16), то последние равенства можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0|_{t=0} &= \frac{1}{\Delta V_0} (I_c \mathbf{r}_{00} - I_s \mathbf{V}_{00}), \\ \mathbf{V}_0|_{t=0} &= \frac{1}{\Delta V_0} (I_c \mathbf{V}_{00} + I_s \mathbf{r}_{00}). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.20)$$

Эти формулы определяют начальные условия в момент включения двигателя и схода с начальной орбиты.

Заметим, что полученные выше формулы справедливы при произвольном законе регулирования тяги и могут быть использованы для построения системы управления траекторией перехода между произвольными пересекающимися орбитами при наличии возмущений в величине управляющего ускорения.

Проведем далее вычисления для случая, когда $a_{\max}(t) = \text{const}$. Из (9.4.15) имеем

$$\left. \begin{aligned} I_c &= a_{\max} \sin T, \\ I_s &= a_{\max} (1 - \cos T). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.21)$$

Используя эти равенства и (9.4.17), получаем

$$2 \sin \frac{T}{2} = \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}. \quad (9.4.22)$$

Равенства же (9.4.16) дают

$$\text{tg}(T - \tau) = \text{tg} \frac{T}{2},$$

откуда, так же как и в случае однородного поля,

$$\tau = \frac{T}{2}. \quad (9.4.23)$$

Таким образом, при $a_{\max}(t) = \text{const}$ траектория перелета по-прежнему симметрична относительно точки A на рис. 9.4.2. Эти же результаты можно получить по графикам рис. 9.3.4, на котором видно, что рассматриваемому случаю, когда активный участок один и занимает весь промежуток $0 \leq t \leq T$, соответствует точка B с $\Delta t_a = T$, $t_{a \text{ ср}} = \frac{T}{2}$. Выражения для безразмерных параметров $\Delta r(T)/a_{\max}$ и $\Delta V(T)/a_{\max}$, откладываемых на осях координат на этом рисунке, имеют на основании (9.4.12) следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= \lambda \sin \tau, \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= \lambda \cos \tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.4.24)$$

где

$$\lambda = \frac{\Delta V_0}{a_{\max}}. \quad (9.4.25)$$

Эти формулы с помощью выражений (9.3.29) для координат точки B' дают полученные выше соотношения (9.4.22) и (9.4.23).

9.4.3. Сравнение перелетов с одним и двумя активными участками. Рассмотрим далее вопрос о всех возможных режимах управления при $a_{\max}(t) = \text{const}$. При изменении τ и фиксированном λ

соотношения (9.4.24) представляют собой параметрическое уравнение окружности с радиусом λ . Угол τ отсчитывается от оси $\Delta V(T)/a_{\max}$ по часовой стрелке (см. рис. 9.3.7). Из графиков, приведенных на рис. 9.3.7, 9.3.8, и формул (9.3.30) и (9.3.38) следует, что решение рассматриваемой задачи существует лишь в случаях, когда выполняется неравенство

$$\lambda = \frac{\Delta V_0}{a_{\max}} \leq R_{B'} = R_{A''} = 2 \sin \frac{T}{2}. \quad (9.4.26)$$

На рис. 9.3.7 видно, что при значениях λ , удовлетворяющих этому неравенству с запасом, возможны режимы управления как с одним активным участком, так и с двумя. Режимы с одним активным участком на рис. 9.3.7 соответствуют дуге $\alpha\beta$ и отличаются от режима, рассмотренного выше, наличием пассивных участков по краям. Они имеют одну и ту же энергетику и одни и те же моменты включения и выключения двигателя. Такие режимы могут представить интерес при построении системы управления с точки зрения больших возможностей, связанных с обработкой информации о конечном промахе.

Режимы с двумя активными участками соответствуют на рис. 9.3.7 дугам $\beta\gamma$ и $\epsilon\delta$. Однако из расположения кривых $\Delta t_a = \text{const}$ и $\Delta t_n = \text{const}$ следует, что эти режимы имеют большее значение I , чем режимы с одним активным участком. В то же время с их помощью нельзя уменьшить время перелета T . Минимальное значение T , очевидно, соответствует такому расположению кривых на рис. 9.3.7, при котором область существования столь мала, что ее крайние точки лежат на окружности с радиусом λ . Если бы $R_{A''}$ было больше $R_{B'}$, то перелеты с двумя активными участками, соответствующие дуге $\epsilon\delta$, существовали бы при меньших значениях T , чем перелеты с одним активным участком. Но это не так. Из (9.3.30) и (9.3.38) видно, что $R_{A''} = R_{B'}$, и, следовательно, при $a_{\max}(t) = \text{const}$ перелеты с двумя активными участками не позволяют уменьшить время совершения маневра.

Таким образом, в рассматриваемой задаче наибольший интерес представляют перелеты с одним активным участком. Они выгоднее энергетически, проще для реализации, и, кроме того, для них выше развита теория, применимая при произвольном законе регулирования величины управляющего ускорения.

В заключение настоящего параграфа укажем примерный вид траекторий перелета для всех рассмотренных выше режимов регулирования $a(t)$. Выше было указано, что положительное направление отсчета величин $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$ совпадает с направлением $a(T)$ на первом активном участке. Соответственно при задании направления a однозначно определяются направления векторов $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$. Чтобы анализ возможных режимов пе-

перелета был полным, необходимо рассматривать оба противоположных направления вектора $\mathbf{a}$. Формулы (9.4.24) для $\Delta r(T)/a_{\max}$ и $\Delta V(T)/a_{\max}$ получены при условии, что направление вектора $\mathbf{a}(t)$ на первом активном участке совпадает с направлением вектора $\Delta \mathbf{V}_0$. При изменении направления $\mathbf{a}(t)$ входящий в эти формулы угол τ заменяется на угол $\pi + \tau$. Указанный анализ был выполнен, и его результаты в виде взаимного расположения траектории перелета и начальной и конечной орбит представлены на рис. 9.4.3. При этом основное внимание уделено случаю, когда $|\tau| \leq \pi/2$. Это условие обеспечивает выполнение маневра

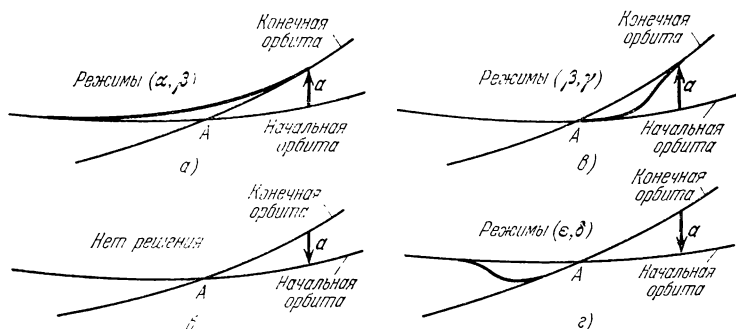


Рис. 9.4.3.

в окрестности точки пересечения орбит. Именно для этого случая изображены траектории перехода на рис. 9.4.3. Такое ограничение, накладываемое на значения τ , связано с тем, что, как уже указывалось, при больших протяженностях траектории точность модели однородного центрального поля может оказаться недостаточной. Случаи а) и б) соответствуют одному активному участку, случаи же в) и г) соответствуют перелетам с двумя активными участками. В случае а) изображена траектория перехода, соответствующая дуге $\alpha\beta$ на рис. 9.3.7. В этом случае тяга направлена по вектору $\Delta \mathbf{V}_0$. Случай б) соответствует противоположному направлению тяги. При таком направлении тяги не существует перелета с одним активным участком в окрестности точки пересечения орбит.

В случаях в) и г) тяга на первом активном участке направлена соответственно по вектору $\Delta \mathbf{V}_0$ и противоположно ему. В случае в) возможные режимы перелета определяются дугой $\beta\gamma$ на рис. 9.3.7. Этот перелет заканчивается за точкой пересечения орбит. Случай же г) соответствует дуге $\epsilon\delta$ на рис. 9.3.7; перелет заканчивается до или несколько позже точки пересечения орбит. Рассмотренные случаи исчерпывают все возможные типы перелетов, которые получаются при указанных выше предположениях.

9.4.4. Условие оптимальности. В предыдущих разделах задача о переходе между произвольными пересекающимися орбитами изучалась в предположении, что времена движения от точки пересечения орбит по начальной и конечной орбитам до момента окончания перелета одинаковы. Это предположение приводит к условию коллинеарности векторов конечного промаха, существенно упрощающему анализ. Однако осталось невыясненным, насколько получающееся таким образом решение близко к оптимальному. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случай, когда указанные времена мало отличаются друг от друга, и выясним, как влияет это отличие на величину характеристической скорости перелета. При малом различии указанных отрезков времени получается задача с малой неколлинеарностью векторов конечного промаха. Проведем этот анализ для однородного поля тяготения, когда уравнения начальной и конечной орбит записываются в виде

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}\tau_0 + \frac{g\tau_0^2}{2}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{00} + g\tau_0, \quad (9.4.27)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}\tau_1 + \frac{g\tau_1^2}{2}, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{10} + g\tau_1. \quad (9.4.28)$$

Здесь τ_0 и τ_1 — времена движения по начальной и конечной орбитам, отсчитываемые от момента прохождения через точку их пересечения, остальные обозначения те же самые, что и в предыдущих разделах. В соответствии с (9.4.27), (9.4.28) формулы для $\Delta\mathbf{g}(T)$ и $\Delta\mathbf{V}(T)$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{g}(T) &= \mathbf{V}_{10}\tau_1 - \mathbf{V}_{00}\tau_0 + \frac{g}{2}(\tau_1^2 - \tau_0^2), \\ \Delta\mathbf{V}(T) &= \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00} + g(\tau_1 - \tau_0). \end{aligned} \quad (9.4.29)$$

Ранее задача решалась при условии $\tau_1 = \tau_0$. Теперь будем предполагать, что

$$\tau_1 = \tau + \Delta\tau, \quad \tau_0 = \tau, \quad (9.4.30)$$

где $\Delta\tau$ — малая величина. Пренебрегая старшими степенями $\Delta\tau$, приведем уравнения (9.4.29) к виду

$$\Delta\mathbf{g}(T) = (\Delta\mathbf{V}_0 + g\Delta\tau)\tau + \mathbf{V}_{10}\Delta\tau, \quad \Delta\mathbf{V}(T) = \Delta\mathbf{V}_0 + g\Delta\tau, \quad (9.4.31)$$

где $\Delta\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}$.

Из (9.4.31) видно, что при $\Delta\tau = 0$ векторы $\Delta\mathbf{g}(T)$ и $\Delta\mathbf{V}(T)$, а следовательно, и направление тяги параллельны $\Delta\mathbf{V}_0$. При малых $\Delta\tau$ угол между $\Delta\mathbf{g}(T)$ и $\Delta\mathbf{V}(T)$ будет величиной порядка $\Delta\tau$. Как было показано в § 8.6, угол между направлением тяги и этими векторами будет величиной такого же порядка. Поэтому с погрешностью порядка $(\Delta\tau)^2$ проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\Delta\mathbf{V}(T)$ равна a — модулю этого вектора. Имея это в виду и

принимая во внимание, что $L(T, \xi) = 1$, можно записать

$$\int_0^T a(\xi) d\xi \approx \Delta V(T). \quad (9.4.32)$$

Таким образом, величина характеристической скорости равняется модулю вектора $\Delta V(T)$. Из (9.4.31) имеем

$$\Delta V(T) = \sqrt{\Delta V_0^2 + 2(\Delta V_0, g) \Delta \tau + g^2 (\Delta \tau)^2} \approx \Delta V_0 + \left(\frac{\Delta V_0}{\Delta V_0}, g \right) \Delta \tau. \quad (9.4.33)$$

Полученная формула позволяет решить вопрос об оптимальности перелета с $\Delta \tau = 0$. Из (9.4.33) видно, что условием оптимальности перелета является ортогональность векторов ΔV_0 и g . Это условие, в частности, выполняется в задаче о повороте плоскости орбиты.

При $\Delta \tau \neq 0$ вектор тяги при оптимальном управлении перемещается в плоскости управления, проходящей через векторы $\Delta g(T)$ и $\Delta V(T)$. Установим связь между ориентацией этой плоскости и векторами V_{00} , V_{10} . Основываясь на формулах (9.4.31), с погрешностью порядка $(\Delta \tau)^2$ получим

$$[\Delta g(T), \Delta V(T)] \approx [\Delta V_0, V_{10}] \Delta \tau = [V_{10}, V_{00}] \Delta \tau. \quad (9.4.34)$$

Так как вектор $[\Delta g(T), \Delta V(T)]$ ортогонален к плоскости управления, то из формулы (9.4.34) следует, что эта плоскость параллельна плоскости, проходящей через векторы скорости на начальной и конечной орбитах в точке их пересечения. Следует отметить независимость ориентации плоскости управления от $\Delta \tau$ при малых значениях $\Delta \tau$.

§ 9.5. Перелет между орбитами, у которых в какой-то момент совпадают векторы скорости при движении по ним

9.5.1. Постановка задачи и решение для однородного поля.

Остановимся на анализе перелета, который получается во втором из рассмотренных в § 8.5 случаев коллинеарности векторов $\Delta g(T)$ и $\Delta V(T)$, когда вектор ΔV_0 равен нулю. Этот случай соответствует перелету между орбитами, у которых в какой-то момент совпадают векторы скорости. Схема взаимного расположения орбит в этом случае изображена на рис. 9.5.1. Буквами A и B на нем обозначены точки на орбитах, в ко-

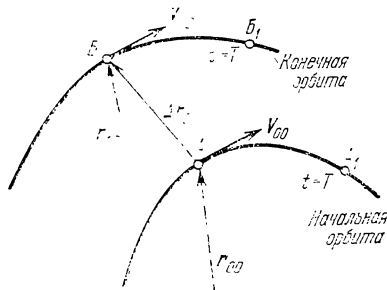


Рис. 9.5.1.

торых векторы скорости имеют одно и то же значение V_{00} . Через r_{00} и r_{10} обозначены радиусы-векторы этих точек. При задании уравнений движения по начальной и конечной орбитам время τ будем отсчитывать от точек A и B и считать начальные данные заданными в этих точках. Рассмотрим задачу о перелете между орбитами с указанными свойствами с минимальными затратами характеристической скорости. Начало перелета при $t = 0$ и его окончание при $t = T$ будем считать незадаанными и подлежащими рациональному выбору.

В настоящем разделе получим решение для случая однородного поля тяготения. Тогда с учетом сделанных выше замечаний имеем:

для начальной орбиты

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= r_{00} + V_{00}\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \\ V_0 &= V_{00} + g\tau; \end{aligned} \right\} \quad (9.5.1)$$

для конечной орбиты

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_{10} + V_{00}\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \\ V_1 &= V_{00} + g\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.2)$$

Как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что момент T окончания перелета соответствует некоторым точкам A_1 и B_1 (см. рис. 9.5.1) на начальной и конечной орбитах, которые определяются их уравнениями при одном и том же значении τ . При таком предположении получается задача с коллинеарными векторами конечного промаха. С учетом этого предположения из (9.5.1) и (9.5.2) получаются следующие выражения для векторов конечного промаха:

$$\Delta r(T) = \Delta r_0, \quad \Delta V(T) = 0. \quad (9.5.3)$$

Здесь

$$\Delta r_0 = r_{10} - r_{00}. \quad (9.5.4)$$

Из этих формул видно, что в рассматриваемом случае конечная орбита получается из начальной путем поступательного перемещения на вектор Δr_0 , причем в точках A_1 и B_1 , которые соответствуют моменту окончания перелета T , векторы скорости совпадают, как это имеет место для точек A и B .

Для рассматриваемой задачи граничные условия определяются равенствами (9.3.2), где вектор управляющего ускорения $a(\xi)$, в соответствии с результатами § 8.5, параллелен или антипараллелен вектору Δr_0 . Второе из равенств (9.3.2) с учетом того, что $\Delta V(T) = 0$, записывается в виде

$$\int_0^T a(\xi) d\xi = 0. \quad (9.5.5)$$

Отсюда следует, что возможен только один режим оптимального управления с двумя активными участками, с противоположным направлением управляющего ускорения на них. Ясно, что на первом активном участке направление вектора $\mathbf{a}(\xi)$ совпадает с направлением вектора $\Delta \mathbf{r}_0$. Доведем анализ до конца при $a_{\max}(t) = \text{const}$. В этом случае граничные условия (9.3.2) для режима с двумя активными участками сводятся к равенствам (9.3.11) и (9.3.12). Эти равенства с учетом выражений (9.5.3) для векторов конечного промаха записываются в виде

$$t_{\text{п ср}} = \frac{T}{2}, \quad (9.5.6)$$

$$\Delta t_{\text{п}} = \sqrt{T^2 - 4 \frac{\Delta r_0}{a_{\max}}}. \quad (9.5.7)$$

Суммарная продолжительность активных участков $\Delta t_{\text{аз}}$, которая пропорциональна величине характеристической скорости, в данной задаче определяется формулой

$$\Delta t_{\text{аз}} = T - \Delta t_{\text{п}} = T - \sqrt{T^2 - 4 \frac{\Delta r_0}{a_{\max}}}. \quad (9.5.8)$$

Эту формулу можно также переписать иначе:

$$\Delta t_{\text{аз}} = \frac{4\Delta r_0/a_{\max}}{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta r_0/a_{\max}}}. \quad (9.5.9)$$

Из приведенных формул видно, что рассматриваемый перелет возможен лишь при

$$T \geq T_{\min} = 2 \sqrt{\frac{\Delta r_0}{a_{\max}}}. \quad (9.5.10)$$

Из (9.5.9) также следует, что $\Delta t_{\text{аз}}$ монотонно уменьшается при увеличении времени перелета T . Ясно, что для перелета с $T = T_{\min}$ длина пассивного участка равняется нулю и этот перелет является оптимальным по быстродействию. Величина же потребной для этого перелета характеристической скорости имеет максимально возможное значение.

Формулы (9.5.6) и (9.5.8) показывают, что длины активных участков, примыкающих к концам перелета, одинаковы и величина их уменьшается при росте T . В пределе при очень больших значениях T длины активных участков исчезающе малы, и в этом случае для осуществления перелета достаточно приложения в начале и в конце перелета двух противоположных по направлению бесконечно малых импульсов.

Следует отметить, что, в отличие от задачи о переходе между пересекающимися орбитами, в рассматриваемой здесь задаче о

переходе между эквидистантно сдвинутыми орбитами граничные условия (9.3.2) не определяют однозначно ни его продолжительности, ни точки B_1 на орбите (см. рис. 9.5.1), в которой он оканчивается. Ясно, что положение точки B_1 может быть выбрано совершенно произвольно, точно так же как и положение точки на начальной орбите, в которой перелет начинается. Важно лишь, чтобы время движения от начальной точки до конечной равнялось выбранному значению $T \geq T_{\min}$.

9.5.2. Решение для однородного центрального поля при $\delta r_m = 0$. В предыдущем разделе было выяснено, что в задаче о перелете между орбитами, у которых в какой-то момент совпадают значения векторов скорости, наименьшие значения потребной характеристической скорости получаются при больших значениях времени перелета. В этом случае траектории перелета получаются достаточно протяженными и может оказаться необходимым учет изменения направления вектора ускорения силы тяжести. Поэтому целесообразно получить также решение аналогичной задачи для случая однородного центрального поля тяготения. Для этого поля задача будет рассматриваться в той же самой постановке, что и в предыдущем разделе. По-прежнему будет использоваться основное упрощающее предположение о том, что время полета по начальной и конечной орбитам от точек A и B (см. рис. 9.5.1), в которых значения векторов скорости одинаковы, до точек A_1 и B_1 , которые соответствуют моменту $t = T$ окончания перелета, одинаково. Как и в предыдущем разделе, это предположение обеспечивает коллинеарность векторов конечного промаха.

Согласно (8.2.1) в рассматриваемом случае имеем:
для начальной орбиты

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_{00} \cos \tau + \mathbf{V}_{00} \sin \tau, \\ \mathbf{V}_0 &= -\mathbf{r}_{00} \sin \tau + \mathbf{V}_{00} \cos \tau; \end{aligned} \right\} \quad (9.5.11)$$

для конечной орбиты

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{10} \cos \tau + \mathbf{V}_{10} \sin \tau, \\ \mathbf{V}_1 &= -\mathbf{r}_{10} \sin \tau + \mathbf{V}_{10} \cos \tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.12)$$

С использованием (9.5.11) и (9.5.12) получаем выражения для векторов конечного промаха:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{r}(T) &= \Delta \mathbf{r}_0 \cos \tau, \\ \Delta \mathbf{V}(T) &= -\Delta \mathbf{r}_0 \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.5.13)$$

где $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{00}$.

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае направление управляющего ускорения $\mathbf{a}(t)$ параллельно или антипараллельно вектору $\Delta \mathbf{r}_0$. Если считать, что на первом активном участке направления этих векторов совпадают, то безразмерные параметры,

используемые на рис. 9.3.7, 9.3.8, вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta r(T)}{a_{\max}} &= \mu \cos \tau, \\ \frac{\Delta V(T)}{a_{\max}} &= -\mu \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.5.14)$$

где

$$\mu = \frac{\Delta r_0}{a_{\max}}.$$

Если направление $a(t)$ на первом активном участке заменяется на направление, противоположное вектору Δr_0 , то угол τ в этих формулах заменяется на угол $\pi + \tau$. При постоянном μ и переменном τ формулы (9.5.14) определяют на рис. 9.3.7, 9.3.8 окружность с радиусом, равным μ . В соответствии с (9.5.14) угол τ отсчитывается от положительного направления оси абсцисс по часовой стрелке. Условие существования решения данной задачи записывается в виде

$$\mu = \frac{\Delta r_0}{a_{\max}} \leq R_{A'} = R_{B'} = 2 \sin \frac{T}{2}. \quad (9.5.15)$$

Зависимости Δt_{az} суммарной продолжительности одного или двух активных участков, которая при $a_{\max}(t) = \text{const}$ пропорциональна

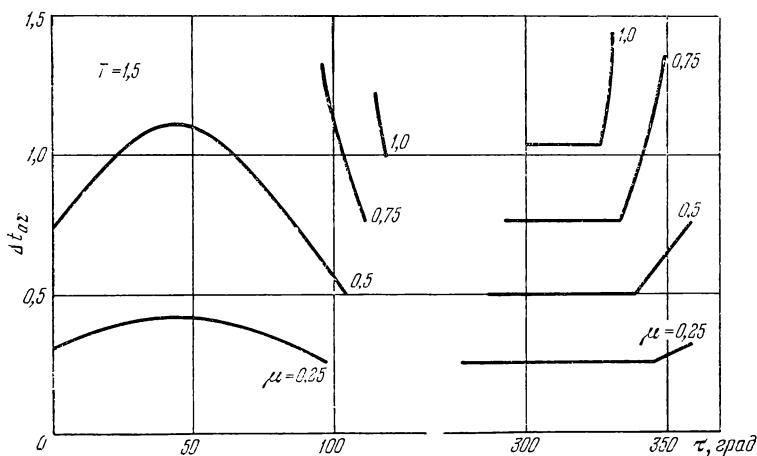


Рис. 9.5.2.

интегралу I от τ , построены на рис. 9.5.2 при различных значениях μ . Расчеты были выполнены с помощью формул § 9.3 и графиков, приведенных на рис. 9.3.8. Кусочный характер кривых, приведенных на этом рисунке, связан с отсутствием решения дан-

ной задачи на отдельных интервалах изменения τ . Наибольший практический интерес в данной задаче представляют перелеты с двумя активными участками, соответствующие на рис. 9.3.7, 9.3.8 дуге $\beta_1\gamma_1$ окружности радиуса μ . Для этих режимов вектор $\mathbf{a}(t)$ на первом активном участке направлен параллельно вектору $\Delta\mathbf{g}_0$. На рис. 9.3.8 эти режимы соответствуют малым значениям τ .

Заметим, что при движении в однородном центральном поле, в отличие от движения в однородном поле, величина характеристической скорости перелета зависит от параметра τ , определяющего конец перелета. При этом в однородном центральном поле для рассматриваемой задачи возможны перелеты как с одним активным участком, так и с двумя. Минимальное значение характеристической скорости получается для перелетов с одним активным участком при больших значениях τ . Однако возможность применения получающихся результатов при $\tau \geq \pi/2$ требует специального исследования. Поэтому по-прежнему в данной задаче наиболее важными являются перелеты с двумя активными участками, существующие при малых значениях τ . Следует отметить, что, как это видно из графиков на рис. 9.3.8 и 9.5.2, значение характеристической скорости, достаточно близкое к минимально возможному, получается при $\tau = 0$.

§ 9.6. Мягкая встреча

9.6.1. Постановка задачи. Описание схемы перелета. Рассмотрим задачу о мягкой встрече двух летательных аппаратов. Пусть при $t = 0$ известны их координаты и скорости. Будем предполагать, что движение одного из них, а именно движение летательного аппарата-цели, задано, а управление вторым аппаратом должно быть выбрано таким образом, чтобы в момент окончания перелета $t = T$ они находились бы в одной и той же точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{g}_1(T)$ и имели бы одинаковые векторы скорости $\mathbf{V}_1(T)$. Тогда в момент встречи их относительная скорость равняется нулю — отсюда название *мягкая встреча*. Ясно, что после осуществления мягкой встречи при $t > T$ оба летательных аппарата будут двигаться по орбите цели. Вектор-функции $\mathbf{g}_1(t)$ и $\mathbf{V}_1(t)$, описывающие орбиту цели, будем предполагать заданными.

Эта задача значительно сложнее рассматривавшихся ранее, так как в конце перелета условия накладываются как на радиус-вектор, так и на вектор скорости, а векторы конечного промаха в общем случае неколлинеарны. Однако ее рациональное решение может быть получено с помощью последовательного использования решений задач, рассматривавшихся в § 9.1 и § 9.4. Разобьем весь маневр на два этапа. В течение первого этапа управление осуществляется таким образом, чтобы попасть при $t = T' < T$ в

точку, расположенную на орбите цели, характеризующуюся вектором $\mathbf{r}_1(T')$ (рис. 9.6.1). Такая задача рассматривалась в § 9.1. Там было выяснено, что для осуществления такого маневра вектор $\mathbf{a}(t)$ должен быть постоянно ориентирован в пространстве и направлен по вектору

$$\Delta \mathbf{r}(T') = \mathbf{r}_1(T') - \mathbf{r}_0(T'), \quad (9.6.1)$$

где $\mathbf{r}_0(T')$ описывает свободное движение летательного аппарата, управление которым выбирается. Момент включения двигателя совпадает с моментом $t = 0$, а момент выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$ определяется из (9.1.1). Приращение вектора скорости к моменту $t = T'$ при таком управлении определяется формулой

$$\int_0^{t_{\text{выкл}}} L(T', \xi) \mathbf{a}(\xi) d\xi = \Delta \mathbf{V}(T'). \quad (9.6.2)$$

Соответственно изменение вектора скорости $\Delta \mathbf{V}_1(T')$, которое должно быть выбрано на второй фазе маневра, записывается так:

$$\Delta \mathbf{V}_1(T') = \mathbf{V}_1(T') - \mathbf{V}(T'). \quad (9.6.3)$$

Здесь через $\mathbf{V}(T')$ обозначена величина вектора скорости, которая была бы при $t = T'$ в случае, если бы после окончания первого активного участка полет происходил без управления. После того как первая фаза маневра закончена, задача, очевидно, сводится к задаче о переходе между произвольными пересекающимися орбитами, которая была рассмотрена в § 9.4. В данном случае вектор точки пересечения орбит совпадает с заданным заранее вектором $\mathbf{r}_1(T')$, а разность скоростей в точке пересечения орбит равняется $\Delta \mathbf{V}_1(T')$ и после окончания первого активного участка может считаться известной величиной. В соответствии с результатами § 9.4 вектор $\mathbf{a}(t)$ на второй фазе маневра направлен по вектору $\Delta \mathbf{V}_1(T')$ и сохраняет постоянную ориентацию в течение всего времени работы двигателя. Момент включения двигателя и радиус-вектор начала второго активного участка определяются формулами, приведенными в § 9.4. Рассмотренная схема перелета с двумя актив-

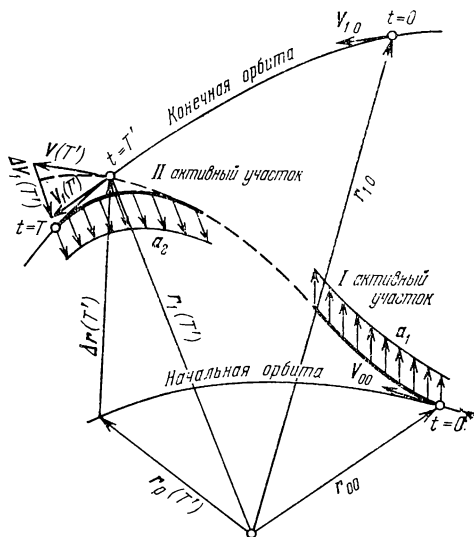


Рис. 9.6.1.

ными участками, на каждом из которых тяга имеет свое постоянное направление в пространстве, привлекает к себе внимание простотой программы изменения ориентации тяги. Она применима во всех тех случаях, когда активные участки, соответствующие указанным этапам перелета, не пересекаются.

9.6.2. Решение для однородного поля тяготения. Проведем детальный анализ описанного выше перелета для случая однородного поля тяготения. Для упрощения вычислений будем предполагать, что максимально допустимая величина управляющего ускорения на первом и втором активных участках постоянна и равняется, соответственно, a_1 и a_2 . Как и ранее, уравнения для начальной и конечной орбит запишем в виде:

для начальной орбиты

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{00} + \mathbf{V}_{00}t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{00} + \mathbf{g}t; \quad (9.6.4)$$

для конечной орбиты — орбиты цели

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{V}_{10}t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{10} + \mathbf{g}t. \quad (9.6.5)$$

Параметры орбит при $t = 0$, обозначенные в этих формулах двойными индексами, предполагаются заданными.

Рассчитаем сначала параметры первого активного участка. Вектор конечного промаха $\Delta \mathbf{r}(T')$, который является основой для выбора управления, в соответствии с (9.6.4) и (9.6.5) определяется выражением

$$\Delta \mathbf{r}(T') = \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{V}_0 T'. \quad (9.6.6)$$

Здесь $\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{00}$, $\Delta \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}$. Формула для вектора управляющего ускорения на первом активном участке имеет вид

$$\mathbf{a}_1 = a_1 \frac{\Delta \mathbf{r}(T')}{\Delta r(T')}. \quad (9.6.7)$$

Через $\Delta r(T')$ здесь обозначен модуль вектора $\Delta \mathbf{r}(T')$:

$$\Delta r(T') = \sqrt{\Delta r_0^2 + 2(\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{V}_0) T' + \Delta V_0^2 T'^2}. \quad (9.6.8)$$

Формулы для момента выключения двигателя $t_{\text{выкл}}$ были получены в § 9.1 и могут быть записаны в одной из следующих форм:

$$a_1 t_{\text{выкл}} \left(T' - \frac{t_{\text{выкл}}}{2} \right) = \frac{\Delta r(T')}{a_1}, \quad (9.6.9)$$

$$t_{\text{выкл}} = T' - \sqrt{T'^2 - \frac{2\Delta r(T')}{a_1}}. \quad (9.6.10)$$

Величина характеристической скорости, которая тратится на первом активном участке, определяется выражением

$$I_1 = a_1 t_{\text{выкл}}. \quad (9.6.11)$$

Для расчета второго активного участка необходимо иметь выражение для $V(T')$. Эта величина представляет собой сумму скорости при свободном движении по начальной орбите, которая определяется второй из формул (9.6.4), и приращения скорости, которое приобретает на первом активном участке и определяется (9.6.2). Поскольку $L(T', \xi) = 1$,

$$V(T') = V_0 + gT' + a_1 t_{\text{выкл.}} \quad (9.6.12)$$

Учитывая, что $V_1(T')$ определяется формулой (9.6.5), соотношение (9.6.3) для разности скоростей в точке пересечения орбит запишем в виде

$$\Delta V_1(T') = \Delta V_0 - a_1 t_{\text{выкл.}} \quad (9.6.13)$$

Введем в рассмотрение орт ρ направления ускорения на первом активном участке:

$$\rho = \frac{\Delta r(T')}{\Delta r(T'')}. \quad (9.6.14)$$

С использованием этого равенства и формул (9.6.7) и (9.6.11) перепишем выражение для $\Delta V_1(T')$ так:

$$\Delta V_1(T') = \Delta V_0 - I_1 \rho. \quad (9.6.15)$$

В § 9.4 было показано, что в однородном поле тяготения величина характеристической скорости, необходимой для перелета между пересекающимися орбитами, которую для рассматриваемого случая обозначим буквой I_2 , равняется модулю разности скоростей в точке пересечения орбит:

$$I_2 = |\Delta V_0 - I_1 \rho| = \sqrt{\Delta V_0^2 - 2(\Delta V_0, \rho) I_1 + I_1^2}. \quad (9.6.16)$$

Полная величина характеристической скорости I , необходимой для осуществления мягкой встречи, определяется суммой

$$I = I_1 + \sqrt{\Delta V_0^2 - 2(\Delta V_0, \rho) I_1 + I_1^2}. \quad (9.6.17)$$

Отметим, что I не зависит от величины a_2 управляющего ускорения на втором активном участке. Остановимся более подробно на определении параметров второго активного участка. Воспользуемся для этого результатами § 9.4. Полное время движения на втором активном участке обозначим через Δt_2 :

$$\Delta t_2 = T - t_{\text{вкл.}} \quad (9.6.18)$$

Здесь T — момент мягкой встречи, а $t_{\text{вкл.}}$ — момент начала второго активного участка. Это время определяется первой из формул (9.4.9). С использованием введенных выше обозначений имеем

$$\Delta t_2 = \frac{I_2}{a_2} = \frac{1}{a_2} |\Delta V_0 - I_1 \rho|. \quad (9.6.19)$$

Время движения летательного аппарата-цели от точки пересечения орбит, радиус-вектор которой $r(T')$, согласно второй из фор-

мул (9.4.9), равняется $\Delta t_2/2$. Отсюда получаем связь между заданным временем перелета T и моментом времени T' :

$$T = T' + \frac{|\Delta \mathbf{V}_0 - I_1 \rho|}{2a_2}. \quad (9.6.20)$$

Выражения для радиуса-вектора и вектора скорости в момент начала второго активного участка даются формулами (9.4.10), где вместо $\mathbf{r}_{00}$ следует подставить $\mathbf{r}_1(T')$, а вместо $\mathbf{V}_{00} = \mathbf{V}(T')$ (см. формулу (9.6.12)), вместо T — продолжительность второго активного участка Δt_2 . С учетом этого (9.4.10) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}|_{t=t_{\text{вкл}}} &= \mathbf{r}_1(T') - \mathbf{V}(T') \frac{\Delta t_2}{2} + \mathbf{g} \frac{(\Delta t_2)^2}{8}, \\ \mathbf{V}|_{t=t_{\text{вкл}}} &= \mathbf{V}(T') - \mathbf{g} \frac{\Delta t_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.6.21)$$

Момент начала второго активного участка, в соответствии с (9.6.18), (9.6.19) и (9.6.20), определяется выражением

$$t_{\text{вкл}} = T' - \frac{|\Delta \mathbf{V}_0 - I_1 \rho|}{2a_2}. \quad (9.6.22)$$

Условием реализации рассматриваемой схемы перелета является неравенство $t_{\text{вкл}} \geq t_{\text{выкл}}$. Формулы (9.6.22) и (9.6.11) позволяют это неравенство записать в виде

$$T' - \frac{|\Delta \mathbf{V}_0 - I_1 \rho|}{2a_2} \geq \frac{I_1}{a_1}. \quad (9.6.23)$$

Из этого неравенства, в частности, следует, что на возможность реализации рассматриваемой схемы перелета весьма существенно влияют величины располагаемых ускорений a_1 и a_2 .

9.6.3. Оптимизация параметров перелета. В рассмотренной схеме перелета произвольным является выбор момента времени T' . Поставим вопрос о таком выборе этого момента, чтобы суммарная величина характеристической скорости перелета I была бы минимальна. Величина I определяется выражением (9.6.17). В этом выражении от T' зависят величины I_1 и ориентация вектора ρ , вектор же $\Delta \mathbf{V}_0$ от T' не зависит. Поэтому значения характеристических скоростей I и I_1 можно отнести к его величине. Вводя безразмерные величины

$$\bar{I} = \frac{I}{\Delta V_0}, \quad \bar{I}_1 = \frac{I_1}{\Delta V_0}, \quad (9.6.24)$$

формулу (9.6.17) можем переписать в виде

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \sqrt{1 - 2\bar{I}_1 \cos \delta + \bar{I}_1^2}. \quad (9.6.25)$$

Через δ здесь обозначен угол между векторами $\Delta \mathbf{V}_0$ и ρ (или $\Delta \mathbf{r}(T')$). Зависимость $\bar{I}$ от $\bar{I}_1$ при различных значениях угла δ построена на рис. 9.6.2. На этом рисунке видно, что $\bar{I}$ является монотонно возрастающей функцией $\bar{I}_1$ при всех значениях угла δ .

Одновременно $\bar{I}$ является монотонно возрастающей функцией угла δ при всех значениях $\bar{I}_1$. Следовательно, момент времени T' должен быть выбран таким образом, чтобы $\bar{I}_1$ и δ , с учетом существующей между ними зависимости через посредство момента времени T' , имели бы минимально возможные значения. Задача о минимизации I_1 , очевидно, соответствует оптимизации параметров перелета в задаче о жесткой встрече, которая была подробно рассмотрена в § 9.1. Исходя из результатов, полученных там, можно высказать вполне определенные рекомендации по выбору величины T' и взаимного расположения орбит. Для окончательного решения задачи эти рекомендации должны быть скорректированы из-за наличия зависимости от этих же факторов угла δ . В самом общем случае для определения оптимального значения T' следует рассчитать зависимость $\bar{I}_1$ от T' и взять то значение T' , при котором реализуется ее минимум.

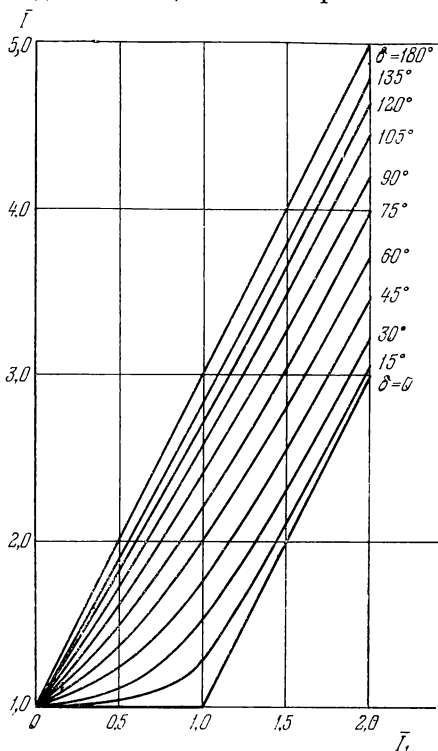


Рис. 9.6.2.

В заключение рассмотрим случай, когда величина T' велика настолько, что можно принять (см. формулу (9.6.6))

$$\Delta \mathbf{r}(T') \approx \Delta \mathbf{V}_0 T'. \quad (9.6.26)$$

В этом случае, очевидно, векторы $\Delta \mathbf{V}_0$ и $\Delta \mathbf{r}(T')$ коллинеарны и при всех достаточно больших значениях T' угол δ равен нулю. Зависимость $\bar{I}$ от $\bar{I}_1$ определяется самой нижней из кривых на рис. 9.6.2. При этом условия для выбора момента T' и оптимальное расположение орбит в данной задаче совпадают с аналогичными результатами, полученными для задачи о жесткой встрече. Интересным является то, что если возможно осуществление перелета с $I_1 \leq \Delta V_0$, то в этом случае, как видно из графиков на рис. 9.6.2, величина I не зависит от I_1 и равняется ΔV_0 .

Дополнительному анализу задачи о мягкой встрече посвящена работа А. З. Брауде [1].

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ МЕЖДУ СФЕРОЙ ВЛИЯНИЯ ПЛАНЕТЫ И ОРБИТОЙ ЕЕ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

§ 10.1. Постановка задачи. Приближенное определение планетоцентрической гиперболы

10.1.1. Постановка задачи. В настоящей главе подробно рассматривается внутренняя задача модифицированного метода сфер влияния (ММСВ) (см. раздел 1.1.5). Типичными примерами являются задачи об облете планеты, перелетах между сферой влияния и орбитой ИС планеты и перелетах между сферой влияния и поверхностью планеты. Решения этих задач, полученные в зависимости от параметра $V_{\text{сф}}$, путем сращивания в рамках ММСВ с решениями внешних задач используются в задачах синтеза и оптимизации траекторий КА для полетов к Луне (см. гл. XI) и планетам (см. гл. XII).

Поскольку методы решения всех перечисленных выше внутренних задач схожи между собой, ниже рассматривается задача об оптимальных перелетах между сферой влияния планеты и орбитой ее ИС. Те изменения, которые необходимо внести в методику решения этой задачи для решения задачи облета планеты и задачи о перелетах между сферой влияния планеты и поверхностью планеты, описаны в § 11.2 и § 11.5, соответственно, на примере перелетов в системе Земля — Луна.

Рассмотрим следующую стандартную постановку внутренней задачи:

Пусть на сфере влияния планеты, поле тяготения которой считается ньютоновским, задан свободный вектор

$$V_{\text{сф}} = V - U, \quad (10.1.1)$$

где V , U — векторы скорости КА и планеты в поле основного тела в момент подлета аппарата к планете или отлета от нее (см. (1.1.78)). Требуется построить оптимальную траекторию перехода аппарата на заданную орбиту ИС планеты или траекторию схода с нее, обеспечивающую минимум характеристической скорости перехода. В соответствии с ММСВ рассматриваем траектории перехода, не выходящие за пределы сферы влияния планеты.

Поставленная и схожая с ней задачи, а также отдельные элементы решения этой задачи рассмотрены в работах Бина [1, 2],

Боссарта [1], Бэттина [2], В. С. Вожаева [1], Гантера [1], Гербрахта, Пензо [1], Дируестера, Маклафлина, Вулфа [1], С. В. Дубовского [2], В. А. Егорова [6], В. В. Ивашкина [1, 2, 3], В. В. Ивашкина, А. Н. Скороходова [1], В. А. Ильина [3, 5], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1, 2], Корника, Северсайка [1], Лондона [1], Лоудена [2, 6, 17, 19, 24], Мьюника [1], Уилсона [1], Уэбба [1], Эдельбаума [5], Энтони, Сазаки [1], Эрике [7].

Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ полагается $\rho_{\text{эф}} \approx \infty$ и вместо $V_{\text{эф}}$ в (10.1.4) рассматривается скорость движения КА по асимптоте гиперболы V_{∞} . В дальнейшем для краткости эту задачу будем называть «перелетом орбита ИС — V_{∞} ».

Сформулированная задача была впервые рассмотрена, по-видимому, Лоуденом [2, 6]. В работах Лоудена [2, 6, 19, 24] рассмотрены плоские одно- и двухимпульсные оптимальные (апсидальные) перелеты круговой орбита ИС — V_{∞} . Это исследование продолжено в работе С. В. Дубовского [2].

Простейшей траекторией перелета сфера влияния — орбита ИС является одноимпульсная, когда импульс сообщается КА в точке пересечения планетоцентрической гиперболы с орбитой ИС. Эта задача подробно рассмотрена в работах Бина [1], Гантера [1], Дируестера, Маклафлина, Вулфа [1], В. А. Егорова [6], В. В. Ивашкина, А. Н. Скороходова [1], В. А. Ильина [3, 5], Лондона [1], Энтони, Сазаки [1]. В работе Энтони, Сазаки [1] исследован оптимальный плоский перелет эллиптической орбита ИС — V_{∞} . В работе В. В. Ивашкина, А. Н. Скороходова [1] решается задача оптимизации пространственного перелета эллиптическая орбита ИС — V_{∞} . Подробно рассмотрен случай малых наклонов вектора V_{∞} к плоскости орбиты ИС. Эта же задача без предположений о малости эксцентриситета орбиты спутника и угла между плоскостями эллипса и гиперболы рассмотрена в работе В. А. Егорова [6].

Подробное исследование двухимпульсных перелетов круговой орбита ИС — V_{∞} с приложением 2-го импульса на бесконечно большом удалении от планеты дано в работах Гантера [1], Дируестера, Маклафлина, Вулфа [1]. Двухимпульсные перелеты эллиптическая орбита ИС — V_{∞} рассмотрены в работе Лондона [1]. Трехимпульсные рациональные (неоптимальные) перелеты орбита ИС — V_{∞} рассмотрены Уэббом [1], Уилсоном [1], оптимальные перелеты — Гербрахтом, Пензо [1]. Результаты расчетов двух- и трехимпульсных перелетов эллиптическая орбита ИСЗ — V_{∞} приведены в работе Бина [2]. Исследованию оптимальных трех- и четырехимпульсных схем перелета заданной продолжительности круговой орбита ИС — V_{∞} посвящена работа Эдельбаума [5].

Впервые поставленная задача с учетом конечности размеров сферы влияния была рассмотрена в работах В. С. Вожаева [1], В. А. Ильина [3, 5], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1, 2].

Ниже излагаются результаты исследования оптимальных перелетов сфера влияния планеты — орбита ИС, основанные на работах В. А. Ильина [5], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1, 2].

10.1.2. Планетоцентрические системы координат. В качестве основной планетоцентрической системы координат рассматриваем правую прямоугольную систему $x_{\pi}y_{\pi}z_{\pi}$ (рис. 10.1.1); ось x_{π} является продолжением радиуса-вектора центра планеты Γ_{π} относительно центра гравитационного поля, в котором она движется

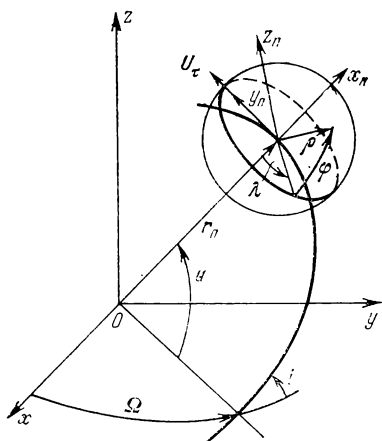


Рис. 10.1.1.

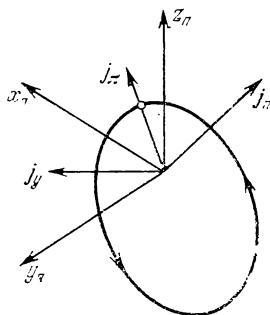


Рис. 10.1.2.

(см. раздел 1.1.5), ось y_{π} направлена по трансверсальной компоненте U_{τ} вектора скорости планеты U (зафиксированного для некоторого момента времени, например момента входа КА в сферу влияния планеты). Введем также систему сферических координат: долготу $0 \leq \lambda \leq 360^\circ$, отсчитываемую от оси $-x_{\pi}$ в плоскости $x_{\pi}y_{\pi}$ против часовой стрелки, если смотреть с оси z_{π} ; широту $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, отсчитываемую от плоскости $x_{\pi}y_{\pi}$, $\text{sign } \varphi = \text{sign } z$, и радиальное планетоцентрическое расстояние ρ . Орбиту ИС задаем фокальным параметром p_0 , эксцентриситетом e_0 и правой тройкой ортогональных ортов j_x, j_y, j_z (рис. 10.1.2): j_x направлен в перигейт орбиты, j_z направлен по нормали к орбите так, что с его конца движение по орбите видно происходящим против часовой стрелки.

Рассмотрим планетоцентрическую гиперболу, связывающую некоторую точку 1 на сфере влияния и некоторую точку 2 на орбите ИС с радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2 соответственно. Пусть для определенности рассматривается выход на орбиту ИС (рис. 10.1.3). Обозначим через β угол между векторами ρ_2 и $V_{\text{сф } 1}$, $0 \leq \beta \leq \pi$. Всюду в дальнейшем в окончательных соотношениях, связанных

с определением планетоцентрической гиперболы, будут использованы только величины ρ_2 и $V_{сф1}$. Поэтому при записи соответствующих формул индексы у этих величин опустим, полагая $\rho_2 \equiv \rho$ и $V_{сф1} \equiv V_{сф}$. Орт, нормальный к плоскости гиперболы, зададим в виде

$$i_n = \pm \frac{[\rho^0, V_{сф}^0]}{\sin \beta}, \quad (10.1.2)$$

$$\text{где } \rho^0 = \frac{\rho}{|\rho|}, \quad V_{сф}^0 = \frac{V_{сф}}{|V_{сф}|}.$$

Вектор i_n направим так, чтобы с его конца движение по гиперболе было видно происходящим против часовой стрелки. Для не содержащего перицентр маршрута A (см. раздел 5.1.3) выхода на орбиту ИС в (10.1.2) всегда берется «+», для перигелических же маршрутов B (см. раздел 5.1.3) возможен поворот от ρ к $V_{сф}$ на угол β как в направлении движения по гиперболе, так и против него. В первом случае в (10.1.2) берем «+» и соответствующий маршрут обозначаем B^+ , во втором случае в (10.1.2) берем «—» и соответствующий маршрут обозначаем B^- .

Орт i_n , направленный в перицентр гиперболы, представим в виде

$$i_n = \mu \rho^0 + \nu V_{сф}^0, \quad (10.1.3)$$

где

$$\mu = \frac{\cos \eta - \cos \beta \cos (\eta \pm \beta)}{\sin^2 \beta}, \quad (10.1.4)$$

$$\nu = \frac{\cos (\eta \pm \beta) - \cos \beta \cos \eta}{\sin^2 \beta}. \quad (10.1.5)$$

В (10.1.4) и (10.1.5) через η обозначена истинная аномалия вектора ρ в плоскости гиперболы, знак «+» перед β соответствует маршрутам A и B^+ , знак «—» — маршруту B^- . Орт i_n , дополняющий систему до правой, равен

$$i_y = [i_n, i_x]. \quad (10.1.6)$$

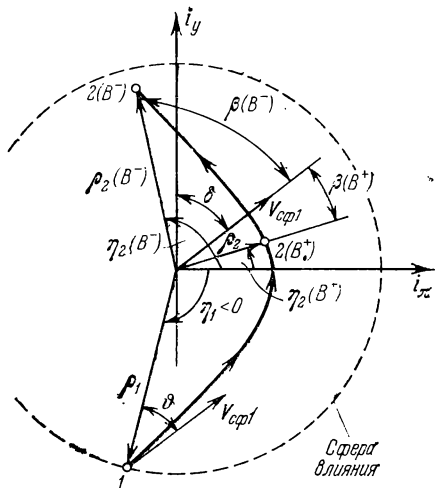


Рис. 10.1.3.

Аналогично поступаем в случае схода с орбиты ИС. Поскольку сход с орбиты ИС можно рассматривать как результат обращения

движения для выхода, имеем

$$\mathbf{V}_{\text{сф}}^{\text{сх}} = -\mathbf{V}_{\text{сф}}^{\text{в}} \quad (10.1.7)$$

и

$$\beta_{\text{сх}} = \pi - \beta_{\text{в}}, \quad (10.1.8)$$

где индексы «в» и «сх» соответствуют выходу и сходу. В этом случае μ не меняется, а γ меняет знак, что компенсирует изменение знака $V_{\text{сф}}^0$ в (10.1.3), поскольку i_{π} в обоих случаях один и тот же.

10.1.3. Приближенное определение планетоцентрической гиперболы. Задача определения планетоцентрического движения КА при отсутствии импульсов скорости на траектории между сферой влияния и точкой перехода на орбите ИС сводится к построению гиперболы по заданному свободному вектору $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ на сфере влияния и вектору ρ . Учитывая, что для всех практически интересных орбит ИС $\frac{\rho_{\text{сф}}}{\rho} \gg 1$, можно положить $\frac{\rho_{\text{сф}}}{\rho} = \infty$, т. е. приближенно считать, что в окрестности сферы влияния движение КА происходит по асимптоте гиперболы. Построение планетоцентрической гиперболы по векторам ρ и $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ ($\rho_{\text{сф}} = \infty$) приведено в монографии Бэттина [2]. Ниже приведены другие решения этой задачи, полученные в работах В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1] и В. С. Вождаева [4], более удобные для рассмотрения оптимальных импульсных перелетов.

Предположим вначале, что

$$\rho_{\text{сф}} = \infty. \quad (10.1.9)$$

В этом случае вектор скорости аппарата на сфере влияния $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ направлен по асимптоте гиперболы. Поскольку направление соответствующей ветви асимптоты гиперболы совпадает с вектором (выход на орбиту ИС, рис. 10.1.4)

$$\rho_{\infty}^0 = \lim_{\rho_{\text{сф}} \rightarrow \infty} \frac{\rho_1}{\rho_{\text{сф}}} = \frac{-\mathbf{V}_{\text{сф}}}{|\mathbf{V}_{\text{сф}}|}, \quad (10.1.10)$$

соответствующую предельную гиперболу можно рассматривать как перелет между точками с векторами ρ_1 и ρ_2 при $\rho_{\text{сф}} \rightarrow \infty$. Угловая дальность этого предельного перелета равна (рис. 10.1.4):
в случае выхода на орбиту ИС

$$\eta_{12} = \pi - \beta \text{ для маршрутов } A, B^+, \quad (10.1.11)$$

$$\eta_{12} = \pi + \beta \text{ для маршрута } B^-; \quad (10.1.12)$$

в случае схода с орбиты ИС

$$\eta_{12} = \beta \text{ для маршрутов } A, B^+, \quad (10.1.13)$$

$$\eta_{12} = 2\pi - \beta \text{ для маршрута } B^-. \quad (10.1.14)$$

Заметим, что согласно (10.1.12), (10.1.14) в рассматриваемом

асимптотическом приближении угловая дальность перелета по маршруту B^- при $0 < \beta < \pi$

$$\eta_{12}(B^-) > \pi. \quad (10.1.15)$$

Поскольку величина β задана, предельная гипербола представляет перелет с заданной угловой дальностью (10.1.11) — (10.1.14) между конечным радиусом-вектором ρ_2 и бесконечно удаленной точкой, направление на которую определяется вектором ρ_∞^0 (10.1.10). Для такой гиперболы с учетом (10.1.9) связь между фокальным параметром p и эксцентриситетом e дается соотношением (5.1.64) при $n = \rho_{\text{сф}}/\rho = \infty$:

$$e^2 = 2 \frac{1 \pm \cos \beta}{\sin^2 \beta} - 2 \frac{1 \pm \cos \beta}{\cos^2 \beta} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{p}{\rho} \right)^2. \quad (10.1.16)$$

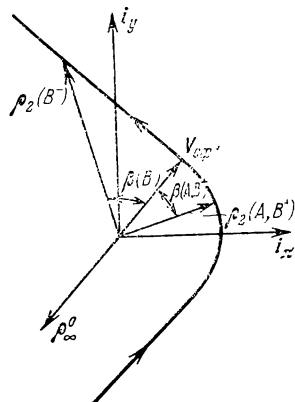


Рис. 10.1.4.

В (10.1.16) и всюду в дальнейшем верхний знак перед $\cos \beta$ соответствует выходу на орбиту ИС, нижний знак — сходу с орбиты ИС (см. (10.1.8)). Поскольку при заданной величине $V_{\text{сф}}$ и любом радиусе сферы влияния $\rho_{\text{сф}}$, в том числе $\rho_{\text{сф}} = \infty$, известна действительная полуось гиперболы

$$a = \frac{\mu}{V_{\text{сф}}^2 - 2 \frac{\mu}{\rho_{\text{сф}}}}, \quad (10.1.17)$$

где μ — гравитационная постоянная планеты, имеем также

$$e^2 = \frac{p}{a} + 1. \quad (10.1.18)$$

Таким образом, задача построения предельной планетоцентрической гиперболы при $\rho_{\text{сф}} = \infty$ является частным случаем рассмотренной в пункте 4 раздела 5.1.4 задачи определения кеплеровой дуги при заданных угловой дальности перелета и большой (или действительной) полуоси конического сечения. Исключая e^2 из (10.1.16) и (10.1.18), получим (см. В. А. Ильин, Н. А. Истомин [1])

$$\sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\rho}{a} \sin^2 \beta + 1 \pm \cos \beta} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{a}} \sin \beta. \quad (10.1.19)$$

Анализируя точки пересечения кривых $\eta_{12} = \text{const}$ (10.1.16) и $a = \text{const}$ (10.1.17) (см. рис. 5.1.14), получим, что знак «+» перед вторым радикалом в (10.1.19) соответствует перелетам по

маршрутам A, B^+ ($\eta_{12} < \pi$), а знак «—» — перелетам по маршруту B^- ($\eta_{12} > \pi$, см. (10.1.15)).

При $\beta = 0$ в случае выхода на орбиту ИС и $\beta = \pi$ в случае схода с орбиты ИС угловая дальность предельного перелета $\eta_{12} = \pi$ (см. (10.1.11)–(10.1.14)) и согласно (10.1.19) для всех маршрутов

$$\frac{p}{\rho} = 2, \quad (10.1.20)$$

что соответствует, очевидно, (5.1.68) при $n \rightarrow \infty$. При $\beta = \pi$ в случае выхода на орбиту ИС и $\beta = 0$ в случае схода с орбиты ИС получаем радиальные перелеты с угловой дальностью предельного перелета $\eta_{12} = 0$ (см. (10.1.11)–(10.1.14)) и согласно (10.1.19)

$$p = 0. \quad (10.1.21)$$

Соотношение (10.1.19), как и соответствующее соотношение в книге Бэттина [2], получено в предположении $\rho/\rho_{\text{сф}} = 0$. Покажем, что если вместо этого предположения сделать предположение $0 < \rho/\rho_{\text{сф}} \ll 1$, то соотношение (10.1.19) будет справедливо с точностью до величин порядка $(\rho/\rho_{\text{сф}})^2$.

Обозначим через δ угол между векторами $\mathbf{V}_{\text{сф}1}$ и $\mathbf{i}_v$ (10.1.6) (рис. 10.1.3). Имеем

$$\delta = |\eta_1| + \vartheta - \frac{\pi}{2}, \quad (10.1.22)$$

где η_1 — истинная аномалия планетоцентрической гиперболы в точке входа ρ_1 , ϑ — угол между векторами $\mathbf{V}_{\text{сф}1}$ и $-\rho_1$. Из (10.1.22) получаем

$$\sin \delta = -\cos \vartheta (\cos \eta_1 - \sin |\eta_1| \operatorname{tg} \vartheta). \quad (10.1.23)$$

Используя известные выражения (см. (1.3.27), (1.3.37), (1.3.38))

$$\cos \eta_1 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho_{\text{сф}}} - 1 \right), \quad (10.1.24)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p}{\rho_{\text{сф}} e \sin |\eta_1|}, \quad (10.1.25)$$

получим

$$\sin \delta = \frac{1}{e} \cos \vartheta. \quad (10.1.26)$$

Выражая $\cos \vartheta$ через $\operatorname{tg} \vartheta$, снова используя (10.1.24), (10.1.25) и выражая фокальный параметр p через радиус перицентра:

$$p = \rho_{\pi}(1 + e), \quad (10.1.27)$$

приведем выражение (10.1.26) к виду

$$\sin \delta = \frac{1}{e} \left\{ 1 + \frac{\rho_{\pi}^2}{\rho_{\text{сф}}^2} \frac{(1+e)^2}{e^2 - \left[\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} (1+e) - 1 \right]^2} \right\}^{1/2}. \quad (10.1.28)$$

Для всех имеющих практический смысл гиперболических кеплеровых дуг перехода сфера влияния — орбита ИС можно считать

$$\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} \ll 1. \quad (10.1.29)$$

Пусть $e > 1$. Тогда на основании (10.1.29) получим, раскладывая (10.1.28) в ряд, для гиперболической кеплеровой дуги

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{1}{e} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} \right)^2 \frac{(1+e)^2}{e^2 - \left[\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} (1+e) - 1 \right]^2} + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{e} + O \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} \right)^2. \end{aligned} \quad (10.1.30)$$

Пусть теперь $e \rightarrow 1$. Полагая в (10.1.28) $e = 1$, получим аналогично для параболической кеплеровой дуги

$$\sin \delta = 1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} \frac{1}{1 - \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}}} + \dots = 1 + O \left(\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\text{сф}}} \right). \quad (10.1.31)$$

Учитывая, что при решении задач синтеза и оптимизации траекторий КА при полетах к Луне и планетам (см. гл. XI и XII) скорость аппарата на сфере влияния $V_{\text{сф}}$ практически всегда превосходит скорость, соответствующую параболическому планетоцентрическому движению, получим при $e > 1$ с точностью до малых порядка $(\rho_{\pi}/\rho_{\text{сф}})^2$

$$\sin \delta = \frac{1}{e}. \quad (10.1.32)$$

Такой же результат получается, очевидно, и для случая схода с орбиты ИС.

Формула (10.1.32) приведена в работе Бэттина [1], однако там она была получена в предположении, что $\rho_{\pi}/\rho_{\text{сф}} = 0$. При этом угол δ совпадает с углом между асимптотой гиперболы и i_y . В последовавших затем многочисленных работах, посвященных синтезу траекторий полета к Луне и планетам, эта формула применялась в указанном асимптотическом смысле, как соответствующая перелетам орбита ИС — V_{∞} .

Из проведенного выше анализа следует, что формула (10.1.32), широко используемая в астродинамике, обладает, как это, по-видимому, впервые было показано в работе В. А. Ильина [5], квадратичной по $\rho_\pi/\rho_{сф}$ погрешностью. Это обстоятельство, как будет показано ниже, на порядок повышает точность расчета планетоцентрического движения аппарата по сравнению с асимптотиче-

ским подходом $\left(\frac{\rho_\pi}{\rho_{сф}} \rightarrow 0\right)$, что име-

ет важное практическое значение. Из приведенных на рис. 10.1.5 данных видно, что формулой (10.1.32) можно с достаточной степенью точности пользоваться до значений $\rho_\pi/\rho_{сф}$, не превышающих 0,3—0,4.

Получим теперь, используя формулу (10.1.32), соотношение (10.1.19). Следуя В. С. Вожадеву [1], имеем (см. рис. 10.1.3)

$$\beta + \eta_2 = \frac{\pi}{2} - \delta \quad \text{для маршрутов } A, B^+, \quad (10.1.33)$$

$$\eta_2 - \beta = \frac{\pi}{2} - \delta \quad \text{для маршрута } B^-, \quad (10.1.34)$$

откуда

$$\cos \beta \cos \eta_2 \mp \sin \beta \sin \eta_2 = \sin \delta, \quad (10.1.35)$$

где «—» соответствует (10.1.33), а «+» — (10.1.34). Подставляя в (10.1.35) соотношения (10.1.18), (10.1.32), выражение

$$\cos \eta_2 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) \quad (10.1.36)$$

и освобождаясь от иррациональностей, приходим к (10.1.19). Поскольку практически всегда

$$\rho_\pi \sim \rho \quad (10.1.37)$$

и (10.1.32) имеет точность $(\rho_\pi/\rho_{сф})^2$, точность соотношения (10.1.19) имеет порядок $(\rho/\rho_{сф})^2$.

Отметим существенное различие между использованием формулы (10.1.32) и других соотношений, содержащих величину $\rho/\rho_{сф}$, в асимптотическом смысле при $\frac{\rho}{\rho_{сф}} \rightarrow 0$ (см. Бэттин [1, 2]) и рассмотрением, проведенным выше. При асимптотическом под-

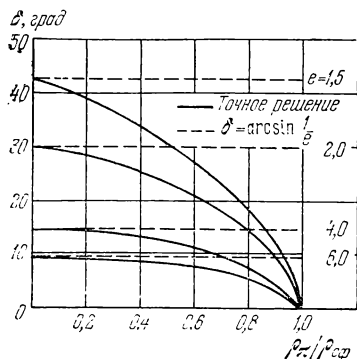


Рис. 10.1.5.

ходе, поскольку в (10.1.17) полагается $2 \frac{\mu}{\rho_{\text{сф}}} = 0$, соотношение (10.1.17) с точностью порядка $2 \frac{\mu}{\rho_{\text{сф}}} = 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\rho}{\rho_{\text{сф}}}$ заменяется на

$$a = \frac{\mu}{V_{\text{сф}}^2}. \quad (10.1.38)$$

Поскольку, как показывают численные оценки, при синтезе траекторий для полетов к Луне, Марсу и Венере практически всегда величины $V_{\text{сф}}$ и $\sqrt{\mu/\rho}$ имеют один и тот же порядок, использование (10.1.38) вместо (10.1.17) приводит в определении a , в соотношениях для ρ/ρ и других элементов планетоцентрического движения, зависящих от a , к ошибке порядка $\rho/\rho_{\text{сф}}$. Таким образом, *учет конечности размеров сферы влияния в (10.1.17) позволяет при использовании соотношения (10.1.32) строить планетоцентрическое движение КА по гиперболе с точностью порядка $(\rho/\rho_{\text{сф}})^2$, т. е. на порядок точнее, чем при асимптотическом $\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{сф}}} \rightarrow 0\right)$ подходе.*

Перелеты A и B^+ при изменении β непрерывно переходят друг в друга. Граничным между этими перелетами является перелет, соответствующий пересечению орбиты ИС в перигентре гиперболы. Обозначая соответствующее граничное значение β через $\bar{\beta}$ и замечая, что при $\beta = \bar{\beta}$ $\eta_2 = 0$, получаем из (10.1.33), (10.1.34)

$$\cos \bar{\beta} = \pm \sin \delta = \pm \frac{1}{e}, \quad (10.1.39)$$

где знак «+» соответствует выходу на орбиту ИС, а знак «—» — сходу с орбиты ИС. Используя для определения e соотношение (10.1.36) при $\eta_2 = 0$, получим с помощью (10.1.18)

$$\pm \cos \bar{\beta} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a}}. \quad (10.1.40)$$

Используя соотношения (10.1.11) — (10.1.14) и таблицу 5.1.1, установим соответствие между значениями β и маршрутами перелета. В случае выхода на орбиту ИС при $\beta < \bar{\beta}$ реализуются маршруты B^+ и B^- , а при $\beta > \bar{\beta}$ — маршруты A и B^- . В случае схода с орбиты ИС при $\beta < \bar{\beta}$ реализуются маршруты A и B^- , а при $\beta > \bar{\beta}$ — маршруты B^+ и B^- .

Соотношения (10.1.2) — (10.1.8), (10.1.17) — (10.1.19) полностью решают задачу определения параметров планетоцентрической кеплеровой дуги движения КА при известных векторах $V_{\text{сф}}$ и ρ , заданных в основной системе координат $x_n y_n z_n$. Соотношения (10.1.2) — (10.1.5) определяют ориентацию гиперболы в пространстве. Формулы (10.1.17) — (10.1.19) позволяют найти фокальный

параметр p и эксцентриситет e гиперболы и, следовательно, все ее параметры в плоскости движения. Векторные параметры движения, определенные в системе координат гиперболы $i_\pi i_\nu i_n$, пересчитываются с помощью матрицы перехода

$$\mathfrak{M} = \{i_\pi, i_\nu, i_n\}, \quad (10.1.41)$$

имеющей своими столбцами орты i_π, i_ν, i_n , в основную систему координат $x_\pi y_\pi z_\pi$.

Направляющие косинусы радиусов-векторов ρ_i , проведенных соответственно в точки входа ($i = 1$) и выхода ($i = 2$) на сфере влияния (рис. 10.1.3), в системе координат $i_\pi i_\nu i_n$ всегда равны

$$\rho_i^0 = \begin{cases} \cos \eta_i \\ \sin \eta_i \\ 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (10.1.42)$$

где η_i — истинная аномалия радиуса-вектора ρ_i в движении по гиперболе. Направляющие косинусы этих же единичных радиусов-векторов в системе координат $x_\pi y_\pi z_\pi$ равны

$$\rho_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0) = \mathfrak{M} \times \begin{cases} \cos \eta_i \\ \sin \eta_i \\ 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2. \quad (10.1.43)$$

Сферические координаты точек входа и выхода вычисляются из соотношений

$$\sin \varphi_i = z_i^0, \quad (10.1.44)$$

$$\sin \lambda_i = -\frac{y_i^0}{\cos \varphi_i}, \quad (10.1.45a)$$

$$\cos \lambda_i = -\frac{x_i^0}{\cos \varphi_i}, \quad (10.1.45b)$$

$$i = 1, 2.$$

§ 10.2. Одноимпульсные перелеты сфера влияния — орбита ИС

10.2.1. Импульс в точке перехода. Обозначим через V вектор скорости аппарата на гиперболе и через v — вектор скорости аппарата на орбите ИС в точке выхода на орбиту или схода с нее. Вектор импульса скорости в этой точке равен $\Delta V = \pm(v - V)$ (рис. 10.2.1), откуда

$$\Delta V^2 = v^2 + V^2 - 2(v_r V_r + v_\tau V_\tau \cos \gamma); \quad (10.2.1)$$

здесь v_r, V_r — радиальные компоненты векторов v и V ; v_τ, V_τ — их трансверсальные компоненты (в соответствующих плоскостях);

γ — угол между плоскостями орбиты ИС и гиперболы ($\gamma > 0$, если кратчайший поворот от V_τ к v_τ в направлении вектора ρ виден происходящим против часовой стрелки).

Чтобы исключить траектории с чрезмерно большими импульсами скорости, ограничимся рассмотрением случая

$$-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ, \\ \cos \gamma \geq 0. \quad (10.2.2)$$

На основании (10.1.2) имеем

$$\cos \gamma = (\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n) = \pm \frac{(\rho^0, \mathbf{v}_{сф}^0, \mathbf{j}_n)}{\sin \beta}, \quad (10.2.3)$$

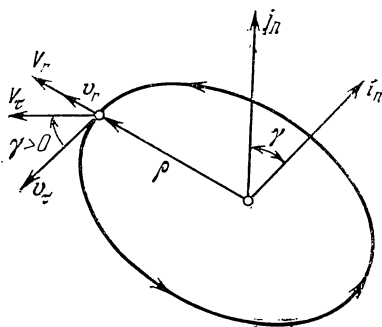


Рис. 10.2.1.

где «+» соответствует маршрутам A , B^+ , а «-» — маршруту B^- . Используя интеграл энергии (1.3.24), представим V^2 и v^2 в виде

$$V^2 = 2 \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu}{a}, \quad (10.2.4)$$

$$v^2 = 2 \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu}{a_0}. \quad (10.2.5)$$

Радиальные и тангенциальные компоненты векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}$ на основании (1.3.37), (1.3.38) равны

$$V_r = e \sin \eta \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \quad V_\tau = \frac{V \sqrt{\mu p}}{\rho}, \quad (10.2.6)$$

$$v_r = e_0 \sin \vartheta \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}, \quad v_\tau = \frac{V \sqrt{\mu p_0}}{\rho}, \quad (10.2.7)$$

где ϑ — истинная аномалия точки, движущейся по орбите ИС. Подставляя (10.2.3)–(10.2.7) в (10.2.1), используя соотношения (10.1.19) и (см. (1.3.27) и (1.3.34))

$$\frac{p_0}{\rho} = 1 + e_0 \cos \vartheta, \quad (10.2.8)$$

$$e_0^2 = 1 - \frac{p_0}{a_0}, \quad (10.2.9)$$

получим

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \left\{ 3 + 4e_0 \cos \vartheta + \kappa + e_0^2 - 2e_0 \sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{\frac{p_0}{p}} - \right. \\ \left. - \frac{p_0}{\rho} \left[\sqrt{\kappa + \frac{4p_0}{\rho(1 \mp \cos \beta)}} \pm \sqrt{\kappa} \right] |(\rho^0, \mathbf{v}_{сф}^0, \mathbf{j}_n)| \right\}^{1/2}, \quad (10.2.10)$$

где

$$\kappa = \frac{p_0}{a}. \quad (10.2.11)$$

Входящие в (10.2.10) величины определяются вместе с (10.2.8) соотношениями, которые удобно записать в виде

$$\sqrt{\frac{p_0}{p}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} \sqrt{\frac{\rho}{p}}, \quad (10.2.12)$$

$$e \sin \eta = \pm \sqrt{e^2 - \left(\frac{p}{\rho} - 1\right)^2}, \quad (10.2.13)$$

где знак «+» соответствует маршрутам A при сходе с орбиты ИС и B при выходе на орбиту ИС, а знак «—» соответствует маршрутам A при выходе на орбиту ИС и B при сходе с орбиты ИС,

$$e^2 = 1 + \frac{p}{\rho} \frac{\rho}{p_0} \kappa. \quad (10.2.14)$$

В этих соотношениях $\frac{p}{\rho}$ определяется формулой (10.1.19), в которой

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\rho}{p_0} \kappa. \quad (10.2.15)$$

При фиксированных параметрах орбиты ИС и векторе $\mathbf{V}_{\text{сф}} \Delta V$ является функцией радиуса-вектора ρ точки перехода на орбите ИС и, как непрерывная периодическая функция ϑ , достигает минимума. Поэтому при любых параметрах орбиты ИС и любом векторе $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ всегда имеет смысл задача об оптимальном одноимпульсном переходе сфера влияния — орбита ИС, т. е. об отыскании такой точки на орбите ИС, в которой достигается $\min \Delta V$ при выходе на орбиту ИС или сходе с нее. При определении оптимальной точки на орбите ИС, в которой достигается $\min \Delta V$, в качестве независимой переменной вместо ϑ удобно взять $\cos \beta$ (см. В. С. Вождаев [1] и раздел 10.2.2).

Обозначим направляющие косинусы $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ относительно осей $\mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m, \mathbf{j}_n$ через l, m, n соответственно:

$$\mathbf{V}_{\text{сф}}^0 = \{l, m, n\}. \quad (10.2.16)$$

В проекциях на эти же оси вектор ρ^0 точки перехода равен

$$\rho^0 = \{\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0\}. \quad (10.2.17)$$

Тогда

$$\cos \beta = (\rho^0, \mathbf{V}_{\text{сф}}^0) = l \cos \vartheta + m \sin \vartheta, \quad (10.2.18)$$

$$(\rho^0, \mathbf{V}_{\text{сф}}^0, \mathbf{j}_n) = m \cos \vartheta - l \sin \vartheta. \quad (10.2.19)$$

Введем обозначение

$$\sigma = l^2 + m^2 = 1 - n^2, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad (10.2.20)$$

и вспомогательный угол τ :

$$\sin \tau = \frac{l}{\sqrt{\sigma}}, \quad (10.2.21a)$$

$$\cos \tau = \frac{m}{\sqrt{\sigma}}. \quad (10.2.21b)$$

Тогда

$$\cos \beta = \sqrt{\sigma} \sin(\vartheta + \tau), \quad (10.2.22)$$

$$(\rho^0, \mathbf{V}_{\text{сф}}^0, \mathbf{j}_n) = \sqrt{\sigma} \cos(\vartheta + \tau), \quad (10.2.23)$$

откуда

$$|(\rho^0, \mathbf{V}_{\text{сф}}^0, \mathbf{j}_n)| = \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}. \quad (10.2.24)$$

Из (10.2.23) и (10.2.24) получаем

$$\cos(\vartheta + \tau) = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\sigma}}, \quad (10.2.25)$$

где, согласно (10.1.2), знак «+» берется для маршрутов A , B^+ , знак «-» — для маршрута B^- .

При заданном значении β переход к ϑ производится с помощью соотношений (10.2.22), (10.2.23) и (10.2.25). Отсюда окончательно получаем

$$\sin \vartheta = \frac{m}{\sigma} \cos \beta \mp \frac{l}{\sigma} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}, \quad (10.2.26)$$

$$\cos \vartheta = \pm \frac{m}{\sigma} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} + \frac{l}{\sigma} \cos \beta, \quad (10.2.27)$$

где верхний знак соответствует маршрутам A , B^+ , а нижний знак — маршруту B^- .

Из (10.2.24) следует, в частности, что при заданной величине σ допустимым диапазоном значений для $\cos \beta$ является

$$-\sqrt{\sigma} \leq \cos \beta \leq \sqrt{\sigma}. \quad (10.2.28)$$

10.2.2. Круговая орбита ИС. В случае круговой орбиты ИС $e_0 = 0$, $\rho = \rho_0$ и из (10.2.10) с учетом (10.2.24) получаем

$$\Delta V = V_{\text{кр}} \left[3 + \kappa - 2 \left(\sqrt{\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{1 \mp \cos \beta}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} \right) \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} \right]^{1/2}, \quad (10.2.29)$$

где

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (10.2.30)$$

— скорость движения по круговой орбите ИС радиуса ρ .

При заданных a , ρ или $\kappa = \frac{\rho}{a}$ и σ найдем на орбите ИС точку, в которой достигается $\min \Delta V$. Освобождаясь в получаемом из

(10.2.29) равенстве $\frac{\partial \Delta V}{\partial \cos \beta} = 0$ от иррациональностей, получим для определения оптимальных значений $\cos \beta$ следующее алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $\cos \beta$:

$$(1 + \kappa) \cos^4 \beta \mp [4 + (2 + \sigma)\kappa] \cos^3 \beta + \\ + [4 + 2\sigma + (1 + 2\sigma)\kappa] \cos^2 \beta \mp \sigma(4 + \kappa) \cos \beta + \sigma^2 = 0. \quad (10.2.31)$$

Непосредственный анализ уравнения (10.2.31) затруднителен. Замечая, что κ входит в (10.2.31) линейно, разрешим это соотношение относительно κ и приведем его к виду

$$\kappa = - \frac{(\cos^2 \beta \mp 2 \cos \beta + \sigma)^2}{\mp \cos \beta (\sigma \mp \cos \beta) (1 \mp \cos \beta)^2}. \quad (10.2.32)$$

В случае круговой орбиты параметр κ из (10.2.11)

$$\kappa = \frac{\rho}{a} \quad (10.2.33)$$

имеет простой физический смысл. Если в соотношении (10.1.17) пренебречь малым членом $2 \frac{\mu}{\rho_{\text{ср}}}$ по сравнению с $V_{\text{сф}}^2$ (или, что то же самое, положить $\rho_{\text{сф}} = \infty$), то с учетом (10.1.38) и (10.2.30) получим из (10.2.33)

$$\kappa \approx \kappa(\rho_{\text{сф}} = \infty) = \frac{V_{\text{сф}}^2}{V_{\text{кр}}^2}. \quad (10.2.34)$$

Соотношение (10.2.32) и результаты численных расчетов (рис. 10.2.2—10.2.4) позволяют провести подробный анализ свойств оптимальных перелетов.

1) Поскольку $\kappa > 0$ только в промежутках $0 < \cos \beta < \sigma$ для выхода на орбиту ИС и $\sigma < \cos \beta < 0$ для схода с орбиты ИС, то значения $\cos \beta_{\text{opt}}$ заключены в этих промежутках, меньших допустимого диапазона $\cos \beta$ (см. (10.2.28)):

$$0 < |\cos \beta_{\text{opt}}| < \sigma \leq \sqrt{\sigma}. \quad (10.2.35)$$

$$2) \quad \kappa \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \cos \beta \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |\cos \beta| \rightarrow \sigma. \quad (10.2.36)$$

$$3) \quad \kappa = 0 \quad \text{при} \quad \pm \cos \beta = 1 - \sqrt{1 - \sigma} \leq \sigma, \quad (10.2.37)$$

причем каждое из этих значений $\cos \beta$ является двукратным корнем числителя (10.2.32).

4) Чтобы установить соответствие между маршрутами перелета и ветвями зависимости $\kappa = \kappa(\cos \beta, \sigma)$, рассмотрим выражение (10.2.29) при $\kappa \rightarrow \infty$. В этом случае зависящую от $\cos \beta$ часть

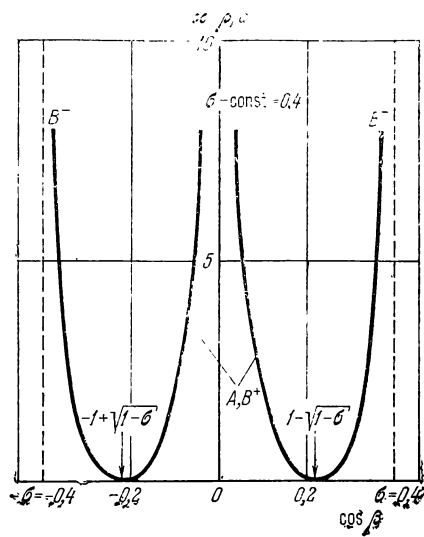


Рис. 10.2.2.

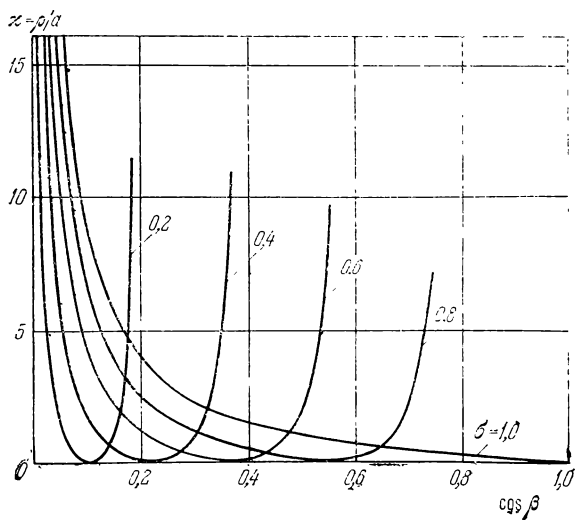


Рис. 10.2.3.

(10.2.29) можно приближенно представить в виде

$$-2 \left(\sqrt{\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{1 \mp \cos \beta}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} \right) \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} \approx$$

$$\approx \begin{cases} -2 \sqrt{\kappa} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} & \text{для маршрутов } A, B^+, \\ -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \frac{\sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}}{1 \mp \cos \beta} & \text{для маршрута } B^-. \end{cases} \quad (10.2.38a)$$

$$(10.2.38b)$$

Из (10.2.38a) и (10.2.38b) следует, что оптимальными значениями $\cos \beta$ при $\kappa \rightarrow \infty$ являются:

$$(\cos \beta)_{\text{opt}} = 0 \quad \text{для маршрутов } A, B^+, \quad (10.2.39a)$$

$$(\cos \beta)_{\text{opt}} = \pm \sigma \quad \text{для маршрута } B^-. \quad (10.2.39b)$$

Аналогичное рассмотрение при $\kappa \rightarrow 0$ показывает, что, в соответствии с графиком рис. 10.2.2, различие между маршрутами A, B^+ и B^- пропадает, и дает для $(\cos \beta)_{\text{opt}}$ выражения (10.2.37). Эти результаты вместе с численным анализом приводят к выводу, что значения $0 < |\cos \beta_{\text{opt}}| < 1 - \sqrt{1 - \sigma}$ характеризуют оптимальный перелет по маршрутам A, B^+ , а значения $1 - \sqrt{1 - \sigma} < |\cos \beta_{\text{opt}}| < \sigma$ характеризуют оптимальный перелет по маршруту B^- .

5) Для ветви A, B^+ при любом κ (см. рис. 10.2.3 и соотношение (10.1.40))

$$|\cos \beta(\kappa, \sigma)| \leq |\cos \bar{\beta}(\kappa, \sigma = 1)|. \quad (10.2.40)$$

Отсюда и из сказанного в разделе 10.1.3 о соотношении углов β и $\bar{\beta}$ для различных маршрутов следует, что в составе оптимальных перелетов нет перелетов B^+ . Поскольку, как это непосредственно видно из (10.2.29), $\min \Delta V(A, B^+) \leq \min \Delta V(B^-)$, то глобальный $\min \Delta V$ достигается на дуге гиперболы A , не содержащей перигентра, для которой

$$0 < |\cos \beta_{\text{opt}}| < 1 - \sqrt{1 - \sigma}. \quad (10.2.41)$$

Дуга гиперболы B^- , содержащая перигентр, для которой

$$1 - \sqrt{1 - \sigma} < |\cos \beta_{\text{opt}}| < \sigma, \quad (10.2.42)$$

дает локальный $\min \Delta V$ (рис. 10.2.4).

Наличие оценок (10.2.41), (10.2.42) позволяет при решении уравнения (10.2.31) одним из регулярных методов, например методом Феррари (см. А. К. Сушкевич [1]), выделить нужный корень $\cos \beta_{\text{opt}}$.

6) Пространственный характер перелета описывается лишь одним параметром σ (10.2.20). При $\sigma = \text{const}$, т. е. при расположении $V_{\text{сф}}$ на образующей кругового конуса, у которого ось совпадает с ортом j_n , а половина угла при вершине равна $\arccos(\pm \sqrt{1 - \sigma})$,

оптимальные перелеты (при условии $a = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$) отличаются один от другого лишь ориентацией относительно вектора $\mathbf{j}_n$ и получаются один из другого вращением гиперболы перехода как жесткого целого вокруг оси $\mathbf{j}_n$ вместе с вектором $\mathbf{V}_{\text{сф}}$.

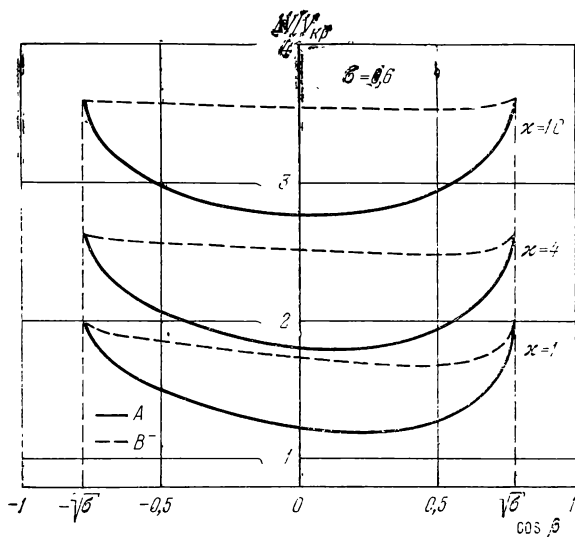


Рис. 10.2.4.

Результаты расчета зависимостей $\kappa = \kappa(\cos \beta, \sigma)$ по (10.2.32) и минимального относительного импульса $\Delta V(\kappa, \sigma)/V_{\text{кр}}$ по (10.2.29) с учетом (10.2.32) приведены на рис. 10.2.3 и 10.2.5.

При перелете в плоскости орбиты ИС $\sigma = 1$, и из (10.2.32) получаем (исключая корни $\cos \beta = \pm 1$, не дающие $\min \Delta V$)

$$\cos \beta_{\text{opt}}|_{\sigma=1} = \cos \bar{\beta} = \pm \frac{1}{1+\kappa}. \quad (10.2.43)$$

Это — хорошо известный результат (Гобец, Долл [1], Лоуден [6, 8, 19]): в плоском случае оптимальным является выход на орбиту ИС или сход с нее в перигеистре гиперболы. Соответствующая характеристическая скорость

$$\Delta V = V_{\text{кр}} (\sqrt{2 + \kappa} - 1). \quad (10.2.44)$$

Найденному результату можно дать элементарное объяснение. Из (10.2.1) непосредственно видно, что при плоском ($\cos \gamma = 1$) переходе сфера влияния — круговая орбита ИС минимум ΔV соответствует максимуму $V_{\text{т}}$, что и реализуется в перигеистре гиперболы.

В случае перелетов по нормали к орбите ИС

$$(\rho^0, V_{сф}^0, j_n) = 0, \quad \sigma = 0 \quad (10.2.45)$$

и для всех точек орбиты ИС

$$\Delta V = V_{кр} (3 + \kappa)^{1/2}. \quad (10.2.46)$$

Таким образом, в данном случае решения задачи оптимизации не существует; все точки орбиты оказываются в одинаковом положении, и задача сводится лишь к построению гиперболы перелета.

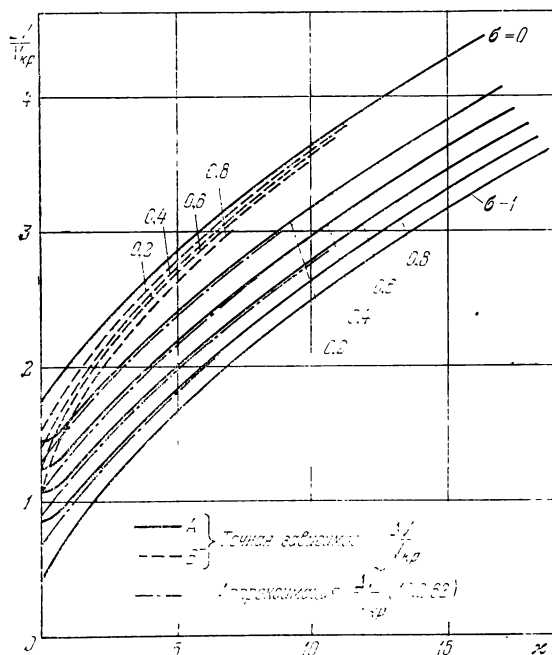


Рис. 10.2.5.

Отметим характерную особенность зависимости $\Delta V(\kappa, \sigma)$ для оптимального перелета (см. рис. 10.2.5). Из (10.2.44) и (10.2.46) следует, что при $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ оптимальный импульс монотонно возрастает с увеличением κ . При значениях же $0 < \sigma < 1$ кривые $\Delta V(\kappa, \sigma = \text{const})$ для маршрута А достигают минимума при значениях $\kappa^* \ll 1$.

Вычисляя с помощью (10.2.29) производную $\partial \left[\frac{\Delta V^2}{V_{кр}^2} \right] / \partial \kappa$ для маршрута А с учетом того, что в (10.2.29) подставлено оптималь-

ное значение $\cos \beta_{\text{opt}}(\kappa, \sigma)$, получим

$$\frac{\partial [\Delta V^2 / V_{\text{кр}}^2]}{\partial \kappa} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + 4/(1 \mp \cos \beta_{\text{opt}})}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right) \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta_{\text{opt}}}. \quad (10.2.47)$$

Полагая в (10.2.47) при $\kappa \ll 1$ величину $\cos \beta_{\text{opt}}$ равной его значению при $\kappa = 0$ (10.2.37), получим из условия $\partial \left[\frac{\Delta V^2}{V_{\text{кр}}^2} \right] / \partial \kappa = 0$ следующее приближенное выражение для κ^* :

$$\kappa^* \approx \left[\frac{2 \sqrt{1 - \sigma - 1 + \sigma}}{2 \sqrt{2} - (1 - \sigma)^{1/4} \sqrt{1 - \sigma - 1 + \sigma}} \right]^2. \quad (10.2.48)$$

Приближенные значения κ^* (10.2.48) вместе с точными значениями $\kappa^* = \kappa^*(\sigma)$, полученными численно, показаны на рис. 10.2.6. При значениях $\kappa > \kappa^*$ величины оптимальных импульсов $\Delta V(\kappa, \sigma) |_{\sigma=\text{const}}$, $0 < \sigma < 1$, монотонно возрастают с увеличением κ . При $\kappa \gg 1$ этот результат можно получить аналитически (см. ниже). При $\kappa = \text{const}$ $\Delta V(\kappa, \sigma)$ монотонно уменьшается с ростом σ .

Хотя решение уравнения (10.2.31) относительно $\cos \beta$ при заданных σ и κ может быть найдено одним из регулярных методов, вследствие громоздкости выражений для корней практический интерес представляет получение простых приближенных решений этого уравнения, что осуществимо, когда известно точное решение этого уравнения при каких-либо значениях параметров κ и σ , путем разложения решения в ряд по малому параметру.

Поскольку, согласно (10.2.36), $\cos \beta_{\text{opt}}(A) \rightarrow 0$, $\cos \beta_{\text{opt}}(B^-) \rightarrow \sigma$ при $\kappa \rightarrow \infty$ и любом σ , получим, подставляя в (10.2.32) разложение $\cos \beta_{\text{opt}}$ в ряд по степеням $1/\kappa$, приближенное решение при $\kappa \gg 1$:

$$\pm \cos \beta_{\text{opt}}(A) = \frac{\sigma}{\kappa} \left[1 - \frac{3 - 2\sigma}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) \right], \quad (10.2.49)$$

$$\pm \cos \beta_{\text{opt}}(B^-) = \sigma \left[1 - \frac{1}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) \right]. \quad (10.2.50)$$

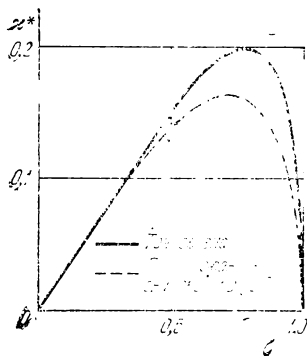


Рис. 10.2.6.

Из (10.2.34) следует, что случай $\kappa \gg 1$ соответствует неравенству

$$V_{\text{сф}} \gg V_{\text{кр}}, \quad (10.2.51)$$

которое на практике при полете к Луне (см. гл. XI) и планетам (см. гл. XII) может реализоваться при достаточно большой высоте орбиты ИС (малом $V_{\text{кр}}$).

Обозначая корни уравнения (10.2.32) при $\kappa = 0$ через $\cos \beta_{\text{opt}}^*$ (см. (10.2.37)), положим

$$\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \beta_{\text{opt}}^* \pm \Delta \cos \beta. \quad (10.2.52)$$

Ограничиваясь в правой части (10.2.32) членом порядка $(\Delta \cos \beta)^2$, получим приближенное решение при $\kappa \ll 1$:

$$\mp \Delta \cos \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} [(1 - \sqrt{1 - \sigma})(\sqrt{1 - \sigma} - 1 + \sigma)]^{1/2}. \quad (10.2.53)$$

Знак «—» перед $\Delta \cos \beta$ соответствует выходу на орбиту ИС, знак «+» — сходу с орбиты ИС. В правой части знак «+» соответствует маршруту А, знак «—» — маршруту В-. Указанная расстановка знаков непосредственно следует из проведенного выше анализа зависимости (10.2.32) (см. рис. 10.2.2).

Из (10.2.34) следует, что случай $\kappa \ll 1$ соответствует неравенству

$$V_{\text{кр}} \gg V_{\text{сф}}, \quad (10.2.54)$$

которое на практике при полете к Луне (см. гл. XI) и планетам (см. гл. XII) может реализоваться для низковысотных орбит ИС при достаточно малой скорости аппарата на сфере влияния планеты.

Получим теперь простую формулу, с достаточной степенью точности аппроксимирующую зависимость $\Delta V(\kappa, \sigma)$ для оптимального перехода по маршруту А во всем возможном диапазоне значений κ и σ . Для этого перепишем (10.2.29) в виде

$$\frac{\Delta V}{V_{\text{кр}}} = \sqrt{\kappa} \Delta \bar{V}(\kappa, \sigma), \quad (10.2.55)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V} &= \frac{\Delta V}{\sqrt{\mu/a}} = \\ &= \left[\frac{3}{\kappa} + 1 - 2 \left(\sqrt{\frac{1}{4\kappa} + \frac{1}{\kappa^2(1 \mp \cos \beta)}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right) \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.2.56)$$

При $\kappa \gg 1$ с учетом разложения (10.2.49) для маршрута A имеем

$$(1 \mp \cos \beta_{\text{opt}})^{-1} = 1 + \frac{\sigma}{\kappa} - \frac{3\sigma(1-\sigma)}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right). \quad (10.2.57)$$

Разложение функции $\Delta \bar{V}(\kappa, \sigma)$ (10.2.56) в ряд по степеням $1/\sqrt{\kappa}$, полученное с учетом (10.2.57), имеет вид

$$\Delta \bar{V}(\kappa, \sigma) = 1 - \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\kappa}} + \frac{3-\sigma}{2} \frac{1}{\kappa} + \frac{\sqrt{\sigma}(1-\sigma)}{2} \frac{1}{\kappa^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (10.2.58)$$

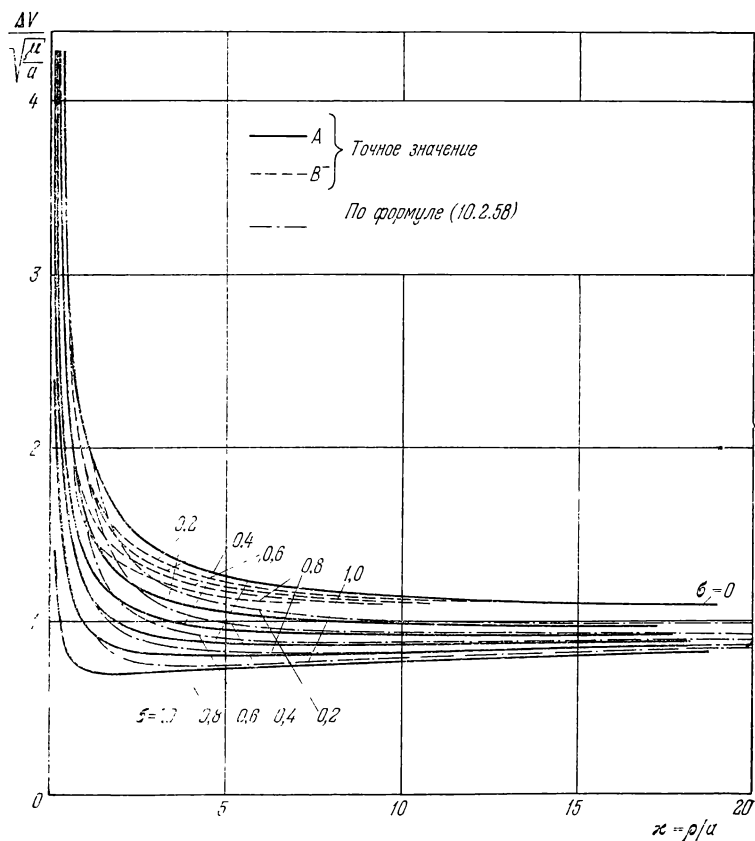


Рис. 10.2.7.

Графики суммы первых четырех членов ряда (10.2.58) и точного значения $\Delta \bar{V}(\kappa, \sigma)$ приведены на рис. 10.2.7.

Поскольку для маршрута A (см. (10.2.36), (10.2.41))

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \cos \beta_{\text{opt}} = 0, \quad (10.2.59)$$

из (10.2.29) с учетом (10.2.59) при $\kappa \gg 1$ получаем

$$\frac{\Delta V}{V_{\text{кр}}} \approx (3 + \kappa - 2\sqrt{\sigma\kappa})^{1/2}. \quad (10.2.60)$$

Заметим, что если правую часть (10.2.60) представить в виде

$$(3 + \kappa - 2\sqrt{\sigma\kappa})^{1/2} = \sqrt{\kappa} \left(1 - 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\kappa}} + \frac{3}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (10.2.61)$$

и скобку в правой части равенства (10.2.61) разложить в ряд по степеням $1/\sqrt{\kappa}$, то сумма первых членов этого разложения, включая член порядка $(\sqrt{\kappa})^{-2}$, совпадет с суммой первых членов разложения (10.2.58) после умножения последней, согласно (10.2.61), на $\sqrt{\kappa}$.

Функция (10.2.60) с достаточной точностью аппроксимирует строгую зависимость $\Delta V(\kappa, \sigma)$ при $\kappa < 7 \div 8$ и заметно хуже при $\kappa < 6 \div 7$ (см. рис. 10.2.7). Чтобы улучшить аппроксимацию точной зависимости в области умеренных значений $\kappa < 6 \div 7$, не ухудшая ее при $\kappa \gg 1$, рассмотрим вместо (10.2.60) функцию

$$\frac{\Delta \tilde{V}}{V_{\text{кр}}} = (3 + \kappa - 2\sqrt{2 + \kappa}\sqrt{\sigma})^{1/2}. \quad (10.2.62)$$

Раскладывая ее, аналогично (10.2.58), в ряд по степеням $(\sqrt{\kappa})^{-1}$, нетрудно убедиться, что соответствующие разложения совпадают вплоть до членов порядка $(\sqrt{\kappa})^{-3}$. Обе зависимости — (10.2.60) и (10.2.62) — совпадают с точной зависимостью $\Delta V(\kappa, \sigma)$ при $\sigma = 0$ (см. (10.2.46)). Важной особенностью, отличающей зависимость (10.2.62) от (10.2.60), является совпадение зависимости (10.2.62) с точной зависимостью $\Delta V(\kappa, \sigma)$ при $\sigma = 1$ (см. (10.2.44)). Последнее следует из тождества $(3 + \kappa - 2\sqrt{2 + \kappa})^{1/2} \equiv \sqrt{2 + \kappa} - 1$. Из всего сказанного получаем, что функция (10.2.62) достаточно хорошо аппроксимирует точную зависимость для оптимального импульса $\Delta V(\kappa, \sigma)$ как при $\kappa \gg 1$, так и при умеренных значениях κ . Приведенные на рис. 10.2.5 результаты расчетов подтверждают этот вывод: аппроксимация (10.2.62) оказывается достаточно точной при $\kappa \geq 1 \div 2$.

10.2.3. Оптимизация высоты и ориентации в пространстве круговой орбиты. Рассмотрим выражение (10.2.29) для маршрута A , в котором считаем заданными a (т. е. $V_{\text{сф}}$), σ и в которое вместо $\cos \beta$ подставлено его оптимальное значение $\cos \beta_{\text{opt}}(\kappa, \sigma)$. При этих условиях импульс перехода ΔV достигает абсолютного минимума. Считаем, что $\kappa = \frac{\rho}{a}$ меняется за счет ρ . В этом случае вмес-

то (10.2.29) для импульса целесообразно рассматривать соотношение (10.2.56). Зависимость (10.2.56) приведена на рис. 10.2.7. Определим оптимальную высоту круговой орбиты ρ_{opt} или, что то же самое, κ_{opt} , которая при заданных a , σ и $\cos \beta_{\text{opt}}(\kappa, \sigma)$ доставляет $\min \Delta V$ и $\min \Delta \bar{V}$. Из анализа производной $\frac{d\Delta \bar{V}^2}{d\kappa} = \frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial \kappa}$ с учетом зависимости $\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \beta_{\text{opt}}(\kappa, \sigma)$ и графика рис. 10.2.7 следует, что для маршрута A существует единственная оптимальная высота орбиты ИС $\kappa_{\text{opt}}(\sigma) = \frac{\rho_{\text{opt}}}{a}$, доставляющая $\min \Delta V$. Аналогично можно получить, что в случае маршрута B ΔV монотонно уменьшается с ростом κ или ρ (см. рис. 10.2.7).

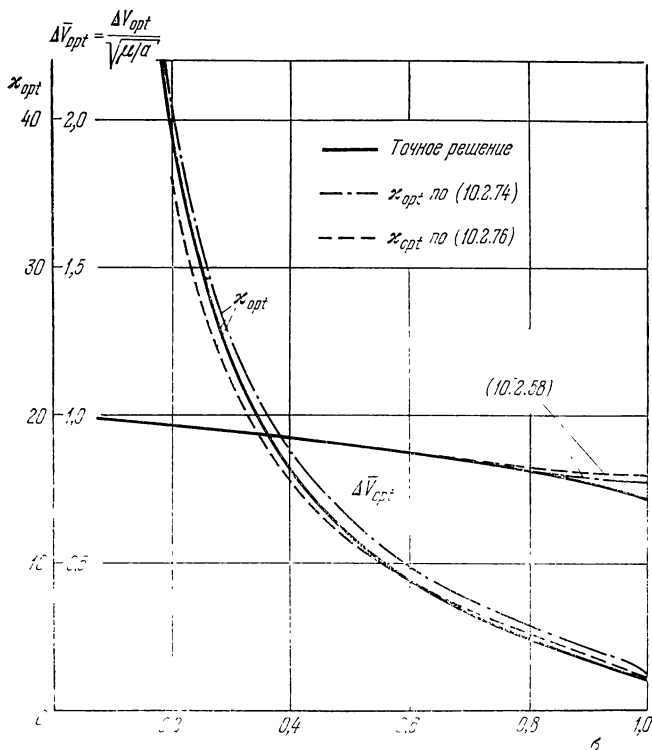


Рис. 10.2.8.

Точная зависимость $\kappa_{\text{opt}}(\sigma)$ может быть получена либо путем совместного решения уравнений (10.2.32) и $\frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial \kappa} = 0$, либо непосредственно путем численного определения $\min \Delta \bar{V}$ по (10.2.56) при условии (10.2.32). Она приведена на рис. 10.2.8. На этом же

рисунке показаны минимальные значения $\Delta \bar{V}(\sigma) = \Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}(\sigma), \sigma)$. При $\sigma = 1$ на основании (10.2.44) имеем

$$\Delta \bar{V} = \frac{\Delta V}{\sqrt{\mu/a}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa} + 1} - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}, \quad (10.2.63)$$

откуда

$$\kappa_{\text{opt}}(\sigma = 1) = 2. \quad (10.2.64)$$

Соответственно

$$\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}, \sigma = 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707. \quad (10.2.65)$$

При $\sigma = 0$ на основании (10.2.46)

$$\Delta \bar{V} = \frac{\Delta V}{\sqrt{\mu/a}} = \left(1 + \frac{3}{\kappa}\right)^{1/2}, \quad (10.2.66)$$

откуда

$$\kappa_{\text{opt}}(\sigma = 0) = \infty. \quad (10.2.67)$$

Найдем производную $\frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial \kappa}$ и при $\kappa \gg 1$ с учетом (10.2.57) представим ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial \kappa} = & -\frac{1}{\kappa^2} \left\{ 3 - \sqrt{\kappa} \left[1 + \frac{3}{\kappa} - \frac{5-3\sigma}{\kappa^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right) \right] \sqrt{\sigma} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^4}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.2.68)$$

Чтобы получить приближенное аналитическое выражение для κ_{opt} при $0 < \sigma < 1$, приравняем нулю сумму первых трех членов разложения выражения в фигурных скобках (10.2.68) по степеням $\sqrt{\kappa}$

$$3 - \sqrt{\kappa\sigma} \left(1 + \frac{3}{\kappa}\right) = 0, \quad (10.2.69)$$

откуда получим

$$\sqrt{\kappa_{\text{opt}}} = \frac{3 + \sqrt{9 - 12\sigma}}{2\sqrt{\sigma}}. \quad (10.2.70)$$

Соотношение (10.2.70) определяет κ_{opt} только до $\sigma = 3/4$. Чтобы избавиться от этого дефекта, заменим (10.2.69) соотношением

$$3 - \sqrt{\kappa\sigma} \left(1 + \frac{A}{\kappa}\right) = 0, \quad (10.2.71)$$

где должно быть $A < 3$, откуда

$$\sqrt{\kappa_{\text{opt}}} = \frac{3 + \sqrt{9 - 4A\sigma}}{2\sqrt{\sigma}}. \quad (10.2.72)$$

Величину A можно определить различным образом, добиваясь той или иной степени приближения аппроксимирующей зависимости (10.2.72) к точной. Если потребовать, чтобы величина $\kappa_{\text{opt}} (\sigma=1)$ из (10.2.72) совпадала с точным значением $\kappa_{\text{opt}} (\sigma=1) = 2$ (10.2.64), то

$$A = 3\sqrt{2} - 2 \approx 2,242. \quad (10.2.73)$$

Более удобная формула для κ_{opt} получается, если потребовать, чтобы соответствующая (10.2.72) зависимость $\sigma(\kappa_{\text{opt}})$ достигала максимума при $\sigma = 1$ (т. е. если взять наибольшее $A < 3$, при котором решение уравнения (10.2.71) существует при $\sigma \leq 1$ и не существует при $\sigma > 1$).

В этом случае

$$A = \frac{9}{4} \quad \text{и} \quad \kappa_{\text{opt}} = \frac{9}{4} \frac{(1 + \sqrt{1 - \sigma})^2}{\sigma}. \quad (10.2.74)$$

При $\sigma \ll 1$ как из (10.2.70), так и из (10.2.72) при любом A получим

$$\kappa_{\text{opt}} \approx \frac{9}{\sigma}. \quad (10.2.75)$$

Формула (10.2.74) при $\sigma \approx 1$ дает, как это следует из сравнения значения $\kappa_{\text{opt}} (\sigma = 1)$ по (10.2.74) с точным значением $\kappa_{\text{opt}} (\sigma = 1) = 2$ (10.2.64), несколько завышенные значения κ_{opt} . Этот недостаток устраним, взяв для $\sigma \approx 1$ с учетом (10.2.64) вместо (10.2.74) соотношение

$$\kappa_{\text{opt}} = 2 \frac{(1 + \sqrt{1 - \sigma})^2}{\sigma}. \quad (10.2.76)$$

Заметим, однако, что при $\sigma \ll 1$ и $\kappa_{\text{opt}} \gg 1$ формула (10.2.76) дает значения κ_{opt} менее точно, чем зависимость (10.2.74), что следует из сопоставления (10.2.74) и (10.2.76) с (10.2.70).

Вычисленные с помощью (10.2.74) и (10.2.76) значения $\kappa_{\text{opt}}(\sigma)$ и соответствующие значения $\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}(\sigma), \sigma)$ показаны на рис. 10.2.8. Видно хорошее совпадение точных и приближенных значений κ_{opt} (ошибка не превышает 20%) и очень хорошее совпадение (не менее чем в двух знаках после запятой) соответствующих величин $\Delta \bar{V}$. Последнее непосредственно следует из графика рис. 10.2.7: при $\kappa \approx \kappa_{\text{opt}}$ $\Delta \bar{V} \approx \text{const}$. Из приведенных данных видно, что формулой (10.2.76) целесообразно пользоваться при $\sigma \geq 0,5 \div 0,6$, а формулой (10.2.74) — при $\sigma \leq 0,4 \div 0,5$.

Для приближенного вычисления $\Delta V(\kappa_{\text{opt}}, \sigma)$ при $\kappa_{\text{opt}} \gg 1$ можно использовать сумму первых четырех членов разложения (10.2.58) функции $\Delta \bar{V}(\kappa, \sigma)$ по степеням $1/\sqrt{\kappa}$.

При $\sigma = 1$ и $\kappa_{\text{opt}}(\sigma = 1) = 2$ соответствующая сумма равна

$$\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}} = 2, \sigma = 1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,793. \quad (10.2.77)$$

Сопоставляя (10.2.77) с точным значением $\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}, \sigma = 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, приходим к выводу, что сумма первых четырех членов в (10.2.58) с хорошей степенью точности (ошибка не превышает 12%) определяет $\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}, \sigma)$ во всем диапазоне значений κ_{opt} . График соответствующих значений $\Delta \bar{V}(\kappa_{\text{opt}}, \sigma)$, полученных при использовании зависимостей (10.2.74) и (10.2.76), приведен на рис. 10.2.8.

Суммируя ΔV из (10.2.29) для случаев выхода на орбиту и схода с нее при неизменной высоте орбиты, получим для суммарной характеристической скорости ΔV выражение

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{a_B}} \Delta \bar{V}_B(\kappa_B, \sigma_B, \cos \beta_B) + \sqrt{\frac{\mu}{a_{\text{сх}}}} \Delta \bar{V}_{\text{сх}}(\kappa_{\text{сх}}, \sigma_{\text{сх}}, \cos \beta_{\text{сх}}), \quad (10.2.78)$$

где индексы «в» и «сх» означают выход и сход соответственно; $\kappa_B = \frac{\rho}{a_B}$, $\kappa_{\text{сх}} = \frac{\rho}{a_{\text{сх}}}$, $\cos \beta_B = \cos \beta_{\text{opt}}(\kappa_B, \sigma_B)$, $\cos \beta_{\text{сх}} = \cos \beta_{\text{opt}}(\kappa_{\text{сх}}, \sigma_{\text{сх}})$.

Требуется при заданных a_B , $a_{\text{сх}}$, σ_B , $\sigma_{\text{сх}}$ определить оптимальную высоту круговой орбиты ρ_{opt} или $\kappa_{B \text{ opt}}$, доставляющую ΔV из (10.2.78) минимум. Как и выше, можно доказать, что для маршрутов A выхода и схода существует $\kappa_{B \text{ opt}}$, а для маршрутов B^- — значение ΔV монотонно убывает с ростом κ_B . Поэтому далее рассматривается движение только по маршрутам A , доставляющим глобальный $\min \Delta V$.

Чтобы получить приближенное выражение для $\kappa_{B \text{ opt}}$, воспользуемся для $\frac{\partial (\Delta \bar{V}_B^2)}{\partial \kappa_B}$ и $\frac{\partial (\Delta \bar{V}_{\text{сх}}^2)}{\partial \kappa_{\text{сх}}}$, по аналогии с (10.2.68), (10.2.71), приближенным соотношением

$$\frac{\partial (\Delta \bar{V}^2)}{\partial \kappa} \approx -\frac{1}{\kappa^2} \left[3 - \sqrt{\kappa} V \bar{\sigma} \left(1 + \frac{B}{\kappa} \right) \right], \quad (10.2.79)$$

где B — одна и та же постоянная для выхода и схода.

Учитывая, что $\Delta \bar{V}(\kappa, \sigma = \text{const}) \approx \text{const}$ в широком диапазоне значений κ (см. рис. 10.2.7), получим из условия

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{d\kappa_B} &= \frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa_B} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_B}} \frac{1}{\Delta \bar{V}_B} \frac{\partial [\Delta \bar{V}_B^2]}{\partial \kappa_B} + \sqrt{\frac{\mu}{a_{\text{сх}}}} \frac{1}{\Delta \bar{V}_{\text{сх}}} \frac{\partial [\Delta \bar{V}_{\text{сх}}^2]}{\partial \kappa_{\text{сх}}} \frac{a_B}{a_{\text{сх}}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10.2.80)$$

используя (10.2.79), соотношение

$$\sqrt{\kappa_{\text{в opt}}} \approx \frac{3(\xi + \sqrt{a}) + \sqrt{9(\xi + \sqrt{a})^2 - 4B(\xi\sqrt{\sigma_{\text{в}}} + \sqrt{\sigma_{\text{сх}}})(\xi\sqrt{\sigma_{\text{в}}} + a\sqrt{\sigma_{\text{сх}}})}}{2(\xi\sqrt{\sigma_{\text{в}}} + \sqrt{\sigma_{\text{сх}}})}, \quad (10.2.81)$$

где

$$\bar{a} = \frac{a_{\text{сх}}}{a_{\text{в}}}, \quad \xi = \frac{\Delta\bar{V}_{\text{сх}}(\kappa_{\text{сх}}, \sigma_{\text{сх}})}{\Delta\bar{V}_{\text{в}}(\kappa_{\text{в}}, \sigma_{\text{в}})}. \quad (10.2.82)$$

Величину B определим по аналогии с A : потребуем, чтобы при $\sigma_{\text{в}} \leq 1$, $\sigma_{\text{сх}} \leq 1$ при наибольшем $B < 3$ существовало решение $\kappa_{\text{в opt}}$. Тогда из условия равенства нулю подкоренного выражения в (10.2.81) при $\sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{сх}} = 1$ получим

$$B = \frac{9}{4} \frac{(\xi + \sqrt{a})^2}{(1 + \xi)(\xi + a)}. \quad (10.2.83)$$

Видно, что в общем случае $B \neq A = 9/4$. Нетрудно проверить, что если положить $B = 9/4$, то при $\sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{сх}} = 1$ под корнем в (10.2.81) получим $-9\xi(1 - \sqrt{a})^2 < 0$, поэтому указанный выше выбор B рационален.

При

$$a_{\text{в}} = a_{\text{сх}}, \quad \sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{сх}} \quad (10.2.84)$$

имеем

$$\kappa_{\text{в}} = \kappa_{\text{сх}}, \quad \xi = 1, \quad B = A = \frac{9}{4} \quad (10.2.85)$$

и формула (10.2.81) переходит в (10.2.72).

Формулу (10.2.81) можно использовать для итеративного определения $\kappa_{\text{в opt}}$ по схеме

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^{(0)} \rightarrow (10.2.81) \rightarrow \kappa_{\text{в}}^{(0)} \rightarrow \\ &\rightarrow \Delta\bar{V}_{\text{в}}^{(0)}(\kappa_{\text{в}}^{(0)}, \sigma_{\text{в}}), \quad \Delta\bar{V}_{\text{сх}}^{(0)}\left(\kappa_{\text{сх}}^{(0)} = \frac{\kappa_{\text{в}}^{(0)}}{a}, \sigma_{\text{сх}}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow (10.2.82) \rightarrow \xi^{(1)} = \frac{\Delta\bar{V}_{\text{сх}}^{(0)}}{\Delta\bar{V}_{\text{в}}^{(0)}} \rightarrow (10.2.81) \rightarrow \kappa_{\text{в}}^{(1)} \dots \rightarrow \kappa_{\text{в opt}}. \end{aligned}$$

В начале итерационного процесса целесообразно положить $\xi^{(1)} = 1$ (см. рис. 10.2.7). Сравнение значений $\kappa_{\text{в opt}}$, определенных по формуле (10.2.81), с точными значениями $\kappa_{\text{в opt}}$ (рис. 10.2.9) и соответствующих им значений $\Delta\bar{V}$ (рис. 10.2.10) показывает, что

практически при всех $\bar{a}$, σ_v и σ_{cx} достаточно двух-трех итераций. Ввиду крайней пологости функции $\Delta\bar{V}(\kappa_v)$ для определения $\Delta\bar{V}(\kappa_{v \text{ опт}})$ с тремя первыми значащими цифрами достаточно посчитать эту функцию для значения $\kappa_{v \text{ опт}}$, вычисленного по (10.2.81) при $\xi = 1$; в этом случае наибольшее различие между $\kappa_{v \text{ опт}}$ и $\kappa_v(\xi = 1)$ не превышает 20%.

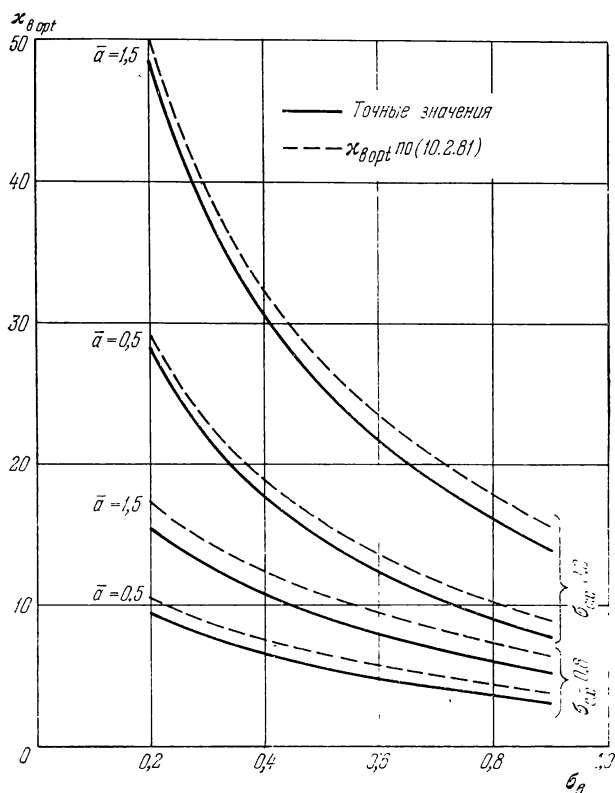


Рис. 10.2.9.

Рассмотрим некоторые задачи оптимизации ориентации круговой орбиты ИС в пространстве и продолжительности пребывания на ней. В (10.2.29) и (10.2.78) полагаем $\cos \beta = \cos \beta_{\text{опт}}(\kappa, \sigma)$. Величину κ считаем либо заданной, либо оптимальной. Также рассматриваем как заданные векторы скорости аппарата на сфере влияния в точках входа $V_{\text{сф}1}$ и выхода $V_{\text{сф}2}$ и величины a_v и a_{cx} . При указанных условиях $\frac{d\Delta V}{d\sigma} = \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} < 0$, $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma_v} < 0$ и $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma_{cx}} < 0$, т. е. ΔV уменьшается с ростом σ_v и σ_{cx} .

Пусть продолжительность пребывания на орбите ИС t_{12} мала. В этом случае можно полагать $t_{12} = 0$ и считать орбиту ИС в момент выхода на нее и схода с нее одной и той же. Если выбрать

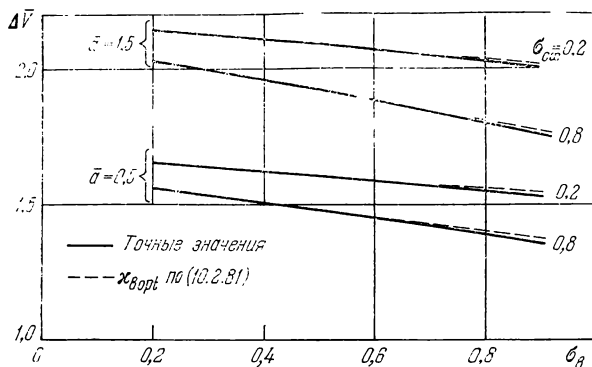


Рис. 10.2.10.

ориентацию орбиты ИС так, что

$$j_n = \frac{[V_{сф1}, V_{сф2}]}{|[V_{сф1}, V_{сф2}]|}, \quad (10.2.86)$$

то для такой орбиты имеем выход и сход в плоскости орбиты, $\sigma_v = \sigma_{сх} = 1$ и реализуется $\min \min \Delta V$. $\{\sigma_v, \sigma_{сх}\}$

Если продолжительность пребывания t_{12} на орбите ИС достаточно велика, то за счет перемещения планеты по орбите и эволюции орбиты ИС ее расположение относительно мгновенной системы осей $x_n y_n z_n$ и форма существенно меняются. Предположим, что эволюцией орбиты можно пренебречь, т. е. что орбита остается круговой, расположение ее относительно системы осей $x_n y_n z_n$ меняется только за счет перемещения планеты по орбите на угол ψ (рис. 10.2.11).

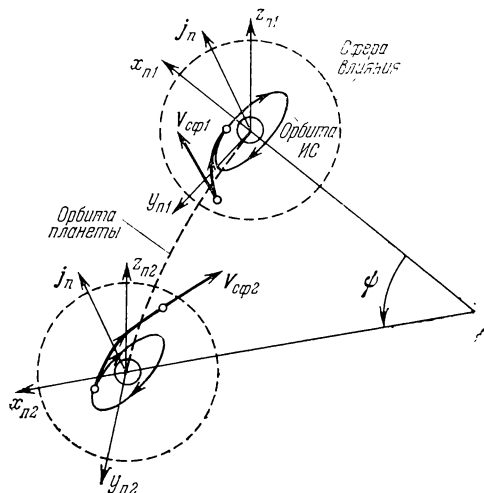


Рис. 10.2.11.

Если величина t_{12} задана, то, зная $V_{сф1}$ и $V_{сф2}$, в соответствии с (10.2.86) для любой величины t_{12} можно выбрать ориентацию орбиты ИС, обеспечивающую плоский выход и сход.

Пусть ориентация орбиты ИС в момент выхода на нее t_1 в системе координат $x_{n1}y_{n1}z_{n1}$ задана ортом $\mathbf{j}_n(j_{nx}, j_{ny}, j_{nz})$ (см. рис. 10.2.11). Определим продолжительность пребывания на орбите ИС t_{12} , обеспечивающую $\min_{\{t_{12}\}} \Delta V$. Пусть вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}_2}^0$ в системе координат

$x_{n2}y_{n2}z_{n2}$ в момент схода с орбиты ИС t_2 имеет компоненты $\mathbf{V}_{\text{сф}}^0\{f, g, h\}$. Тогда в момент схода

$$\sigma_{\text{сх}} = 1 - n_2^2, \quad (10.2.87)$$

$$n_2 = (\mathbf{V}_{\text{сф}_2}^0, \mathbf{j}_n) = b + c \cos \psi + d \sin \psi, \quad (10.2.88)$$

где

$$b = j_{nz}h, \quad c = j_{nx}f + j_{ny}g, \quad d = j_{ny}f - j_{nx}g. \quad (10.2.89)$$

Из (10.2.87) следует, что $\max \sigma_{\text{сх}} \Rightarrow \min |n_2|$. Если $j_{nz}^2 + h^2 < 1$, то $\min |n_2| = 0$ и существуют два оптимальных угла $\psi_{\text{опт}}$, определяемых из соотношения

$$\sin(\psi_{\text{опт}} + \chi) = -\frac{b}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad (10.2.90)$$

где

$$\sin \chi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \cos \chi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}. \quad (10.2.91)$$

Если же $j_{nz}^2 + h^2 \geq 1$, то $\min |n_2|$ достигается для $b > 0$ при $\psi_{\text{опт}} = \frac{3}{2}\pi - \chi$, для $b < 0$ при $\psi_{\text{опт}} = \frac{\pi}{2} - \chi$.

Аналогично может быть решена задача об оптимальной продолжительности пребывания на орбите ИС при заданной ориентации орбиты в момент схода с нее.

10.2.4. Эллиптическая орбита ИС. Перепишем соотношение (10.2.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^2}{\mu/p_0} = & 3 + 4e_0 \cos \vartheta + \kappa + e_0^2 - 2e_0 \sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{\frac{p_0}{p}} - \\ & - \frac{p_0}{\rho} \Gamma |(\rho^0, \mathbf{V}_{\text{сф}}^0, \mathbf{j}_n)|, \end{aligned} \quad (10.2.92)$$

где

$$\Gamma = \sqrt{\kappa + \frac{4p_0}{\rho(1 \mp \cos \beta)}} \pm \sqrt{\kappa}. \quad (10.2.93)$$

Как было показано в разделе 10.2.1, при заданных параметрах $\kappa = p_0/a$, e_0 , σ , l и m всегда имеет смысл и решение задача об оптимальном выходе на орбиту ИС или сходе с орбиты ИС, т. е. об отыскании такой точки на орбите ИС, которая доставляет ΔV

минимум. Уравнение для определения $\cos \beta_{\text{opt}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\Delta V^2}{\mu/p_0} \right)}{\partial \cos \beta} = e_0 \left[4 \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \cos \beta} - 2 \frac{\partial (\sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{p_0/p})}{\partial \cos \beta} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \cos \beta} \Gamma \sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta} - \cos \vartheta \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Gamma \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta}} \right) \right] - \frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta} + \Gamma \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta}} = 0. \end{aligned} \quad (10.2.94)$$

Входящие в (10.2.94) производные имеют вид:

$$1) \quad \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \cos \beta} = \mp \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta}} \quad (\text{см. (10.2.26), (10.2.27)}); \quad (10.2.95)$$

$$2) \quad \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial \cos \beta} = \pm \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta}} \quad (\text{см. (10.2.26), (10.2.27)}); \quad (10.2.96)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} = \\ = 2 \frac{\pm \frac{1}{(1 \mp \cos \beta)^2} + e_0 \left[\frac{\mp \sin \vartheta}{(1 \mp \cos \beta) \sqrt{\sigma^2 - \cos^2 \beta}} \pm \frac{\cos \vartheta}{(1 \mp \cos \beta)^2} \right]}{\sqrt{\kappa + \frac{4p_0}{\rho(1 \mp \cos \beta)}}}. \end{aligned} \quad (10.2.97)$$

В приведенных выражениях знаки «—» и «+» перед $\sin \vartheta$ соответствуют маршрутам A , B^+ и B^- , а остальные знаки «+» и «—» соответствуют выходу и сходу;

$$4) \quad \frac{\partial (e \sin \eta)}{\partial \cos \beta} = \frac{e \frac{\partial e}{\partial \cos \beta} - \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial (p/\rho)}{\partial \cos \beta}}{e \sin \eta} \quad (\text{см. (10.2.13)}); \quad (10.2.98)$$

$$5) \quad \frac{\partial \sqrt{p_0/p}}{\partial \cos \beta} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \frac{\partial}{\partial \cos \beta} \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} - \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} \frac{\rho}{p} \frac{\partial}{\partial \cos \beta} \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (\text{см. (10.2.12)}). \quad (10.2.99)$$

Полученное выражение (10.2.94) сложно, так что определение $\cos \beta_{\text{opt}}$ из него возможно только в случае круговой орбиты (см. раздел 10.2.2). Что касается численного определения $\cos \beta_{\text{opt}}$, то здесь предпочтительнее непосредственно искать $\min_{\{\cos \beta\}} \Delta V^2$, используя (10.2.92).

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением орбит ИС малой эллиптичности:

$$e_0 \ll 1. \quad (10.2.100)$$

Для таких орбит, считая известным решение $\cos \beta_{\text{opt}}$ при $e_0 = 0$ (см. раздел 10.2.2), можно получить решение уравнения (10.2.94)

в виде ряда по степеням e_0 . Поскольку коэффициенты разложения достаточно громоздки и в общем случае могут быть найдены лишь численно, ограничимся в этом ряду лишь первым членом и рассмотрим два случая:

(1) σ произвольно;

(2) $\sigma \approx 1$, плоскость гиперболы близка к плоскости орбиты ИС.

Как было показано в разделе 10.2.2, при $e_0 = 0$ абсолютно оптимальный переход между сферой влияния и орбитой ИС происходит по маршруту A . В случае же эллиптической орбиты ИС соответствующий оптимальный переход, особенно при $\sigma \approx 1$, может происходить по маршрутам A , B^+ , рассмотрением которых и ограничимся в дальнейшем.

Приближенное определение оптимальной точки выхода на орбиту ИС или схода с нее при $e_0 \ll 1$ и произвольном σ . При $e_0 = 0$ имеем рассмотренное в разделе 10.2.2 соотношение

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} - \Gamma \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}} \right) \Big|_{e_0=0} = 0. \quad (10.2.101)$$

Полагаем, что в случае $e_0 \neq 0$, $e_0 \ll 1$

$$\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \beta_{\text{opt}}|_{e_0=0} + \Delta \cos \beta. \quad (10.2.102)$$

Подставляя (10.2.102) в (10.2.94) с учетом (10.2.95), (10.2.101), получим с точностью до членов порядка e_0^2 , $(\Delta \cos \beta)^2$

$$\Delta \cos \beta = f_{e_0}(\chi, \sigma, \tau) e_0, \quad (10.2.103)$$

где

$$\begin{aligned} f_{e_0}(\chi, \sigma, \tau) = & \left[-4 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}} - 2 \frac{\partial (\sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{p_0/p})}{\partial \cos \beta} + \right. \\ & + \Gamma \sin \vartheta - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial e_0 \partial \cos \beta} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} + \\ & + \frac{\partial \Gamma}{\partial e_0} \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}} \Big] \Big/ \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \cos^2 \beta} \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}} - \Gamma \frac{\sigma}{(\sigma - \cos^2 \beta)^{3/2}} \right]. \quad (10.2.104) \end{aligned}$$

Функция $f_{e_0}(\chi, \sigma, \tau)$ вычисляется при $e_0 = 0$ и $\cos \beta_{\text{opt}}(\chi, \sigma, e_0=0)$, взятом в соответствии с (10.2.31). Исходная гипербола, относительно которой вычисляются приведенные выше соотношения, всегда принадлежит маршруту A .

Для дальнейшего упрощения заметим, что (как следует из вычисления производных Γ) $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ в соотношение (10.2.104) входят только в числитель и линейно. Учитывая, что соотношения

(10.2.26) и (10.2.27) для $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ не зависят от e_0 и линейно зависят от l и m , можно (10.2.103) переписать, с учетом (10.2.26), (10.2.27), в виде

$$\Delta \cos \beta = \left(f_l(\kappa, \sigma) \frac{l}{\sqrt{\sigma}} \pm f_m(\kappa, \sigma) \frac{m}{\sqrt{\sigma}} \right) \Big|_{e_0=0} e_0. \quad (10.2.105)$$

Входящие в формулу (10.2.105) l и m — направляющие косинусы вектора $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ относительно осей $\mathbf{j}_\pi$ и $\mathbf{j}_\nu$ соответственно. Как будет показано ниже (см. следующий раздел), при переходе от оптимального выхода к оптимальному сходу l меняет знак, а m не меняет. Поскольку при этом $\cos \beta_{\text{opt}}$ и $\Delta \cos \beta_{\text{opt}}$ меняют знаки (см. конец раздела 10.1.2), сказанное объясняет двойной знак перед $f_m(\kappa, \sigma)$ в (10.2.105).

Графики функций $f_l(\kappa, \sigma)$ и $f_m(\kappa, \sigma)$, выражения для которых достаточно громоздки и здесь не приводятся, для маршрута A приведены на рис. 10.2.12.

Приближенное определение оптимальной точки выхода на орбиту ИС или схода с нее при $e_0 \ll 1$ и $\sigma \approx 1$. При $e_0 = 0$, $\sigma = 1$ оптимальный переход совершается в перигеиде гиперболы (см. (10.2.43)). Полагая

$$\left. \begin{aligned} e_0 \ll 1, \quad \sigma = 1 - \Delta\sigma, \quad \Delta\sigma \ll 1, \\ \cos \beta = \cos \beta_{\text{opt}}(e_0 = 0, \sigma = 1) + \Delta \cos \beta, \quad \Delta \cos \beta \ll 1, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.106)$$

получим из (10.2.94) с учетом (10.2.101) с точностью до членов второго порядка малости

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \cos^2 \beta} \sin \beta - 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \operatorname{ctg} \beta - \Gamma \frac{1}{\sin^3 \beta} \right) \Big|_{e_0=0, \sigma=1} \Delta \cos \beta + \\ & + e_0 \left[-4 \frac{\sin \vartheta}{\sin \beta} - 2 \frac{\partial (\sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{p_0/p})}{\partial \cos \beta} + \Gamma \sin \vartheta - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial e_0 \partial \cos \beta} \sin \beta + \frac{\partial \Gamma}{\partial e_0} \operatorname{ctg} \beta \right] \Big|_{e_0=0, \sigma=1} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \cos \beta} \frac{1}{\sin \beta} + \Gamma \frac{\cos \beta}{\sin^3 \beta} \right) \Big|_{e_0=0, \sigma=1} \Delta \sigma = 0. \quad (10.2.107) \end{aligned}$$

В коэффициент при $\Delta \sigma$ не вошли производные $\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \sigma \partial \cos \beta}$, которые, как это следует из (10.2.93), (10.2.97), (10.2.26) и (10.2.27), имеют множителем e_0 и при $e_0 = 0$ обращаются в нуль.

Вычисляя все входящие в (10.2.107) величины при $e_0 = 0$, $\sigma = 1$, получим для маршрутов A , B^+

$$\begin{aligned} \Delta \cos \beta = & \mp \frac{2 + \kappa}{\kappa(1 + \kappa)} \Delta \sigma - e_0 \left[\mp \cos \vartheta \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} + \right. \\ & \left. + \sin \vartheta \frac{(2 + \kappa)^{5/2} 2 \sqrt{\kappa}}{(1 + \kappa)^3 (2 + \kappa)} (1 - \sqrt{2 + \kappa}) \right]. \quad (10.2.108) \end{aligned}$$

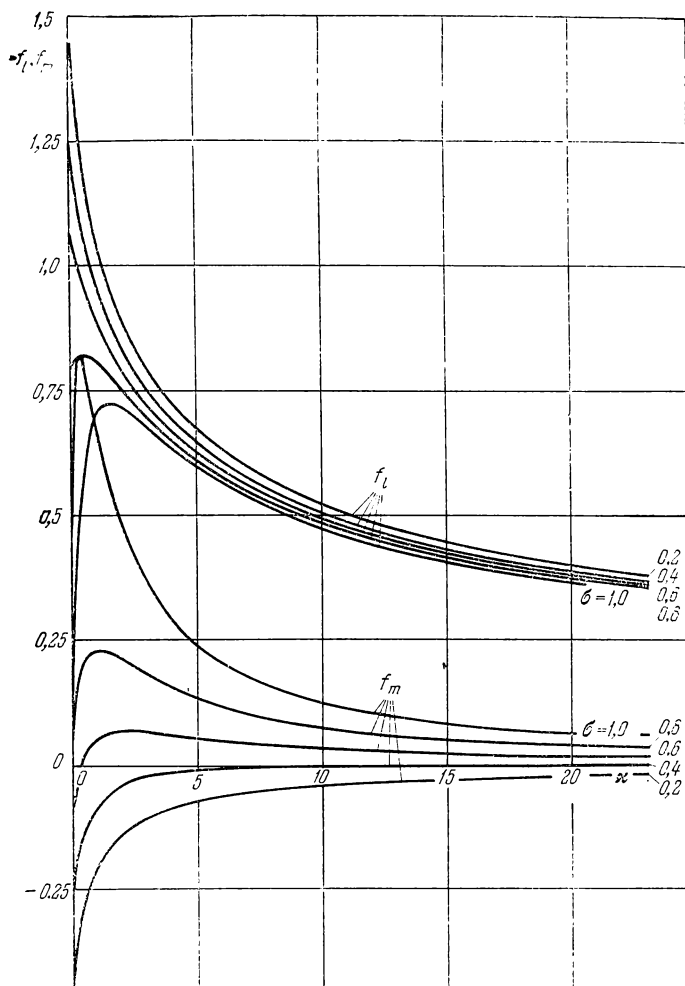


Рис. 10.2.12.

В этом выражении верхний знак соответствует выходу на орбиту ИС, а нижний — сходу с орбиты. Поскольку (см. следующий раздел) $\sin \vartheta$ при этом меняет знак, $\Delta \cos \beta_{\text{opt}}$ при переходе от выхода к сходу, как и должно быть, также меняет знак.

При $\sigma = 1$ из (10.2.21) следует:

$$\sin \tau = l, \quad \cos \tau = m, \quad l^2 + m^2 = 1, \quad (10.2.109)$$

поэтому на основании (10.2.26) и (10.2.27) получаем

$$\cos \vartheta = m \frac{\sqrt{\kappa(2+\kappa)}}{1+\kappa} \pm l \frac{1}{1+\kappa} \quad (10.2.110)$$

и

$$\sin \vartheta = \pm m \frac{1}{1+\kappa} - l \frac{\sqrt{\kappa(2+\kappa)}}{1+\kappa}. \quad (10.2.111)$$

Подставляя (10.2.110), (10.2.111) в (10.2.108), окончательно имеем

$$\Delta \cos \beta = \mp f_{\sigma} \Delta \sigma + [f_l(\kappa) \pm f_m(\kappa)] e_0, \quad (10.2.112)$$

где

$$f_{\sigma} = \frac{2+\kappa}{\kappa(1+\kappa)}, \quad (10.2.113)$$

$$f_l(\kappa) = \frac{\kappa}{(1+\kappa)^3} \left[1 - 2 \frac{(2+\kappa)^2}{1+\kappa} (\sqrt{2+\kappa} - 1) \right], \quad (10.2.114)$$

$$f_m(\kappa) = \frac{\sqrt{(2+\kappa)\kappa}}{(1+\kappa)^3} \left[\kappa + 2 \frac{2+\kappa}{1+\kappa} (\sqrt{2+\kappa} - 1) \right]. \quad (10.2.115)$$

Функции $f_l(\kappa)$, $f_m(\kappa)$ являются предельными соответственно для $f_l(\kappa, \sigma)$, $f_m(\kappa, \sigma)$, входящих в формулу (10.2.105), при $\sigma \rightarrow 1$.

Двойные знаки в (10.2.112) объясняются так же, как и в случае (10.2.105). Графики функций $f_l(\kappa)$ и $f_m(\kappa)$ приведены на рис. 10.2.12.

Поскольку при $e_0 = 0$, $\sigma = 1$ точка выхода на орбиту ИС или схода с нее является перицентром гиперболы, при $e_0 \neq 0$, $\sigma \neq 1$ возможно получение как не содержащих перицентр (A), так и проходящих через него (B^+) маршрутов оптимального перехода сфера влияния — орбита ИС.

При $e_0 = 0$ из (10.2.112) получаем поправку к величине $\cos \beta_{\text{opt}}$ (10.2.43), обусловленную малой некомпланарностью вектора $V_{\text{сф}}$ относительно плоскости орбиты ИС.

Для оценки точности приближенных зависимостей (10.2.105) и (10.2.112) было проведено сравнение точных оптимальных значений $\cos \beta$ и $\frac{\Delta V}{\sqrt{\mu/p_0}}$, полученных численно из (10.2.92), с приближенными значениями, полученными с использованием (10.2.105) или (10.2.112).

Расчеты показали, что при относительной точности $\left| \frac{\Delta V_{\text{точн}} - \Delta V_{\text{приб}}}{\Delta V_{\text{точн}}} \right| \leq 1\%$ формулой (10.2.105) можно пользоваться до значений $e_0 = 0,4 \div 0,6$ при $\kappa \geq 1,5 \div 2,0$ и любых σ . При той же точности формулой (10.2.112) можно пользоваться для $\kappa \approx 1$ до $\sigma \approx 0,8 \div 0,6$ и $e_0 = 0,2 \div 0,25$, для $\kappa \gg 1$ — до $\sigma = 0,4$ и $e_0 = 0,4 \div 0,6$. На рис. 10.2.13 и 10.2.14 сравниваются точные и приближенные значения $\cos \beta_{\text{opt}}$ (для выхода на орбиту) и $\frac{\Delta V}{\sqrt{\mu/p_0}}$.

Результаты исследования показывают, что линейризованными соотношениями (10.2.105) и (10.2.112) можно пользоваться и при

больших e_0 . При оптимальных переходах между сферой влияния и орбитой ИС импульс перехода для семейства орбит с фиксированным фокальным параметром p_0 слабо зависит от e_0 . Как показал численный анализ, это в значительной степени обусловлено взаимной компенсацией при изменении e_0 второго и последнего члена в (10.2.10). Отмеченная особенность позволяет при оценках потребной энергетики переходов сфера влияния — орбита ИС использовать приведенное в разделе 10.2.2 простое аналитическое

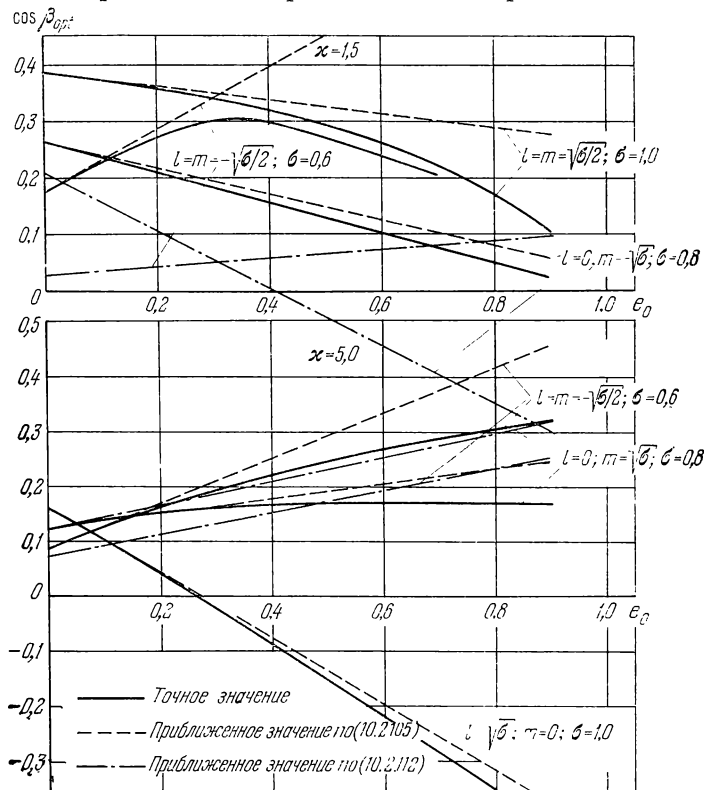


Рис. 10.2.13.

решение для круговых орбит ИС. При этом, однако, следует иметь в виду, что полученные результаты соответствуют абсолютно оптимальным перелетам лишь при $e_0 \ll 1$. При $e_0 < 1$ рассмотренные выше решения получаются методом непрерывного продолжения по параметру e_0 и могут, вообще говоря, давать лишь локально оптимальное решение (см. В. А. Егоров [6]).

10.2.5. Инвариантность и симметрия планетоцентрического движения. При совместном анализе внутренней и внешней задач

в рамках ММСВ (см. раздел 1.1.5) важное практическое значение имеет выделение таких классов преобразований траектории аппарата во внешней задаче, при которых часть параметров планетоцентрического движения остается неизменной, а другая часть может быть найдена простым пересчетом из известных исходных значений.

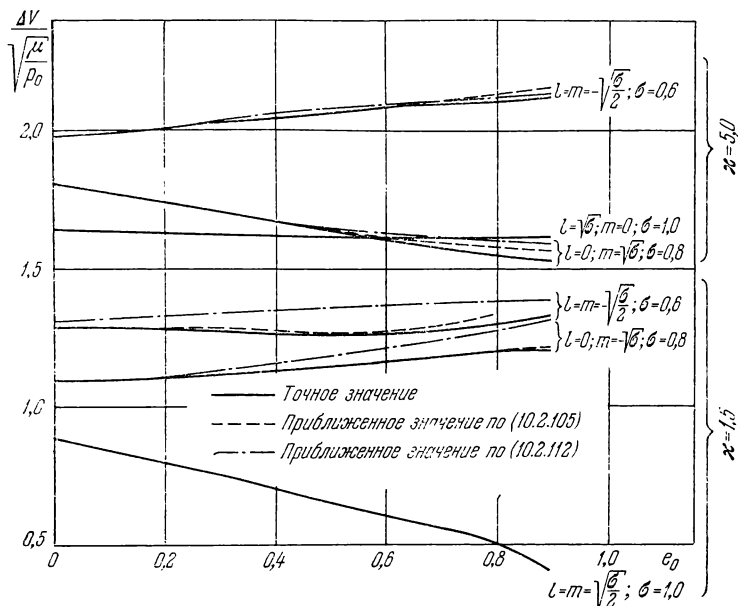


Рис. 10.2.14.

Предположим, что планета движется по круговой орбите (см. гл. XI и XII). Проектируя равенство (10.1.1) на оси основной планетоцентрической системы координат $x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}$ (рис. 10.1.1), получим

$$\mathbf{V}_{\text{сф}} = \{V_{x\text{п}}, V_{y\text{п}} - U, V_{z\text{п}}\}. \quad (10.2.116)$$

Рассмотрим следующие преобразования траектории внешней задачи:

1°. Замену маршрута, не содержащего апоцентра, на маршрут, включающий апоцентр, или наоборот при неизменных параметрах кеплеровой дуги.

2°. Симметричное отображение траектории относительно плоскости движения планеты.

Первое преобразование меняет знак компоненты $V_{x\text{п}}$, а второе — знак $V_{z\text{п}}$, модуль же вектора $|\mathbf{V}_{\text{сф}}|$ и остальные компоненты (в каждом случае) остаются неизменными.

Специфические особенности и простота указанных преобразований позволяют получить решение следующей общей задачи: как следует видоизменить ориентацию орбиты ИС и гиперболы перехода при указанных преобразованиях вектора $V_{сф}$, чтобы относительно новой орбиты ИС планетоцентрическое движение аппарата было таким же, как и относительно исходных вектора $V_{сф}$ и орбиты ИС?

Таковыми же простыми преобразованиями, хотя непосредственно и не связанными с внешней задачей, являются:

3°. Изменение знака вектора $V_{сф}$, имеющее место при переходе от задачи выхода на орбиту ИС к задаче схода с орбиты ИС или, что то же самое, при изменении направления движения по орбите ИС (см. ниже).

4°. Симметричное отображение вектора $V_{сф}$ относительно плоскости орбиты ИС.

Применительно к этим преобразованиям также может быть поставлена сформулированная выше задача.

Как следует из постановки задачи и как показано ниже, ее решение отыскивается в виде достаточно простого геометрического преобразования ориентации в пространстве орбиты ИС и гиперболы перехода, обладающего определенной симметрией. При этом все скалярные параметры, характеризующие движение аппарата в плоскости гиперболы перехода и орбиты ИС, остаются инвариантными.

Замена траекторий во внешней задаче без апоцентра на траекторию с апоцентром или наоборот (преобразование 1°). В этом случае в векторе $V_{сф}$ (10.2.116) меняет знак первая компонента V_{xp} . Из (10.1.19) следует, что для неизменности параметров гиперболы не должен меняться $\cos \beta$; для этого первая компонента вектора ρ^0 должна изменить знак. Но тогда из (10.1.2) — (10.1.6), вследствие неизменности μ и ν , следует, что матрица $\mathfrak{M}$ (10.1.44) направляющих косинусов ортов i_x, i_y, i_z относительно системы осей $x_p y_p z_p$ преобразуется следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ - & - & + \\ + & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{vmatrix}. \quad (10.2.117)$$

Здесь и в дальнейшем через «+» обозначены неизменные элементы матриц или векторов, а через «—» — элементы, меняющие знак.

Из (10.2.3) следует, что для неизменности $\cos \gamma$ вектор j_n в осях $x_p y_p z_p$ должен иметь вид

$$j_n = (+ - -). \quad (10.2.118)$$

В качестве вектора $\mathbf{j}_\pi$ для круговой орбиты ИС можно взять любой единичный вектор, удовлетворяющий равенству $(\mathbf{j}_\pi, \mathbf{j}_\pi) = 0$, например, в осях $x_\pi y_\pi z_\pi$

$$\mathbf{j}_\pi = (- \quad + \quad +) \quad (10.2.119)$$

или

$$\mathbf{j}_\pi = (+ \quad - \quad -). \quad (10.2.120)$$

Орт $\mathbf{j}_y = [\mathbf{j}_\pi, \mathbf{j}_n]$ в осях $x_\pi y_\pi z_\pi$ имеет вид:

$$\text{для (10.2.119)} \quad \mathbf{j}_y = (- \quad + \quad +); \quad (10.2.121)$$

$$\text{для (10.2.120)} \quad \mathbf{j}_y = (+ \quad - \quad -). \quad (10.2.122)$$

Новый вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}}^0$ в осях $\mathbf{j}_\pi \mathbf{j}_y \mathbf{j}_n$ имеет при этом следующие компоненты:

для (10.2.118), (10.2.119), (10.2.121)

$$\mathbf{V}_{\text{сф}}^0 = (+ \quad + \quad -); \quad (10.2.123)$$

для (10.2.118), (10.2.120), (10.2.122)

$$\mathbf{V}_{\text{сф}}^0 = (- \quad - \quad -). \quad (10.2.124)$$

В случае тройки ортов (10.2.118), (10.2.119), (10.2.121) углы ϑ и τ относительно новой орбиты ИС, как это следует из (10.2.24), (10.2.26), (10.2.27), не изменяются; в случае же тройки ортов (10.2.118), (10.2.120), (10.2.122) ϑ и τ переходят соответственно в $\pi + \vartheta$ и $\pi + \tau$ (что ясно из сравнения (10.2.119) и (10.2.120), так как соответствующие векторы $\mathbf{j}_\pi$ отличаются знаком). Очевидно, что произвол в выборе направления $\mathbf{j}_\pi$ сказывается лишь на изменении начала отсчета ϑ и τ .

В случае эллиптической орбиты ИС для инвариантности импульса ΔV (см. (10.2.10)) величины $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta \sin \eta$ должны оставаться неизменными. Поскольку параметры планетоцентрической гиперболы остаются неизменными, не должны меняться $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$. Но указанному условию удовлетворяют тройка ортов $\mathbf{j}_n$ (10.2.118), $\mathbf{j}_\pi$ (10.2.119) и $\mathbf{j}_y$ (10.2.121) с вектором $\mathbf{V}_{\text{сф}}^0$ (10.2.123). Поэтому в дальнейшем для преобразования 1° будем рассматривать указанную тройку ортов $\mathbf{j}_\pi$, $\mathbf{j}_y$, $\mathbf{j}_n$.

При указанной замене ортов $\mathbf{i}_\pi$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_n$ и $\mathbf{j}_\pi$, $\mathbf{j}_y$, $\mathbf{j}_n$ все параметры, характеризующие движение аппарата в плоскости планетоцентрической гиперболы, углы ϑ и τ остаются неизменными. У векторов $\mathbf{i}_\pi$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{j}_\pi$, $\mathbf{j}_y$ и планетоцентрических векторов ρ_1 и ρ_2 , проведенных в точку входа или выхода на сфере влияния (ρ_1) и в точку выхода или схода на орбите ИС (ρ_2) соответственно, у которых меняется только первая компонента, планетоцентрическая долгота λ заменяется на $\pi - \lambda$. У векторов $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{j}_n$ планетоцентрическая долгота λ и широта φ заменяются соответственно на $2\pi - \lambda$ и $-\varphi$.

Симметричное отображение траектории во внешней задаче относительно плоскости орбиты планеты (преобразование 2°). В этом случае у вектора $V_{сф}$ (10.2.116) меняет знак V_{zn} . Проведя необходимые рассуждения, получаем, что для неизменности планетоцентрического движения аппарата относительно новой орбиты ИС и новой ориентации планетоцентрической гиперболы нужно осуществить следующие изменения знаков относительно системы координат $x_n y_n z_n$: в векторах ρ_i , $i = 1, 2$, проведенных в точки выхода или схода на орбите ИС или в точки входа или выхода на сфере влияния планеты,

$$\rho_i = (+ + -), \quad i = 1, 2; \quad (10.2.125)$$

в матрице $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} i_x & i_y & i_n \\ + & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}; \quad (10.2.126)$$

в орте j_n

$$j_n = (- - +). \quad (10.2.127)$$

Отметим, что, как и выше, выбор орта j_n для круговой орбиты ИС неоднозначен, он может быть любым, удовлетворяющим условию

$$(j_n, j_n) = 0. \quad (10.2.128)$$

Учет эллиптичности орбиты ИС делает, как и выше, выбор орта j_n однозначным:

$$j_n = (+ + -), \quad (10.2.129)$$

и соответственно

$$j_y = (+ + -). \quad (10.2.130)$$

Новый вектор $V_{сф}^0$ в указанных осях $j_n j_y j_n$ равен

$$V_{сф}^0 = (+ + -). \quad (10.2.131)$$

При указанной замене ортов i_n , i_y , i_n и j_n , j_y , j_n все параметры, характеризующие движение аппарата в плоскости планетоцентрической гиперболы, и углы ϑ и τ остаются неизменными. У векторов i_n , i_y , j_n , j_y и планетоцентрических векторов ρ_i , $i = 1, 2$, проведенных в точку входа или выхода на сфере влияния планеты ($i = 1$) и в точку выхода или схода на орбите ИС ($i = 2$), планетоцентрическая широта φ заменяется на $-\varphi$; у векторов i_n , j_n планетоцентрическая долгота λ заменяется на $\pi + \lambda$.

Изменение направления движения по орбите ИС или переход от выхода на орбиту ИС к сходу и наоборот (преобразование 3°). При изменении направления движения по орбите ИС $\mathbf{j}_n$ заменяется на $-\mathbf{j}_n$. Для неизменности $\cos \gamma$ (10.2.3) при этом необходима замена $\mathbf{i}_n$ на $-\mathbf{i}_n$. Такое изменение $\mathbf{i}_n$ может быть получено, как это следует из (10.1.2), либо заменой ρ^0 на $-\rho^0$, либо $\mathbf{v}_{\text{сф}}^0$ на $-\mathbf{v}_{\text{сф}}^0$. В любом из этих случаев $\cos \beta = (\rho^0, \mathbf{v}_{\text{сф}}^0)$ меняет знак. Но, поскольку всегда (см. раздел 10.2.2) $\cos \beta_{\text{орт}} > 0$ в случае выхода на орбиту ИС, $\cos \beta_{\text{орт}} < 0$ в случае схода с орбиты ИС, для сохранения параметров оптимальной гиперболы приемлем только вариант замены $\text{sign } \mathbf{v}_{\text{сф}}$, т. е. замены выхода на орбиту ИС сходом с нее или наоборот.

В рассматриваемом случае, так же как и выше, можно показать, что для сохранения неизменными параметров планетоцентрической гиперболы при переходе от выхода на орбиту ИС к сходу с нее или наоборот должно иметь место следующее изменение знаков: в матрице $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_\pi & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_n \\ + & - & - \\ + & - & - \\ + & - & - \end{pmatrix} \begin{matrix} x_\pi \\ y_\pi \\ z_\pi \end{matrix} \quad (10.2.132)$$

(неизменность $\mathbf{i}_\pi$ следует из замечания в конце раздела 10.1.2); в ортах $\mathbf{j}_\pi, \mathbf{j}_y, \mathbf{j}_n$ с учетом эллиптичности орбиты ИС

$$\mathbf{j}_\pi = (+ + +), \quad \mathbf{j}_y = (- - -), \quad \mathbf{j}_n = (- - -). \quad (10.2.133)$$

Новый вектор $\mathbf{v}_{\text{сф}}^0$ в осях $\mathbf{j}_\pi, \mathbf{j}_y, \mathbf{j}_n$ (10.2.133) имеет компоненты

$$\mathbf{v}_{\text{сф}}^0 = (- + +). \quad (10.2.134)$$

При указанной замене ортов $\mathbf{i}_\pi, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_n$ и $\mathbf{j}_\pi, \mathbf{j}_y, \mathbf{j}_n$ все параметры, характеризующие движение аппарата в плоскости планетоцентрической гиперболы, вычисленные для случая выхода на орбиту ИС, заменяются теми же параметрами, вычисленными для случая схода с орбиты ИС, и наоборот.

Точка выхода или схода на орбите ИС и точка входа или выхода на сфере влияния планеты остаются неизменными, ϑ и τ заменяются соответственно на $-\vartheta$ и $-\tau$.

В случае изменения знака планетоцентрического вектора его планетоцентрическая долгота λ и широта φ заменяются соответственно на $\pi + \lambda$ и $-\varphi$.

Симметричное отображение вектора $\mathbf{v}_{\text{сф}}$ относительно плоскости орбиты ИС (преобразование 4°). Это преобразование (рис. 10.2.15) является наиболее простым из всех рассматриваемых преобразований. В проекциях

на оси $j_\pi j_\nu j_n$ векторы $V_{сф}^0$ различаются лишь знаком компоненты n . В этом случае величины κ, σ, l и m одни и те же и, как следует из сказанного в разделах 10.2.2 и 10.2.4, параметры гиперболы перехода и точка перехода на орбите ИС одни и те же. Различается лишь ориентация в пространстве плоскостей гипербол

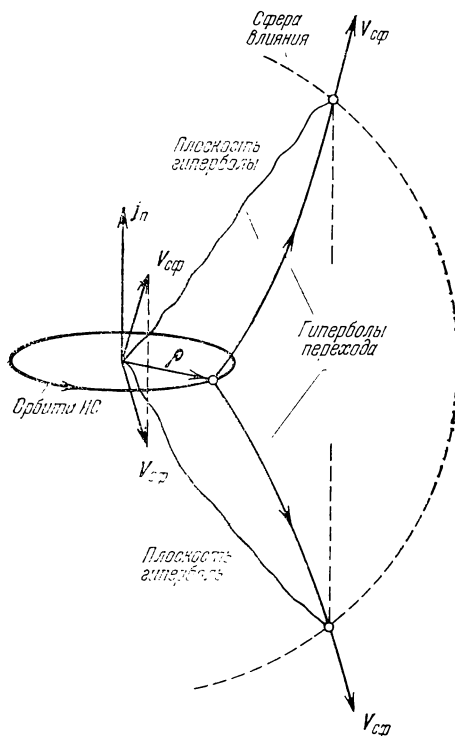


Рис. 10.2.15.

перехода: они получаются одна из другой вращением относительно радиуса-вектора ρ точки перехода на орбите ИС. При этом элементарно определяется изменение ортов i_x, i_y, i_n в системе координат $j_\pi j_\nu j_n$, после чего находится матрица перехода (10.1.41).

Отметим существенное различие между преобразованиями 1° и 2° траектории внешней задачи. Преобразование 2° для любой модели ограниченной задачи трех тел («точная» модель (см. разделы 1.1.2, 1.1.4), МСВ (см. раздел 1.1.4), ММСВ (см. раздел 1.1.5)) при движении планеты по эллиптической орбите всегда приводит к изменению знака V_{zn} при неизменности других компонент вектора $V_{сф}$ (10.2.116). Что касается преобразования 1°, то оно имеет смысл только для круговых орбит планет в рамках ММСВ. В самом деле, если орбита планеты принимается эллиптической, то появляется

ся, хотя и малая, составляющая вектора U вдоль оси x_n , в результате чего изменение знака V_{zn} не эквивалентно изменению знака первой компоненты вектора $V_{сф}$. Изменение знака V_{zn} при замене маршрута, не содержащего апоцентр, на маршрут, включающий апоцентр, и наоборот следует при применении ММСВ из снесения вектора V скорости аппарата на траектории внешней задачи в центр планеты. Следовательно, при учете эллиптичности орбиты планеты или при использовании других моделей ограниченной задачи трех тел установленные выше свойства симметричности и инвариантности планетоцентрического движения для преобразования 1° выполняются лишь приближенно.

Что касается преобразования 3° , то полученные там результаты следуют из теоремы об обращении движения в ограниченной задаче трех тел (Мьеле [4]) и, как и в случае преобразования 2° , имеют место для всех указанных выше моделей этой задачи.

Из сказанного ясно также, что применительно к другим симметричным преобразованиям траектории во внешней задаче (симметричное отображение относительно плоскости $x_n z_n$ и симметрия относительно оси x_n , см. Мьеле [4], Г. А. Чеботарев [1]), связанным с изменением знака компоненты V_{yn} , рассмотрение задачи об инвариантности и симметрии планетоцентрического движения в рамках ММСВ и тем более для других моделей движения, как это следует из (10.2.116), не имеет смысла.

§ 10.3. Двухимпульсные перелеты сферы влияния — круговая орбита ИС

10.3.1. Постановка задачи. Качественный анализ. Двухимпульсная схема перелета является простейшей многоимпульсной схемой, что при практической реализации рассматриваемых перелетов имеет важное значение. Переход к двухимпульсным перелетам при определенных условиях обеспечивает существенное снижение характеристической скорости по сравнению с одноимпульсными (см. ниже). В то же время переход от двухимпульсной схемы к перелетам с тремя и большим числом импульсов уже не дает такого большого снижения характеристической скорости (Бин [2], Гербракт, Пензо [1], Уилсон [1], Уэбб [1], Эдельбаум [5]). Сочетание существенного энергетического выигрыша с возможной простотой практической реализации явилось, по-видимому, основной причиной заметного интереса к двухимпульсным схемам перелета (см. Бин [2], Гантер [1], Дируестер, Маклафлин, Вулф [1], Лондон [1]).

В разделе 10.2.4 показано, что малая эллиптичность орбиты ИС слабо сказывается на величине характеристической скорости оптимальных одноимпульсных перелетов. Кроме того, характеристическая скорость одноимпульсного перелета между сферой влияния и круговой орбитой с радиусом ρ , равным фокальному параметру эллиптической орбиты ИС, может служить хорошей оценкой характеристической скорости перелета между сферой влияния и эллиптической орбитой ИС. Поэтому ниже рассматриваются двухимпульсные перелеты между сферой влияния планеты и круговой орбитой ИС.

В дальнейшем полагаем, что второй импульс может сообщаться КА вне сферы с радиусом, равным радиусу орбиты ИС. Таким образом, из рассмотрения исключаются траектории с залетом КА внутрь указанной сферы (плоские перелеты такого типа рассмот-

рены Ллоуденом [19, 24]). Это ограничение обусловлено тем, что при практической реализации космических перелетов промежуточную орбиту ИС целесообразно выбирать достаточно близкой к поверхности планеты. Таким образом, рассматриваемые траектории КА расположены целиком в сферическом слое между сферой влияния планеты и планетоцентрической сферой с радиусом, равным радиусу орбиты ИС.

Проведем качественный анализ оптимальных двухимпульсных перелетов, основываясь на результатах исследования оптимальных одноимпульсных перелетов (см. раздел 10.2.2). Для определенности рассматриваем переход со сферы влияния на орбиту ИС, так как все дальнейшее с очевидными изменениями (см. конец раздела 10.3.2) остается в силе и для перехода орбита ИС — сфера влияния.

Поскольку формула (10.2.29) справедлива при $\rho_{сф}/\rho \gg 1$, можно считать, что она приближенно дает характеристическую скорость одноимпульсного перехода, если в качестве $V_{сф}$ и $\rho_{сф}$ брать текущие вектор скорости V и расстояние КА от центра планеты при движении по планетоцентрической гиперболе. Это справедливо до тех пор, пока расстояние аппарата от центра планеты не становится сравнимым с ρ . Предположим, что второй импульс, кроме импульса перехода на орбите ИС, сообщается КА на некотором расстоянии от центра планеты $\rho_{имп}$, $\rho < \rho_{имп} < \rho_{сф}$, таком, что

$$\frac{\rho_{имп}}{\rho} \gg 1. \quad (10.3.4)$$

При условии (10.3.4) оптимальный одноимпульсный переход от точки $\rho_{имп}$ на орбиту ИС происходит по маршруту А (см. раздел 10.2.2). Как следует из данных рис. 10.2.5, роль второго импульса должна сводиться к уменьшению текущего значения κ (см. ниже) и увеличению текущего значения σ .

Поскольку для маршрута А скорость КА при приближении к орбите ИС монотонно возрастает, можно предполагать, что заданное изменение вектора скорости V целесообразно осуществлять при минимальной величине $|V|$, т. е. на сфере влияния планеты (см. Мьюник [1]). Таким образом, можно полагать, что при оптимальном двухимпульсном перелете сфера влияния — круговая орбита ИС один импульс сообщается КА на сфере влияния планеты, а другой — на орбите ИС.

Это предположение строго подтверждается путем решения соответствующей вариационной задачи (см. § 10.4). Поэтому дальнейший анализ проведем для указанной выше схемы двухимпульсных перелетов. Заметим, что при этом траектория КА оказывается целиком расположенной между сферой влияния планеты и сферой с радиусом, равным радиусу орбиты ИС.

Для дальнейших рассмотрений в этом разделе будем пренебрегать малым членом $2\mu/\rho_{\text{сф}}$ в (10.1.17) и полагать (см. (10.2.34))

$$\kappa = \frac{V_{\text{сф}}^2}{V_{\text{кр}}^2}. \quad (10.3.2)$$

Обозначим (рис. 10.3.1) через $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ вектор скорости КА на сфере влияния до сообщения импульса, через $\Delta\mathbf{V}_{\text{сф}}$ — вектор импульса скорости. Введем правую прямоугольную систему координат xuz , начало которой совпадает с концом вектора $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$, орт оси z $\parallel \mathbf{V}_{\text{сф}0}$, орт оси y $\mathbf{y}^0 \parallel [\mathbf{j}_n, \mathbf{V}_{\text{сф}0}]$. Вектор $\Delta\mathbf{V}_{\text{сф}}$ задаем сферическими координатами: величиной $V_{\text{сф}}$, долготой λ , отсчитываемой от оси x в плоскости xu против часовой стрелки, если смотреть с оси z , широтой φ , отсчитываемой от плоскости xu , $\text{sign } \varphi = \text{sign } z$. Меньший из углов между $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ обозначим через α . Пусть (см. (10.2.20))

$$\sigma_0 = \sin^2(\widehat{\mathbf{j}_n, \mathbf{V}_{\text{сф}0}}) = \sin^2\alpha, \quad (10.3.3)$$

$$\kappa_0 = \frac{V_{\text{сф}0}^2}{V_{\text{кр}}^2}. \quad (10.3.4)$$

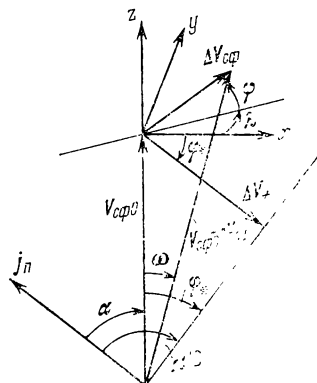


Рис. 10.3.1.

После сообщения импульса на сфере влияния

$$\sigma = 1 - \frac{[(\mathbf{V}_{\text{сф}0}, \mathbf{j}_n) + (\Delta\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)]^2}{V_{\text{сф}}^2}, \quad (10.3.5)$$

$$\kappa = \frac{V_{\text{сф}}^2}{V_{\text{кр}}^2}, \quad (10.3.6)$$

где

$$V_{\text{сф}}^2 = V_{\text{сф}0}^2 + \Delta V_{\text{сф}}^2 + 2\Delta V_{\text{сф}0}\Delta V_{\text{сф}} \sin \varphi. \quad (10.3.7)$$

Поскольку оптимальный импульс перехода на орбиту ИС монотонно уменьшается с ростом σ (см. рис. 10.2.5), а κ не зависит от λ , получаем, подставляя в (10.3.5) $\Delta\mathbf{V}_{\text{сф}}$ ($\Delta V_{\text{сф}}, \lambda, \varphi$), что при оптимальной ориентации импульс расположен в плоскости векторов $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$:

$$\lambda_{\text{opt}} = 0 \text{ при } \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad (10.3.8a)$$

$$\lambda_{\text{opt}} = \pi \text{ при } \alpha > \frac{\pi}{2}. \quad (10.3.8b)$$

Таким образом, при оптимальной ориентации импульса $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$

$$\sigma = 1 - \frac{[V_{\text{сф}0} \cos \alpha + \Delta V_{\text{сф}} \sin(\varphi - \alpha \operatorname{sign} \cos \alpha)]^2}{V_{\text{сф}}^2}. \quad (10.3.9)$$

Заметим, что случаи α и $\pi - \alpha$ (рис. 10.3.2) различаются лишь симметричным расположением соответствующих векторов $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}0}^*$ относительно плоскости орбиты ИС. Обращаясь к разделу 10.2.5, замечаем, что это соответствует симметричному отображению оптимального планетоцентрического движения относительно плоскости орбиты ИС. Параметры гипербол перехода для этих случаев и величины импульсов на сфере влияния и в точке перехода на орбите ИС одни и те же, плоскости же гипербол, векторы $\mathbf{V}_{\text{сф}}$, $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}}^*$, $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}^*$ расположены симметрично относительно плоскости орбиты ИС. Следовательно, при анализе оптимальных двухимпульсных перелетов достаточно ограничиться исследованием

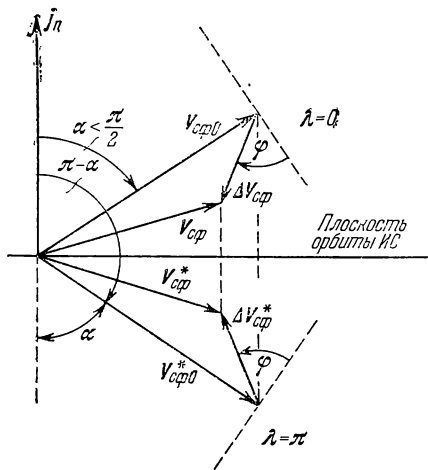


Рис. 10.3.2.

случая $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Суммарная характеристическая скорость двухимпульсного перелета ΔV_{Σ} равна

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V(\kappa, \sigma) + \Delta V_{\text{сф}}, \quad (10.3.10)$$

где $\Delta V(\kappa, \sigma)$ — оптимальный импульс в точке перехода на орбите ИС, подсчитываемый по формуле (10.2.29) (маршрут А) для параметров κ (10.3.6) и σ (10.3.9). При заданных κ_0 и σ_0 (или α) задача нахождения оптимального двухимпульсного перелета сводится к нахождению значений $\Delta V_{\text{сф} \text{ опт}}$ и $\varphi_{\text{опт}}$, для которых

$$\Delta V_{\Sigma \text{ опт}} = \inf_{\{\Delta V_{\text{сф}}, \varphi\}} [\Delta V(\kappa, \sigma) + \Delta V_{\text{сф}}]. \quad (10.3.11)$$

Покажем, что сообщение КА импульса на сфере влияния, только уменьшающего $V_{\text{сф}0}$ и не изменяющего направления $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$), всегда невыгодно. Для значений параметров (1) $\sigma_0 = 1$, (2) $\sigma_0 = 0$, (3) $\kappa_0 \gg 1$, $\kappa \gg 1$ этот результат можно получить

аналитически. В рассматриваемом случае

$$\kappa = \left(\frac{V_{\text{сф}0}}{V_{\text{кр}}} - \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}} \right)^2. \quad (10.3.12)$$

Заметим, что при $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ величину импульса перехода на орбите ИС $\Delta V(\kappa, \sigma)$ на основании (10.2.44) и (10.2.46) можно записать с помощью одного соотношения:

$$\Delta V = V_{\text{кр}}(3 - \sigma + \kappa)^{1/2} - \sigma, \quad \sigma = 1 \text{ или } 0. \quad (10.3.13)$$

При $\sigma = \sigma_0 = 1$ или $\sigma = \sigma_0 = 0$ из (10.3.10) с учетом (10.3.12) и (10.3.13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\Sigma}}{V_{\text{кр}}} &= \left[3 - \sigma_0 + \left(\frac{V_{\text{сф}0}}{V_{\text{кр}}} - \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}} \right)^2 \right]^{1/2} - \sigma_0 + \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}}, \quad \sigma_0 = \\ &= 1 \text{ или } 0. \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

Вычисляя с помощью (10.3.14) $\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}}$, имеем

$$\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}} = - \frac{\left(\frac{V_{\text{сф}0}}{V_{\text{кр}}} - \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}} \right)}{\left[3 - \sigma_0 + \left(\frac{V_{\text{сф}0}}{V_{\text{кр}}} - \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}} \right)^2 \right]^{1/2}} + 1. \quad (10.3.15)$$

Из (10.3.15) при любых $V_{\text{сф}0} < \infty$ и $\Delta V_{\text{сф}} < V_{\text{сф}0}$ приходим к неравенству

$$\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}} > 0, \quad (10.3.16)$$

откуда для $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_0 = 0$ получаем нужный результат. Для того чтобы получить аналогичный результат для значений $\kappa_0 \gg 1 \div 2$, $\kappa \gg 1 \div 2$ и любых σ , воспользуемся аппроксимирующей зависимостью (10.2.62). Подставляя (10.2.62) в (10.3.10) и вычисляя при $\sigma = \text{const}$ производную $\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}}$ с учетом (10.3.12) и тождества

$$\sqrt{2 + \kappa} - \sqrt{\sigma} \equiv (2 + \sigma + \kappa - 2\sqrt{2 + \kappa}\sqrt{\sigma})^{1/2}, \quad (10.3.17)$$

получаем

$$\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}} = - \frac{(2 + \sigma + \kappa - 2\sqrt{2 + \kappa}\sqrt{\sigma})^{1/2}}{(3 + \kappa - 2\sqrt{2 + \kappa}\sqrt{\sigma})^{1/2}} \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2 + \kappa}} + 1 \geq 0, \quad (10.3.18)$$

причем знак равенства имеет место только при $\kappa \rightarrow \infty$. Из (10.3.18) с учетом сказанного относительно аппроксимации

(10.2.62) получаем

$$\frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}} > 0 \text{ при } 1 \div 2 \leq \kappa < \infty. \quad (10.3.19)$$

Численное определение производной $\left. \frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial \Delta V_{\text{сф}}} \right|_{\sigma=\text{const}}$ в области $0 \leq \kappa \leq 1$ приводит к тем же результатам. Таким образом, сообщение КА на сфере влияния тормозного импульса всегда невыгодно.

Пусть теперь импульс $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ используется только для увеличения σ , так что $V_{\text{сф}}$ и κ остаются одними и теми же для рассматриваемых значений $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$:

$$V_{\text{сф}} = V_{\text{сф}0}, \quad \kappa = \kappa_0. \quad (10.3.20)$$

Обозначим угол между векторами $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ через ω (см. рис. 10.3.1). Воспользуемся снова аппроксимирующей зависимостью (10.2.62). Можно показать, что при $\kappa_0 \gg 1$ $\left. \frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial V_{\text{кр}}} \right| \frac{\partial \omega}{\partial \omega} > 0$, и сообщение КА импульса для увеличения σ невыгодно. Смысл этого результата достаточно ясен из формулы (10.2.62) и графиков рис. 10.2.5: при больших $V_{\text{сф}0}$ и $\kappa_0 \gg 1$ для значительного изменения ориентации $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ требуются большие импульсы $\Delta V_{\text{сф}}$, сравнимые с $V_{\text{сф}0}$, при этом выигрыш в ΔV_{Σ} становится относительно малым. При малых $0 \leq \kappa_0 \leq 1$ возможны ситуации, когда $\left. \frac{\partial \Delta V_{\Sigma}}{\partial V_{\text{кр}}} \right| \frac{\partial \omega}{\partial \omega} < 0$. Смысл этого результата также достаточно ясен из графиков рис. 10.2.5: при малых $V_{\text{сф}0}$ и $\kappa_0 \ll 1$ значительного увеличения σ и, следовательно, значительного уменьшения первого члена $\Delta V(\kappa, \sigma)$ в (10.3.10) можно достичь малыми по величине импульсами $\Delta V_{\text{сф}}$. В частности, при $\kappa \rightarrow 0$ можно получить $\sigma = 1$ и реализовать максимальный выигрыш в ΔV_{Σ} при исчезающе малом импульсе $\Delta V_{\text{сф}} \rightarrow 0$.

На основании проведенного качественного анализа можно с достаточным основанием полагать, что область предпочтительности двухимпульсных перелетов перед одноимпульсными соответствует в основном малым значениям $\kappa_0 < 1$ и в этой области роль импульса $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ сводится в основном к максимальному увеличению σ . Что касается больших значений $\kappa_0 \gg 1$, то здесь при любых σ_0 оптимальными должны являться одноимпульсные перелеты. Заметим, что численный анализ (см. разделы 10.3.2 и 10.4.3) полностью подтверждает этот качественный прогноз.

Обозначим через $\Delta \mathbf{V}_{*}$ наименьший по модулю вектор $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$, для которого вектор $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ ортогонален $\mathbf{j}_n$ (рис. 10.3.1).

Для соответствующих значений $\Delta V_*/V_{кр}$ и $\varphi = \varphi_*$ получаем

$$\frac{\Delta V_*}{V_{кр}} = \sqrt{(1 - \sigma_0) \kappa_0}, \quad (10.3.21)$$

$$\alpha - \varphi_* \operatorname{sign} \cos \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad (10.3.22)$$

$$\sin \varphi_* = -\frac{\Delta V_*}{V_{сф}} = -\sqrt{1 - \sigma_0}. \quad (10.3.23)$$

Рассмотрим возможную область значений φ_{opt} при заданном значении $\Delta V_{сф}$, ограничиваясь для определенности случаем $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\lambda_{opt} = 0$ (рис. 10.3.3).

Пусть $\Delta V_{сф} \leq \Delta V_* < V_{сф0}$ (рис. 10.3.3, а). Опишем из конца вектора $\mathbf{V}_{сф0}$ окружность радиуса $\Delta V_{сф}$. Максимум $\sigma = \sigma_{max}$ соответствует касанию вектора $\mathbf{V}_{сф0} + \Delta \mathbf{V}_{сф}$ указанной окружности.

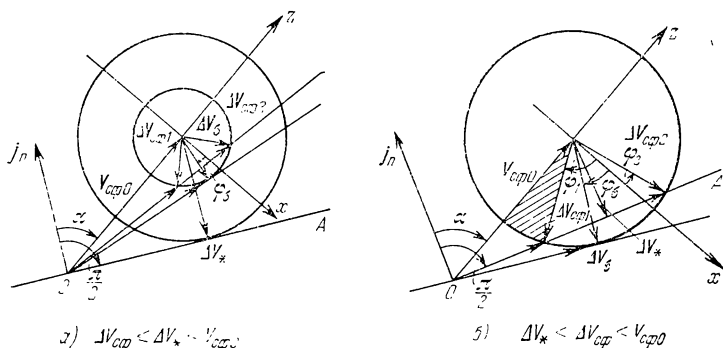


Рис. 10.3.3.

Обозначим соответствующие значения $\Delta V_{сф}$ и φ через ΔV_σ и φ_σ . При любом другом σ , $\sigma_0 < \sigma < \sigma_{max}$, получаются два возможных импульса $\Delta V_{сф}$: $\Delta V_{сф1}$ с $\varphi_1 < \varphi_\sigma$, $\Delta V_{сф2}$ с $\varphi_2 > \varphi_\sigma$. Напомним (см. раздел 10.2.2, рис. 10.2.5), что величина оптимального импульса перехода на орбите ИС $\Delta V(\kappa, \sigma)$ при $\sigma = \text{const}$ и $\kappa > \kappa^*$ (см. рис. 10.2.6) монотонно возрастает с увеличением κ . Поскольку $|\mathbf{V}_{сф0} + \Delta \mathbf{V}_{сф1}| < |\mathbf{V}_{сф0} + \Delta \mathbf{V}_{сф2}|$, на основании сказанного имеем для $\kappa > \kappa^*$

$$\Delta V_\Sigma(\Delta \mathbf{V}_{сф1}) < \Delta V_\Sigma(\Delta \mathbf{V}_{сф2}), \quad (10.3.24)$$

поэтому

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_{opt} \leq \varphi_\sigma < 0. \quad (10.3.25)$$

С увеличением $\Delta V_{\text{сф}}$ угол φ_{σ} уменьшается. При $\Delta V_{\text{сф}} = \Delta V_*$

$$\sigma_{\max} = 1, \quad \varphi_{\sigma} = \varphi_*. \quad (10.3.26)$$

Пусть теперь $\Delta V_* < \Delta V_{\text{сф}} < V_{\text{сф}0}$ (рис. 10.3.3, б). Построим, как и в предыдущем случае, вектор $\Delta \mathbf{V}_{\sigma}(\Delta V_{\sigma}, \varphi_{\sigma})$. Из точки O проведем прямую OA под углом $\pi/2$ к $\mathbf{j}_n$. Для векторов $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}i}$, $i = 1, 2$, концы которых лежат на этой прямой, $\sigma = 1$. Поскольку $\sigma(\mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}) = 1$ и

$$|\mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}| = \min_{\{\varphi: \varphi_1 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}} |\mathbf{V}_{\text{сф}} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}|, \quad (10.3.27)$$

то теперь ($\kappa > \kappa^*$)

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_{\text{opt}} \leq \varphi_1 < \varphi_{\sigma}. \quad (10.3.28)$$

Область, в которой находится $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф opt}}$, на рис. 10.3.3, б заштрихована.

Пусть теперь $\Delta V_{\text{сф}}$ монотонно возрастает и $\Delta V_{\text{сф}} \rightarrow V_{\text{сф}0} - 0$. Тогда φ_1 монотонно убывает и $\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0$. Но тогда из (10.3.28) следует, что и

$$\varphi_{\text{opt}} \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0. \quad (10.3.29)$$

В результате

$$\mathbf{V}_{\text{сф}} = \mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}(\varphi_{\text{opt}}) \rightarrow +0. \quad (10.3.30)$$

Вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}} \rightarrow +0$ следует считать лежащим в плоскости орбиты ИС. При этом реализуется

$$\min \Delta V_{\Sigma} |_{\Delta V_{\text{сф}} = V_{\text{сф}0} - 0} = \Delta V(\kappa = 0, \sigma = 1) + V_{\text{сф}0} \quad (10.3.31a)$$

или

$$\min \frac{\Delta V_{\Sigma}}{V_{\text{кр}}} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{\kappa_0}. \quad (10.3.31б)$$

Очевидно, что дальнейшее увеличение $\Delta V_{\text{сф}}$ нецелесообразно. Более того, предельный случай (10.3.29), (10.3.30) эквивалентен уменьшению $V_{\text{сф}0}$ без изменения σ , что, как было показано выше, всегда невыгодно. Таким образом, в случае оптимального двухимпульсного перехода при $V_{\text{сф}0} > 0$ всегда

$$\Delta V_{\text{сф opt}} < V_{\text{сф}0}. \quad (10.3.32)$$

Аналогичные результаты получаются и при $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\lambda_{\text{opt}} = \pi$.

10.3.2. Численное исследование. Результаты качественного анализа оптимальных двухимпульсных перелетов были использованы при их численном исследовании. В соответствии с (10.3.32) величина $\Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}}$ менялась в диапазоне $0 \leq \frac{\Delta V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}} \leq \sqrt{\varkappa_0}$.

На рис. 10.3.4 для $\sigma_0 = 0,6$ и ряда значений $\varkappa_0$ приведены зависимости

$$\Delta V_{\Sigma}(\varkappa_0, \sigma_0, \Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}})/V_{\text{кр}} = \inf_{\{\varphi\}} \Delta V_{\Sigma}(\varkappa_0, \sigma_0, \Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}}, \varphi)/V_{\text{кр}} \quad (10.3.33)$$

полученные путем минимизации по φ , — $90^\circ < \varphi \leq 0$, суммарного импульса ΔV_{Σ} (10.3.10) при $\Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}} = \text{const}$.

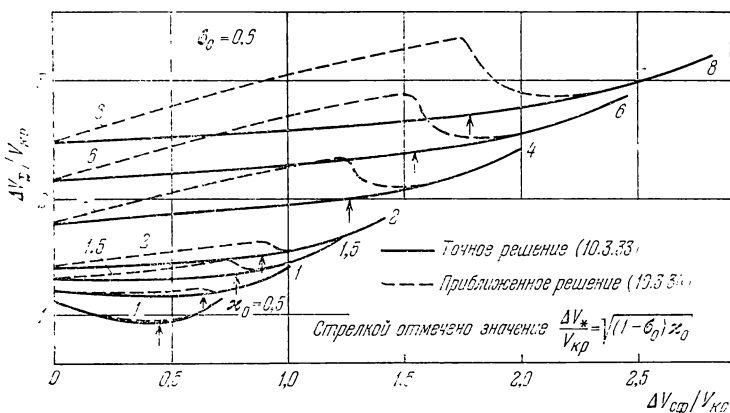


Рис. 10.3.4.

Приведенные результаты расчетов полностью подтверждают результаты качественного анализа. Видно, что при малых $\varkappa_0$ двухимпульсные перелеты ($\Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}} > 0$) могут быть выгоднее одноимпульсных ($\Delta V_{\text{сф}}/V_{\text{кр}} = 0$). Оптимальным двухимпульсным перелетам соответствуют точки минимума на кривых (10.3.33). На этом же рисунке для тех же значений $\varkappa_0$ и σ_0 приведены зависимости (см. в конце раздела 10.3.1 анализ рис. 10.3.3)

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{\Sigma}(\varkappa_0, \sigma_0, \Delta V_{\text{сф}})/V_{\text{кр}} & \text{ для } \Delta V_{\text{сф}} \leq \Delta V_{\text{сф}}^* \\ \Delta V_{\Sigma}(\varkappa_0, \sigma_0, \Delta V_{\text{сф}}^1)/V_{\text{кр}} & \text{ для } \Delta V_{\text{сф}} > \Delta V_{\text{сф}}^* \end{aligned} \right\} \quad (10.3.34)$$

Видно, что в тех случаях, когда двухимпульсный перелет выгоднее одноимпульсного, ΔV_{Σ} из (10.3.34) очень близки к точным значениям (10.3.33). При этом $\Delta V_{\text{сф}}^{\text{опт}}/V_{\text{кр}}$ очень близко к $\Delta V_{\text{сф}}^*/V_{\text{кр}}$ (10.3.21). Аналогичные результаты получаются и для других значений $0 \leq \sigma_0 < 1$.

Путем численного сравнения оптимальных значений ΔV_{Σ} для одноимпульсных и двухимпульсных перелетов была найдена граничная кривая $V_{\text{сф}0}/V_{\text{кр}}(\sigma_0)$, разделяющая область начальных условий σ_0 и $V_{\text{сф}0}/V_{\text{кр}} = \sqrt{\kappa_0}$ на две части, в каждой из которых выгоднее или двухимпульсный или одноимпульсный перелет (рис. 10.3.5). Видно, что структура этих областей соответствует проведенному выше качественному анализу, в частности:

(а) полупрямая $\kappa_0 \geq 0$, $\sigma_0 = 1$ принадлежит области одноимпульсных перелетов,

(б) промежуток $\kappa_0 = 0$, $0 \leq \sigma_0 < 1$ принадлежит области двухимпульсных перелетов.

Поскольку для всех точек этого промежутка с помощью импульса $\Delta V_{\text{сф}} \rightarrow 0$ можно получить $\sigma = 1$, при $\kappa_0 = 0$, $0 \leq \sigma_0 < 1$ характеристическая скорость оптимального двухимпульсного перелета получается одной и той же:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\Sigma \text{opt}}(\kappa_0 = 0, 0 \leq \sigma_0 < 1) &= \\ &= \inf_{\{\kappa_0, \sigma_0, \Delta V_{\text{сф}}\}} \Delta V_{\Sigma} \equiv \Delta V(\kappa_0 = 0, \sigma_0 = 1), \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

где $\Delta V(\kappa_0 = 0, \sigma_0 = 1)$ совпадает с характеристической скоростью соответствующего одноимпульсного перелета. Обращаясь к соотношению (10.2.44), получаем

$$\Delta V_{\Sigma \text{opt}}(\kappa_0 = 0, 0 \leq \sigma_0 < 1) = \sqrt{2} - 1. \quad (10.3.36)$$

Рассмотрим полупрямую $\kappa_0 > 0$, $\sigma_0 = 0$. При $\sigma_0 \approx 0$ (или $\alpha \approx 0$) вектор $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф} \text{opt}} \approx \Delta \mathbf{V}$ направлен примерно по вектору $-\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ (см. рис. 10.3.3). Но, как было показано выше в разделе 10.3.1, при $\sigma_0 = 0$ и $\Delta V_{\text{сф}} < V_{\text{сф}0}$ вектор $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф} \text{opt}}$ не может быть направлен по $-\mathbf{V}_{\text{сф}0}$. Естественным разрешением этого противоречия, согласующимся с проведенным выше качественным анализом оптимальных двухимпульсных перелетов, является предположение о том, что при $\sigma_0 = 0$

$$\Delta \mathbf{V}_{\text{сф} \text{opt}} = -\mathbf{V}_{\text{сф}0}, \quad (10.3.37)$$

при этом вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}} = \mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф} \text{opt}} = 0$ следует считать лежащим в плоскости орбиты ИС (см. (10.3.31)). Считая (10.3.37) справедливым для всех κ_0 и приравнявая значения характеристической скорости из (10.3.31б) и $\Delta V/V_{\text{кр}}$ (10.2.46), найдем, что при $\sigma_0 = 0$ граничное значение $\sqrt{\kappa_0}$, разделяющее области опти-

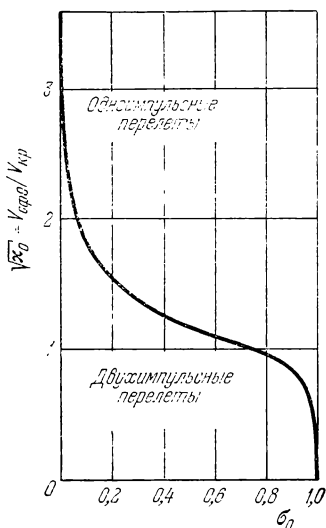


Рис. 10.3.5.

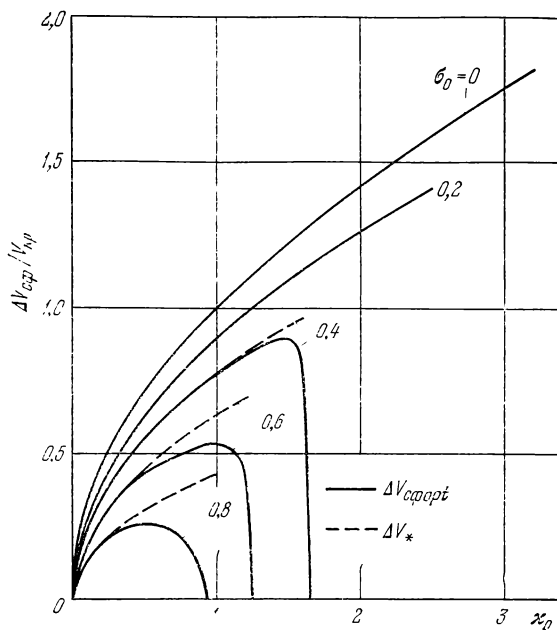


Рис. 10.3.6.

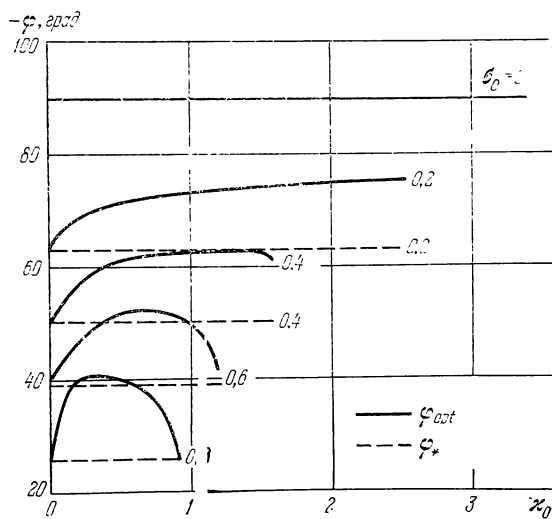


Рис. 10.3.7.

малых одноимпульсных и двухимпульсных перелетов, равно

$$\sqrt{\kappa_0} = 2 + \sqrt{2}. \quad (10.3.38)$$

Непосредственный численный анализ подтверждает этот результат (см. рис. 10.3.5). Аналогичный, хотя и полученный из сравнения рациональных (неоптимальных) схем, результат приводится в работе Гантера [1].

На рис. 10.3.6, 10.3.7 приведены параметры оптимальных импульсов на сфере влияния $\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}(\kappa_0, \sigma_0)$, $\Phi_{\text{ опт}}(\kappa_0, \sigma_0)$ и соответствующие величины $\Delta V_*(\kappa_0, \sigma_0)$, $\Phi_*(\kappa_0, \sigma_0)$. Видно, что векторы $\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}$ и ΔV_* близки между собой всюду, за исключением окрестности граничной кривой рис. 10.3.5 при $\sigma_0 \geq 0,6$.

Из приведенных на рис. 10.3.8 точных значений $\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}$ и соответствующих значений $\Delta V_{\Sigma}(\kappa_0, \sigma_0, \Delta V_*)$ для двухимпульсных

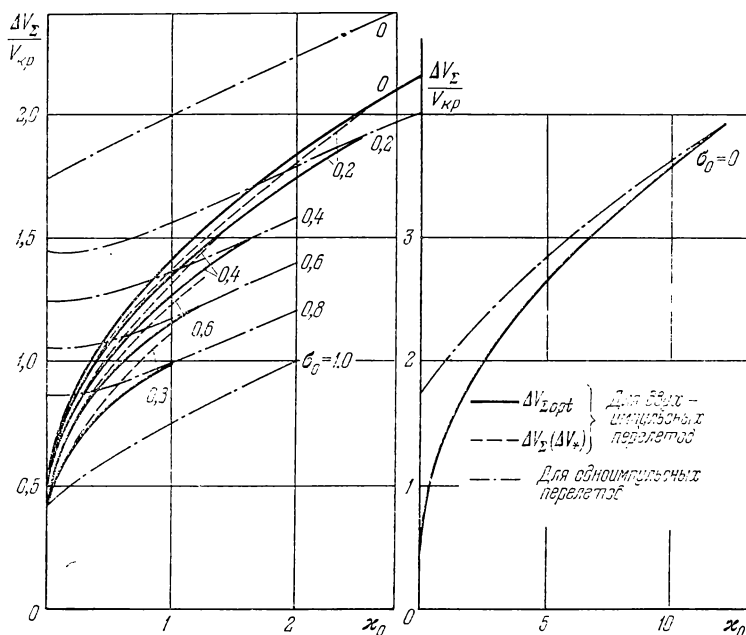


Рис. 10.3.8.

перелетов видно, что практически во всех случаях относительная ошибка $\frac{\Delta V_{\Sigma}(\Delta V_*) - \Delta V_{\Sigma \text{ опт}}}{\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}}$ не превышает 5%. Таким обра-

зом в тех случаях, когда двухимпульсный перелет выгоднее одноимпульсного, в качестве достаточно хорошего приближения к оптимальному импульсу на сфере влияния можно взять вектор $\nabla \Delta^*$,

равный наименьшему по величине вектору $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$, при котором вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}} = \mathbf{V}_{\text{сф}0} + \Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ становится компланарным плоскости орбиты ИС (см. (10.3.21) — (10.3.23) и рис. 10.3.4).

Заметим, что отмеченное на рис. 10.3.6 и 10.3.7 различие между векторами $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф} \text{ опт}}$ и $\Delta \mathbf{V}_*$ при $\sigma_0 \geq 0,6$ в окрестности границы, отделяющей область двухимпульсных перелетов от области одноимпульсных (см. рис. 10.3.5), не оказывает, как видно из данных рис. 10.3.8, влияния на предыдущий результат. Это объясняется тем, что в окрестности граничной кривой величина ΔV_z при $\varphi \approx \varphi_{\text{опт}}$ практически не зависит от $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ (см. рис. 10.3.4).

Сравнение $\varphi_{\text{опт}}$ с φ_* показывает (см. рис. 10.3.7), что $\varphi_{\text{опт}}$ несколько меньше φ_* . При этом $\sigma_{\text{опт}}$ (см. (10.3.9)) практически не меняется, $\sigma_{\text{опт}} \approx 1$, а $\kappa_{\text{опт}} < \kappa(\Delta \mathbf{V}_*)$ (см. (10.3.6), (10.3.7)), за счет чего и достигается полная минимизация ΔV_z в оптимальном двухимпульсном перелете.

Из приведенных на рис. 10.3.8 данных видно, что при малых $\sigma_0 = 0 \div 0,5$ (угол между $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ и плоскостью орбиты ИС $\geq 45^\circ$) и малых $\kappa_0 = 0 \div 1,0$ (значения относительной скорости КА на сфере влияния $V_{\text{сф}0}/V_{\text{кр}} = 0 \div 1,0$) оптимальный двухимпульсный перелет даст существенно меньшие значения ΔV_z , чем оптимальный одноимпульсный перелет (ΔV_z может снижаться более чем в два раза).

Рассмотрим теперь, как изменятся полученные результаты при переходе от перелета сфера влияния — орбита ИС к перелету орбита ИС — сфера влияния (рис. 10.3.9). При этом вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ меняет знак и составляет с ортом $\mathbf{j}_n$ угол $\pi - \alpha$. Указанный переход можно разбить на два: (1) рассмотренное ранее (см. разделы 10.2.5 и 10.3.1) симметричное отображение вектора $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ относительно плоскости орбиты ИС (см. рис. 10.3.2) и (2) поворот вектора $\mathbf{V}_{\text{сф}0}^*$, симметричного вектору $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$, вокруг орта $\mathbf{j}_n$ на угол π .

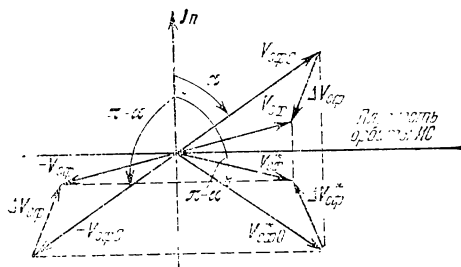


Рис. 10.3.9

В результате при оптимальном двухимпульсном перелете векторы $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ заменяются на векторы $-\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ и $-\mathbf{V}_{\text{сф}}$. Очевидно, что в системе сферических координат, связанной с векторами $\mathbf{j}_n$ и $-\mathbf{V}_{\text{сф}0}$, вектор $-\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$ имеет ту же широту $\varphi_{\text{опт}}$, что и вектор $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}}$, в системе координат, связанной с векторами $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$, соответствующие же значения долготы $\lambda_{\text{опт}}$ отличаются на π (см. (10.3.8)).

§ 10.4. Оптимизация схемы перелета

10.4.1. Постановка вариационной задачи. Общая постановка вариационной задачи дана в разделе 10.1.1. На основании результатов решения задач об оптимальных импульсных перелетах (см. разделы 10.2.2, 10.2.4 и § 10.3) можно ожидать, что

1) одно- или двухимпульсная траектории перелета (с одним или двумя активными участками соответственно), на которых один импульс сообщается КА на орбите ИС, другой — на сфере влияния, являются решениями вариационной задачи в соответствующих областях (см. раздел 10.3.2);

2) малая эллиптичность орбиты ИС не оказывает влияния на количество и расположение на траектории перелета импульсов или активных участков.

Как и в разделе 10.3.1, будем полагать, что в случае круговой орбиты ИС (см. раздел 10.4.3) оптимальная траектория перелета не выходит за пределы сферического слоя, ограниченного снизу сферой с радиусом ρ_0 , где ρ_0 — радиус орбиты ИС, и сверху — сферой влияния.

Орбиту ИС в общем случае считаем эллиптической и задаем теми же параметрами, что и в разделе 10.1.2 (см. рис. 10.1.2). Выберем планетоцентрическую правую прямоугольную декартову систему координат xuz : ось x направлена по орту $\mathbf{j}_\pi$, ось y — по орту $\mathbf{j}_\nu$, ось z — по орту $\mathbf{j}_\lambda$. Для определенности и удобства решения краевых задач (см. раздел 10.4.2, 2°, 3°) далее рассматривается задача об оптимальном перелете орбита ИС — сфера влияния планеты. Начальную точку на орбите ИС обозначаем 0, конечную точку на сфере влияния обозначаем 1; соответственно индексируются все величины. Начальный момент времени $t_0 = 0$; конечный момент времени t_1 и, следовательно, время перелета t_{01} не заданы.

Задачу записываем в безразмерном виде (см. раздел 1.2.4, соотношения (1.2.8) — (1.2.13)), относя все линейные размеры к

$$R_* = \rho_0, \quad (10.4.1)$$

а скорость — к

$$V_* = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (10.4.2)$$

где ρ_0 — фокальный параметр орбиты ИС. В случае круговой орбиты ИС R_* — радиус орбиты $\rho_0 \equiv \rho_0$, V_* — скорость движения по ней $V_{кр}$.

Рассматриваемая вариационная задача как в случае конечной, так и импульсной тяги полностью укладывается в рамки общей задачи, рассмотренной в разделах 1.2.1, 1.2.2 и § 2.2 соответственно.

Рассматривается случай ограниченной тяги, $T_* = T_{\max}$, т. е.

$$0 \leq T \leq 1. \quad (10.4.3)$$

В качестве характерной массы m_* берется начальная масса аппарата m_0 , поэтому параметр n_* (1.2.13) равен

$$n_* = \frac{T_{\max}}{g_* m_0}. \quad (10.4.4)$$

где (см. (1.2.14))

$$g_* = \begin{cases} \frac{\mu}{\rho_0^2} & \text{в случае эллиптической орбиты ИС,} \\ \frac{\mu}{\rho_0^3} & \text{в случае круговой орбиты ИС.} \end{cases} \quad (10.4.5)$$

Минимизируемый функционал G (1.2.26) в данном случае равен характеристической скорости перелета q_1 ($q_0 = 0$):

$$G = q_1 \Rightarrow \min. \quad (10.4.6)$$

Перейдем к записи краевых условий для рассматриваемой задачи оптимизации перелета.

а) Конечная ограниченная тяга. В момент схода КА с орбиты ИС должны выполняться условия

$$\mathbf{r}(t_0) = \boldsymbol{\rho}(t_0), \quad (10.4.7)$$

$$\mathbf{V}(t_0) = \dot{\boldsymbol{\rho}}(t_0), \quad (10.4.8)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки схода на орбите ИС. Из условия трансверсальности (1.2.40) при $t = t_0$ с учетом (10.4.6) и (1.2.47) (см. ниже (10.4.27)) получаем

$$(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{V})|_{t=t_0} = 0, \quad (10.4.9)$$

или, принимая во внимание (10.4.7) и (10.4.8),

$$(\mathbf{p}, \delta \boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{s}, \delta \dot{\boldsymbol{\rho}})|_{t=t_0} = 0. \quad (10.4.10)$$

Входящие в (10.4.7), (10.4.8) и (10.4.10) величины $\boldsymbol{\rho}$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, $\delta \boldsymbol{\rho}$, $\delta \dot{\boldsymbol{\rho}}$ удобно выразить через истинную аномалию точки на орбите ИС. В рассматриваемой системе координат с использованием соотношений (1.3.27), (1.3.37), (1.3.38) при $t = t_0$ получаем

$$\rho_x(t_0) \equiv x_0 = \frac{\cos \vartheta_0}{1 + e_0 \cos \vartheta_0}, \quad (10.4.11a)$$

$$\rho_y(t_0) \equiv y_0 = \frac{\sin \vartheta_0}{1 + e_0 \cos \vartheta_0}, \quad (10.4.11b)$$

$$\rho_z(t_0) \equiv z_0 = 0, \quad (10.4.11b)$$

$$\dot{\rho}_x(t_0) \equiv V_{x_0} = -\sin \vartheta_0, \quad (10.4.12a)$$

$$\dot{\rho}_y(t_0) \equiv V_{y_0} = e_0 + \cos \vartheta_0, \quad (10.4.12b)$$

$$\dot{\rho}_z(t_0) \equiv V_{z_0} = 0. \quad (10.4.12b)$$

Условие трансверсальности (10.4.10) записывается в виде

$$(p_x \delta \rho_x + p_y \delta \rho_y + s_x \delta \dot{\rho}_x + s_y \delta \dot{\rho}_y) \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad (10.4.13)$$

где на основании (10.4.11), (10.4.12)

$$\delta \rho_x = - \frac{\sin \vartheta_0}{(1 + e_0 \cos \vartheta_0)^2} \delta \vartheta_0, \quad (10.4.14a)$$

$$\delta \rho_y = \frac{e_0 + \cos \vartheta_0}{(1 + e_0 \cos \vartheta_0)^2} \delta \vartheta_0, \quad (10.4.14b)$$

$$\delta \dot{\rho}_x = -\cos \vartheta_0 \delta \dot{\vartheta}_0, \quad (10.4.15a)$$

$$\delta \dot{\rho}_y = -\sin \vartheta_0 \delta \dot{\vartheta}_0. \quad (10.4.15b)$$

В случае круговой орбиты ИС в соотношениях (10.4.11) — (10.4.15) достаточно положить $e_0 = 0$.

К приведенным условиям надо добавить начальное условие для характеристической скорости

$$q_0 = q(t_0) = 0. \quad (10.4.16)$$

В конечной точке на сфере влияния при $t = t_1$ траектория космического аппарата должна удовлетворять связям

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r})|_{t=t_1} = \rho_{\text{сф}}^2, \quad (10.4.17)$$

$$\mathbf{V}(t_1) = \mathbf{V}_{\text{сф}}, \quad (10.4.18)$$

где вектор $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ задан. Так как момент времени t_1 не задан, связи (10.4.17), (10.4.18) не зависят от t_1 , из условия трансверсальности (1.2.40) получаем: величину постоянной в первом интеграле $H(t_1) = 0$ (см. (1.2.47)), для функционала (10.4.6) (см. (1.2.41))

$$p_q(t_1) = -1 \quad (10.4.19)$$

и соотношение

$$(\mathbf{p}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{s}, \delta \mathbf{V})|_{t=t_1} = 0. \quad (10.4.20)$$

Поскольку на основании (10.4.18) вариация $\delta \mathbf{V}(t_1) = 0$, из (10.4.17) и (10.4.20) имеем

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{r}, \delta \mathbf{r})|_{t=t_1} &= 0, \\ (\mathbf{p}, \delta \mathbf{r})|_{t=t_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.4.21)$$

откуда, исключая вариацию $\delta \mathbf{r}$,

$$\mathbf{p}(t_1) \parallel \mathbf{r}(t_1). \quad (10.4.22)$$

Таким образом, в конечной точке на сфере влияния имеем условия (10.4.17), (10.4.18), (10.4.19) и (10.4.22). Условия (10.4.17),

(10.4.18) и (10.4.22) в рассматриваемой системе координат записываются в виде

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \rho_{\text{сф}}^2, \quad (10.4.23)$$

$$V_x(t_1) = V_{\text{сф } x}, \quad (10.4.24a)$$

$$V_y(t_1) = V_{\text{сф } y}, \quad (10.4.24б)$$

$$V_z(t_1) = V_{\text{сф } z}, \quad (10.4.24в)$$

$$\frac{p_x(t_1)}{x_1} = \frac{p_y(t_1)}{y_1} = \frac{p_z(t_1)}{z_1}. \quad (10.4.25)$$

Рассматриваемая краевая задача (см. конец раздела 1.2.3) имеет 14-й порядок, и ее решение зависит от 14 констант, 15-й неизвестной является истинная аномалия точки схода на орбите ИС θ_0 . Для определения указанных 15 неизвестных имеем 8 условий (10.4.11) — (10.4.13), (10.4.16) в начальной точке и 7 условий (10.4.19), (10.4.23) — (10.4.25) в конечной точке.

Поскольку оптимизируется положение точки схода на орбите ИС, к рассматриваемой задаче в начальной точке применим принцип окаймления (см. раздел 2.2.3). Функция переключения (1.2.35) для оптимальной траектории перелёта в начальной точке обращается в нуль (см. (2.2.133)):

$$\vartheta(t_0) = 0. \quad (10.4.26)$$

Вдоль оптимальной траектории имеет место первый интеграл (1.2.47):

$$H(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (10.4.27)$$

Заметим, что из трех условий (10.4.13), (10.4.26) и (10.4.27) независимыми являются только два (см. раздел 2.2.3).

б) Импульсная тяга. Как показано в разделах 2.2.1 и 2.2.2, с учетом исключения переменных q и p_q из рассмотрения и замены векторов в начальной и конечной точках траектории $\mathbf{V}$ их предельными значениями слева и справа, а векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ — предельными значениями справа и слева соответственно, условия трансверсальности (2.2.62), (2.2.63) для импульсной траектории оказываются аналогичны условиям трансверсальности для траектории с конечной тягой. Поэтому из (2.2.62) и (2.2.63) для функционала (10.4.6) получаем краевые условия, аналогичные краевым условиям для конечной тяги.

В начальной точке $t = t_0$ имеем 7 условий (см. (10.4.7), (10.4.8), (10.4.10)):

$$\mathbf{r}(t_0) = \rho(t_0), \quad (10.4.28)$$

$$\mathbf{V}^-(t_0) = \dot{\rho}(t_0), \quad (10.4.29)$$

$$(\mathbf{p}^+, \delta \mathbf{p}) + (\mathbf{s}^+, \delta \dot{\mathbf{p}}) \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (10.4.30)$$

В конечной точке при $t = t_1$ имеем 6 условий (см. (10.4.17), (10.4.18), (10.4.22)):

$$\mathbf{r}(t_1) = \rho_{\text{сф}}, \quad (10.4.31)$$

$$\mathbf{V}^+(t_1) = \mathbf{V}_{\text{сф}}, \quad (10.4.32)$$

$$\mathbf{p}^-(t_1) \parallel \mathbf{r}(t_1). \quad (10.4.33)$$

Приведенные условия в координатной форме выписываются аналогично случаю конечной тяги. Краевая задача для импульсной тяги имеет 12-й порядок, и ее решение зависит от 12 констант (см. конец раздела 2.2.2). 13-й неизвестной является истинная аномалия точки схода с орбиты ИС θ_0 . Для определения неизвестных констант имеем 13 условий (10.4.28) — (10.4.33).

Заметим, что на основании принципа окаймления (см. раздел 2.2.3) условие трансверсальности (10.4.30) эквивалентно условию (2.2.126):

$$\dot{s}^+(t_0) = 0. \quad (10.4.34)$$

Вдоль оптимальной импульсной траектории имеет место первый интеграл (см. (2.2.70))

$$H(t) = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (10.4.35)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1].$$

Из трех соотношений (10.4.30), (10.4.34) и (10.4.35) независимыми являются только два (см. раздел 2.2.3).

10.4.2. Схемы решения краевой задачи.

1°. Импульсная тяга, ньютоновское гравитационное поле. Для случая ньютоновского гравитационного поля будем полагать, что подозреваемая на оптимальность одно- или двухимпульсная фазовая траектория задана (см. разделы 10.2.2, 10.2.4, 10.3.2). Поэтому рассмотрим алгоритмы определения сопряженных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ на основе аналитического решения Ляпунова сопряженной системы (см. § 3.1) и способы проверки с их помощью условий строгой локальной оптимальности схем перелета. При этом необходимо различать два случая:

а) радиус сферы влияния планеты конечен, $\rho_{\text{сф}} < \infty$;

б) радиус сферы влияния планеты бесконечен (асимптотическая постановка внутренней задачи, см. раздел 10.1.3), $\rho_{\text{сф}} = \infty$.

1°а. *Ньютоновское гравитационное поле*, $\rho_{\text{сф}} < \infty$. Для определения пяти постоянных интегрирования A, B, D, E, F в решении (3.1.9) — (3.1.11) для вектора $\mathbf{s}$ и (3.1.19) — (3.1.21) для вектора $\mathbf{p}$ имеем следующие условия:

$$\mathbf{s}^+(t_0) = \frac{\Delta \mathbf{V}_0}{|\Delta \mathbf{V}_0|}, \quad (10.4.36)$$

$$\mathbf{p}^-(t_1) \parallel \mathbf{r}(t_1). \quad (10.4.37)$$

Шестая постоянная интегрирования, C , для рассматриваемых траекторий равна нулю:

$$C = 0. \quad (10.4.38)$$

Одно или два из скалярных условий (10.4.36), (10.4.37) могут быть замещены одним или двумя какими-либо из (10.4.30), (10.4.34), (10.4.35).

Приведенные соотношения можно использовать как в случае одноимпульсной, так и двухимпульсной траектории перелета. При двухимпульсном перелете дополнительно к указанным соотношениям имеем

$$s^-(t_1) = \frac{\Delta V_1}{|\Delta V_1|}, \quad \Delta V_1 \equiv \Delta V_{\text{сф}}. \quad (10.4.39)$$

Предположим, что из каких-либо пяти скалярных соотношений постоянные A, B, D, E, F найдены. Поскольку рассматриваемая траектория перелета состоит из одной кеплеровой дуги, требование строгой локальной оптимальности сводится к выполнению вдоль траектории условия (см. (2.2.89))

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in (t_0, t_1). \quad (10.4.40)$$

Если рассматриваемая фазовая траектория действительно является строго локально оптимальной, то из выполнения любых пяти краевых скалярных условий следует выполнение других краевых условий. Например, если для определения решения сопряженной системы использованы соотношения (10.4.36), (10.4.37), то в начальной точке имеет место (10.4.34), в конечной точке для двухимпульсных перелетов — соотношение (10.4.39) и т. п.

1°б. *Ньютоновское гравитационное поле*, $\rho_{\text{сф}} = \infty$. Как показано в разделе 2.2.4, из условия ограниченности функции $s(t)$ при $r \rightarrow \infty$ вытекает

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{p} = \mathbf{p}_\infty = 0, \quad (10.4.41)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{s} = \mathbf{s}_\infty. \quad (10.4.42)$$

Из (10.4.41) следует, что условие (10.4.37) можно считать удовлетворяющимся тождественно.

Условие ограниченности функции $s(t)$ при $r \rightarrow \infty$ приводит к следующим соотношениям для постоянных A, D, E, F (см. (3.2.50), (3.2.51)):

$$eD - \sqrt{e^2 - 1} A = 0, \quad (10.4.43)$$

$$-E + \sqrt{e^2 - 1} F = 0, \quad (10.4.44)$$

где e — эксцентриситет гиперболы перехода орбита ИС — сфера влияния. В разделе 3.2.3 показано, что условие (10.4.41), с одной

стороны, и условия (10.4.43), (10.4.44), с другой стороны, эквивалентны. Соотношения (10.4.43), (10.4.44) заменяют в рассматриваемом случае условия (10.4.37). Предельное значение вектора $s_\infty = s\{s_{\infty r}, s_{\infty t}, s_{\infty z}\}$ равно (см. (3.2.55))

$$s_\infty = \left\{ -\frac{A}{e} + B\sqrt{e^2 - 1}, -\frac{Ae}{\sqrt{e^2 - 1}}, \frac{Fe}{\sqrt{e^2 - 1}} \right\}. \quad (10.4.45)$$

Требование оптимальности импульса в бесконечно удаленной точке (на «сфере влияния») имеет вид (см. (2.2.157))

$$s_\infty = \frac{\Delta \mathbf{V}_1}{|\Delta \mathbf{V}_1|}. \quad (10.4.46)$$

При этом, согласно (10.4.41), для любой рассматриваемой траектории

$$\dot{s}_\infty = 0. \quad (10.4.47)$$

Что касается соотношений в начальной точке, то они совпадают с приведенными в разделе 1^а.

Условие строго локальной оптимальности записывается в виде, аналогичном (10.4.40):

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in (t_0, +\infty). \quad (10.4.48)$$

При наличии импульса в бесконечно удаленной точке

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1 - 0. \quad (10.4.49)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае определение векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ и проверка строгой локальной оптимальности схемы перелета производится точно так же, как и в случае конечного радиуса сферы влияния, с заменой соотношений (10.4.36) и (10.4.39) соотношениями (10.4.43), (10.4.44) и (10.4.45), (10.4.46) соответственно. Что касается условия (10.4.47), то оно оказывается несущественным.

Из изложенного ясно, что рассмотрение случая $\rho_{\text{сф}} = \infty$ до конца возможно только при наличии аналитического решения для сопряженного вектора $\mathbf{z}$.

2°. Импульсная тяга, численное интегрирование фазовой и сопряженной систем. В рассматриваемом случае сферу влияния всегда считаем конечной, $\rho_{\text{сф}} < \infty$. При анализе схем решения краевой задачи будем рассматривать два случая:

а) подозреваемая на оптимальность одно- или двухимпульсная фазовая траектория задана;

б) оптимальная фазовая траектория определяется в процессе решения краевой задачи.

2°а. Численное интегрирование сопряженной системы, фазовая траектория задана. Пусть подозреваемая на оптимальность одно- или двухимпульсная фазовая траектория перелета орбита ИС — сфера влияния известна. В этом случае решение сопряженной системы уравнений находится для установления строгой локальной оптимальности рассматриваемой фазовой траектории. Поэтому, как и выше, речь идет о проверке известного импульсного решения на оптимальность (см. раздел 3.3.2). Для составления алгоритма нахождения решения сопряженной системы воспользуемся общими соображениями, изложенными в разделе 3.3.2.

Для численного интегрирования сопряженной системы векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ должны быть заданы на одном из концов траектории. В качестве начальной точки целесообразно выбрать ту из граничных точек, в которой на векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ наложено больше условий, что позволяет уменьшить количество произвольно задаваемых параметров. Поскольку на орбите ИС аппарату всегда сообщается импульс (условие (10.4.36)) и имеет место условие трансверсальности (10.4.30), а на сфере влияния в общем случае имеет место лишь условие (10.4.33), в начальной точке t_0 имеем на два условия больше, чем в конечной точке t_1 . Поэтому сопряженную систему интегрируем от t_0 к t_1 (см. также ниже начало раздела 2°б).

Векторы $\mathbf{p}^+(t_0)$ и $\mathbf{s}^+(t_0)$ в точке t_0 удовлетворяют тем же условиям, что и выше в разделе 1°а: условию (10.4.36) и любым двум условиям из (10.4.30), (10.4.34) и (10.4.35). Условие (10.4.36) полностью определяет вектор $\mathbf{s}^+(t_0)$. Что касается вектора $\mathbf{p}^+(t_0) = \{p_x^+(t_0), p_y^+(t_0), p_z^+(t_0)\}$, то его компоненты удовлетворяют двум линейным алгебраическим уравнениям. В результате в начальной точке t_0 произвольно можно задать лишь одну компоненту вектора $\mathbf{p}^+(t_0)$, например $p_x^+(t_0)$.

На правом конце траектории t_1 сопряженная система в общем случае удовлетворяет лишь условию трансверсальности (10.4.33), которое перепишем в виде

$$\varphi_1(t_1) \equiv p_x^-(t_1) y_1 - p_y^-(t_1) x_1 = 0, \quad (10.4.50)$$

$$\varphi_2(t_1) \equiv p_y^-(t_1) z_1 - p_z^-(t_1) y_1 = 0. \quad (10.4.51)$$

Заметим, что если вектор $\mathbf{p}^-(t_1)$ не соответствует оптимальному решению, то функции $\varphi_1(t_1) \neq 0$, $\varphi_2(t_1) \neq 0$ характеризуют невызны в краевых условиях (10.4.50), (10.4.51). Таким образом, количество свободных параметров в рассматриваемой краевой задаче ($p_x^+(t_0)$) меньше количества краевых условий (10.4.50), (10.4.51), которые на них наложены. Отметим, что подобная ситуация типична для задач проверки строгой локальной оптимальности заданных фазовых импульсных траекторий.

Алгоритм нахождения решения сопряженной системы при фиксированной фазовой траектории близок к описанному в разделе

ле 3.3.2 общему алгоритму решения такого рода задач (см. соотношения (3.3.22) — (3.3.30)). В основе его лежит использование линейности сопряженной системы. В результате при фиксированной фазовой траектории вектор $\mathbf{p}^-(t_1)$ и функции $\varphi_1(t_1)$ (10.4.50) и $\varphi_2(t_1)$ (10.4.51) линейно зависят от компоненты $p_x^+(t_0)$. Это, как и в общем случае, позволяет построить простой одношаговый алгоритм решения задачи с заменой в указанных выше соотношениях раздела 3.3.2 вектора $\mathbf{p}^+(t_0)$ его компонентой $p_x^+(t_0)$.

Если рассматриваемая фазовая траектория строго локально оптимальна, одно и то же значение $p_x(t_0 + 0)$ должно одновременно удовлетворять двум уравнениям: (10.4.50) и (10.4.51).

Проверка строгой локальной оптимальности фазовой траектории производится точно так же, как и выше в разделе 1^а.

2^б. *Решение краевой задачи с помощью численного интегрирования фазовой и сопряженной систем (при заданной схеме перелета).* Пусть фазовая траектория не задана и должна быть определена в процессе решения краевой задачи. Оптимальной схемой перелета считаем по-прежнему рассмотренные выше одно- или двухимпульсную схемы.

Дополнительно к высказанным в разделе 2^а соображениям относительно целесообразности интегрирования системы уравнений от начальной точки t_0 к конечной t_1 заметим, что условие (10.4.31) — «протыкание» траекторией сферы влияния — элементарно удовлетворяется для любой траектории КА с монотонным возрастанием $r(t)$. Соотношение (10.4.31) при этом рассматривается в качестве условия остановки интегрирования. Выбор же условий на сфере влияния, обеспечивающих попадание на орбиту ИС, сам по себе представляет весьма сложную задачу. Поскольку на рассматриваемых одно- или двухимпульсных траекториях отсутствуют промежуточные импульсы, приведем алгоритмы решения краевой задачи только для этого случая.

1) Задаем ϑ_0 и тем самым $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(\vartheta_0)$ (см. (10.4.11)) $\mathbf{V}^-(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(\vartheta_0)$ (см. (10.4.12)).

2) Поскольку на орбите ИС КА всегда сообщается импульс, в качестве трех задаваемых параметров удобно ввести компоненты импульса скорости

$$\Delta \mathbf{V}(t_0) = \{\Delta V_{x0}, \Delta V_{y0}, \Delta V_{z0}\}. \quad (10.4.52)$$

Вектор $\mathbf{s}^+(t_0)$ при этом равен (см. (10.4.36))

$$\mathbf{s}^+(t_0) = \frac{\Delta \mathbf{V}(t_0)}{|\Delta \mathbf{V}(t_0)|}. \quad (10.4.53)$$

Скорость КА после импульса равна

$$\mathbf{V}^+(t_0) = \mathbf{V}^-(t_0) + \Delta \mathbf{V}(t_0). \quad (10.4.54)$$

3) Зная $s^+(t_0)$ и $V^+(t_0)$, можем, как и выше в разделе 2°а, в точке t_0 одновременно рассматривать любые два условия из (10.4.30), (10.4.34) и (10.4.35) как систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $p^+(t_0)$, из которых определяем $p^+(t_0)$ при заданной одной из компонент вектора $p^+(t_0)$, например $p_x^+(t_0)$.

Таким образом, при $t = t_0$ имеем пять свободно задаваемых параметров: ϑ_0 , $\Delta V(t_0)$ и одну из компонент вектора $p^+(t_0)$. Зная $r(t_0)$, $V^+(t_0)$, $p^+(t_0)$ и $s^+(t_0)$, можем начать интегрирование фазовой и сопряженной систем.

4) Выбирая равенство (10.4.31) в качестве условия остановки процесса интегрирования, имеем в точке $t = t_1$ пять условий (10.4.32), (10.4.33), которым должна удовлетворять оптимальная траектория. Подбор пяти задаваемых в начальной точке параметров проводится обычными численными методами решения двух точечных краевых задач. При этом необходимо различать два случая.

4а) Если $s(t_1) < 1$, то импульс на сфере влияния отсутствует, вектор V непрерывен при $t = t_1$ и имеем обычную краевую задачу с условиями (10.4.32), (10.4.33).

4б) Пусть

$$s^-(t_1) = 1 \quad (10.4.55)$$

и в точке $t = t_1$ КА сообщается импульс. Тогда

$$V^+(t_1) - V^-(t_1) = V_{сф}(t_1) - V^-(t_1) \parallel s^-(t_1). \quad (10.4.56)$$

Три условия (10.4.55), (10.4.56) заменяют теперь три условия (10.4.32).

Очевидно, что успешная реализация рассмотренного алгоритма зависит от наличия достаточно хорошего начального приближения для фазовых и сопряженных переменных в начальной точке траектории. Такое начальное приближение может быть получено с помощью результатов разделов 10.2.2, 10.2.4, 10.3.2 и указанного в 2°а алгоритма. Более подробно этот вопрос рассмотрен ниже, в разделе 10.4.3б.

3°. Копечная тяга. В случае конечной тяги, в отличие от импульсной, рассматривается только конечный радиус сферы влияния, $\rho_{сф} < \infty$. Кроме того, поскольку фазовая и сопряженная системы уравнений в общем случае на активных участках не интегрируются в аналитическом виде даже в ньютоновском гравитационном поле (см. § 1.3), рассматривается схема решения краевой задачи для численного интегрирования фазовой и сопряженной систем. Решение краевой задачи при этом состоит из двух этапов:

- а) построение исходного приближенного решения;
- б) получение точного численного решения краевой задачи.

В дальнейшем для определенности ограничимся рассмотрением перелетов орбита ИС — сфера влияния планеты с одним активным участком.

3°а. *Построение исходного приближенного решения для фазовой и сопряженной систем.* Приближенное построение фазовой траектории производим с помощью правила пересчета (см. § 4.2, раздел 4.2.2). Все величины, относящиеся к приближенным решениям фазовой и сопряженной систем, будем отмечать знаком « $\sim$ » сверху. В рассматриваемом случае точка старта с орбиты ИС выбирается оптимально. Длина активного участка, на основании (4.2.62), равна

$$\Delta \tilde{t} = \frac{c}{n_*} \left[1 - e^{-\frac{\Delta V_0}{c}} \right]. \quad (10.4.57)$$

Ограничимся рассмотрением таких величин $\Delta V_0/c$, что

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta V_0}{c}} \leq 0,6, \quad (10.4.58)$$

откуда

$$\frac{\Delta V_0}{c} \leq 0,9163. \quad (10.4.59)$$

В этом случае точка приложения оптимального импульса схода с орбиты ИС с достаточной точностью совпадает с серединой активного участка:

$$t_0 = \frac{\tilde{t}_0^+ + \tilde{t}_0^-}{2}. \quad (10.4.60)$$

Истинная аномалия точки старта с орбиты ИС $\tilde{\vartheta}_0^-$ отличается от истинной аномалии приложения импульса ϑ_0 (см. (4.2.65)),

$$\tilde{\vartheta}_0^- = \vartheta_0 - \delta \tilde{\vartheta}_0, \quad (10.4.61)$$

на величину $\delta \tilde{\vartheta}_0$ (см. (4.2.74)),

$$\delta \tilde{\vartheta}_0 = \frac{(\mathbf{V}_0)_\tau}{r_0} \frac{\Delta \tilde{t}_0}{2} + \frac{(\mathbf{e}_0)_\tau c^2}{r_0 n_*} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{n_*}{c} \frac{\Delta \tilde{t}_0}{2} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{n_*}{c} \frac{\Delta \tilde{t}_0}{2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (10.4.62)$$

где $(\mathbf{V}_0)_\tau$ и $(\mathbf{e}_0)_\tau$ — проекции вектора скорости движения по орбите ИС в точке приложения оптимального импульса $\mathbf{V}_0$ и единичного вектора импульса

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\Delta \mathbf{V}_0}{|\Delta \mathbf{V}_0|} \quad (10.4.63)$$

на направление трансверсали к орбите ИС в этой же точке, r_0 — радиальное расстояние до точки приложения импульса на орбите

ИС. В случае круговой орбиты ИС (см. раздел 10.4.1) в формуле (10.4.62) достаточно положить

$$(\mathbf{V}_0)_\tau \equiv r_0 \equiv 1. \quad (10.4.64)$$

Зная истинную аномалию $\tilde{\vartheta}_0^-$, с помощью соотношений (10.4.11), (10.4.12) находим начальные значения фазовых переменных $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\vartheta}_0^-)$ и $\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\vartheta}_0^-)$. Поскольку, в соответствии с правилом пересчета Π_2 (см. раздел 4.2.1), на активном участке вектор тяги коллинеарен вектору (10.4.63),

$$\tilde{\mathbf{T}} \parallel \mathbf{e}_0. \quad (10.4.65)$$

Условие (10.4.23) берется в качестве признака конца интегрирования.

Как показано в разделах 4.2.1 и 4.2.2, построенная таким образом приближенно оптимальная фазовая траектория удовлетворяет краевым условиям и условиям оптимальности с точностью порядка Δt_0^2 (см. ниже результаты расчета в разделе 10.4.3в).

Перейдем теперь к построению приближенного решения сопряженной системы $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ и p_q . Поскольку в процессе численного решения точной краевой задачи вектор тяги, согласно (1.2.34), (1.2.36), на каждой итерации определяется вектором $\mathbf{s}(t)$ и функцией переключения $\vartheta(t)$ (1.2.35), это решение должно, во-первых, с достаточной точностью определять длину активного участка, т. е. нули функции переключения $\vartheta(t)$, и, во-вторых, с достаточной точностью определять вектор $\mathbf{s}(t)$ на активном участке.

Зафиксируем построенную приближенно оптимальную фазовую траекторию. Обозначим сопряженные переменные и функцию переключения для оптимального импульсного решения через $\mathbf{p}_{\text{имп}}$, $\mathbf{s}_{\text{имп}}$ и $\vartheta_{\text{имп}}$ соответственно. Приведенный ниже алгоритм построения решения $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ и p_q , в частности получения значений этих величин в точке $\tilde{t}_0^-$, предложен А. С. Филатьевым.

Согласно (10.4.19)

$$p_q(t) = -1 \quad \forall t \in [t_0^+, t_1]. \quad (10.4.66)$$

Поскольку функция переключения

$$\vartheta(t) = s(t) + p_q(t) \quad (10.4.67)$$

и ее производная

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} + \frac{dp_q(t)}{dt} \quad (10.4.68)$$

непрерывны вдоль траектории (см. раздел 1.2.3), с учетом (10.4.66) в конце активного участка t_0^+ , соответствующем нулю

функции переключения (10.4.67), должно быть

$$s(t_0^+) = 1, \quad (10.4.69)$$

$$\left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{t_0^+} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_0^+}, \quad (10.4.70)$$

где, согласно (4.2.10), (10.4.69),

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_0^+} = -(\mathbf{s}, \mathbf{p})_{t_0^+}. \quad (10.4.71)$$

Потребуем, чтобы эти же условия выполнялись на приближенной фазовой траектории:

$$\tilde{s}(\tilde{t}_0^+) = 1, \quad (10.4.72)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\vartheta}}{dt} \right|_{\tilde{t}_0^+} = -(\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{t}_0^+), \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}_0^+)). \quad (10.4.73)$$

Согласно (2.2.109), (2.2.126) функция переключения

$$\vartheta_{\text{имп}}(t) = s_{\text{имп}}(t) - 1 \quad (10.4.74)$$

в окрестности точки t_0 имеет вид

$$\vartheta_{\text{имп}}(t) = s''_{\text{имп}}(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} + O(t - t_0)^3, \quad (10.4.75)$$

т. е. близка к симметричной параболе с вершиной в точке t_0 (рис. 10.4.1). Чтобы удовлетворить условию (10.4.72), положим

$$\tilde{s}(\tilde{t}_0^+) = \frac{s_{\text{имп}}(\tilde{t}_0^+)}{s_{\text{имп}}(\tilde{t}_0^+)} \quad (10.4.76)$$

и одновременно

$$\tilde{p}_q(\tilde{t}_0^+) = p_q(t_0^+) = -1. \quad (10.4.77)$$

Нормировка в (10.4.76) вектора $s_{\text{имп}}(t)$ с учетом (10.4.77), если ее рассмотреть в окрестности точки t_0 , соответствует «поднятию» функции

переключения $\vartheta_{\text{имп}}(t)$ (10.4.74) над осью t , такому, что (см. рис. 10.4.1)

$$\tilde{\vartheta}(\tilde{t}_0^+) = 0. \quad (10.4.78)$$

В разделе 2.2.3 показано, что при предельном переходе от конечной тяги к импульсной функция переключения $\vartheta(t)$ (10.4.67) непрерывно переходит в соответствующую функцию переключе-

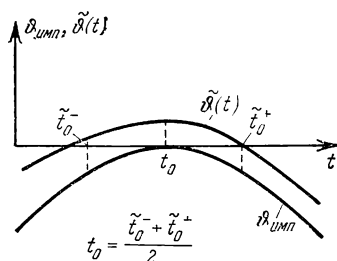


Рис. 10.4.1.

ния $\Phi_{\text{имп}}(t)$ (10.4.74) (см. рис. 2.2.3). Нормировка (10.4.76) в известном смысле соответствует обратному переходу от импульсной тяги к конечной, поэтому представляется во всяком случае достаточно рациональной (см. раздел 4.2.1 и формулу (4.2.43)). Что касается вектора $\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}_0^+)$, положим

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}_0^+) = \mathbf{p}_{\text{имп}}(\tilde{t}_0^+). \quad (10.4.79)$$

Такой выбор вектора $\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}_0^+)$ вместе с нормировкой (10.4.76) обеспечивает, с одной стороны, как следует из оценок (4.2.7), (4.2.8), достаточно точное определение величины $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\tilde{t}_0^+}$ (10.4.73),

с другой стороны — близость значений векторов $\tilde{\mathbf{s}}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$ к соответствующим значениям векторов $\mathbf{s}_{\text{имп}}$ и $\mathbf{p}_{\text{имп}}$ на всем промежутке пассивного полета.

Для получения приближенных значений сопряженных переменных в начальной точке $\tilde{t}_0^-$ проинтегрируем сопряженную систему от точки $\tilde{t}_0^+$ до точки $\tilde{t}_0^-$ с начальными условиями (10.4.76), (10.4.77) и (10.4.79), в результате чего получим значения

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}_0^-), \tilde{\mathbf{s}}(\tilde{t}_0^-), \tilde{p}_q(\tilde{t}_0^-). \quad (10.4.80)$$

Отметим важное для дальнейшего обстоятельство. Величины (10.4.80) не удовлетворяют, вообще говоря, условию трансверсальности (10.4.13), и точка $\tilde{t}_0^-$, в отличие от точки $\tilde{t}_0^+$, не является нулем функции переключения $\tilde{\Phi}(t)$ (см. рис. 10.4.1):

$$\tilde{\Phi}(\tilde{t}_0^-) \neq 0. \quad (10.4.81)$$

При этом, как нетрудно видеть, это условие удовлетворяется с точностью до величин порядка $\Delta \tilde{t}_0^2$. Однако, в силу построения, величины (10.4.80) таковы, что если их, вместе с приближенными значениями фазовых переменных, задать в качестве начальных условий в точке $\tilde{t}_0^-$ и проинтегрировать фазовую и сопряженную системы с учетом условий оптимальности для вектора тяги, то вектор тяги всюду на активном участке будет близок к вектору $\tilde{\mathbf{T}}$ (10.4.65) и длина активного участка будет близка к Δt_0 .

3°б. Алгоритм численного решения краевой задачи. Зная приближенное значение истинной аномалии точки схода с орбиты ИС (10.4.64) и приближенные значения сопряженных переменных (10.4.80), можно начать итерационный процесс получения численного решения краевой задачи. Как и в случае импульсных перелетов, интегрирование систем фазовых и сопряженных уравнений целесообразно проводить от начальной точки $\tilde{t}_0^- \equiv t_0$ на орбите ИС к конечной точке t_1 на сфере влияния (см. выше пункты 2°а и 2°б).

Приведем алгоритм решения краевой задачи.

1) Задаем ϑ_0 , например $\tilde{\vartheta}_0$, и тем самым $\mathbf{r}(t_0^-) = \rho(\vartheta_0)$, $\mathbf{V}(t_0^-) = \dot{\rho}(\vartheta_0)$.

2) Задаем $\mathbf{s}(t_0^-)$, $\mathbf{p}(t_0^-)$, $q(t_0^-) = 0$, $p_q(t_0^-)$.

На величины $\mathbf{s}(t_0^-)$, $\mathbf{p}(t_0^-)$ и $p_q(t_0^-)$ наложено две связи — равенство гамильтониана нулю:

$$H(t_0^-) = \left[(\mathbf{p}, \dot{\rho}) - \left(\mathbf{s}, \frac{\rho}{\rho^3} \right) + n_* \frac{T}{m} \vartheta \right] \Big|_{t=t_0^-} = 0, \quad (10.4.82)$$

и условие трансверсальности (10.4.13). Как показано в разделе 2.2.3, одно из этих условий можно заменить условием равенства нулю функции переключения:

$$\vartheta(t_0^-) = \mathbf{s}(t_0^-) + p_q(t_0^-) = 0. \quad (10.4.83)$$

3) Таким образом, при $t = t_0^-$ можно задать шесть независимых величин, в качестве которых удобно взять ϑ_0 , $p_q(t_0^-)$ и четыре компоненты векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$. Эти величины надо брать так, чтобы для оставшихся двух компонент векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ система из любых двух уравнений (10.4.13), (10.4.82) и (10.4.83) была разрешима. В качестве указанных компонент векторов $\mathbf{p}(t_0^-)$, $\mathbf{s}(t_0^-)$ можно взять соответствующие компоненты векторов $\tilde{\mathbf{p}}(t_0^-)$, $\tilde{\mathbf{s}}(t_0^-)$ (10.4.80).

4) Выбирая равенство (10.4.23) в качестве условия остановки процесса интегрирования, имеем в точке $t = t_1$ шесть условий (10.4.19), (10.4.24), (10.4.25), которым должна удовлетворять оптимальная траектория. Подбор задаваемых в начальной точке параметров проводится обычными численными методами решения двухточечных краевых задач (см. Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев [1], В. К. Исаев, В. В. Сонин [1], Ланс [1], Р. Ли [1], Н. Н. Мойсеев [1], Моррей [1], Хедли [1]). Численное решение соответствующей краевой задачи на ЭЦВМ (см. раздел 10.4.3в) выявило, что при применении указанного алгоритма важное значение имеет выбор признака конца активного участка t_0^+ . Это объясняется сильной чувствительностью скорости аппарата к изменению длины активного участка. Использование условия

$$\vartheta(t_0^+) = \mathbf{s}(t_0^+) + p_q(t_0^+) = 0 \quad (10.4.84)$$

в качестве такого признака оказывается не совсем удобным, так как, согласно приведенным оценкам, на активном участке

$$\vartheta(t) \ll 1 \quad \text{при} \quad \Delta t_0 \ll 1, \quad (10.4.85)$$

в то время как

$$|p_q| \approx 1, \quad s \approx 1 \quad \text{при} \quad \Delta t_0 \ll 1, \quad (10.4.86)$$

в результате чего накопление ошибки в p_q и s оказывает заметное влияние на величину ϑ . Поэтому условие (10.4.84) удобно заменить другим условием, однозначно определяющим длину активно-

го участка; в качестве такого условия можно взять достижение в конце активного участка заданной величины скорости $V(t_0^+)$, равной, на основании интеграла энергии (1.3.24),

$$V(t_0^+) = \sqrt{V_{сф}^2 + 2 \left(\frac{1}{\rho_{сф}} - \frac{1}{r(t_0^+)} \right)}. \quad (10.4.87)$$

При таком выборе признака конца активного участка условие на сфере влияния

$$V(t_1) = V_{сф} \quad (10.4.88)$$

всегда выполняется, поэтому количество краевых условий на сфере влияния уменьшается на одно. В качестве дополнительного условия, замыкающего краевую задачу, можно теперь взять условие (10.4.84) обращения функции переключения в нуль при значении t_0^+ , определяемом из (10.4.87).

10.4.3. Результаты численного решения для круговой орбиты ИС. В случае круговой орбиты ИС систему координат xuz (см. раздел (10.4.1) удобно выбрать так, чтобы вектор $V_{сф}$ находился в плоскости xz между положительными направлениями осей x и z (рис. 10.4.2); в проекциях на эти оси

$$V_{сф} = V_{сф} \{ \sqrt{\sigma}, 0, \sqrt{1-\sigma} \}. \quad (10.4.89)$$

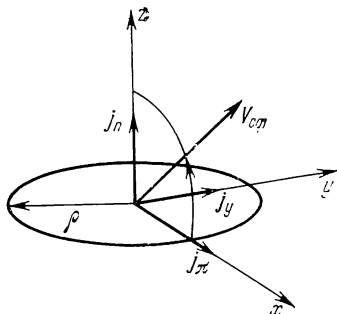


Рис. 10.4.2.

Поскольку задача решается в безразмерном виде, выбор размерного радиуса орбиты ИС ρ_0 и размерного радиуса сферы влияния планеты $\rho_{сф}$ не имеет принципиального значения. Однако, поскольку в дальнейшем использовались результаты приближенного исследования § 10.2 и § 10.3. на эти размерные радиусы налагалось условие

$$\frac{\rho_{сф}}{\rho_0} \gg 1. \quad (10.4.90)$$

При этом как в случае импульсной, так и конечной тяги рассматривались точные решения вариационных задач для конечных плачений

$$\frac{\rho_{сф}}{\rho_0} < \infty. \quad (10.4.91)$$

Конкретно далее везде рассматривался старт с круговой орбиты ИС Луны высотой 300 км над ее поверхностью с выходом на

сферу влияния Луны. При этом (см. таблицу 11.4.1)

$$\frac{\rho_{сф}}{\rho_0} = 32,385.$$

Подчеркнем еще раз, что величина $\rho_{сф}/\rho_0$ входит в решение вариационной задачи только через условие остановки процесса интегрирования (10.4.23) или (10.4.31), определяющее продолжительность полета КА, и через соотношение

$$\kappa = \frac{V_{кр}}{V_{кр}^2} \left(1 - 2 \frac{V_{кр}^2 \rho_0}{V_{кр}^2 \rho_{сф}} \right), \quad (10.4.92)$$

где $V_{кр}$ — скорость движения по круговой орбите радиуса ρ_0 (см. (10.2.30)), получаемое из (10.1.17) и (10.2.33) и определяющее $V_{сф}$ при заданных κ и $\rho_{сф}/\rho_0$. Из сказанного ясно (см. разделы 10.1.3, 10.2.2, 10.3.1), что при условии (10.4.90) конкретный выбор величины $\rho_{сф}/\rho_0$ не оказывает практически никакого влияния на структуру оптимальной траектории и численные результаты.

При фиксированной величине $\rho_{сф}/\rho_0$ решение вариационной задачи, рассматриваемой в безразмерном виде, зависит лишь от вектора $V_{сф}$, т. е., на основании (10.4.89) и (10.4.92), только от параметров κ и σ .

Во всех случаях решения краевых задач фазовые и сопряженные переменные вдоль траектории находились численным интегрированием на ЭЦВМ соответствующих систем уравнений. Такой подход для импульсных траекторий был выбран из методических соображений, поскольку он давал возможность апробировать наиболее общие алгоритмы решения краевой задачи (см. раздел 10.4.2, 2°), применимые как в ньютоновском, так и в произвольном гравитационном поле, и выяснить эффективность указанных общих алгоритмов, близких по своей структуре к общим алгоритмам решения краевых задач оптимизации импульсных перелетов. В случае же траекторий с конечной тягой такой подход обусловлен отсутствием аналитического решения для фазовых и сопряженных переменных на активных участках (см. раздел 10.4.2, 3°). Ввиду схожести общих алгоритмов решения краевых задач с конечной и импульсной тягой (см. раздел 10.4.2, 2° и 3°) при этом оказывается возможным как для конечной, так и импульсной тяги использовать с незначительными изменениями одни и те же программы решения краевых задач на ЭЦВМ. Последнее обстоятельство имеет немаловажное практическое значение.

Для реализации итерационного процесса нахождения точного численного решения краевой задачи во всех случаях использовался метод Ньютона (см. В. К. Исаев, В. В. Сонин [1], Н. Н. Моисеев [1], Хедли [1]).

а) *Проверка оптимальности приближенного импульсного решения.* Проверка оптимальности известного импульсного решения проводится с использованием алгоритма раздела 10.4.2, 2^оа.

При известных κ и σ и заданной схеме перелета оптимальные одно- или двухимпульсная фазовые траектории приближенно находятся на основе рассуждений, приведенных в разделах 10.2.2 и 10.3.2. Если эти схемы перелета оптимальны, то полученные для них истинная аномалия θ_0 точки старта с орбиты ИС и вектор импульса $\Delta V(t_0)$ приближенно, с точностью решения задач в разделах 10.2.2 и 10.3.2, являются искомыми оптимальными параметрами в начальной точке траектории. При этом находится также вектор $s^+(t_0)$ (см. (10.4.36)). В результате в начальной точке произвольно можно задать лишь одну компоненту вектора $p^+(t_0)$, в качестве которой была выбрана компонента $p_{x0}^+ \equiv p_x^+(t_0)$. Если принятая схема перелета оптимальна, то должно найтись такое значение p_{x0}^+ , при котором одновременно удовлетворяются (10.4.50), (10.4.51) и будет (см. (10.4.39), (10.4.40)) $s(t_1) < 1$ для одноимпульсного перелета, $s^-(t_1) \approx 1$ для двухимпульсного перелета.

На рис. 10.4.3—10.4.6 приведены примеры зависимостей $s^-(t_1)$, $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_2(t_1)$ от p_{x0}^+ , где $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_1)$ — невязки в краевых условиях (10.4.50), (10.4.51) соответственно. Из приведенных данных видно, что невязки $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_2(t_1)$ практически при одном и том же значении p_{x0}^+ обращаются в нуль. При этом же значении p_{x0}^+ функция $s^-(t_1)$ достигает минимума; величина $s^-(t_1)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Такой же характер указанных зависимостей получается при других κ , σ и при изменении p_{x0}^+ в более широком диапазоне ($-1 \leq p_{x0}^+ \leq +1$). Минимальная ошибка в выполнении условий (10.4.32), (10.4.50) и (10.4.51) для одноимпульсных перелетов составляет 10^{-3} . Для уменьшения ошибки в условии (10.4.32) при приближенной оптимизации двухимпульсных перелетов была учтена конечность размеров сферы влияния (в методике § 10.3 вместо (10.3.2) рассматривалось соотношение (10.4.92)). В результате минимальная ошибка в условиях (10.4.56), (10.4.50), (10.4.51) составила 10^{-3} , а в условии (10.4.55) — 10^{-1} .

С помощью найденного значения p_{x0}^+ находился вектор $p^+(t_0)$, и сопряженная система интегрировалась вдоль траектории от t_0 к t_1 . Соответствующие функции $s(r)$ показаны на рис. 10.4.7 для одноимпульсных перелетов и 10.4.8 для двухимпульсных перелетов штриховыми линиями. Из этих зависимостей следует, что после уточнения соответствующих решений (точного определения импульсной траектории перелета и нахождения соответствующего решения сопряженной системы, см. ниже пункт б)) можно

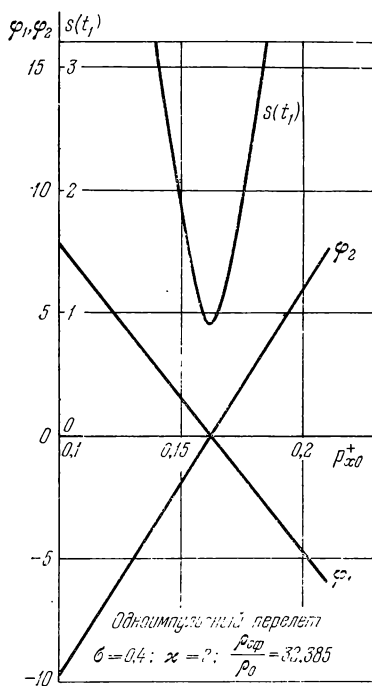


Рис. 10.4.3.

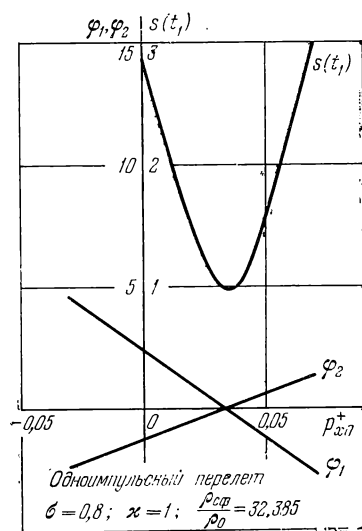


Рис. 10.4.4.

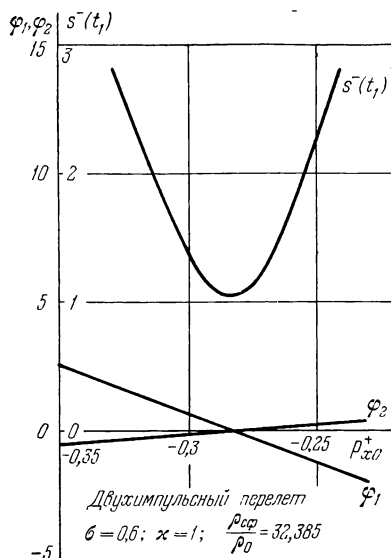


Рис. 10.4.5.

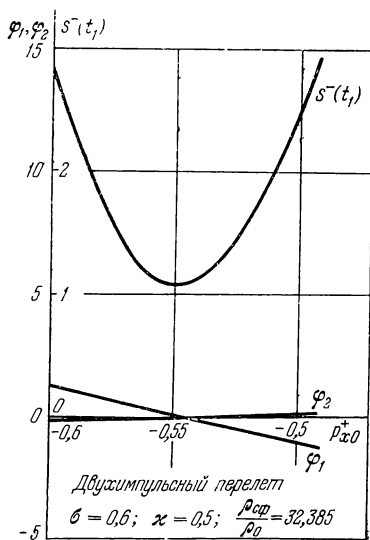


Рис. 10.4.6.

с достаточной уверенностью ожидать подтверждения строгой локальной оптимальности рассматриваемых перелетов.

б) *Решение краевой задачи для импульсной тяги.* Краевая задача решалась в соответствии с алгоритмом, изложенным в разделе 10.4.2, 2°б, с использованием метода Ньютона.

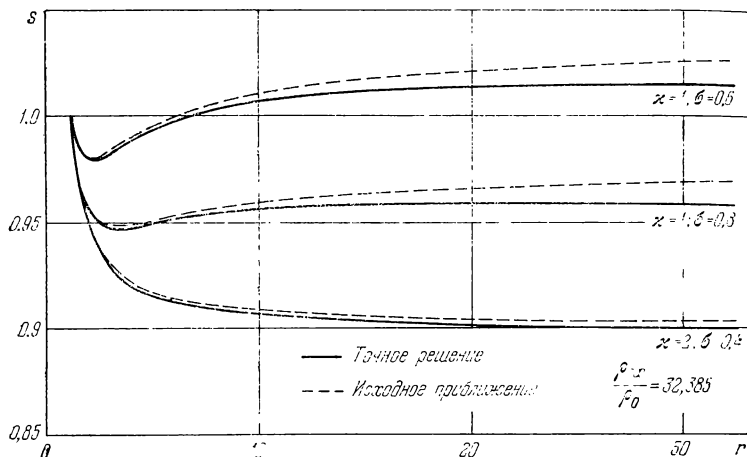


Рис. 10.4.7.

Начальные приближения для ϑ_0 , $\Delta V(t_0)$ и $s^+(t_0)$ брались из приближенного импульсного решения (см. разделы 10.2.2 и 10.3.2), а для $p_x^+(t_0)$ — из расчетов предыдущего пункта. Краевые условия (10.4.32), (10.4.50) и (10.4.51) для одноимпульсных перелетов были выполнены с точностью 10^{-5} , а краевые условия (10.4.55), (10.4.56), (10.4.50) и (10.4.51) для двухимпульсных перелетов — с точностью 10^{-3} .

На рис. 10.4.7 для одноимпульсных перелетов и рис. 10.4.8 для двухимпульсных перелетов приведены примеры исходных и окончательных зависимостей $s(r(t))$, поскольку, как показали расчеты, зависимость $r = r(t)$ практически близка к линейной. Поведение функции $s(r)$ объясняется, очевидно, установленными в разделах 2.2.4, 3.2.3 общими свойствами решения сопряженной системы на кеплеровых траекториях, проходящих через бесконечно удаленную точку. Поскольку положение точки старта с орбиты ИС выбирается оптимальным, в этой точке (см. (10.4.34)) $\dot{s}^+(t_0) = 0$ (в масштабе рис. 10.4.7, 10.4.8 эта особенность кривой $s(t)$ не воспроизводится). Качественные особенности зависимостей $s(r)$ (или соответствующих зависимостей $s(t)$), приведенных на рис. 10.4.7, и 10.4.8, являются общими для оптимальных импульсных перелетов орбита ИС — сфера влияния. Сравнение зависимо-

стей $s = s(r)$ на рис. 10.4.7 показывает, что по мере приближения параметров κ , σ к области оптимальности двухимпульсных перелетов (см. рис. 10.3.5) функция $s(r)$ деформируется, принимая характерный для двухимпульсных перелетов вид (см. рис. 10.4.8).

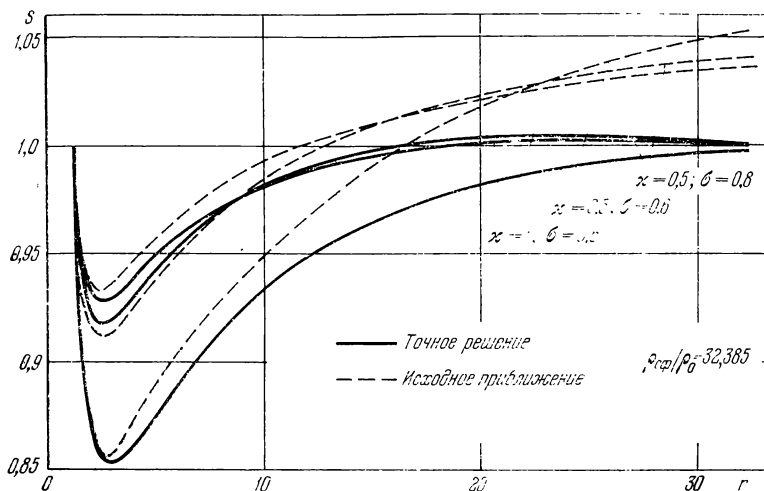


Рис. 10.4.8.

С целью численной апробации условия строгой локальной оптимальности (10.4.40) в области оптимальности двухимпульсных перелетов для значений параметров $\kappa = 1$, $\sigma = 0,6$ (см. рис. 10.3.5) был приближенно найден оптимальный одноимпульсный перелет и затем решена соответствующая краевая задача (т. е. выполнены все краевые условия для одноимпульсного перелета, являющиеся необходимыми условиями оптимальности (стационарности) перелета). Согласно общей теории импульсных перелетов (см. § 2.2) для соответствующей зависимости $s(r)$ на рис. 10.4.7 условие строгой локальной оптимальности перелета (10.4.40) оказалось нарушенным. Переход к оптимальному двухимпульсному перелету (см. соответствующую зависимость $s(r)$ на рис. 10.4.8) сразу же привел к выполнению (в пределах точности численного решения краевой задачи) условия строгой локальной оптимальности перелета (10.4.40).

На основании проведенного численного исследования вариационной задачи для импульсных перелетов можно сделать следующий основной вывод:

Одноимпульсная и двухимпульсная траектории являются строго локально оптимальными траекториями перехода между круговой орбитой ИС и сферой влияния планеты, в зависимости от ве-

личины и ориентации относительно плоскости орбиты ИС вектора скорости КА на сфере влияния $V_{сф}$. Параметры оптимальных траекторий приближенно, с достаточной степенью точности, могут быть определены с помощью методов и данных, приведенных в разделах 10.2.2 и 10.3.2.

в) *Решение краевой задачи для конечной тяги.* Ниже приведены результаты решения краевой задачи для конечной тяги, полученные А. С. Филатьевым.

Численное исследование краевой задачи для конечной тяги проводилось на основе точного решения для оптимального одноимпульсного перелета при значениях $\kappa = 1$, $\sigma = 0,8$.

Как следует из системы уравнений (1.2.10) — (1.2.12), решение краевой задачи с конечной тягой зависит от тяговооруженности n_* и скорости истечения газов из сопла двигательной установки c . Величина c в расчетах была принята постоянной: $c = 4000$ м/сек. Соответствующая безразмерная величина $c = 2,5826$. При этом величина $\Delta V_0/c$, где ΔV_0 — величина импульса на орбите ИС (см. (10.4.58), равна $\Delta V_0/c = 0,382$ и удовлетворяет неравенству (10.4.59). При заданной величине c , как следует из формул (10.4.57), (10.4.62), вместо тяговооруженности n_* удобно рассматривать параметр

$$|\dot{m}| = \frac{n_*}{c}, \quad (10.4.93)$$

который определяет, согласно (10.4.57), длину активного участка

$$\Delta \tilde{t}_0 = \frac{1}{|\dot{m}|} [1 - e^{-0,382}]. \quad (10.4.94)$$

С помощью изложенного в разделе 10.4.2, 3^а алгоритма, основанного на правиле пересчета (см. раздел 4.2.2), при различных значениях $|\dot{m}|$ находились близкие к оптимальной фазовые траектории. В качестве величины, характеризующей степень приближения фазовой траектории, полученной в соответствии с правилом пересчета, к соответствующей точной оптимальной траектории, рассматривались невязки скорости аппарата на сфере влияния

$$\Delta v_j = \tilde{V}_{сфj} - V_{сфj}, \quad j = x, y, z, \quad (10.4.95)$$

где $\tilde{V}_{сфj}$ — компоненты вектора скорости $V_{сф}$, полученного с помощью алгоритма 3^а в разделе 10.4.2. Заметим, что, поскольку величина $V_{сф}$ задана, для вычисления невязок (10.4.95) не требуется получения точного решения краевой задачи.

Зависимости невязок Δv_j (10.4.95) от величины $\frac{1}{|\dot{m}|}$, пропорциональной длине активного участка $\Delta \tilde{t}_0$, приведены на рис. 10.4.9. Как видно из этих графиков, зависимости имеют в целом

примерно параболический характер, что подтверждает полученный в разделе 4.2.2 вывод о точности правила пересчета: в рассматриваемом случае, когда положение точки старта с орбиты ИС оптимизируется и функционал имеет вид (10.4.6), краевые условия для фазовых переменных точной и приближенной траекторий должны отличаться на величины порядка $O(\tilde{\Delta t}_0^2)$.

На рис. 10.4.10 представлены зависимости невязок Δv_i (10.4.95) от выбора положения точки схода с орбиты ИС при конечной тяге по отношению к точке приложения импульса. Здесь $\tilde{\theta}_0^-$ — истинная аномалия, определяемая по правилу пересчета в соответствии с соотношениями (10.4.61), (10.4.62), $\tilde{\theta}_{0\text{н}}^-$ и $\tilde{\theta}_{0\text{к}}^-$ — истинные аномалии точек старта с орбиты ИС, получаемые при расположении импульса в начале и в конце активного участка соответственно. Эти результаты показывают, что минимальная ошибка в выполнении краевых условий на сфере влияния имеет место при расположении точки приложения импульса в середине (по времени) активного участка, что соответствует истинной аномалии точки схода с орбиты ИС $\tilde{\theta}_0^-$.

Для приближенного определения начальных значений сопряженных переменных использовался алгоритм $3^{\text{а}}$, рассмотренный в разделе 10.4.2. Для простоты принималось $t_0 = 0$. Система сопряженных уравнений из точки $\tilde{t}_0^+ = \frac{\Delta t_0}{2}$, соответствующей концу активного участка, интегрировалась до орбиты ИС ($\tilde{t}_0^- = -\frac{\Delta t_0}{2}$) и до сферы влияния с условиями при $t = \tilde{t}_0^+ = \frac{\Delta t_0}{2}$ (см. (10.4.76), (10, 4.77), (10.4.79)):

$$\mathbf{p}(\tilde{t}_0^+) = \mathbf{p}_{\text{имп}}\left(\frac{\tilde{\Delta t}_0}{2}\right), \quad \mathbf{s}(\tilde{t}_0^+) = \frac{\mathbf{s}_{\text{имп}}\left(\frac{\tilde{\Delta t}_0}{2}\right)}{\mathbf{s}_{\text{имп}}\left(\frac{\tilde{\Delta t}_0}{2}\right)}, \quad p_q(\tilde{t}_0^+) = -1, \quad (10.4.96)$$

где $\tilde{\Delta t}_0$ определяется соотношением (10.4.94). При этом для каждого значения $|\dot{m}|$ полученная в соответствии с правилом пересчета фазовая траектория фиксировалась.

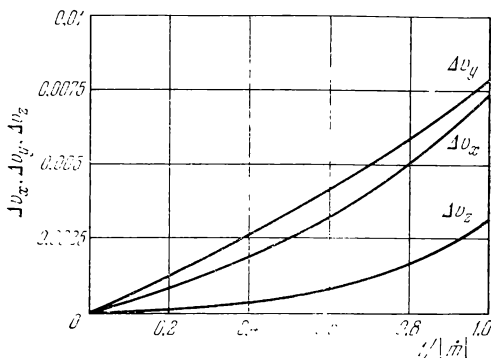


Рис. 10.4.9.

Для больших значений тяговооруженности ($|\dot{m}| \geq 50$ или $\Delta t_0 \leq 5 \cdot 10^{-3}$) после интегрирования сопряженной системы до орбиты ИС и сферы влияния из конца активного участка с условиями (10.4.96) получены относительные ошибки ε в сопряженных переменных (ε равен модулю разности импульсной и проинтегрированной переменных, отнесенной к импульсному значению): на орбите ИС $\varepsilon \leq 10^{-4}$, на сфере влияния $\varepsilon \leq 10^{-2}$. При уменьшении тяговооруженности и величины $|\dot{m}|$ величина ε возрастает.

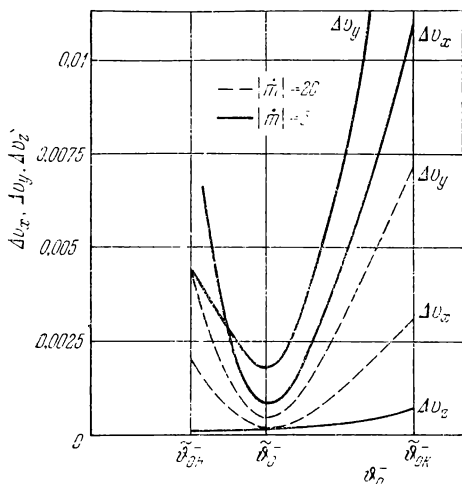


Рис. 10.4.10.

После получения начальных значений сопряженных переменных (10.4.80) в точке схода с орбиты ИС они вместе с

соответствующими фазовыми переменными в точке схода с орбиты ИС $\tilde{\theta}_0^-$ принимались в качестве исходных значений для решения точной краевой задачи. Краевая задача решалась в соответствии с алгоритмом 3^{го} раздела 10.4.2 с использованием метода Ньютона.

Таблица 10.4.1

$ \dot{m} $	$\tilde{\Delta t}_0$	s_{x0}	s_{y0}	s_{z0}	p_{x0}	p_{y0}	p_{z0}
100	0,00318	0,40225	-0,40863	0,81927	0,03227	-0,58985	-0,31079
		0,40136	-0,40832	0,81986	0,03283	-0,58980	-0,31060
50	0,00636	0,40230	-0,40957	0,81878	0,03123	-0,59027	-0,31209
		0,40218	-0,40965	0,81879	0,03117	-0,59033	-0,31224
20	0,0159	0,40244	-0,41239	0,81729	0,02808	-0,59150	-0,31598
		0,40240	-0,41266	0,81718	0,02780	-0,59165	-0,31638
5	0,0636	0,40298	-0,42661	0,80968	0,01206	-0,59730	-0,33525
		0,40328	-0,42776	0,80890	0,01050	-0,59872	-0,33686
1	0,318	0,39974	-0,50494	0,76405	-0,08174	-0,61834	-0,43367
		0,40602	-0,51021	0,75700	-0,08784	-0,62494	-0,43839

Примечание. Для каждого значения $|\dot{m}|$ в первой строке указаны величины, полученные по алгоритму пересчета, а во второй — величины, полученные в результате решения краевой задачи.

Расчеты, проведенные для значений параметра $|\dot{m}| \leq 100$, показали хорошую сходимость итерационного процесса. Следует отметить, что функция переключения (10.4.67), полученная при первом просчете с начальными данными, «снесенными» из конца активного участка, имеет в окрестности точки схода с орбиты ИС структуру, близкую к получаемой в оптимальном решении. Для исследованного диапазона значений $|\dot{m}|$ задаваемая точность в выполнении краевых условий (10^{-4}) достигается после одной-трех итераций.

В таблице 10.4.1 представлены исходные начальные значения сопряженных переменных, полученные с помощью алгоритма 3^а раздела 10.4.2, и начальные значения этих же переменных, полученные в результате точного решения краевой задачи. Видно, что точность определения начального приближения достаточно высока даже при умеренных значениях тяговооруженности ($|\dot{m}| \geq 1$) и в среднем относительная ошибка в значениях сопряженных переменных не превосходит 1%.

**СИНТЕЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ В СИСТЕМЕ
ЗЕМЛЯ — ЛУНА****§ 11.1. Вводные замечания. Обзор исследований**

11.1.1. Вводные замечания. Траектория КА в системе Земля — Луна схематически в рамках МСВ состоит из геоцентрических участков в поле тяготения Земли (внешняя задача МСВ): перелета между орбитой ИСЗ и сферой влияния Луны и перелета сферы влияния Луны — Земля с торможением в атмосфере Земли — и участков внутри сферы влияния Луны: перелетов сферы влияния Луны — орбита ИСЛ, сферы влияния Луны — поверхность Луны, орбита ИСЛ — поверхность Луны. Различные схемы полета КА характеризуются тем или иным сочетанием указанных перелетов. Существенная особенность всех схем полета — необходимость удовлетворять совокупности многочисленных требований и ограничений. Эти требования и ограничения обусловлены энергетическими возможностями аппарата, заданием диапазона допустимых параметров орбит ИСЗ и ИСЛ, допустимых мест посадки на Луне и Земле, продолжительностью пребывания экспедиции на Луне и т. п. Таким образом, исследование той или иной схемы полета в системе Земля — Луна представляет в общем случае задачу синтеза траектории. При анализе перелетов внутри сферы влияния Луны важное значение приобретает задача оптимизации этих перелетов, которую надо решать в рамках общей задачи синтеза траектории в целом.

Расчет и исследование отдельных участков траектории в системе Земля — Луна не представляют принципиальных затруднений и могут быть выполнены любым из известных методов (см. разделы 1.1.2—1.1.5). Основную трудность представляет «склейка» отдельных участков траектории в процессе решения задачи синтеза. Сравнительный анализ основных методов расчета траекторий (см. раздел 11.6.2) показывает, что синтез траекторий в системе Земля — Луна наиболее эффективно может быть проведен с использованием модифицированного метода сфер влияния — ММСВ.

В настоящей главе в рамках ММСВ рассматриваются методы синтеза и оптимизации траекторий для различных схем полета в системе Земля — Луна. Основное внимание уделено одной из наиболее сложных задач — синтезу траекторий облета Луны с возвращением в атмосферу Земли.

11.1.2. Краткий обзор исследований. Разработка аппаратов для осуществления полетов к Луне стала мощным стимулом к проведению многочисленных исследований. Значительная их часть посвящена вопросам механики полета лунных космических аппаратов — ЛКА. Сведения общего характера о параметрах и траекториях ЛКА приведены в работах Брешерса [1], Гилрута, Фейджета [1], В. И. Левантовского [1], Петерсена [1]. Общие вопросы механики полета ЛКА в системе Земля — Луна рассмотрены в работах Бэттина [2], В. А. Егорова [4, 2, 3], Миккелуэйта [2, 3], Л. И. Седова [1], Хиллера [1], Эрике [1], Эскобала [2], в Руководстве по полетам к Луне (США). Среди указанных работ особое место занимает работа В. А. Егорова [1]. В ней даны результаты проведенного в 1953—1955 гг. исследования траекторий полета в системе Земля — Луна, лежащих в плоскости орбиты Луны. Впервые была показана возможность и эффективность использования МСВ для исследования траекторий в системе Земля — Луна. В этой работе был поставлен и исследован ряд основных задач механики полета в системе Земля — Луна, в том числе задача о минимальных начальных скоростях ЛКА, о попадании в Луну, об однократном и периодическом облете Луны, о разгоне или торможении аппарата с помощью Луны. Результаты этого исследования были затем обобщены В. А. Егоровым в монографии [3].

Траектории полета Земля — Луна, включая траектории попадания в Луну и выхода на орбиту ИСЛ, рассмотрены в работах Бэттина, Миллера [1], Гоулда [1], Гоулдбаума, Ганкела [1], Грёбнера, Кэпа [1], Л. И. Гусева [4, 2], В. А. Егорова [1, 3], Кеворкяна, Брэчета [1], Лагерстрёма, Кеворкяна [1—4], Майнера, Эндрюса [1], Миккелуэйта [1], Миккелуэйта, Бутона [1], Нелсона [1], Нэйча [1], Пирса, Стэндиша [1], Розенбаума, Уилверта, Уонг Ченга [1], Тросса [1], Тюринга [1], Хасса, Хэймера, Мейера [1], Хёлкера, Бранда [1, 2], Хиллера [2], Шебехели [1], Шебехели, Пирса [1], Эскобала [2].

Траектории перелета Луна — Земля с входом в атмосферу Земли рассмотрены в работах Гапчински, Толсона [1], Далласа [1], В. В. Демешкиной, В. А. Ильина [1], В. А. Егорова [4, 5], В. А. Егорова, Н. И. Золотухиной, Н. М. Тесленко [1], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1], Ланкастера [1], Ланкастера, Кеворкяна [1], Ланкастера, Уокера, Мэнна [1], Магнесса, Пэйса, Пензо, Стейнера, Томпкинза [1], Снайдера, Тэйлора [1].

Окололунные маневры ЛКА включают перелеты между сферой влияния Луны и орбитой ИСЛ или поверхностью Луны, между орбитой ИСЛ и поверхностью Луны. Эти траектории исследованы как в рассмотренных выше работах В. В. Демешкиной, В. А. Ильина [1], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1], Майнера, Эндрюса [1], Миккелуэйта [1], Миккелуэйта, Бутона [1], Нелсона [1] вместе

с перелетами Земля — Луна и Луна — Земля, так и в работах Гантера [1], Гуинна [1], Джонса, Александера [1], В. К. Исаева, Б. Х. Давидсона [1, 2], Лассена [1], Пфедффера [1], Уэбба [1], Холла, Дитрича, Тирнэна [1].

Наиболее трудной среди различных траекторных задач полета ЛКА является задача о траекториях облета Луны (подробнее о постановке задачи облета см. раздел 11.2.1). Возможность реализации полета к Луне с минимальными энергетическими затратами, отсутствие необходимости в совершении окололунных маневров и разработки специальных ЛКА для выхода на орбиту ИСЛ, посадки на Луну и старта с нее и, как следствие этого, перспектива быстрой практической реализации такого полета — все это вместе взятое привело к многочисленным исследованиям траекторий облета Луны (В. А. Алешин, И. К. Бажинов, В. А. Мельбард [1], Грин, Левин [1], Джонсон [1], В. А. Егоров [1, 2, 3], В. А. Ильин [3, 4, 5], В. А. Ильин, В. В. Демешкина, Н. А. Истомина [1], Колдуэлл [1], Коой, Бергунс [1], Коул, Мьюир [1], М. Л. Лидов, Д. Е. Охочимский, Н. М. Тесленко [1], М. С. Лисовская [1], Майкл, Гриншоу [1], Мьеле [4], Пензо [1], Хантцше [1], Г. А. Чеботарев [1], Шванигер [1]).

Первые интересные с практической точки зрения результаты в задаче облета были получены в работах В. А. Егорова [1], М. С. Лисовской [1], Г. А. Чеботарева [1]. В работах М. С. Лисовской [1] и Г. А. Чеботарева [1] численно построено несколько примеров симметричных траекторий облета Луны — одни из первых примеров, доказавших существование пассивных траекторий Земля — Луна — Земля. В. А. Егоровым [1] дано детальное исследование траекторий облета Луны в плоском случае. Мьеле [4] в рамках ограниченной задачи трех тел провел достаточно полное рассмотрение траекторий облета Луны, симметричных относительно прямой Земля — Луна (ранее рассмотренных М. С. Лисовской [1], Г. А. Чеботаревым [1]) или плоскости, проходящей через эту прямую нормально к плоскости орбиты Луны.

Интересная задача об использовании гравитационного поля Луны при ее облете для выведения КА на стационарную орбиту ИСЗ исследована в работах В. В. Ивашкина [4], В. В. Ивашкина, Н. Н. Тупицина [1].

В работах Бартоса, Гринберга [1], Келли, Эдорнато [1], Келли, Эдорнато, Спейзера [1] рассмотрены вопросы аварийного перехода с различных точек траектории полета к Луне на траекторию возврата к Земле.

Анализ указанных работ показывает, что для исследования траекторий ЛКА до середины 60-х годов применялись в основном либо численное интегрирование уравнений движения в рамках ограниченных задач n тел, либо МСВ. Применение этих методов позволяет находить отдельные специальные классы траекторий,

для расчета которых имеется достаточная априорная информация. Однако их применение для общего параметрического исследования траекторий ЛКА оказалось затруднительным как вследствие очень большого объема вычислений, так и вследствие больших трудностей анализа и представления в обзорном виде полученной информации. При использовании этих методов отдельные участки траектории ЛКА в задачах перелетов Земля — Луна, Луна — Земля и особенно в задаче облета Луны нельзя рассматривать независимо друг от друга. В результате решение каждой задачи оказывается зависящим от большого числа параметров (в задаче облета их 11). Практическое применение МСВ к исследованию траекторий ЛКА показало, что его эффективное использование зависит от наличия достаточно хорошего исходного приближения, которое необходимо получать независимо. Очевидно, что большое практическое значение имеет возможность получения такого приближения регулярными методами, а не методами «проб и ошибок».

Указанные соображения привели В. А. Ильина к разработке приближенного метода синтеза траекторий ЛКА, в основу которого были положены общие соображения ММСВ (1966 г.). В работах В. А. Ильина [3, 4, 5] рассматривается приближенный метод синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли. На основе разработанного метода в работе В. А. Ильина, В. В. Демешкиной, Н. А. Истомина [1] проведено систематическое параметрическое исследование пространственных траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли.

В работах В. В. Демешкиной, В. А. Ильина [1], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1] основные положения приближенной методики синтеза траекторий облета Луны применены для решения в рамках ММСВ других задач синтеза траекторий ЛКА. ММСВ затем был эффективно использован в ряде последующих публикаций, посвященных анализу траекторий ЛКА (А. И. Авербух, Ю. Д. Волохов, Л. С. Королева [1], А. И. Авербух, Б. В. Гиршович [4], Л. И. Гусев [1, 2], В. В. Ивашкин [4], В. В. Ивашкин, Н. Н. Тупицын [4]).

Настоящая глава написана в основном по материалам исследований, опубликованных в работах В. В. Демешкиной, В. А. Ильина [1], В. А. Ильина [4, 5], В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1], В. А. Ильина, В. В. Демешкиной, Н. А. Истомина [4].

§ 11.2. Приближенный метод синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли

11.2.1. Постановка задачи. Основные предположения.

Задача облета Луны с возвращением в атмосферу Земли в общем виде формулируется следующим образом (рис. 11.2.1): при старте с заданной орбиты ИСЗ (точка O) совершить близкий облет Луны

(от точки 1 до точки 2) с возвращением в атмосферу Земли и последующей посадкой в заданном районе, причем такой облет в номинальном случае после конца стартового активного участка должен происходить беззатраты топлива.

Здесь и в дальнейшем под траекториями близкого облета Луны будем понимать траектории, для которых радиус периселения $\rho_{\pi c}$ значительно меньше радиуса сферы влияния Луны ρ_{cf} :

$$\frac{\rho_{\pi c}}{\rho_{cf}} \ll 1. \quad (11.2.1)$$

При этом высота облета Луны $H_{\pi c} = \rho_{\pi c} - R_L$, где R_L — радиус Луны, не должна превышать величину порядка нескольких тысяч километров.

Рис. 11.2.1.

Траектория облета практически всегда должна удовлетворять ряду условий. Будем предполагать, что:

задан диапазон высот облета Луны, $H_{\pi c}^{**} \leq H_{\pi c} \leq H_{\pi c}^*$;

продолжительность полета на участках Земля — Луна t_{01} , Луна — Земля t_{23} и полное время перелета Земля — Луна — Земля t_{Σ} ограничены, $t_{01} \leq t_{01}^*$, $t_{23} \leq t_{23}^*$, $t_{\Sigma} \leq t_{\Sigma}^*$;

ограничен импульс скорости ΔV_0 при старте с орбиты ИСЗ, $\Delta V_0 \leq \Delta V_0^*$;

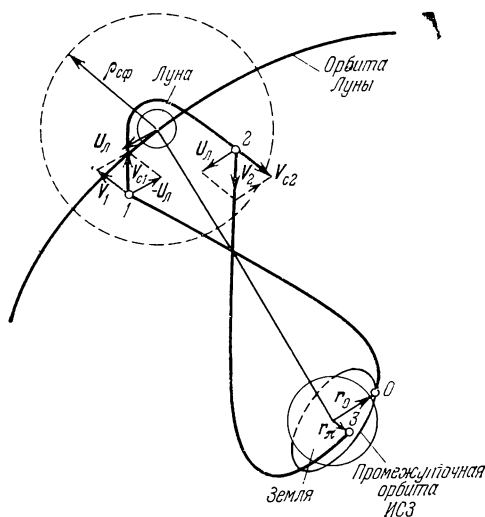
ограничен диапазон начальных геоцентрических расстояний r_0 , $r_0^{**} \leq r_0 \leq r_0^*$;

заданы наклонение плоскости перелета Земля — Луна к плоскости экватора i_0 , $i_0 = i_0^*$ (i_0^* — наклонение промежуточной орбиты ИСЗ), и высота условного перигея над поверхностью Земли H_{π} , $H_{\pi} = H_{\pi}^*$;

ограничен диапазон наклонений плоскости перелета Луна — Земля к плоскости экватора i_2 , $i_2^{**} \leq i_2 \leq i_2^*$, где i_2^{**} и i_2^* обусловлены выбором трасс и места посадки КА на Земле;

ограничен диапазон географических широт условного перигея φ_{π} , $\varphi_{\pi}^{**} \leq \varphi_{\pi} \leq \varphi_{\pi}^*$, где φ_{π}^* и φ_{π}^{**} выбираются из условия реализации заданной схемы спуска аппарата;

задано направление движения на приземных участках.



Кроме того, предполагается, что обеспечивается временная стыковка траектории, т. е. момент старта с орбиты ИСЗ и продолжительность полета выбраны так, чтобы облет Луны происходил при заданном ее положении на орбите, а возврат к Земле осуществлялся бы в момент времени, удобный для посадки КА в заданной точке поверхности Земли.

В дальнейшем под *синтезом траектории* будем понимать построение физически реализуемой траектории облета Луны, удовлетворяющей всем заданным условиям и ограничениям. В настоящее время для решения этой краевой задачи используются либо методы численного интегрирования уравнений движения КА на ЭЦВМ в сочетании с варьированием произвольных постоянных для удовлетворения заданных условий, либо приближенные методы МСВ, основанные на аппроксимации истинного движения КА движением по коническим сечениям последовательно в сферах влияния Земли, Луны и Земли и сведении краевой задачи к численному решению сложной системы конечных соотношений, либо методы синтеза с помощью ММСВ. Оказывается, что соответствующая краевая задача очень чувствительна к начальным условиям, а нужные решения ее лежат в очень узкой области изменения параметров. Поэтому не могут быть эффективно использованы обычные численные методы решения краевой задачи на ЭЦВМ. Решение задачи синтеза, даже при использовании МСВ, оказывается весьма затруднительным, поскольку не удается связать достаточно простыми соотношениями начальные условия и условия в момент подлета к сфере влияния Луны с заданными условиями облета Луны и возврата к Земле (см. § 11.6). Для построения эффективной методики решения краевой задачи необходимо рассмотреть такую схему синтеза траекторий облета Луны, которая позволила бы исключить фактическое моделирование реального движения КА с обязательным рассмотрением селеносферического движения между участками полета Земля — Луна и Луна — Земля.

Будем исходить из следующих предположений:

1°. Для геоцентрических участков полета радиус сферы влияния Луны $r_{\text{сф}} = 0$; при расчете геоцентрических участков можно все геоцентрические и селеноцентрические параметры на сфере влияния Луны заменять соответствующими параметрами, вычисленными в центре «непритягивающей» Луны.

2°. Воздействие гравитационного поля Луны на облетающий ее аппарат сводится к мгновенному развороту вектора входной селеноцентрической скорости V_{c1} на вектор выходной селеноцентрической скорости V_{c2} .

3°. Орбита Луны кеплерова, круговая, вектор орбитальной скорости Луны U_L за время облета остается неизменным.

Проанализируем сделанные предположения. Общий анализ предположений 1° и 2° дан в разделе 1.1.5. Предположения 1° и 2°

выполнялись бы точно, если бы поля геоцентрических и, следовательно, селеноцентрических скоростей на сфере влияния можно было бы считать строго параллельными.

На самом деле, считая отношение $\rho_{cf}/r_L = \varepsilon$ малой первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_L + O(\varepsilon), \\ \mathbf{V}_i &= \mathbf{V}_i^* + O(\varepsilon), \\ \mathbf{V}_{ci} &= \mathbf{V}_{ci}^* + O(\varepsilon), \\ i &= 1, 2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_i^*$ и $\mathbf{V}_{ci}^*$ вычисляются в центре Луны, $\mathbf{r}_L$, $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2$, — геоцентрические радиусы-векторы центра масс Луны и точки входа ($i = 1$) и выхода ($i = 2$) на селеносфере соответственно. При этом основные ошибки в приближенную траекторию облета по сравнению с рассчитанной, например, по МСВ вносятся именно непараллельностью первого порядка малости поля радиусов-векторов $\mathbf{r}_i$ и скоростей $\mathbf{V}_i$, $\mathbf{V}_{ci}$ при перемещении $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по сфере влияния Луны (см. также раздел 11.6.1). В самом деле, поскольку для траектории близкого облета векторы $\mathbf{V}_{ci}$ составляют с селеноцентрическими векторами точек входа и выхода ρ_{ci} малые углы, то непараллельность первого порядка малости приводит, вообще говоря, к сильному (порядка 1) отличию в селеноцентрической гиперболы и условиях возврата к Земле при переходе от приближенной траектории облета к траектории, получаемой по схеме сфер влияния. В рамках рассматриваемой ниже методики синтеза траекторий облета (см. раздел 11.2.3), в которой селеноцентрическое движение определяется после построения перелетов Земля — Луна и Луна — Земля, трудности, обусловленные отмеченным явлением, полностью обходятся. Указанная методическая ошибка, однако, играет существенную роль при переходе от ММСВ к более точным методам — МСВ и численному интегрированию. Следовательно, алгоритм перехода от приближенной траектории, полученной с помощью ММСВ, к получаемой более точными методами должен в значительной степени компенсировать указанный эффект непараллельности. При выполнении этого условия можно обеспечить близость приближенного решения, полученного в рамках ММСВ, к решению, получаемому более точными методами (подробнее см. раздел 11.6.1).

Истинное движение Луны по орбите отличается от равномерного движения по круговой орбите за счет эллиптичности орбиты, эксцентриситет которой равен $e_L = 0,0549$, вековых возмущений долготы восходящего узла Ω_L и долготы перигея π_L и периодических возмущений. Из теории Луны (см. Брауэр, Клеменс [1]) известно, что периодические возмущения, обусловленные в основ-

ном гравитационным воздействием Солнца, приводят к максимальным ошибкам в радиусе-векторе Луны порядка 2° по долготе и 3% по длине, т. е. значительно меньшим ошибки, вносимой пренебрежением эллиптичностью. Средние суточные изменения в Ω_L и λ_L составляют примерно $0,053^\circ$ и $0,111^\circ$ соответственно, поэтому за время перелета порядка нескольких суток изменениями этих величин можно пренебречь. Что касается эллиптичности орбиты Луны, то при привязке перелета к определенному интервалу дат ее можно частично учесть, принимая в качестве радиуса круговой орбиты Луны и скорости движения последней по орбите средние значения радиуса-вектора и величину трансверсальной скорости, вычисленные с учетом e_L (см. раздел 11.6.1). Единственным учитываемым фактором при это остается радиальная компонента орбитальной скорости Луны, составляющая величину порядка e_L от трансверсальной составляющей.

Из сказанного следует, что замена истинного движения Луны по орбите движением по средней (для данного интервала времени) орбите не приводит к существенному отличию приближенно-го решения от точного.

Перемещение Луны по орбите даже при условии $U_L = \text{const}$ (U_L вычисляется с учетом изложенного выше) приводит к тому, что векторы скорости Луны U_{L1} и U_{L2} , соответствующие моментам входа и выхода, отличаются друг от друга на величину, равную примерно $\omega_L^2 t_{12}^2 r_L$, где ω_L — средняя угловая скорость движения Луны по орбите, t_{12} — время движения аппарата в пределах сферы влияния Луны. Это различие приводит к дополнительной ошибке вычисления величин V_{ci} , $i = 1, 2$, по сравнению с истинными величинами. Поскольку обычно t_{12} составляет величину порядка 1 суток или менее, ошибка в V_{ci} , обусловленная изменением вектора U_L , не превосходит ошибки, обусловленной предположениями 1° и 2° . Очевидно, что между этими двумя типами ошибок в V_{ci} можно не делать различия и рассматривать их в едином плане как ошибки первого порядка малости в V_{ci} (см. раздел 11.6.1).

В рассмотренной схеме облета время полета аппарата вычисляется с точностью до величин первого порядка малости, что не дает возможности произвести точную привязку траектории к определенному моменту старта с заданного пункта на Земле и выполнить условие возврата аппарата в заданную точку поверхности Земли. Привязка траектории к определенному моменту старта не представляет затруднений и всегда может быть осуществлена, если известно достаточно точно время полета от точки старта с орбиты ИСЗ до точки входа на сфере влияния Луны. Практически такая привязка сводится к жесткому повороту всей траектории вместе с движущейся по орбите Луной на угол, не превышающий суточного изменения средней долготы Луны в орбите, т. е.

разворачивается под действием гравитационного поля Луны на угол 2δ (рис. 11.2.2), сохраняя свою величину, что можно записать в виде двух условий облета:

$$|\mathbf{V}_{c1}| = |\mathbf{V}_{c2}| = V_c, \quad (11.2.3)$$

$$(\mathbf{V}_{c1}, \mathbf{V}_{c2}) = V_c^2 \cos 2\delta. \quad (11.2.4)$$

Замечая, что

$$V_c^2 = V_i^2 + U_{\text{л}}^2 - 2(\mathbf{V}_i, \mathbf{U}_{\text{л}}), \quad i = 1, 2, \quad (11.2.5)$$

перепишем (11.2.3) в виде

$$V_1^2 - 2(\mathbf{V}_1, \mathbf{U}_{\text{л}}) = V_2^2 - 2(\mathbf{V}_2, \mathbf{U}_{\text{л}}). \quad (11.2.6)$$

Используя (11.2.5), преобразуем (11.2.4) так:

$$V_1^2 + V_2^2 - 2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = 4V_c^2 \sin^2 \delta. \quad (11.2.7)$$

Поскольку $\mathbf{U}_{\text{л}}$ направлен всегда по трансверсали к геоцентрическому радиусу-вектору $\mathbf{r}_{\text{л}}$, проведенному в центр Луны, $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ удобно раскладывать на радиальные V_{ir} и трансверсальные V_{it} составляющие (рис. 11.2.3). В результате имеем

$$(\mathbf{V}_i, \mathbf{U}_{\text{л}}) = V_{it} V_{\text{л}} \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2, \quad (11.2.8)$$

где α_i — угол между векторами $\mathbf{V}_{it}$ и $\mathbf{U}_{\text{л}}$. Далее,

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = V_{1t} V_{2t} \cos \alpha_3 + (\mathbf{V}_{1r}, \mathbf{V}_{2r}). \quad (11.2.9)$$

В (11.2.9) через α_3 обозначен угол между векторами $\mathbf{V}_{1t}$ и $\mathbf{V}_{2t}$.

В соответствии с предположениями 1° и 2° будем считать, что $\mathbf{V}_{c1}$ и $\mathbf{V}_{c2}$ заданы на сфере влияния Луны; угол между ними 2δ (рис. 11.2.2).

Обозначая $\rho_{\text{сф}}$ радиус сферы влияния Луны, e_c и a_c — эксцентриситет и действительную полуось селеноцентрической гиперболы и считая $\rho_{\text{лс}}/\rho_{\text{сф}}$ малой первого порядка (см. (11.2.1)), получим (см. раздел 10.1.3) с точностью до малых порядка $(\rho_{\text{лс}}/\rho_{\text{сф}})^2$ $\sin \delta = 1/e_c$, или, выражая e_c через $\rho_{\text{лс}}$ и a_c с помощью (10.1.17), (10.1.18) и (10.1.27),

$$\sin \delta = \left[1 + \frac{\rho_{\text{лс}}}{\mu_{\text{л}}} \left(V_c^2 - 2 \frac{\mu_{\text{л}}}{\rho_{\text{сф}}} \right) \right]^{-1}, \quad (11.2.10)$$

где $\rho_{\text{лс}}$ — расстояние от центра Луны до перицентра селеноцентрической гиперболы, $\mu_{\text{л}}$ — гравитационная постоянная Луны. Поскольку $\rho_{\text{лс}} = R_{\text{л}} + H_{\text{лс}}$, где $R_{\text{л}}$ — радиус Луны, $H_{\text{лс}}$ — высота перицентра гиперболы над поверхностью Луны, перепишем (11.2.10) в виде

$$\sin \delta = \left[1 + (1 + \bar{H}_{\text{лс}}) \left(\frac{V_c^2}{V_{\text{л}}^2} - 2 \frac{R_{\text{л}}}{\rho_{\text{сф}}} \right) \right]^{-1}, \quad (11.2.11)$$

где $\bar{H}_{\pi c} = H_{\pi c}/R_{\text{Л}}$, $V_{1\text{Л}} = \sqrt{\mu/R_{\text{Л}}}$ — первая космическая скорость на поверхности Луны.

Как показывают расчеты (см. § 11.4), для всех имеющих практический смысл траекторий облета Луны $e_c \geq 1,5$, причем наименьшие значения e_c соответствуют предельно низким высотам облета $H_{\pi c} \approx 0$. Отсюда и из сказанного в разделе 10.1.3 следует, что соотношение (11.2.11) для всех траекторий близкого облета Луны ($\rho_{\pi c}/\rho_{\text{сф}} \leq 0,3 \div 0,4$) с достаточной степенью точности определяет воздействие гравитационного поля Луны на облетающий ее аппарат.

Используя предыдущие формулы, получим окончательно приближенные уравнения облета Луны в виде

$$V_1^2 - 2V_{1r}U_{\text{Л}} \cos \alpha_1 = V_2^2 - 2V_{2r}U_{\text{Л}} \cos \alpha_2, \quad (11.2.12)$$

$$\begin{aligned} V_1^2 + V_2^2 - 2V_{1r}V_{2r} \cos \alpha_3 - 2(\mathbf{V}_{1r}, \mathbf{V}_{2r}) = \\ = 4V_c^2 \left[1 + (1 + \bar{H}_{\pi c}) \left(\frac{V_c^2}{V_{1\text{Л}}^2} - 2 \frac{R_{\text{Л}}}{\rho_{\text{сф}}} \right) \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (11.2.13)$$

$$V_c^2 = V_1^2 + U_{\text{Л}}^2 - 2V_{1r}U_{\text{Л}} \cos \alpha_1 = V_2^2 + U_{\text{Л}}^2 - 2V_{2r}U_{\text{Л}} \cos \alpha_2. \quad (11.2.14)$$

Рассмотрим схему геоцентрического движения КА и получим соотношения, определяющие ориентацию плоскостей перелета Земля — Луна и Луна — Земля относительно плоскости орбиты Луны и положение в них радиуса-вектора КА.

Движение Луны и аппарата рассматривается в геоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат xuz (см. рис. 11.2.3): ось x направлена в точку весеннего равноденствия, ось z направлена в сторону Северного полюса мира, ось y дополняет систему до правой.

Геоцентрические радиусы-векторы Луны и аппарата задаем модулем радиуса-вектора r , наклонением орбиты к плоскости земного экватора i , долготой восходящего узла Ω и аргументом широты u . Таким образом, имеем для Луны $\mathbf{r}_{\text{Л}}(r_{\text{Л}}, i_{\text{Л}}, \Omega_{\text{Л}}, u_{\text{Л}})$; для КА на участке перелета Земля — Луна в начальный момент времени $\mathbf{r}_0(r_0, i_0, \Omega_0, u_0)$, в конечный момент времени $\mathbf{r}_1(r_1, i_1, \Omega_1, u_1)$; на участке перелета Луна — Земля в начальный момент времени $\mathbf{r}_2(r_2, i_2, \Omega_2, u_2)$, в конечный момент времени (прохождение перигея) $\mathbf{r}_3(r_3, i_3, \Omega_3, u_3)$.

Введем в рассмотрение правую прямоугольную селеноцентрическую систему координат $x_c y_c z_c$ (см. рис. 11.2.3). Ось x_c направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора центра масс Луны $\mathbf{r}_{\text{Л}}$; ось y_c совпадает с направлением вектора скорости центра масс Луны $\mathbf{U}_{\text{Л}}$; ось z_c нормальна к плоскости орбиты Луны. Элементы матрицы $\mathfrak{M}_{\text{с.л.л.}}$ направляющих косинусов системы $x_c y_c z_c$

относительно системы $x y z$

$$\mathfrak{M}_{\text{с экв}} = \begin{vmatrix} x_c & y_c & z_c \\ l_{1c} & l_{2c} & l_{3c} \\ m_{1c} & m_{2c} & m_{3c} \\ n_{1c} & n_{2c} & n_{3c} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad (11.2.15)$$

выражаются через орбитальные элементы $\Omega_{\text{Л}}$, $u_{\text{Л}}$ и $i_{\text{Л}}$ следующими формулами (Бэттин [2]):

$$l_{1c} = \cos \Omega_{\text{Л}} \cos u_{\text{Л}} - \sin \Omega_{\text{Л}} \sin u_{\text{Л}} \cos i_{\text{Л}}, \quad (11.2.16a)$$

$$l_{2c} = -\cos \Omega_{\text{Л}} \sin u_{\text{Л}} - \sin \Omega_{\text{Л}} \cos u_{\text{Л}} \cos i_{\text{Л}}, \quad (11.2.16б)$$

$$l_{3c} = \sin i_{\text{Л}} \sin \Omega_{\text{Л}}, \quad (11.2.16в)$$

$$m_{1c} = \sin \Omega_{\text{Л}} \cos u_{\text{Л}} + \cos \Omega_{\text{Л}} \sin u_{\text{Л}} \cos i_{\text{Л}}, \quad (11.2.17a)$$

$$m_{2c} = -\sin \Omega_{\text{Л}} \sin u_{\text{Л}} + \cos \Omega_{\text{Л}} \cos u_{\text{Л}} \cos i_{\text{Л}}, \quad (11.2.17б)$$

$$m_{3c} = -\cos \Omega_{\text{Л}} \sin i_{\text{Л}}, \quad (11.2.17в)$$

$$n_{1c} = \sin u_{\text{Л}} \sin i_{\text{Л}}, \quad (11.2.18a)$$

$$n_{2c} = \cos u_{\text{Л}} \sin i_{\text{Л}}, \quad (11.2.18б)$$

$$n_{3c} = \cos i_{\text{Л}}. \quad (11.2.18в)$$

Направляющие косинусы l_1 , m_1 , n_1 вектора $\mathbf{r}_1$ в системе $x y z$ выражаются через Ω_0 , i_0 и u_1 формулами (11.2.16a), (11.2.17a) и (11.2.18a).

В соответствии с принятой схемой геоцентрического движения (ММСВ!) в конечный момент перелета Земля — Луна имеем условие

$$\mathbf{r}_1(r_1, i_0, \Omega_0, u_1) = \mathbf{r}_{\text{Л}}(r_{\text{Л}}, i_{\text{Л}}, \Omega_{\text{Л}}, u_{\text{Л}}). \quad (11.2.19)$$

Приравняв направляющие косинусы этих векторов в системе $x y z$, получим систему уравнений для определения Ω_0 и u_1 при $i_0 = \text{const}$:

$$l_1 = \cos \Omega_0 \cos u_1 - \sin \Omega_0 \sin u_1 \cos i_0 = l_{1c}, \quad (11.2.20a)$$

$$m_1 = \sin \Omega_0 \cos u_1 + \cos \Omega_0 \sin u_1 \cos i_0 = m_{1c}, \quad (11.2.20б)$$

$$n_1 = \sin u_1 \sin i_0 = n_{1c}. \quad (11.2.20в)$$

Из (11.2.20в)

$$\sin u_1 = \frac{\sin i_{\text{Л}} \sin u_{\text{Л}}}{\sin i_0}. \quad (11.2.21)$$

Из (11.2.20a) и (11.2.20б) имеем

$$\cos \Omega_0 = \frac{1}{1 - n_{1c}^2} (l_{1c} \cos u_1 + m_{1c} \sin u_1 \cos i_0), \quad (11.2.22a)$$

$$\sin \Omega_0 = \frac{1}{1 - n_{1c}^2} (m_{1c} \cos u_1 - l_{1c} \sin u_1 \cos i_0). \quad (11.2.22б)$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{U}_\Pi = U_\Pi(l_{2c}, m_{2c}, n_{2c})$ и $\mathbf{V}_{1\tau} = V_{1\tau}(l_2, m_2, n_2)$, где направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 выражаются через Ω_0, i_0, u_1 теми же формулами, что и l_{2c}, m_{2c}, n_{2c} через Ω_Π, i_Π, u_Π . Очевидно,

$$\cos \alpha_1 = l_2 l_{2c} + m_2 m_{2c} + n_2 n_{2c}. \quad (11.2.23)$$

Вычисляя сумму первых двух членов в (11.2.23) и исключая $\cos \Omega_0, \sin \Omega_0$ с помощью (11.2.22), получим

$$l_2 l_{2c} + m_2 m_{2c} = \frac{1}{1 - n_{1c}^2} [-\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 i_0 (l_{1c} l_{2c} + m_{1c} m_{2c}) + \\ + \cos i_0 (l_{1c} m_{2c} - m_{1c} l_{2c})]. \quad (11.2.24)$$

Замечая, что

$$l_{1c} l_{2c} + m_{1c} m_{2c} + n_{1c} n_{2c} = (\mathbf{r}_\Pi^0, \mathbf{U}_\Pi^0) = 0,$$

$$l_{1c} m_{2c} - m_{1c} l_{2c} = [\mathbf{r}_\Pi^0, \mathbf{U}_\Pi^0]_z = \cos i_\Pi,$$

где $\mathbf{r}_\Pi^0 = \mathbf{r}_\Pi / |\mathbf{r}_\Pi|$, $\mathbf{U}_\Pi^0 = \mathbf{U}_\Pi / |\mathbf{U}_\Pi|$, и преобразуя с помощью этих соотношений (11.2.24), получим после ряда упрощений

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos u_\Pi \sin i_\Pi \cos u_1 \sin i_0 + \cos i_0 \cos i_\Pi}{1 - \sin^2 u_\Pi \sin^2 i_\Pi}. \quad (11.2.25)$$

Из условия совпадения радиусов-векторов аппарата и Луны в начальной точке перелета Луна — Земля:

$$\mathbf{r}_2(r_2, i_2, \Omega_2, u_2) = \mathbf{r}_\Pi(r_\Pi, i_\Pi, \Omega_\Pi, u_\Pi), \quad (11.2.26)$$

как и выше, получим

$$\sin u_2 = \frac{\sin i_\Pi}{\sin i_2} \sin u_\Pi, \quad (11.2.27)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\cos u_\Pi \sin i_\Pi \cos u_2 \sin i_2 + \cos i_2 \cos i_\Pi}{1 - \sin^2 u_\Pi \sin^2 i_\Pi}. \quad (11.2.28)$$

Чтобы вычислить $\sin \alpha_1$, рассмотрим векторное произведение единичных векторов $\mathbf{U}_\Pi^0$ и $\mathbf{V}_{1\tau}^0 = \mathbf{V}_{1\tau} / |\mathbf{V}_{1\tau}|$. Очевидно,

$$[\mathbf{U}_\Pi^0, \mathbf{V}_{1\tau}^0] = \sin \alpha_1 \mathbf{r}_\Pi^0, \quad (11.2.29)$$

причем для вычисления $\sin \alpha_1$ достаточно рассмотреть одну из проекций равенства (11.2.29) на оси x, y, z , имеющую наиболее простой вид. Проектируя соотношение (11.2.29) на ось z , используя соответствующие направляющие косинусы и производя выкладки, аналогичные проведенным при выводе формулы (11.2.25), получим

$$\sin \alpha_1 = \frac{\cos u_1 \sin i_0 \cos i_\Pi - \cos u_\Pi \sin i_\Pi \cos i_0}{1 - \sin^2 u_\Pi \sin^2 i_\Pi}. \quad (11.2.30)$$

Аналогично

$$\sin \alpha_2 = \frac{\cos u_2 \sin i_2 \cos i_{\text{Л}} - \cos u_{\text{Л}} \sin i_{\text{Л}} \cos i_2}{1 - \sin^2 u_{\text{Л}} \sin^2 i_{\text{Л}}}. \quad (11.2.31)$$

Знание $\cos \alpha_i$ и $\sin \alpha_i$ позволяет вычислить α_i с учетом четверти. При этом (см. рис. 11.2.3)

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (11.2.32)$$

Из (11.2.29) следует, что $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, когда поворот от $\mathbf{U}_{\text{Л}}$ к $\mathbf{V}_{\text{Л}}$, если смотреть в направлении от Луны к Земле, происходит против часовой стрелки. Для определения величин u_1 и u_2 дополнительно к (11.2.21) и (11.2.27) надо задавать $\text{sign} \cos u_1$, $\text{sign} \cos u_2$. Если $\cos u_2 < 0$, то перелет от Луны к Земле происходит через Южный полюс; если же $\cos u_2 > 0$ — через Северный полюс. Что касается $\cos u_1$, то здесь имеем прямо противоположную картину: при $\cos u_1 < 0$ имеем перелет Земля — Луна через Северный полюс, а при $\cos u_1 > 0$ — через Южный полюс.

Если ограничиться рассмотрением перелетов, для которых

$$i_{\text{Л}} \leq i_0, \quad i_2 \leq \pi - i_{\text{Л}}, \quad (11.2.33)$$

то из (11.2.21), (11.2.27), (11.2.30), (11.2.31) получим

$$\text{sign} \alpha_i = \text{sign} \cos u_i, \quad i = 1, 2. \quad (11.2.34)$$

Рассмотренная схема геоцентрического движения аппарата и полученные соотношения позволяют дать простую и наглядную классификацию траекторий облета Луны. В соответствии с допущением 1° (см. (11.2.19), (11.2.26)) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{\text{Л}}$ и геоцентрическое движение аппроксимируется двумя дугами конических сечений, лежащих в плоскостях, проходящих через радиус-вектор $\mathbf{r}_{\text{Л}}$ и составляющих углы α_1 (перелет Земля — Луна) и α_2 (перелет Луна — Земля) с плоскостью орбиты Луны. В принятой схеме траектория облета Луны полностью определяется, если заданы соответствующие кеплеровы дуги в плоскостях перелета Земля — Луна и Луна — Земля, углы α_1 и α_2 и направления движения па каждом из геоцентрических участков по отношению к полюсам Земли, определяемые заданием $\text{sign} \cos u_1$, $\text{sign} \cos u_2$.

Положим, что при старте с круговой орбиты ИСЗ залет аппарата внутрь орбиты ИСЗ отсутствует. Тогда возможными маршрутами перелета Земля — Луна и Луна — Земля являются A и C , где через A обозначена дуга конического сечения, не содержащая вершин, а через C — дуга, содержащая апогей (см. раздел 5.1.3). В соответствии со сказанным выше, основные свойства траектории облета Луны определяются (рис. 11.2.4): сочетанием типов кеплеровых дуг A или C на участках перелета Земля — Луна и Луна — Земля, комбинацией знаков углов α_1 и α_2 ($\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2) = \pm 1$), направлением перелета Земля — Луна по отношению к полюсам

Земли, определяемым по $\text{sign} \cos u_1$. Из условия $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2) = 1$ (или -1) в (11.2.34) следует, что задание $\text{sign} \cos u_1$ определяет $\text{sign} \cos u_2$.

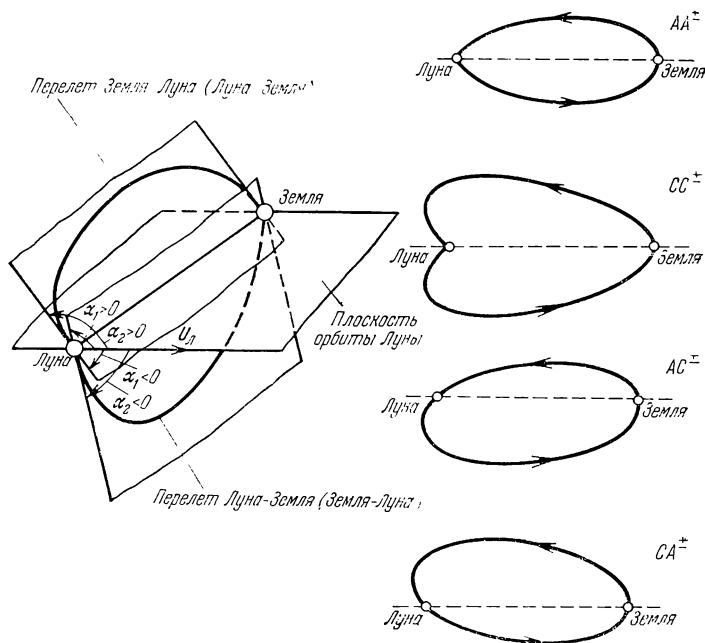


Рис. 11.2.4.

Полагая указанные три фактора в основу классификации перелетов Земля — Луна — Земля, получаем 8 типов (маршрутов) перелетов (таблица 11.2.1):

AA^+ , AA^- , CC^+ , CC^- , CA^+ , CA^- , AC^+ , AC^- .

Здесь первая (вторая) буква соответствует перелету Земля — Луна (Луна — Земля), индекс $+$ ($-$) соответствует $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2) = 1$ ($= -1$) и каждому обозначению соответствует два перелета, различающихся направлением движения по отношению к полюсам Земли.

В дальнейшем при анализе свойств селеносферического движения (см. разделы 11.3.2, 11.4.1) будет показано, что именно сочетания $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2) = \text{sign}(\cos u_1 \cos u_2)$ и $\text{sign}(\mathbf{V}_{1r}, \mathbf{V}_{2r})$ определяют в основном свойства селеносферического участка траекторий облета Луны. Однако выделение порознь признаков $\text{sign} \alpha_i = \text{sign} \cos u_i$ и $\text{sign} \mathbf{V}_{ir}$, $i = 1, 2$, при классификации траекторий

облета Луны целесообразно, поскольку именно эти величины определяют ориентацию и тип кеплеровых дуг геоцентрических перелетов Земля — Луна и Луна — Земля.

Таблица 11.2.1

sign (V_{1r} , V_{2r})	sign V_{1r}^*	sign V_{2r}^*	sign (α_1 , α_2)	Маршруты	sign α_1 (sign $\cos u_1$)	sign α_2 (sign $\cos u_2$)	Направление перелетов по отношению к полюсам Земли	
							Земля — Луна	Луна — Земля
— 1	+ 1	— 1	+ 1	AA ⁺	+ 1 — 1	+ 1 — 1	Ю**)	С**)
	— 1	+ 1		CC ⁺	+ 1 — 1	+ 1 — 1	Ю С	С Ю
— 1	+ 1	— 1	— 1	AA [—]	+ 1 — 1	— 1 + 1	Ю С	Ю С
	— 1	+ 1		CC [—]	+ 1 — 1	— 1 + 1	Ю С	Ю С
+ 1	— 1	— 1	+ 1	CA ⁺	+ 1 — 1	+ 1 — 1	Ю С	С Ю
	+ 1	+ 1		AC ⁺	+ 1 — 1	+ 1 — 1	Ю С	С Ю
+ 1	— 1	— 1	— 1	CA [—]	+ 1 — 1	— 1 + 1	Ю С	Ю С
	+ 1	+ 1		AC [—]	+ 1 — 1	— 1 + 1	Ю С	Ю С

*) Положительным принимается направление от Земли к Луне.

**) Ю — Южный полюс; С — Северный полюс.

11.2.3. Решение задачи синтеза.

а) Расчет перелета Луна — Земля. В качестве основного аргумента будем рассматривать аргумент широты Луны u_L , задающий положение Луны на орбите.

При расчете перелета Луна — Земля будем считать заданными:

- 1) постоянное для заданного интервала времени наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости экватора, $i_L = \text{const}$; 2) положение Луны на орбите, определяемое величиной $0 \leq u_L \leq 360^\circ$; 3) наклонение плоскости перелета к плоскости экватора $0 \leq i_2 \leq 180^\circ$; 4) угловую геоцентрическую дальность перелета Луна — Земля η_{23} ; 5) радиальное расстояние до условного перигея r_π ; 6) $\text{sign} \cos u_2$.

Тогда из (11.2.27) получаем $u_2 = u_2(i_{\text{л}}, i_2, u_{\text{л}})$, а из (11.2.28) и (11.2.31) $\alpha_2 = \alpha_2(i_{\text{л}}, i_2, u_{\text{л}})$. Аргумент широты при прохождении условного перигея u_3 равен

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= u_2 + \eta_{23}, & \text{если } u_3 > u_2, \\ u_3 &= u_2 + \eta_{23} - 2\pi, & \text{если } u_3 < u_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.35)$$

Географическая широта условного перигея

$$\varphi_{\pi} = \arcsin(\sin i_2 \sin u_3), \quad -90^\circ \leq \varphi_{\pi} \leq 90^\circ. \quad (11.2.36)$$

При заданном радиусе условного перигея r_{π} можем рассматривать траекторию возврата как коническое сечение с заданной угловой дальностью η_{23} , касательное к геоцентрической орбите радиуса r_{π} . Используя результаты раздела 5.1.3, получим для фокального параметра и эксцентриситета соотношения

$$p_{23} = r_{\pi} \frac{1 - \cos \eta_{23}}{\frac{r_{\pi}}{r_{\text{л}}} - \cos \eta_{23}}, \quad (11.2.37)$$

$$e_{23} = \frac{p_{23}}{r_{\pi}} - 1. \quad (11.2.38)$$

При $\eta_{23} < 180^\circ$ перелет Луна — Земля не содержит апогея (маршрут А), при $\eta_{23} > 180^\circ$ — содержит апогей (маршрут С), при $\eta_{23} = 180^\circ$ этот перелет является гомановским полуэллипсом с апогейным расстоянием $r_{\text{л}}$. Зная маршрут перелета Луна — Земля и величины p_{23} , e_{23} , можно вычислить все параметры этого перелета, не связывая их с параметрами перелета Земля — Луна и параметрами селеносферического движения.

б) Расчет перелета Земля — Луна. Траектория перелета Земля — Луна представляет кеплерову дугу, соединяющую точки с радиусами-векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_{\text{л}}$. Считаем, что старт в сторону Луны происходит с круговой орбиты ИСЗ радиуса r_0 с заданной величиной импульса скорости ΔV_0 . Тогда

$$\Delta V_0^2 = V_0^2 + V_{\text{кр}\oplus}^2 - 2V_{\text{кр}\oplus}V_{0\tau}, \quad (11.2.39)$$

где V_0 , $V_{0\tau}$ — геоцентрическая скорость в начальной точке и ее трансверсальная компонента, $V_{\text{кр}\oplus}$ — круговая скорость на расстоянии r_0 от центра Земли.

Кроме величин 1)–6), определяющих перелет Луна — Земля, задаем: 7) наклонение плоскости перелета к плоскости экватора $0 \leq i_0 \leq 180^\circ$; 8) r_0 ; 9) ΔV_0 ; 10) $\text{sign} \cos u_1$; 11) маршрут перелета Земля — Луна А или С (т. е. $\text{sign}(\mathbf{V}_{1r}, \mathbf{V}_{2r})$).

Из (11.2.21) находим $u_1 = u_1(i_{\text{л}}, i_0, u_{\text{л}})$, а из (11.2.25). (11.2.30) $\alpha_1 = \alpha_1(i_{\text{л}}, i_0, u_{\text{л}})$.

Используя (11.2.12), интегралы энергии (1.3.24) и площадей (1.3.26) и равенства $V_i^2 = V_{ir}^2 + V_{it}^2$, $i=0, 1$, из указанных соотношений имеем

$$V_{0r} = \frac{V_2^2 - 2V_{2r}U_L \cos \alpha_2 + 3V_{кр\oplus}^2 - 2U_L^2 - \Delta V_0^2}{2\left(V_{кр\oplus} - U_L \frac{r_0}{r_L} \cos \alpha_1\right)}. \quad (11.2.40)$$

Из (11.2.39) и (11.2.40) находятся V_{0r} и V_0 , после чего с помощью соотношений

$$p_{01} = \left(\frac{V_{1r}}{U_L}\right)^2, \quad (11.2.41)$$

$$e_{01} = \sqrt{1 - \frac{p_{01}}{r_L} \left(2 - \frac{V_1^2}{U_L^2}\right)} \quad (11.2.42)$$

находятся фокальный параметр p_{01} и эксцентриситет e_{01} кеплеровой дуги перелета Земля — Луна. Зная p_{01} , e_{10} , а также маршрут перелета (без апогея — A , с апогеем — C), находим истинные аномалии дуги перелета в начальной и конечной точках η_0 и η_1 , угловую дальность перелета $\eta_{01} = \eta_1 - \eta_0$, аргумент широты начальной точки перелета $u_0 = u_1 - \eta_{01}$, географическую широту $\varphi_0 = \arcsin(\sin i_0 \cdot \sin u_0)$, $-90^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$, точки старта с орбиты ИСЗ и продолжительность перелета t_{01} .

Отметим, что информация о маршруте перелета Земля — Луна вводится в схему расчета не сразу, а на конечном этапе расчета. Это обстоятельство весьма существенно, так как позволяет провести расчет всех характеристик перелета Земля — Луна, за исключением η_0 , η_1 , η_{01} , u_0 , φ_0 , t_{01} , в общем виде, не связывая их с конкретным маршрутом перелета Земля — Луна.

в) Расчет движения в сфере влияния Луны. Для рассмотрения движения в сфере влияния Луны используем две правые селеноцентрические прямоугольные системы координат: введенную ранее систему $x_c y_c z_c$ (см. рис. 11.2.3) и определяемую ортами $\mathbf{i}_{\pi c}$, $\mathbf{i}_{\gamma c}$, $\mathbf{i}_{\eta c}$ (см. рис. 11.2.2 и 11.2.5). Система $\mathbf{i}_{\pi c} \mathbf{i}_{\gamma c} \mathbf{i}_{\eta c}$ связана с селеноцентрической гиперболой: орт $\mathbf{i}_{\pi c}$ направлен в перифокус гиперболы, орт $\mathbf{i}_{\gamma c}$ лежит в плоскости гиперболы и направлен от ее участка, по которому аппарат входит в сферу влияния Луны, к участку, по которому он выходит из сферы влияния, орт $\mathbf{i}_{\eta c}$ нормален к плоскости гиперболы (см. раздел 10.1.2, рис. 10.1.3).

В проекциях на оси $x_c y_c z_c$ векторы входной $\mathbf{V}_{c1}$ и выходной $\mathbf{V}_{c2}$ селеноцентрических скоростей записываются в виде

$$\mathbf{V}_{ci} = \{\pm V_{ir}, V_{it} \cos \alpha_i - U_L, V_{it} \sin \alpha_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (11.2.43)$$

Положение точки на сфере влияния Луны будем определять селеноцентрическими сферическими координатами — радиусом $\rho_{\text{сф}}$, долготой λ_c и широтой φ_c (см. рис. 11.2.5). Углы λ_c отсчитываются в плоскости $x_c y_c$ от прямой Луна — Земля против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z_c , углы φ_c отсчитываются от плоскости $x_c y_c$ в сторону положительных значений z_c . Направляющие косинусы радиусов-векторов, проведенных в точки входа и выхода, в системе координат $i_{\text{пс}} i_{\text{yc}} i_{\text{nc}}$ всегда равны (см. конец раздела 10.1.3)

$$\rho_{ci}^0 = \begin{pmatrix} \cos \eta_{ci} \\ \sin \eta_{ci} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (11.2.47)$$

Направляющие косинусы этих же единичных радиусов-векторов в системе координат $x_c y_c z_c$ равны

$$\rho_{ci}^0 = \mathfrak{M}_c \times \begin{pmatrix} \cos \eta_{ci} \\ \sin \eta_{ci} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (11.2.48)$$

где матрица $\mathfrak{M}_c$ перехода от системы координат, определяемой ортами $i_{\text{пс}}, i_{\text{yc}}, i_{\text{nc}}$, к основной системе координат $x_c y_c z_c$ имеет в качестве столбцов векторы $i_{\text{пс}}, i_{\text{yc}}$ и i_{nc} . Сферические координаты точек входа и выхода вычисляются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{ci} &= z_{ci}^0, \quad |\varphi_{ci}| \leq 90^\circ, \quad \sin \lambda_{ci} = -\frac{y_{ci}^0}{\cos \varphi_{ci}}, \\ \cos \lambda_{ci} &= -\frac{x_{ci}^0}{\cos \varphi_{ci}}, \quad 0 \leq \lambda_{ci} \leq 360^\circ, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.49)$$

г) Схема синтеза траекторий облета Луны. Синтез траекторий проводится в такой последовательности. Определяется ориентация плоскости перелета Луна — Земля по отношению к плоскости орбиты Луны и динамические параметры этого перелета из условия касательного возврата в атмосферу Земли под заданным наклонением к экватору; перелет Луна — Земля определяется независимо от перелета Земля — Луна и движения внутри сферы влияния Луны.

При заданных импульсе схода с орбиты ИСЗ ΔV_0 и наклонении плоскости перелета Земля — Луна к экватору определяются параметры перелета Земля — Луна; перелет Земля — Луна определяется независимо от движения внутри сферы влияния Луны.

По известным векторам V_{c1} и V_{c2} и высоте облета Луны $H_{\text{лс}}$ находятся все параметры селеносферического движения.

Алгоритм синтеза траекторий облета Луны состоит из простых конечных соотношений и исключает численное решение каких-

либо алгебраических выше второй степени или трансцендентных уравнений. Время счета на ЭЦВМ одной траектории, удовлетворяющей заданным условиям, на несколько порядков меньше, чем при использовании других методов (см. раздел 11.6.2). Возможность раздельного рассмотрения каждого из трех участков перелета позволяет сократить количество исходных величин и вариантов и в обозримом виде представить результаты исследования. Все эти особенности метода позволяют провести достаточно полное исследование траекторий облета Луны.

Рассматриваемый метод синтеза траекторий облета Луны позволяет приближенно учесть все ограничения, за исключением обусловленных стыковкой траекторий по времени. Поскольку временная стыковка в рассматриваемом методе не учитывается, то $u_1 \in [0; 360^\circ]$.

§ 11.3. Симметричные траектории облета Луны

11.3.1. Условия симметрии и их анализ. Рассмотрим перелеты, для которых одновременно выполняются соотношения

$$V_1 = V_2, \quad (11.3.1)$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2. \quad (11.3.2)$$

Для таких перелетов (11.2.12) и (11.3.1) дают

$$V_{1r} = V_{2r}, \quad V_{1t} = V_{2t}. \quad (11.3.3)$$

Из (11.3.2) следует

$$\alpha_1 = \pm \alpha_2. \quad (11.3.4)$$

В том случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad (11.3.5)$$

из геометрических соображений ясно, что траектории перелета Земля — Луна и Луна — Земля лежат в одной плоскости и $i_2 = i_0$. Если же

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad (11.3.6)$$

то траектории перелета Земля — Луна и Луна — Земля лежат в разных плоскостях, симметричных относительно плоскости орбиты Луны. Ясно, что в этом случае $i_2 \neq i_0$ (см. рис. 11.2.4).

Для краткости траектории Земля — Луна — Земля, удовлетворяющие условию (11.3.5), будем называть *траекториями без излома плоскости перелета*, а траектории, удовлетворяющие условию (11.3.6), — *траекториями с изломом плоскости перелета*.

При расчете симметричных траекторий перелета считаем заданными те же величины, что и при расчете перелетов Земля — Луна и Луна — Земля, за исключением i_2 , $\text{sign} \cos u_2$ и ΔV_0 , поскольку, как будет показано ниже, эти величины в случае симметричных перелетов не могут быть заданы произвольно, а определяются из соотношений, вытекающих из условий симметрии.

Из (11.2.21), (11.2.25), (11.2.30), как и в общем случае, находим

$$u_1 = u_1(i_{\text{л}}, i_0, u_{\text{л}}), \alpha_1 = \alpha_1(i_{\text{л}}, i_0, u_{\text{л}}).$$

Для дальнейшего положим, что $90^\circ \leq u_1 \leq 270^\circ$.

Заменяя в (11.2.28) $\cos \alpha_2$ на $\cos \alpha_1$ и используя соотношение (11.2.27), получим для определения $\cos i_2$ квадратное уравнение

$$\cos^2 i_2 - 2 \cos \alpha_1 \cos i_{\text{л}} \cos i_2 + \cos^2 \alpha_1 (1 - \sin^2 i_{\text{л}} \sin^2 u_{\text{л}}) - \cos^2 u_{\text{л}} \sin^2 i_{\text{л}} = 0,$$

корни которого равны

$$\cos i_2 = \cos \alpha_1 \cos i_{\text{л}} \pm \sin i_{\text{л}} \cos u_{\text{л}} |\sin \alpha_1|. \quad (11.3.7)$$

Обозначим значение i_2 , соответствующее знаку «+» в (11.3.7), через i_2^+ , а соответствующее знаку «-» — через i_2^- . Для $i_{\text{л}} \leq i_0 \leq \pi - i_{\text{л}}$, $90^\circ \leq u_1 \leq 270^\circ$ из (11.2.34) следует $\alpha_1 < 0$. Исключая из (11.3.7) $\cos \alpha_1$ и $|\sin \alpha_1|$ с помощью (11.2.25) и (11.2.30), получим, что значение $i_2^+ = i_0$ соответствует перелету без излома, а $i_2^- \neq i_0$ — перелету с изломом. Зная i_2 , с помощью (11.2.27) находим $u_2 = u_2(i_{\text{л}}, i_2, u_{\text{л}})$, причем каждому значению i_2 соответствуют два значения u_2 , лежащие в различных квадрантах. Как видно из (11.2.25) и (11.2.28), условию (11.3.2) при заданном i_2^+ или i_2^- удовлетворяет только одно из этих двух значений u_2 , которое обозначим u_2^+ и u_2^- соответственно. Очевидно, что для перелетов без излома $u_2^+ = u_1$. Таким образом, получаем две пары решений: $i_2^+, u_2^+ = u_1, i_2^-, u_2^-$.

Положим теперь, что $-90^\circ \leq u_1 \leq 90^\circ$. Анализ показывает, что имеет место следующее правило.

Пусть получено решение тригонометрических соотношений при $90^\circ \leq u_{1(\text{II}, \text{III})} \leq 270^\circ$. Если теперь $-90^\circ \leq u_{1(\text{I}, \text{IV})} \leq +90^\circ$, то положим $u_{1(\text{I}, \text{IV})} \leq u_{1(\text{II}, \text{III})} + 180^\circ$. Тогда соответствующее решение для $u_{1(\text{I}, \text{IV})}$ получается из решения для $u_{1(\text{II}, \text{III})}$ путем следующего пересчета: $u_{\text{л}(\text{I}, \text{IV})} = u_{\text{л}(\text{II}, \text{III})} + 180^\circ$, $u_{2(\text{I}, \text{IV})} = u_{2(\text{II}, \text{III})} + 180^\circ$, $i_{2(\text{I}, \text{IV})}^+ = i_{2(\text{II}, \text{III})}^+$, $i_{2(\text{I}, \text{IV})}^- = i_{2(\text{II}, \text{III})}^-$, $\alpha_{1,2(\text{I}, \text{IV})} = -\alpha_{1,2(\text{II}, \text{III})}$.

При $-90^\circ \leq u_1 \leq 90^\circ$ перелетам без излома в (11.3.7) соответствует знак «-» ($i_{2(\text{I}, \text{IV})}^-$), а перелетам с изломом — знак «+» ($i_{2(\text{I}, \text{IV})}^+$). Для сохранения неизменными величин η_{01}, η_{23} необходимо также положить $u_{0(\text{I}, \text{IV})} = u_{0(\text{II}, \text{III})} + 180^\circ$, $u_{3(\text{I}, \text{IV})} = u_{3(\text{II}, \text{III})} + 180^\circ$, $\varphi_{\pi(\text{I}, \text{IV})} = -\varphi_{\pi(\text{II}, \text{III})}$. Здесь индексы I, IV и II, III означают квадранты I, IV и II, III соответственно.

Поскольку теперь для перелета Луна — Земля известны i_2 и u_2 , то расчет этого перелета производится точно так же, как

и расчет перелета Луна — Земля в общем случае. «Склейка» перелетов Луна — Земля и Земля — Луна производится с помощью соотношений $V_1 = V_2$, $V_{1r} = V_{2r}$, $V_{1\tau} = V_{2\tau}$, откуда следует $p_{01} = p_{23}$, $e_{01} = e_{23}$. Далее определение параметров перелета Земля — Луна и селеносферического движения производится точно так же, как и в общем случае.

Заметим, что аналогичные результаты можно получить, если считать заданными i_2 , $\text{sign} \cos u_2$ вместо i_0 , $\text{sign} \cos u_1$.

Из проведенного рассмотрения следует, что характеристики симметричных перелетов Луна — Земля и Земля — Луна зависят фактически от одного параметра — дальности перелета Луна — Земля η_{23} .

11.3.2. Особенности селеносферического движения. Геометрическая и динамическая симметрия. Учитывая наличие перелетов с изломом и без излома, в соответствии с общей классификацией траекторий облета Луны (см. конец раздела 11.2.2) получаем восемь типов симметричных перелетов: без излома AA^+ , AC^+ , CA^+ , CC^+ , с изломом AA^- , AC^- , CA^- , CC^- . Заметим, что для дальнейшего анализа направление движения по отношению к полюсам Земли не имеет значения и не рассматривается.

Для построения селеноцентрической гиперболы необходимо знать, кроме V_c , высоту облета Луны $H_{\pi c}$. Для симметричных траекторий перелета, как и в общей схеме синтеза (см. раздел 11.2.3), она определяется из основного уравнения (11.2.13), которое в этом случае можно переписать в виде

$$H_{\pi c} = \frac{R_{\text{л}}}{\frac{V_c^2}{V_{1\text{л}}^2} - \frac{2R_{\text{л}}}{\rho_{\text{сф}}}} \left(\frac{2V_c}{\sqrt{2[V_1^2 - \text{sign}(V_{1r}, V_{2r})V_{1r}^2 - V_{1\tau}^2 \cos \alpha_3]}} - 1 \right) - R_{\text{л}}. \quad (11.3.8)$$

Проанализируем формулу (11.3.8) для различных типов перелета, пренебрегая для простоты малым членом $2R_{\text{л}}/\rho_{\text{сф}}$ по сравнению с членом $V_c^2/V_{1\text{л}}^2$. При получении приведенных ниже зависимостей $H_{\pi c}(\eta_{23}) = H_{\pi c}/R_{\text{л}}$ использовались следующие данные: $r_0 = r_{\pi} = R_{\oplus} = 6371$ км, $r_{\text{л}} = 384\,390$ км, $U_{\text{л}} = 1,01828$ км/сек (см. таблицу 11.4.1).

Перелеты без излома плоскости перелета, $\alpha_3 = 0$. В этом случае

$$V_{1\tau} = V_{2\tau}. \quad (11.3.9)$$

Формула (11.3.8) переписывается в виде

$$\bar{H}_{\pi c} = \frac{V_{1\text{л}}^2}{V_c^2} \left(\frac{2V_c}{\sqrt{2V_{1r}^2 [1 - \text{sign}(V_{1r}, V_{2r})]}} - 1 \right) - 1.$$

Если при облете Луны не происходит изменения знака радиальной составляющей скорости:

$$V_{1r} = V_{2r}, \quad (11.3.10)$$

то $\bar{H}_{\pi c} = \infty$.

Условия (11.3.1), (11.3.2) вместе с условиями (11.3.9), (11.3.10) означают, что $V_1 = V_2$, т. е. при облете Луны траектория аппарата не подвергается воздействию гравитационного поля Луны. В этом случае симметричный перелет вырождается в тривиальный случай облета Луны на «бесконечности» по одному и тому же коническому сечению AC^+ и CA^+ . Поскольку эти перелеты не представляют практического интереса, в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Пусть теперь при облете Луны радиальная составляющая скорости меняет свой знак:

$$V_{1r} = -V_{2r}. \quad (11.3.11)$$

Тогда

$$\bar{H}_{\pi c} = \frac{V_{1\pi}^2}{V_c^2} \left(\frac{V_c}{V_{1r}} - 1 \right) - 1. \quad (11.3.12)$$

Условиям (11.3.9) и (11.3.11) удовлетворяют геометрически симметричные относительно прямой Земля — Луна перелеты без излома AA^+ и CC^+ . Для этих перелетов зависимость $\bar{H}_{\pi c}(\eta_{23})$ имеет вид, показанный на рис. 11.3.1. При величине $\eta_{23} \rightarrow 180^\circ$, соответствующей гомановскому перелету Луна — Земля и Земля — Луна, $V_{1r} \rightarrow 0$ и $\bar{H}_{\pi c} \rightarrow \infty$. Заметим, что при принятых значениях r_π и $r_{\text{Л}}$, на основании (11.2.37), (11.2.38), $e_{23} = 1$ при $\eta_{23} = 194^\circ 48'$. Итак, перелеты CC^+ существуют в диапазоне $180^\circ \leq \eta_{23} < 194^\circ 48'$.

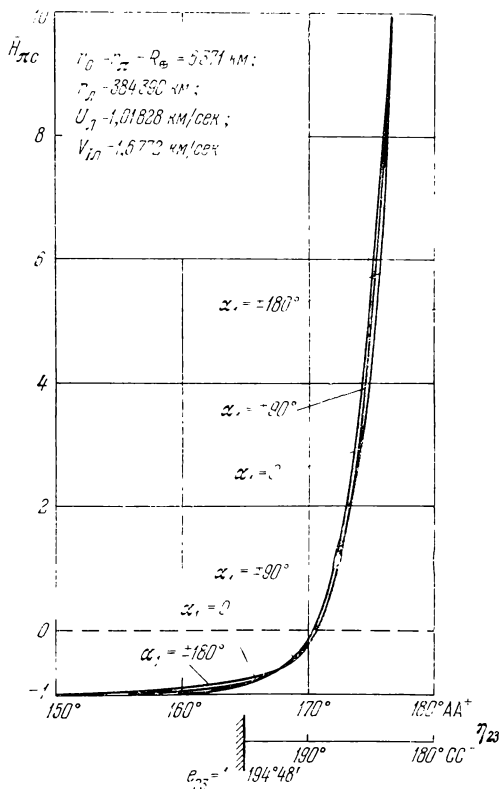


Рис. 11.3.1.

Перелеты с изломом плоскости перелета, $\alpha_3 \neq 0$. В этом случае вместо (11.3.9) имеем $V_{1\tau} = V_{2\tau}$ и

$$\bar{H}_{\pi c} = \frac{V_{1\pi}^2}{V_c^2} \left(\frac{2V_c}{\sqrt{2[V_{1\tau}^2[1 - \text{sign}(V_{1\tau}, V_{2\tau})] + 2V_{1\tau}^2 \sin^2 \alpha_1}}} - 1 \right) - 1. \quad (11.3.13)$$

Рассмотрим перелеты AC^- и CA^- , для которых имеет место (11.3.10). В этом случае

$$\bar{H}_{\pi c} = \frac{V_{1\pi}^2}{V_c^2} \left(\frac{V_c}{V_{1\tau} |\sin \alpha_1|} - 1 \right) - 1 \quad (11.3.14)$$

и при всех значениях η_{23} (исключая малоинтересный случай $V_c = 0$, соответствующий радиальному падению на Луну, и случай $\alpha_1 = 0^\circ, 180^\circ$, соответствующий перелетам без излома) $\bar{H}_{\pi c} < \infty$.

Поскольку $V_{1\tau}$ слабо зависит от η_{23} (см. раздел 11.4.16 и чис. 11.4.3), то $\bar{H}_{\pi c}$ в этом случае не претерпевает сильных изменений (рис. 11.3.2). Поскольку при

принятых значениях r_0 и r_n для маршрута CA^- $e_{23} = 1$ при $\eta_{23} = 165^\circ 12'$, а для маршрута AC^- $e_{23} = 1$ при $\eta_{23} = 194^\circ 48'$, указанные перелеты существуют в диапазоне $165^\circ 12' < \eta_{23} \leq 180^\circ$ и $180^\circ \leq \eta_{23} < 194^\circ 48'$ соответственно.

Рассмотрим теперь перелеты AA^- и CC^- , для которых имеет место (11.3.11). Тогда

$$\bar{H}_{\pi c} = \frac{V_{1\pi}^2}{V_c^2} \left(\frac{V_c}{\sqrt{V_{1\tau}^2 + V_{1\tau}^2 \sin^2 \alpha_1}}} - 1 \right) - 1. \quad (11.3.15)$$

Исключая опять из рассмотрения случаи $\sin \alpha_1 = 0$ и $V_c = 0$, получаем, что для этих перелетов $\bar{H}_{\pi c} < \infty$ при любой дальности η_{23} (рис. 11.3.3).

Учитывая, что при η_{23} , отличающихся от 180° на $2-3^\circ$ и более, $V_{1\tau} \gg V_{1\pi}$ (см. рис. 11.4.3), получаем для этих значений η_{23} близость зависимостей $\bar{H}_{\pi c}(\eta_{23})$, показанных на рис. 11.3.1 и 11.3.3. При $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = \pm 180^\circ$ кривые $\bar{H}_{\pi c}(\eta_{23})$ на этих рисунках совпадают. Перелеты CC^- , как и CC^+ , существуют в диапазоне

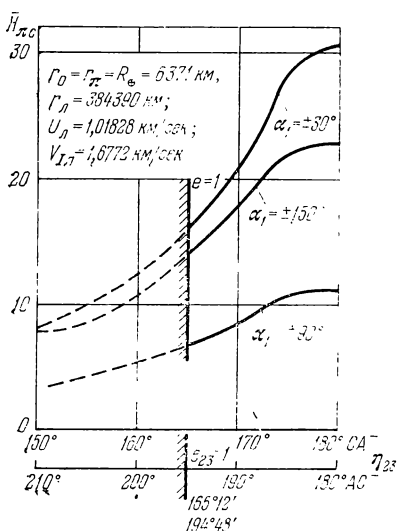


Рис. 11.3.2.

$180^\circ < \eta_{23} < 194^\circ 48'$. Заметим, что если параметры перелетов AA^+ и CC^+ , AC^- и CA^- , AA^- и CC^- попарно совпадают, то и высоты облета Луны для этих пар перелетов одинаковы.

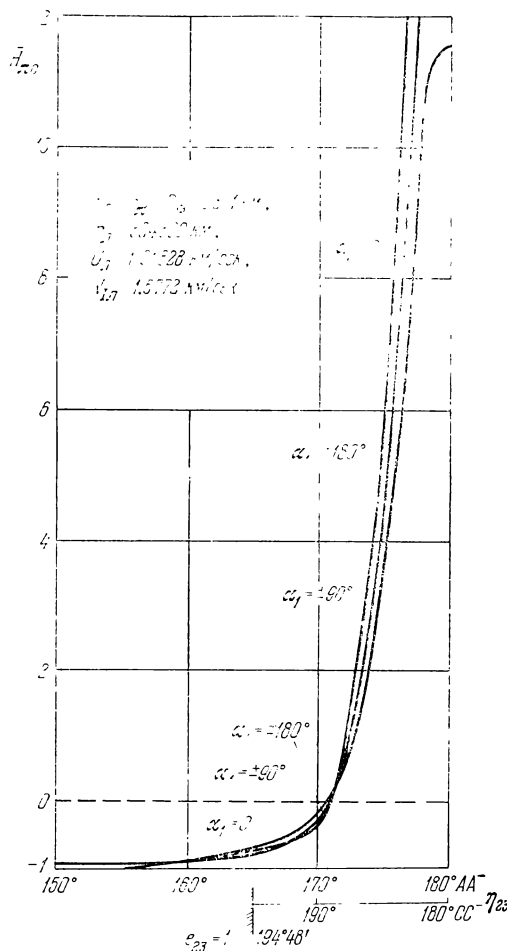


Рис. 11.3.3.

Приведенные результаты указывают на заметное различие одноименных перелетов AA^+ , CC^+ , AA^- , CC^- и разноименных перелетов AC^- , CA^- . Одноименные перелеты при η_{23} , отличных от 180° , характеризуются малыми высотами облета Луны и сильным воздействием гравитационного поля; при $\eta_{23} \rightarrow 180^\circ$ для этих перелетов $H_{no} \rightarrow \infty$. Для разноименных перелетов при η_{23} , отличных от 180° , высоты облета на порядок больше; при любых η_{23}

Таблица 11.3.1

Параметр	AA+		CC+		AA-	
	$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$		$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$		$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$	
	$171^\circ \leq \eta_1 < 180^\circ$		$180^\circ < \eta_{21} < 189^\circ$		$171^\circ \leq \eta_{23} < 180^\circ$	
	$0 \leq \alpha_1 < 180$	$-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 0$	$0 \leq \alpha_1 \leq 180$	$-180 \leq \alpha_1 \leq 0$	$0 \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$	$-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 0$
$i_{nc} \begin{cases} \varphi_{nc} \\ \lambda_{nc} \end{cases}$	0 180°	0 180°	0 0	0 0	0 ÷ 90° 180°	-90° ÷ 0 180°
$i_{yc} \begin{cases} \varphi_{yc} \\ \lambda_{yc} \end{cases}$	0 ÷ 11° 90°	-11° ÷ 0 90°	0 ÷ 11° 90°	-11° ÷ 0 90°	0 90°	0 90°
$i_{nc} \begin{cases} \varphi_{nc} \\ \lambda_{nc} \end{cases}$	-90° ÷ -79° 90°	-90° ÷ -79° 270°	79° ÷ 90° 270°	79° ÷ 90° 90°	-90° ÷ 0 180°	-90° ÷ 0 0
$\rho_{c1}^0 \begin{cases} \varphi_{c1} \\ \lambda_{c1} \end{cases}$	-11° ÷ 0 180° ÷ 312°	0 ÷ 11° 180° ÷ 312°	-11° ÷ 0 223° ÷ 360°	0 ÷ 11° 223° ÷ 360°	-8° ÷ 0 267° ÷ 312°	0 ÷ 8° 267° ÷ 312°
$\rho_{c2}^0 \begin{cases} \varphi_{c2} \\ \lambda_{c2} \end{cases}$	$-\varphi_{c1}$ 360° — λ_{c1}		$-\varphi_{c1}$ 360° — λ_{c1}		φ_{c1} 360° — λ_{c1}	

Параметр

Таблица 11.3.1 (продолжение)

Перелет	CC—		AC—		CA—	
	$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$		$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$		$\rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}} \geq H_{\text{лс}} \geq 0$	
	$180^\circ < \eta_{23} \leq 189^\circ$		$180^\circ < \eta_{23} < 195^\circ$		$165^\circ < \eta_{23} \leq 180^\circ$	
	$0 \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$	$-180 \leq \alpha_1 \leq 0$	$0 \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$	$-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 0$	$0 \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$	$-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 0$
$i_{\text{лс}} \begin{cases} \varphi_{\text{лс}} \\ \lambda_{\text{лс}} \end{cases}$	$0 \div 90^\circ$	$-90^\circ \div 0$	90°	-90°	90°	-90°
$i_{\text{yc}} \begin{cases} \varphi_{\text{yc}} \\ \lambda_{\text{yc}} \end{cases}$	0	0	—	—	—	—
$i_{\text{nc}} \begin{cases} \varphi_{\text{nc}} \\ \lambda_{\text{nc}} \end{cases}$	0	0	0	0	0	0
$\rho_{\text{с1}}^0 \begin{cases} \varphi_{\text{с1}} \\ \lambda_{\text{с1}} \end{cases}$	90°	90°	$90^\circ \div 150^\circ$	$90^\circ \div 150^\circ$	$30^\circ \div 90^\circ$	$30^\circ \div 90^\circ$
	$0 \div 90^\circ$	$0 \div 90^\circ$	0	0	0	0
	180°	0	$180^\circ \div 240^\circ$	$0 \div 60^\circ$	$120^\circ \div 180^\circ$	$300^\circ - 360^\circ$
$\rho_{\text{с2}}^0 \begin{cases} \varphi_{\text{с2}} \\ \lambda_{\text{с2}} \end{cases}$	$-8^\circ \div 90^\circ$	$-90^\circ \div 8^\circ$	$7^\circ \div 90^\circ$	$-90^\circ \div -7^\circ$	$7^\circ \div 90^\circ$	$-90^\circ \div -7^\circ$
	$228^\circ \div 360^\circ$	$228^\circ \div 360^\circ$	$270^\circ \div 330^\circ$	$270^\circ \div 330^\circ$	$210^\circ \div 270^\circ$	$210^\circ \div 270^\circ$
	$\varphi_{\text{с1}}$		$\varphi_{\text{с1}}$		$\varphi_{\text{с1}}$	
	$360^\circ - \lambda_{\text{с1}}$		$\lambda_{\text{с1}} - 180^\circ$		$\lambda_{\text{с1}} - 180^\circ$	

Примечания. 1. Для перелетов $AA \pm H_{\text{лс}} = 0$ при $\eta_{23} \approx 171^\circ$, для перелетов $CC \pm$ — при $\eta_{23} \approx 189^\circ$.
 2. Для перелетов $AC-$, $CA-$ — $e < 1$ при $165^\circ 12' < \eta_{23} < 194^\circ 48'$.

Параметр

высота облета остается конечной и при $\eta_{23} \rightarrow 180^\circ$ $H_{\pi c} \approx \text{const.}$ Таким образом, разноименные маршруты перелета при всех значениях η_{23} характеризуются сравнительно слабым воздействием гравитационного поля Луны на аппарат.

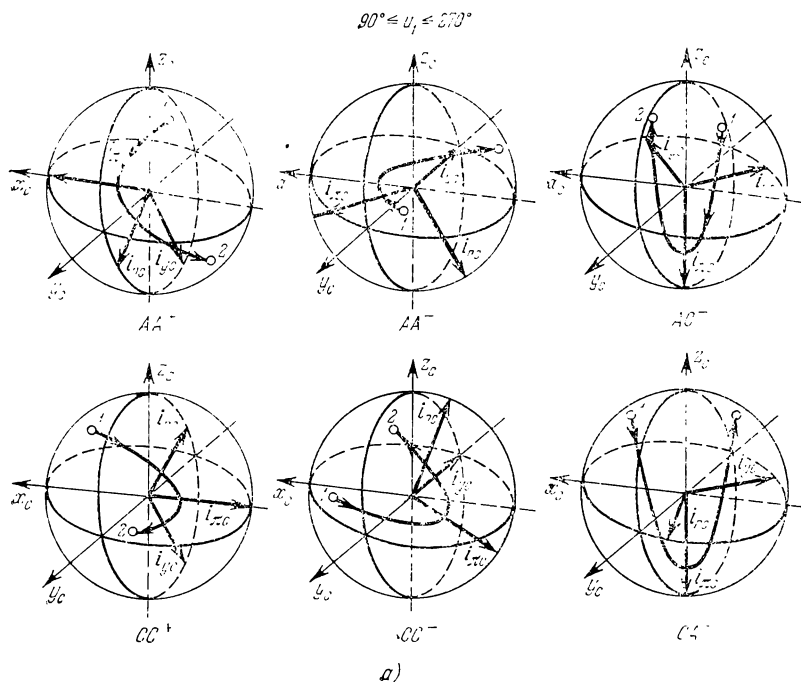


Рис. 11.3.4а.

Проанализируем ориентацию селеноцентрической гиперболы и расположение точек входа и выхода для симметричных перелетов. В таблице 11.3.1 представлены результаты численных расчетов предельных значений селеноцентрических параметров, характеризующих ориентацию селеноцентрических гипербол, вычисленных по формулам (11.2.34), (11.2.43), (11.2.44), (11.2.47) — (11.2.49) с учетом ограничений по высоте облета $H_{\pi c}$ и угловой дальности η_{23} (см. рис. 11.3.1—11.3.3). Схематически селеносферическое движение для симметричных перелетов показано на рис. 11.3.4, а для $90^\circ \leq u_1 \leq 270^\circ$ и на рис. 11.3.4, б для $-90^\circ \leq u_1 \leq 90^\circ$ (1 и 2 — точки входа и выхода на сфере влияния Луны соответственно).

Из полученных результатов следует, что перелеты AA^+ и CC^+ симметричны относительно прямой Земля — Луна, а перелеты AA^- и CC^- — относительно плоскости, нормальной к плоскости

орбиты Луны и проходящей через прямую Земля — Луна. Такого рода перелеты, обладающие геометрической симметрией, неоднократно рассматривались ранее (см., например, работы М. С. Лисовской [1], Мьеле [4], Г. А. Чеботарева [1]). Что касается перелетов AC^- и CA^- , не обладающих геометрической симметрией как

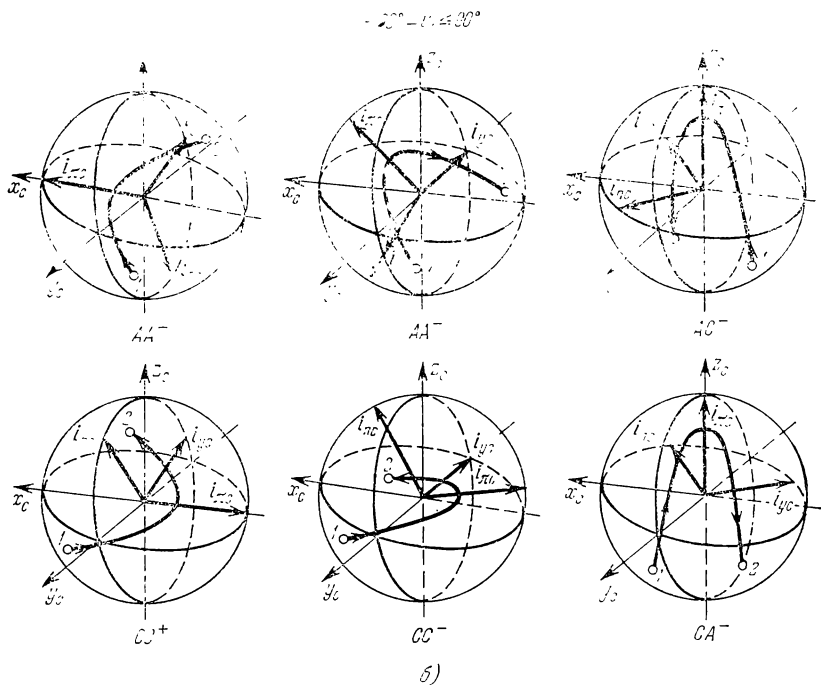


Рис. 11.3.4б.

относительно прямой Земля — Луна, так и относительно плоскости, нормальной к орбите Луны и проходящей через эту прямую, то они, по-видимому, впервые были рассмотрены в работах В. А. Ильина [3, 4, 5]. Геометрически эти перелеты можно интерпретировать как конические сечения, плоскости которых изломаны по некоторой прямой, проходящей через фокус. Если этого излома нет, то облет Луны должен происходить по невозмущенному коническому сечению, в результате чего получаем высоту облета $\bar{H}_{\pi c} = \infty$ (маршруты AC^+ и CA^+). Поскольку параметры конического сечения в этих случаях не изменяются (как и в случае геометрически симметричных перелетов), то естественно называть такие перелеты *динамически симметричными*. Заметим, что для перелетов AC^- и CA^- селеноцентрическое движение оказывается симметричным относительно оси z_c .

§ 11.4. Исследование траекторий облета Луны с возвращением в атмосферу Земли

11.4.1. Общие свойства траекторий. Астрофизические постоянные Земли и Луны, использованные в расчетах, приведены в таблице 11.4.1.

а) Ориентация плоскостей перелета и положение в них радиуса-вектора аппарата. Геометрические свойства траекторий Земля — Луна и Луна — Земля характеризуются величинами

$$u_1(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_0), \alpha_1(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_0), u_0(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_0, \eta_{01}), \varphi_0(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_0, \eta_{01}),$$

$$\text{и}$$

$$u_2(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_2), \alpha_2(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_2), u_3(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_2, \eta_{23}), \varphi_{\text{л}}(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, i_2, \eta_{23}).$$

Рассматриваемые величины обладают следующими важными для синтеза траекторий облета свойствами (см. соотношения

Т а б л и ц а 11.4.1

Астрофизическая постоянная	Земля	Луна
Средний радиус	$R_{\oplus} = 6371 \text{ км}$	$R_{\text{л}} = 1738 \text{ км}$
Гравитационная постоянная	$\mu_{\oplus} = 398580 \text{ км}^3/\text{сек}^2$	$\mu_{\text{л}} = 4889 \text{ км}^3/\text{сек}^2$
1-я космическая скорость	$V_{\text{I}\oplus}(R_{\oplus}) = 7,9095 \text{ км/сек}$	$V_{\text{Iл}}(R_{\text{л}}) = 1,67720 \text{ км/сек}$
Радиус орбиты Луны		$r_{\text{л min}} = 363291,3 \text{ км}$ $r_{\text{л ср}} = 384394,8 \text{ км}$ $r_{\text{л max}} = 405498,3 \text{ км}$
Скорость движения Луны по орбите		$U_{\text{л}}(r_{\text{л min}}) = 1,047443 \text{ км/сек}$ $U_{\text{л ср}} = 1,018284 \text{ км/сек}$ $U_{\text{л}}(r_{\text{л max}}) = 0,991433 \text{ км/сек}$
Радиус сферы влияния Луны		$\rho_{\text{сф}} = 66000 \text{ км}$
Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости экватора		$i_{\text{л}} = 23^{\circ} 45' 23 \pm 5^{\circ}, 1454$ $i_{\text{л}} (1968-1972 \text{ гг.}) \approx 28^{\circ}$
Круговая и параболическая скорости и их разность на расстоянии $r_0 = 6700 \text{ км}$ от центра Земли	$V_{\text{кр}}(r_0) = 7,712947 \text{ км/сек}$ $V_{\text{п}}(r_0) = 10,907754 \text{ км/сек}$ $V_{\text{п}} - V_{\text{кр}} = 3,194807 \text{ км/сек}$	

(11.2.24), (11.2.25), (11.2.27), (11.2.28), (11.2.30), (11.2.31), (11.2.34), (11.2.35), (11.2.36)):

1) тригонометрические характеристики перелетов Земля — Луна и Луна — Земля не зависят друг от друга;

2) зависимости α_i , $i = 1, 2$, от $u_{\text{Л}}$ являются четными функциями относительно $u_{\text{Л}} - 180^\circ$;

3) значения φ_{π} для i_2 и $180^\circ - i_2$ совпадают;

4) зависимости u_i , $i = 1, 2$, и φ_{π} от $u_{\text{Л}}$, полученные при $\text{sign} \cos u_i = 1$ и $\text{sign} \cos u_i = -1$ ($i = 1, 2$), связаны следующим правилом пересчета: $u_{\text{Л}(I, IV)} = u_{\text{Л}(II, III)} + 180^\circ$, $u_{i(I, IV)} = u_{i(II, III)} + 180^\circ$, $\alpha_{i(I, IV)} = -\alpha_{i(II, III)}$, $\varphi_{\pi(I, IV)} = -\varphi_{\pi(II, III)}$; здесь индекс (I, IV) соответствует $\text{sign} \cos u_i = +1$ (I, IV квадранты), а (II, III) — $\text{sign} \cos u_i = -1$ (II, III квадранты).

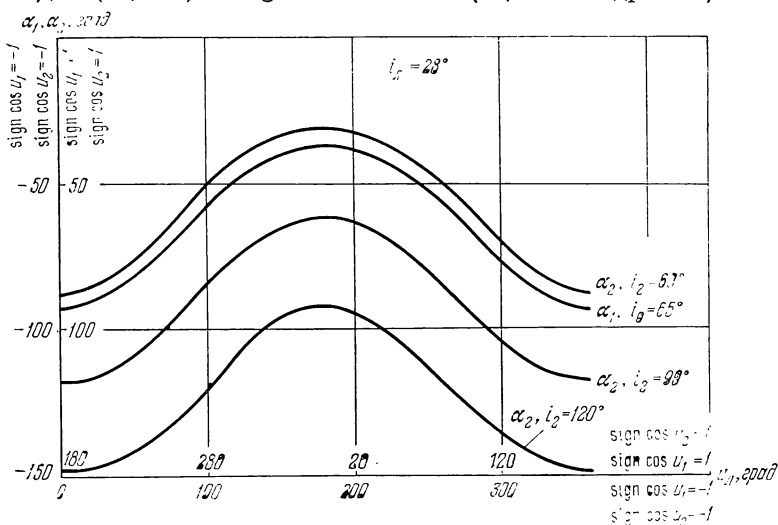


Рис. 11.4.1.

Заметим, что указанное правило пересчета совершенно аналогично соответствующему правилу для симметричных перелетов (см. раздел 11.3.1).

Из 2) следует, что все параметры, зависящие из перечисленных выше величин только от α_1 и α_2 , являются четными функциями относительно $u_{\text{Л}} - 180^\circ$. Поскольку параметры перелета Земля — Луна зависят от $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, а параметры селеносферической гиперболы, не связанные с ее ориентацией, зависят от $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$ и $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2)$, то при одновременном изменении знаков $\cos u_i$, $i = 1, 2$, в соответствии с 4), они не изменяются, а $u_{\text{Л}}$ заменяется на $u_{\text{Л}} + 180^\circ$; для остальных же параметров селеносферической гиперболы при этих условиях указываются

простые правила преобразования (см. подраздел г)). Зависимости $\alpha_1(i_L, u_L, i_0)$, $\alpha_2(i_L, u_L, i_2)$ и $\varphi_\pi(i_L, u_L, i_2, \eta_{23})$ приведены на рис. 11.4.1 и 11.4.2.

Зависимость $\varphi_\pi(i_L, u_L, i_2, \eta_{23})$ играет существенную роль при анализе траекторий облета Луны, так как определяет дальность полета после первого погружения в атмосферу до заданной точки посадки на поверхности Земли. Можно показать, что

а) при реальных значениях $|\eta_{23} - 180^\circ| < 10^\circ$ (см. раздел 11.4.2 и таблицу 11.4.2) и i_2 , больших i_L или меньших $\pi - i_L$ не

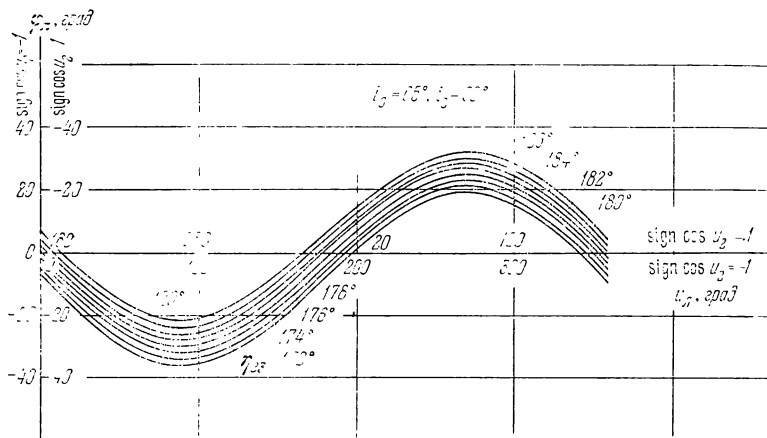


Рис. 11.4.2.

менее чем на несколько градусов, $\min \varphi_\pi$ достигается при

$u_L = \frac{\pi}{2}$ и $\max \varphi_\pi$ достигается при $u_L = \frac{3\pi}{2}$;

б) $|\varphi_\pi|$ монотонно возрастает с ростом i_L ;

в) $|\varphi_\pi|$ достигает максимума при $i_2 = \frac{\pi}{2}$;

г) φ_π убывает с ростом η_{23} при $\text{sign} \cos u_2 = 1$ и растет при $\text{sign} \cos u_2 = -1$. При $i_2 = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\max \varphi_\pi = i_L + (\pi - \eta_{23}) \text{sign} \cos u_2, \quad (11.4.1)$$

$$\min \varphi_\pi = -i_L + (\pi - \eta_{23}) \text{sign} \cos u_2. \quad (11.4.2)$$

С помощью графиков, аналогичных приведенному на рис. 11.4.2, легко устанавливаются, при заданных i_L и i_2 , области допустимых значений основных параметров u_L и η_{23} , в пределах которых выполняются ограничения, наложенные на φ_π .

б) Перелет Луна — Земля. При заданных r_π и r_L параметры перелета Луна — Земля являются функциями только

η_{23} и определяются независимо от перелета Земля — Луна и селеносферического движения (см. раздел 11.2.3а). Это обстоятельство позволяет представить параметры перелета V_2 , V_{2r} , $V_{2\pi}$, t_{23} и скорость в перигее V_π в виде зависимостей (рис. 11.4.3), общих для всех возможных перелетов Земля — Луна — Земля. При расчетах было принято

$$r_L = 384\,394,8 \text{ км}, r_\pi = 6421 \text{ км} (H_\pi = 50 \text{ км}).$$

Используя (11.2.37) и (11.2.38), можно показать, что η_{23} может изменяться приблизительно в диапазоне $90^\circ < \eta_{23} < 195^\circ$,

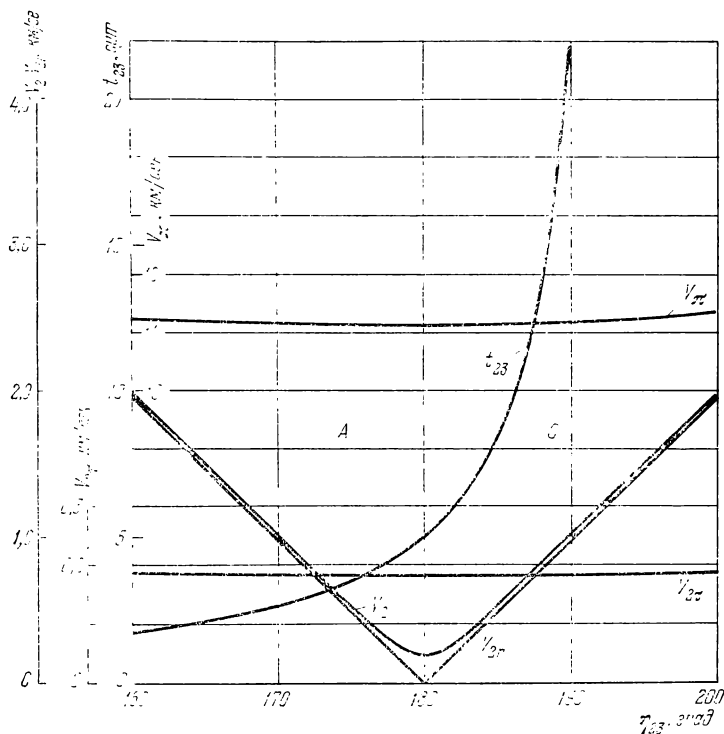


Рис. 11.4.3.

причем эллиптические траектории перелета существуют при $165^\circ < \eta_{23} < 195^\circ$. Поскольку для представляющих практический интерес траекторий облета всегда $|\eta_{23} - 180^\circ| < 10^\circ$ (см. раздел 11.4.2 и таблицу 11.4.2), перелеты Луна — Земля всегда являются эллиптическими. Из (11.2.37) и (11.2.38) следует, что характеристика перелета Луна — Земля, кроме t_{23} , представляют собой четные функции разности $\eta_{23} - 180^\circ$. Это обстоятельство

является существенным и приводит к тому, что почти все характеристики перелетов Земля — Луна и селеносферического движения оказываются четными функциями разности $\eta_{23} - 180^\circ$.

Из приведенных на рис. 11.4.3 зависимостей следует, что $V_{2\tau} \approx \text{const}$ и для перелетов, не очень близких к гомановскому, $V_{2\tau} \ll V_{2r}$. Резкое возрастание времени перелета t_{23} при $\eta_{23} > 185^\circ$ связано с интенсивным ростом апогейной части траектории маршрута C при приближении η_{23} к верхней границе области существования эллиптических перелетов. Как показывают расчеты, изменение r_L в пределах от $r_{L \min}$ до $r_{L \max}$, обусловленное эксцентриситетом орбиты Луны, практически не оказывает влияния на V_2 , $V_{2\tau}$, V_{2r} и V_π и изменяет t_{23} примерно на 8% в ту или другую сторону.

Условие прохождения траектории Луна — Земля на заданном перигейном расстоянии r_π учитывается непосредственно в (11.2.37), (11.2.38). Из прочих ограничений, указанных в разделе 11.2.1, существенную роль играет условие $t_{23} \leq t_{23}^*$, которое для маршрутов $CC^\pm$, $AC^\pm$ ограничивает сверху диапазон изменения η_{23} .

в) Перелет Земля — Луна. Результаты расчета характеристик перелетов Земля — Луна в зависимости от u_L и η_{23} приведены на рис. 11.4.4—11.4.8 для следующих исходных данных: $i_L = 28^\circ$, $r_L = 384\,394,8$ км, $i_0 = 65^\circ$, $i_2 = 90^\circ$, $r_\pi = 6421$ км ($H_\pi = 50$ км), $r_0 = 6700$ км, $\Delta V_0 = 3200$ м/сек.

Все кривые на рис. 11.4.4—11.4.8 построены только для значений u_L , при которых рассматриваемые перелеты существуют и удовлетворяют заданным ограничениям на H_π , t_{01} и t_x (см. раздел 11.4.2). В крайних точках кривых указано, какое из условий физической реализуемости траекторий (выполнение уравнений «склейки» (11.2.12), $H_\pi > 0$) или ограничений нарушается.

Отметим ряд свойств этих перелетов, непосредственно следующих из (11.2.12) и (11.2.39).

1) Поскольку параметры u_L , $\text{sign} \cos u_i$ влияют на характеристики перелета Земля — Луна только через $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, то все эти характеристики, за исключением φ_0 , являются четными функциями аргумента $u_L - 180^\circ$. При одновременном изменении $\text{sign} \cos u_i$, $i = 1, 2$ (с учетом (11.2.34)), достаточно заменить u_L на $u_L + 180^\circ$, в соответствующих точках все характеристики, кроме φ_0 , не изменяются, а φ_0 заменяется на $-\varphi_0$.

2) Все характеристики перелетов Земля — Луна являются четными функциями аргумента $\eta_{23} - 180^\circ$. Из этого следует, что в общих областях существования решений величины V_1 и V_0 получаются одними и теми же для всех маршрутов каждой из групп AA^+ , CC^+ , CA^+ , AC^+ и AA^- , CC^- , CA^- , AC^- ; величины φ_0 и t_{01} оказываются одними и теми же для пар маршрутов AA^+ и AC^+ , CC^+ и CA^+ , AA^- и AC^- , CC^- и CA^- .

Анализ результатов расчетов показывает, что в целом характеристики перелетов Земля — Луна качественно подобны соответствующим характеристикам перелетов Луна — Земля. Однако необходимость «склейки» этих перелетов с помощью соотношения (11.2.12) приводит к ряду существенных различий. На рис.

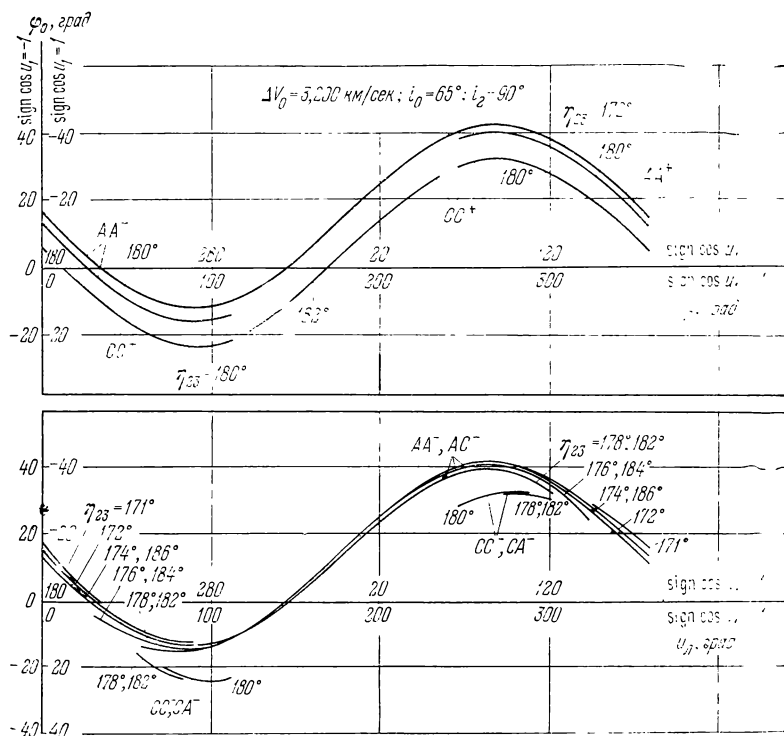


Рис. 11.4.4.

11.4.6, 11.4.8 штриховой линией показана граница, где при заданных условиях уравнение (11.2.12) перестает выполняться.

Как показывают расчеты, изменение $r_{\text{л}}$ в пределах от $r_{\text{л min}}$ до $r_{\text{л max}}$, i_2 от 60° до 120° и ΔV_0 в пределах нескольких сот метров от $\text{min } \Delta V_0$, соответствующего гомановскому перелету Земля — Луна, практически не оказывает влияния на характеристики перелета.

Ограничения, наложенные на величины ΔV_0 , r_0 , $r_{\text{ж}}$, i_0 и i_2 , учитываются при расчете перелета Земля — Луна непосредственно, поскольку эти величины являются задаваемыми параметрами. Ограничение величины t_{01} оказывается существенным для

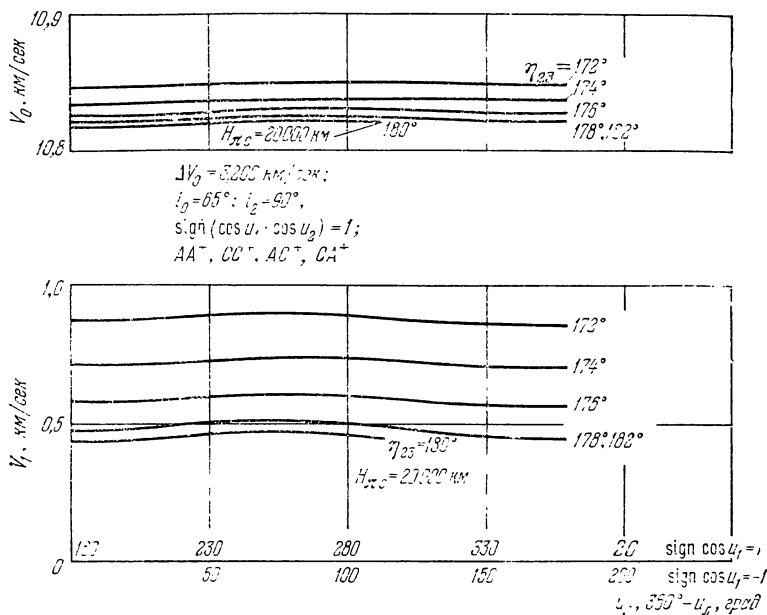


Рис. 11.4.5.

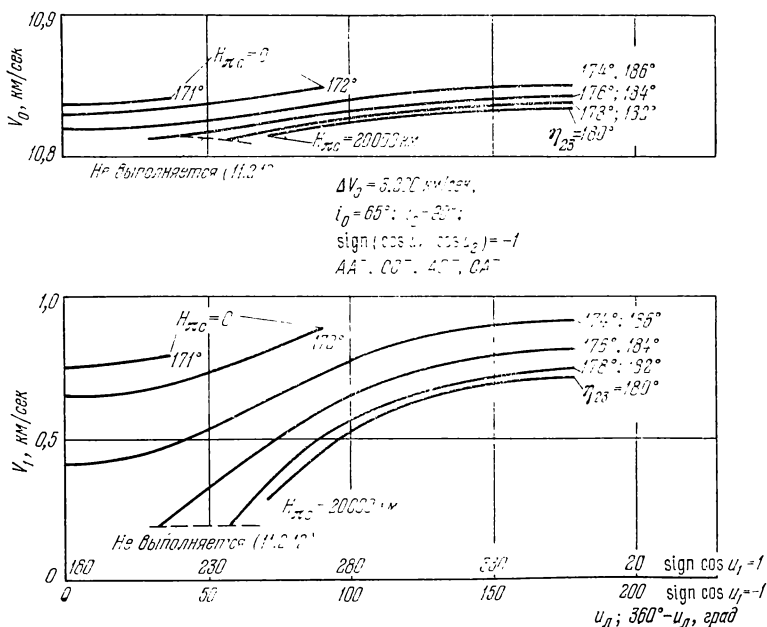


Рис. 11.4.6.

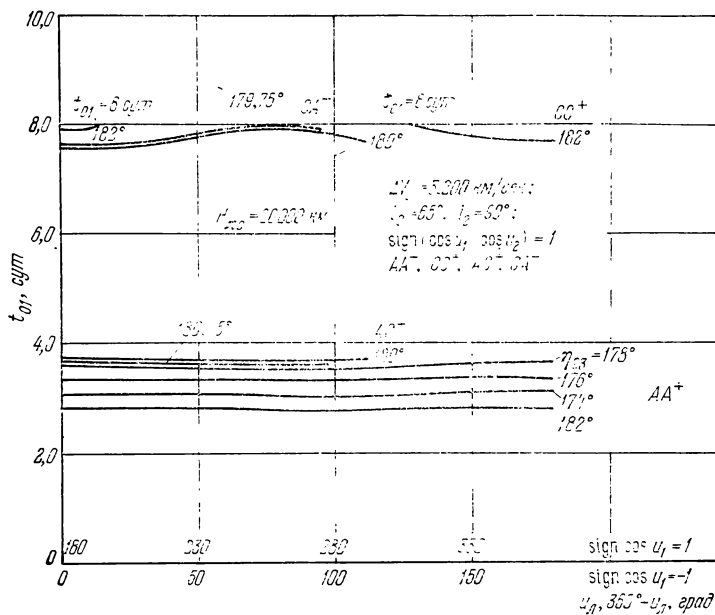


Рис. 11.4.7.

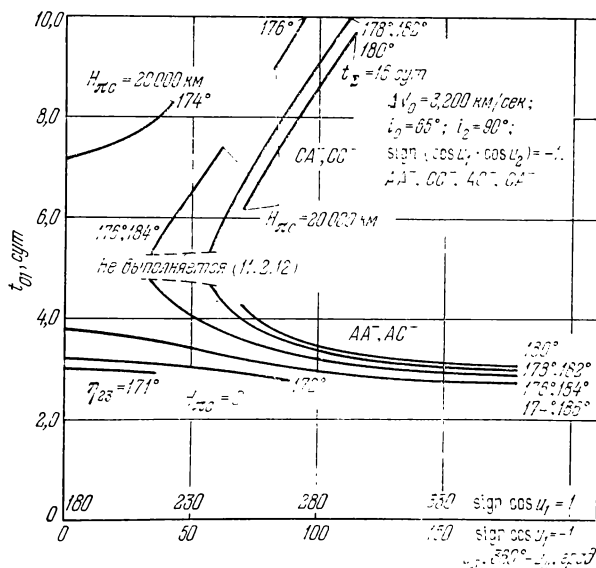


Рис. 11.4.8.

маршрутов $CC^\pm$, $CA^\pm$ с апогейным участком на дуге перелета Земля — Луна и определяет область существования допустимых решений по u_d и η_{23} . Ограничение величины φ_0 в основном может сказаться на выборе допустимых значений u_d .

г) Селеносферическое движение. Продолжительность полета. Все параметры селеносферического движения разделим на две группы (см. раздел 11.2.3в):

1) параметры, характеризующие движение в плоскости гиперболы и зависящие только от V_c и $H_{\pi c}$;

2) параметры, характеризующие ориентацию селеносферической гиперболы и положение точек входа и выхода на сфере влияния Луны, зависящие от V_{c1} , V_{c2} и $H_{\pi c}$.

Как следует из (11.2.43), (11.2.45), (11.2.46), для расчета параметров первой группы необходимо задать

$$r_{\perp}, r_0, r_{\pi}, \eta_{23}, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \Delta V_0, \text{sign}(\alpha_1 \alpha_2), \text{sign}(V_{1r}, V_{2r}).$$

Первые семь величин задаются или определяются для перелетов Земля — Луна и Луна — Земля. Параметр $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2)$ характеризует расположение плоскостей перелетов Земля — Луна и Луна — Земля относительно плоскости орбиты Луны или сочетание направлений этих перелетов по отношению к полюсам Земли. Параметр $\text{sign}(V_{1r}, V_{2r})$ определяется сочетанием маршрутов перелетов Земля — Луна и Луна — Земля: для одноименных маршрутов перелета ($AA^\pm$, $CC^\pm$) $\text{sign}(V_{1r}, V_{2r}) = -1$, для разноименных маршрутов ($CA^\pm$, $AC^\pm$) $\text{sign}(V_{1r}, V_{2r}) = 1$. Поскольку маршрут перелета Луна — Земля определяется величиной η_{23} , задание $\text{sign}(V_{1r}, V_{2r})$ сразу же определяет маршрут перелета Земля — Луны (см. классификацию траекторий облета в разделе 11.2.2).

Ко второй группе параметров относятся селеноцентрические долготы λ_c и широты φ_c ортов $i_{\pi c}$, $i_{\pi c}$, i_{yc} : $\lambda_{\pi c}$, $\varphi_{\pi c}$, $\lambda_{\pi c}$, $\varphi_{\pi c}$, λ_{yc} , φ_{yc} соответственно; точки входа на сфере влияния Луны λ_{c1} , φ_{c1} и точки выхода на ней λ_{c2} , φ_{c2} (см. рис. 11.2.5). Заметим, что наклонение плоскости селеноцентрической гиперболы к плоскости $x_c y_c$

$$i_c = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\pi c}.$$

Указанная группа величин зависит от тех же параметров, что и величины первой группы, с заменой $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$ и $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2)$ на α_1 и α_2 .

Используя (11.2.43) — (11.2.49), можно установить ряд существенных свойств характеристик селеносферического движения.

1. Селеносферические характеристики — четные функции величины $u_d - 180^\circ$.

2. При одновременном изменении $\text{sign} \cos u_i$, $i = 1, 2$, т. е. при одновременном изменении направления движения на участ-

как Земля — Луна и Луна — Земля, характеристики первой группы не изменяются, поскольку они зависят от $\cos \alpha_i$, а $\text{sign}(\alpha_1 \alpha_2)$ остается неизменным. Используя соотношения раздела 11.2.3в, можно показать, что при этом изменяются знаки величин $\varphi_{\text{пс}}$, $\varphi_{\text{пс}}$, $\varphi_{\text{сi}}$, $i = 1, 2$, а $\lambda_{\text{пс}}$ заменяются на $\lambda_{\text{пс}} + 180^\circ$; все остальные характеристики второй группы не изменяются. В соответствии с правилом пересчета (см. раздел 11.4.1а) $u_{\text{л}}$ заменяется на $u_{\text{л}} + 180^\circ$.

Одновременное изменение знаков $\cos u_i$ (и α_i), $i = 1, 2$, равносильно симметричному отображению траектории облета Луны относительно плоскости лунной орбиты, поэтому указанное свойство имеет место и для других моделей системы Земля — Луна (Мьеле [4]).

3. Одновременная (для перелетов Земля — Луна и Луна — Земля) замена маршрутов A на C и C на A соответствует переходу от значения η_{23} к значению $360^\circ - \eta_{23}$ и одновременному изменению знаков V_{1r} , V_{2r} при условии

$$\text{sign}(V_{1r}, V_{2r}) = \text{const.}$$

Поскольку все геоцентрические параметры, от которых зависят $V_{\text{с}}$ и $H_{\text{пс}}$, суть четные функции аргумента $\eta_{23} - 180^\circ$ (см. разделы 11.4.1б, в), то при такой замене характеристики первой группы остаются неизменными. Используя соотношения раздела 11.2.3в, можно показать, что $\lambda_{\text{сi}}$, $\lambda_{\text{пс}}$ и $\lambda_{\text{ус}}$ заменяются на $180^\circ - \lambda_{\text{сi}}$, $180^\circ - \lambda_{\text{пс}}$ и $180^\circ - \lambda_{\text{ус}}$ соответственно, $\lambda_{\text{пс}}$ заменяется на $360^\circ - \lambda_{\text{пс}}$, а $\varphi_{\text{пс}}$ на $-\varphi_{\text{пс}}$; остальные характеристики второй группы не изменяются.

Заметим, что указанные свойства инвариантности и симметрии селеносферического движения являются частными случаями свойств инвариантности и симметрии внутренней задачи ММСВ, подробно рассмотренных в разделе 10.2.5. Как и в общем случае, подчеркнем, что свойство 3 в рамках ММСВ является следствием снесения векторов V_1 и V_2 со сферы влияния в центр масс Луны, поэтому в других моделях системы Земля — Луна — аппарат (модель сфер влияния, ограниченная задача трех тел и т. п.) оно выполняется лишь приближенно.

Результаты расчета селеносферических характеристик в зависимости от $u_{\text{л}}$ приведены на рис. 11.4.9—11.4.11 для следующих исходных данных: $i_{\text{л}} = 28^\circ$, $r_{\text{л}} = 384\,394,8$ км; $i_0 = 65^\circ$, $i_2 = 90^\circ$, $r_{\pi} = 6421$ км ($H_{\pi} = 50$ км), $r_0 = 6700$ км, $\Delta V_0 = 3200$ м/сек. В тех случаях, когда траектории облета существуют не при всех значениях $u_{\text{л}}$, в крайних точках кривых указано, какое из условий физической реализуемости траекторий (уравнение «склейки» (11.2.12) и $H_{\text{пс}} > 0$) или ограничений (см. раздел 11.4.2) нарушается. Это же сделано на графиках суммарной продолжительности полета, рис. 11.4.12, 11.4.13.

Подробный анализ результатов расчета селеносферического движения проведен в работе В. А. Ильина, В. В. Демешкиной, Н. А. Истомина [1].

Из приведенных данных ясно, что ограничение $H_{\pi c}^{**} \leq H_{\pi c} \leq H_{\pi c}^*$ по-разному влияет на одноименные и разноименные маршруты. Для одноименных маршрутов $AA^\pm$, $CC^\pm$ при $\eta_{23} \rightarrow 180^\circ$ существенно ограничение $H_{\pi c} \leq H_{\pi c}^*$, а при увеличении $|\eta_{23} - 180^\circ|$ — ограничение $H_{\pi c}^{**} \leq H_{\pi c}$. Для разноименных маршрутов $CA^\pm$, $AC^\pm$ существенно только условие $H_{\pi c} \leq H_{\pi c}^*$. При помощи полученных результатов в пространстве основных параметров u_L , η_{23}

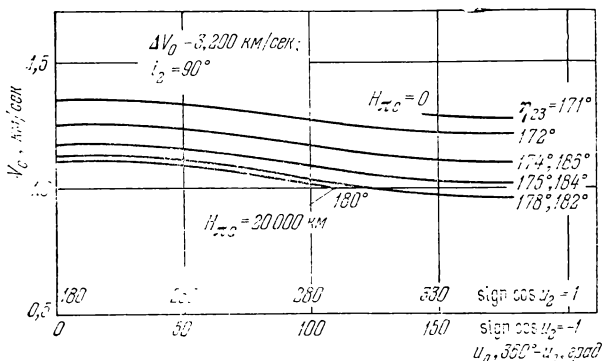


Рис. 11.4.9.

можно выделить область, где выполняются заданные ограничения на величину $H_{\pi c}$.

Продолжительность движения аппарата в сфере влияния Луны t_c очень слабо зависит от маршрута перелета, u_L , i_2 и несколько уменьшается с ростом $|\eta_{23} - 180^\circ|$, что в основном вызвано возрастанием средней скорости движения по гиперболе (см. рис. 11.4.9). Во всех рассмотренных случаях $1,05 \text{ сут} \leq t_c \leq 1,57 \text{ сут}$. Поскольку суммарная продолжительность полета $t_\Sigma = t_{01} + t_c + t_{23}$ и $t_c \ll t_{01} + t_{23}$, то характер зависимостей $t_\Sigma(u_L, \eta_{23})$ (рис. 11.4.12, 11.4.13) полностью определяется соответствующими зависимостями $t_{01}(u_L, \eta_{23})$ (рис. 11.4.7, 11.4.8) и $t_{23}(\eta_{23})$ (рис. 11.4.3). Заметим, что вычисляемая таким образом величина t_Σ оказывается несколько завышенной по сравнению с истинной за счет продолжения геоцентрических участков перелета внутрь сферы влияния Луны (схема ММСВ). Поэтому для оценки t_Σ лучше пользоваться, как показывают расчеты (см. таблицу 11.6.1), величиной $t_{01} + t_{23}$.

Определенный практический интерес представляет выяснение возможности наблюдения КА с Земли в окрестности периселения. Если эта область не попадает внутрь конуса с вершиной

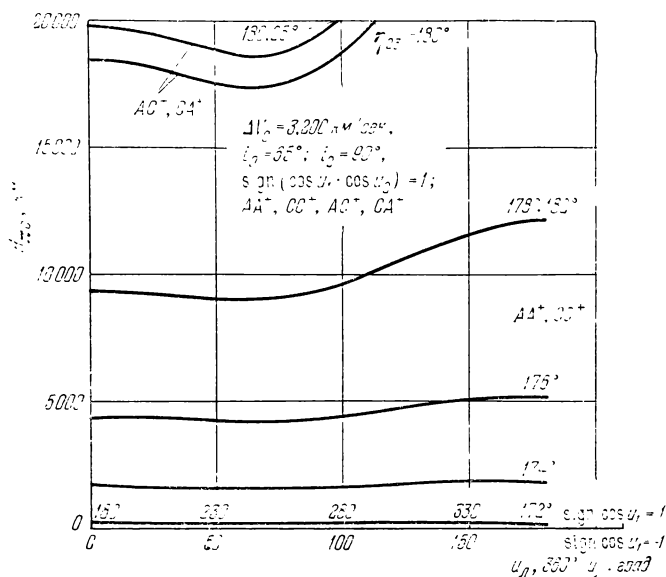


Рис. 11.4.10.

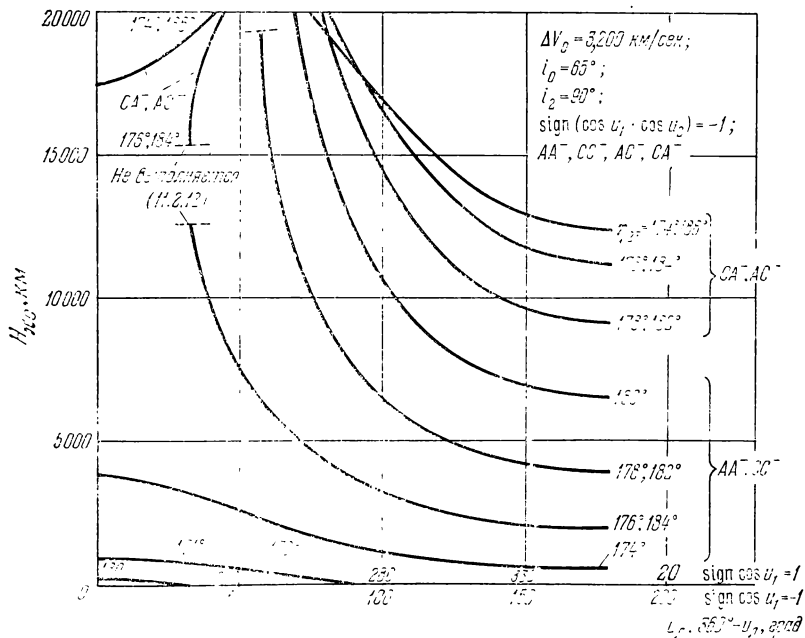


Рис. 11.4.11.

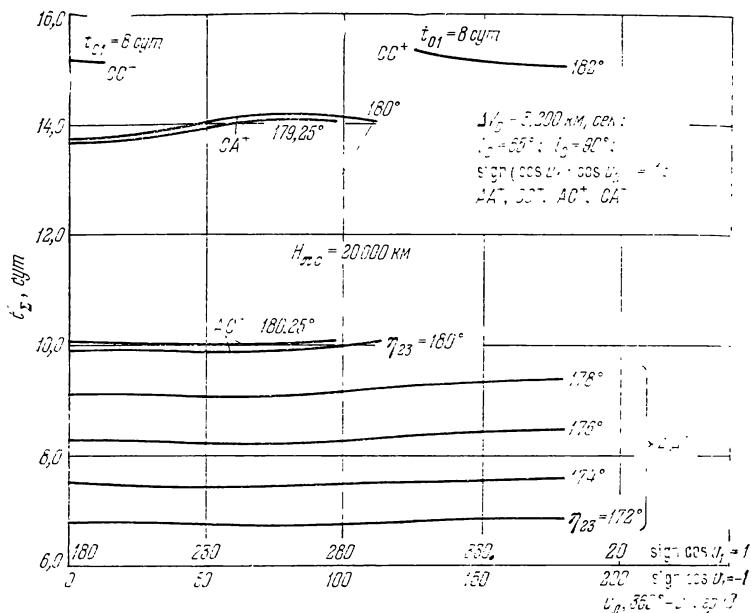


Рис. 11.4.12.

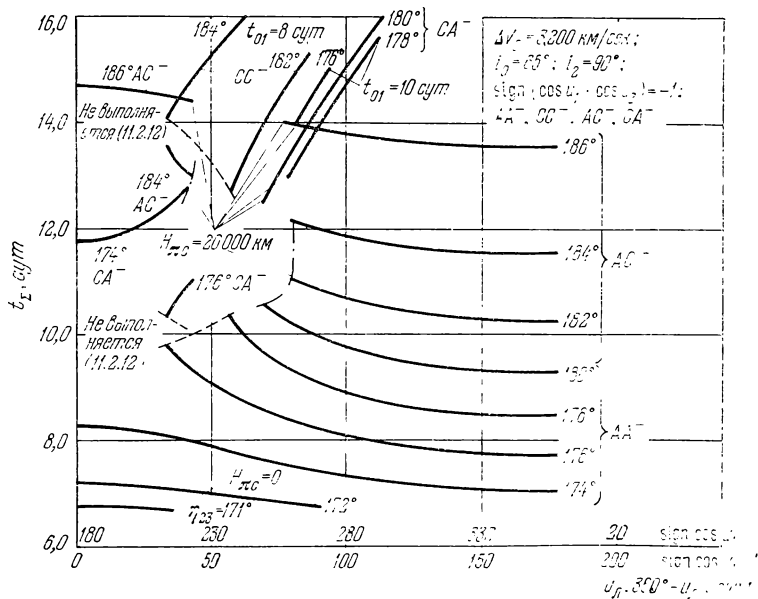


Рис. 11.4.13.

в центре Земли и образующими, касательными к поверхности Луны, то аппарат при облете Луны виден с Земли. Результаты расчетов показывают, что для всех маршрутов, кроме $AA^\pm$, аппарат при облете Луны доступен наблюдениям с Земли.

Поскольку при длительном пребывании аппарата в тени Луны могут выйти из строя бортовые солнечные батареи, представляет интерес оценка максимально возможной продолжительности пребывания в тени Луны Δt_+ . Ее оценки показали, что для маршрутов AA^+ , CC^+ , CA^+ , AC^+ она составляет величину порядка 2 часов. Для остальных маршрутов аналогичная оценка дает завышенные результаты.

Из сказанного выше относительно схемы расчета селеносферического движения и результатов разделов 11.4.1б, в следует, что изменение $r_{\text{л}}$ в пределах от $r_{\text{л min}}$ до $r_{\text{л max}}$ или соответствующее относительное изменение r_0 , r_π , а также отклонение ΔV_0 на несколько сот метров от значения, соответствующего гомановскому перелету, весьма слабо влияют на параметры селеносферического движения.

11.4.2. Сравнение различных классов траекторий. Из проведенного анализа траекторий облета Луны следует, что свойства этих траекторий определяются как условиями их физической реализуемости (выполнение соотношения (11.2.12), $0 < H_\pi < < \rho_{\text{сф}} - R_{\text{л}}$), так и наложенными на эти траектории ограничениями (см. раздел 11.2.4). При синтезе траекторий облета Луны ограничения, накладываемые на ΔV_0 , r_0 , i_0 , i_2 и H_π , учитываются непосредственно при задании этих величин в качестве исходных данных. Из остальных ограничений принимаются во внимание ограничения, наложенные на H_π , t_{01} , t_{23} и t_z . Учет этих ограничений приводит, в соответствии с используемой методикой, к выделению области допустимых значений варьируемых параметров $u_{\text{л}}$, η_{23} и i_2 . Ограничения, накладываемые на широты точек старта с орбиты ИСЗ φ_0 и условного перигея φ_π , при синтезе траекторий облета не учитывались.

При расчетах траекторий облета на ЭЦВМ задавались следующие ограничения: $\Delta V_0 = 3200 \text{ м/сек}$, $i_0 = 65^\circ$, $60^\circ \leq i_2 \leq 120^\circ$, $r_0 = 6700 \text{ км}$, $H_\pi = 50 \text{ км}$, $t_{01}(C^\pm) \leq 8 \text{ суток}$, $t_{23}(CC^\pm) \leq 8 \text{ суток}$, $t_{01}(CA^\pm) \leq 10 \text{ суток}$, $t_{23}(AC^\pm) \leq 10 \text{ суток}$, $t_z \leq 16 \text{ суток}$, $H_\pi \leq \leq 20\,000 \text{ км}$. Ограничения по продолжительности полета оказались необходимы только для траекторий облета, содержащих апогейную дугу C . Как видно из рис. 11.4.3, 11.4.7, для траекторий облета Луны $AA^\pm$ ограничения продолжительности полета несущественны. На основании этих же данных для разноименных маршрутов перелета оказалось возможным несколько увеличить продолжительность полета по дуге C , сохранив неизменным ограничение суммарной продолжительности полета. Из результатов расчета (раздел 11.4.1г) следует, что для одноименных маршрутов

Сводная таблица характеристик траекторий облета Луны с возращением в атмосферу Земли
 ($i_L = 28^\circ$, $r_L = 384\,394,8$ км, $\rho_{сф} = 66\,000$ км, $H_n = 50$ км, $\Delta V_0 = 3200$ м/сек, $r_0 = 6700$ км, $i_0 = 65^\circ$)

Маршрут	Направление по отношению к полюсам Земли		Основные характеристики траекторий			Условия облета Луны				Условия возвращения к Земле		
	запуска к Луне	возврата к Земле	φ_0 , град	i_L , град	H , тыс. км	i_c , град	возможность исследования аппарата при облете Луны по полюсам	видимость аппарата при облете Луны	Δt_T , час	i_2 , град	φ_L , град	средняя дальность полета до точки с географической широтой $\varphi_F = 50^\circ$, км
AA+	Ю	С	$-37 \div 26$	$6,85 \div 9,85$	$0 \div 20$	$6 \div 14$	невидимая	не виден	$0,4 \div 1,85$	$60 \div 120$	$-26 \div 36$	—
	С	Ю	$-26 \div 37$				невидимая				$-36 \div 26$	$2700 \div 9600$
CC+	Ю	С	$-30 \div 25$				видимая	виден		$60 \div 90$	$-30 \div 26$	—
	С	Ю	$-25 \div 30$	$13,55 \div 16$	$9,6 \div 20$	$7 \div 14$	видимая		$0,75 \div 1,85$		$-26 \div 30$	$2200 \div 8500$
AA-	Ю	Ю	$-36 \div 20$				невидимая южная	не виден			$-35 \div 28$	$2500 \div 9500$
	С	С	$-20 \div 36$	$6,75 \div 10,5$	$0 \div 20$	$9 \div 55$	невидимая северная		—	$60 \div 120$	$-28 \div 35$	—
CC-	Ю	Ю	$-31 \div 27$				видимая южная	виден			$-27 \div 28$	$2500 \div 8600$
	С	С	$-27 \div 31$	$12,65 \div 16$	$5,5 \div 20$	$21 \div 55$	видимая северная		—	$60 \div 120$	$-28 \div 27$	—

CA^+	Ю	С	$-28 \div 28$	$14,3 \div 15,35$	$12,7 \div 20$	$9 \div 14$	видимая западная	виден	$0,85 \div 2,5$	90	$-28 \div 29$	—
	С	Ю	$-28 \div 28$				видимая западная				$-29 \div 28$	$2500 \div 8900$
AC^+	Ю	С	$-37 \div 19$				невидимая западная				$-33 \div 28$	—
	С	Ю	$-19 \div 37$	$9,25 \div 13,6$	$7,2 \div 20$	$7 \div 18$	невидимая западная	виден	$0,85 \div 2,5$	$90 \div 120$	$-28 \div 33$	$1900 \div 8700$
CA^-	Ю	Ю	$-30 \div 29$				видимая западная южная				$-31 \div 28$	$2500 \div 9100$
	С	С	$-29 \div 30$	$12,65 \div 16$	$8,3 \div 20$	$27 \div 79$	видимая западная северная	виден	—	$60 \div 120$	$-28 \div 31$	—
AC^-	Ю	Ю	$-36 \div 20$				невидимая западная южная				$-31 \div 33$	$1900 \div 9100$
	С	С	$-20 \div 36$	$9 \div 13,95$	$4,6 \div 20$	$11 \div 79$	невидимая западная северная	виден	—	$60 \div 120$	$-33 \div 31$	—

Примечание. Ю — Южный полюс, С — Северный полюс. Проверки в столбце ΔM_T означают, что по используемой приближенной методике $\max \Delta M_T$ не оценивается.

перелета $AA^\pm$, $CC^\pm$ важны ограничения высоты облета Луны $H_{\pi c}$ как снизу, так и сверху, а для разноименных маршрутов перелета $CA^\pm$, $AC^\pm$ важно только ограничение сверху.

При заданных ограничениях пассивные траектории облета Луны существуют только при $171^\circ \leq \eta_{23} \leq 186^\circ$. Таким образом, на основании результатов разделов 11.4.16, в можно утверждать, что геоцентрические участки всех траекторий облета Луны, удовлетворяющих сформулированным ограничениям, будут эллиптическими.

При сравнении различных классов траекторий облета Луны в качестве основных характеристик примем:

- 1) условия запуска к Луне: направление по отношению к полюсам Земли, широту точки старта с орбиты ИСЗ φ_0 ;
- 2) суммарную продолжительность полета t_z ;
- 3) высоту облета Луны $H_{\pi c}$;
- 4) условия облета Луны: возможности обследования поверхности Луны, условия прямой видимости аппарата с Земли;
- 5) условия возврата к Земле: направление по отношению к полюсам Земли, i_2 , φ_π , дальность полета от условного перигея до точки посадки на поверхности Земли.

Основные характеристики рассмотренных классов траекторий облета Луны представлены в таблице 11.4.2. Схематический вид всех классов траекторий облета Луны показан на рис. 11.4.14—11.4.17.

Практический интерес представляют четыре класса траекторий облета Луны по маршрутам $AA^\pm$, $AC^\pm$.

1. Маршрут $AA^\pm$. Этот класс траекторий в литературе исследован наиболее полно. Важной его особенностью является слабая зависимость всех характеристик, кроме φ_0 и φ_π , от u_π . Это позволяет значительно расширить диапазон возможных дат старта для заданной траектории.

При старте как в направлении Северного, так и Южного полюсов Земли возможности обследования поверхности Луны примерно одинаковы. Недостатками этого класса траекторий являются весьма ограниченные возможности обследования поверхности Луны и отсутствие прямой видимости аппарата с Земли в районе периселения.

2. Маршрут AA^- . При запуске в северном направлении траектории этого типа позволяют обследовать значительную часть северного полушария Луны. Область периселения недоступна для наблюдений с Земли, аппарат возвращается к Земле через Северный полюс. При запуске в южном направлении с возвратом к Земле со стороны Южного полюса можно обследовать значительную часть южного полушария Луны.

3. Маршрут AC^+ . Траектории этого типа позволяют получить несколько большую информацию о поверхности Луны

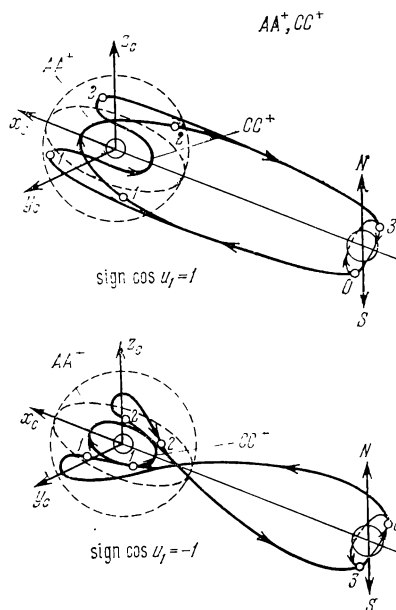


Рис. 11.4.14.

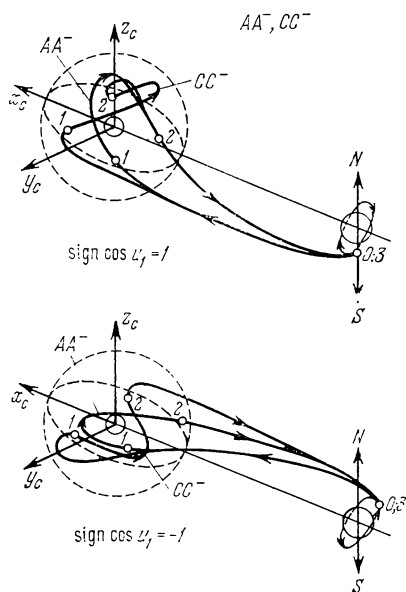


Рис. 11.4.15.

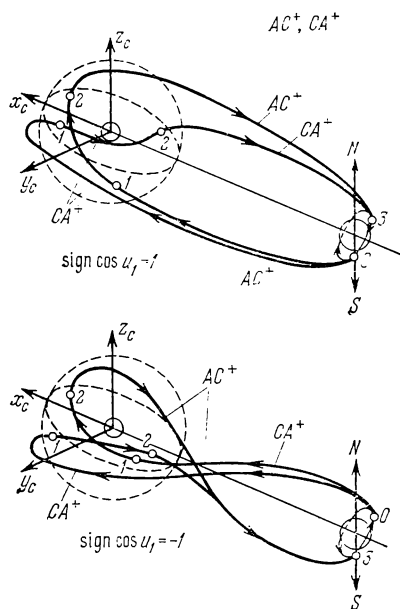


Рис. 11.4.16.

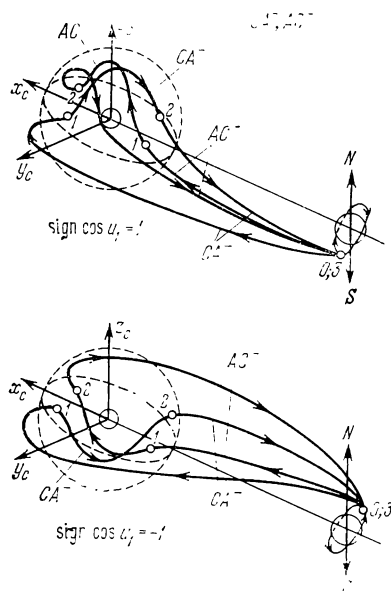


Рис. 11.4.17.

в основном о ее западном полушарии, чем траектории типа AA^+ , за счет большего диапазона наклонений к плоскости орбиты Луны. При облете Луны аппарат виден с Земли в любой момент времени. При запуске в северном направлении аппарат возвращается к Земле со стороны Южного полюса. Запуск в южном направлении не дает существенно новой информации о поверхности Луны.

4. Маршрут AC^- . Траектории этого класса обладают рядом преимуществ по сравнению с траекториями типа AA^+ :

а) Высоты облета Луны охватывают весь интересный диапазон $4600 \text{ км} \leq H_{\text{лс}} \leq 20\,000 \text{ км}$ и в то же время ограничены снизу. Невозможность весьма тесного сближения с Луной для траекторий этого типа, по-видимому, упростит решение вопросов управления траекториями.

б) Траектории этого типа — единственные практически приемлемые траектории, позволяющие обследовать полярные области Луны: при запуске на север — область Северного полюса, при запуске на юг — область Южного полюса.

в) При облете Луны аппарат в любой момент виден с Земли.

Заметим, что посадка аппарата в окрестности значений географических широт $\varphi_{\text{в}} \approx 50^\circ$ при возврате к Земле со стороны Южного полюса для всех вариантов требует реализации схемы торможения в атмосфере Земли и движения на приземном участке, показанных на рис. 5.2.1, 6. При этом дальность полета на внеатмосферном участке находится примерно в пределах $2000 \div 9000 \text{ км}$.

§ 11.5. Синтез перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС Луны и поверхность Луны — атмосфера Земли

11.5.1. Постановка задачи оптимизации перелетов круговая орбита ИСЗ — круговая орбита ИС Луны и схема ее решения. Эту задачу будем рассматривать в рамках ММСВ при тех же предположениях, что и задачу облета Луны (см. раздел 11.2.4, предположения 1° и 3°).

Пусть старт в сторону Луны происходит с круговой орбиты ИСЗ, плоскость которой совпадает с заданной плоскостью полета Земля — Луна (рис. 11.5.1, точка O). При заданном наклонении к экватору перелета Земля — Луна i_0 , равном наклонению орбиты ИСЗ, указанного совмещения плоскостей можно добиться за счет выбора долготы восходящего узла орбиты ИСЗ Ω_0 , т. е. момента запуска на орбиту.

Считаем заданной величину импульсного приращения скорости при старте с орбиты ИСЗ ΔV_0 . Тогда

$$\Delta V_0^2 = V_0^2 + V_{\oplus \text{кр}}^2 - 2V_{\oplus \text{кр}}V_{0\tau}, \quad (11.5.1)$$

где V_0 , $V_{0\tau}$ — геоцентрическая скорость аппарата в начальной точке и ее трансверсальная компонента, $V_{\oplus\text{кр}} = \sqrt{\mu_{\oplus}/r_0}$ — круговая скорость на расстоянии r_0 от центра Земли.

В этом случае $V_{\tau 0}$ меняется в диапазоне

$$\min V_{0\tau} \leq V_{0\tau} \leq \max V_{0\tau} = V_{\oplus\text{кр}} + \Delta V_0. \quad (11.5.2)$$

Величина $\min V_{0\tau}$ получается при минимально возможном значении фокального параметра (безразмерного, отнесенного

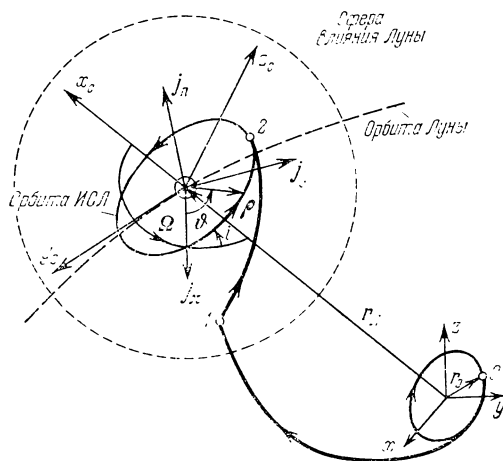


Рис. 11.5.1.

к r_0) $\min p_{01}$ перелета орбита ИСЗ — Луна. Записывая уравнение (5.1.43) кривой $e_{01} = e_{01}(p_{01}, \Delta V_0 = \text{const})$ и определяя ее пересечение с прямой (5.1.8), найдем $\min p_{01}(n = r_L/r_0, \Delta V_0/V_{\oplus\text{кр}})$. Поскольку $V_{0\tau} = V_{\oplus\text{кр}} \sqrt{p_{01}}$, в результате получаем

$$\min V_{0\tau} = V_{\oplus\text{кр}} \left[\left(\frac{r_L}{r_0} \right)^2 - \sqrt{\left(\frac{r_L}{r_0} \right)^4 - \left(3 - \frac{\Delta V_0^2}{V_{\oplus\text{кр}}^2} \right) \left(\frac{r_L}{r_0} \right)^2 + 2 \frac{r_L}{r_0}} \right]. \quad (11.5.3)$$

Перелет с $V_{0\tau} = \max V_{0\tau}$ соответствует касанию в перигее траектории Земля — Луна круговой орбиты ИСЗ с радиусом r_0 , перелет с $V_{0\tau} = \min V_{0\tau}$ соответствует касанию в апогее траектории Земля — Луна круговой орбиты с радиусом r_L . Зависимости $\min V_{0\tau}$, $\max V_{0\tau}$ от ΔV_0 для $r_0 = 6700$ км, $r_L = 384395$ км приведены на рис. 11.5.2.

Поскольку при $\Delta V_0 \approx 3,2 \div 3,4$ км/сек $V_{0\tau}$ меняется в очень узком диапазоне (см. рис. 11.5.2), практически для любых перелетов Земля — Луна в момент входа на сфере влияния $V_{1\tau} \approx 0,19$ км/сек.

Используя (11.5.1) и интеграл энергии, найдем геоцентрическую скорость в момент входа в сферу влияния Луны (рис. 11.5.1, точка 1):

$$V_1^2 = \Delta V_0^2 + 2V_{кр\oplus}V_{0\tau} + 2U_{\pi}^2 - 3V_{кр\oplus}^2. \quad (11.5.4)$$

С помощью (11.2.14), (11.5.4) и интеграла момента количества движения получим величину вектора селеноцентрической скорости $V_{сф}$ в момент входа на сфере влияния Луны:

$$V_{сф}^2 = \Delta V_0^2 + 3(U_{\pi}^2 - V_{кр\oplus}^2) + 2V_{кр\oplus}V_{0\tau} \left(1 - \frac{U_{\pi}^3}{V_{кр\oplus}^3} \cos \alpha_1\right), \quad (11.5.5)$$

где $\alpha_1(i_{\pi}, u_{\pi}, i_0, \text{sign} \cos u_1)$ — угол между векторами U_{π} и $V_{1\tau}$, определяемый соотношениями (11.2.25) и (11.2.30). Зная ориентацию плоскости перелета Земля — Луна относительно плоскости орбиты Луны, величину $V_{сф}$ и — при заданной величине $V_{0\tau}$ — компоненты V_{1r} и $V_{1\tau}$ вектора V_1 , получаем, согласно

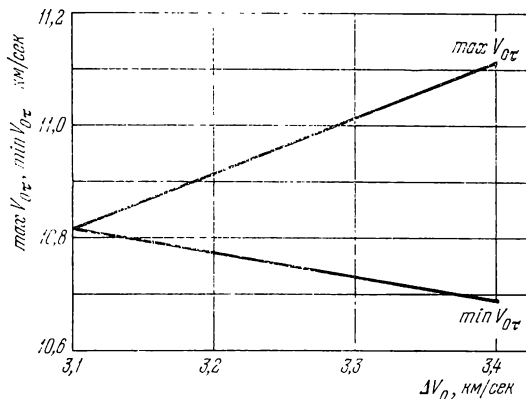


Рис. 11.5.2.

(11.2.43), на сфере влияния Луны вектор $V_{сф}$. В результате для определения оптимального перелета сфера влияния Луны — орбита ИСЛ приходим к стандартной постановке внутренней задачи ММСВ, рассмотренной в гл. X. В дальнейшем для простоты рассматриваются одноимпульсные перелеты сфера влияния Луны — круговая орбита ИСЛ, для которых величина импульса

перехода на орбиту ИСЛ (в точке 2 на рис. 11.5.1) $\Delta V = \Delta V(\chi, \sigma)$, где параметры χ и σ определяются соотношениями (10.2.33), (10.2.20).

Поскольку $V_1 \approx V_{1r}$, из (11.5.4) и (11.5.5) следует, что при изменении $V_{0\tau}$ от $\min V_{0\tau}$ до $\max V_{0\tau}$, V_{1r} и $V_{сф}$ меняются достаточно сильно (рис. 11.5.3). Указанные изменения $V_{сф}$ и V_{1r} приводят к достаточно большим изменениям в χ и σ и соответственно в ΔV . Таким образом, приходим к задаче об отыскании

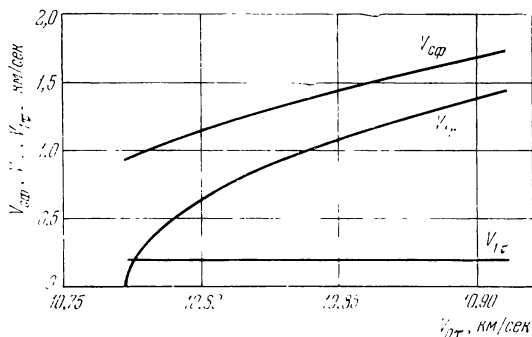


Рис. 11.5.3.

оптимальной ориентации вектора скорости в момент старта с орбиты ИСЗ, обеспечивающей минимум импульсного приращения скорости ΔV при переходе на орбиту ИСЛ.

Точная постановка указанной задачи в рамках ММСВ может быть сформулирована следующим образом (рис. 11.5.1). При заданных: положении Луны на орбите — i_L , u_L , параметрах круговой орбиты ИСЛ — радиусе $\rho = H + R_L$, наклонении i , долготе восходящего узла Ω (в некоторой селеноцентрической системе координат), радиусе круговой орбиты ИСЗ r_0 , параметрах геоцентрического перелета Земля — Луна — i_0 , $\text{sign} \cos u_1$, ΔV_0 и его маршруте — определить оптимальную величину $V_{0\tau}$, обеспечивающую минимальное импульсное приращение скорости перехода аппарата на орбиту ИСЛ ΔV при условии, что переход совершается в оптимальной точке на орбите ИСЛ.

Поставленная задача может быть численно решена по следующей схеме:

(1) при заданных значениях ΔV_0 и $V_{0\tau}$ по методике раздела 11.2.3б определяется перелет Земля — Луна и вектор $V_{сф}$;

(2) для заданной орбиты ИСЛ находится в соответствии с методикой раздела 10.2.2 оптимальная точка выхода на орбиту ИСЛ и соответствующее значение $\min_{\{\cos \beta\}} \Delta V$, где $\cos \beta$ определяется соотношением (10.2.32);

(3) путем перебора $V_{0\tau}$ в диапазоне (11.5.2) находится оптимальное значение $V_{0\tau}$ и соответствующее значение

$$\min \{ \min \Delta V \}.$$

$$\{V_{0\tau}\} \{ \cos \beta \}$$

11.5.2. Численные результаты. Селеноцентрическая система координат $x_c y_c z_c$ принята такой же, как и в задаче облета Луны (см. раздел 11.2.2, рис. 11.2.3).

При проведении расчетов и выборе диапазона изменения параметров были учтены следующие особенности траекторий орбиты ИСЗ — орбита ИСЛ, аналогичные соответствующим свойствам траекторий облета Луны (см. разделы 10.2.5, 11.2.3, 11.4.1):

1. Четность всех характеристик по u_L относительно значения $u_L = 180^\circ$.

2. Правило пересчета и свойство инвариантности при изменении $\text{sign} \cos u_L$: при изменении $\text{sign} \cos u_L$ характеристики селеносферического движения не изменяются, если заменить u_L на $u_L + 180^\circ$, j_π на $j_\pi(+ + -)$, j_ν на $j_\nu(+ + -)$, j_n на $j_n(- - +)$. Здесь j_π , j_ν , j_n — орты, характеризующие ориентацию орбиты ИСЛ (см. раздел 10.1.2): орт j_π в случае круговой орбиты ИС может быть задан произвольно в плоскости орбиты, орт j_n коллинеарен вектору кинетического момента орбитального движения, орт j_ν дополняют орты j_π , j_n до правой ортогональной тройки.

3. Инвариантность при замене геоцентрического маршрута A на C и наоборот: характеристики селеносферического движения не изменяются, если при этом заменить j_π на $j_\pi(- + +)$, j_ν на $j_\nu(- + +)$, j_n на $j_n(+ - -)$. Здесь знаком «+» обозначены неизменные проекции ортов на оси координат $x_c y_c z_c$, знаком «-» — меняющие знак на противоположный.

4. Слабая зависимость $V_{c\phi}$ и всех селеноцентрических характеристик от u_L .

Ориентацию круговой орбиты ИСЛ в пространстве удобно задавать с помощью наклонения к плоскости орбиты Луны i и долготы восходящего угла Ω , отсчитываемой от оси x_c в сторону оси y_c . Истинная аномалия в плоскости орбиты ϑ отсчитывается от плоскости орбиты Луны, т. е. вектор j_π расположен в плоскости орбиты Луны и направлен в восходящий узел орбиты ИСЛ. В этом случае

$$j_\pi = \{\cos \Omega, \sin \Omega, 0\}, \quad (11.5.6a)$$

$$j_\nu = \{-\cos i \sin \Omega, \cos i \cos \Omega, \sin i\}, \quad (11.5.6b)$$

$$j_n = \{\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i\}. \quad (11.5.6в)$$

Величины i и Ω влияют на решение через направляющие косинусы вектора $V_{c\phi}$ (см. раздел 10.1.2):

$$l = \cos(V_{c\phi}, j_\pi), \quad m = \cos(V_{c\phi}, j_\nu), \quad n = \cos(V_{c\phi}, j_n), \quad (11.5.7)$$

при этом параметры оптимальной гиперболы зависят только от $\sigma = 1 - n^2$, а l и m влияют только на истинную аномалию θ точки выхода на орбиту ИСЛ. Используя (11.2.43) и (11.5.6), можно установить, что l , m , n , σ являются периодическими функциями i и Ω с периодом 2π . При $i = 90^\circ$ период для σ по Ω равен π , при $i = 0$, 180° σ не зависит от Ω .

Астрофизические постоянные Земли и Луны, использованные в расчетах, приведены в таблице 11.4.1. Были приняты следующие данные: $i_L = 28^\circ$, $i_0 = 65^\circ$, $r_0 = 6700$ км, $\Delta V_0 = 3200$ м/сек. На основании изложенного выше было принято: $u_L = 0, 90^\circ$, 180° , $\text{sign } \cos u_1 = -1$. Маршрут перелета Земля — Луна — А. Были взяты орбиты ИСЛ высотой $H = 200$ км, 2000 км, $20\,000$ км. Для каждой высоты рассматривались наклонения $i = 0, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$. В качестве независимой переменной был взят угол Ω . Рассматривались селеносферические перелеты по маршрутам А, доставляющие глобальный $\min \Delta V$ (см. раздел 10.2.2).

а) Оптимальные значения $V_{0\tau}$ (рис. 11.5.4, 11.5.5). Из приведенных зависимостей $\Delta V = \Delta V(V_{0\tau})$ при $i = 0, 90^\circ, 180^\circ$; $\Omega = 0, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ (при $i = 90^\circ$ период σ по Ω равен π) следует, что при малых H (рис. 11.5.4) $\min \Delta V$ соответствует $\max \sigma$, за исключением $i = 0, 180^\circ$ (рис. 11.5.6). При $i = 0, 180^\circ$ $\min \Delta V \Rightarrow \Rightarrow \min V_{0\tau}$. Вследствие сильного влияния i и Ω на σ опт $V_{0\tau}$ может быть любым из диапазона $[\min V_{0\tau}, \max V_{0\tau}]$. Для приближенного определения опт $V_{0\tau}$ при малых H можно вместо сложной задачи отыскания $\min \Delta V$ решать более простую задачу о $\min |n|$ (11.5.7). ΔV для допустимых $V_{0\tau}$ изменяется в 1,5–2 раза.

При увеличении H (рис. 11.5.5) существенную роль начинает играть эффект увеличения (изменения «масштаба») κ , обусловленный уменьшением скорости движения $V_{крл} = \sqrt{\mu_{\text{пл}}/\rho}$ по орбите ИСЛ (см. раздел 10.2.2). Влияние σ на величину ΔV заметно уменьшается, и основную роль начинает играть уменьшение ΔV с убыванием κ и $V_{\text{сф}}$, в результате чего $\min \Delta V$ достигается при $V_{0\tau} \approx \min V_{0\tau}$ (см. рис. 11.5.3). При этом по-прежнему изменения ΔV при изменении $V_{0\tau}$ в допустимом диапазоне оказываются значительными.

В процессе расчетов были получены зависимости $\Delta V(V_{0\tau})$, характеризующиеся наличием двух $\min \Delta V$. Пример такой зависимости приведен на рис. 11.5.4 ($i = 90^\circ$, $\Omega = 20^\circ$). При наличии нескольких минимумов ΔV программа счета фиксировала $\inf_{\{V_{0\tau}\}} \Delta V$.

б) Оптимальный импульс перехода на орбиту ИСЛ (рис. 11.5.7–11.5.9). Из приведенных зависимостей следует, что ΔV при изменении i и Ω существенно меняется. Максимум ΔV достигается при $i \approx 90^\circ$, поскольку $V_{\text{сф}}$ лежит практически в плоскости орбиты Луны. С ростом H значения

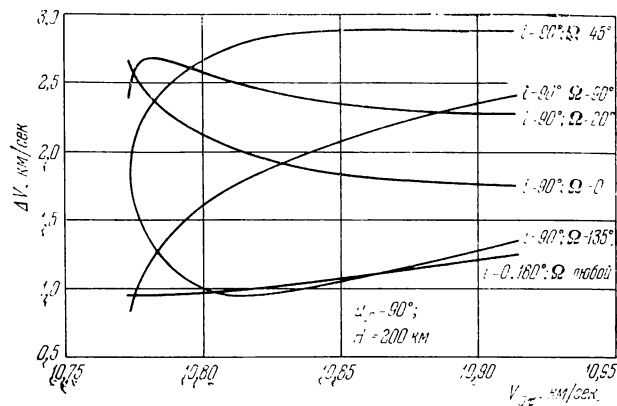


Рис. 11.5.4.

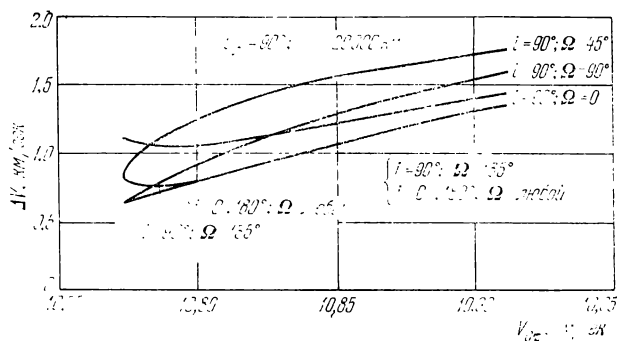


Рис. 11.5.5.

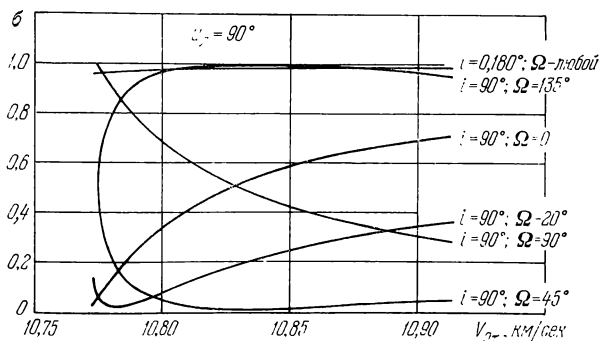


Рис. 11.5.6.

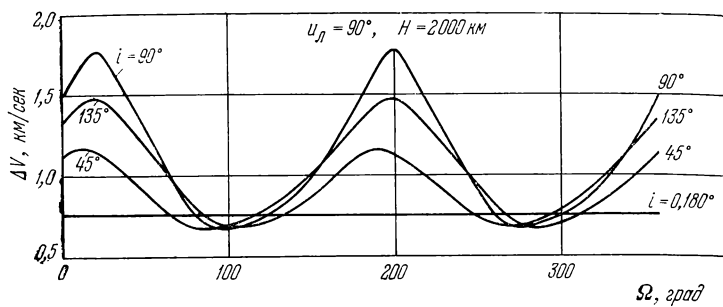


Рис. 11.5.7.

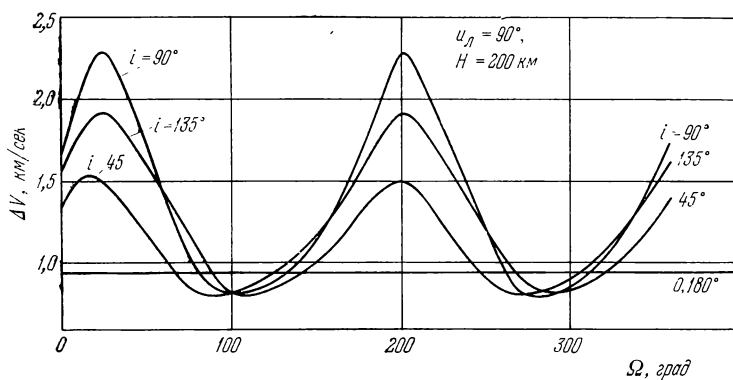


Рис. 11.5.8.

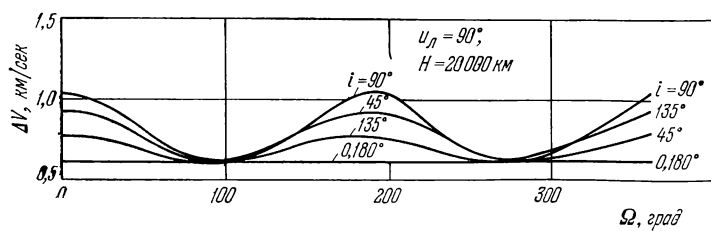


Рис. 11.5.9.

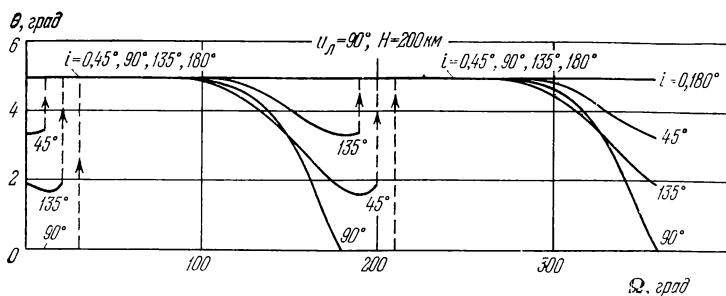


Рис. 11.5.10.

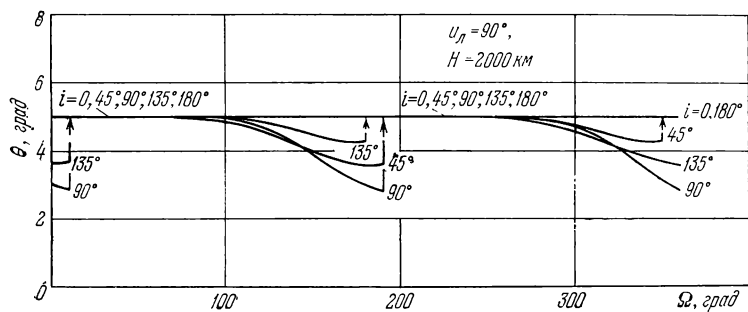


Рис. 11.5.11.

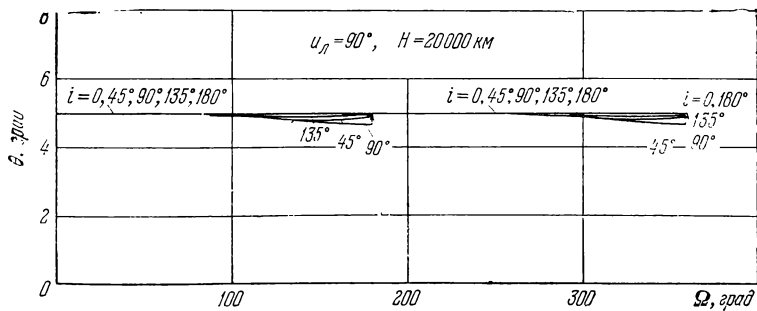


Рис. 11.5.12.

ΔV уменьшаются в основном за счет уменьшения орбитальной скорости $V_{крл} = \sqrt{\mu_{л}/\rho}$, при этом уменьшается также влияние i и Ω на ΔV .

Из вида зависимости $n = n(i, \Omega)$ (11.5.7) следует, что при замене Ω на $\Omega + 180^\circ$ и i на $180^\circ - i$ (n меняет свой знак) значения ΔV получаются одни и те же. Приведенные данные показывают, что при произвольной ориентации орбиты ИСЛ увеличение ΔV обусловлено в значительной степени ростом σ (см. рис. 11.5.6). Поэтому для орбит ИСЛ с высотой $H \leq 5000 \div 7000$ км некоторого уменьшения ΔV можно добиться путем реализации двухимпульсной схемы перехода (см. § 10.3). При $H > 10\,000$ км практически при любой ориентации орбиты ИСЛ оптимальным является одноимпульсный переход (см. рис. 10.3.5 и 11.5.3). Изменение u_d в диапазоне $[0, 360^\circ]$ приводит к изменению ΔV на $\pm 7\%$. С ростом H влияние изменения u_d на ΔV уменьшается.

в) Оптимальные условия старта с орбиты ИСЗ (рис. 11.5.10—11.5.12). Приведенные зависимости оптимальных значений угла наклона вектора V_0 к трансверсали в точке старта с орбиты ИСЗ θ_0 подтверждают сказанное выше: при малых H (рис. 11.5.10) $\text{opt } \theta_0$ может принимать любое значение из диапазона $[0, \max \theta_0]$; с ростом H $\text{opt } \theta_0 \rightarrow \max \theta_0$ (рис. 11.5.11, 11.5.12). Наиболее интересной особенностью является возможность скачкообразного (или достаточно резкого) изменения $\text{opt } \theta_0$, особенно четко проявляющаяся при малых H (рис. 11.5.10); эта же тенденция прослеживается и при других H .

Уточненная (по сравнению с изложенной) методика оптимизации перелетов между орбитами ИСЗ и ИСЛ рассмотрена в работе Л. И. Гусева [2].

11.5.3. Постановка задачи синтеза перелета поверхность Луны — атмосфера Земли. Схема решения задачи. Рассмотрим следующую задачу. КА (рис. 11.5.13), находящийся в заданной точке на поверхности Луны (точка 0), стартует и совершает пассивный перелет к сфере влияния Луны (точка 1). Выйдя из

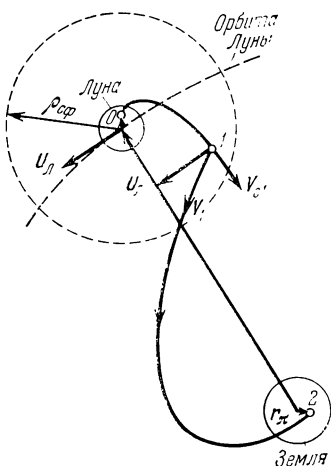


Рис. 11.5.13.

сферы влияния Луны, аппарат совершает пассивный перелет к Земле так, что перигей орбиты возврата (условный перигей) расположен в плотных слоях атмосферы Земли на заданном расстоянии от поверхности Земли (точка 2).

Траектория перелета Луна — Земля должна удовлетворять ряду ограничений, основными из которых являются: заданное наклонение плоскости перелета к плоскости экватора i ; заданная широта условного перигея φ_π ; заданная энергетика разгонных ступеней аппарата — скорость V_{c0} в конце активного участка при старте с поверхности Луны; ограничение сверху продолжительности перелета Луна — Земля t_{02} ; осуществление временной стыковки, т. е. выбор такого момента старта с поверхности Луны и такой продолжительности перелета Луна — Земля, при которых возврат к Земле осуществлялся бы в момент, удобный для посадки аппарата в заданной точке поверхности Земли.

Для приближенного решения задачи в рамках ММСВ сделаем те же предположения 1° , 3° , что и в разделе 11.2.1, и, кроме того, примем, что протяженностью активного участка при старте аппарата с поверхности Луны можно пренебречь и заметить активный участок импульсом скорости.

Сравнивая приведенную постановку задачи с постановкой задачи облета Луны (см. раздел 11.2.1), замечаем, что рассматриваемая задача может быть решена по аналогичной схеме с использованием полученных в разделах 11.2.2, 11.2.3 результатов:

независимо от селеносферического движения определяются ориентация в пространстве плоскости геоцентрического перелета Луна — Земля и параметры этого перелета из условия касательного возврата в атмосферу Земли, в результате чего находится вектор селеносферической скорости аппарата V_{c1} в точке выхода на селеносфере (см. раздел 11.2.3а); на основании результатов раздела 10.1.3 определяется селеносферическая гипербола, проходящая через заданную точку на поверхности Луны и обеспечивающая на селеносфере аппарату скорость V_{c1} .

Для определения ориентации плоскости перелета Луна — Земля и положения радиуса-вектора аппарата в этой плоскости задаются наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости экватора i_L , аргумент широты Луны u_L , i , угловая дальность перелета Луна — Земля η_{12} и направление движения аппарата при подлете к Земле по отношению к полушариям Земли. При расчете динамических параметров траектория перелета Луна — Земля рассматривается как дуга конического сечения в определенной выше плоскости с перигейным радиусом-вектором r_π , проходящая через радиус-вектор Луны r_L , $(r_\pi, r_L) = \eta_{12}$. Результаты расчетов параметров геоцентрического участка перелета Луна — Земля приведены в разделе 11.4.16 (см. рис. 11.4.3).

Как и в разделах 11.2.2, 11.2.3в, введем прямоугольную правую систему селеноцентрических координат $x_{cy}z_c$ (рис. 11.5.14) и сферическую селеноцентрическую систему координат $\rho \lambda_c \varphi_c$. В том случае, когда λ_c , φ_c определяют положение точки на поверхности Луны, обозначим их через λ_L , φ_L .

Положение аппарата на поверхности Луны (точка O) задается вектором $\rho_{c0} = \{-R_{\text{Л}} \cos \varphi_{\text{Л}} \cos \lambda_{\text{Л}}, -R_{\text{Л}} \cos \varphi_{\text{Л}} \sin \lambda_{\text{Л}}, R_{\text{Л}} \sin \varphi_{\text{Л}}\}$, где $R_{\text{Л}}$ — средний радиус Луны.

На селеносфере $|\rho_c| = \rho_{\text{сф}}$ задан свободно перемещающийся по ней вектор $V_{c1} = V_1 - U_{\text{Л}}$, где V_1 — вектор геоцентрической скорости аппарата в точке I . В проекциях на оси x_c, y_c, z_c его компоненты

$$V_{c1} = \{V_{1r}, V_{1r} \cos \alpha_1 - U_{\text{Л}}, V_{1r} \sin \alpha_1\}. \quad (11.5.8)$$

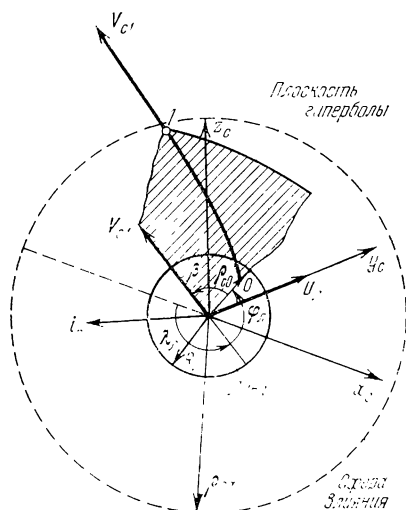


Рис. 11. 5.14.

Здесь всегда $V_{1r} > 0$, а радиальная составляющая геоцентрической скорости $V_{1r} < 0$ для геоцентрического маршрута A , не содержащего апогея ($\eta_{12} < 180^\circ$); $V_{1r} > 0$ для геоцентрического маршрута C , содержащего апогей ($\eta_{12} > 180^\circ$); $V_{1r} = 0$ для геоцентрического гомановского перелета ($\eta_{12} = 180^\circ$).

Задача расчета селеносферического движения сводится к построению селеносферической гиперболы, проходящей через вектор ρ_{c0} и обеспечивающей аппарату на селеносфере достижение вектора V_{c1} (см. раздел 10.1.3).

11.5.4. Результаты расчетов. Расчет проводился для следующих исходных данных (см. таблицу 11.4.1): $r_{\text{Л}} = 384\,394,8$ км, $i_{\text{Л}} = 28^\circ$, $r_{\text{З}} = 6421$ км, $i = 90^\circ$, средний радиус Земли $R_{\text{З}} = 6371$ км, гравитационная постоянная Земли $\mu_{\text{З}} = 398\,580$ км³/сек², $R_{\text{Л}} = 1738$ км, $\mu_{\text{Л}} = 4889$ км³/сек², $\rho_{\text{сф}} = 66\,000$ км. Основными варьирующими параметрами являлись $u_{\text{Л}}$, η_{12} , β и $\lambda_{\text{Л}}$. Здесь β — угол между векторами ρ_{c0} и V_{c1} (см. раздел 10.1.2). Угол β изменяется в пределах $0 \leq \beta \leq \pi$, где β определяется соотношением (10.1.40). При $\beta = 0$ точка старта с поверхности Луны является перигеем гиперболы, при $\beta = \pi$ имеем вертикальный подъем внутри селеносферы. Учтены следующие особенности характеристик движения аппарата в рассматриваемой постановке (см. разделы 11.2.3а, 11.2.3в, 11.4.1):

1. Четность всех величин относительно аргумента $u_{\text{Л}} - 180^\circ$.
2. Правило пересчета и инвариантность характеристик селеносферического движения аппарата, в соответствии с которыми при изменении $\text{sign} \cos u_{\text{Л}}$ (для $i_{\text{Л}} < i < \pi - i_{\text{Л}}$) $u_{\text{Л}}$ заменяется

на $u_L + 180^\circ$, α_1 , φ_L и φ_L меняют знаки, параметры гиперболы в ее плоскости не меняются.

3. Симметрия селеносферических характеристик по η_{12} относительно значения $\eta_{12} = 180^\circ$, в соответствии с которой при переходе от маршрута A к маршруту C и наоборот λ_L заменяется

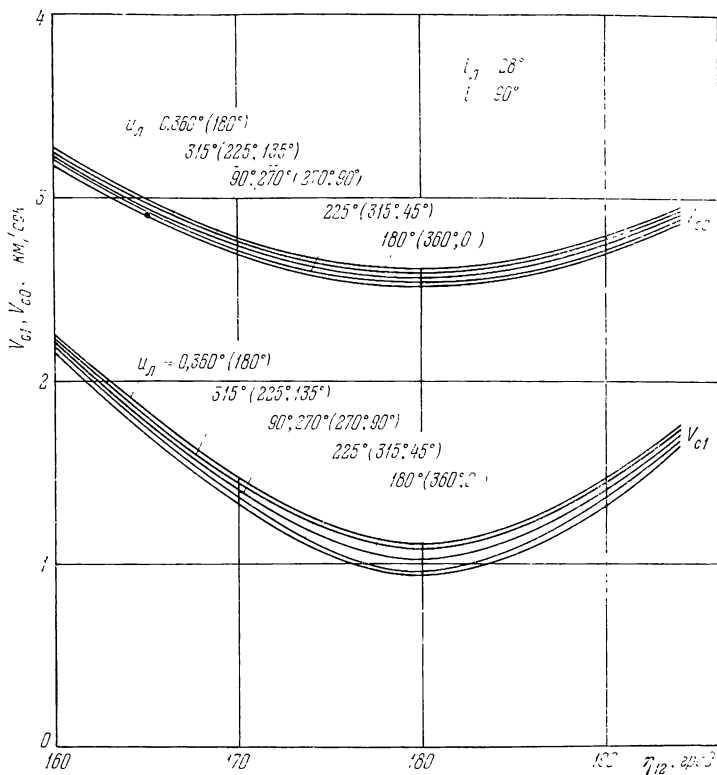


Рис. 11.5.15

на $180^\circ - \lambda_L$, а φ_L и все параметры гиперболы в ее плоскости остаются неизменными.

Величина скорости в конце активного участка V_{c0} не зависит от расположения точки старта на поверхности Луны. Поскольку $V_{1r} \ll U_L$, из (11.5.8) следует очень слабая зависимость V_{c1} , V_{c0} и параметров селеносферического движения от i_L , u_L и i (рис. 11.5.15, обозначения без скобок — для $\text{sign } \cos u_1 = -1$, в скобках — для $\text{sign } \cos u_1 = +1$). Таким образом, параметры селеносферического движения определяются в основном величиной η_{12} и координатами точки старта λ_L , φ_L . Практически важно,

что V_{c0} , в отличие от V_{c1} , слабо зависит также и от η_{12} . В результате, располагая небольшим запасом в импульсе скорости 300—400 м/сек по сравнению с $\min \min V_{c0} \approx 2510$ м/сек, можно, изменяя ориентацию V_{c0} , реализовать старт к Земле из различных точек поверхности Луны по существенно различным траекториям Луна — Земля.

В случае вертикального подъема в селеносфере векторы ρ_{c0} и V_{c1} коллинеарны, откуда с учетом $V_{1\tau} \ll V_{\text{л}}$ получаем

$$\operatorname{tg} \lambda_{\text{верт}} \approx -\frac{U_{\text{л}}}{V_{1\tau}}, \quad \max \operatorname{tg} |\varphi_{\text{л}}|_{\text{верт}} \approx \frac{V_{1\tau}}{U_{\text{л}}},$$

$$\operatorname{sign} \varphi_{\text{л верт}} = \operatorname{sign} \cos u_1.$$

Из этого следует, что траектории Луна — Земля с вертикальным подъемом в селеносфере могут быть реализованы из весьма

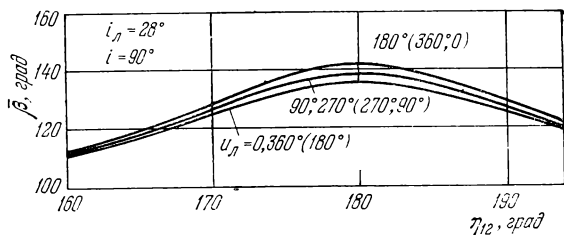


Рис. 11.5.16.

узкой области на поверхности Луны при $0 < \lambda_{\text{л}} < \pi$, $|\varphi_{\text{л}}| \leq \leq 10^\circ, 5$. Чтобы оценить максимальные размеры области на поверхности Луны, из которой возможен выход на заданную траекторию перелета Луна — Земля, рассмотрим траектории с касательным к поверхности Луны стартом при предельных значениях $\beta = \bar{\beta}$. Из приведенных на рис. 11.5.16 (обозначения без скобок — для $\operatorname{sign} \cos u_1 = -1$, в скобках — для $\operatorname{sign} \cos u_1 = +1$) зависимостей $\beta = \bar{\beta}(i_{\text{л}}, u_{\text{л}}, \eta_{12})$ видно, что с ростом V_{c1} $\bar{\beta}$ уменьшается. При $V_{1c} \rightarrow \infty \bar{\beta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$; $\max_{\{u_{\text{л}}, \eta_{12}\}} \bar{\beta}(i_{\text{л}} = 28^\circ, i = 90^\circ) \approx 142^\circ$.

Геометрическое место точек старта при $\beta = \bar{\beta}$ представляет пересечение плоскости с нормальным вектором V_{c1} со сферой радиуса $R_{\text{л}}$; результаты расчета граничных кривых приведены на рис. 11.5.17 (обозначения без скобок — для $\operatorname{sign} \cos u_1 = -1$, в скобках — для $\operatorname{sign} \cos u_1 = +1$, изменение $\lambda_{\text{л}}$ при переходе от маршрута А к С учтено разметкой оси). Из геометрических соображений ясно, что

$$\varphi_{\text{л max}} = -\varphi_{\text{л верт}} + (\pi - \bar{\beta}), \quad \varphi_{\text{л min}} = -\varphi_{\text{л верт}} - (\pi - \bar{\beta}),$$

$$\lambda_{\text{л max}} \approx \lambda_{\text{л верт}} - \bar{\beta}, \quad \lambda_{\text{л min}} \approx \lambda_{\text{л верт}} + \bar{\beta}.$$

Из точек лунной поверхности, попадающих внутрь овалов рис. 11.5.17, старт к Земле при заданных i_d , u_d , i , η_{12} и $\text{sign} \cos u_1$ невозможен. С ростом V_{c0} область возможных точек старта с поверхности Луны уменьшается и стягивается к вектору V_{c1} . Таким образом, использование траекторий с наклонным подъемом в селеносфере заметно расширяет область на лунной поверхности, откуда возможен выход на заданную траекторию полета к Земле.

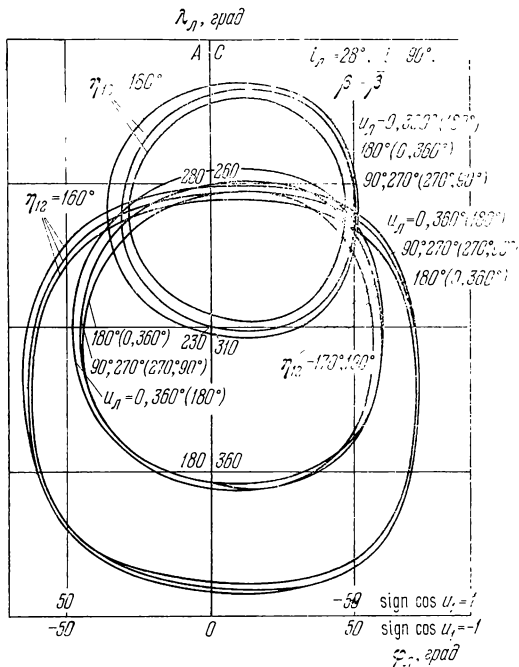


Рис. 11.5.17.

При подлете аппарата к Земле со стороны Северного полюса и реализации траектории посадки аппарата с однократным погружением в атмосферу могут представлять интерес значения географических широт точек посадки φ_* . Угловая дальность от точки условного перигея до точки посадки аппарата, которая при $i = 90^\circ$ равна разности географических широт точки посадки и условного перигея $\Delta\varphi$, зависит от величины максимальной перегрузки аппарата n_Σ . В случае баллистических траекторий спуска при значениях $n_\Sigma \leq 20$ зависимость $\Delta\varphi = \Delta\varphi(n_\Sigma)$ можно получить с помощью данных, приведенных в работе Чепмена [1]. При значениях $n_\Sigma \gg 10$, но таких, что еще можно полагать $\sin \theta_{вх} \approx \theta_{вх}$, где $\theta_{вх}$ — угол входа в атмосферу, из соотношений $\Delta\varphi \approx 20_{вх}$ (Чепмен [1]) и $n_\Sigma = 340 \theta_{вх}$ (Аллен, Эггерс [1])

получим $\Delta\varphi = \frac{n_z}{170} [rad]$. В случае аппаратов, обладающих аэродинамическим качеством, для получения тах $\Delta\varphi$ можно использовать траектории спуска в атмосфере Земли, которые при ограничении на величину n_z позволяют получить минимальную дальность полета в атмосфере (Ю. Н. Желнин, А. А. Шилов [1]). Используя зависимости $\varphi_\pi(i_L, u_L, i, \text{sign} \cos u_1 = 1, \eta_{12})$ (см. раздел 11.4.1а, рис. 11.4.2), можно получить зависимость широты точки посадки φ_π от V_{c0} и n_z при заданных i_L, u_L, i . Пример такой зависимости для баллистического аппарата с однократным погружением в атмосферу, полученной по данным работ Чэпмена [1], Аллена, Эггерса [1], приведен на рис. 11.5.18.

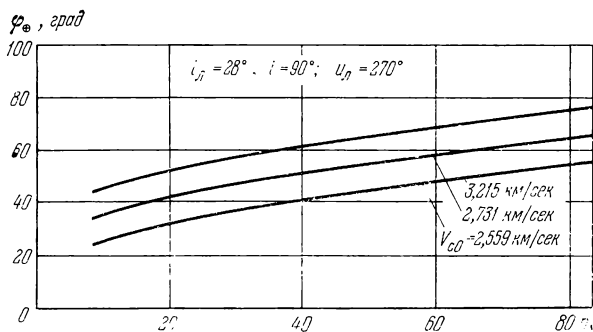


Рис. 11.5.18.

Оценим возможности посадки ЛКА при возврате к Земле после облета Луны и при старте с поверхности Луны в окрестности средних географических широт $\varphi_\pi \approx 50^\circ$. Из приведенных на рис. 11.5.18 данных следует, что при старте с поверхности Луны такая посадка возможна либо при наличии достаточной начальной скорости $V_{c0} \approx 3,2 \text{ км/сек}$ и максимальных перегрузок $n_z \approx 10 \div 20$, либо при скорости $V_{c0} = 2,6 \text{ км/сек}$, близкой к минимальной, но при больших максимальных перегрузках $n_z \gg 10$.

§ 11.6. Сравнение различных методов синтеза траекторий в системе Земля — Луна

11.6.1. Метод сфер влияния и метод численного интегрирования.

При численном интегрировании обычно рассматривается одна из «точных» моделей гравитационного поля системы Земля — Луна (см. раздел 1.1.2). Простейшей из этих моделей, обеспечивающей необходимую для сравнения различных методов точность, является ограниченная задача трех тел, учитывающая

влияние на аппарат только Земли и Луны. Уравнение движения аппарата в геоцентрической системе координат записывается в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_{\text{л}}}{|\mathbf{r}_{\text{л}} - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{r}_{\text{л}} - \mathbf{r}). \quad (11.6.1)$$

Геоцентрический радиус-вектор Луны $\mathbf{r}_{\text{л}}(t)$ является известной функцией времени, определяемой, например, с помощью данных, приводимых в Астрономических Ежегодниках СССР.

При решении задачи синтеза, как будет показано ниже, начальные условия для интегрирования уравнения (11.6.1) удобно задавать системой величин

$$t = T_0, \Omega_0, i_0, r_0, u_0, V_0, \theta_0, \quad (11.6.2)$$

где Ω_0 — долгота восходящего узла орбиты ИСЗ, i_0, r_0 — наклон ее к экватору и радиус, u_0 — аргумент широты точки старта, V_0, θ_0 — модули вектора скорости и угол его наклона к трансверсали (вектор $\mathbf{V}_0$ лежит в плоскости ИСЗ). Процесс интегрирования заканчивается, когда аппарат достигает условного перигея, т. е. в момент времени T_3 такой, что

$$r_{\pi} = r(T_3) \leq r(t) \quad \forall t > T_0. \quad (11.6.3)$$

Рассмотрим теперь процесс построения траектории облета Луны по МСВ. Пусть геоцентрическая кеплерова дуга перелета Земля — Луна пересекает сферу влияния Луны в момент времени T_1 в точке с координатами $\lambda_{\text{cl}}, \varphi_{\text{cl}}$ (см. рис. 11.2.1, 11.2.5). В качестве исходной информации задаем величины

$$T_1, i_0, r_0, V_0, u_0, \lambda_{\text{cl}}, \varphi_{\text{cl}}. \quad (11.6.4)$$

Для момента времени T_1 определяются радиус-вектор $\mathbf{r}_{\text{л}}(T_1)$ и вектор скорости $\mathbf{U}_{\text{л}}(T_1)$ центра масс Луны. По селеноцентрическим координатам точки входа вычисляется геоцентрический радиус-вектор этой точки

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{\text{л}}(T_1) + \rho_{\text{cl}}(\lambda_{\text{cl}}, \varphi_{\text{cl}}). \quad (11.6.5)$$

Итак, для перелета Земля — Луна приходим к задаче определения кеплеровой дуги по двум радиусам-векторам $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ и скорости V_0 , рассмотренной в разделе 5.1.4. В результате находим все характеристики перелета Земля — Луна, в частности θ_0 , время перелета t_{01} и момент старта

$$T_0 = T_1 - t_{01}. \quad (11.6.6)$$

Заметим, что полученные данные определяют все начальные условия (11.6.2), необходимые для интегрирования уравнения (11.6.1). Далее, в точке входа вычисляется геоцентрический $\mathbf{V}_1$

и селеноцентрический V_{c1} векторы скорости аппарата:

$$V_{c1} = V_1 - U_{\text{Л}}(T_1). \quad (11.6.7)$$

По V_{c1} и ρ_{c1} определяются параметры селеносферической гиперболы и определяется точка выхода на сфере влияния Луны (λ_{c2} , φ_{c2}). Зная продолжительность полета по гиперболе t_{12} , находим момент T_2 выхода аппарата из сферы влияния Луны

$$T_2 = T_1 + t_{12}, \quad (11.6.8)$$

радиус-вектор $r_{\text{Л}}(T_2)$ и вектор скорости $U_{\text{Л}}(T_2)$ центра масс Луны в этот момент времени. С помощью этих данных в точке выхода определяются геоцентрические радиус-вектор

$$r_2 = r_{\text{Л}}(T_2) + \rho_{c2}(\lambda_{c2}, \varphi_{c2}) \quad (11.6.9)$$

и вектор скорости

$$V_2 = U_{\text{Л}}(T_2) + V_{c2} \quad (11.6.10)$$

аппарата и параметры перелета Луна — Земля.

Проанализируем вопрос о переходе от приближенной методики синтеза траекторий облета Луны, изложенной в § 11.2, к решению задачи в рамках МСВ. Для этого рассмотрим какую-либо траекторию облета Луны, полученную с помощью МСВ (рис. 11.6.1).

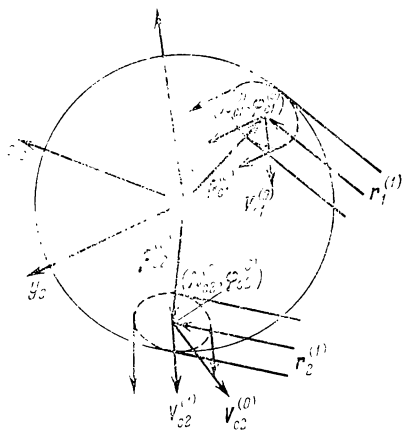


Рис. 11.6.1.

Элементарные оценки показывают, что для траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли углы между селеноцентрическими векторами ρ_{ci} , V_{ci} , $i = 1, 2$, либо малы, либо незначительно отличаются от 180° . Допустим теперь, что какие-либо параметры, определяющие параметры перелета Земля — Луна, проварьированы на малые первого порядка. В этом случае V_1 и V_{c1} изменяются на малые 1-го порядка. Но из-за того, что V_{c1} и ρ_{c1} с точностью до малых

1-го порядка коллинеарны, указанное изменение в V_{c1} приводит к конечным большим изменениям в параметрах и ориентации селеносферической гиперболы и к большим изменениям в векторе V_{c2} . В результате сильные изменения претерпевают вектор V_2 и параметры перелета Луна — Земля.

Предположим теперь, что задача синтеза траектории облета Луны по ММСВ решена. Возьмем полученные для перелета

Земля — Луна начальные условия и параметры точки входа ($\lambda_{c1}^{(0)}, \varphi_{c1}^{(0)}$) и с их помощью произведем расчет перелета Земля — Луна по МСВ. В результате получим вектор $V_{c1}^{(1)}$, отличающийся от исходного приближенного значения $V_{c1}^{(0)}$ на малую 1-го порядка за счет того, что $V_1^{(0)} \neq V_1^{(1)}$ и $U_{л1} \neq U_{л}$. Предположим, далее, что наряду с исходными точками входа ($\lambda_{c1}^{(0)}, \varphi_{c1}^{(0)}$) и выхода ($\lambda_{c2}^{(0)}, \varphi_{c2}^{(0)}$) рассматриваются их малые окрестности, определяемые вариациями $\lambda_{c1}, \varphi_{c1}$ и $\lambda_{c2}, \varphi_{c2}$. Тогда изменения геоцентрических векторов $r_1^{(1)}$ и $r_2^{(1)}$ можно считать малыми 2-го порядка. Производя для каждого такого вектора $r_1^{(1)}$ расчет перелета Земля — Луна, получим в окрестности точки ($\lambda_{c1}^{(0)}, \varphi_{c1}^{(0)}$) пучок «параллельных» с точностью до малых 2-го порядка векторов $V_{c1}^{(1)}$ (отличающихся от вектора $V_{c1}^{(0)}$ на малые 1-го порядка). Поскольку в окрестности точки 2, в свою очередь, имеется пучок «параллельных» с точностью до малых 2-го порядка векторов $r_2^{(1)}$ (отличающихся от $r_2^{(0)}$ на малые 1-го порядка), то можно найти такой вектор $V_{c2}^{(1)}, |V_{c2}^{(1)}| = |V_{c1}^{(1)}|$ и соответствующий ему $V_2^{(1)} = V_{c2}^{(1)} + U_{л2}$ ($U_{л2} \neq U_{л}$), который с вектором $r_2^{(1)}$ удовлетворял бы двум заданным условиям возврата, например, давал бы заданные значения i_2 и r_* .

В результате на выходе определится пучок «параллельных» с точностью до малых 2-го порядка векторов $V_{c2}^{(1)}$, близких с точностью до малых 1-го порядка к вектору $V_{c2}^{(0)}$. Зная векторы $V_{c1}^{(1)}$ и $V_{c2}^{(1)}$, можно с их помощью (аналогично изложенному в разделе 11.2.3) построить селеноцентрическую гиперболу, параметры которой в силу самого построения будут отличаться от параметров исходной гиперболы на малые 1-го порядка малости. Соответственно новые точки входа и выхода ($\lambda_{c1}^{(1)}, \varphi_{c1}^{(1)}$) и ($\lambda_{c2}^{(1)}, \varphi_{c2}^{(1)}$) будут отличаться от исходных на малые 1-го порядка, т. е. будут удовлетворять условиям, при которых были определены векторы $V_{c1}^{(1)}, V_{c2}^{(1)}$. Таким образом, получаем траекторию облета Луны, которая близка (с точностью до малых 1-го порядка) к заданной, т. е. приближенно решаем задачу синтеза по МСВ.

Из проведенного рассмотрения следует, что в малой окрестности приближенного решения по ММСВ при переходе к МСВ получаются как перелеты, очень далекие от исходного, так и близкие по параметрам облета Луны и возврата к Земле. Изложенные соображения были положены в основу разработки алгоритмов, позволяющих выделять из этого множества траекторий траектории второго типа (см. ниже).

Из сказанного следует, что в любом регулярном алгоритме синтеза траекторий облета Луны этап приближенного решения

задачи с помощью ММСВ является необходимым, поскольку именно с его помощью удастся получить приближенное значение координат точек входа и выхода $(\lambda_{ci}, \varphi_{ci})$, $i = 1, 2$ ограничить область поиска на сфере влияния малыми окрестностями этих точек и оперировать с пучками векторов $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{V}_i$ и $\mathbf{V}_{ci}$, $i = 1, 2$, параллельными с точностью до величин второго порядка малости. Решение задачи облета Луны, полученное с помощью ММСВ, служит начальным приближением для решения задачи с помощью МСВ. Это решение, в свою очередь, является достаточно хорошим приближением для получения траектории облета численным интегрированием.

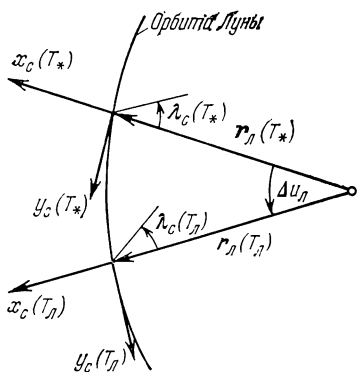


Рис. 11.6.2.

Рассмотрим несколько подробнее процесс построения искомой траектории облета Луны в соответствии с изложенной общей схемой. Пусть в пределах некоторого календарного периода порядка лунного месяца орбитальному движению Луны соответствует некоторое среднее значение $i_L = \text{const}$. Для заданных i_L , $r_L = a_L$, где a_L — большая полуось орбиты Луны, r_L , ΔV_0 , r_0 , i_0 , i_2 , $\text{sign}(\mathbf{V}_{1r})$, $\text{sign}(\mathbf{V}_{2r})$, $\text{sign} \cos u_1$, $\text{sign} \cos u_2$, η_{23} и u_L проводится синтез траекто-

рии облета Луны по ММСВ (см. раздел 11.2.3), удовлетворяющей всем ограничениям. Для выбранного календарного периода берется некоторая дата $T^{(0)}$ и в ее окрестности за синодический период обращения Луны отыскивается такая дата T_L , при которой аргумент широты Луны $u_L(T_L)$ совпадает с заданным значением u_L . Для уточнения полученного решения в рамках ММСВ для найденного значения T_L вновь проводится синтез траектории облета Луны с заменой среднего значения $r_L = a_L$ на величину $r_L = r_L(T_L)$ и средней орбитальной скорости Луны U_L на трансверсальную компоненту орбитальной скорости Луны $U_{L\tau} = U_{L\tau}(T_L)$.

При переходе от ММСВ к МСВ необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. В ММСВ селеноцентрическое движение рассматривается в системе координат $x_c y_c z_c$, соответствующей заданному «моменту облета Луны» T_L . В МСВ это движение рассматривается в некоторой поступательно перемещающейся вместе с Луной селеноцентрической системе координат $x_c y_c z_c|_{T_*}$, ориентация которой аналогична ориентации системы $x_c y_c z_c|_{T_L}$, но задается в момент времени T_* , например в момент T_1 входа аппарата в селеносферу или T_2 выхода из нее, так что, вообще говоря, $T_* \neq T_L$. Системы $x_c y_c z_c|_{T_*}$ и $x_c y_c z_c|_{T_L}$ повернуты друг от-

нительно друга за счет перемещения Луны по орбите и за счет перемещения плоскости орбиты вокруг оси z_c приблизительно на угол (рис. 11.6.2)

$$\Delta u_{\text{л}} \approx u_{\text{л}}(T_{\text{л}}) - u_{\text{л}}(T_*). \quad (11.6.11)$$

Поскольку в каждой из систем $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_{\text{л}}}$ и $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_*}$ селеноцентрическая долгота отсчитывается от прямой Земля — Луна, при переходе от системы $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_{\text{л}}}$ к системе $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_*}$ в долготы точек входа и выхода необходимо внести поправку, обусловленную поворотом (11.6.11).

Если сопоставить схемы селеносферического движения в ММСВ и МСВ, то в ММСВ «мгновенный» облет Луны в момент $T_{\text{л}}$ соответствует моменту прохождения перицентра в МСВ. При расчете траектории облета Луны по МСВ в качестве момента T_* удобно взять момент T_1 входа аппарата в селеносферу. В этом случае угол поворота (11.6.11) систем $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_{\text{л}}}$ и $x_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}|_{T_1}$ друг относительно друга приблизительно равен

$$\Delta u_{\text{л}} \approx \frac{1}{2} t_{12} \omega_{\text{л}}, \quad (11.6.12)$$

где t_{12} — продолжительность селеносферического движения в ММСВ, $\omega_{\text{л}} = 13,176$ град/сут — средняя угловая скорость движения Луны по орбите. Обозначим вычисленные непосредственно по ММСВ долготы точек входа и выхода через $\lambda_{\text{с}i}^{(00)}$, $i = 1, 2$. Тогда при расчете траектории по МСВ в качестве начального приближения для величин долгот берем

$$\lambda_{\text{с}i}^{(0)} = \lambda_{\text{с}i}^{(00)} + \frac{1}{2} t_{12} \omega_{\text{л}}, \quad i = 1, 2. \quad (11.6.13)$$

В соответствии со сказанным

$$T_1 = T_{\text{л}} - \frac{1}{2} t_{12}. \quad (11.6.14)$$

При расчете траектории облета по ММСВ переход от истинной аномалии $u_{\text{л}}$ к календарной дате $T_{\text{л}}$ сказывается лишь на величинах $r_{\text{л}}(T_{\text{л}})$ и $U_{\text{л}\tau}(T_{\text{л}})$. Изменение $T_{\text{л}}$ в пределах нескольких суток приводит к незначительным изменениям в величинах $r_{\text{л}}(T_{\text{л}})$ и $U_{\text{л}\tau}(T_{\text{л}})$, которые практически не оказывают влияния на результаты расчета траектории по ММСВ при условии, что для всех этих значений $T_{\text{л}}$ в процессе расчета принимается одно и то же значение $u_{\text{л}} = \text{const}$. Поэтому для упрощения перехода от ММСВ к МСВ при вычислении параметров орбитального движения Луны, за исключением $u_{\text{л}}$, можно вместо (11.6.14) полагать

$$T_1 = T_{\text{л}}. \quad (11.6.15)$$

Таблица 11.6.1

Сравнение характеристик траекторий облета Луны, вычисленных с помощью ММСВ, МСВ и методом численного интегрирования

Маршрут	АА ⁺		АА [—]		АС [—]	
	северное	южное	северное	южное	северное	южное
T_1 , сут	7,600 7,600 7,570 64,71	8,450 8,450 — 74,81	11,800 11,800 11,775 115,18	7,600 7,600 7,566 64,71	23,350 23,350 23,336 275,12	2,700 2,700 — 5,14
u_d , град	10,8416 347,5735 4,979	10,8328 — —	10,8423 347,8671 9,353	10,8397 224,3369 4,941	10,8431 49,3293 21,304	10,8443 — —
V_0 , км/сек	273,5577 273,5063	— —	325,2473 325,2538	65,0667 65,0003	99,3766 99,4718	— —
u_0 , град	5,6793 5,6586	— —	1,8645 1,8496	2,8490 2,8352	4,8554 4,8540	— —
Ω_0 , град	8,7709 8,5689	—8,6311 —9,1314	5,6241 5,4100	—5,2756 —6,4601	7,3047 7,6563	1,7884 —0,7172
φ_{c1} , град	8,5222	—	5,4107	—6,4759	7,6717	—
λ_{c1} , град	304,326 344,812 341,928	302,232 302,702 —	312,773 317,215 317,431	309,660 314,446 311,639	315,872 315,774 315,477	308,078 307,972 —
$l_{лс}$, км	4592,6 1401,3 1150,8	4614,8 4490,2 —	4685,6 1003,6 835,6	2779,3 1888,8 1593,0	44,3 —61,9 —131,0	11666,5 10016,8 —
i_c , град	170,2 169,8 161,6	170,2 169,9 —	165,7 167,6 166,3	164,0 164,9 163,7	167,0 167,2 166,9	150,1 153,3 —

$\varphi_{с2}$, град	-8,690	—	7,543	-7,246	8,192	8,050	—
	-8,995	—	7,570	-7,832	7,994	7,813	—
$\lambda_{с2}$, град	-8,959	—	7,641	-7,878	7,847	7,847	—
	58,33	—	62,65	67,80	57,93	49,74	—
	56,43	—	60,99	59,42	50,09	46,56	—
	56,75	—	59,93	61,59	50,55	46,97	—
i_2 , град	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00
	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00
	90,19	—	89,99	90,07	89,98	90,00	—
η_{23} , град	174,0	—	175,0	176,0	173,0	172,0	—
	172,5	—	172,6	173,4	171,2	170,4	—
	173,4	—	173,1	174,6	171,7	171,4	—
H_3 , км	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
	50,04	49,99	50,01	50,03	50,03	49,94	50,10
	50,02	—	49,41	49,40	50,90	49,22	—
φ_1 , град	-31,61	-23,47	-20,63	-29,61	35,56	36,43	—
	-33,72	-24,56	-16,18	-33,03	35,00	35,12	4,55
	-32,75	—	-17,02	-31,67	34,59	34,22	-7,57
t_{01} , с/г	3,227	—	3,094	3,282	2,667	2,591	—
	2,621	—	2,447	2,659	2,115	2,049	—
	2,591	—	2,422	2,625	2,099	2,035	—
t_{21} , с/г	3,495	—	3,634	3,909	2,876	2,732	—
	2,882	—	2,813	3,085	2,296	2,188	—
	2,883	—	2,829	3,106	2,290	2,180	—
t_2 , с/г	6,772	7,505	6,727	7,251	5,543	5,322	10,660
	6,742	7,659	6,472	7,033	5,529	5,319	10,211
	6,660	—	6,418	6,960	5,470	5,264	—

Примечания.

1. Для всех величин, кроме u_1 , V_0 , u_0 , T_0 , Ω_0 и θ_0 , в первой строке указаны результаты, полученные по ММСВ, по второй строке — результаты, полученные по МСВ, в третьей строке — результаты, полученные численным интегрированием.

2. Дата T_1 отсчитывается от 0 н 1 ноября 1968 г. Для ММСВ $T_1 = T_1$.

3. u_1 , V_0 , u_0 для всех методов одни и те же. Для всех траекторий $r_0 = 6700$ км, $i_0 = 65^\circ$.

4. T_0 , Ω_0 , θ_0 получены только для МСВ (1-я строка) и численного интегрирования.

5. $\lambda_{с1}$ и $\lambda_{с2}$ для ММСВ и МСВ даны с учетом поправки (11.6.13).

6. Для ММСВ $t_{\Sigma} = t_{01} + t_{23}$.

7. Для вариантов АА⁺ при возврате к Земле через Южный полюс и АС[—] дано сравнение только ММСВ (1-я строка) и МСВ (2-я строка).

Таким образом, с учетом (11.6.13) и (11.6.15) находим окончательное приближение для исходных данных (11.6.4):

$$T_1 = T_{\text{л}}, i_0, r_0, V_0, u_0, \lambda_{c1}^{(0)}, \varphi_{c1}^{(0)}. \quad (11.6.16)$$

При синтезе траектории облета Луны по МСВ величины $T_{\text{л}}$, i_0 , r_0 , V_0 и u_0 фиксируются и берутся такими же, как и при синтезе по ММСВ. Координаты же точки входа в сферу влияния Луны λ_{c1} и φ_{c1} варьируются в окрестности приближенных значений $\lambda_{c1}^{(0)}$, $\varphi_{c1}^{(0)}$ для получения траектории перелета Земля — Луна — Земля, основные характеристики которой были бы близки к соответствующим характеристикам траектории, вычисленной по ММСВ, в частности удовлетворяли бы заданным ограничениям по H_{π} и i_2 (см. раздел 11.6.2). Массовые расчеты на ЭЦВМ показали, что практически такая траектория находится всегда, при этом значения координат точки входа в сферу влияния λ_{c1} , φ_{c1} отличаются от приближенных $\lambda_{c1}^{(0)}$, $\varphi_{c1}^{(0)}$ на $1 \div 2^\circ$ как по λ_{c1} , так и по φ_{c1} (см. таблицу 11.6.1).

Окончательное уточнение траектории облета проводится путем интегрирования уравнений движения. Решение краевой задачи при этом можно получить с помощью стандартных итерационных методов, например с помощью метода Ньютона.

11.6.2. Численные результаты. Сравнение различных методов.

Для ряда конкретных вариантов был проведен расчет траекторий облета Луны по ММСВ, МСВ и численным интегрированием. Возможные даты облета Луны $T_{\text{л}} = T_1$ брались на ноябрь 1968 г. При синтезе траекторий облета Луны по изложенной в § 11.2 приближенной методике (ММСВ) задавались следующие данные (см. § 11.4): $r_{\pi} = 6421$ км ($H_{\pi} = 50$ км), $\Delta V_0 = 3200$ м/сек, $r_0 = 6700$ км, $i_0 = 65^\circ$, $i_2 = 90^\circ$. Для наклона лунной орбиты к экватору Земли бралось значение $i_{\text{л}} = 28^\circ$, что примерно соответствует периоду 1968—1972 гг. Основные характеристики этих вариантов приведены в таблице 11.6.1. Для каждого параметра в первой строке даны результаты расчета по ММСВ, во второй строке — по МСВ, в третьей строке — результаты численного интегрирования.

Отыскание траектории по МСВ, удовлетворяющей основным ограничениям, проводилось в соответствии с приведенной в разделе 11.6.1 общей схемой. Просматривалась окрестность точки $(\lambda_{c1}^{(0)}, \varphi_{c1}^{(0)})$ и строилась зависимость i_2 и H_{π} от λ_{c1} и φ_{c1} . В окрестности точек, дающих достаточно хорошее совпадение по i_2 и H_{π} с данными ММСВ, более детально изучалось поведение зависимостей $\varphi_{\pi}(\lambda_{c1}, \varphi_{c1})$ и $H_{\pi c}(\lambda_{c1}, \varphi_{c1})$.

Типичный пример указанных зависимостей приведен на рис. 11.6.3. Были взяты следующие параметры, характеризующие положение Луны на орбите и ее скорость:

$T_{\text{л}} = T_1 = 10$ января 1965 г., 0^{h} ; $u_{\text{л}} = 358^{\circ}, 956$; $i_{\text{л}} = 27,7038^{\circ}$; $r_{\text{л}}(T_{\text{л}}) = 383\,266$ км; $U_{\text{лr}}(T_{\text{л}}) = 1,01595$ км/сек; $U_{\text{лr}}(T_{\text{л}}) = -0,05578$ км/сек. По ММСВ рассчитывалась симметричная траектория AA^+ со следующими исходными данными: $r_{\pi} = 6421$ км ($H_{\pi} = 50$ км); $V_0 = 10,942$ км/сек; $u_0 = 25,081^{\circ}$;

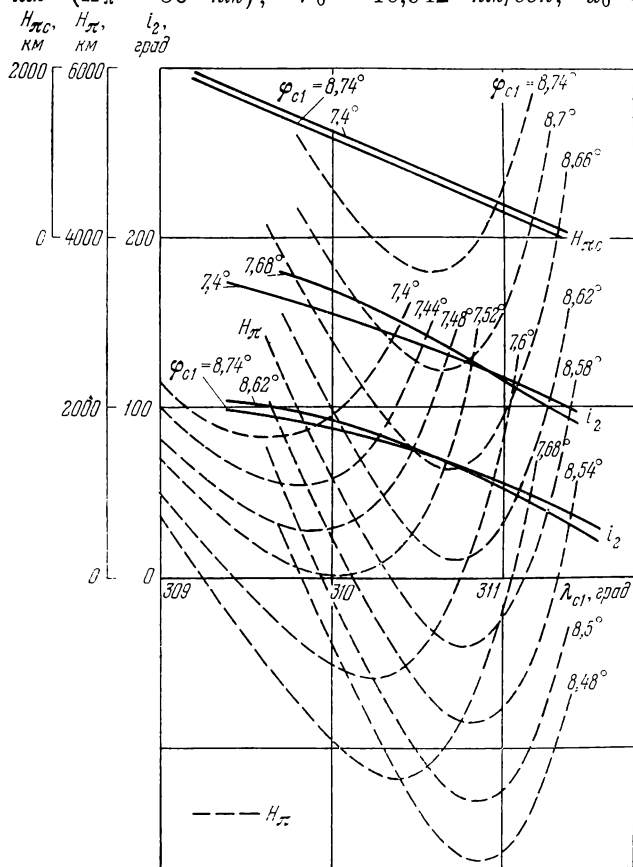


Рис. 11.6.3.

$r_0 = 6571$ км ($H_0 = 200$ км); $i_0 = i_2 = 65^{\circ}$. В результате расчета по ММСВ и соответствующей траектории по МСВ были получены следующие результаты (первая цифра ММСВ, вторая — МСВ): $H_{\pi c} = 935,7$ км и $511,7$ км; $i_c = 169,7^{\circ}$ и $169,7^{\circ}$; $\lambda_{c1} = 308,5^{\circ}$ и $310,8^{\circ}$; $\varphi_{c1} = 8,874^{\circ}$ и $8,614^{\circ}$; $\lambda_{c2} = 51,46^{\circ}$ и $49,28^{\circ}$; $\varphi_{c2} = -8,874^{\circ}$ и $-8,650^{\circ}$; $H_{\pi}(\text{МСВ}) = 45,0$ км; $i_2(\text{МСВ}) = 65,01^{\circ}$; $t_{01} = 3,052$ и $2,445$ сут; $t_{23} = 3,052$ и $2,263$ сут; $t_{12} = 1,152$ и $1,119$ сут; $t_{\Sigma} = 6,104$ и $5,827$ сут. Указанные значе-

ния λ_{c1} и λ_{c2} для ММСВ даны с учетом поправки (11.6.13), в качестве суммарного времени для ММСВ взято $T_x = t_{01} + t_{22}$.

Среди параметров $H_{\pi c}$, H_{π} , i_2 и φ_{π} наиболее чувствительным к изменению λ_{c1} , φ_{c1} является H_{π} , степень его чувствительности зависит от высоты облета Луны: чем меньше $H_{\pi c}$, т. е. чем меньше неколлинеарность векторов ρ_{c1} и V_{c1} , тем больше модули про-

изводных $\left| \frac{\partial H_{\pi}}{\partial \lambda_{c1}} \right|$ и $\left| \frac{\partial H_{\pi}}{\partial \varphi_{c1}} \right|$. При высотах облета $H_{\pi c}$ порядка нескольких десятков километров (т. е. для перелетов, практически попадающих в Луну) изменение по λ_{c1} и φ_{c1} даже на $0,01^\circ$ дает отклонение по H_{π} на сотни километров. Область существования перелетов, возвращающихся к Земле, для этих вариантов очень мала и заключена в сферическом прямоугольнике со сторонами по λ_{c1} и φ_{c1} $1-2^\circ$. Поэтому даже грубый поиск решения путем зондирования области следует проводить с шагом $\sim 0,01^\circ$. Для вариантов с $H_{\pi c} > 1000$ км отклонения в λ_{c1} , φ_{c1} на десятые доли градуса и даже на градус приводят к изменению H_{π} на несколько тысяч километров. Область существования решений значительно шире, и поиск решения осуществить гораздо легче.

Зависимость высоты облета Луны $H_{\pi c}(\lambda_{c1})$ при $\varphi_{c1} = \text{const}$ в окрестности решения почти всегда близка к линейной; для различных φ_{c1} кривые $H_{\pi c}(\lambda_{c1})$ весьма близки друг к другу.

Наклонение плоскости траектории возврата i_2 также менее чувствительно к вариациям λ_{c1} , φ_{c1} , чем H_{π} . Кривые $i_2(\lambda_{c1})$ при $\varphi_{c1} = \text{const}$ в окрестности решения изменяются почти всегда по закону, близкому к линейному, причем для различных φ_{c1} они мало отличаются друг от друга. Практически всегда в просматриваемом диапазоне изменения λ_{c1} , φ_{c1} удается найти точку, обеспечивающую близость i_2 к заданному значению.

Проведенный анализ показывает, что в просматриваемой области значений λ_{c1} , φ_{c1} практически всегда можно найти точку $(\lambda_{c1}^*, \varphi_{c1}^*)$, в которой обеспечиваются близкие к заданным значениям величины H_{π} и i_2 . В дальнейшем в качестве искомого решения по МСВ бралось решение с точкой входа $(\lambda_{c1}^*, \varphi_{c1}^*)$. Для этой точки входа обеспечивается достаточно хорошее совпадение и всех остальных характеристик, в частности $H_{\pi c}$. Наклонение плоскости селеносферической гиперболы к плоскости орбиты Луны i_c в пределах долей градуса совпадает со значением i_c , полученным по ММСВ. Значение широты условного перигея $\varphi_{\pi}(\lambda_{c1}^*, \varphi_{c1}^*)$ отличается от данных исходного приближения (ММСВ) для большинства вариантов не более чем на 4° .

В качестве начальных условий для интегрирования уравнения (11.6.1) брались величины (11.6.2) T_0 , Ω_0 , i_0 , r_0 , u_0 , V_0 , θ_0 . Момент старта T_0 принимался равным тому значению, которое было определено по МСВ. Величины i_0 , u_0 и V_0 фиксировались и при-

нимались равными их значениями при расчете по ММСВ и МСВ. Исходные значения $\Omega_0^{(0)}$ и $\theta_0^{(0)}$ брались для «лучшей» траектории, полученной по МСВ, с координатами точки входа $(\lambda_{c1}^*, \varphi_{c1}^*)$. В процессе решения краевой задачи варьируемыми параметрами были Ω_0 и θ_0 , что соответствует вариации λ_{c1} и φ_{c1} в МСВ. По аналогии с МСВ подбирались значения Ω_0^* и θ_0^* , обеспечивающие близость H_π и i_2 к заданным значениям.

Для сравнения результатов численного интегрирования с результатами, полученными по МСВ, определялись точки 1 и 2 пересечения траектории с селеносферой радиуса $\rho_{сф}$ — аналоги точек входа и выхода на сфере влияния Луны в МСВ. Соответственно траектория условно разбивалась на перелет орбита ИСЗ — «сфера влияния» Луны (участок 01), «селеносферическое» движение (участок 12) и перелет «сфера влияния» Луны — Земля (участок 23) (см. рис. 11.2.1). Положения периселения при облете Луны и условного перигея при возврате к Земле определялись точками, для которых в некоторой их окрестности расстояние от поверхности Луны $H_{\pi c}$ и Земли H_π , соответственно, минимально. Углы i_0 и i_2 определялись как углы между соприкасающимися плоскостями к траектории в точке старта и в точке условного перигея при возврате и земным экватором соответственно. Точно так же i_c — угол между соприкасающейся плоскостью к траектории в периселении и плоскостью орбиты Луны.

Из приведенных в таблице 11.6.1 данных видно, что траектории, рассчитанные по МСВ и вычисленные путем интегрирования, близки по своим характеристикам. Некоторое уменьшение высоты облета Луны $H_{\pi c}$ объясняется возмущающим влиянием Земли на «селеносферическое» движение аппарата. Сопоставление данных расчета по ММСВ, МСВ и результатов численного интегрирования показывает, что в целом ММСВ обеспечивает определение параметров траектории с точностью того же порядка, что и МСВ.

В таблице 11.6.2 приведена оценка затрат машинного времени на вычисление траектории облета Луны различными методами. Из нее видно, что для достаточно полного исследования того или иного класса траекторий облета, когда общее количество рассчитываемых траекторий исчисляется величиной порядка $10^5 \div 10^6$, практически можно использовать только ММСВ.

Аналогичные результаты сравнения различных методов для других задач полета в системе Земля — Луна приведены также в работах Л. И. Гусева [1], В. В. Ивашкина [4], В. В. Ивашкина, Н. Н. Тупицына [1], Ланкастера [1].

Заметим, что ошибки в определении продолжительности и ряда других параметров перелета можно значительно уменьшить, если, после определения по ММСВ точек входа и выхода на

сфере влияния Луны, воспользоваться для определения продолжительности и других параметров перелета МСВ, проводя расчет один раз без уточнения по схеме, аналогичной указанной в разделе 11.6.1, свободных параметров, в частности положения точек входа и выхода на сфере влияния.

Проведенные с помощью ММСВ и МСВ исследования различных задач полета в системе Земля — Луна позволяют полагать, что наибольшие методические ошибки получаются в задаче облета Луны или сходных с ней задачах. Таким образом, приходим

Таблица 11.6.2

Примерные затраты машинного времени (среднее число операций на ЭЦВМ) при расчете траекторий облета Луны различными методами

	Счет единичной траектории	Поиск решения при хорошем начальном приближении
Модифицированный метод (ММСВ)	$10^3 \div 10^4$	—
Метод сфер влияния (МСВ)	$2 \cdot 10^4$	10^6
Метод численного интегрирования	$5 \cdot 10^8$	10^{10}

к выводу, что при расчете траекторий для различных схем полета в системе Земля — Луна ММСВ обеспечивает точность того же порядка по сравнению с численным интегрированием, что и МСВ.

Принципиальное отличие ММСВ от двух других методов заключается в отказе от моделирования движения аппарата по траектории: каждый участок траектории рассматривается в значительной мере независимо от других участков, «склейка» же участков проводится на заключительном этапе решения задачи синтеза. Такой подход обеспечивает ММСВ ряд важных преимуществ перед другими методами. Во-первых, полностью отсутствуют эффекты накопления и усиления ошибок после прохождения аппарата вблизи Луны в задачах, включающих в качестве одного из участков ее облет. Во-вторых, заметное сокращение количества параметров, определяющих траекторию на каждом из участков, позволяет провести достаточно полное параметрическое исследование и в обозримом виде представить полученные результаты. Заметим, что на практике последнее обстоятельство зачастую играет решающую роль в процессе исследования того или иного класса траекторий. В-третьих, появляется возможность учитывать поставленные ограничения и требования к траектории уже на самых ранних стадиях решения задачи синтеза, что во много раз сокращает количество рассчитываемых вариантов.

Наличие достаточно простых связей в виде конечных соотношений или несложных алгоритмов между определяющими параметрами и характеристиками траекторий позволяет использовать полностью или в значительной части аналитические методы для синтеза траекторий. Это же обстоятельство позволяет достаточно просто учитывать различные ограничения, наложенные на траектории, и проводить отсев траекторий, не удовлетворяющих поставленным ограничениям, не доводя расчеты до конца. Можно сказать, что если в МСВ и при численном интегрировании наличие ограничений, как правило, затрудняет решение задачи синтеза траекторий, то в ММСВ, наоборот, решение задачи синтеза при этом упрощается.

Все сказанное приводит к тому, что ММСВ требует на несколько порядков меньших затрат машинного времени по сравнению с другими методами при синтезе и параметрическом исследовании траекторий. В то же время, как показывают общий анализ методов в § 1.1, анализ точности приближенного решения внутренней задачи ММСВ в гл. X и приведенные выше результаты численного сравнения, количественные результаты, даваемые ММСВ, хорошо согласуются с результатами, получаемыми с помощью МСВ и численным интегрированием. Точность решения задачи синтеза в рамках ММСВ вполне достаточна для использования полученного решения в качестве начального приближения при решении задачи более точными методами.

Проведенное сопоставление основных используемых на практике методов расчета траекторий в системе Земля — Луна: ММСВ, МСВ и численного интегрирования — указывает на целесообразность совместного использования этих методов на последовательных этапах решения задач синтеза и оптимизации траекторий. Наиболее рациональной является схема ММСВ → → МСВ → численное интегрирование: решение, найденное по каждому из методов этой схемы, является хорошим начальным приближением для построения траектории по методу, следующему за использованным.

Все сказанное выше остается, очевидно, справедливым применительно к задачам синтеза и оптимизации траекторий для полетов к планетам, при решении которых также используются три рассмотренных выше основных метода (см. гл. XII).

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЕТА К ПЛАНЕТАМ

§ 12.1. Вводные замечания. Обзор исследований

12.1.1. Вводные замечания. Среди различных задач освоения космического пространства одной из важнейших является задача осуществления перелета Земля — планета — Земля беспилотно-го или пилотируемого КА. О важности этой проблемы свидетельствует огромное число публикаций как в отечественной, так и зарубежной литературе, посвященных различным аспектам этой проблемы (см. обзор в разделе 12.1.2). В настоящей главе рассматривается лишь часть этой комплексной технической проблемы — вопросы оптимизации траекторий перелета Земля — планета — Земля.

Отличительная особенность межпланетных перелетов — *их большая продолжительность*, которая существенно возрастает при необходимости возврата аппарата к Земле. Исключительное значение фактор времени имеет для полетов с экипажем. Продолжительность перелета ограничена сверху как физиологическими и психологическими возможностями членов экипажа, так и конструктивными соображениями. Увеличение продолжительности экспедиции уменьшает вероятность ее благополучного исхода. В случае перелета с выходом на орбиту ИС планеты в качестве второго важнейшего параметра выступают энергетические затраты — *характеристическая скорость перелета*, которая при заданной продолжительности перелета в значительной мере определяет начальный вес экспедиции на орбите ИСЗ и в конечном счете материально-технические затраты на ее реализацию. Заметим, что уменьшение продолжительности экспедиции ведет, как правило, к увеличению характеристической скорости перелета. Для экспедиции с экипажем важным параметром является *время ожидания* — продолжительность пребывания экспедиции в окрестности или на планете назначения. В общем случае время ожидания ограничено либо ресурсом системы жизнеобеспечения, либо временем, необходимым для выполнения программы работ экспедиции. Из сказанного ясно, что при анализе траекторий перелетов Земля — планета — Земля необходимо учитывать все три указанных фактора.

Хотя в настоящее время возможность осуществления полетов к планетам Солнечной системы с возвращением к Земле при существующем уровне развития ракетно-космической техники не вызывает сомнений, практическое их осуществление является труднейшей технической задачей, в частности, из-за высокого уровня потребной энергии и большой продолжительности космической экспедиции. Поэтому для этих перелетов одной из важнейших задач является задача их оптимизации, которую будем понимать в широком смысле как задачу изыскания различных способов и методов снижения энергетических затрат или стартового веса аппарата и продолжительности перелета Земля — планета — Земля.

В настоящее время в качестве основных путей решения задачи оптимизации обсуждаются:

1°. Применение в качестве силовых установок ядерных ЖРД, или электрических РД, или комбинированных силовых установок, сочетающих химические ЖРД, ядерные ЖРД и электрические РД.

2°. Использование торможения в атмосфере планеты для осуществления перехода на орбиту ИС планеты или посадки на планету.

3°. Использование гравитационных полей планет для осуществления пертурбационных маневров с целью существенного изменения свойств чисто кеплеровых траекторий в поле тяготения Солнца.

4°. Применение многоимпульсных схем перелета.

5°. Применение различных схем полета к планетам с использованием нескольких КА, выполняющих различные функции.

В рамках каждого из этих направлений применительно к конкретной схеме перелета Земля — планета — Земля может быть сформулирована математическая задача оптимизации: при заданных начальных, промежуточных и конечных условиях, суммарной продолжительности перелета и времени ожидания (и других возможных ограничениях) найти траекторию перелета, доставляющую минимум некоторому функционалу, например характеристической скорости перелета. Рассмотрение ряда таких задач составляет основное содержание настоящей главы.

Основное внимание уделяется перелетам орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля. Как указывалось выше, такие перелеты имеют важное практическое значение. В то же время они представляют большой теоретический интерес, поскольку их рассмотрение сводится к оптимизации сложных многоимпульсных схем перелета.

Исследование основано на общепринятых допущениях:

1°. Активные участки движения заменяются импульсами скорости (импульсная аппроксимация).

2°. Движение аппарата рассматривается на основе ММСВ.

3°. Рассматриваются две модели движения планет Солнечной системы:

(а) планеты движутся в плоскости эклиптики по круговым орбитам — *плоская круговая модель*;

(б) планеты движутся по фиксированным кеплеровым траекториям, т. е. учитываются эллиптичность орбит планет и наклонение их к плоскости эклиптики, — *пространственная эллиптическая модель*.

Подробный анализ предположений 1° и 2° дан в разделах 2.1.1 и 1.1.5, 11.6.2 соответственно. Что касается предположения 3°, то оно подробно проанализировано в разделах 12.3.2, 12.4.1, 12.4.2.

12.1.2. Краткий обзор исследований. Ниже в кратком обзоре, не претендующем на исчерпывающую полноту, рассмотрены работы, посвященные исследованию траекторий полета к планетам Солнечной системы.

Общие вопросы механики полета КА большой тяги рассмотрены в работах К. Б. Алексеева, Г. Г. Бебенина, В. А. Ярошевского [1], Бэттина [2], Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина [4], В. И. Левантовского [2], Лоудена [19, 24], В. М. Пономарева [4], Ричардса [1], Сейферта [1], Ц. В. Соловьева, Е. В. Тарасова [1], Эрике [5, 7, 8], Эскобала [2], Руководстве по орбитальным полетам, Руководстве по межпланетным полетам и статьях Арчера [1], Баррара [1], В. Р. Э. Баузе, А. А. Дашкова, В. Н. Кубасова [1], Брейкуэлла, Джиллспая, Росса [1], Брейкуэлла, Перко [1], Бэттина [1], Гомана [1], Гравье, Маршала, Калпа [1], С. В. Дубовского [1], В. А. Ильина [2], Ли, Флоренса [1], Мёкеля [3], Перко [1], Росса [2], Шехтера [1].

Уже в одной из первых работ — статье Бэттина [1] — была предложена схема исследования траекторий КА большой тяги, основанная на использовании ММСВ и импульсной аппроксимации. Рассматриваются траектории облета планет как в предположении, что планеты движутся в плоскости эклиптики по круговым орбитам, так и с учетом эллиптичности и наклона орбит планет. На основе сопоставления этих решений показана применимость плоской круговой модели для приближенного баллистического анализа траекторий. Для нахождения траектории — кеплеровой дуги — между центрами планет отлета и назначения было предложено использовать теорему Эйлера — Ламберта.

Вопросы оптимизации межпланетных перелетов в вариационной постановке рассматривались рядом автором, среди которых отметим работы Лоудена (см. раздел 2.1.2). Оригинальный вариационный подход к исследованию импульсных перелетов предложен С. В. Дубовским [1].

В работах Нипа, Золы [1], Хьюза, Номикоса [1] исследуются перелеты Земля — Марс.

Значительное число работ посвящено исследованию траекторий и параметров аппаратов для перелета Земля — Марс — Земля. Траектории облета Марса рассмотрены в работах В. Р. Э. Баузе, А. А. Дашкова, В. Н. Кубасова [1], Бэттина [1], Гедеева [1], Джонсона, Смита [1], Льюденса [1], Росса [1], Рэгзака, Тайтуса [1], Тайтуса [1]. Впервые задача облета на современном методическом уровне была рассмотрена, по-видимому, в работе Бэттина [1]. Начиная с 1963—1964 гг. появляются работы, в которых исследуются различные пути улучшения характеристик траекторий облета. В работе Росса [1] впервые, по-видимому, рассматривается задача улучшения характеристик траектории облета путем сообщения аппарату импульса при облете. В работе Льюденса [1] на примере траекторий облета Марса со стартом в 1971 г. и 1980 г. оценивается эффективность сообщения аппарату импульса у Марса и аэродинамического маневра аппарата в атмосфере Марса. В работе Тайтуса [1] рассматриваются траектории облета Марса на период 1971—1980 гг. с дополнительным импульсом у Марса для снижения начальной массы аппарата на орбите ИСЗ и уменьшения продолжительности экспедиции.

В работах В. Р. Э. Баузе, А. А. Дашкова, В. Н. Кубасова [1], Гедеева [1], Росса [1], Рэгзака, Тайтуса [1] приведены одновременно результаты исследования траекторий облета Венеры.

Траектории перелета орбита ИСЗ — орбита ИС Марса — Земля рассмотрены в работах Гедеева [1], Джиллспая [1], Джонсона, Смита [1], В. А. Ильина, В. В. Демешкиной, Н. А. Истомина [2], Киблера [1], Корника, Северсайка [1], Лэскоди, Торсона, Хэйторна, Маркуса [1, 2], Мёкеля [2], Эрике [2, 3, 4, 6]. Работа Мёкеля [2] является, по-видимому, одной из первых, в которых было указано на возможность существенного (скачкообразного) сокращения продолжительности космической экспедиции за счет увеличения ее характеристической скорости, а также в результате несимметрии траектории перелета (см. разделы 12.4.1, 12.4.2).

В работе Лэскоди, Торсона, Хэйторна, Маркуса [1] исследованы перелеты Земля — Марс — Земля на период 1975—1980 гг., характеризующийся неблагоприятным взаимным расположением планет в конце 70-х годов и повышением солнечной активности в начале 80-х годов. Обсуждаются вопросы снижения начального веса аппарата за счет эллиптичности орбит ИСЗ, ИС Марса и торможения в атмосфере Марса. В работе Эрике [6] анализируется влияние тормозного импульса в перицентре перелета Марс — Земля на уменьшение суммарной характеристической скорости. В работах Гедеева [1], Джиллспая [1], Корника,

Северсайка [1], Мёкеля [2], Эрике [2, 3, 4] приведены одновременно результаты исследования траекторий орбита ИСЗ — орбита ИС Венеры — Земля.

В работах Р. К. Казаковой, В. Г. Киселева, А. К. Платонова [1] и Серджеевски [4] исследуются траектории полета к Юпитеру.

В результате проведенных исследований перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля, относящихся в подавляющем большинстве к началу 60-х годов, стало ясно, что реализация перелетов Земля — планета — Земля с выходом на орбиту ИС требует чрезвычайно больших энергетических затрат и связана с очень большой продолжительностью. Естественно поэтому обращение исследователей в области астродинамики к анализу путей снижения энергетики и продолжительности экспедиции. В качестве таких путей рассматриваются вначале торможение в атмосфере планет и несколько позднее — сложные траектории, связанные с использованием гравитационных полей нескольких планет.

На возможность использования атмосферы для торможения и посадки КА при подлете к планете впервые, по-видимому, обратил внимание Ф. А. Цандер [1]. Задача об оптимальном выходе на орбиту ИС планеты после торможения в атмосфере была впервые, по-видимому, поставлена и решена В. А. Ильиным [1]. Здесь же было указано на возможность значительного снижения характеристической скорости перелета Земля — планета — Земля при выходе на орбиту ИС планеты и при подлете к Земле за счет торможения в атмосфере. Обобщение и дальнейшее развитие эта задача получила в работе А. А. Шилова [1]. Исследование перелетов Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере планет проведено в работах В. В. Балашова [1, 2], Левина, Эллиса, Джорджиева [1], Нэполина, Мендеса [1], Причарда [1], Репика, Бубака, Чепела [1], Уонга, Андерсона [1], Финча [1], Хэнли, Лайона [1], Шэпланда, Прайса, Хирка [4]. С рассматриваемыми вопросами тесно связана проблема входа в атмосферу с гиперболическими скоростями. Из опубликованных в этой области работ укажем на фундаментальное исследование Чепмена [1, 2] и обзорные работы Уингроу [1] и Эггерса, Уонга [1].

Еще Гоман [1] в 1925 г. указал на возможность одновременного облета нескольких планет. Ф. А. Цандер [1] обратил внимание на возможность практического использования значительного изменения траектории аппарата при близком облете планеты.

В 1956 г. Крокко [1] рассмотрел для плоской круговой схемы задачу одновременного облета Марса и Венеры в 1971 г. Эта же задача в пространственном случае была рассмотрена в 1963 г.

в работах Росса [1], Рэгзака, Тайтуса [1]. В 1964 г. Холлистер [1] рассмотрел задачу о перелете орбита ИСЗ — орбита ИС Марса — Земля с одновременным облетом Венеры с целью уменьшения характеристической скорости перелета. В том же 1964 г. Зон [1] указал на возможность существенного снижения скорости входа в атмосферу Земли с $\sim 21,5$ км/сек до ~ 15 км/сек при перелетах Земля — Марс — Земля путем использования гравитационного поля Венеры для торможения аппарата на участке Марс — Земля и разгона на участке Земля — Марс. В работах Арчера [1], Баглиа [1], Брукса, Дрюри, Хэмпшайра [1], Вандервеена [1], Дируестера, Дейема [1], Зона [2], Л. А. Исаковича, С. Н. Кирпичникова [1], Клоппа, Нихоффа [1], Ли, Джонса, Потита [1], Уоллэса [1], Холлистера [2, 3], Холлистера Меннинга [1], Холлистера, Прассинга [1], Эснина, Руза [1] развиваются эти идеи.

Многоимпульсные схемы перелета Земля — Марс — Земля, когда дополнительные импульсы сообщаются не при облете Марса (см. работы Росса [1], Тайтуса [1]), а на средних участках перелетов Земля — Марс и Марс — Земля, проанализированы в работах Гобеца, Долла [2], Долла, Гобеца [1], Уиллиса [1]. В работе Уиллиса на примере перелетов Земля — орбита ИС Марса — Земля рассматриваются перелеты Марс — Земля с сообщением дополнительного импульса на участке залета траектории внутрь орбиты Земли. Показано, что импульс выгоден на перелетах Марс — Земля сравнительно большой угловой дальности (более $\geq 230^\circ$) на траекториях с продолжительностью 450—600 суток. Показано, что при этом характеристическая скорость перелета уменьшается на $2 \div 4$ км/сек по сравнению с обычным двухимпульсным перелетом Марс — Земля. При использовании торможения в атмосфере Земли эффективность дополнительного импульса несколько снижается. Аналогичные результаты получены Доллом, Гобецем [1]. В работе Гобеца, Долла [2] исследуются строго оптимальные трехимпульсные траектории Земля — Марс. Выявлены области, где такие перелеты выгоднее двухимпульсных.

Метод оптимизации многоимпульсных схем перелета, основанный на строгом вариационном подходе, был предложен в работе Лайона, Хэнделсмана [1], развит в работах Ежевски [1], Ежевски, Розендаала [1], Минкоффа, Лайона [1] (см. § 2.3) и использован для анализа строгой локальной оптимальности перелетов Земля — Марс в работах В. В. Балашова, В. А. Ильина, Н. А. Истомина [1], Гравье, Маршала, Калпа [2, 4], Минкоффа, Лайона [1], Пельтье [1], Хэзелрига [1] (см. § 12.5), перелетов Земля — Венера — в работе Гравье, Маршала, Калпа [3]. В работе Уолтона, Маршала, Калпа [1] дан детальный анализ возможных типов оптимальных околопланетных импульсных траекторий,

обеспечивающих переход от заданной на бесконечности скорости подлета к планете к аналогичной скорости отлета при ограничении минимального расстояния до планеты.

Исследованию схем экспедиций Земля — Марс — Земля с использованием двух и более аппаратов, летящих по различным траекториям, посвящены работы Рэгзака [1], Тайтуса [2]. В работе Хэлгостема [4] с помощью метода Брайсона, Денхэма [1] исследуются оптимальные траектории выведения КА с поверхности Марса на орбиту ИС Марса.

§ 12.2. Задачи оптимизации перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля

12.2.1. Постановка задач оптимизации. Рассмотрим особенности постановки задач оптимизации перелета между орбитами ИС двух планет. Сделаем следующие предположения:

1°. Движение КА рассматривается в рамках модифицированного метода сфер влияния (ММСВ).

2°. Планеты движутся по кеплеровым траекториям, элементы которых на заданный промежуток времени фиксированы.

3°. Тяга аппарата — импульсная.

4°. Параметры и ориентация в пространстве орбит ИС планет заданы.

5°. Переход между орбитой ИС и сферой влияния планеты представляет собой оптимальный импульсный перелет.

Остановимся кратко на предположениях 1°, 2° и 5°. Применимость ММСВ для расчета траекторий полета между планетами в поле основного тела (Солнца) обоснована в разделах 1.1.4, 1.1.5, 11.6.2. Поскольку в рамках ММСВ решение внутренней задачи зависит от вектора скорости на сфере влияния $V_{сф}$ и находится независимо от решения внешней задачи, в дальнейшем оптимальный переход между сферой влияния и орбитой ИС считаем известным и ограничиваемся анализом гелиоцентрического участка перелета.

Всюду в дальнейшем гравитационное поле на гелиоцентрическом участке считаем ньютоновским. Уравнения движения и сопряженная система на этом участке имеют вид (2.1.18), (2.1.19) и (2.2.21а), (2.2.22) соответственно.

Численные оценки (см. § 12.4) показывают, что продолжительность перелетов Земля — планета — Земля соизмерима с синодическим периодом пары Земля — планета. Если оскулирующие элементы орбит планет, вычисленные для какого-либо момента времени, считать неизменными на протяжении ближайших одного-двух синодических периодов, то при этом ошибки в определении элементов орбит Земли, Марса и Венеры состав-

ляют величину порядка 0,01%. Поэтому предположение 2° для рассматриваемых ниже постановок задач оптимизации вполне приемлемо.

Рассмотрим при указанных предположениях функционал (2.2.12) — характеристическую скорость N -импульсного перелета:

$$G = \Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-) + \sum_{k=1}^N |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-| + \Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+). \quad (12.2.1)$$

Начальный и конечный векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_N$ аппарата в данном случае совпадают с гелиоцентрическими радиусами-векторами планет в моменты t_1 и t_N соответственно. Скорости $\mathbf{V}_1^-$ и $\mathbf{V}_N^+$ представляют гелиоцентрические скорости аппарата на сферах влияния планет соответственно до импульса и после импульса, если таковые сообщаются КА на сферах влияния.

Обозначим характеристическую скорость на гелиоцентрическом участке перелета через q :

$$q = \sum_{k=1}^N |\mathbf{V}_k^+ - \mathbf{V}_k^-|. \quad (12.2.2)$$

В тех случаях, когда КА сообщается импульс на сфере влияния, его следует, согласно (12.2.1), включать в q . При наличии импульсов на сферах влияния планет имеем векторы скорости $\mathbf{V}^-$ до импульса и $\mathbf{V}^+$ после импульса. В дальнейшем под скоростью аппарата на сфере влияния будем понимать в точке отлета от планеты $\mathbf{V}^-$, а в точке подлета к планете $\mathbf{V}^+$, поскольку именно от этих векторов зависит решение внутренней задачи ММСВ. Таким образом, величины $\Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^+)$ и $\Delta V_N(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$ в (12.2.1) учитывают характеристические скорости соответствующих оптимальных переходов орбита ИС — сфера влияния, исключая импульс на сфере влияния планеты. Возможность представления функционала в виде (12.2.1) в общем случае обоснована в разделе 1.2.4. Более подробно этот вопрос проанализирован в разделе 12.2.3.

Предположение 5° вместе с представлением (12.2.1) позволяет при решении внешней задачи использовать известное решение внутренней задачи. Их «склейка» на отдельных участках траектории может быть проведена непосредственно при численном решении задачи оптимизации перелетов. При исследовании оптимальных траекторий аппаратов малой тяги такой прием использовался в работе Р. Ф. Аврамченко, Р. М. Безменова, В. А. Винокурова, В. В. Токарева [1] при оптимизации гелиоцентрического участка прямыми (градиентными) методами. Ниже решение внутренней задачи в функционале (12.2.1) используется для

записи условий трансверсальности внешней задачи (см. раздел 12.2.2).

Рассмотрим для определенности и удобства индексации перелет орбита ИСЗ — орбита ИС Марса (ИСМ). Обозначим дату старта с орбиты ИСЗ t_0 и дату выхода на орбиту ИСМ t_1 . Соответственно все величины, относящиеся к моменту t_0 , записываются с индексами 0 или $\oplus$, а относящиеся к моменту t_1 — с индексами 1 или $\oslash$.

В начальной и конечной точках перелета должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{\oplus}(t_0), \quad (12.2.3)$$

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_{\oslash}(t_1). \quad (12.2.4)$$

Планетоцентрические скорости аппарата на сферах влияния равны

$$\mathbf{V}_{\text{сф}0}^- = \mathbf{V}_0^- - \mathbf{U}_{\oplus}(t_0), \quad (12.2.5)$$

$$\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+ = \mathbf{V}_1^+ - \mathbf{U}_{\oslash}(t_1), \quad (12.2.6)$$

где $\mathbf{U}_i$, $i = \oplus, \oslash$, — векторы гелиоцентрических скоростей планет. При заданной орбите ИС планеты характеристическая скорость оптимального перехода орбита ИС — сфера влияния зависит только от векторов $\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-$, $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+$. Таким образом, характеристические скорости оптимальных перелетов орбита ИСЗ — сфера влияния Земли ΔV_0 и сфера влияния Марса — орбита ИСМ ΔV_1 могут быть записаны в виде

$$\Delta V_0 = \Delta V_0(\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-), \quad (12.2.7)$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_1(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+). \quad (12.2.8)$$

С учетом сказанного характеристическую скорость перелета орбита ИСЗ — орбита ИСМ запишем в виде

$$G_{01} = \Delta V_0(\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-) + \Delta V_1(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) + q_{01}. \quad (12.2.9)$$

В тех случаях, когда в качестве оптимальных переходов орбита ИС — сфера влияния планеты рассматриваются одно- или двухимпульсные перелеты (см. §§ 10.2, 10.3), ΔV_i совпадают с импульсным приращением скорости в точке перехода на орбите ИС.

Сформулируем задачу I оптимизации перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ.

Задача I. При заданных орбитах ИСЗ и ИСМ, продолжительности перелета

$$t_{01} = t_1 - t_0 = \text{const} \quad (12.2.10)$$

требуется определить даты старта с орбиты ИСЗ t_0 и прибытия на орбиту ИСМ t_1 и оптимальную импульсную гелиоцентрическую траекторию перелета, удовлетворяющую краевым условиям (12.2.3), (12.2.4), изопериметрическому условию (12.2.10) и доставляющую минимум функционалу (12.2.9).

Рассмотрим теперь перелет орбита ИСМ — орбита ИСЗ. Обозначим дату старта с орбиты ИСМ t_2 и дату прибытия на орбиту ИСЗ t_3 . Все величины, относящиеся к моменту t_2 , записываются с индексами 2 или δ , а относящиеся к моменту t_3 — с индексами 3 или $\oplus$. В начальной и конечной точках этого перелета должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_\delta(t_2), \quad (12.2.11)$$

$$\mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_\oplus(t_3). \quad (12.2.12)$$

Характеристические скорости оптимальных перелетов орбита ИСМ — сфера влияния Марса и сфера влияния Земли — орбита ИСЗ запишем в виде

$$\Delta V_2 = \Delta V_2(\mathbf{V}_{\text{сф}2}^-), \quad (12.2.13)$$

$$\Delta V_3 = \Delta V_3(\mathbf{V}_{\text{сф}3}^+), \quad (12.2.14)$$

где

$$\mathbf{V}_{\text{сф}2}^- = \mathbf{V}_2^- - \mathbf{U}_\delta(t_2), \quad (12.2.15)$$

$$\mathbf{V}_{\text{сф}3}^+ = \mathbf{V}_3^+ - \mathbf{U}_\oplus(t_3). \quad (12.2.16)$$

С учетом (12.2.2), (12.2.13), (12.2.14) характеристическая скорость перелета орбита ИСМ — орбита ИСЗ есть

$$G_{23} = \Delta V_2(\mathbf{V}_{\text{сф}2}^-) + \Delta V_3(\mathbf{V}_{\text{сф}3}^+) + q_{23}. \quad (12.2.17)$$

Сформулируем теперь задачу II оптимизации перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ — орбита ИСЗ.

Задача II. При заданных орбитах ИСЗ и ИСМ в моменты старта и прибытия, продолжительности перелета

$$t_{03} = t_3 - t_0 = \text{const} \quad (12.2.18)$$

и времени ожидания на орбите ИСМ

$$t_{12} = t_2 - t_1 = \text{const} \quad (12.2.19)$$

требуется определить даты старта с орбиты ИСЗ t_0 , прибытия на орбиту ИСМ t_1 , старта с орбиты ИСМ t_2 и прибытия на орбиту ИСЗ t_3 и оптимальную импульсную гелиоцентрическую траекторию перелета, удовлетворяющую краевым условиям (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12), изопериметрическим условиям (12.2.18), (12.2.19) и доставляющую минимум функционалу —

характеристической скорости перелета

$$G_{03} = G_{01} + G_{23} = \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + q_{01} + q_{23}. \quad (12.2.20)$$

Наличие на Земле, Марсе и Венере достаточно мощных атмосфер позволяет использовать их для торможения КА при полете к планете с целью уменьшения характеристических скоростей выхода на орбиты ИС планет (см. § 5.2). Использование торможения в атмосфере существенно расширяет класс возможных траекторий перелета и, соответственно, постановок задач оптимизации перелетов (подробнее см. раздел 12.3.3). Среди этих траекторий наибольший практический интерес представляют траектории, удовлетворяющие ограничениям по перегрузке и тепловым потокам при движении в атмосфере. Эти ограничения сводятся в конечном счете к заданию величины планетоцентрической скорости КА на сфере влияния планеты (см. раздел 12.3.3).

Рассмотрим для определенности перелет Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере Земли. Тогда указанное выше условие запишется в виде

$$|V_{сф3}^+| = |V_3^+ - U_{\oplus}(t_3)| = V_{сф3}^* = \text{const}. \quad (12.2.21)$$

При наличии торможения в атмосфере характеристическая скорость перехода на орбиту ИСЗ или посадки на планету определяется независимо от $V_{сф3}^+$. Поэтому при решении задачи оптимизации в функционале (12.2.20) член ΔV_3 , не зависящий от гелиоцентрических параметров перелета Марс — Земля, можно исключить (см. раздел 12.3.3).

Сформулируем теперь задачу III оптимизации перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ — Земля с торможением в атмосфере Земли.

Задача III. При заданных орбитах ИСЗ и ИСМ в моменты старта и прибытия, изопериметрических условиях (12.2.18) и (12.2.19) требуется определить даты старта с орбиты ИСЗ t_0 , прибытия на орбиту ИСМ t_1 , старта с орбиты ИСМ t_2 и подлета к Земле t_3 и оптимальную импульсную траекторию перелета, удовлетворяющую краевым условиям (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12), (12.2.21) и доставляющую минимум функционалу

$$G'_{03} = \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + q_{01} + q_{23}. \quad (12.2.22)$$

12.2.2. Условия трансверсальности и краевые задачи. Общая схема решения задач оптимизации. Рассмотрим сначала задачу I. Поскольку начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени связаны соотношением (12.2.10), перепишем общее условие транс-

версальности (2.2.64), с учетом (12.2.7) и (12.2.8), в виде

$$\delta \Delta V_0 (\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-) + H_0^+ \delta t_0 - (\mathbf{p}_0^+, \delta \mathbf{r}_0) - (\mathbf{s}_0^+, \delta \mathbf{V}_0^-) + \\ + \delta \Delta V_1 (\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) - H_1^- \delta t_1 + (\mathbf{p}_1^-, \delta \mathbf{r}_1) + (\mathbf{s}_1^-, \delta \mathbf{V}_1^+) = 0, \quad (12.2.23)$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ — векторы, сопряженные к векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ соответственно,

$$H = (\mathbf{p}, \mathbf{V}) - \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (12.2.24)$$

— гамильтониан (2.2.29) для импульсной траектории, верхние индексы «+» и «-» означают предельные значения соответствующих величин в моменты $i = 0, 1$ справа и слева соответственно.

Найдем вариации, входящие в (12.2.24). На основании (12.2.7) и (12.2.8)

$$\delta \Delta V_i = (\text{grad } \Delta V_i, \delta \mathbf{V}_{\text{сф}i}^j), \quad \begin{matrix} i = 0, & j = -; \\ i = 1, & j = +, \end{matrix} \quad (12.2.25)$$

где, согласно (12.2.5), (12.2.6),

$$\delta \mathbf{V}_{\text{сф}0}^- = \delta \mathbf{V}_0^- - \frac{d\mathbf{U}_{\oplus}}{dt} \Big|_{t_0} \delta t_0, \quad (12.2.26)$$

$$\delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}^+ = \delta \mathbf{V}_1^+ - \frac{d\mathbf{U}_{\oplus}}{dt} \Big|_{t_1} \delta t_1, \quad (12.2.27)$$

или с учетом предположения 2° раздела 12.2.1,

$$\delta \mathbf{V}_{\text{сф}0}^- = \delta \mathbf{V}_0^- + \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \Big|_{t_0} \delta t_0, \quad (12.2.28)$$

$$\delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}^+ = \delta \mathbf{V}_1^+ + \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \Big|_{t_1} \delta t_1. \quad (12.2.29)$$

Далее, согласно (12.2.3), (12.2.4)

$$\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}_{\oplus}(t_0) = \mathbf{U}_{\oplus}(t_0) \delta t_0, \quad (12.2.30)$$

$$\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}_{\oplus}(t_1) = \mathbf{U}_{\oplus}(t_1) \delta t_1. \quad (12.2.31)$$

Подставляя (12.2.25), (12.2.28) — (12.2.31) в (12.2.23), получим

$$\left(\text{grad } \Delta V_0, \delta \mathbf{V}_0^- + \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \Big|_{t_0} \delta t_0 \right) + H_0^+ \delta t_0 - (\mathbf{p}_0^+, \mathbf{U}_{\oplus}(t_0) \delta t_0 - \\ - (\mathbf{s}_0^+, \delta \mathbf{V}_0^-) + \left(\text{grad } \Delta V_1, \delta \mathbf{V}_1^+ + \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \Big|_{t_1} \delta t_1 \right) - H_1^- \delta t_1 + \\ + (\mathbf{p}_1^-, \mathbf{U}_{\oplus}(t_1) \delta t_1 + (\mathbf{s}_1^-, \delta \mathbf{V}_1^+) = 0. \quad (12.2.32)$$

На основании (12.2.10) вариации δt_0 и δt_1 связаны соотношением

$$\delta t_1 - \delta t_0 = 0. \quad (12.2.33)$$

Вариации $\delta \mathbf{V}_0^-$ и $\delta \mathbf{V}_1^+$ суть полные вариации соответствующих гелиоцентрических скоростей и являются независимыми величинами.

Приравнявая в (12.2.32) с учетом (12.2.33) коэффициенты при независимых вариациях нулю, находим

$$\text{grad } \Delta V_0 (\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-) - \mathbf{s}_0^+ = 0, \quad (12.2.34)$$

$$\text{grad } \Delta V_1 (\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) + \mathbf{s}_1^- = 0, \quad (12.2.35)$$

$$\left[\left(\text{grad } \Delta V_0, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) - (\mathbf{p}_0^+, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_0} + \left[\left(\text{grad } \Delta V_1, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) + (\mathbf{p}_1^+, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_1} = 0. \quad (12.2.36)$$

При записи (12.2.36) учтено равенство $H_0^+ = H_1^-$ (см. (2.2.69)).

Итак, задача I сводится к двухточечной краевой задаче для векторов фазовых $\{\mathbf{r}, \mathbf{V}\}$ и сопряженных $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}\}$ переменных, удовлетворяющих системам уравнений (2.1.18), (2.1.19) и (2.2.21a), (2.2.22) соответственно. Для определения двенадцати фазовых и сопряженных переменных и моментов времени t_0 и t_1 имеем четырнадцать скалярных условий (12.2.3), (12.2.4), (12.2.10), (12.2.34), (12.2.35), (12.2.36). Любое решение этой краевой задачи, удовлетворяющее условиям строгой локальной оптимальности, приведенным в разделе 2.2.1, определяет оптимальный импульсный перелет орбита ИСЗ — орбита ИСМ.

Трудность получения решения рассматриваемой краевой задачи обусловлена весьма сложной структурой соотношений (12.2.34) — (12.2.36) относительно фазовых переменных и моментов t_0 и t_1 . Из (12.2.36) видно, что краевые условия в начальной и конечной точках перелета должны рассматриваться совместно. Входящие в соотношения (12.2.34), (12.2.35) векторы $\text{grad } \Delta V_i (\mathbf{V}_{\text{сф}i})$, как это следует из результатов § 10.2 и § 10.3, определяются достаточно сложными соотношениями и в общем случае могут быть найдены лишь численно (см. ниже). Практически может идти речь лишь о численном решении поставленной краевой задачи. Для применения в этом случае стандартных итеративных процедур решения двухточечных краевых задач необходимо иметь исходное приближенное решение задачи, которое, в свою очередь, должно быть получено независимо, вне рамок рассматриваемой краевой задачи.

Рассмотрим теперь задачу II. Вариация функционала (12.2.20) такова:

$$\delta G_{03} = \delta G_{01} + \delta G_{23}. \quad (12.2.37)$$

Учитывая, что 1) перелеты Земля — планета и планета — Земля в задаче II связаны лишь условиями (12.2.18) и (12.2.19), 2) вид вариаций δG_{01} и δG_{23} с точностью до индексов одинаков, 3) условие трансверсальности (12.2.23) получается из равенства $\delta G_{01} = 0$ после исключения в нем членов, связанных с промежуточными импульсами, и вариаций δV_0^+ и δV_1^- (см. раздел 2.2.1), на основании (12.2.23) и (12.2.37) запишем условие трансверсальности для задачи II в виде

$$\begin{aligned} \delta \Delta V_0 (\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-) + H_0^+ \delta t_0 - (\mathbf{p}_0^+, \delta \mathbf{r}_0) - (s_0^+, \delta V_0^-) + \\ + \delta \Delta V_1 (\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) - H_1^- \delta t_1 + (\mathbf{p}_1^-, \delta \mathbf{r}_1) + (s_1^-, \delta V_1^+) + \\ + \delta \Delta V_2 (\mathbf{V}_{\text{сф}2}^-) + H_2^+ \delta t_2 - (\mathbf{p}_2^+, \delta \mathbf{r}_2) - (s_2^+, \delta V_2^-) + \\ + \delta \Delta V_3 (\mathbf{V}_{\text{сф}3}^+) - H_3^+ \delta t_3 + (\mathbf{p}_3^-, \delta \mathbf{r}_3) + (s_3^-, \delta V_3^+) = 0. \end{aligned} \quad (12.2.38)$$

Преобразуя (12.2.38) аналогично тому, как это сделано в случае задачи I с соотношением (12.2.23), и учитывая связи

$$\delta t_3 - \delta t_0 = 0, \quad (12.2.39)$$

$$\delta t_2 - \delta t_1 = 0, \quad (12.2.40)$$

получим для задачи II соотношения (12.2.34), (12.2.35) и

$$\text{grad } \Delta V_2 (\mathbf{V}_{\text{сф}2}^-) - s_2^+ = 0, \quad (12.2.41)$$

$$\text{grad } \Delta V_3 (\mathbf{V}_{\text{сф}3}^+) + s_3^- = 0. \quad (12.2.42)$$

Вместо же (12.2.36) имеем

$$\begin{aligned} \left[\left(\text{grad } \Delta V_0, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) + H_0^+ - (\mathbf{p}_0^+, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_0} + \\ + \left[\left(\text{grad } \Delta V_3, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) - H_3^- + (\mathbf{p}_3^-, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_3} = 0, \end{aligned} \quad (12.2.43)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\text{grad } \Delta V_1, \frac{\mathbf{r}_{\delta}}{r_{\delta}^3} \right) - H_1^- + (\mathbf{p}_1^-, \mathbf{U}_{\delta}) \right]_{t_1} + \\ + \left[\left(\text{grad } \Delta V_2, \frac{\mathbf{r}_{\delta}}{r_{\delta}^3} \right) + H_2^+ - (\mathbf{p}_2^+, \mathbf{U}_{\delta}) \right]_{t_2} = 0. \end{aligned} \quad (12.2.44)$$

Таким образом, для определения 24 фазовых и сопряженных переменных в моменты t_i и четырех дат t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, связанных условиями (12.2.18), (12.2.19), имеем 26 скалярных краевых условий (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12), (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41) — (12.2.44). Применительно к краевой задаче II остается в силе все сказанное относительно краевой задачи I. При этом краевая задача II оказывается, естественно, намного сложнее краевой задачи I.

Перейдем теперь к задаче III. Поскольку в функционале (12.2.22) член $\Delta V_3 = 0$, условие трансверсальности для задачи III совпадает с (12.2.38), если в этом соотношении положить $\delta \Delta V_3 \equiv 0$. Однако, в отличие от задачи II, вследствие условия (12.2.21) вариация $\delta \mathbf{V}_{\text{сф } 3}^+$ теперь несвободна. Переписывая соотношение (12.2.24) в виде

$$\mathbf{V}_{\text{сф } 3}^{+2} = (\mathbf{V}_3^+ - \mathbf{V}_{\oplus}(t_3), \mathbf{V}_3^+ - \mathbf{U}_{\oplus}(t_3)) = \text{const} \quad (12.2.45)$$

и варьируя его, получим

$$(\mathbf{V}_{\text{сф } 3}^+, \delta \mathbf{V}_3^+) - \left(\mathbf{V}_{\text{сф } 3}^+, \frac{d\mathbf{U}_{\oplus}}{dt} \Big|_{t_3} \right) \delta t_3 = 0. \quad (12.2.46)$$

Таким образом, вариации δt_0 , δt_3 и $\delta \mathbf{V}_3^+$ связаны соотношениями (12.2.39), (12.2.46). Что касается остальных вариаций, то они не отличаются от соответствующих вариаций в задаче II. В результате для задачи III получим соотношения (12.2.34), (12.2.35), (12.2.44), (12.2.44) и соотношение

$$\begin{aligned} & \left[\left(\text{grad } \Delta V_0, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) + H_0^+ - (\mathbf{p}_0^+, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_0} \delta t_0 + \\ & + [-H_3^- + (\mathbf{p}_3^-, \mathbf{U}_{\oplus})]_{t_3} \delta t_3 + (\mathbf{s}_3^-, \delta \mathbf{V}_3^+) = 0. \end{aligned} \quad (12.2.47)$$

Из (12.2.39), (12.2.46) и (12.2.47) следует, что в качестве независимой вариации целесообразно взять $\delta \mathbf{V}_3^-$. Исключая δt_0 и δt_3 с помощью (12.2.39) и (12.2.46) из (12.2.47), получим, приравняв нулю множитель при $\delta \mathbf{V}_3^+$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\left(\text{grad } \Delta V_0, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right) + H_0^+ - (\mathbf{p}_0^+, \mathbf{U}_{\oplus}) \right]_{t_0} + \right. \\ & \left. + [-H_3^- + (\mathbf{p}_3^-, \mathbf{U}_{\oplus})]_{t_3} \right\} \mathbf{V}_{\text{сф } 3}^+ - \left(\mathbf{V}_{\text{сф } 3}^+, \frac{\mathbf{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \right)_{t_3} \mathbf{s}_3^- = 0. \end{aligned} \quad (12.2.48)$$

Таким образом, в задаче III для определения 24 фазовых и сопряженных переменных в моменты t_i и четырех дат t_i , $i=0, 1, 2, 3$, связанных условиями (12.2.18), (12.2.19) и (12.2.21), имеем 25 краевых условий (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12), (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41), (12.2.48) вместо (12.2.42) и (12.2.44). Все сказанное выше относительно трудностей решения краевых задач I и II в равной мере относится и к краевой задаче III.

Сложность краевых задач I—III оптимизации перелетов ставит под сомнение практическую возможность и целесообразность их непосредственного решения в рамках вариационного подхода при отсутствии регулярного метода нахождения исходных приближенных решений этих задач.

Рассмотрим теперь другую постановку задач I—III, позволяющую обойти отмеченные трудности. Остановимся сначала на задачах I и II. Предположим, что моменты t_i , $i = 0, 1$ (задача I) или $i = 0, 1, 2, 3$ (задача II) заданы. Тогда в каждый из моментов t_i оказываются заданными радиусы-векторы и векторы скорости орбитального движения планет. Как следует из проведенного выше анализа условий трансверсальности, они для моментов t_0 и t_1 в задачах I и II дают соотношения (12.2.34), (12.2.35), а для моментов t_2 и t_3 в задаче II — аналогичные соотношения (12.2.41), (12.2.42). В каждой из точек t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, краевые условия оказываются зависящими от фазовых и сопряженных переменных только в этой точке. В результате краевые задачи для перелетов Земля — Марс и Марс — Земля в задаче II оказываются независимыми и могут решаться порознь.

В задачах I и II в каждой из точек t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, аппарату сообщается импульс скорости. Кроме этого, на оптимальной траектории возможны промежуточные импульсы в точках, отличных от крайних точек гелиоцентрических участков. Поскольку количество и положение этих промежуточных импульсов заранее неизвестно, задачи I и II по-прежнему остаются достаточно сложными задачами оптимизации многоимпульсных перелетов.

Предположим теперь, что среди оптимальных траекторий перелета в задачах I и II имеются такие, на которых промежуточные гелиоцентрические импульсы скорости отсутствуют. Тогда перелеты Земля — планета и планета — Земля происходят по кеплеровым орбитам между точками, заданными радиусами-векторами (12.2.3), (12.2.4) и (12.2.11), (12.2.12), и полностью определяются датами t_1 , t_2 и t_3 , t_4 соответственно. Поскольку в этом случае

$$q_{01} \equiv q_{23} \equiv 0, \quad (12.2.49)$$

соответствующие функционалы (12.2.9) и (12.2.20) являются заданными функциями дат t_i :

$$G_{01} = G_{01}(t_0, t_1), \quad (12.2.50)$$

$$G_{03} = G_{03}(t_0, t_1, t_2, t_3). \quad (12.2.51)$$

Оптимизация перелетов в этом случае сводится к отысканию оптимальных дат t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, доставляющих минимумы функционалам (12.2.50) и (12.2.51). Таким образом, вместо вариационных задач I и II имеем соответственно следующие экстремальные задачи.

Задача Ia. При заданных орбитах ИСЗ и ИСМ определить даты t_0 и t_1 и соответствующие гелиоцентрические кеплеровы дуги, удовлетворяющие изопериметрическому условию (12.2.10) и доставляющие минимум функционалу (12.2.50) при выполнении краевых условий (12.2.3), (12.2.4).

Задача IIa. При заданных в моменты старта и прибытия орбитах ИСЗ и ИСМ определить даты t_0, t_1, t_2, t_3 и соответствующие гелиоцентрические кеплеровы дуги, удовлетворяющие изопериметрическим условиям (12.2.18), (12.2.19) и доставляющие минимум функционалу (12.2.51) при выполнении краевых условий (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12).

Пусть задачи Ia и IIa решены. В этом случае в каждой из точек $t_i, i = 0, 1, 2, 3$, можно найти векторы

$$\text{grad } \Delta V_i(\mathbf{v}_{\text{сф}i}^j), \quad i = 0, 2; j = - \text{ или } i = 1, 3; j = +.$$

Но тогда каждое из условий (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41), (12.2.42) позволяет найти в i -й точке, $i = 0, 1, 2, 3$, соответствующий вектор $\mathbf{s}_0^+, \mathbf{s}_1^-, \mathbf{s}_2^+, \mathbf{s}_3^-$. Зная фазовые траектории — кеплеровы дуги перелета — и значения вектора $\mathbf{s}$ в концах этих дуг, можно, используя аналитическое решение сопряженной системы в ньютоновском гравитационном поле (см. § 3.1), найти векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ на траектории. Условия строгой локальной оптимальности для рассматриваемых перелетов сводятся к выполнению следующих соотношений (см. раздел 2.2.1):

$$s(t) < 1 \quad \forall \quad t \in (t_0, t_1) \cup (t_2, t_3), \quad (12.2.52)$$

$$s(t_i) \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (12.2.53)$$

причем знак равенства в (12.2.53) имеет место только в том случае, если в i -й точке, $i = 0, 1, 2, 3$, аппарату на сфере влияния планеты сообщается импульс скорости. Если для выбранных орбит ИСЗ и ИСМ и найденных дат $t_i, i = 0, 1, 2, 3$, условия (12.2.52), (12.2.53) выполнены, то найденная траектория перелета строго локально оптимальна. При этом выполняются и условия transversальности (12.2.36) в задаче I и (12.2.43), (12.2.44) в задаче II. В самом деле, по своему смыслу эти условия выражают отсутствие влияния вариаций δt_i на функционалы (12.2.9) и (12.2.20). Но оптимально выбранные даты t_i для функционалов (12.2.50), (12.2.51) как раз и удовлетворяют этому требованию. Таким образом, полученные описанным выше методом траектория перелета и соответствующее решение сопряженной системы представляют в рассматриваемом случае решение краевых задач I и II.

Пусть теперь условия (12.2.51), (12.2.53) на одной или двух кеплеровых дугах найденной траектории перелета не удовлетворяются. Это означает, что кеплерова траектория перелета заведомо не является оптимальной и оптимальная траектория перелета должна отыскиваться среди перелетов с промежуточными гелиоцентрическими импульсами. В этом случае для построения оптимальных траекторий перелета можно воспользоваться результатами, приведенными в разделе 2.3.3.

Исследования перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — орбита ИСЗ, проведенные для полетов к Марсу и Венере (см. § 12.3 и § 12.4), показали, что в тех случаях, когда векторы гелиоцентрических скоростей на сферах влияния лежат в плоскостях орбит соответствующих ИС, т. е. оптимальным переходом сфера влияния планеты — орбита ИС является плоский одноимпульсный переход (см. § 10.2, § 10.4), простейшие схемы перелета без промежуточных импульсов с оптимально подобранными датами t_i , $i=0, 1, 2, 3$, практически всегда являются строго локально оптимальными (см. раздел 12.5.2).

Будем теперь непрерывно менять в заданном диапазоне ориентацию орбит ИС в пространстве, решая каждый раз для заданной ориентации задачу Ia или IIa оптимизации дат t_i и определяя соответствующие решения сопряженной системы. Если во всей области изменения ориентации орбит ИС условия (12.2.52), (12.2.53) выполняются, то все найденные траектории также строго локально оптимальны. Если же в процессе изменения ориентации орбит ИС происходит нарушение условий (12.2.52), (12.2.53), то для построения при этих ориентациях орбит ИС оптимальных импульсных перелетов можно воспользоваться методами численного улучшения неоптимальных траекторий, приведенными в разделе 2.3.3. Если при изменении ориентации орбит ИС даты t_i , $i=0, 1, 2, 3$, не оптимизируются и остаются фиксированными, то оптимизация перелета сводится к оптимизации переходов между сферами влияния и орбитами ИС планет. При этом по-прежнему условия (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41), (12.2.42) имеют место. Что касается условий (12.2.36), (12.2.43) и (12.2.44), то они исключаются из рассмотрения, поскольку даты t_i заданы. Очевидно, что вместо изменения ориентации орбит ИС можно изменять любые параметры, от которых решение задач I и II зависит непрерывно, в частности даты t_i . Более подробно указанные вопросы рассмотрены в § 12.5.

Вернемся теперь к задаче III. Предположим, что среди оптимальных траекторий в этой задаче имеются такие, на которых промежуточные гелиоцентрические импульсы тяги отсутствуют. Тогда, как и в задаче II, функционал (12.2.22) можно представить в виде

$$G'_{03} = G'_{03}(t_0, t_1, t_2, t_3) \quad (12.2.54)$$

и вместо вариационной задачи III поставить следующую экстремальную задачу.

Задача IIIa. При заданных в моменты старта и прибытия орбитах ИСЗ и ИСМ определить даты t_0, t_1, t_2, t_3 и соответствующие гелиоцентрические кеплеровы дуги, удовлетворяющие изопериметрическим условиям (12.2.18), (12.2.19) и доставляющие минимум

функционалу (12.2.54) при выполнении краевых условий (12.2.3), (12.2.4), (12.2.11), (12.2.12) и условия (12.2.24).

Найдя решение задачи IIIa, можем проверить его строгую локальную оптимальность, как и для задач Ia и IIa. При этом решение сопряженной системы находится с помощью соотношений (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41) и (12.2.48). Отметим, что, в отличие от задачи IIa, вектор s_3 в задаче IIIa, согласно (12.2.48), зависит от фазовых и сопряженных переменных как в момент t_3 , так и в момент t_0 .

В этой особенности проявляется существенное отличие задачи IIIa от задачи IIa. Переход от задачи II к задаче IIa основан на возможности фиксации дат t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, и последующем их варьировании, что позволяет фактически независимо рассматривать перелеты Земля — планета и планета — Земля. Аналогичная возможность для задачи III исключена. Фиксация дат t_2 и t_3 однозначно определяет кеплерову дугу перелета Марс — Земля между векторами $\Gamma_s(t_2)$ и $\Gamma_\oplus(t_3)$ с продолжительностью $t_3 - t_2$ (см. раздел 5.1.4) и вектор скорости $\vec{V}_{сфз}$. Среди кеплеровых перелетов планета — Земля с заданной скоростью входа в атмосферу Земли наибольший практический интерес представляют такие, на которых условие (12.2.21) выполняется без импульса скорости на сфере влияния Земли. Поскольку в общем случае $|\vec{V}_{сфз}| \neq V_{сфз}^*$, условие (12.2.21) несовместимо с заданием порознь дат t_2 и t_3 . Далее, поскольку даты t_0 и t_1 с помощью условий (12.2.18), (12.2.19) связаны с датами t_3 и t_2 соответственно, эти даты также не могут быть заранее заданы порознь. Таким образом, если перелеты Земля — планета и планета — Земля представляют кеплеровы дуги, условие (12.2.21) приводит к невозможности фиксации дат t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, и независимого рассмотрения этих перелетов (см. раздел 12.3.3). Следовательно, чтобы при сохранении условия (12.2.21) в задаче III можно было фиксировать даты t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, необходимо снять по меньшей мере одно из условий, накладываемых на перелет Марс — Земля в этой задаче. При этом надо так видоизменить постановку задачи III, чтобы сохранить те преимущества, которые дает фиксация всех дат t_i в задаче II: возможность отдельного рассмотрения краевых задач для перелетов Земля — Марс и Марс — Земля и условий в моменты времени t_i .

Все эти модификации задачи III получаются снятием одного или нескольких условий на перелет Марс — Земля. Например, если даты t_i , $i = 0, 1, 2$, заданы, а момент времени t_3 свободен, то такой выбор дат соответствует тому, что время ожидания (12.2.19) задано, а суммарная продолжительность перелета (12.2.18) свободна. Если даты t_i , $i = 0, 1, 3$, заданы, а момент времени t_2 свободен, то такой выбор дат соответствует тому, что суммарная продолжительность перелета (12.2.18) задана, а время ожидания

(12.2.19) свободно. Независимое рассмотрение перелетов Земля — Марс и Марс — Земля возможно также, если считать, что все моменты времени t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, заданы, а для выполнения условия (12.2.21) аппарату в момент времени t_3 сообщается импульс скорости.

Определенный практический интерес представляет рассмотрение траекторий перелета с торможением в атмосфере планет без ограничения скорости входа в атмосферу. Постановка такого рода задач аналогична постановке задачи II. При этом, если торможение в атмосфере происходит в момент t_i , $i = 1$ и (или) 3, то в функционале (12.2.20) соответствующая характеристическая скорость $\Delta V_i \equiv 0$, $i = 1$ и (или) 3 (подробнее см. раздел 12.3.3). Для такого рода задач условия трансверсальности можно получить из соответствующих условий для задачи II, если в них положить $\Delta V_i \equiv 0$, $i = 1$ и (или) 3. В частности, из (12.2.35) и (12.2.42) следует

$$s_i = 0, \quad i = 1 \text{ и (или) } 3. \quad (12.2.55)$$

Из всех возможных постановок задач с торможением в атмосфере наиболее интересна задача IIIа, в которой условие (12.2.21) выполняется за счет выбора в целом кеплеровой дуги перелета планета — Земля, а не подбора специальных импульсов скорости или спятия одного из условий (12.2.18), (12.2.19). Определенный интерес представляют также аналогичные задачи без ограничения скорости входа в атмосферу, позволяющие оценить минимальные характеристические скорости перелетов при использовании торможения в атмосфере. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением именно этих задач оптимизации перелетов с торможением в атмосфере (см. разделы 12.3.3, 12.4.3).

Величина $\text{grad } \Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}}^+)$, входящая в полученные выше краевые условия, определяется выбранной схемой маневра перехода орбита ИС планеты — сфера влияния планеты. На основании результатов гл. X и с учетом того, что, согласно принятой выше постановке задач оптимизации, импульс на сфере влияния включен в состав гелиоцентрического участка, в дальнейшем ограничимся рассмотрением оптимальных одноимпульсных переходов сфера влияния — орбита ИС. В § 10.2 было показано, что характеристическую скорость оптимального одноимпульсного перехода для эллиптической орбиты ИС при умеренных значениях эксцентриситета можно с достаточной степенью точности аппроксимировать характеристической скоростью перехода для круговой орбиты, радиус которой равен фокальному параметру эллиптической орбиты. Поэтому далее при вычислении $\text{grad } \Delta V\{\mathbf{V}_{\text{сф}}^+\}$ орбиту ИС считаем круговой.

В разделе 10.2.2 показано, что характеристическая скорость оптимального одноимпульсного перехода сфера влияния — задан-

ная круговая орбита ИС может быть записана в виде (см. соотношения (10.2.29) — (10.2.32))

$$\Delta V = \Delta V(\kappa, \sigma, \cos \beta(\kappa, \sigma)), \quad (12.2.56)$$

где

$$\kappa = \frac{\rho}{a}, \quad (12.2.57)$$

ρ — радиус орбиты ИС, a — действительная полуось гиперболы перехода,

$$a = \frac{\mu}{V_{\text{сф}}^2 - 2 \frac{\mu}{\rho_{\text{сф}}}}, \quad (12.2.58)$$

$$\sigma = 1 - \frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)^2}{V_{\text{сф}}^2}, \quad (12.2.59)$$

$\mathbf{j}_n$ — орт, коллинеарный вектору кинетического момента точки, движущейся по орбите ИС. Поскольку для оптимального перехода $\frac{\partial \Delta V}{\partial \cos \beta} = 0$, из (12.2.56) получаем

$$\delta \Delta V = \frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} \delta \kappa + \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \delta \sigma. \quad (12.2.60)$$

Согласно (12.2.57) — (12.2.59)

$$\delta \kappa = \frac{2V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}^2} \delta V_{\text{сф}}, \quad V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (12.2.61)$$

$$\delta \sigma = 2 \frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)}{V_{\text{сф}}} \left[\frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)}{V_{\text{сф}}^2} \delta V_{\text{сф}} - \frac{(\mathbf{j}_n, \delta \mathbf{V}_{\text{сф}})}{V_{\text{сф}}} \right]. \quad (12.2.62)$$

Подставляя (12.2.61) и (12.2.62) в (12.2.60), получим

$$\delta \Delta V = M(\kappa, \sigma) \delta V_{\text{сф}} + N(\kappa, \sigma) (\mathbf{j}_n, \delta \mathbf{V}_{\text{сф}}), \quad (12.2.63)$$

где коэффициенты $M(\kappa, \sigma)$ и $N(\kappa, \sigma)$ равны

$$M(\kappa, \sigma) = 2 \left[\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} \frac{V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}^2} + \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)^2}{V_{\text{сф}}^3} \right], \quad (12.2.64)$$

$$N(\kappa, \sigma) = -2 \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n)}{V_{\text{сф}}^2}, \quad (12.2.65)$$

или, с учетом (12.2.59),

$$M(\kappa, \sigma) = 2 \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} \frac{V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}^2} + \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{1 - \sigma}{V_{\text{сф}}} \right), \quad (12.2.66)$$

$$N(\kappa, \sigma) = -2 \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{V \sqrt{1 - \sigma}}{V_{\text{сф}}} \text{sign}(\mathbf{V}_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n). \quad (12.2.67)$$

Производные $\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa}$, $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma}$ на основании (10.2.29) равны

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} = \frac{V_{\text{кр}}^2}{2\Delta V} \left[1 - \frac{1}{2} V \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + \frac{4}{1 \mp \cos \beta}}} + \frac{1}{\kappa} \right) \right], \quad (12.2.68)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} = -\frac{V_{\text{кр}}^2}{4\Delta V} \frac{\sqrt{\kappa + \frac{4}{1 \mp \cos \beta}} + V\kappa}{V\sigma - \cos^2 \beta}, \quad (12.2.69)$$

где ΔV — импульс перехода на орбите ИС, а $\cos \beta = \cos \beta(\kappa, \sigma)$ определяется соотношением (10.2.32).

Так как

$$V_{\text{сф}}^2 = (V_{\text{сф}}, V_{\text{сф}}), \quad (12.2.70)$$

то

$$\delta V_{\text{сф}} = \frac{1}{V_{\text{сф}}} (V_{\text{сф}}, \delta V_{\text{сф}}). \quad (12.2.71)$$

Подстановка (12.2.71) в (12.2.63) дает

$$\delta \Delta V = \left(\frac{M}{V_{\text{сф}}} V_{\text{сф}} + N \mathbf{j}_n, \delta V_{\text{сф}} \right), \quad (12.2.72)$$

откуда окончательно получаем

$$\text{grad } \Delta V (V_{\text{сф}}) = M \frac{V_{\text{сф}}}{V_{\text{сф}}} + N \mathbf{j}_n. \quad (12.2.73)$$

В случае перелета сфера влияния — орбита ИС во всех приведенных соотношениях вместо $V_{\text{сф}}$ надо подставить $V_{\text{сф}}^+$, в случае перелета орбита ИС — сфера влияния — величину $V_{\text{сф}}^-$. Из (12.2.57) — (12.2.59), (12.2.66) — (12.2.69) и (10.2.29) следует, что при любых $\rho_{\text{сф}} = \text{const}$ и $\rho_{\text{сф}} = \infty$ M и N зависят только от κ и σ .

Рассмотрим частные случаи, в которых для величин (12.2.64), (12.6.65) и (12.2.73) могут быть получены простые явные выражения.

Если вектор $V_{\text{сф}}$ компланарен плоскости орбиты ИС ($\sigma = 1$), то оптимальным одноимпульсным переходом сфера влияния — орбита ИС является плоский перелет по гиперболе, перигеум которой совпадает с точкой перехода на орбите ИС (см. раздел 10.2.2). Характеристическая скорость этого перелета определяется соотношением (10.2.44). Поскольку в этом случае $(V_{\text{сф}}, \mathbf{j}_n) = 0$, из (10.2.44), (12.2.64) и (12.2.65) получаем

$$M(\kappa, \sigma = 1) = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa}} \frac{V_{\text{сф}}}{V_{\text{кр}}}, \quad (12.2.74)$$

$$N(\kappa, \sigma = 1) = 0. \quad (12.2.75)$$

Из (12.2.74), (12.2.57), (12.2.58) следует, что величина M при изменении ρ (и κ) в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно возрастает с увеличением ρ и заключена в пределах

$$M(\rho = 0, \sigma = 1) = 0 \leq M(\kappa, \sigma = 1) \leq 1 = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ (\kappa \rightarrow \infty)}} M(\kappa, \sigma = 1). \quad (12.2.76)$$

Условия (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41) и (12.2.42) в рассматриваемом случае записываются в виде

$$s_i^+ = M \frac{V_{\text{сф}}^-}{V_{\text{сф}}^+}, \quad i = 0, 2, \quad (12.2.77)$$

$$s_j^- = -M \frac{V_{\text{сф}}^+}{V_{\text{сф}}^-}, \quad j = 1, 3. \quad (12.2.78)$$

Из (12.2.76) — (12.2.78) получаем, что в случае плоских перелетов при $\rho < \infty$ на сферах влияния импульсы тяги отсутствуют, а при $\rho \rightarrow \infty$ условия (12.2.77), (12.2.78) соответствуют приложению импульса на сфере влияния (см. ниже). Отметим, что из полученного результата вытекает важнейший вывод о строгой локальной оптимальности кеплеровых двухимпульсных перелетов, в которых планетоцентрические гиперболы компланарны плоскостям орбит ИС (см. раздел 12.5.2).

Пусть теперь радиус орбиты ИС неограниченно возрастает, $\rho \rightarrow \infty$, что соответствует переходу между кеплеровой дугой перелета и орбитой планеты (см. раздел 5.1.2). Импульс скорости этого перехода равен

$$\Delta V = |\mathbf{V} - \mathbf{U}| = |\mathbf{V}_{\text{сф}}|, \quad (12.2.79)$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости аппарата на кеплеровой дуге в точке перехода. В результате имеем

$$\text{grad } \Delta V = \text{grad } |\mathbf{V}_{\text{сф}}| = \frac{\mathbf{V}_{\text{сф}}}{V_{\text{сф}}}. \quad (12.2.80)$$

Сравнивая (12.2.80) с (12.2.73), получаем

$$M = 1, \quad N = 0. \quad (12.2.81)$$

Формально этот результат может быть найден из соотношений (10.2.29), (10.2.30) при $\rho \rightarrow \infty$, $\kappa \rightarrow \infty$. В (10.2.29) относительная роль члена, связанного с σ , уменьшается и характеристическая скорость перелета стремится к характеристической скорости плоского перелета, для которого имеют место соотношения (12.2.74) — (12.2.76). Например, для перелета орбита Земли — орбита Марса (задача I) из (12.2.34), (12.2.35) и (12.2.77), (12.2.78)

имеем

$$s_0^+ = \frac{V_0 - U_{\oplus}}{|V_0 - U_{\oplus}|}, \quad s_1^- = -\frac{V_1 - U_{\delta}}{|V_1 - U_{\delta}|}. \quad (12.2.82)$$

Учитывая, что в точке схода с орбиты Земли импульс равен

$$\Delta V_0 = V_0 - U_{\oplus}, \quad (12.2.83)$$

а в точке перехода на орбиту Марса —

$$\Delta V_1 = U_{\delta} - V_1, \quad (12.2.84)$$

получаем

$$s_0^+ = \frac{\Delta V_0}{|\Delta V_0|}, \quad s_1^- = \frac{\Delta V_1}{|\Delta V_1|}, \quad (12.2.85)$$

что, очевидно, соответствует общему результату раздела 2.2.1 (см. (2.2.59), (2.2.60)).

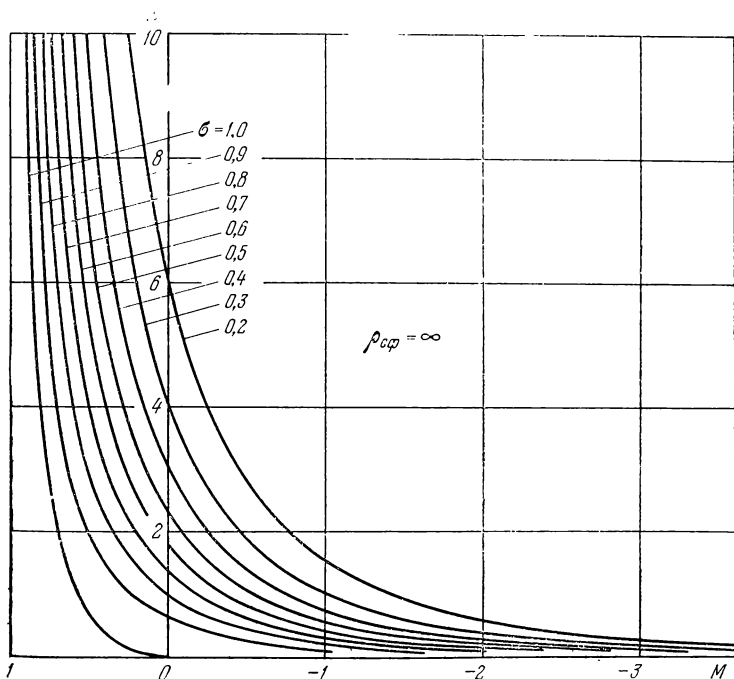


Рис. 12.2.1.

При $\rho_{сф} = \infty$, когда $\kappa = V_{сф}^2/V_{кр}^2$, можно, используя соотношения (12.2.66)–(12.2.69), (10.2.29), получить, что при $\kappa \rightarrow 0$ и $\sigma = \text{const} < 1$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} M(\kappa, \sigma) = -\infty, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} N(\kappa, \sigma) = +\infty. \quad (12.2.86)$$

Для приближенного вычисления и анализа функций M (12.2.66)

и N (12.2.67) можно воспользоваться зависимостью (10.2.62). Графики функций $M(\kappa, \sigma)$ и $N(\kappa, \sigma)$ при $\rho_{сф} = \infty$, $\text{sign}(V_{сф}, j_n) = 1$ показаны на рис. 12.2.1 и 12.2.2.

Покажем теперь, что при наличии оптимального импульса на сфере влияния планеты $\Delta V_{сф}$ условия (12.2.34), (12.2.35), (12.2.41), (12.2.42) переходят в (2.2.59), (2.2.60). Рассмотрим для

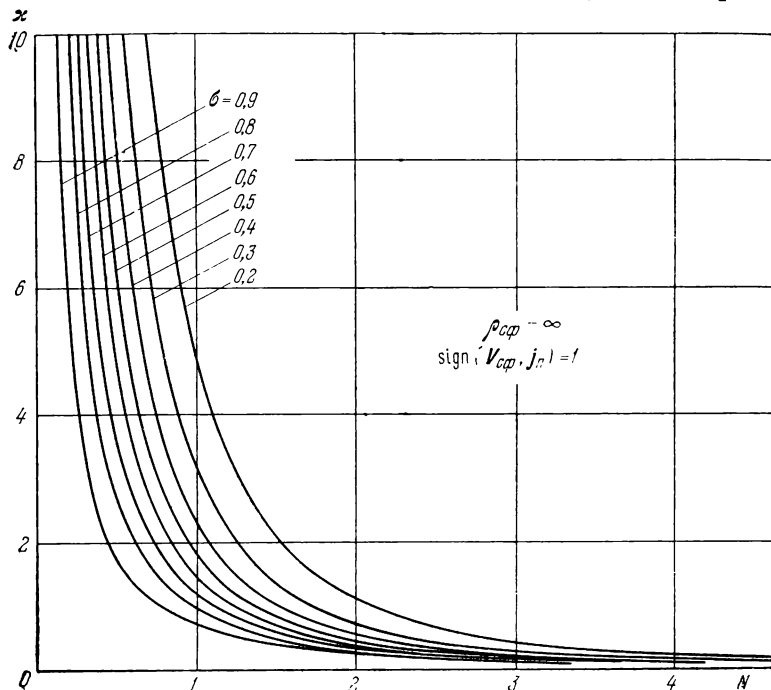


Рис. 12.2.2.

определенности выход на орбиту ИС в момент t_1 и соотношение (12.2.35). Оптимальная характеристическая скорость перехода сфера влияния — орбита ИС $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ (см. (10.3.11)) равна

$$\Delta V_{\Sigma \text{opt}} = \min_{\{v_{сф1}^+\}} [\Delta V(v_{сф1}^+) + \Delta V_{сф}]. \quad (12.2.87)$$

Дифференцируя (12.2.87) по $v_{сф1}^+$, получим

$$\text{grad } \Delta V(v_{сф1}^+) + \text{grad } \Delta V_{сф} = 0. \quad (12.2.88)$$

$$\{v_{сф1}^+\}$$

Но

$$\Delta V_{сф1} = v_{сф1}^+ - v_{сф1}^- \quad (12.2.89)$$

и

$$\text{grad } \Delta V_{\text{сф}1} = \frac{\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}}{\{\mathbf{v}_{\text{сф}1}^+\}}. \quad (12.2.90)$$

Подставляя (12.2.90) в (12.2.88), имеем

$$\text{grad } \Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) = - \frac{\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}}{\Delta V_{\text{сф}1}}. \quad (12.2.91)$$

Аналогично, в момент t_0

$$\text{grad } \Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-) = \frac{\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}0}}{\Delta V_{\text{сф}0}}. \quad (12.2.92)$$

Сопоставляя (12.2.92), (12.2.91) с (12.2.34), (12.2.35) соответственно, приходим к требуемому результату. Отметим, что полученный результат справедлив для любой оптимальной по $\mathbf{V}_{\text{сф}0}$ или $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+$ в том числе и многоимпульсной, схемы перехода орбиты ИС — сфера влияния планеты и для произвольной орбиты ИС, если под $\Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-)$, $\Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+)$ понимать соответствующую характеристическую скорость перехода.

Вариационный подход для решения краевой задачи оптимизации гелиоцентрического участка перелета между орбитами двух планет с учетом характеристической скорости планетоцентрических маневров использован в работах Гравье, Маршала, Калпа [4] и С. В. Дубовского [2]. Однако в отличие от проведенных выше рассматриваний, указанная характеристическая скорость учитывается в виде суммы двух импульсов, необходимых для разгона КА от местной параболической скорости до заданной скорости $V_{\text{сф}}$ на бесконечности и обратного перехода (с помощью соотношений аналогичных (5.1.24), (5.1.32)), и никак не связана со сходом КА с заданной орбиты ИС или выходом на нее.

12.2.3. Обоснование структуры функционала. Весь проведенный в разделе 12.2.2 анализ основан на возможности представления функционала в виде (12.2.1). Ввиду важности этого вопроса остановимся на нем подробнее. Рассмотрим в рамках МСВ задачу I. Пусть для заданных краевых условий оптимальная траектория найдена. Будем теперь вместо общей вариационной задачи решать вариационные задачи порознь для каждого из планетоцентрических и гелиоцентрического участков, беря в качестве краевых условий на сферах влияния фазовые координаты, полученные в «сквозном» оптимальном решении: $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{V}_1^+$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{V}_2^-$ для гелиоцентрического участка, $\boldsymbol{\rho}_1$, $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^-$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\mathbf{V}_{\text{сф}2}^+$ для планетоцентрических участков, где $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ — планетоцентрические векторы точек выхода и входа соответственно на сферы влияния, Γ_1 и Γ_2 определяются

соотношениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_\oplus(t_1) + \boldsymbol{\rho}_1, \quad (12.2.93)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_\oplus(t_2) + \boldsymbol{\rho}_2, \quad (12.2.94)$$

векторы $\mathbf{V}_{\text{сф}i}^+$ и $\mathbf{V}_i^-$ связаны соотношениями (12.2.5), (12.2.6). При выполнении указанных условий решение на каждом из участков будет совпадать с соответствующей частью сквозного решения. Очевидно, что при этом импульсы на сферах влияния $\Delta V_{\text{сф}i} = |\mathbf{V}_i^+ - \mathbf{V}_i^-|$, $i = 1, 2$, в функционале должны учитываться только один раз, их произвольно можно относить либо к гелиоцентрическому участку, либо к планетоцентрическим участкам.

Пусть теперь решение планетоцентрической задачи оптимизации может быть найдено для любых векторов $\boldsymbol{\rho}_1$, $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^-$ и $\boldsymbol{\rho}_2$, $\mathbf{V}_{\text{сф}2}^+$. В этом случае суммарные характеристические скорости перелетов орбита ИСЗ — сфера влияния Земли и сфера влияния планеты — орбита ИС без импульса на сфере влияния могут быть представлены в виде

$$\Delta V_1 = \Delta V_1(t_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{V}_{\text{сф}1}^-), \quad (12.2.95)$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_2(t_2, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{V}_{\text{сф}2}^+), \quad (12.2.96)$$

или, учитывая, что векторы каждой из пар $(t_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{V}_{\text{сф}1}^-)$ и $(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-)$, $(t_2, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{V}_{\text{сф}2}^+)$ и $(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_2^+)$ однозначно связаны друг с другом,

$$\Delta V_1 = \Delta V_1(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^-), \quad (12.2.97)$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_2(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_2^+). \quad (12.2.98)$$

Используя эти соотношения, можно варьирование траекторий на планетоцентрических участках при выводе условий оптимальности заменить вычислением вариаций $\delta \Delta V_1$ и $\delta \Delta V_2$ по векторам t_1 , $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{V}_1^-$ и t_2 , $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{V}_2^+$ соответственно. При этом в качестве краевых условий для гелиоцентрического участка надо брать векторы t_1 , $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{V}_1^-$ и t_2 , $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{V}_2^+$ и включать импульсы на сферах влияния в состав гелиоцентрических участков. Условие локальной оптимальности рассматриваемой траектории записывается в виде

$$\delta G = \delta \Delta V_1 + \delta \Delta V_2 + \delta q \geq 0, \quad (12.2.99)$$

где δq — вариация суммарной характеристической скорости на гелиоцентрическом участке (12.2.2). Но вариация (12.2.99), с учетом (12.2.2), (12.2.97) и (12.2.98), как раз соответствует функционалу (12.2.1).

Проведенные рассуждения показывают, что при применении МСВ вместо непосредственной «склейки» оптимальных траекто-

рий на планетоцентрических и гелиоцентрических участках можно решать задачу оптимизации на гелиоцентрическом участке с функционалом (12.2.1), учитывая вариации $\delta\Delta V_1$ и $\delta\Delta V_2$ в условиях трансверсальности, как это и сделано в разделе 12.2.2. При этом импульсы на сферах влияния надо интерпретировать как краевые гелиоцентрические импульсы.

Покажем теперь, что проведенные рассуждения остаются в силе и для ММСВ. Для этого покажем сначала, что если в ММСВ траектории перелета соответствует импульс на сфере влияния, то этот же импульс получается и в МСВ, и наоборот. Пусть во внутренней задаче ММСВ при радиусе сферы влияния $\rho_{сф} = \infty$ оптимальной траектории соответствует импульс на сфере влияния. Будем теперь рассматривать внутреннюю задачу оптимизации при конечном, но достаточно большом значении $\rho_{сф}$. Поскольку при отличной от нуля планетоцентрической скорости на бесконечности ($\rho_{сф} = \infty$) движение аппарата на достаточно большом удалении от планеты происходит практически прямолинейно и равномерно, краевые условия на сфере влияния при $\rho_{сф} < \infty$ будут очень близки к соответствующим условиям при $\rho_{сф} = \infty$. Поэтому решения задач оптимизации при $\rho_{сф} = \infty$ и $\rho_{сф} < \infty$ будут близки между собой, при этом импульс из бесконечности сместится на сферу влияния, а остальные векторы импульсов, в частности импульс перехода на орбите ИС, незначительно изменятся. Если изменять $\rho_{сф}$ в области значений, где движение аппарата носит указанный выше асимптотический характер, то описанная картина изменения импульсов сохранится. Из сказанного следует, что наличие импульса на сфере влияния планеты во внутренней задаче ММСВ или МСВ не зависит от величины $\rho_{сф}$ и одновременно имеет место в ММСВ и МСВ.

Пусть теперь в рамках МСВ рассматривается «сквозная» задача оптимизации перелета. В этом случае при переходе через сферу влияния меняются скачком правые части уравнений движения, однако, поскольку поверхность разрыва (сфера влияния) не зависит от вектора скорости аппарата, можно, используя результаты работ Брайсона, Хо Ю-ши [1], В. А. Троицкого [2, 3], показать, что при переходе через сферу влияния вектор $s(t)$ непрерывен, а вектор $p(t)$ и гамильтониан $H(t)$ в общем случае разрывны (Глэндорф [2], В. В. Ивашкин [4]). Если условия подлета аппарата к сфере влияния или отлета от нее таковы, что требуют приложения импульса на сфере влияния, то в момент перехода через сферу влияния функция $s(t) = 1$ и непрерывна. Следовательно, в соответствии со сказанным выше, импульс на сфере влияния во внутренней задаче можно считать импульсом, сообщаемым аппарату в крайней точке гелиоцентрического участка. Схема изменения функции $s(t)$ по времени, построенная на основании данных разделов 10.4.3 и 12.5.2, для трехимпульсного пере-

лета орбита ИСЗ — орбита ИС планеты с импульсом на сфере влияния планеты показана на рис. 12.2.3, где моменты времени соответствуют: t_1^- — старту с орбиты ИСЗ, t_1^+ , t_2^- — пересечению сфер влияния Земли и планеты, t_2^+ — выходу на орбиту ИС планеты.

Будем теперь рассматривать эту же задачу при различных радиусах сфер влияния планет $\rho_{сф 1}$ и $\rho_{сф 2}$. При изменении $\rho_{сф 1}$

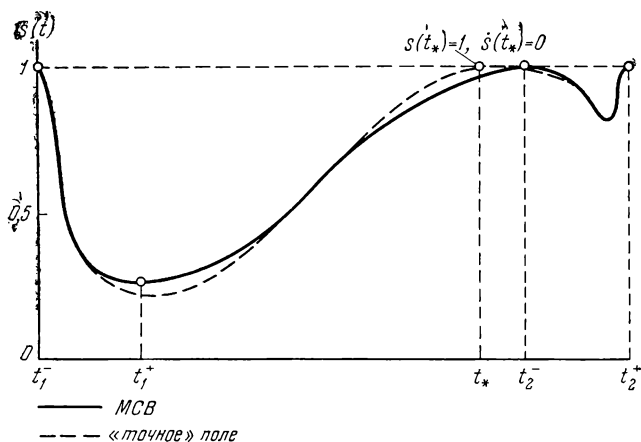


Рис. 12.2.3.

и $\rho_{сф 2}$ в области значений, где движение аппарата носит асимптотический характер, решение внутренней задачи будет незначительно деформироваться. Одновременно при изменении $\rho_{сф 1}$ и $\rho_{сф 2}$ от этих значений до нуля будет незначительно деформироваться решение задачи на гелиоцентрическом участке. Следовательно, при всех указанных значениях $\rho_{сф 1}$ и $\rho_{сф 2}$ схема перелета будет оставаться неизменной, поэтому при переходе от ММСВ к МСВ и обратно схема перелета остается одной и той же. Из проведенных рассуждений следует также, что при применении ММСВ, как и МСВ, задачу оптимизации перелета можно решить с помощью функционала (12.2.1), «склеивая» решения на гелиоцентрическом и планетоцентрическом участках при помощи условий трансверсальности.

Пусть теперь задача I решается в «точном» гравитационном поле (см. раздел 1.1.2). В этом случае сфере влияния планеты соответствует некоторая переходная область. Отличие «точной» оптимальной траектории от кеплеровых дуг в МСВ и соответствующих решений сопряженной системы друг от друга оказываются незначительным и сосредоточено в основном в промежуточной области. Поэтому, если импульс скорости на сфере влияния присут-

ствовал в МСВ, то при «точном» решении ему должен соответствовать импульс скорости в некоторой точке промежуточной области. При этом, вследствие непрерывности и непрерывной дифференцируемости правых частей системы уравнений движения, в точке приложения импульса в промежуточной области $s(t_*)=1$, $\dot{s}(t_*)=0$ (см. рис. 12.2.3).

Полученные результаты справедливы, если векторы $V_{сф1}^+$ и $V_{сф2}^-$ таковы, что определяют одно- или двухимпульсный перелет внутри соответствующих областей на рис. 10.3.5, так что малые деформации траекторий не выводят их из соответствующих областей. Если же векторам $V_{сф1}^+$ или $V_{сф2}^-$ на рис. 10.3.5 соответствует точка вблизи граничной кривой, то при переходе от МСВ к ММСВ и наоборот импульс на сфере влияния может появляться или пропадать. Заметим, однако, что, поскольку вблизи граничной кривой импульс на сфере влияния мал, фазовые и сопряженные переменные для ММСВ и МСВ по-прежнему отличаются незначительно. Все описанное выше остается в силе и для других задач оптимизации, рассмотренных в разделах 12.2.1, 12.2.2.

§ 12.3. Методы расчета оптимальных перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля с минимальным числом импульсов

Задачи Ia, IIa, IIIa объединяет отсутствие промежуточных импульсов на гелиоцентрических участках, в результате чего перелеты между сферами влияния планет происходят по кеплеровым дугам.

С методической точки зрения исследование и расчет оптимальных перелетов целесообразно разделить на две части. Сначала в предположении, что орбиты планет находятся в плоскости эклиптики и круговые, проводится подробное исследование оптимальных перелетов в упрощенной постановке, а затем, с использованием результатов этого исследования, рассматриваются оптимальные перелеты с учетом эллиптичности и наклона орбит. Такой подход целесообразен также и потому, что решение задачи в рамках плоской круговой модели позволяет представить основные параметры оптимальных перелетов в универсальном виде, в частности, не связывать их с конкретными датами старта с Земли. При этом существенным образом используется близость характеристик перелетов для пространственной эллиптической и плоской круговой моделей движения планет. Непосредственные численные оценки, приведенные в § 12.4, показывают, что такая близость для оптимальных перелетов практически всегда имеет место.

12.3.1. Оптимизация перелетов без учета эллиптичности и наклона орбит планет. (В. А. Ильин, Н. А. Истомин, 1963 г.). В этом разделе задачи о перелетах будем рассматривать в рамках

общих предположений $1^\circ - 5^\circ$, сделанных в начале раздела 12.2.1, при этом дополнительно примем, что:

а°. Планеты движутся по круговым орбитам, лежащим в плоскости эклиптики.

б°. Гелиоцентрическая траектория аппарата лежит в этой же плоскости.

в°. Начальная и конечная орбиты ИСЗ считаются эллиптическими с заданными высотами перицентра $H_{пф}$ и апоцентра $H_{аф}$. Плоскости орбит ИСЗ компланарны соответствующим векторам $V_{сф\ i}$, $i = 0, 3$, ориентация линии апсид орбиты ИСЗ не задана. Орбита ИС планеты назначения считается круговой, лежащей в плоскости эклиптики. Параметры этой орбиты в момент выхода на нее и схода с нее остаются одними и теми же.

г°. Для разгона и торможения у Земли и планеты назначения аппарату в оптимальных точках на орбитах ИС планет сообщаются импульсы скорости. Импульсы скорости на гелиоцентрических участках, включая импульсы на сферах влияния, отсутствуют.

Кроме того, на протяжении большей части этого раздела в качестве планеты назначения рассматривается внешняя по отношению к Земле планета. Для определенности и удобства индексации будем рассматривать перелет Земля — Марс — Земля. Задача о перелете с Земли на внутренние планеты (Венеру, Меркурий) рассмотрена в конце раздела, где она сведена к задаче о перелете на внешнюю планету. Основное внимание уделяется задаче IIа, задача Ia кратко рассмотрена в конце раздела.

Остановимся подробнее на пунктах в° и г°. Прежде всего проанализируем предположение о неизменности параметров орбиты ИСМ в момент выхода на нее и схода с нее. Известно, что за счет эволюции вследствие нецентральности поля тяготения в окрестности планеты орбита ИС будет деформироваться. Если даты t_1 и t_2 заданы, то эта эволюция может быть, вообще говоря, определена и заранее учтена в постановке задачи IIа. Однако если даты t_1 и t_2 не заданы, а варьируются в процессе оптимизации перелета и параметры орбиты ИС не определяются заранее, а подбираются в процессе решения задачи оптимизации, то на начальном этапе целесообразно пренебречь деформацией орбиты ИСМ. Такое предположение соответствует малым временам ожидания у планеты назначения. В случае необходимости учет деформации орбиты ИСМ при больших временах ожидания можно осуществить, например, путем непрерывного увеличения времени ожидания и использования при каждом новом значении времени ожидания в качестве начального приближения деформации, найденной для предыдущего значения времени ожидания. Поэтому в дальнейшем деформация орбиты ИС у планеты назначения не учитывается.

Как показано в разделе 5.1.2, в случае незаданной ориентации большой оси орбиты ИС оптимальным одноимпульсным плоским

переходом между орбитой ИС и сферой влияния является переход с импульсом в перигентре орбиты ИС. При этом перигентр гиперболы и ее действительная ось совпадают с перигентром и осью апсид орбиты ИС соответственно. Согласно ММСВ планетоцентрическое движение определяется после решения внешней задачи. Пусть в результате ее решения найдены векторы $V_{сф\ i}$, $i=0, 1, 2, 3$. Тогда планетоцентрические гиперболы находятся по заданным высотам перигентров орбит ИС $H_{\pi i}$, $i=0, 1, 2, 3$, и векторам $V_{сф\ i}$. Но в этом случае векторы $V_{сф\ 1}$ и $V_{сф\ 2}$ задают два, вообще говоря, различных направления линии апсид орбиты ИСМ в моменты t_1

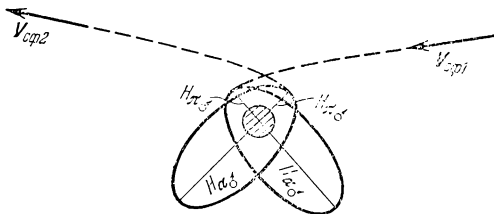


Рис. 12.3.1.

и t_2 (рис. 12.3.1). Поскольку линии апсид орбиты ИСМ в моменты t_1 и t_2 связаны друг с другом определенным образом, например, в простейшем случае должны совпадать, это приводит к дополнительной сложной связи, накладываемой на векторы $V_{сф\ 1}$ и $V_{сф\ 2}$. Возникающие здесь вопросы (выбор размеров и ориентации орбиты ИСМ, учет эволюции орбиты ИСМ и возможных корректирующих маневров в период ожидания на орбите ИСМ и т. п.) выходят за рамки проводимого рассмотрения. Некоторые из них проанализированы в монографии Ц. В. Соловьева, Е. В. Тарасова [4]. В случае же круговой орбиты ИСМ, вследствие неопределенности положения ее линии апсид, указанная связь между векторами $V_{сф\ 1}$ и $V_{сф\ 2}$ отсутствует. Кроме того, как было показано в разделе 10.2.4, для оценки характеристической скорости одноимпульсного перехода сфера влияния — орбита ИС эллиптическую орбиту ИС можно заменить круговой с радиусом, равным фокальному параметру эллиптической орбиты.

Из сказанного и предположения б° следует также, что орбита ИСМ должна лежать в плоскости эклиптики. Что касается орбит ИСЗ, то их плоскости, при условии компланарности векторам $V_{сф\ i}$, $i=0, 3$, могут быть произвольно ориентированы в пространстве.

Общая схема четырехимпульсного перелета к планете Солнечной системы с возвращением к Земле приведена на рис. 12.3.2 ($0'$, $1'$, $2'$ соответствуют моментам нахождения КА в точках $0, 1, 2$).

Маршруты перелета Земля — планета — Земля в дальнейшем обозначаются двумя буквами, каждая из которых означает маршрут перелета между двумя гелиоцентрическими радиусами-векторами (см. раздел 5.1.3), причем на первом месте ставится буква, соответствующая перелету Земля — планета. Согласно сказанному в разделе 5.1.3, в общем случае число различных маршрутов перелета равно двенадцати и состоит (рис. 12.3.3) из четырех одноименных маршрутов

$$AA, BB, CC, DD$$

и двенадцати разноименных маршрутов

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD,$$

$$BA, CA, DA, CB, DB, DC.$$

Если для торможения аппарата при подлете к планете или Земле не используется атмосфера планеты (см. раздел 12.3.3), то

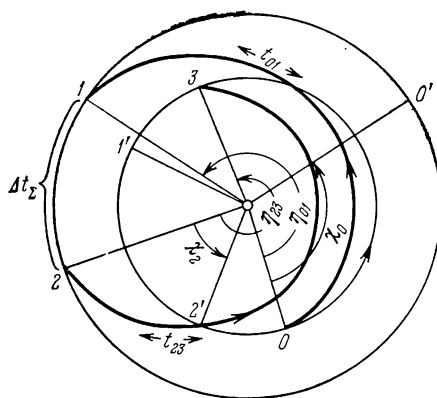


Рис. 12.3.2.

очевидно, что перелеты, отличающиеся только перестановкой первой и второй буквы, по существу представляют один тип перелета и с точки зрения основных характеристик неразличимы. Отметим, что это положение справедливо только для плоской круговой модели. Учет эллиптичности и наклона приводит к тому, что каждому «плоскому круговому» перелету соответствуют два «пространственных эллиптических» перелета, несколько отличающихся по своим характеристикам (см. разделы 12.3.2, 12.4.1, 12.4.2).

Точно так же, если для торможения аппарата используется, например, атмосфера Земли, то такие перелеты уже существенно отличаются друг от друга (см. разделы 12.3.3, 12.4.3).

Для перелета Земля — планета по заданной кеплеровой дуге Земля и планета назначения в начальный момент времени должны занимать вполне определенные положения на своих орбитах. Аналогичная ситуация возникает и при обратном перелете планета — Земля. Но из этого следует, что для возвращения аппарата к Земле он должен провести некоторое вполне определенное время ожидания Δt_z на орбите ИС планеты назначения, в течение которого Земля и планета образуют конфигурацию, требуемую для реализации обратного перелета.

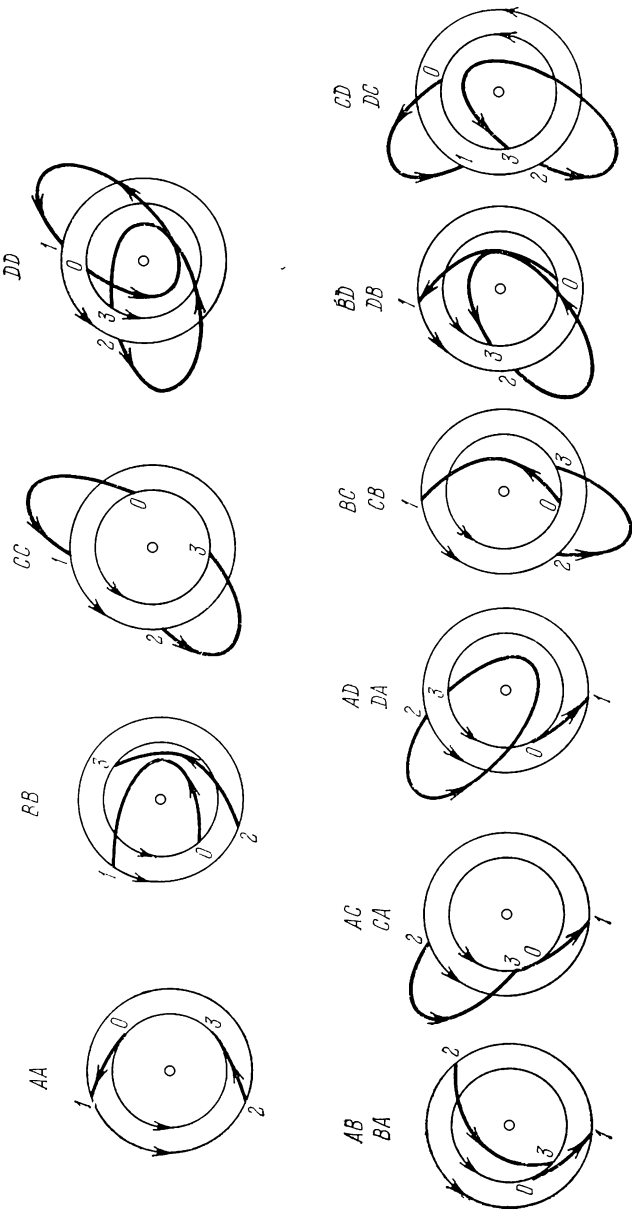


Рис. 12.3.3.

Полный угол поворота радиуса-вектора аппарата относительно Солнца равен (см. рис. 12.3.2)

$$\eta_{01} + \eta_{23} + \omega_1 \Delta t_{\Sigma}, \quad (12.3.1)$$

где η_{01} , η_{23} — гелиоцентрические угловые дальности перелета Земли — планета и планета — Земля соответственно, ω_1 — среднее движение планеты назначения, Δt_{Σ} — время ожидания на орбите ИС. За это же время Земля сместится на угол

$$\omega_0 T_{\Sigma} = \omega_0 (t_{01} + t_{23} + \Delta t_{\Sigma}), \quad (12.3.2)$$

где ω_0 — среднее движение Земли, T_{Σ} — продолжительность космической экспедиции. Условие возврата аппарата к Земле в точке 3 записывается в виде

$$\eta_{01} + \eta_{23} + \omega_1 \Delta t_{\Sigma} = \omega_0 (t_{01} + t_{23} + \Delta t_{\Sigma}) + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (12.3.3)$$

где величина $+2\pi k$ учитывает различие в числе полных гелиоцентрических оборотов КА и Земли, откуда время ожидания

$$\Delta t_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_0 t_{\Sigma}}{\omega_0 - \omega_1} + k T_{\text{син}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (12.3.4)$$

где

$$\eta_{\Sigma} = \eta_{01} + \eta_{23}, \quad (12.3.5)$$

$$t_{\Sigma} = t_{01} + t_{23} \quad (12.3.6)$$

и

$$T_{\text{син}} = 2\pi / |\omega_0 - \omega_1| \quad (12.3.7)$$

— синодический период обращения планеты.

Из смысла величины Δt_{Σ} следует, что $0 \leq \Delta t_{\Sigma} \leq T_{\text{син}}$, поскольку в течение указанного периода обязательно наступит момент, «благоприятный» для обратного перелета. При перелете на внешнюю планету КА в среднем в своем гелиоцентрическом движении отстает от Земли, поэтому $k \geq 0$ (см. раздел 12.4.1), а при перелете на внутреннюю планету — обгоняет Землю, поэтому $k \leq 0$ (см. раздел 12.4.2). Практически всегда $|k| \leq 1$. Из (12.3.4) следует

$$T_{\Sigma} = t_{\Sigma} + \Delta t_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_1 t_{\Sigma}}{\omega_0 - \omega_1} + k T_{\text{син}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (12.3.8)$$

Углы между Землей и планетой в моменты отлета с Земли χ_0 и с планеты χ_2 равны (см. рис. 12.3.2)

$$\chi_0 = \eta_{01} - \omega_1 t_{01}, \quad \chi_2 = \eta_{23} - \omega_0 t_{23}, \quad (12.3.9)$$

причем для определенности удобно считать $0 \leq \chi_0, \chi_2 \leq 360^\circ$.

Поскольку каждому моменту времени (внутри периода длиной $T_{\text{син}}$) соответствует вполне определенное взаимное угловое положение планет, то задание величины χ_0 приближенно (с точностью до допущений, принятых относительно гелиоцентрического движения планет) определяет дату начала перелета (см. раздел 12.3.2). Последующее календарное «расписание» движения аппарата получается по известным значениям t_{01} , Δt_{Σ} и t_{23} . Однако при рассмотрении «плоских круговых» перелетов дата старта может быть исключена из рассмотрения, а связь между данным перелетом и календарными датами для моментов 0, 1, 2 и 3 может быть установлена непосредственно при решении задачи для пространственной эллиптической модели. Таким образом, наличие угловой симметрии в упрощенной постановке сообщает всем результатам «универсальность», в то время как решение задачи с учетом эллиптичности и наклона всегда «привязано» к конкретным датам.

Всюду в дальнейшем все линейные величины относим к среднему радиусу орбиты Земли $r_{\oplus}$, а скорости — к средней орбитальной скорости Земли $U_{\oplus}$. Остальные безразмерные величины вводим в соответствии с общими соотношениями (1.2.8).

Кеплеровы дуги перелетов Земля — планета и планета — Земля полностью определяются заданием эксцентриситетов и фокальных параметров (безразмерных) e_{01} , p_{01} и e_{23} , p_{23} соответственно.

Соотношения (12.3.4) и (12.3.8) для дальнейших рассмотрений удобно представить в виде

$$\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{01}(p_{01}, e_{01}) + \Delta t_{23}(p_{23}, e_{23}) + kT_{\text{син}}, \quad (12.3.10)$$

$$T_{\Sigma} = T_{01}(p_{01}, e_{01}) + T_{23}(p_{23}, e_{23}) + kT_{\text{син}}, \quad (12.3.11)$$

где Δt_{01} , Δt_{23} и T_{01} , T_{23} совпадают, соответственно, с первыми членами правых частей равенств (12.3.4) и (12.3.8) с заменой индекса Σ на 01 или 23.

При заданных p , e определяется вектор $V_{\text{сф}}$ на сфере влияния планеты и с помощью соотношений, приведенных в разделе 5.1.2, — импульс ΔV на орбите ИС. Характеристическую скорость перелета орбита ИСЗ — орбита ИСМ можно записать в виде

$$G_{01} \equiv \Delta V_{01}(p_{01}, e_{01}) = \Delta V_0(p_{01}, e_{01}) + \Delta V_1(p_{01}, e_{01}), \quad (12.3.12)$$

и аналогично для перелета орбита ИСМ — Земля

$$G_{23} \equiv \Delta V_{23}(p_{23}, e_{23}) = \Delta V_2(p_{23}, e_{23}) + \Delta V_3(p_{23}, e_{23}), \quad (12.3.13)$$

где ΔV_i , $i = 0, 1, 2, 3$, — импульсы на орбитах ИСЗ ($i = 0, 3$) и ИСМ ($i = 1, 2$).

Задачу IIa об оптимальных перелетах Земля — планета — Земля можно сформулировать теперь следующим образом:
при заданной продолжительности перелета аппарата

$$T_{\Sigma} = T_{01}(p_{01}, e_{01}) + T_{23}(p_{23}, e_{23}) + kT_{\text{син}} = \text{const} = T_{\Sigma}^* \quad (12.3.14)$$

и при условии, что КА остается на орбите ИСМ в течение заданного времени

$$\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{01}(p_{01}, e_{01}) + \Delta t_{23}(p_{23}, e_{23}) + kT_{\text{син}} = \text{const} = \Delta t_{\Sigma}^*, \quad (12.3.15)$$

найти такое сочетание маршрутов перелета «туда» и «обратно» и такие параметры соответствующих кеплеровых дуг (p_{01}, e_{01}) и (p_{23}, e_{23}) , для которых суммарная характеристическая скорость была бы минимальна:

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{01}(p_{01}, e_{01}) + \Delta V_{23}(p_{23}, e_{23}) \Rightarrow \min. \quad (12.3.16)$$

Отметим, что соотношения (12.3.14) — (12.3.16) симметричны относительно индексов 01 и 23. Поэтому, если для поставленной задачи расписать необходимые условия экстремума, то симметричные перелеты, состоящие из двух одинаковых кеплеровых дуг перелета Земля — планета и планета — Земля, всегда удовлетворяют условиям стационарности. Однако, как показывает анализ, оптимальные четырехимпульсные перелеты Земля — планета — Земля оказываются в подавляющем большинстве несимметричными (см. разделы 12.4.1 и 12.4.2). В этом случае решение задачи IIa может быть получено лишь численно с помощью ЭЦВМ.

Оно сводится к решению систем трансцендентных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} T_{01}(p_{01}, e_{01}) &= \text{const} = T_{01}^*, \\ \Delta t_{01}(p_{01}, e_{01}) &= \text{const} = \Delta t_{01}^*, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.17a)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{23}(p_{23}, e_{23}) &= T_{\Sigma}^* - T_{01}^* - kT_{\text{син}}, \\ \Delta t_{23}(p_{23}, e_{23}) &= \Delta t_{\Sigma}^* - \Delta t_{01}^* - kT_{\text{син}} \end{aligned} \right\} \quad (12.3.17b)$$

с последующим поиском минимума функции

$$\begin{aligned} \Delta V_{\Sigma}(T_{01}^*, \Delta t_{01}^*) &= \Delta V_{01}(T_{01}^*, \Delta t_{01}^*) + \\ &+ \Delta V_{23}(T_{\Sigma}^* - T_{01}^* - kT_{\text{син}}, \Delta t_{\Sigma}^* - \Delta t_{01}^* - kT_{\text{син}}). \end{aligned} \quad (12.3.18)$$

Преобразуем задачу к такому виду, при котором необходимость в решении систем сложных трансцендентных уравнений вида (12.3.17) полностью отпадает. Рассматривая на основании (12.3.4) и (12.3.8) два соотношения (12.3.14) и (12.3.15) как систему ли-

нейных уравнений относительно η_Σ и t_Σ , можно всегда (определи-
тель системы $\Delta = 1/(\omega_0 - \omega_1) \neq 0$) заданным Δt_Σ^* , T_Σ^* поста-
вить в соответствие η_Σ^* , t_Σ^* по формулам

$$\eta_\Sigma^* = \omega_0 T_\Sigma^* - \omega_1 \Delta t_\Sigma^* - 2\pi k, \quad t_\Sigma^* = T_\Sigma^* - \Delta t_\Sigma^*. \quad (12.3.19)$$

Таким образом, система двух равенств (12.3.14) и (12.3.15) экви-
валентна системе равенств

$$\left. \begin{aligned} \eta_\Sigma &= \eta_{01} + \eta_{23} = \text{const} = \eta_\Sigma^*, \\ t_\Sigma &= t_{01} + t_{23} = \text{const} = t_\Sigma^*, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.20)$$

а изопериметрическая задача IIIa (12.3.14) — (12.3.16) — задаче

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_\Sigma &= \Delta V_{01} + \Delta V_{23} \Rightarrow \min, \\ \eta_\Sigma &= \eta_{01} + \eta_{23} = \eta_\Sigma^*, \\ t_\Sigma &= t_{01} + t_{23} = t_\Sigma^*. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.21)$$

Но последняя, опять-таки на основании свойства взаимности изо-
периметрических задач, эквивалентна задаче, определяемой следу-
ющей системой соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_\Sigma &= \Delta V_{01} + \Delta V_{23} = \Delta V_\Sigma^*, \\ \eta_\Sigma &= \eta_{01} + \eta_{23} = \eta_\Sigma^*, \\ t_\Sigma &= t_{01} + t_{23} \Rightarrow \text{extr}, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.22)$$

где смысл экстремума t_Σ может быть установлен на основании
анализа свойств конкретных семейств перелетов Земля — плане-
та — Земля (см. ниже и § 12.4).

Определение перелетов, удовлетворяющих двум первым усло-
виям (12.3.22), сводится к нахождению корней системы уравне-
ний

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{01}(p_{01}, e_{01}) &= \Delta V_{01}^*, & \Delta V_{23}(p_{23}, e_{23}) &= \Delta V_\Sigma^* - \Delta V_{01}^*, \\ \eta_{01}(p_{01}, e_{01}) &= \eta_{01}^*, & \eta_{23}(p_{23}, e_{23}) &= \eta_\Sigma^* - \eta_{01}^*. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.23)$$

Но на основании соотношений (5.1.37) и (5.1.64) корни этой
системы находятся среди корней уравнения четвертой степени от-
носительно $p^{1/2}$:

$$(a_2 - b_2)p^2 + a_{3/2}p^{3/2} + (a_1 - b_1)p + 1 - b_0 = 0. \quad (12.3.24)$$

Используя для решения уравнения (12.3.24) один из регуля-
рных методов, например метод Феррари (см. А. К. Сушкевич [1]),
сразу же можно найти p_{ij} ($ij = 01, 23$) и, следовательно, e_{ij} , удов-
летворяющие двум первым условиям (12.3.22).

Область допустимых значений p_{ij} , e_{ij} ($ij = 01, 23$) определяется неравенствами (5.1.4), (5.1.5) и для перелета Земля — Марс показана на рис. 5.1.2. Отбор корней уравнения (12.3.24), имеющих физический смысл, производится при помощи следующих критериев, полученных на основе рассмотрения свойств изоэнергетических $\Delta V_{ij} = \text{const}$ (см. раздел 5.1.2) и изогональных $\eta_{ij} = \text{const}$ (см. раздел 5.1.3) линий на плоскости параметров p , e (рис. 12.3.4)*.

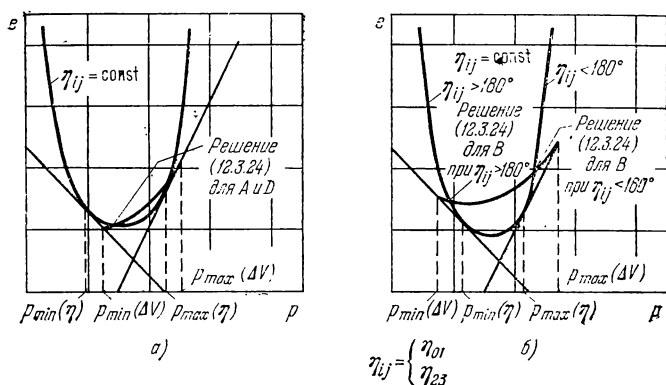


Рис. 12.3.4.

Маршруты A и D (рис. 12.3.4, а):

$$\max\{p_{\min}(\Delta V), p_{\min}(\eta)\} \leq p \leq \min\{p_{\max}(\Delta V), p_{\max}(\eta)\}. \quad (12.3.25)$$

Маршрут B (рис. 12.3.4, б):

$$\text{а) } \arccos \frac{1}{n} \leq \eta_{ij} < 180^\circ, \quad p_{\max}(\eta) \leq p \leq p_{\max}(\Delta V); \quad (12.3.26)$$

$$\text{б) } 180^\circ < \eta_{ij} < 360^\circ, \quad p_{\min}(\Delta V) \leq p \leq p_{\min}(\eta). \quad (12.3.27)$$

Маршрут C:

Для $0 \leq \eta_{ij} < 180^\circ$ ограничение на p совпадает с (12.3.27), а для $180^\circ < \eta_{ij} \leq 360^\circ - 2 \arccos \sqrt{1/n}$ — с (12.3.26).

Перелет с угловой дальностью $\eta_{ij} = 180^\circ$ является особым; для него $p = p_{\text{гом}}$ (см. раздел 5.1.3, соотношения (5.1.68), (5.1.81)).

*) Приведенные критерии справедливы при $n > 1$, т. е. для перелетов на внешние планеты Солнечной системы. При исследовании перелетов на внутренние планеты для сохранения излагаемой методики без изменений удобно рассматривать «обращенные» перелеты внутренняя планета — Земля (см. § 5.1).

В этом случае маршрутам A и D соответствует гомановский перелет. Эксцентриситеты кеплеровых дуг маршрутов B и C находятся путем подстановки значения $p = p_{\text{гом}}$ в уравнение изоэнергетических линий $\Delta V_{ij} = \text{const}$ (5.1.37).

Из вида графиков рис. 12.3.4 следует, что для маршрутов B и C при $\Delta V_{ij} = \text{const}$, $\eta_{ij} = \text{const}$ определяется не более одного перелета, а для A и D — не более двух.

Решая уравнения (12.3.23) при заданных ΔV_{Σ}^* , η_{Σ}^* , представим t_{Σ} в виде функции ΔV_{01}^* , η_{01}^* :

$$t_{\Sigma}(\Delta V_{01}^*, \eta_{01}^*) = t_{01}(\Delta V_{01}^*, \eta_{01}^*) + t_{23}(\Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_{01}^*, \eta_{\Sigma}^* - \eta_{01}^*). \quad (12.3.28)$$

Далее определение оптимального перелета сводится к нахождению известными методами на плоскости $(\Delta V_{01}, \eta_{01})$ точки, в которой t_{Σ} (12.3.28) достигает соответствующего экстремума.

Оценки показывают, что для расчета одного варианта оптимального перелета проведенное преобразование снижает затраты машинного времени по сравнению с решением задачи в рамках исходной постановки не менее чем на один-два порядка.

Основная трудность, связанная с использованием системы (12.3.22), — необходимость установления того, какой именно экстремум — $\max$ или $\min$ — следует приписать t_{Σ} .

Сформулируем следующий простой признак установления смысла экстремума при изопериметрическом переходе:

Экстремальная изопериметрическая задача

$$(x = \text{const}, \quad y \Rightarrow \text{extr}) \quad (12.3.29)$$

переходит в задачу

$$(x \Rightarrow -\text{extr}, \quad y = \text{const}), \quad (12.3.30)$$

если во всем диапазоне изменения функции x на найденной экстремали задачи (12.3.29) $y = y(x)$ $\frac{dy}{dx} > 0$. Если же на экстремали

$\frac{dy}{dx} < 0$, то задача (12.3.29) переходит в задачу

$$(x \Rightarrow \text{extr}, \quad y = \text{const}). \quad (12.3.31)$$

Для доказательства рассмотрим экстремаль задачи $(x = \text{const}, y \Rightarrow \min)$, для которой $\frac{dy}{dx} > 0$ (рис. 12.3.5, a).

В этом случае множество значений функции y при $x = \text{const}$ расположено выше экстремали $y \Rightarrow \min$ (соответствующая область на рис. 12.3.5, a заштрихована). Но из этого сразу же следует, что при $y = \text{const}$ точки экстремали соответствуют условию $x \Rightarrow \max$. Аналогично рассматриваются остальные случаи (рис. 12.3.5, $b, в, г$).

Применим полученные результаты к рассматриваемой задаче. На оптимизации перелета Земля — внешняя планета — Земля. Из физических соображений ясно, что при $\Delta V_{\Sigma} = \text{const}$ для оптимальных перелетов t_{Σ} монотонно растет с ростом η_{Σ} (рис. 12.3.6, а).

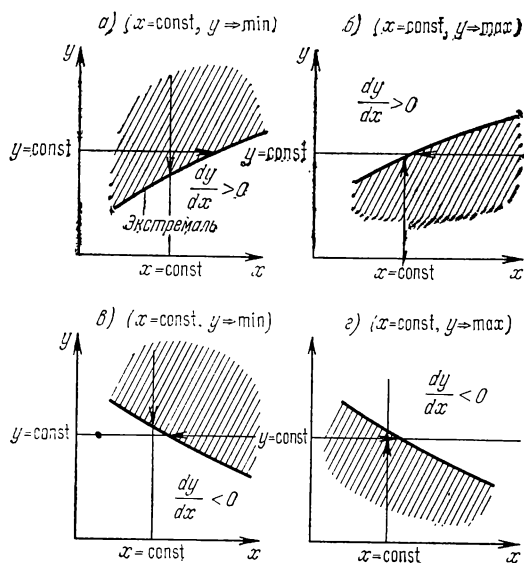


Рис. 12.3.5.

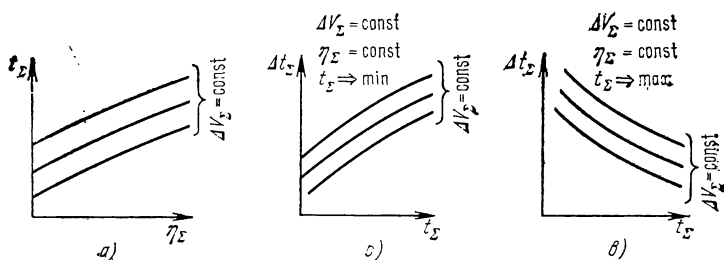


Рис. 12.3.6.

(это непосредственно подтверждается и расчетами, см. раздел 12.4.1). Предположим, что в задаче (12.3.22)

$$t_{\Sigma} = t_{01} + t_{23} \Rightarrow \min. \quad (12.3.32)$$

В этом случае при $t_{\Sigma} = \text{const}$ на основании сформулированного признака, поскольку $\frac{\partial t_{\Sigma}}{\partial \eta_{\Sigma}} > 0$, решается задача

$$(\Delta V_{\Sigma}, t_{\Sigma}, \eta_{\Sigma} \Rightarrow \max). \quad (12.3.33)$$

Но тогда из (12.3.4) и (12.3.8) следует, что при $\Delta V_{\Sigma} = \text{const}$, $t_{\Sigma} = \text{const}$ решаются задачи

$$(\Delta V_{\Sigma}, t_{\Sigma}, T_{\Sigma} \Rightarrow \max) \quad (12.3.34)$$

или

$$(\Delta V_{\Sigma}, t_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma} \Rightarrow \max). \quad (12.3.35)$$

Вернемся к исходной задаче, которая, как это ясно из физических соображений, эквивалентна задаче

$$(\Delta V_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma}, T_{\Sigma} \Rightarrow \min). \quad (12.3.36)$$

Поскольку

$$T_{\Sigma} = t_{\Sigma} + \Delta t_{\Sigma},$$

то исходная задача эквивалентна задаче

$$(\Delta V_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma}, t_{\Sigma} \Rightarrow \min). \quad (12.3.37)$$

Сравнивая (12.3.37 и (12.3.35) и снова применяя полученный выше признак, приходим к следующему выводу: для того чтобы задача (12.3.22) решалась для $t_{\Sigma} \Rightarrow \min$, необходимо и достаточно, чтобы в полученном решении зависимость $\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{\Sigma}(t_{\Sigma})$ при $\Delta V_{\Sigma} = \text{const}$ удовлетворяла условию $\frac{\partial \Delta t_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}} > 0$ (рис. 12.3.6, б).

Аналогично можно доказать следующее утверждение: для того чтобы задача (12.3.22) решалась для $t_{\Sigma} \Rightarrow \max$, необходимо и достаточно, чтобы в полученном решении зависимость $\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{\Sigma}(t_{\Sigma})$ при $\Delta V_{\Sigma} = \text{const}$ удовлетворяла условию $\frac{\partial \Delta t_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}} < 0$ (рис. 12.3.6, в).

Примеры использования полученных результатов приведены в разделе 12.4.1.

Перейдем к оптимальным перелетам на внутренние планеты Солнечной системы. При перелете Земля — внутренняя планета — Земля аппарат в гелиоцентрическом движении обгоняет Землю. Поэтому в формулах (12.3.4) и (12.3.8) k берется со знаком «—», в результате чего получим

$$\Delta t_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_0 t_{\Sigma}}{\omega_0 - \omega_1} - k \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega_1}, \quad (12.3.38)$$

$$T_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_1 t_{\Sigma}}{\omega_0 - \omega_1} - k \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega_1}. \quad (12.3.39)$$

Укажем простой прием, сводящий формально задачу о перелете на внутреннюю планету к задаче о перелете на внешнюю

планету. Перепишывая (12.3.38) и (12.3.39) в виде

$$-\Delta t_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_0 t_{\Sigma}}{\omega_1 - \omega_0} - k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_0}, \quad -T_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_1 t_{\Sigma}}{\omega_1 - \omega_0} - k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_0} \quad (12.3.40)$$

и вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{T}_{\Sigma} &= -\Delta t_{\Sigma}, \quad \Delta \widetilde{t}_{\Sigma} = -T_{\Sigma}, \\ \widetilde{\omega}_0 &= \omega_1, \quad \widetilde{\omega}_1 = \omega_0, \quad \widetilde{T}_{\text{син}} = -\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_0}, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.41)$$

можем представить (12.3.38) и (12.3.39) так:

$$\Delta \widetilde{t}_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \widetilde{\omega}_0 t_{\Sigma}}{\widetilde{\omega}_0 - \widetilde{\omega}_1} + k \widetilde{T}_{\text{син}}, \quad (12.3.42)$$

$$\widetilde{T}_{\Sigma} = \frac{\eta_{\Sigma} - \widetilde{\omega}_1 t_{\Sigma}}{\widetilde{\omega}_0 - \widetilde{\omega}_1} + k \widetilde{T}_{\text{син}}. \quad (12.3.43)$$

Поскольку $\widetilde{\omega}_0 > \widetilde{\omega}_1$, соотношения (12.3.42) и (12.3.43) формально не отличаются от соотношений для фиктивного перелета внутренней планета — Земля — внутренняя планета ($n > 1$), соответствующего заданному перелету, а величины $\Delta \widetilde{t}_{\Sigma}$ и $\widetilde{T}_{\Sigma}$ играют для этого перелета формально роль времени ожидания и суммарного времени перелета. Очевидно, что между исходной (рассматриваемой в виде (12.3.36)) и фиктивной задачами об оптимальных перелетах имеет место следующее соотношение:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{исходная задача} & \text{фиктивная задача} \\ \Delta V_{\Sigma} = \text{const}, & \Delta V_{\Sigma} = \text{const}, \\ \Delta t_{\Sigma} = \text{const} \geq 0, & \widetilde{T}_{\Sigma} = \text{const} \leq 0, \\ T_{\Sigma} \Rightarrow \min; & \Delta \widetilde{t}_{\Sigma} \Rightarrow \max < 0. \end{array} \right\} \quad (12.3.44)$$

Такое сведение исходной задачи к фиктивной позволяет применить для решения последней практически целиком всю методику, изложенную выше. В частности, повторяя для перелета Земля — внутренняя планета — Земля приведенные выше рассуждения, получим те же критерии выбора $\text{extr } t_{\Sigma}$ с заменой $\frac{\partial \Delta t_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}}$ на $\frac{\partial \widetilde{T}_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}}$. Но поскольку $\widetilde{T}_{\Sigma} = -\Delta t_{\Sigma}$, для перелета на внутреннюю планету получаем следующий результат: чтобы задача (12.3.22) решалась для $t_{\Sigma} \Rightarrow \min$ ($t_{\Sigma} \Rightarrow \max$), необходимо и достаточно выполнение для полученного решения условия $\frac{\partial \Delta t_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}} < 0$ ($\frac{\partial \Delta t_{\Sigma}}{\partial t_{\Sigma}} > 0$).

Примеры практического использования полученных результатов приведены в разделе 12.4.2.

Обобщим постановку задачи IIa оптимизации перелета Земля — планета — Земля, заменяя изопериметрическое условие (12.3.15) ограничением величины Δt_Σ снизу:

$$\Delta t_\Sigma = \Delta t_{01}(p_{01}, e_{01}) + \Delta t_{23}(p_{23}, e_{23}) + kT_{\text{син}} \geq \Delta t_\Sigma^* = \text{const.} \quad (12.3.45)$$

В этом случае задача может быть сведена к двум задачам: рассмотренной выше задаче IIa (12.3.14) — (12.3.16) с заданным временем ожидания и к изопериметрической задаче с незадаанным временем ожидания

$$T_\Sigma = \text{const}, \quad \Delta V_\Sigma \Rightarrow \min \quad (12.3.46)$$

или эквивалентной задаче

$$T_\Sigma \Rightarrow \min, \quad \Delta V_\Sigma = \text{const}, \quad (12.3.47)$$

в которой условие (12.3.45), по существу, не учитывается, а требуется при некотором k лишь выполнение неравенства

$$\Delta t_\Sigma \geq 0. \quad (12.3.48)$$

Вводя вместо (p_{01}, e_{01}) и (p_{23}, e_{23}) в качестве независимых переменных $(p_{01}, \Delta V_{01})$, $(p_{23}, \Delta V_{23})$, перепишем задачу (12.3.47) в виде

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_{01} + \Delta V_{23} = \text{const} = \Delta V_\Sigma^*, \quad (12.3.49)$$

$$T_\Sigma = T_{01}(p_{01}, \Delta V_{01}) + T_{23}(p_{23}, \Delta V_{23}) + kT_{\text{син}} \Rightarrow \min. \quad (12.3.50)$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, запишем необходимые условия оптимальности в виде

$$\frac{\partial T_{01}}{\partial p_{01}} = 0, \quad \frac{\partial T_{23}}{\partial p_{23}} = 0, \quad (12.3.51)$$

$$\frac{\partial T_{01}}{\partial \Delta V_{01}} = \frac{\partial T_{23}}{\partial \Delta V_{23}}. \quad (12.3.52)$$

Из (12.3.49) — (12.3.52) следует, что оптимальный перелет Земля — планета — Земля с незадаанным временем ожидания может состоять только из таких перелетов, для которых $T_{01}(p_{01}, \Delta V_{01} = \text{const})$ и $T_{23}(p_{23}, \Delta V_{23} = \text{const})$ достигают порознь минимума по p_{01} и p_{23} соответственно. На основании сказанного получаем следующий алгоритм нахождения решения системы (12.3.49), (12.3.50) на ЭЦВМ:

Двигаясь вдоль линии (5.1.37) $\Delta V_{01}(p_{01}, e_{01}) = \text{const}$, определяем точку (p_{01}, e_{01}) , в которой достигается

$$\min_{\{p_{01}\}} T_{01}(\Delta V_{01}) \equiv \min_{\{p_{01}\}} T_{01}(p_{01}, e_{01}) | \Delta V_{01} = \text{const},$$

и аналогично для $\Delta V_{23} = \Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_{01} = \text{const}$ находим

$$\min T_{23}(\Delta V_{23}) = \min_{\{p_{23}\}} T_{23}(p_{23}, e_{23}) | \Delta V_{23} = \text{const}.$$

В результате получаем функцию одной переменной

$$T'_{\Sigma}(\Delta V_{01}) = \min T_{01}(\Delta V_{01}) + \min T_{23}(\Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_{01}). \quad (12.3.53)$$

Изменяя ΔV_{01} в допустимом диапазоне

$$\Delta V_{\text{гом}} \leq \Delta V_{01} \leq \Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_{\text{гом}}, \quad (12.3.54)$$

находим оптимальную величину $\Delta V_{01 \text{ opt}}$, доставляющую минимум (12.3.53)

$$T'_{\Sigma}(\Delta V_{01 \text{ opt}}) = \min_{\{\Delta V_{01}\}} T'_{\Sigma}(\Delta V_{01}), \quad (12.3.55)$$

и все параметры соответствующего перелета. Если при этом $\Delta t'_{\Sigma} = \Delta t_{01} + \Delta t_{23} > 0$, то задача решена. Если же $\Delta t'_{\Sigma} < 0$, то берем наименьшее $k > 0$ (перелет на внешнюю планету), при котором $\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{01} + \Delta t_{23} + kT_{\text{снн}} > 0$, после чего задача также решена.

Заметим, что если $\Delta V_{\Sigma}^* > \Delta V_{\Sigma \text{ гом}}$, то гомановские полуэллипсы не могут входить в состав оптимальных перелетов с незаданным временем ожидания. В самом деле, поскольку при $\Delta V_{01} = \Delta V_{\text{гом}}$ для гомановского перелета $\left| \frac{\partial T_{01}}{\partial \Delta V_{01}} \right| = \infty$ (что следует из соотношений раздела 5.1.1 и геометрии гомановского перелета), а для $\Delta V_{23} = \Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_{\text{гом}} > \Delta V_{\text{гом}}$ $\left| \frac{\partial T_{23}}{\partial \Delta V_{23}} \right| < \infty$, равенство (12.3.52) выполнено быть не может.

Установим связь между оптимальными перелетами с заданным и с незаданным временем ожидания. Предположим, что при некотором k для одного и того же маршрута при одной и той же величине ΔV_{Σ} существуют перелеты как с заданным, так и с незаданным временем ожидания. Поскольку семейство перелетов, на котором решается задача (ΔV_{Σ} , $T_{\Sigma} \Rightarrow \min$), является более широким, чем аналогичное семейство для задачи (ΔV_{Σ} , Δt_{Σ} , $T_{\Sigma} \Rightarrow \min$), то очевидно, что при $\Delta V_{\Sigma} = \text{const}$ $\inf T_{\Sigma}$ достигается на решениях задачи с незаданным временем ожидания. Из сказанного следует, что если рассмотреть семейство решений экстремальной задачи с заданным временем ожидания $T_{\Sigma} = T_{\Sigma}(\Delta V_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma} = \text{const})$ с параметром Δt_{Σ} , то экстремаль соответствующей задачи с незаданным временем ожидания $T_{\Sigma} = T_{\Sigma}(\Delta V_{\Sigma})$ является для первого семейства некоторой предельной линией: это либо огибающая (см. рис. 12.4.9, 12.4.11), либо линия, отделяющая область существования решений задачи (ΔV_{Σ} , Δt_{Σ} , $T_{\Sigma} \Rightarrow \min$) от области, где ре-

шения не существуют, либо, наконец, линия, разделяющая решения разных типов (см. рис. 12.4.21). Отсюда, в частности, следует, что если в заданном диапазоне значений при $\Delta t_z \geq 0$ с ростом Δt_z при любом $\Delta V_z = \text{const}$ T_z монотонно возрастает, то при этих значениях ΔV_z перелетов с заданным временем не существует, так как предельной линией для соответствующего семейства экстремалей является экстремаль $\Delta t_z = 0$. Примеры оптимальных перелетов с заданным временем ожидания приведены в разделах 12.4.1 и 12.4.2.

Рассмотрим теперь задачу Ia оптимизации двухимпульсного перелета орбита ИСЗ — орбита ИС планеты, используя тот же подход, что и для задачи IIa. В данном случае орбиту ИС планеты, как и орбиту ИСЗ, можно считать, в отличие от задачи IIa, эллиптической. На основании соотношений (12.2.10), (12.3.12) и свойства изопериметрии задача Ia эквивалентна следующей задаче:

Найти p_{01} , e_{01} , доставляющие минимум величине

$$t_{01} = t_{01}(p_{01}, e_{01}) \Rightarrow \min \quad (12.3.56)$$

при условии

$$\begin{aligned} \Delta V_{01}(p_{01}, e_{01}) &= \Delta V_0(p_{01}, e_{01}) + \Delta V_1(p_{01}, e_{01}) = \text{const} = \\ &= \Delta V_{01}^*. \end{aligned} \quad (12.3.57)$$

Численное решение этой задачи на ЭЦВМ при использовании уравнения (5.1.37) сводится к поиску оптимального значения $p_{01 \text{ opt}}$:

$$\begin{aligned} t_{01}(p_{01 \text{ opt}}, e_{01}(p_{01 \text{ opt}}, \Delta V_{01}^*)) &= \min_{\{p_{01}\}} t_{01}(p_{01}, e_{01}(p_{01}, \Delta V_{01}^*)), \\ p_{01} &\in [p_{\min}(\Delta V_{01}^*), p_{\max}(\Delta V_{01}^*)], \end{aligned} \quad (12.3.58)$$

где $p_{\max}(\Delta V_{01}^*)$, $p_{\min}(\Delta V_{01}^*)$ определяются уравнениями (5.1.50), (5.1.51) соответственно.

Рассмотрение задач оптимизации перелетов для плоской круговой модели движения планет на плоскости параметров p , e позволяет достаточно просто учесть ряд дополнительных ограничений, накладываемых на допустимые траектории перелета (см. гл. V). Например, с целью обеспечения радиационной безопасности для экипажа и условий для длительного хранения криогенного топлива следует ограничить снизу радиус перигелия орбиты перелета. Радиус же афелия орбиты перелета не должен значительно превышать радиуса орбиты Марса ввиду попадания аппарата в пояс астероидов (Аллен [1]). Указанные ограничения записываются в виде (см. соотношения (5.1.2) — (5.1.5))

$$r_{\pi} \geq r_{\pi}^*, \quad r_{\alpha} \leq r_{\alpha}^* \quad (12.3.59)$$

ИЛИ

$$e \leq \frac{p}{r_{\pi}^*} - 1, \quad e \leq 1 - \frac{p}{r_{\alpha}^*}, \quad (12.3.60)$$

где $r_{\pi}^* < 1$, $r_{\alpha}^* > n_s = \frac{R_s}{R_{\oplus}}$ — заданные предельно допустимые радиусы перигелия и афелия (отнесенные к $R_{\oplus}$) соответственно. Ограничения (12.3.59), (12.3.60) сужают область допустимых параметров кеплеровых дуг на плоскости p, e по сравнению с исходной

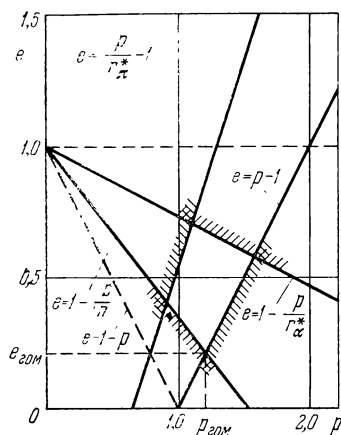


Рис. 12.3.7.

областью, определенной неравенствами (5.1.4), (5.1.5) (рис. 12.3.7).

12.3.2. Оптимизация перелетов с учетом эллиптичности и наклона орбит планет (В. А. Ильин, Н. А. Истомин, 1963 г.). Перейдем к рассмотрению задач Ia и IIa в том виде, как они сформулированы в разделе 12.2.2. При этом предположения a° и b° , сделанные в разделе 12.3.1, заменяются исходным предположением 2° , сделанным в разделе 12.2.1. Предположения v° и g° сохраняются и здесь. Более того, при решении задачи оптимизации перелета считаем заданными только высоты перицентра H_{π} и апоцентра H_{α} орбит ИС. Ориентация же орбит ИС в пространстве

определяется при решении соответствующих внутренних задач, после решения внешней задачи (подробнее см. ниже). Как и в разделе 12.3.1, основное внимание будет уделено задаче IIa с заданным временем ожидания. При решении пространственной задачи нет необходимости различать внешние и внутренние планеты Солнечной системы. Однако для определенности и удобства индексации всюду в дальнейшем рассматривается перелет Земля — Марс — Земля.

При решении «пространственной эллиптической» задачи необходимо, в отличие от «плоской круговой» задачи, учитывать фактическое положение Земли и планеты назначения на их орбитах. Удовлетворение условий встречи аппарата с планетами связано с определенными вычислительными трудностями, которые в значительной степени можно обойти с помощью следующего приема.

Предположим, что задана дата старта с орбиты ИСЗ t_0 и дата прибытия в окрестность планеты назначения t_1 (рис. 12.3.8). Задание величин t_0 и t_1 определяет радиусы-векторы $r_0 = r_{\oplus}(t_0)$ и $r_1 = r_{\sigma}(t_1)$ и, следовательно, угол η_{01} и время перелета $t_{01} = t_1 - t_0$. В результате задача определения перелета Земля — планета сво-

дится к рассмотренной в разделе 5.1.4 задаче определения кеплеровой дуги по двум заданным радиусам-векторам и времени перелета. Решение этой задачи при заданном маршруте перелета сводится к нахождению фокального параметра p_{01} и эксцентриситета e_{01} кеплеровой дуги перелета из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \eta_{01} &= \eta_{01}(n_{01}; p_{01}; e_{01}), \\ t_{01} &= t_{01}(n_{01}; p_{01}; e_{01}), \end{aligned} \right\} \quad (12.3.61)$$

где $n_{01} = r_1/r_0$.

Предполагая пока, что рассматриваемый перелет действительно может быть совершен, из системы уравнений (12.3.61) определяем p_{01} , e_{01} и, следовательно, все характеристики перелета Земля — планета. Аналогично, задание дат t_2 и t_3 полностью определяет параметры перелета планета — Земля. Зная параметры перелетов, находим векторы скорости аппарата V_i , $i = 0, 1, 2, 3$, и векторы планетоцентрических скоростей аппарата на сферах влияния

$$\left. \begin{aligned} V_{сф\ i} &= V_i - U_{\Phi}(t_i), \quad i = 0, 3, \\ V_{сф\ j} &= V_j - U_s(t_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.62)$$

Чтобы пространственная задача соответствовала некоторой плоской круговой задаче, необходимо, чтобы в пространственном случае переходы сфера влияния — орбита ИС были плоскими. Поэтому векторы $V_{сф\ 0}$ и $V_{сф\ 3}$ считаем коллинеарными соответствующим эллиптическим орбитам ИСЗ, а круговую орбиту ИС планеты назначения — находящейся, в соответствии с ММСВ, в плоскости векторов $V_{сф\ 1}$ и $V_{сф\ 2}$. Зная величины $V_{сф\ i}$, $H_{\pi i}$, $H_{\alpha i}$, $i = 0, 1, 2, 3$, находим с помощью соотношений, приведенных в разделе 5.1.2, оптимальные импульсы ΔV_i , $i = 0, 1, 2, 3$, перехода на орбитах ИС планет, сообщаемые аппарату в общей апсидальной точке орбит ИС и гипербол перехода. В результате характеристическую скорость перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты и орбита ИС планеты — орбита ИСЗ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_{01}(t_0, t_1) &= \Delta V_0(t_0, t_1) + \Delta V_1(t_0, t_1), \\ \Delta V_{23}(t_2, t_3) &= \Delta V_2(t_2, t_3) + \Delta V_3(t_2, t_3) \end{aligned} \right\} \quad (12.3.63)$$

соответственно.

Таким образом, поставленную в разделе 12.2.2 задачу IIa об оптимальных перелетах с заданным временем ожидания можно сформулировать следующим образом:

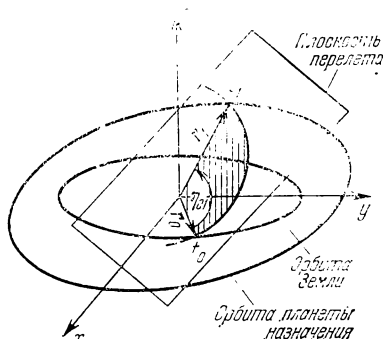


Рис. 12.3.8.

Найти даты t_0, t_1, t_2, t_3 , удовлетворяющие условиям

$$\Delta t_{\Sigma} = t_2 - t_1 = \text{const} = \Delta t_{\Sigma}^*, \quad (12.3.64)$$

$$T_{\Sigma} = t_3 - t_0 = \text{const} = T_{\Sigma}^*, \quad (12.3.65)$$

для которых характеристическая скорость перелета ΔV_{Σ} минимальна:

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{01}(t_0, t_1) + \Delta V_{23}(t_2, t_3) \Rightarrow \min. \quad (12.3.66)$$

Для возможности решения задачи изложенным выше методом необходимо, чтобы при заданных датах t_0, t_1 и t_2, t_3 соответствующие системы (12.3.61) имели бы решение. Кроме того, чтобы решение экстремальной задачи можно было проводить одним из быстроходящихся градиентных методов, начальное приближение для $t_i = t_i^{(0)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, должно быть взято в области упомодальности функции $\Delta V_{\Sigma}(t_0, t_1, t_2, t_3)$, соответствующей $\min \Delta V_{\Sigma}$. Как показывает численное исследование (см. § 12.4), указанные условия удовлетворяются, если, решив плоскую круговую задачу и найдя с помощью χ_0 дату $t_0^{(0)}$ (см. ниже), положить

$$t_1^{(0)} = t_0^{(0)} + t_{01\text{пл}}, \quad t_2^{(0)} = t_1^{(0)} + \Delta t_{\Sigma}^*, \quad t_3^{(0)} = t_2^{(0)} + t_{23\text{пл}} = t_0^{(0)} + T_{\Sigma}^*, \quad (12.3.67)$$

где $t_{01\text{пл}}, t_{23\text{пл}}$ — значения t_{01}, t_{23} , соответственно, для плоской круговой модели.

Для решения задачи о перелете Земля — планета — Земля удобно использовать гелиоцентрические декартовы координаты Земли и планеты. Общепринятой является система (рис. 12.3.9),

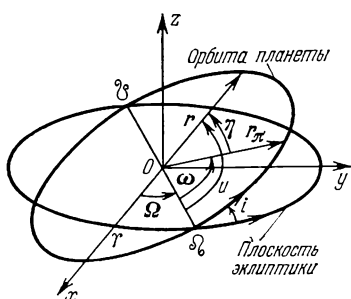


Рис. 12.3.9.

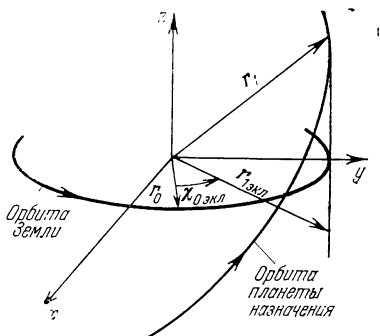


Рис. 12.3.10.

в которой оси x и y лежат в плоскости эклиптики, причем ось x направлена в точку весеннего равноденствия Υ , а ось y — в сторону перигелия Земли. Направление оси z выбирается так, что система xuz оказывается правой.

Орбиту и движение по ней планеты можно определить с помощью следующих средних элементов (см. рис. 12.3.9): долготы восходящего узла Ω , наклонения плоскости орбиты планеты к плоскости эклиптики i , долготы перигелия $\pi = \Omega + \omega$, где ω — угловое расстояние перигелия от узла, средней долготы планеты в орбите λ или аргумента широты $u = \omega + \eta$, где η — истинная аномалия, эксцентриситета e , большой полуоси a .

Величины λ , π , Ω , i и e для данного момента времени можно вычислить с помощью формул, приведенных, например, в Астрономических ежегодниках СССР и в монографии Ц. В. Соловьева, Е. В. Тарасова [1].

В качестве величины, характеризующей взаимное угловое положение Земли и планеты, целесообразно взять угол $\chi_{0 \text{ экл}}$ между радиусом-вектором Земли $\mathbf{r}_0$ и проекцией радиуса-вектора планеты на плоскость эклиптики $\mathbf{r}_{1 \text{ экл}}$ (рис. 12.3.10), поскольку $\chi_{0 \text{ экл}}$ изменяется в пределах $0 \leq \chi_{0 \text{ экл}} \leq 360^\circ$, т. е. в том же диапазоне, что и χ_0 .

Если пренебречь эллиптичностью и наклонением орбит планет, то $\chi_{0 \text{ экл}}$ можно считать кусочно-линейной функцией (вследствие нормировки по углу) с периодом $T_{\text{син}}$ (рис. 12.3.11). В действительности

$$\chi_{0 \text{ экл}} = u_{1 \text{ экл}} - u_0, \quad (12.3.68)$$

где $u_{1 \text{ экл}}$ — аргумент широты вектора $\mathbf{r}_{1 \text{ экл}}$, u_0 — аргумент широты вектора $\mathbf{r}_0$. Очевидно, что u_0 и $u_{1 \text{ экл}}$ представляют периодические

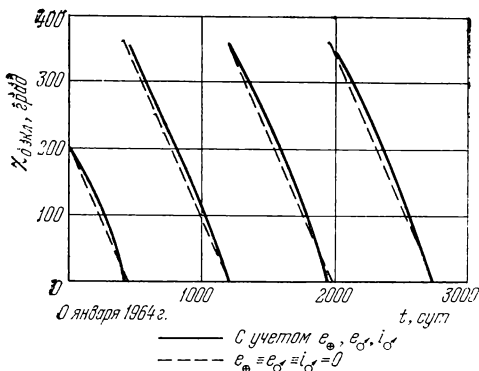


Рис. 12.3.11.

функции с периодами T_0 и T_1 , равными периодам обращения Земли и планеты по орбитам. Вследствие несоизмеримости периодов T_0 и T_1 $\chi_{0 \text{ экл}}$ уже не является периодической функцией, хотя практически она очень близка к периодической функции с периодом $\approx T_{\text{син}}$. Однако прямая, на которой $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_{1 \text{ экл}}$ совпадают

($\chi_0_{\text{экл}} = 0$), соответствующая противостоянию Земли и Марса, от «периода» к «периоду» меняет свою ориентацию в плоскости эклиптики (рис. 12.3.12). Если в T_0 и T_1 ограничиться конечным числом знаков, то можно вычислить «период» T_χ для указанного движения линии $\chi_{01 \text{ экл}} = 0$. Результаты расчета T_χ для пар планет Земля — Марс и Земля — Венера приведены в таблице 12.3.1. Заметим, что величина $T_\chi = 19$ лет соответствует полному синодическому циклу пары Земля — Марс.

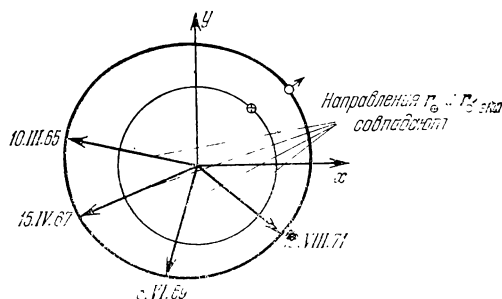


Рис. 12.3.12.

Из приведенных данных следует, что при более или менее точном расчете (с 4—5 верными десятичными знаками) $\chi_{0 \text{ экл}}$ для практически обозримого периода времени является непериодической функцией. Но из этого сразу же следует, что геометрические характеристики относительного движения пары Земля — планета

Таблица 12.3.1

Периоды движения пары Земля — планета

Земля—Марс		Земля—Венера	
T_σ , годы	T_χ , годы	T_σ , годы	T_χ , годы
1,8808151...	∞	0,61518656...	∞
1,8808	2351	0,6152	769
1,88	47	0,61	61
1,9	19	0,6	3,0

T_σ — период обращения Марса по орбите,

T_σ — период обращения Венеры по орбите,

T_χ — период движения пары Земля — планета.

также нельзя считать периодическими функциями времени, поскольку на каждом квазипериоде $\approx T_{\text{син}}$ Земля и планета пробегают разные участки своих орбит.

Пусть задана некоторая дата t_{00} . Считаем также, что при заданных T_Σ^* и Δt_Σ^* для плоской круговой модели найден опти-

мальный перелет и соответствующая ему величина χ_0 . Ближайшую к t_{00} дату старта с орбиты ИСЗ $t_0^{(0)}$ приближенно можно найти из условия

$$\chi_{0 \text{ экл}}(t_0^{(0)}) = \chi_0, \quad t_0^{(0)} \geq t_{00}. \quad (12.3.69)$$

Если при вычислении $\chi_{0 \text{ экл}}$ пренебречь эллиптичностью и наклоном орбит планет, то $t_0^{(0)}$ можно найти по следующей формуле (рис. 12.3.13):

$$t_0^{(0)} = t_{00} + \frac{\chi_{0 \text{ экл}}(t_{00}) - \chi_0}{\omega_0 - \omega_1} + T_{\text{син}} \frac{1 - \text{sign} [\chi_{0 \text{ экл}}(t_{00}) - \chi_0]}{2}. \quad (12.3.70)$$

Очевидно, что каждому «плоскому круговому» решению можно поставить в соответствие две даты $t_0^{(0)}$:

$$\left. \begin{aligned} t_0^{(0)} &\rightarrow \chi_0 = \eta_{01} - \omega_0 t_{01}, \\ \tilde{t}_0^{(0)} &\rightarrow \tilde{\chi}_0 \equiv \chi_2 = \eta_{23} - \omega_0 t_{23}, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.71)$$

соответственно с изменением порядка перелетов «туда» и «обратно» (см. раздел 12.3.1).

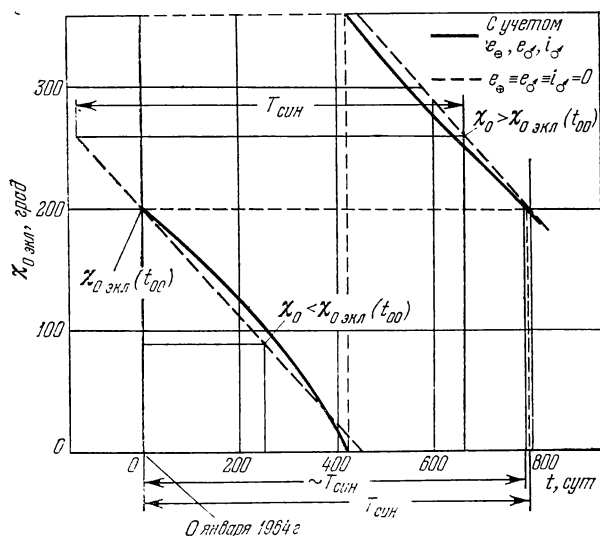


Рис. 12.3.13.

Рассмотрим теперь особенности пространственных перелетов при угловых дальностях перелета Земля — планета или планета — Земля $\eta_{ij} \approx 180^\circ$, $i, j \approx 0, 1, 2, 3$. Перелеты с $\eta_{ij} \approx 180^\circ$ являются особыми, так как им соответствует чрезмерно большая энергетика. Для анализа их особенностей рассмотрим перелеты

Из (12.3.73) ясно, что резкое возрастание ΔV_z при $\eta_{01} \approx 180^\circ$ связано с тем, что плоскость перелета занимает положение, близкое к нормальному по отношению к плоскости орбиты Земли и планеты. Чтобы выяснить «интенсивность приподнимания» плоскости перелета при $\eta_{01} \approx 180^\circ$, рассмотрим сферический треугольник ABC на рис. 12.3.16: дуга AC представляет собой на единичной сфере след дуги $0I$ перелета Земля — Марс, дуга AB — пересечение единичной сферы плоскостью орбиты Марса, дуга BC , стягиваемая углом α_0 , лежит в плоскости эклиптики. Угол v_0 равен наклонению плоскости перелета Земли — планета к плоскости эклиптики. Учитывая малость i_s и полагая $\eta_{01} = \pi - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, получим с точностью до $\max(i_s^2, \varepsilon^2)$

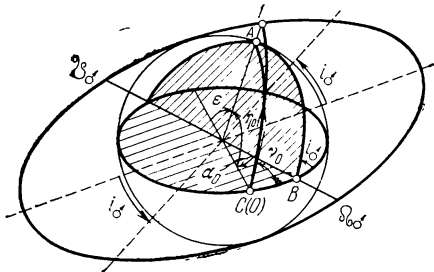


Рис. 12.3.16.

$$\sin v_0 = \frac{i_s}{\varepsilon} (\sin \alpha_0 - \varepsilon \cos A \cos \alpha_0), \quad (12.3.74)$$

где $\sin A = \frac{i_s}{\varepsilon} \sin \alpha_0$.

Из (12.3.74) следует:

$$|\sin v_0| \leq \left| \frac{i_s}{\varepsilon} \right| + |i_s|. \quad (12.3.75)$$

Учитывая малость i практически для всех планет (см. таблицу 12.4.1), замечаем, что достаточно отличия η_{01} от 180° в несколько градусов, чтобы наклон плоскости перелета к плоскостям орбит планет стал достаточно малым. Этот же факт подтверждается непосредственными расчетами (см. § 12.4).

С увеличением ε происходит также резкое уменьшение ΔV_{01} (или ΔV_{23}). Но так как при малых ε другие гелиоцентрические параметры перелета меняются весьма слабо, то из этого следует, что перелеты с $\eta_{ij} \approx 180^\circ$ не могут входить в состав оптимальных пространственных перелетов. Этот факт также подтверждается непосредственно результатами расчетов (см. § 12.4).

Выведем приближенное соотношение для определения линии, соответствующей перелетам с $\eta_{01} \approx 180^\circ$, в плоскости дат t_0, t_1 . Полагая $\eta_{01} = 180^\circ$ и $i_s = 0$, получим из условия $[r_\oplus, r_s] = 0$, что

$$u_\oplus + k\pi = u_s + \Omega_s, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (12.3.76)$$

Выражая аргумент широты u через истинную аномалию η и долготу перигелия π , имеем

$$\eta_\oplus + \pi_\oplus + k\pi = \eta_s + \pi_s. \quad (12.3.77)$$

Пренебрегая теперь эллиптичностью орбит планет ($e_{\oplus} = e_s = 0$), положим

$$\eta + \pi = \lambda, \quad (12.3.78)$$

где λ — средняя долгота планеты, после чего получим приближенное уравнение

$$\lambda_s - \lambda_{\oplus} = k\pi. \quad (12.3.79)$$

Уравнение (12.3.79) можно переписать в виде

$$\omega_s t_1 - \omega_{\oplus} t_0 = k\pi - (\lambda_{s0} - \lambda_{\oplus 0}), \quad (12.3.80)$$

где λ_{i0} , $i = \oplus, s$, — средние долготы планет в эпоху, от которой идет счет дат t_0 и t_1 . Таким образом, если в плоскости дат t_0, t_1 строить поверхность $\Delta V_z(t_0, t_1, t_2, t_3)$, то вдоль прямых (12.3.80) и аналогичных значений для дат t_2, t_3 будут располагаться «хребты» этой поверхности с резким увеличением характеристической скорости ΔV_z (см. раздел 12.4.1).

Совершенно аналогично, с очевидными изменениями, могут быть рассмотрены в рамках пространственной эллиптической модели задача IIa с незадаанным временем ожидания и задача Ia.

Как следует из проведенного выше анализа и как подтверждают численные расчеты (см. § 12.4), основное влияние на характеристики оптимальных перелетов практически во всей области возможных значений T_z , Δt_z и ΔV_z оказывает эксцентриситет орбиты планеты, особенно для перелетов Земля — Марс — Земля. Поэтому наряду с рассмотренными двумя «предельными» моделями движения планет — плоской круговой и пространственной эллиптической — целесообразно рассматривать и некоторые промежуточные модели, в которых орбиты планет считаются компланарными, но эллиптическими, например, орбита Марса считается эллиптической, а орбита Земли — круговой. При этом появляется возможность достаточно просто выявить зависимость характеристик перелетов от синодического периода дат старта (см. разделы 12.3.3, 12.4.3 и работу В. В. Балашова [4]).

12.3.3. Оптимальные перелеты с торможением в атмосфере планет. Будем понимать под границей атмосферы некоторую условную сферическую поверхность радиуса R_A , за пределами которой влиянием атмосферы на движение КА можно пренебречь. Движение в атмосфере полностью определяется вектором скорости аппарата в момент пересечения траекторией подлета внешней границы атмосферы — вектором скорости входа в атмосферу $V_{вх}$. На характеристики движения аппарата в атмосфере существенное влияние оказывает как величина $V_{вх}$, так и угол входа в атмосферу $\theta_{вх}$ — угол между вектором $V_{вх}$ и местной трансверсалью. Предположим, что на участке от входа в сферу влияния до внешней границы атмосферы аппарат совершает пассивное движение по ги-

перболе. В этом случае величина $V_{\text{вх}}$ однозначно связана с величиной скорости в точке входа на сфере влияния $V_{\text{сф}}^+$ интегралом энергии (1.3.24):

$$V_{\text{сф}}^{+2} = V_{\text{вх}}^2 + 2\mu \left(\frac{1}{\rho_{\text{сф}}} - \frac{1}{R_A} \right). \quad (12.3.81)$$

где μ — гравитационная постоянная планеты. Что касается угла $\theta_{\text{вх}}$, то его можно варьировать в достаточно широких пределах: от нуля до нескольких десятков градусов, изменяя величину радиуса условного перицентра ρ_{π} , что в рамках ММСВ эквивалентно смещению точки входа аппарата на сфере влияния $\rho_{\text{вх}}$ (рис. 12.3.17).

Поскольку практически всегда $R_A \approx R_{\pi}$, где R_{π} — средний радиус планеты, то, полагая $R_A = R_{\pi}$ и $\rho_{\text{сф}} = \infty$, получим из (12.3.81) (все скорости размерные)

$$V_{\text{вх}} = V_I \sqrt{2 + \left(\frac{V_{\text{сф}}^+}{V_I} \right)^2}, \quad (12.3.82)$$

где $V_I = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\pi}}}$ — первая космическая скорость данной планеты.

Из (12.3.82) следует, что при реальных скоростях $V_{\text{сф}}^+ \sim V_I$ (см. раздел 12.4.3), $V_{\text{вх}} \sim V_{\text{II}}$, где $V_{\text{II}} = \sqrt{2} V_I$ — вторая космическая скорость.

Траектории входа в атмосферу со скоростями порядка второй космической должны удовлетворять ряду существенных ограничений, обусловленных возможностями аппарата и экипажа, в частности ограничениям по максимальным и интегральным перегрузкам и тепловым потокам. В случае торможения в атмосфере Марса необходимо учитывать ее разреженность. Если параметры КА заданы и оптимизируется траектория его движения в атмосфере, то решение задачи о торможении КА зависит от условий его входа в атмосферу (см. А. А. Шилов [1]). Следовательно, различные ограничения, которые обычно накладываются на параметры траектории торможения в атмосфере, сводятся к ограничениям величин $V_{\text{вх}}$ и $\theta_{\text{вх}}$. Из сказанного следует, что в рамках ММСВ необходимо учитывать только ограничение на допустимые величины $V_{\text{вх}}$, которое сводится к ограничению допустимых величин $V_{\text{сф}}^+$. Это

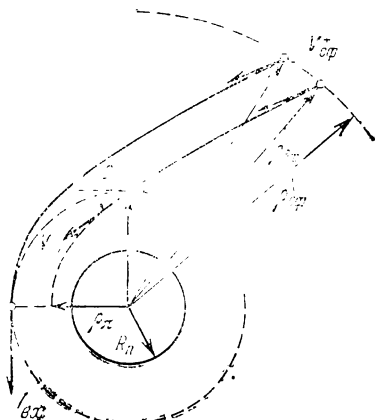


Рис. 12.3.17.

ограничение будем рассматривать для простоты в виде

$$V_{\text{вх}} = V_{\text{вх}}^* = \text{const.} \quad (12.3.83)$$

Заметим, что если непосредственно ограничивать величину $V_{\text{сф}}^+$, то сделанное выше предположение о пассивном перелете от сферы влияния к границе атмосферы становится несущественным и, вообще говоря, в рамках предлагаемого подхода можно рассматривать траектории перелета сфера влияния — граница атмосферы с импульсами скорости.

Схемы основных траекторий торможения КА в атмосфере рассмотрены в разделе 5.2.1. Характерным для схем торможения с выходом на орбиту ИС планеты является независимость импульсов перехода на орбиту ИС от условий подлета аппарата к атмосфере.

Предположим, что у планеты назначения КА после торможения в атмосфере всегда выходит на орбиту ИС. Что касается подлета к Земле, то здесь после торможения считаем возможными как выход на орбиту ИСЗ, так и посадку на ее поверхность. Для таких схем полета с учетом сказанного получаем, что характеристическая скорость околопланетного маневрирования, связанного с торможением в атмосфере и включающего выход на орбиту ИС или посадку на поверхность Земли, а также в общем случае содержащего перелеты орбита ИС — поверхность планеты, связанные с высадкой десанта на планету, практически не зависит от $V_{\text{вх}}$ и, следовательно, от $V_{\text{сф}}^+$ КА на сфере влияния. Указанная характеристическая скорость входит в функционал — суммарную характеристическую скорость ΔV_{Σ} — в качестве аддитивной постоянной.

На основании изложенного приходим к следующему важному результату. При решении в рамках ММСВ задач оптимизации перелетов с торможением в атмосфере планет оптимизацию межпланетного перелета можно проводить, исключая из рассмотрения околопланетное маневрирование аппарата, связанное с торможением аппаратов в атмосфере. При этом в функционалах (12.2.9), (12.2.20) достаточно исключить соответствующую характеристическую скорость перехода на орбиту ИС ($\Delta V_1 = 0$ или $\Delta V_1 = \Delta V_3 = 0$) и к числу условий добавить соотношение (12.3.83).

Прежде чем переходить к изложению методики решения задачи IIIa с ограничением скорости входа в атмосферу, рассмотрим более простой класс задач, когда условие (12.3.83) не учитывается и можно непосредственно использовать изложенную в разделах 12.3.1 и 12.3.2 методику.

Предположим, что атмосферу планеты можно считать идеальной тормозящей средой, позволяющей снизить скорость подлета к ней КА $V_{\text{вх}}$ до любых значений. Рассмотрим для определенности перелеты орбита ИСЗ — орбита ИСМ — орбита ИСЗ, в которых возможно торможение в атмосфере каждой из планет, в рамках

тех же общих предположений, которые сделаны в разделах 12.3.1 и 12.3.2. Тогда характеристические скорости этих перелетов можно записать в виде:

для перелета с торможением в атмосфере Земли

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2; \quad (12.3.84)$$

для перелета с торможением в атмосфере Марса

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_0 + \Delta V_2 + \Delta V_3; \quad (12.3.85)$$

для перелета с торможением в атмосфере Марса и Земли

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_0 + \Delta V_2, \quad (12.3.86)$$

где ΔV_i , $i = 0, 1, 2, 3$, как и в разделах 12.3.1, 12.3.2, импульсы перехода на орбитах ИС планет.

Учитывая вид функционалов (12.3.84) — (12.3.86), в дальнейшем условно будем называть перелеты с торможением в атмосфере одной из планет *трехимпульсными*, а с торможением в атмосфере обеих планет — *двухимпульсными*, в отличие от *четырёхимпульсных*, соответствующих исходной задаче IIa.

Отметим существенное отличие трех- и двухимпульсных перелетов с торможением в атмосфере от четырехимпульсных перелетов. Каждому четырехимпульсному перелету в рамках плоской круговой модели движения планет можно поставить в соответствие перелет с точно такими же суммарными характеристиками, в которых кеплеровы дуги полета Земля — планета и планета — Земля переставлены местами (см. раздел 12.3.1). В случае же перелетов с торможением в атмосфере, вследствие снятия в функционале неодинаковых импульсов, перелеты, в которых кеплеровы дуги полета «туда» и «обратно» переставлены местами, существенно различаются между собой.

Нетрудно видеть, что задачи оптимизации указанных перелетов можно сформулировать и решить совершенно аналогично тому, как это сделано для задачи IIa в разделах 12.3.1 и 12.3.2. При этом достаточно функционалы (12.3.16) и (12.3.66) заменить на один из функционалов (12.3.84) — (12.3.86) и для плоской круговой модели движения планет в разделе 12.3.1 при получении соотношения (12.3.24) заменить соотношение (5.1.37) на соответствующее соотношение (5.1.43) или (5.1.46). Решение задач в указанной постановке позволяет оценить снизу минимальные энергетические затраты на перелет Земля — планета — Земля с торможением в атмосфере (см. раздел 12.4.3).

Аналогично может быть рассмотрена задача оптимизации одноимпульсного перелета Земля — планета с торможением в атмосфере планеты, соответствующая двухимпульсной задаче Ia.

Заметим, что для перелетов с торможением в атмосфере, вследствие несимметричности функционалов (12.3.84) — (12.3.86), сим-

метричные перелеты не удовлетворяют условиям стационарности, поэтому оптимальные перелеты с торможением в атмосфере заведомо являются несимметричными.

Задачу IIIа оптимизации перелета с торможением в атмосфере при наличии ограничения (12.3.83) скорости входа в атмосферу, как и задачу IIа, проанализируем в два этапа: сначала для плоской круговой, а затем пространственной эллиптической моделей движения планет. Согласно сказанному в разделе 12.2.2 считаем, что импульс на сфере влияния планеты, в атмосфере которой происходит торможение, не прикладывается.

Рассмотрим задачу IIIа оптимизации перелета с торможением в атмосфере при наличии ограничения (12.3.83) для плоской круговой модели движения планет в тех же предположениях, что и задачу IIа в разделе 12.3.1.

Для определенности ограничимся трехимпульсным перелетом Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере Земли. Ограничение (12.3.83), согласно сказанному выше, заменим эквивалентным ограничением (12.2.21):

$$V_{сфз}^+ = V_{сфз}^- = V_{сфз}^* = \text{const.} \quad (12.3.87)$$

Задача оптимизации перелета сводится к задаче, описываемой соотношениями (12.3.14) — (12.3.16), с дополнительным равенством (см. (5.1.30), $n = 1$)

$$V_{сфз}^2 = 3 - 2\sqrt{p} + \frac{e^2 - 1}{p} = V_{сфз}^{**}. \quad (12.3.88)$$

Переписывая (12.3.88) в виде, аналогичном (5.1.43), и выражая с помощью (12.3.81) $V_{сфз}$ через скорость входа в атмосферу Земли $V_{вх\oplus}$, получим на плоскости p, e уравнение линий $V_{вх\oplus} = \text{const}$:

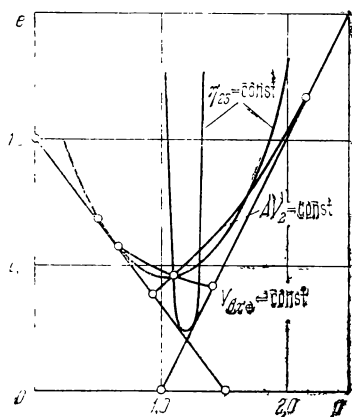


Рис. 12.3.18.

$$e^2 = 1 + \left[\frac{V_{вх\oplus}^2 - 2\mu_{\oplus} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{\rho_{сд\oplus}} \right)}{U_{\oplus}^2} - 3 \right] p + 2p^{3/2}. \quad (12.3.89)$$

Очевидно, что рассматриваемая задача может быть сведена к задаче (12.3.22) с дополнительным условием (12.3.88) или (12.3.89). В области допустимых перелетов одноимпульсному перелету Марс — Земля при заданных величине импульса на орбите ИСМ $\Delta V_2 = \text{const}$ и величине скорости входа в атмосферу Земли соот-

ветствует пересечение (единственное) кривых (5.1.46) и (12.3.88) или (12.3.89) (рис. 12.3.18). В результате для фокального параметра орбиты перелета получим следующее выражение:

$$\sqrt{P_{23}} = \frac{A'^2 - C^2 - V_{\text{сф}3}^{*2} + 3[1 - (1/n)]}{2[1 - (1/n^{3/2})]}, \quad (12.3.90)$$

где $A' = \frac{\Delta V_2 - V_{\pi}}{U_{\oplus}}$ (см. (5.1.47)), а C дается соотношением (5.1.35).

Вычисляя p_{23} по (12.3.90) и e_{23} по (5.1.46) (или (12.3.88)), можем найти все характеристики перелета Марс — Земля, в частности η_{23} и t_{23} .

Расчет характеристик двухимпульсного перелета Земля — планета производится в соответствии с изложенной в разделе 12.3.1 методикой для значений ΔV_{01} , η_{01} , определяемых равенствами

$$\Delta V_{01} = \Delta V_{\Sigma}^* - \Delta V_2, \quad \eta_{01} = \eta_{\Sigma}^* - \eta_{23}. \quad (12.3.91)$$

Фиксируя маршруты перелета Земля — планета и планета — Земля, при заданной величине $V_{\text{сф}3}^*$ выражаем все характеристики перелета и, в частности, t_{Σ} в функции ΔV_2 . Далее определение оптимального перелета сводится к нахождению численными методами на ЭЦВМ экстремума t_{Σ} по ΔV_2 . Если маршруты перелета Земля — планета и планета — Земля не заданы, то путем перебора всех возможных маршрутов можно найти оптимальное их сочетание.

Аналогично, рассматривая трехимпульсный перелет Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере Марса, получим с помощью (5.1.30) и (12.3.81) уравнение линий $V_{\text{вх} \Sigma} = \text{const}$:

$$e^2 = 1 + \left[\frac{V_{\text{вх} \Sigma}^2 - 2\mu_{\Sigma} \left(\frac{1}{R_{\Sigma}} - \frac{1}{\rho_{\text{сф} \Sigma}} \right)}{U_{\oplus}^2} - \frac{3}{n} \right] p + \frac{2}{n^{3/2}} p^{3/2}, \quad (12.3.92)$$

а для одноимпульсного перелета Земля — Марс с заданным импульсом ΔV_0 на орбите ИСЗ на основании соотношений (12.3.92), (5.1.43)

$$\sqrt{P_{01}} = \frac{V_{\text{сф}1}^{*2} - A'^2 + B^2 + 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2 \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} \right)}, \quad (12.3.93)$$

где $V_{\text{сф}1}^* (= V_{\text{сф}1}^-)$ — заданная скорость подлета к сфере влияния Марса, A' и B даются соотношениями (5.1.44) и (5.1.34) соответ-

ственно. Задача оптимизации перелета сводится к нахождению экстремума t_z по ΔV_0 . Заметим, что двухимпульсный перелет Земля — планета — Земля с торможением в атмосферах Земли и планеты при заданных величинах T_z (12.3.14), Δt_z (12.3.15), $V_{сф1}^-$ и $V_{сф3}^-$ определяется (в случае непротиворечивости заданных условий) однозначно (с точностью до комбинации маршрутов), поэтому применительно к такому перелету задача его оптимизации смысла не имеет.

Перейдем теперь к задаче IIIа оптимизации перелетов с заданной скоростью входа в атмосферу с учетом эллиптичности и некомпланарности орбит планет. Ограничимся для определенности трехимпульсным перелетом Земля — Марс — Земля с торможением в атмосфере Земли, который будем рассматривать в тех же предположениях, что и четырехимпульсный перелет в разделе 12.3.2.

Рассмотрим, следуя работе В. В. Балашова [2], годограф геоцентрических скоростей на сфере влияния Земли при заданной скорости аппарата на сфере влияния Земли

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_{сф3}^- + \mathbf{U}_\oplus(t_3), \quad \mathbf{V}_{сф3}^- = \text{const.} \quad (12.3.94)$$

В дальнейшем при расчете траекторий перелета Марс — Земля в данной задаче орбиту Земли считаем круговой и, следовательно, $U_\oplus = \text{const.}$ Это предположение ввиду малости эксцентриситета орбиты Земли ($e_\oplus \approx 0,0167$) приводит к незначительным ошибкам вычисления элементов траектории и импульса на орбите ИСМ, позволяя в то же время существенно упростить алгоритм расчета оптимальных перелетов.

Годограф вектора $\mathbf{V}_3$, определяемый уравнением (12.3.94), представляет собой сферу радиуса $V_{сф3}^-$ с центром в конце вектора $\mathbf{U}_\oplus(t_3)$ (рис. 12.3.19). Разложим вектор $\mathbf{V}_3$ на радиальную $\mathbf{V}_{3r}$ и трансверсальную $\mathbf{V}_{3\tau}$ составляющие. В силу сделанного выше предположения плоскость, проходящая через вектор $\mathbf{U}_\oplus(t_3)$ нормально к плоскости эклиптики, содержит вектор $\mathbf{V}_{3\tau}$. Из сказанного ясно, что вектор $\mathbf{V}_3$ удобно задать его модулем V_3 , углом между $\mathbf{U}_\oplus$ и $\mathbf{V}_{3\tau}$, равным наклонению ν_3 плоскости перелета Марс — Земля к плоскости эклиптики, и углом β_3 между $\mathbf{V}_{3r}$ и $\mathbf{V}_3$. Угол β_3 считаем положительным, если радиальная составляю-

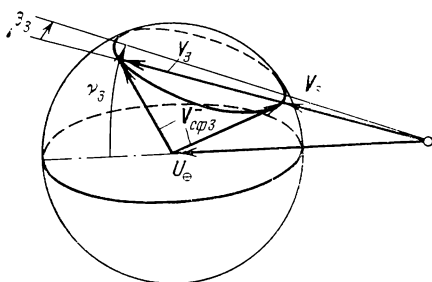


Рис. 12.3.19.

кости эклиптики, содержит вектор $\mathbf{V}_{3\tau}$. Из сказанного ясно, что вектор $\mathbf{V}_3$ удобно задать его модулем V_3 , углом между $\mathbf{U}_\oplus$ и $\mathbf{V}_{3\tau}$, равным наклонению ν_3 плоскости перелета Марс — Земля к плоскости эклиптики, и углом β_3 между $\mathbf{V}_{3r}$ и $\mathbf{V}_3$. Угол β_3 считаем положительным, если радиальная составляю-

щая V_3 , вектора V_3 направлена по гелиоцентрическому радиусу r_3 . Очевидны следующие неравенства:

$$-\arcsin \frac{V_{\text{сф}3}^-}{U_{\oplus}} \leqslant \nu_3, \quad \beta_3 \leqslant \arcsin \frac{V_{\text{сф}3}^-}{U_{\oplus}}. \quad (12.3.95)$$

Каждой паре значений ν_3 , β_3 , удовлетворяющих условию (12.3.95), соответствуют два значения V_3 , определяемые условием $V_{\text{сф}3}^- = \text{const}$ (или, что то же самое, условием $V_{\text{вх} \oplus} = \text{const}$):

$$\frac{V_3}{U_{\oplus}} = \cos \nu_3 \cos \beta_3 \pm \sqrt{\frac{(V_{\text{сф}3}^-)^2}{U_{\oplus}^2} + \cos^2 \nu_3 \cos^2 \beta_3 - 1}. \quad (12.3.96)$$

Воспользовавшись известными формулами для фокального параметра p_{23} (в астрономических единицах) и эксцентриситета e_{23} перелета Марс—Земля, следующими из (1.3.24), (1.3.26), (1.3.29), (1.3.30):

$$p_{23} = \left(\frac{V_3 \cos \beta_3}{U_{\oplus}} \right)^2, \quad e_{23}^2 = 1 + p_{23} \left(\frac{V_3^2}{U_{\oplus}^2} - 2 \right), \quad (12.3.97)$$

получим из (12.3.96) соотношение

$$e_{23}^2 = 1 - p_{23} \left(3 - \frac{(V_{\text{сф}3}^-)^2}{U_{\oplus}^2} \right) + 2 \cos \nu_3 p_{23}^{3/2}. \quad (12.3.98)$$

При $\nu_3 = 0$ (12.3.98) переходит в полученное ранее соотношение (12.3.88) или (12.3.89) для перелетов между компланарными орбитами.

При заданных $V_{\text{сф}3}^-$ (или $V_{\text{вх} \oplus}$) и ν_3 на плоскости p_{23} , e_{23} уравнению (12.3.98) соответствуют линии $V_{\text{вх} \oplus} = \text{const}$ (рис. 12.3.20). Свойства линий $V_{\text{вх} \oplus} = \text{const}$ (12.3.98) аналогичны свойствам изоэнергетических кривых (5.1.37), (5.1.43), (5.1.46), проанализированных в разделе 5.1.2. В частности, из двух корней $\sqrt{p_{23}}$, соответствующих точкам пересечения кривой (12.3.98) с каждой из граничных прямых области допустимых перелетов Марс—Земля (5.1.7), (5.1.8), надо брать корень, ближайший к точке, соответствующей гомановскому перелету. Физический смысл имеет участок кривой (12.3.98) для значений p_{23} между выбранными корнями, принадлежащий области допустимых перелетов. Гомановскому перелету соответствует предельно допустимое наклонение $\bar{\nu}_3$ плоскости перелета Марс—Земля, определяемое соотношением

$$\cos \bar{\nu}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{1/2} \left[\frac{3n+1}{n+1} - \frac{(V_{\text{сф}3}^-)^2}{U_{\oplus}^2} \right], \quad (12.3.99)$$

где $n = r_\varphi(t_2)/a_\oplus$, $a_\oplus$ — средний радиус орбиты Земли. При $|v_3| > |\bar{v}_3|$ кривая (12.3.98) не имеет общих точек с областью допустимых перелетов в указанном диапазоне значений p_{23} .

При расчете траектории Марс — Земля в соотношении (12.3.96) надо брать перед радикалом знак «+». Это соответствует тому, что для реальных траекторий Марс — Земля при $\cos v_3 \approx 1$, $\cos \beta_3 \approx 1$ всегда $V_3 > U_\oplus$.

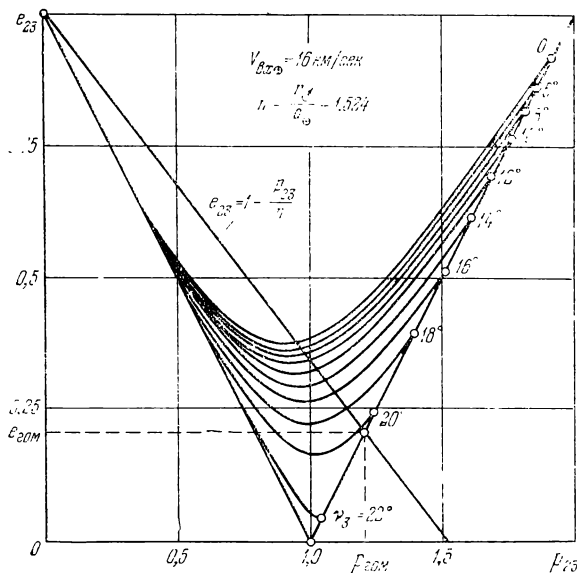


Рис. 12.3.20.

Рассмотрим алгоритмы решения задачи оптимизации трехимпульсного перелета Земля — Марс — Земля с заданной скоростью входа в атмосферу Земли. Отметим прежде всего, что к указанной задаче применимы все общие положения, высказанные в начале раздела 12.3.2. Для нахождения оптимального перелета можно с незначительными изменениями воспользоваться изложенным в этом разделе алгоритмом, добавив к условиям (12.3.64), (12.3.65) соотношение (12.3.98), которое записывается в виде условия

$$V_{сф3} = V_{сф3}(t_2, t_3) = V_{сф3}^* = \text{const.} \quad (12.3.100)$$

Вследствие связей (12.3.64), (12.3.65) и (12.3.100) из четырех дат t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, независимой является только одна, в качестве которой удобно взять дату старта с орбиты ИСМ t_2 . Варьируя t_3 при $t_2 = \text{fix}$, находим t_3 , при котором удовлетворяется условие (12.3.100).

Рассмотрим теперь другой алгоритм, в котором соотношение (12.3.98) непосредственно используется для определения перелета Марс — Земля (см. В. В. Балашов [2]). Пусть задана угловая дальность перелета Марс — Земля η_{23} и скорость на сфере влияния Земли $V_{\text{сф}3}$. Исключая из (5.1.64) и (12.3.98) эксцентриситет e_{23} , получим для нахождения p_{23} алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $\sqrt{p_{23}}$ (аналогичное уравнению (12.3.24)):

$$b_2 p_{23}^2 - 2 \cos \nu_3 p_{23}^{3/2} + \left[3 + b_1 - \frac{(V_{\text{сф}3}^-)^2}{U_{\oplus}^2} \right] p_{23} + b_0 - 1 = 0. \quad (12.3.101)$$

Пусть теперь, как и ранее, $t_2 = \text{fix}$, а $t_3 = \text{var}$. Для каждой пары дат t_2, t_3 находим η_{23} , ν_3 , p_{23} и e_{23} с помощью (12.3.101) и (5.1.64) или (12.3.98) и продолжительность перелета $t_{23}(p_{23}, e_{23})$. Сравнивая ее с продолжительностью $t_{23} = t_3 - t_2$, получаемой в процессе варьирования t_3 , находим нужное значение t_3 . В остальном оба алгоритма совпадают между собой. Отметим, что второй алгоритм обладает определенным преимуществом перед первым, поскольку в нем трансцендентная система (12.3.61) заменена алгебраическим уравнением (12.3.101).

§ 12.4. Исследование оптимальных траекторий полета к планетам

Ниже приведены результаты исследования оптимальных четырехимпульсных перелетов Земля — Марс — Земля, Земля — Венера — Земля и перелетов Земля — Марс — Земля с торможением в атмосферах планет в соответствии с предположениями и методикой, изложенными в § 12.3. При решении внутренней задачи ММСВ полагалось

$$\rho_{\text{сф}\oplus} = \rho_{\text{сф}\delta} = \rho_{\text{сф}\varphi} = \infty. \quad (12.4.1)$$

Все описываемые ниже результаты расчетов относятся к предельному случаю высот орбит ИС планет

$$H_{\text{ср}\oplus} = H_{\delta} = H_{\varphi} = 0. \quad (12.4.2)$$

Выполненные расчеты (результаты которых не приводятся) показали, что все качественные результаты остаются в силе и для другого предельного случая

$$H_{\alpha\oplus} = H_{\pi\oplus} = H_{\delta} = H_{\varphi} = \infty. \quad (12.4.3)$$

Однако в последнем случае заметно возрастает характеристическая скорость перелетов.

Из сказанного ясно, что полученные ниже общие результаты справедливы для любых высот орбит ИС Земли и планеты назначения. Что касается численных результатов, то они с большой степенью точности справедливы для низких орбит ИС, с высотой порядка нескольких сот километров над поверхностью планеты.

Все основные исходные данные, необходимые для расчета перелетов Земля — планета — Земля, приведены в таблице 12.4.1. Параметры гомазовских перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля, рассчитанные для плоской круговой модели движения планет в соответствии с соотношениями раздела 5.1.1, приведены в таблице 12.4.2.

Орбиты и характеристики

Планета	Большая по- луось a , км	Эксцентриси- тет e	Наклонение орбиты к эк- липтике i	Средняя ор- битальная скорость U , км/сек	Период обра- щения, годы
Меркурий	$57,871 \cdot 10^6$	0,2056259	$7^\circ 0' 14'' ,2$	47,848	0,2411
Венера	$108,138 \cdot 10^6$	0,0067935	$3^\circ 23' 39'' ,1$	35,003	0,615187
Земля	$149,5 \cdot 10^6$	0,067272		29,77	1,0
Марс	$777,819 \cdot 10^6$	0,0933654	$1^\circ 50' 50'' ,8$	24,117	1,880815
Юпитер	$227,792 \cdot 10^6$	0,0484305	$1^\circ 18' 19'' ,9$	13,051	11,86
Сатурн	$1426,06 \cdot 10^6$	0,0556922	$2^\circ 29' 42'' ,2$	9,639	29,46
Уран	$2867,7 \cdot 10^6$	0,0472012	$0^\circ 46' 22'' ,9$	6,797	84,0
Нептун	$4493,63 \cdot 10^6$	0,0085724	$1^\circ 46' 26'' ,5$	5,430	164,8
Плутон	$5907,9 \cdot 10^6$	0,2486438	$17^\circ 8' 38'' ,4$	4,736	247,7

Примечания. 1. Средний радиус планеты определен по формуле $R_{cp} = \frac{a+b}{2}$, где a — большая полуось, b — полярный радиус планеты.

2. Первая космическая скорость определена по формуле $V_I = \sqrt{\frac{\mu}{R_{cp}}}$.

Средние (оскулирующие) элементы орбит планет можно определить с помощью формул, приводимых, например, в Астрономических Ежегодниках СССР; сводка этих формул дана в монографии Ц. В. Соловьева, Е. В. Тарасова [1].

12.4.1. Четырехимпульсные перелеты орбита ИСЗ — орбита ИС Марса — орбита ИСЗ (В. А. Ильин, Н. А. Истомин, 1965 г.)

Обоснование расчетных случаев. Рассмотрим соотношения (12.3.4) и (12.3.8) для «быстрых» перелетов при $k = 0$ и для «длительных» перелетов при $k = 1$. При $k = 0$ наибольшую трудность для оптимизации перелетов представляет необходимость выполнения условия $\Delta t_{\Sigma} \geq 0$, поэтому быстрые перелеты надо искать на маршрутах AB и BB , где за счет пери-

центрического участка у маршрута B (при залете внутрь орбиты Земли) удастся выполнить условие

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\eta_{\Sigma}}{t_{\Sigma}} \Rightarrow \max > \omega_{\oplus}. \quad (12.4.4)$$

При $k=1$ основная трудность при оптимизации перелетов связана с наличием «избыточного» времени в T_{Σ} , вследствие чего необходимо минимизировать величину

$$T_{01} + T_{23} = \frac{\eta_{\Sigma} - \omega_{\delta} t_{\Sigma}}{\omega_{\oplus} - \omega_{\delta}} \Rightarrow \min. \quad (12.4.5)$$

Таблица 12.4.1

планет (Эрике [5])

Синодический период $T_{\text{син}}, \text{сут}$	Средний радиус $R_{\text{ср}}, \text{км}$	Масса $\frac{m_{\odot}}{m_{\text{П}}}$	Гравитационная постоянная $\mu, \text{км}^3/\text{сек}^2$	Первая космическая скорость $V_{\Gamma}, \text{км/сек}$	Радиус сферы действия $R_{\text{сф}}, \text{км}$
115,94	2500	$6,12 \cdot 10^6 \pm 43000$	$2,16494 \cdot 10^4$	2,94279	$0,11162 \cdot 10^6$
583,922	6200	$4,08645 \cdot 10^5 \pm 208$	$3,2423 \cdot 10^5$	7,23154	$0,61580 \cdot 10^6$
—	6371,31	$3,32488 \cdot 10^5$	$3,9858 \cdot 10^5$	7,90949	$0,92455 \cdot 10^6$
779,937	3304,34	$3,0880 \cdot 10^5 \pm 3000$	$4,2906 \cdot 10^4$	3,60278	$0,57765 \cdot 10^6$
398,89	68334,95	$1,0474 \cdot 10^3 \pm 0,03$	$1,26498 \cdot 10^8$	43,025	$48,176 \cdot 10^6$
378,11	55455,8	$3,49764 \cdot 10^3 \pm 0,27$	$3,78811 \cdot 10^7$	26,136	$54,529 \cdot 10^6$
369,65	24877,8	$2,2869 \cdot 10^4 \pm 300$	$5,79364 \cdot 10^6$	15,2605	$51,741 \cdot 10^6$
367,50	24814,8	$1,9314 \cdot 10^4 \pm 300$	$6,86004 \cdot 10^6$	16,627	$86,746 \cdot 10^6$
366,75	5996,7	$4,0 \cdot 10^5 \pm 30000$	$3,31237 \cdot 10^5$	7,4321	$33,932 \cdot 10^6$

$= a(1-\varepsilon)^{1/3}$, где a — экваториальный радиус планеты, ε — сжатие планеты, $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$,

В этом смысле наиболее подходящими оказываются маршруты AC и CC , для которых за счет отставания в апоцентрической части маршрута C (при залете за орбиту Марса) удастся выполнить условие

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\eta_{\Sigma}}{t_{\Sigma}} \Rightarrow \min < \omega_{\delta}. \quad (12.4.6)$$

Перелеты, содержащие маршрут D , а также перелет BC исключаются из рассмотрения вследствие их внутренней противоречивости: на одних участках этих перелетов реализуется условие (12.4.4), а на других — условие (12.4.6). Из сказанного выше и непосредственных численных оценок следует, что при $k=0$

Т а б л и ц а 12.4.2

Характеристики гомановских перелетов

Перелет	ΔV_{Σ} , км/сек		T_{Σ} , сут	Δt_{Σ} , сут	t_{Σ} , сут
	$H_{\pi} = H_{\alpha} = 0$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = \infty$			
Земля — Марс — Земля	11,592	11,182	972,171	454,523	517,648
Земля — Венера — Земля	13,796	10,398	759,078	466,995	292,083

Перелет	ΔV_{01} , км/сек		ΔV_0 , км/сек		ΔV_1 , км/сек	
	$H_{\pi} = H_{\alpha} = 0$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = \infty$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = 0$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = \infty$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = 0$	$H_{\pi} = H_{\alpha} = \infty$
Земля — Марс — Земля	5,796	5,591	3,657	2,943	2,139	2,648
Земля — Венера — Земля	6,898	5,199	3,551	2,494	3,347	2,705

Перелет	t_{01} , сут	χ_0	χ_2	p	e
Земля — Марс — Земля	258,824	44°,38	-75°,10	1,2075	0,2075
Земля — Венера — Земля	146,042	-54°,033	+36°,019	1,1605	0,1605

Обозначения к таблице 12.4.2

 ΔV_{Σ} — суммарная характеристическая скорость перелета орбита ИС3 — орбита ИС планеты — орбита ИС3, ΔV_{01} — характеристическая скорость перелета орбита ИС3 — орбита ИС планеты (или орбита ИС планеты — орбита ИС3, $\Delta V_{23} = \Delta V_{01}$), ΔV_0 — импульс скорости на орбите ИС3, ΔV_1 — импульс скорости на орбите ИС планеты, $T_{\Sigma} = t_{\Sigma} + \Delta t_{\Sigma}$ — суммарная продолжительность перелета, Δt_{Σ} — продолжительность ожидания на орбите ИС планеты, t_{Σ} — продолжительность перелета на гелиоцентрических участках, t_{01} — продолжительность перелета на участке орбита ИС3 — орбита ИС планеты (или орбита ИС планеты — орбита ИС3, $t_{23} = t_{01}$), χ_0, χ_2 — углы между гелиоцентрическими радиусами-векторами Земли r_0 и планеты (Марса r_2 или Венеры r_2) в момент старта с орбиты ИС3 и орбиты ИС планеты соответственно (см. рис. 12.3.2), p, e — фокальный параметр и эксцентриситет гомановского эллипса, H_{π}, H_{α} — высоты перицентра и апоцентра, соответственно, орбиты ИС планеты.

не имеет смысла рассматривать перелеты AC и CC , для которых $\Delta t_z < 0$, а при $k = 1$ — перелеты AB и BB , для которых $\Delta t_z \geq \Delta t_{z \text{ гом.}}$

Результаты расчета перелетов без учета эллиптичности и наклона орбит планет. Как показали расчеты, характеристики оптимальных перелетов AC ($k = 1$) и AB ($k = 0$) практически совпадают с характеристиками перелетов CC ($k = 1$) и BB ($k = 0$) соответственно, поскольку у перелетов BB одна дуга $B \approx$ дуге A , а у перелетов CC одна дуга $C \approx$ дуге A .

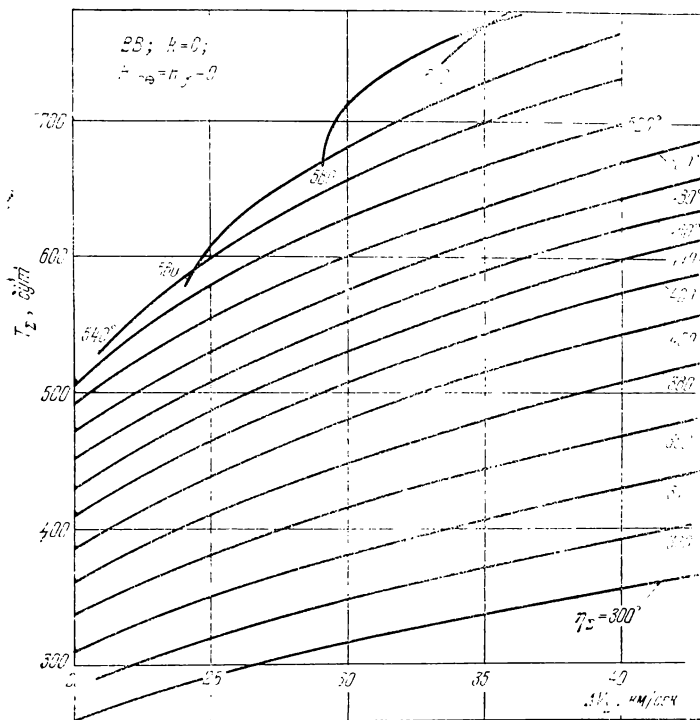


Рис. 12.4.1.

Расчет оптимальных перелетов с заданным Δt_z проводился на основе задачи $(\Delta V_z, \eta_z, t_z \Rightarrow \text{extr})$ (12.3.22), т. е. решение получалось в параметрическом виде в зависимости от η_z . Из формул (12.4.4) и (12.4.6) следует, что в этой задаче при $\eta_z = \text{const}$ быстрым перелетам ($k = 0$) соответствует $t_z \Rightarrow \min$, а длительным перелетам ($k = 1$) — $t_z \Rightarrow \max$.

Результаты решения задачи $(\Delta V_z, \eta_z, t_z \Rightarrow \min)$ для быстрых перелетов приведены на рис. 12.4.1, 12.4.2, а полученные с

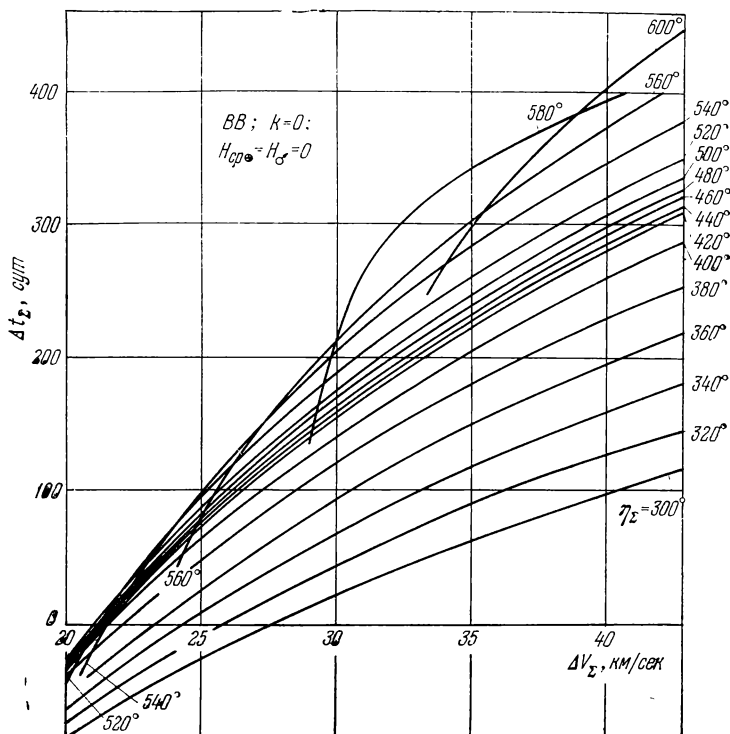


Рис. 12.4.2.

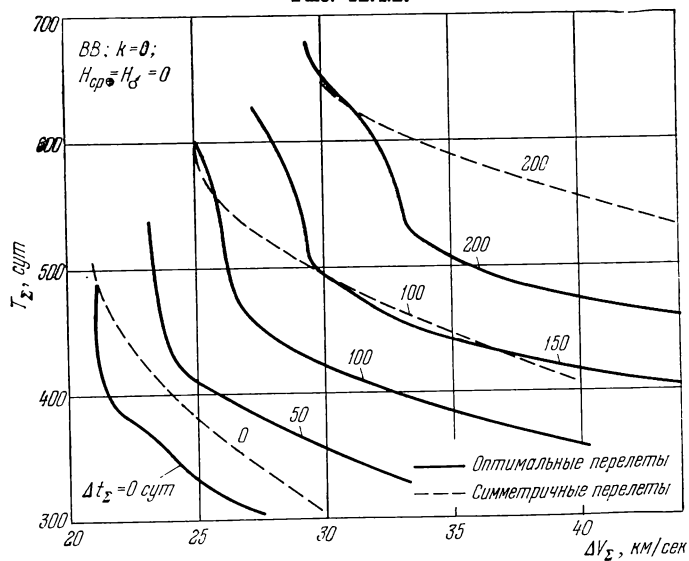


Рис. 12.4.3.

помощью этих данных результаты решения исходной задачи (T_z , Δt_z , $\Delta V_z \Rightarrow \min$) — на рис. 12.4.3.

Из приведенных на рис. 12.4.4 зависимостей $\Delta t_z = \Delta t_z(t_z) | \Delta V_z = \text{const}$, в соответствии со сформулированным в разделе 12.3.1 критерием (см. соотношения (12.3.29) — (12.3.37)), следует, что в области значений Δt_z до огнивающей на рис. 12.4.2 найденные перелеты действительно являются оптимальными, на участке же ab полученное решение не оптимально.

Из вида зависимостей, приведенных на рис. 12.4.1—12.4.3, следует, что семейство кривых $\Delta t_z = \text{const}$ (рис. 12.4.3) регулярным образом продолжается в область значений $\Delta t_z < 0$. Поэтому снятие ограничения на Δt_z дает при оптимизации «перелеты», для которых $\Delta t_z < 0$. Следовательно, оптимальных быстрых перелетов Земля — Марс — Земля с заданным временем ожидания в рассматриваемой области значений ΔV_z , T_z не существует.

Быстрые перелеты существенно несимметричны, степень не-

симметрии характеризуется приближенными соотношениями $\Delta V_{23} \approx (1,5 \div 2,0) \Delta V_{01}$, $\eta_{23} \approx (1,5 \div 2,0) \eta_{01}$, где индексы «01» и «23» можно поменять местами. С ростом ΔV_z одна из кеплеровых дуг перелета остается близкой к касательной к орбите Земли ($\approx A$), а у другой (B) увеличивается перицентрическая часть (залетает внутрь орбиты Земли). На рис. 12.4.5 приведены сечения поверхности $t_z = t_z(\Delta V_{01}, \eta_{01}) | \Delta V_z = \text{const}$, $\eta_z = \text{const}$ плоскостями $\eta_{01} = \text{const}$. Видно, что симметричному перелету ($\Delta V_{01} = \Delta V_z/2$, $\eta_{01} = \eta_z/2$) соответствует седловая точка, т. е. симметричный перелет является стационарным. Однако точка, соответствующая оптимальному перелету ($t_z \Rightarrow \min$), находится вдали от точки, соответствующей симметричному перелету, и дает гораздо меньшие значения t_z . Несимметрия перелета позволяет, при

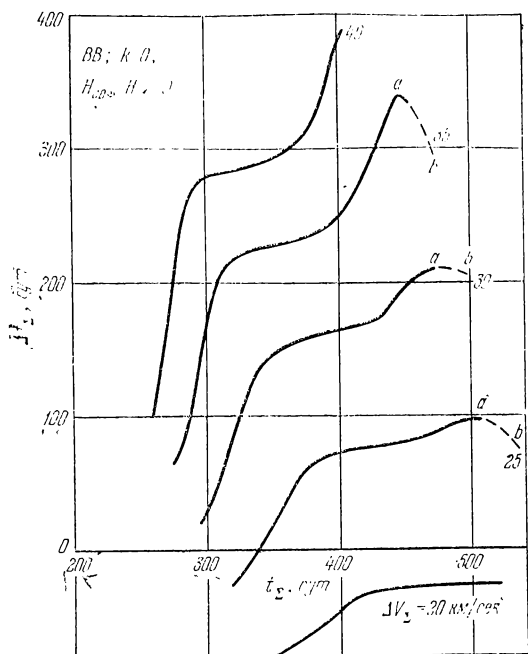


Рис. 12.4.4.

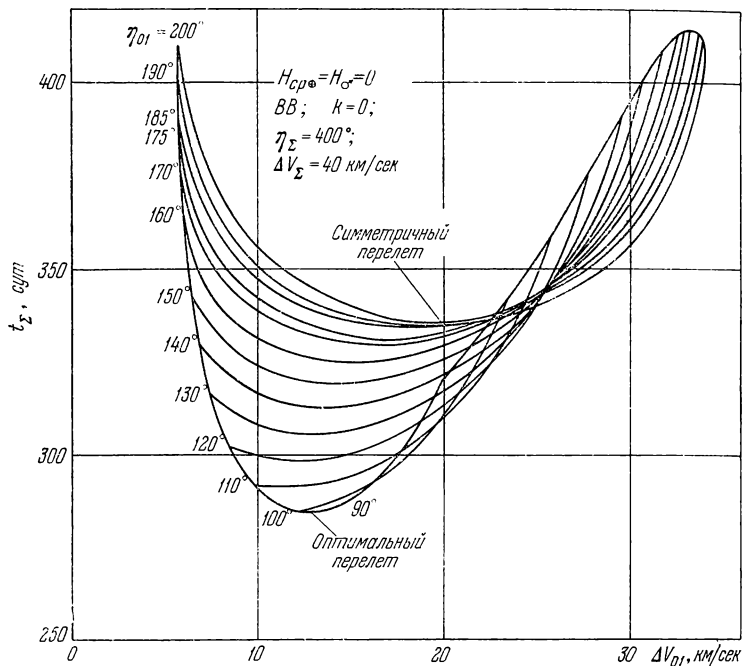


Рис. 12.4.5.

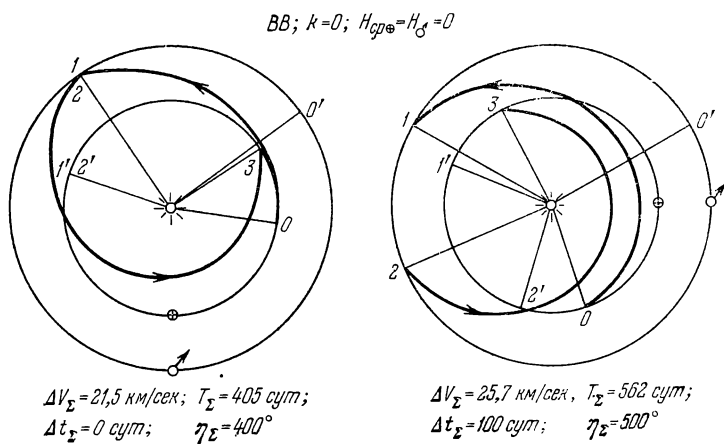


Рис. 12.4.6.

прочих равных условиях, уменьшить величину T_{Σ} в среднем на 15—17% по сравнению с симметричными перелетами (рис. 12.4.3). Примеры оптимальных быстрых четырехимпульсных перелетов приведены на рис. 12.4.6.

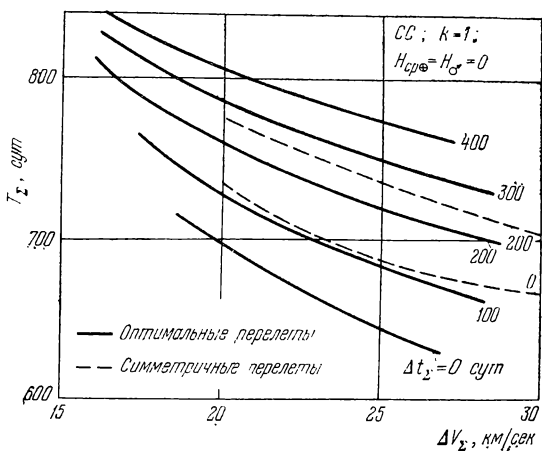
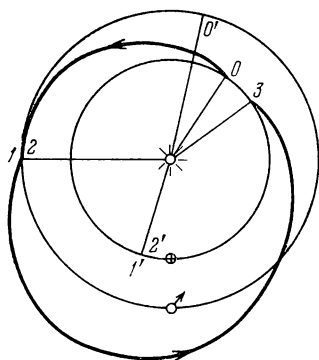
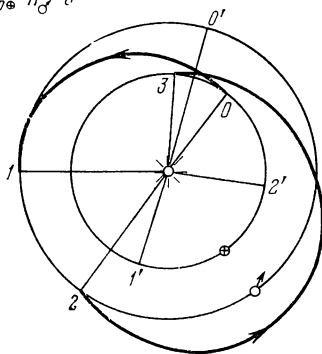


Рис. 12.4.7.

CC; $k=1$; $H_{ср} = H_{Г} = 0$



$\Delta V_{\Sigma} = 18,8 \text{ км/сек}$; $T_{\Sigma} = 714 \text{ сут}$;
 $\Delta t_{\Sigma} = 0 \text{ сут}$; $\gamma_{\Sigma} = 340^{\circ}$



$\Delta V_{\Sigma} = 17,45 \text{ км/сек}$; $T_{\Sigma} = 763 \text{ сут}$;
 $\Delta t_{\Sigma} = 100 \text{ сут}$; $\gamma_{\Sigma} = 340^{\circ}$

Рис. 12.4.8

Результаты аналогичного расчета оптимальных длительных перелетов с заданным временем ожидания приведены на рис. 12.4.7. Оптимальные быстрые перелеты также являются несимметричными: одна из кеплеровых дуг перелета все время близка к касательной к орбите Марса ($\approx A$), а на другой кеплеровой дуге (C) с ростом ΔV_{Σ} существенно увеличивается апоцентрическая

часть (залет за орбиту Марса). Это обстоятельство объясняет все основные особенности длительных перелетов, в частности большую чувствительность их параметров к изменению величины ΔV_z . Однако относительная роль несимметрии в уменьшении T_z , ввиду наличия в формуле (12.3.8) большого слагаемого $T_{\text{сим}}$, здесь гораздо меньше, чем для быстрых перелетов (см. рис. 12.4.3 и 12.4.7). Поскольку при $\Delta V_z > 21$ км/сек возможен переход к быстрым перелетам, длительные перелеты с заданным временем ожидания имеет смысл рассматривать в ограниченном диапазоне значений ΔV_z . Примеры оптимальных длительных четырехимпульсных перелетов с заданным временем ожидания приведены на рис. 12.4.8.

Семейство кривых $T_z = T_z(\Delta V_z, \Delta t_z = \text{const})$ для длительных перелетов (см. рис. 12.4.7) имеет слева огибающую, соответствующую, как указывалось в

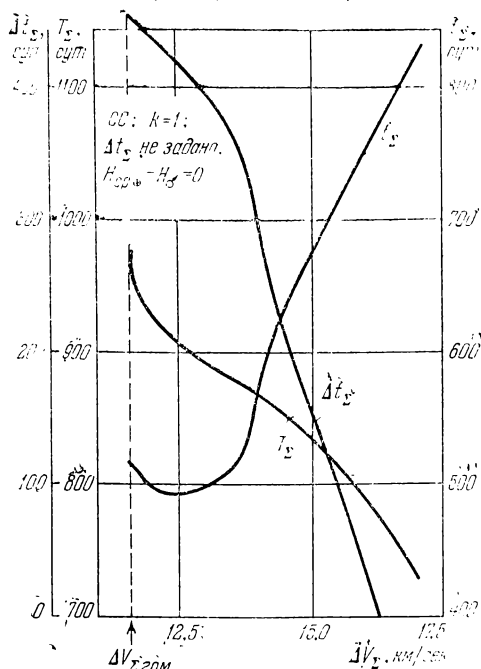


Рис. 12.4.9.

разделе 12.3.1, длительным оптимальным перелетам с незадаанным временем ожидания, характеристики которых приведены на рис. 12.4.9, 12.4.10. Эти перелеты при $\Delta V_{z \text{ том}} \leq \Delta V_z \leq 13$ км/сек являются симметричными; с ростом ΔV_z перелеты становятся все более несимметричными, одна из кеплеровых дуг остается близкой к гомановской, а вся остальная характеристическая скорость «расходуется» на другую кеплерову дугу перелета (см. рис. 12.4.10). В результате с ростом ΔV_z происходит существенное увеличение апоцентрической части перелета, расположенной за орбитой Марса, сильное возрастание t_z и, соответ-

ственно, уменьшение T_z и Δt_z . Однако это же обстоятельство ограничивает сверху диапазон значений ΔV_z для рассматриваемых перелетов, поскольку условие $\Delta t_z \geq 0$ перестает выполняться при $\Delta V_z \geq 16,3$ км/сек (см. рис. 12.4.9). Поэтому при больших значениях ΔV_z необходимо переходить к длительным перелетам с заданным временем ожидания.

Сводная картина оптимальных четырехимпульсных перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ — орбита ИСЗ показана на рис. 12.4.11. Заметим, что увеличение характеристической скорости ΔV_z свыше 25 км/сек не даст существенного уменьшения продолжительности перелета T_z .

Как было показано выше, оптимальные перелеты Земля — Марс — Земля являются, как правило, несимметричными. Это объясняется особой ролью перицентральных и апоцентральных участков орбит перелета, за счет движения по которым и удастся реализовать экстремальные свойства. В состав длительных перелетов обязательно входит дуга эллипса, апоцентр которого находится за орбитой Марса и на которой осуществляется интенсивное угловое сближение аппарата с Землей за счет отставания аппарата от Земли; в состав быстрых перелетов входит кеплерова дуга, перицентр которой расположен внутри орбиты Земли и на которой осуществляется интенсивный обгон аппаратом Земли.

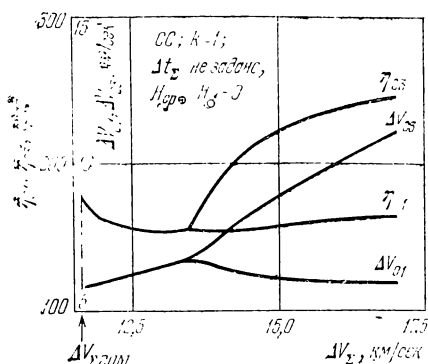


Рис. 12.4.10.

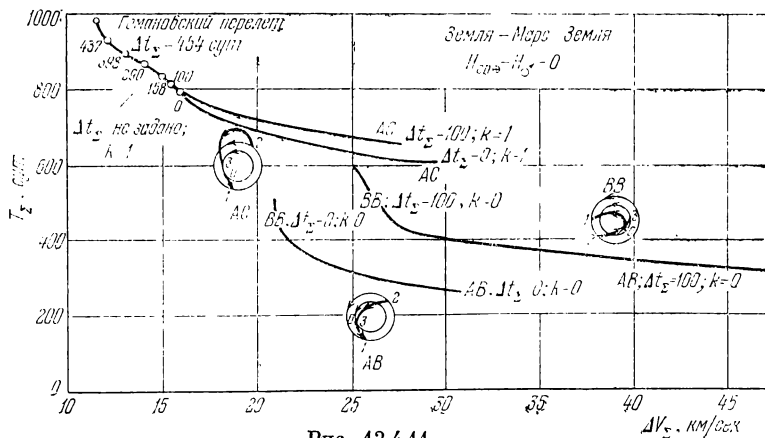


Рис. 12.4.11.

Результаты расчета перелетов с учетом эллиптичности и наклона орбит планет. Оптимальные перелеты с заданным и незадаанным временем ожидания для пространственной эллиптической модели движения планет

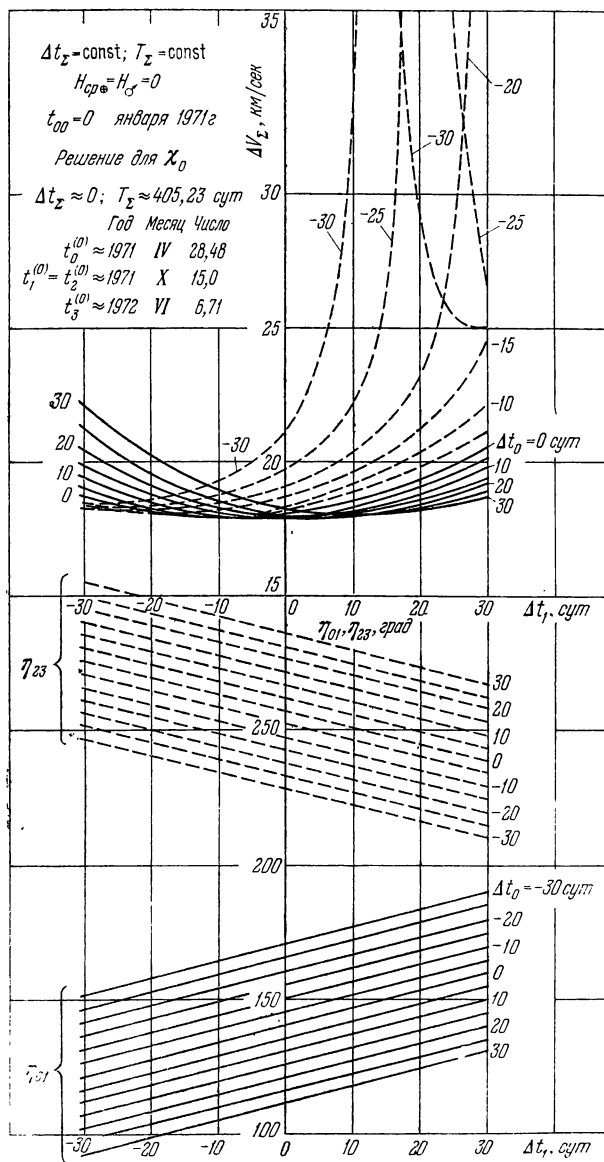


Рис. 12.4.12.

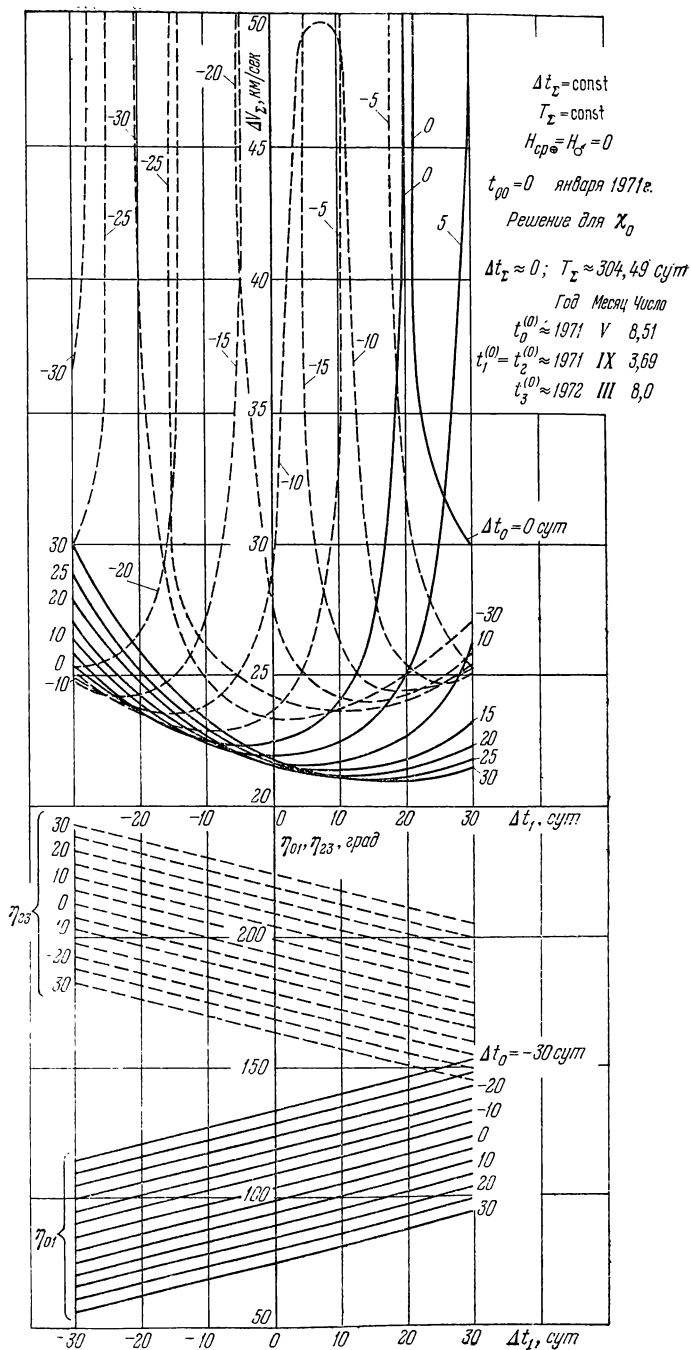


Рис. 12.4.13.

находятся минимизацией функций $\Delta V_z(t_0, t_1) | T_z = \text{const}$, $\Delta t_z = \text{const}$ и $\Delta V_z(t_0, t_1, t_2) | T_z = \text{const}$ соответственно. При этом существенную роль начинает играть структура поверхности $\Delta V_z(t_i)$ в окрестности точки $t_i^{(0)}$, обусловленная влиянием наклона орбиты Марса на ориентацию в пространстве перелетов Земля — Марс и Марс — Земля (см. раздел 12.3.2).

Рассмотрим для примера типичную структуру этой поверхности в случае быстрых перелетов с заданным временем ожидания, поскольку в остальных случаях получаются аналогичные результаты. На рис. 12.4.12 показана поверхность $\Delta V_z(\Delta t_0, \Delta t_1)$, где $\Delta t_i = t_i - t_i^{(0)}$, $i = 0, 1$, и соответствующие зависимости $\eta_{01}(\Delta t_0, \Delta t_1)$ и $\eta_{23}(\Delta t_0, \Delta t_1)$ для случая, когда η_{01} и η_{23} в окрестности точки $\min \Delta V_z$ не принимают значений, близких к 180° . Видно, что учет наклона (и эллиптичности) приводит линии к численным поправкам в ΔV_z , структура же поверхности $\Delta V_z(t_i)$ по сравнению со структурой, соответствующей плоской круговой модели движения планет, не искажается, так что исходное приближение — точка $\Delta t_0 = \Delta t_1 = 0$ — находится в области унимодальности абсолютного минимума ΔV_z . На рис. 12.4.13 показана поверхность $\Delta V_z(\Delta t_0, \Delta t_1)$ для случая, когда в окрестности точки $\min \Delta V_z$ имеются линии, близкие к прямым (12.3.80), вдоль которых $\eta_{01} \approx 180^\circ$ или $\eta_{23} \approx 180^\circ$ и, следовательно, располагаются области резкого возрастания ΔV_z (см. раздел 12.3.2). С вычислительной точки зрения основное затруднение представляет появление локальных минимумов ΔV_z . Однако, поскольку линии ΔV_z очень узки, абсолютный минимум поверхности ΔV_z по-прежнему находится в окрестности точки $\Delta V_z(t_i^{(0)})$. Отмеченные особенности приводят при расчете на ЭЦВМ к необходимости принятия специальных мер для получения глобальных минимумов ΔV_z .

Полный синодический цикл — период движения пары Земля — Марс $T_x \approx 19$ лет и составляет примерно девять синодических периодов длины $T_{\text{сн}} \approx 779,9$ сут (см. таблицу 12.3.1). В таблице 12.4.3 приведены даты противостояний Земли и Марса на период 1971—2000 гг. Каждому синодическому периоду присвоен порядковый номер N , а дата противостояния t_N соответствует началу рассматриваемого синодического периода. Характеристики перелетов достаточно определить в одном из синодических циклов. Внутри каждого из периодов T_x последовательные оптимальные даты старта t_0 с орбиты ИСЗ следуют примерно с периодом $T_{\text{сн}} \approx 779,9$ сут, поэтому начальные даты t_{00} следует задавать с интервалом примерно 2 года. При поиске оптимальных перелетов в пределах каждого синодического периода средние элементы орбиты Земли и Марса вычислялись для момента t_{00} и считались для соответствующего синодического периода постоянными (см. предположение 2° в начале раздела 12.2.1).

Результаты расчета суммарных характеристик пространственных перелетов для двух дат $t_{00} = 0$ января 1971 г. и $t_{00} = 0$ января 1973 г. приведены на рис. 12.4.14 и 12.4.15 соответственно.

На каждом периоде длиной $\sim T_{\text{сип}}$ существуют два семейства решений задачи оптимизации, соответствующие начальным углам χ_0 и $\bar{\chi}_0$ (см. раздел 12.3.2, соотношения (12.3.70), (12.3.71)). Эти решения характеризуются тем, что в них кеплеровы дуги перелетов Земля — Марс и Марс — Земля переставлены местами. В плоском круговом случае суммарные характеристики этих решений

Таблица 12.4.3

Номер спино- дического пе- риода N	Дата проти- востояния Земли и Мар- са (число, месяц, год)	Число суток до момента проти- востояния, про- шедших с 1 ян- варя 1900 г., t_N	Угловое рассто- яние от направ- ления на точку весеннего равно- денствия, град	Расстояние между Землей и Мар- сом в момент противостояния, млн. км
1	10.08.71	26 153	317	56,3
2	25.10.73	26 960	31	65
3	15.12.75	27 741	83	84,5
4	22.01.78	28 510	121	99
5	25.02.80	29 274	155	100,5
6	31.03.82	30 039	190	95
7	11.05.84	30 811	230	80
8	10.07.86	31 601	287	60,5
9	28.09.88	32 411	4	59
10	27.11.90	33 202	65	77,5
11	08.01.93	33 975	107	93,5
12	12.02.95	34 740	142	101
13	17.03.97	35 504	176	98,5
14	24.04.99	36 372	213	86,5

совпадают. В пространственном случае качественно имеет место тот же результат, хотя количественно характеристики этих решений могут заметно различаться.

Наиболее интересным результатом решения пространственной задачи является заметное влияние эллиптичности орбиты Марса на характеристическую скорость быстрых перелетов. Сравнение значений $\min_{\{T_{\Sigma}\}} \Delta V_{\Sigma}(T_{\Sigma})$ на оптималах $\Delta t_{\Sigma} = 0$ (см.

рис. 12.4.14, 12.4.15) для дат $t_{00} = 0$ января 1967, 1969, 1971 и 1973 гг., приведенных на рис. 12.4.16, показывает, что $\min \min \Delta V_{\Sigma} \approx 18$ км/сек (по сравнению с $\min \min \Delta V_{\Sigma} \approx \approx 21,5$ км/сек для плоской круговой модели) и достигается при $t_{00} = 0$ января 1971 г. Из данных этого же рисунка следует, что уменьшение $\min \Delta V_{\Sigma}(T_{\Sigma}) | \Delta t_{\Sigma} = 0$ связано с уменьшением отно-

сительного расстояния $n_{01} = \frac{r_{\delta}(t_1)}{r_{\oplus}(t_0)}$, $n_{23} = \frac{r_{\delta}(t_2 = t_1)}{r_{\oplus}(t_3)}$ ($n_{01} \approx \approx n_{23}$) до Марса: при $t_{00} = 0$ января 1971 г. аппарат подлетает

к Марсу в момент нахождения последнего в перигелической части орбиты (см. таблицу 12.4.3). Соответствующая минимальная характеристическая скорость для длительных перелетов с заданным временем ожидания составляет $\Delta V_{\Sigma} \approx 14$ км/сек (по сравнению с $\Delta V_{\Sigma} = 15,5$ км/сек для плоской круговой модели).

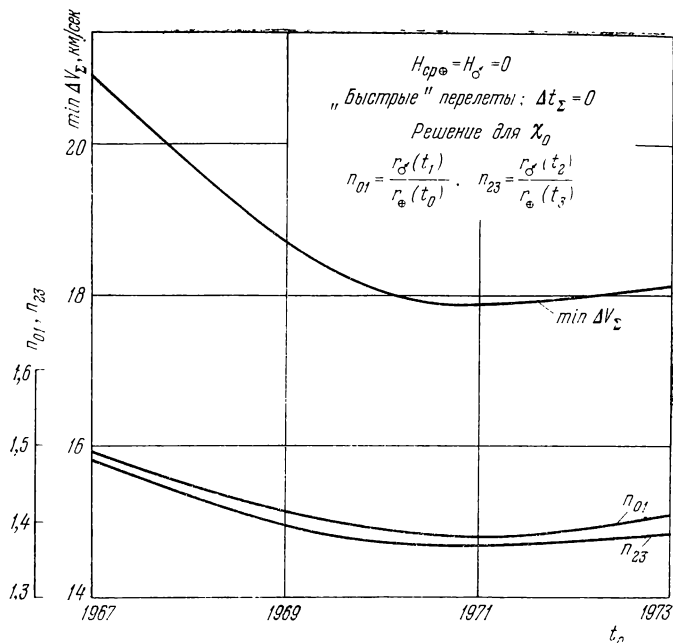


Рис. 12.4.16.

Наклонение орбиты Марса практически не оказывает влияния на характеристики оптимальных перелетов, за исключением перелетов, близких к гомановскому. Влияние эллиптичности и здесь оказывается существенным. Однако при $\Delta V_{\Sigma} \approx \Delta V_{\Sigma \text{ гом}}$ углы перелета η_{01} , η_{23} приближаются к 180° , что всегда ведет к возрастанию ΔV_{Σ} . В результате, например, для $t_{00} = 0$ января 1971 г. (рис. 12.4.14) при $\Delta V_{\Sigma} > 13,5$ км/сек пространственные перелеты лучше плоских, а при $\Delta V_{\Sigma} < 13,5$ км/сек несколько хуже.

Таким образом, если оптимизация перелета обеспечивается путем варьирования дат t_i , то в процессе поиска $\min \Delta V_{\Sigma}(t_i)$ $\{t_i\}$ пики поверхности $\Delta V_{\Sigma}(t_i)$ обязательно обходятся, и, следовательно, перелеты Земля — планета и планета — Земля с углами перелета η_{01} , η_{23} , близкими к 180° , не могут входить в состав опти-

малых перелетов. В результате характеристики оптимальных пространственных перелетов всегда близки к характеристикам соответствующих плоских перелетов. Это позволяет в качестве исходного приближения при расчете оптимальных пространственных перелетов использовать результаты решения для плоской круговой модели движения планет.

Приведенные данные показывают, что в случае перелетов Земля — Марс — Земля основным фактором в пространственной эллиптической модели движения планет является эллиптичность,

Таблица 12.4.4

	Земля — Марс	Венера — Земля
$n = \frac{r_1}{r_0}$	$\frac{r_{\oplus}}{r_{\oplus}} = 1,524$	$\frac{r_{\oplus}}{r_{\oplus}} = 1,382$
$\bar{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\oplus}}{\omega_{\oplus}} = 0,5317$	$\frac{\omega_{\oplus}}{\omega_{\oplus}} = 0,6152$
$T_{\text{сип}}, \text{ сут}$	779,9	583,9

орбиты Марса. Поэтому при решении задач оптимизации целесообразно рассматривать более простые модели движения планет, полагая $i_{\sigma} = 0$, $e_{\oplus} = 0$, $e_{\sigma} \neq 0$ или $i_{\sigma} = 0$, $e_{\oplus} \neq 0$, $e_{\sigma} \neq 0$. В результате при сохранении приемлемой точности можно заметно упростить алгоритм расчета.

12.4.2. Четырехимпульсные перелеты орбита ИСЗ — орбита ИС Венера — орбита ИСЗ (В. А. Ильин, В. В. Демешкина, 1966 г.). Для предварительного анализа оптимальных перелетов Земля — Венера — Земля можно использовать результаты исследования оптимальных перелетов Земля — Марс — Земля. Для этого надо применить указанный в разделе 12.3.1 прием сведения задачи о перелетах Земля — Венера — Земля к некоторой фиктивной задаче о «перелетах» Венера — Земля — Венера. В качестве одностороннего перелета рассматривается перелет Венера — Земля (на «внешнюю» планету). Сведение исходной задачи к фиктивной сразу же дает возможность, используя схожесть относительного гелиоцентрического движения пар планет Земля — Марс и Венера — Земля (см. таблицу 12.4.4), перенести результаты общего исследования перелетов Земля — Марс — Земля на перелеты Земля — Венера — Земля, обосновать расчетные случаи, указать оптимальные сочетания маршрутов и установить смысл экстремума t_{Σ} в задаче $(\Delta V_{\Sigma}, \eta_{\Sigma}, t_{\Sigma} \Rightarrow \text{extr})$ (см. (12.3.22)). Так как общая схема рассуждений остается такой же, как и для перелетов Земля — Марс — Земля (см. раздел 12.4.1), ниже ограничимся рассмотрением основных результатов.

Обоснование расчетных случаев. Поскольку $\omega_2 < \omega_\oplus$, из (12.3.4) при $k=0$ получаем, что для обеспечения условия $\Delta t_\Sigma > 0$ оптимальные быстрые перелеты надо искать на маршрутах, для которых

$$\omega_{cp} = \frac{\eta_\Sigma}{t_\Sigma} \rightarrow \min < \omega_\oplus. \quad (12.4.7)$$

Для этого наиболее подходят маршруты AC и CC , включающие дугу C , на которой за счет увеличения апоцентрической части (вылета за орбиту Земли) естественно удовлетворяется условие (12.4.7). Оптимальные длительные перелеты надо искать на маршрутах, для которых из условия минимизации величины (12.4.5)

$$\omega_{cp} = \frac{\eta_\Sigma}{t_\Sigma} \rightarrow \max > \omega_\oplus, \quad (12.4.8)$$

т. е. на маршрутах AB и BB , включающих дугу B , на которой за счет перицентрической части (залета внутрь орбиты Венеры) естественно реализуется условие (12.4.8). Остальные маршруты исключаются из рассмотрения вследствие их внутренней противоречивости. Дополнительный численный анализ показывает, что длительные перелеты AB и BB имеет смысл рассматривать только при незаданном времени ожидания Δt_Σ , так они дают $\min \min T_\Sigma$ при достаточно больших Δt_Σ . Что касается быстрых перелетов с заданным временем ожидания, то из них только перелеты CC дают $\Delta t_\Sigma > 0$ при приемлемом уровне ΔV_Σ . Поэтому быстрые перелеты AC рассматриваются только при заданном Δt_Σ , а быстрые перелеты CC — при заданном и незаданном Δt_Σ .

Результаты расчета перелетов без учета эллиптичности и наклона орбит планет. Рассмотрим сначала длительные перелеты с незадачным временем ожидания. Поскольку перелеты AB ($k=1$) близки по своим особенностям к перелетам BB , остановимся на анализе перелетов BB ($k=1$).

Результаты их расчета приведены на рис. 12.4.17. В интервале $\Delta V_{\Sigma \text{ гом}} < \Delta V_\Sigma < 16 \text{ км/сек}$ перелеты BB симметричны, состоят из дуг, касательных к орбите Венеры, и близки к гомановскому перелету. В интервале $16 \text{ км/сек} < \Delta V_\Sigma < 24 \text{ км/сек}$ наблюдается значительная асимметрия перелета: одна из кеплеровых дуг остается близкой к гомановской (ΔV_{01} (или $\Delta V_{23}) \approx 8 \text{ км/сек}$), а вся остальная характеристическая скорость тратится на другую кеплерову дугу, близкую к касательной к орбите Земли. При $\Delta V_\Sigma > 24 \text{ км/сек}$ перелеты снова становятся симметричными, близкими к эллипсам, касательным к орбите Земли, причем переход от несимметричных перелетов к симметричным происходит скачком.

Эта интересная особенность перелетов BB объясняется тем, что с увеличением $\Delta V_z \max \frac{\eta_\Sigma}{t_\Sigma} \quad (k=1)$ реализуется за счет $\max \frac{\eta_{01}}{t_{01}}$ или $\max \frac{\eta_{23}}{t_{23}}$. Однако с ростом ΔV_z величины η_{01}/t_{01} или η_{23}/t_{23} стабилизируются: η_{01} или η_{23} стремится к пределу 2π ,

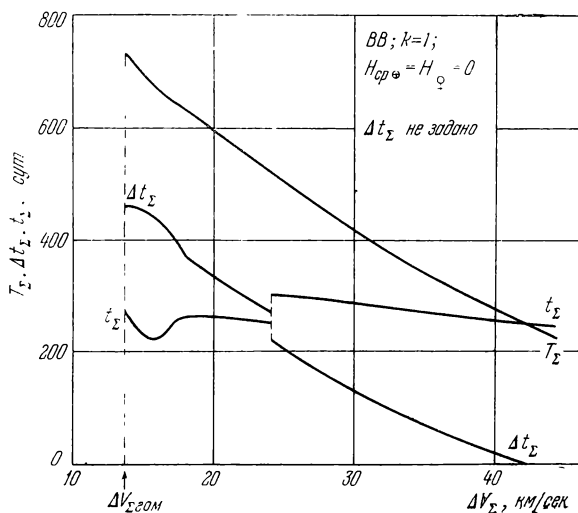


Рис. 12.4.17.

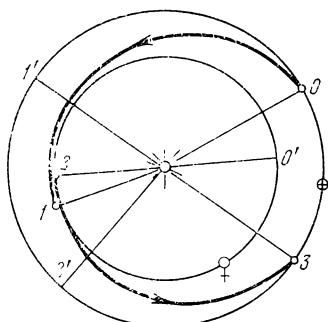
а t_{01} или t_{23} практически перестает уменьшаться. В этих условиях для получения $\max \frac{\eta_\Sigma}{t_\Sigma}$ выгоден переход к симметричным перелетам.

Для перелетов BB с ростом ΔV_z T_Σ заметно уменьшается, что объясняется увеличением перицентрической части перелета (залета внутрь орбиты Венеры) и реализацией в связи с этим значительных величин η_Σ/t_Σ . При этом величина Δt_Σ достаточно велика во всем практически интересном диапазоне значений ΔV_z . Примеры оптимальных четырехимпульсных перелетов BB показаны на рис. 12.4.18.

Рассмотрим теперь быстрые перелеты. При заданном Δt_Σ перелеты AC ($k=0$) близки к перелетам CC ($k=0$), поскольку в последних кеплерова дуга C практически совпадает с кеплеровой дугой A вследствие касания орбиты Земли. Поэтому ограничимся анализом быстрых перелетов CC ($k=0$).

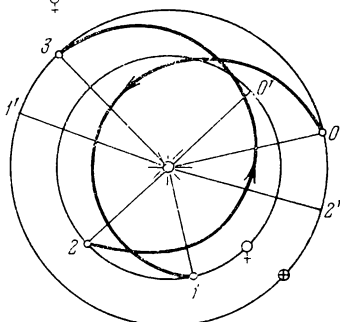
Результаты расчета оптимальных быстрых перелетов CC ($k=0$) с помощью задачи $(\Delta V_z, \eta_\Sigma, t \Rightarrow \max)$ приведены на

$$BB; k=1; H_{Cp\oplus}=H_{\odot}=0$$



$$\Delta V_z = 16 \text{ км/сек}; T_z = 663 \text{ сут};$$

$$\Delta t_z = 440 \text{ сут}; \eta_z = 308^\circ$$



$$\Delta V_z = 26 \text{ км/сек}; T_z = 483 \text{ сут};$$

$$\Delta t_z = 188 \text{ сут}; \eta_z = 534^\circ$$

Рис. 12.4.18.

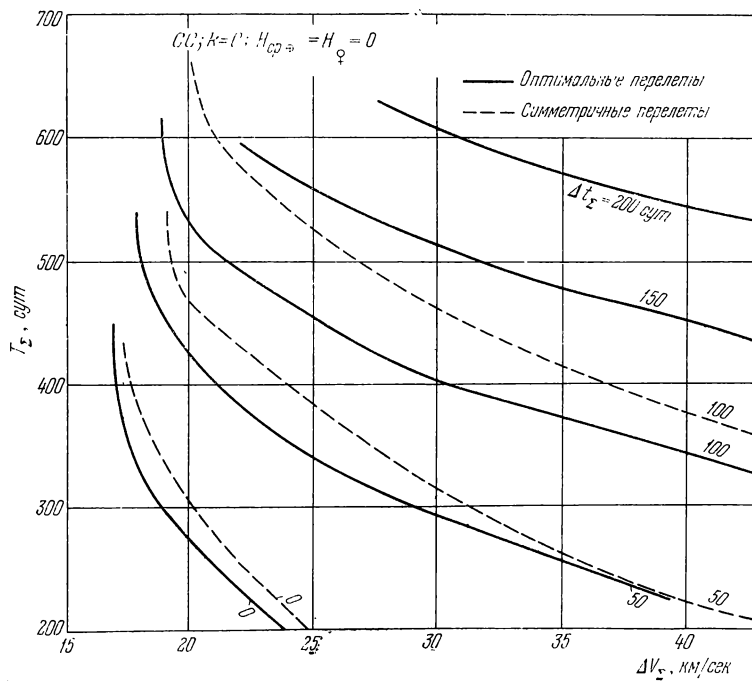


Рис. 12.4.19.

рис. 12.4.19. Это семейство перелетов представляет большой практический интерес, поскольку оно характеризуется сравнительно небольшими значениями T_{Σ} , умеренными значениями ΔV_{Σ} и достаточно большими величинами Δt_{Σ} . Перелеты CC при значениях ΔV_{Σ} , близких к минимально допустимым, существенно асимметричны, причем одна из кеплеровых дуг близка к гомановской. Величина асимметрии приближенно характеризуется соотношениями $\eta_{23} = (1,5 \div 2,0) \eta_{01}$, $\Delta V_{23} = (1,5 \div 2) \Delta V_{01}$. Из сравнения симметричных и оптимальных перелетов (рис. 12.4.19)

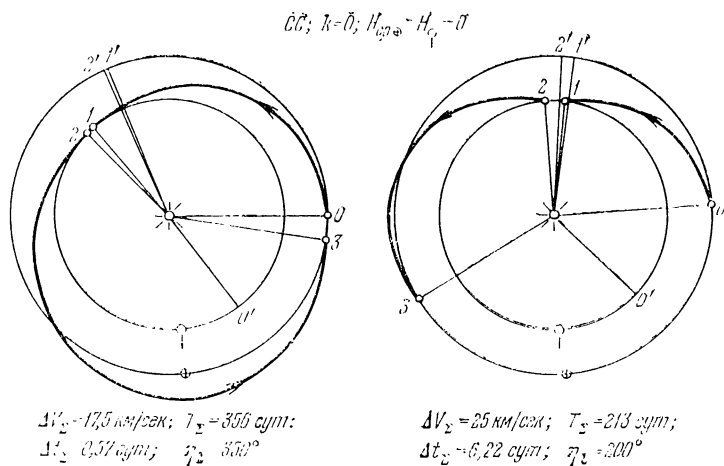


Рис. 12.4.20.

видно, что за счет несимметрии удается уменьшить время перелета T_{Σ} на 10 — 25 %.

Во всем диапазоне ΔV_{Σ} одна из кеплеровых дуг касательна к орбите Земли. С ростом ΔV_{Σ} оптимальные перелеты CC ($k=0$) становятся все более симметричными и при некотором значении ΔV_{Σ} , зависящем от заданного Δt_{Σ} , становятся строго симметричными, состоящими из кеплеровых дуг, касательных к орбите Земли. При дальнейшем увеличении ΔV_{Σ} , начиная с $\Delta V_{\Sigma} = 28 \text{ км/сек}$, семейство перелетов CC переходит в семейство быстрых перелетов AA . Примеры оптимальных четырехимпульсных быстрых перелетов по маршруту CC ($k=0$) приведены на рис. 12.4.20. Геометрическое место граничных точек, где перелеты CC переходят в перелеты AA , соответствует, очевидно, быстрым перелетам CC с заданным временем ожидания Δt_{Σ} , которые, в силу сказанного, не представляют практического интереса в семействе оптимальных перелетов Земля — Венера — Земля.

Сопоставим полученные результаты с аналогичными результатами для перелетов Земля — Марс — Земля. При перелетах Земля — Марс — Земля аппарат выходит на периферию Солнечной системы и уровень его гелиоцентрических скоростей снижается. В этом случае при $k = 0$, чтобы не отстать в угловом движении от Земли, аппарат на некотором участке должен ее обогнать (маршрут B), а при $k = 1$ — как можно сильнее отстать от нее, чтобы ускорить встречу (маршрут C).

При перелетах же Земля — Венера — Земля аппарат смещается к центру Солнечной системы и уровень его гелиоцентрических скоростей увеличивается. В этом случае при $k = 0$, чтобы не оказаться в угловом движении слишком впереди Земли (что затруднит встречу с Землей при обратном перелете), аппарат должен отстать от нее (маршрут C), а при $k = 1$ — как можно сильнее обогнать ее для ускорения встречи (маршрут B). Таким образом, маршруты B и C у перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля играют прямо противоположную роль.

Оптимальные перелеты Земля — Венера — Земля являются, как правило, асимметричными. Асимметрия позволяет при заданной энергетике ΔV_z сократить продолжительность перелетов по сравнению с симметричными от 10% до 25%.

Сводная картина оптимальных четырехимпульсных перелетов Земля — Венера — Земля показана на рис. 12.4.21.

С практической точки зрения весьма важно, что перелеты Земля — Венера — Земля характеризуются в среднем меньшими энергетическими затратами и меньшей продолжительностью, чем перелеты Земля — Марс — Земля. Это объясняется тем, что, во-первых, Венера «ближе» к Земле, чем Марс ($r_{\oplus}/r_z < r_{\oplus}/r_{\text{м}}$, см. таблицу 12.4.4), и, следовательно, перелеты на Венеру характеризуются менее высоким уровнем гелиоцентрических скоростей и, во-вторых, большей величиной первой космической скорости для Венеры по сравнению с Марсом (см. таблицу 12.4.1).

Результаты расчета с учетом эллиптичности и наклона орбит планет. Результаты расчета оптимальных перелетов для $t_{00} = 0$ января 1971 г. и 0 января 1973 г. приведены на рис. 12.4.22 и 12.4.23 соответственно. Эти данные показывают, что влияние эллиптичности и наклона орбит планет незначительно, в результате чего характеристики оптимальных перелетов для пространственной эллиптической модели близки (с точностью до нескольких процентов) к характеристикам соответствующих перелетов для плоской круговой модели движения планет. Вследствие малости эксцентриситета орбит планет влияние наклона оказывается преобладающим, поэтому характеристическая скорость пространственного перелета всегда незначительно превышает характеристическую скорость соответствующего плоского кругового перелета.

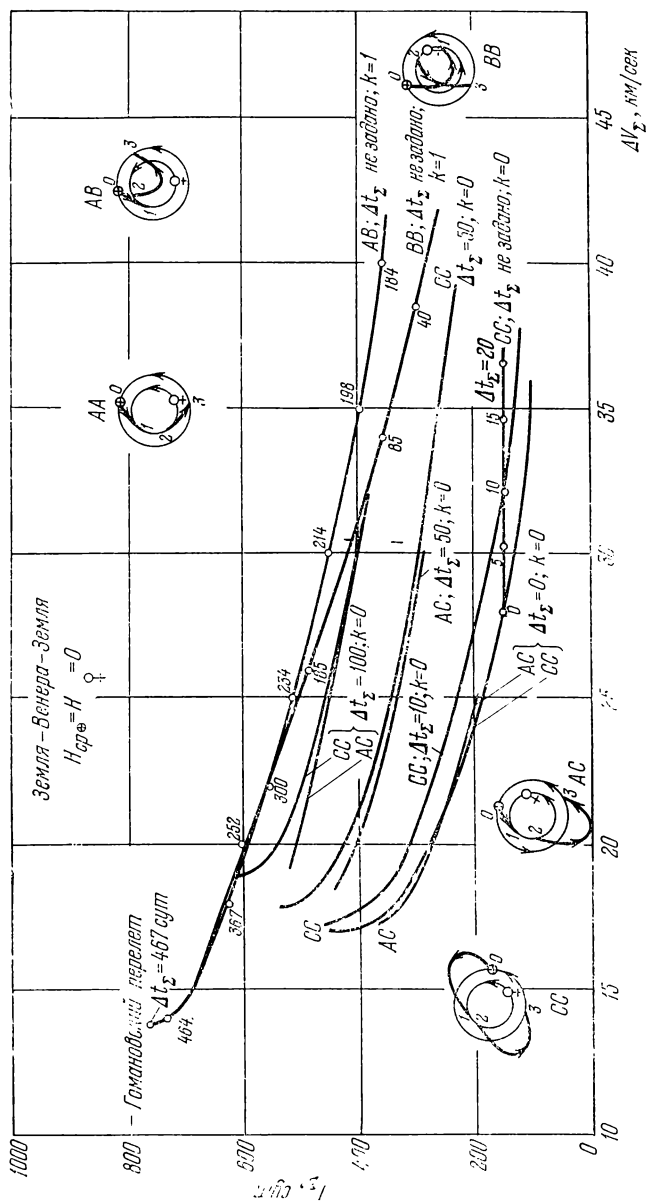


Рис. 12.4.21.

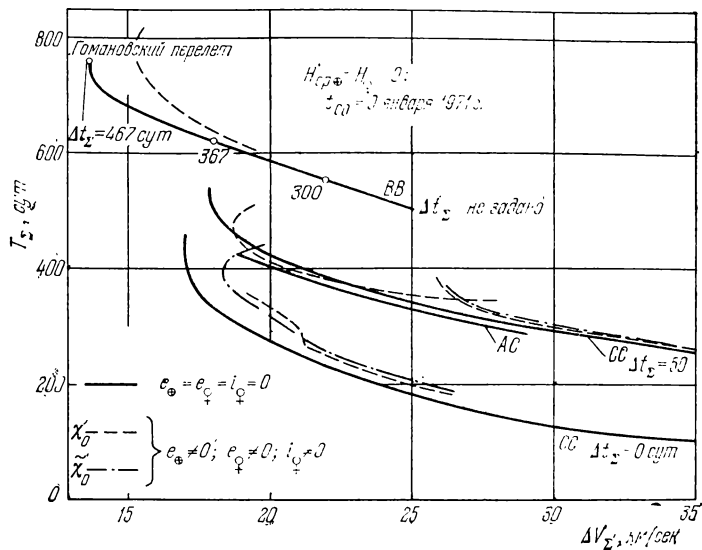


Рис. 12.4.22.

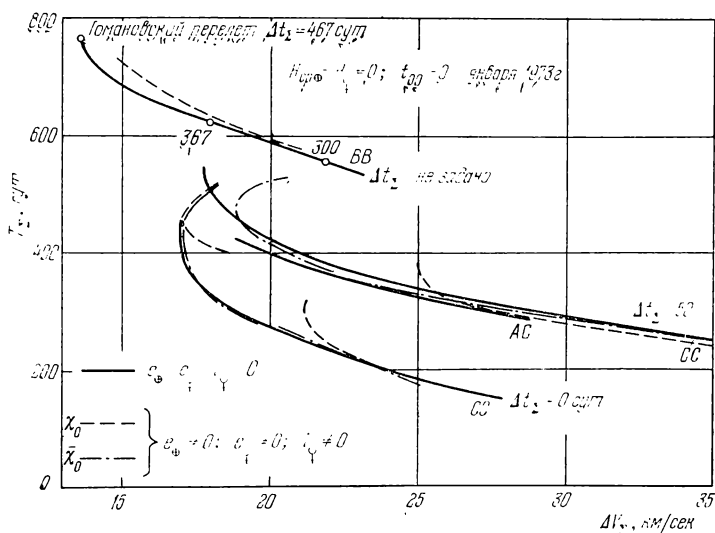


Рис. 12.4.23.

12.4.3. Перелеты Земля — Марс — Земля с торможением в атмосферах планет. Настоящий раздел написан на основе результатов исследований, выполненных В. В. Балашовым [1, 2]. Как и в разделах 12.4.1, 12.4.2, все приводимые ниже результаты получены при условии (12.4.1), (12.4.2).

Структура оптимальных перелетов. Оптимальные перелеты с торможением в атмосфере асимметричны, что следует из асимметрии задачи по постановке. При этом перелеты, в которых маршруты «туда» и «обратно» переставлены местами, в отличие от четырехимпульсных перелетов, приводят к различным суммарным характеристикам.

Асимметрия четырехимпульсных перелетов приводит к заметному отличию в импульсах скорости на орбитах ИС планет. Импульсы скорости у обеих планет на кеплеровых дугах с большей характеристической скоростью с вылетом за орбиту Марса для длительных перелетов и с залетом внутрь орбиты Земли для быстрых перелетов — больше, чем на кеплеровой дуге с меньшей характеристической скоростью. В свою очередь, вследствие различия в скоростях на сферах влияния планет и в первых космических скоростях планет (см. таблицу 12.4.1), на каждой из кеплеровых дуг импульсы скорости на орбитах ИСЗ и ИСМ распределены неравномерно: $\Delta V_1 \sim (1,5 \div 2,0) \Delta V_0$, $\Delta V_3 \sim (1,5 \div 2,0) \Delta V_2$ для длительных перелетов; $\Delta V_1 \sim 1,5 \Delta V_0$, $\Delta V_3 \sim 1,5 \Delta V_2$ для быстрых перелетов.

Рассмотрим сначала перелеты без ограничения скорости входа в атмосферу. Для получения максимального выигрыша в ΔV_z торможение в атмосфере планеты надо осуществлять на кеплеровой дуге с большей характеристической скоростью. В случае трехимпульсных перелетов торможение в атмосфере надо принимать: для длительных перелетов — на апоцентрической дуге C с залетом за орбиту Марса, для быстрых перелетов — на перигентрической дуге B с залетом внутрь орбиты Земли. Из приведенных выше данных о распределении импульсов на четырехимпульсных траекториях следует, что для получения максимальных выигрышей в ΔV_z в случае длительных перелетов целесообразно тормозиться в атмосфере Марса (залет за орбиту Марса на участке Земля — Марс), а в случае быстрых — в атмосфере Земли (залет внутрь орбиты Земли на участке Марс — Земля). Отметим, что тем самым однозначно задается структура (порядок маршрутов) в перелетах с торможением в атмосфере.

Численные расчеты подтвердили указанную структуру оптимальных перелетов, обеспечивающих наибольшее снижение ΔV_z по сравнению с четырехимпульсными перелетами. Оптимизация перелета сводится к увеличению асимметрии исходного четырехимпульсного перелета, в результате чего увеличивается скорость входа в атмосферу соответствующей планеты и обеспечивается

максимальный выигрыш в ΔV_{Σ} . При этом траектории на участке Марс — Земля для длительных перелетов и на участке Земля — Марс для быстрых перелетов в основном близки к касательным к орбите планеты старта. Примеры оптимальных трехимпульсных перелетов без ограничения скорости входа в атмосферу для плоской круговой модели движения планет приведены на рис. 12.4.24: а) длительный перелет с торможением в атмосфере Марса, б) быстрый перелет с торможением в атмосфере Земли.

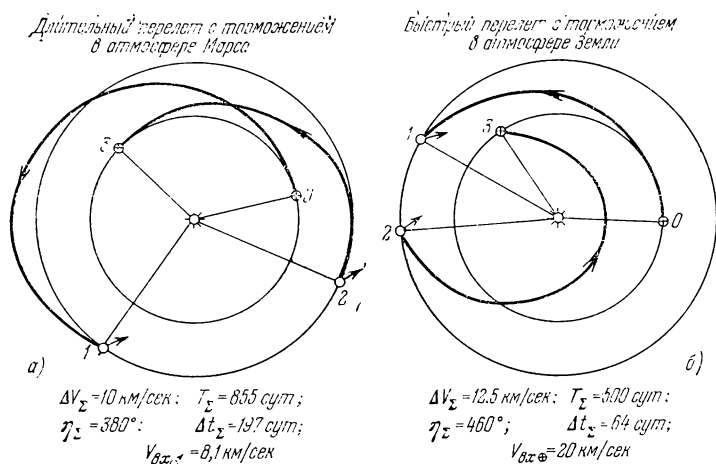


Рис. 12.4.24.

В случае двухимпульсных перелетов без ограничения скорости входа в атмосферы Марса и Земли указанная выше структура оптимальных перелетов сохраняется, поскольку на длительные перелеты основное влияние оказывает торможение в атмосфере Марса, а на быстрые — торможение в атмосфере Земли.

Рассмотрим теперь структуру оптимальных перелетов с заданной скоростью входа в атмосферу планеты $V_{\text{вх}}$. Проанализируем сначала перелеты с торможением в атмосфере Земли. Структура оптимального перелета в значительной степени определяется задаваемой величиной скорости входа в атмосферу Земли $V_{\text{вх}, \oplus}$. При малых $V_{\text{вх}, \oplus}$ энергетика перелета Марс — Земля ΔV_{23} невелика, возможности оптимизации на участке Марс — Земля ограничены, а оптимизация перелета осуществляется за счет увеличения энергетики ΔV_{01} перелета Земля — Марс, происходящего по дуге C для длительных перелетов и дуге B для быстрых перелетов. При увеличении $V_{\text{вх}, \oplus}$ возрастают ΔV_{23} и η_{23} , одновременно на этой дуге увеличивается залет внутрь орбиты Земли (дуга B) для быстрых перелетов и вылет за орбиту Марса (дуга C)

для длительных перелетов. Из сказанного ясно, что ограничение $V_{вх \oplus}$ в первую очередь влияет на структуру быстрых перелетов. Пример деформации структуры оптимальных быстрых перелетов с торможением в атмосфере Земли при увеличении $V_{вх \oplus}$ показан на рис. 12.4.25 и в таблице 12.4.5.

$$T_{\Sigma} = 450 \text{ сут}; \quad \Delta t_{\Sigma} = 0$$

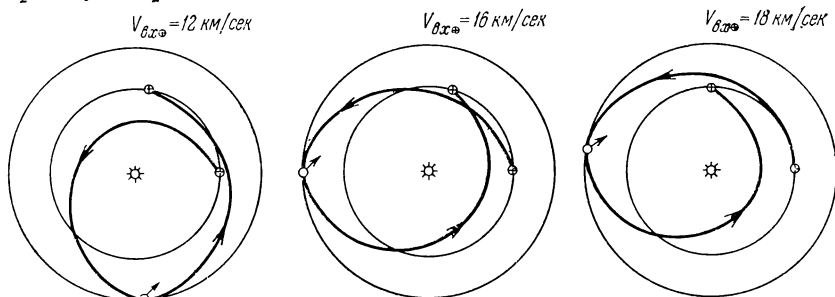


Рис. 12.4.25.

В случае перелетов с заданной скоростью входа в атмосферу Марса $V_{вх \oplus}$ проведенные выше качественные соображения для

Таблица 12.4.5

	$T_{\Sigma} = 450 \text{ сут}, \quad \Delta t_{\Sigma} = 0$		
$V_{вх \oplus}, \text{ км/сек}$	12	16	18
$\Delta V_{\Sigma}, \text{ км/сек}$	17,2	13,6	11,8
$\Delta V_{01}, \text{ км/сек}$	13,7	9,2	7,0
$\Delta V_{23}, \text{ км/сек}$	3,5	4,4	4,8
$\eta_{01}, \text{ град}$	272	184	158
$\eta_{23}, \text{ град}$	168	255	281
$(r_{\pi})_{01}$	0,62	0,94	1,0
$(r_{\pi})_{23}$	0,98	0,7	0,52

Примечание. r_{π} — радиус перигелия кеплеровой дуги перелета, отнесенный к $a_{\oplus}$.

перелетов Марс — Земля и Земля — Марс переносятся на перелеты Земля — Марс и Марс — Земля соответственно. Структура этих перелетов определяется как величиной $V_{вх \oplus}$, так и угловой дальностью η_{Σ} . Для небольших $V_{вх \oplus}$ и η_{Σ} оптимальный быстрый перелет происходит по маршруту AB , при увеличении $V_{вх \oplus}$ совершается переход к маршруту BA . При достаточно больших значениях η_{Σ} быстрые перелеты реализуются по маршруте BB . Для длительных перелетов наибольший практический интерес

представляют маршруты AC и CA с небольшими η_z , поскольку с увеличением η_z происходит значительное возрастание продолжительности перелета T_z .

Результаты расчета перелетов без учета эллиптичности и наклона орбит планет. Результаты расчета суммарных характеристик двух- и трехимпульсных оптимальных перелетов без ограничения скорости входа в атмосферу для различных вариантов торможения вместе с характеристиками четырехимпульсных перелетов приведены на рис. 12.4.26—12.4.29. Общие свойства этих перелетов аналогичны свойствам четырехимпульсных перелетов (см. раздел 12.4.1) с учетом отмеченных выше особенностей.

Абсолютный минимум ΔV_z при торможении в атмосфере Земли или Марса соответствует характеристической скорости гомановского перелета за вычетом соответствующего импульса (см. таблицу 12.4.2). Для перелетов с торможением в атмосфере Земли $\Delta V_{z \text{ гом}} = 7,93 \text{ км/сек}$, $V_{\text{вх } \oplus} = 11,56 \text{ км/сек}$; для перелетов с торможением в атмосфере Марса $\Delta V_{z \text{ гом}} = 9,45 \text{ км/сек}$, $V_{\text{вх } \oplus} = 5,74 \text{ км/сек}$; для перелетов с торможением в атмосферах обеих планет $\Delta V_{z \text{ гом}} = 5,80 \text{ км/сек}$.

При переходе от длительных перелетов ($k = 1$, AC , CC) к быстрым ($k = 0$, BB) происходит скачкообразное уменьшение продолжительности перелета T_z . Для перелетов с торможением в атмосфере Земли этот переход совершается при увеличении ΔV_z на 3—4 км/сек по сравнению с соответствующей данному варианту торможения энергетикой гомановского перелета $\Delta V_{z \text{ гом}}$. Для перелетов с торможением в атмосфере Марса это увеличение составляет примерно 7 км/сек. Таким образом, для быстрых перелетов более выгодно торможение в атмосфере Земли.

Для длительных перелетов с торможением в атмосфере Марса (рис. 12.4.28) увеличение ΔV_z всего на 1 км/сек по сравнению с $\min \Delta V_z = \Delta V_{z \text{ гом}}$ позволяет сократить T_z почти на 200 сут, в основном за счет сокращения времени ожидания.

Решение задачи оптимизации перелетов без ограничения скорости входа в атмосферу позволяет оценить предельные возможности снижения характеристической скорости перелета. Так, использование торможения в атмосфере Земли снижает ΔV_z на 30—50%, а последовательное торможение в атмосферах обеих планет — на 50—60%. Таким образом, торможение в атмосфере Земли дает основную долю выигрыша в ΔV_z . Однако следует отметить, что оптимальные траектории, найденные без ограничения скорости входа в атмосферу, характеризуются, как правило, большими значениями $V_{\text{вх } \oplus}$ (рис. 12.4.30, торможение в атмосфере Земли) и $V_{\text{вх } \oplus}$ (рис. 12.4.31, торможение в атмосфере Марса). Поэтому естествен переход к отысканию оптимальных перелетов с ограничением скорости входа в атмосферу.

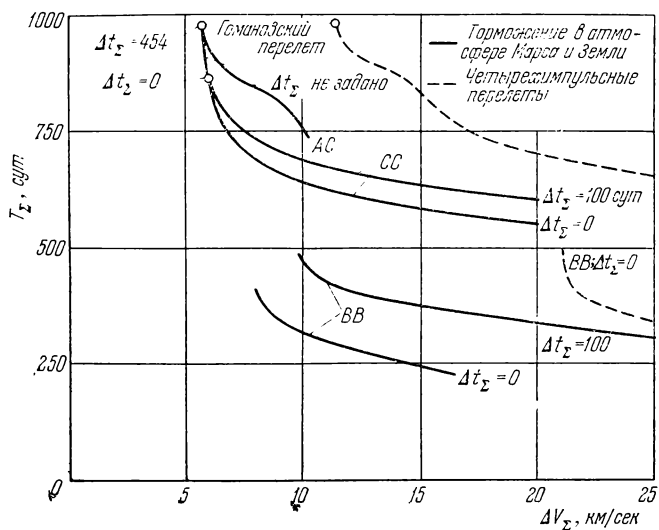


Рис. 12.4.26.

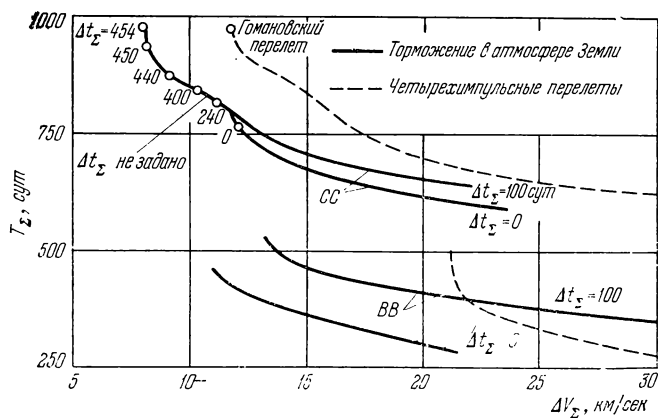


Рис. 12.4.27.

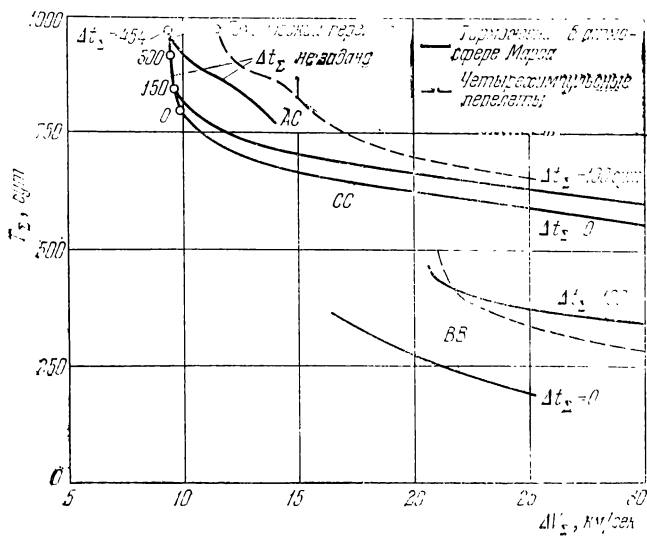


Рис. 12.4.28.

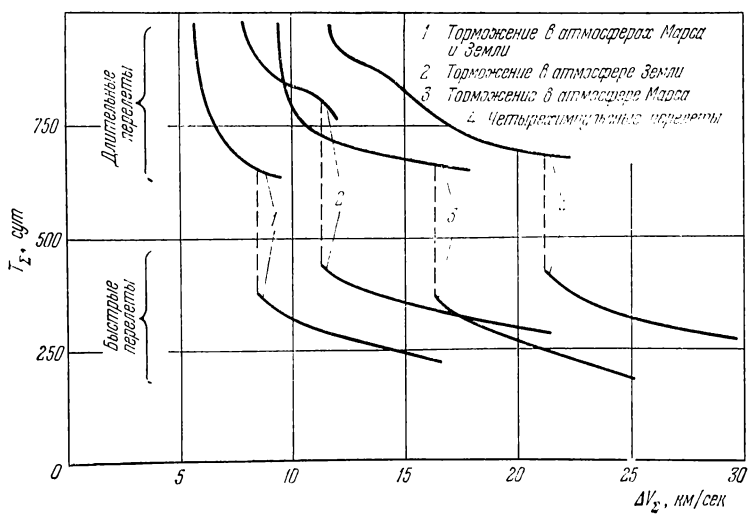


Рис. 12.4.29.

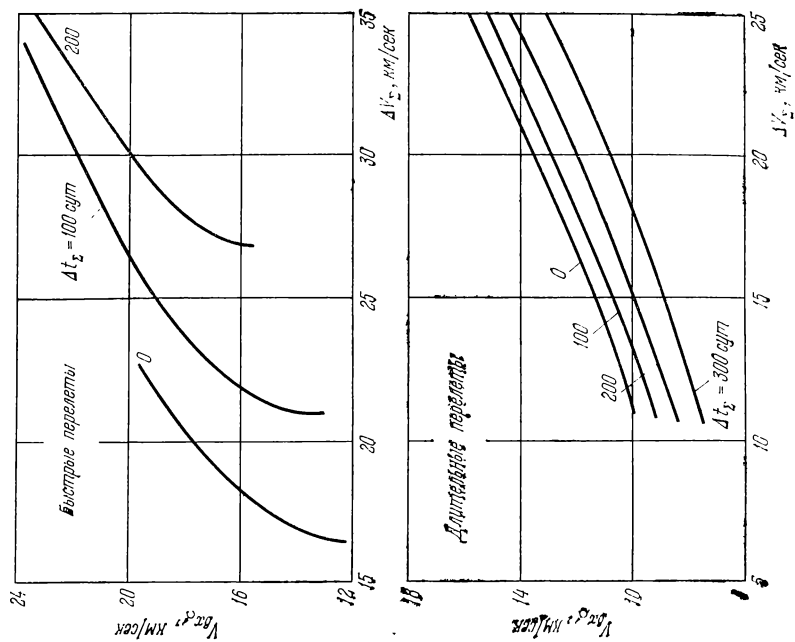


Рис. 12.4.30.

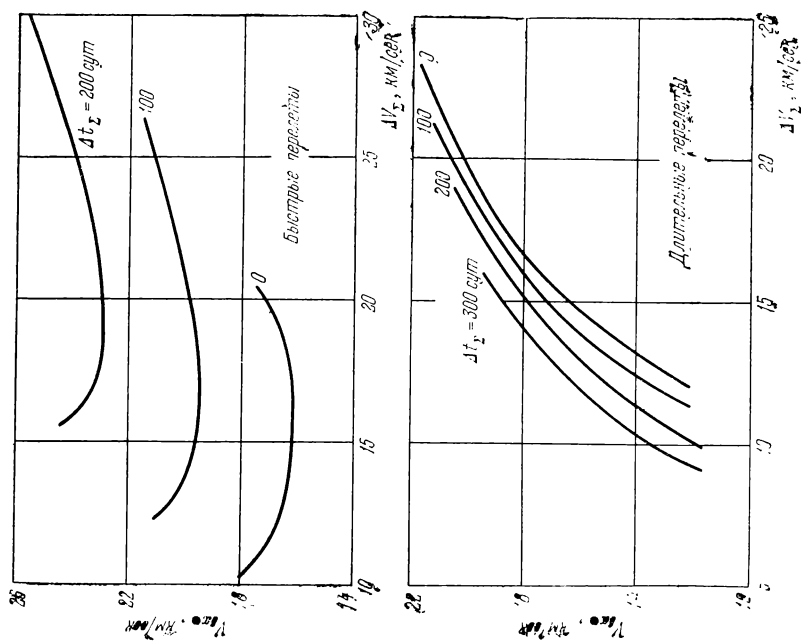


Рис. 12.4.31.

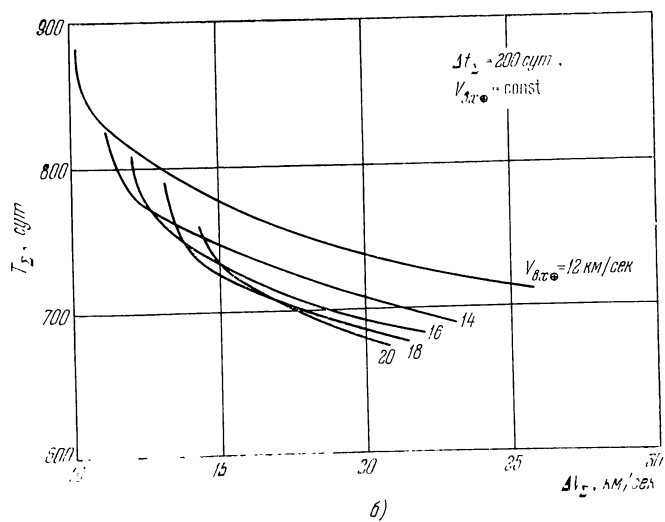
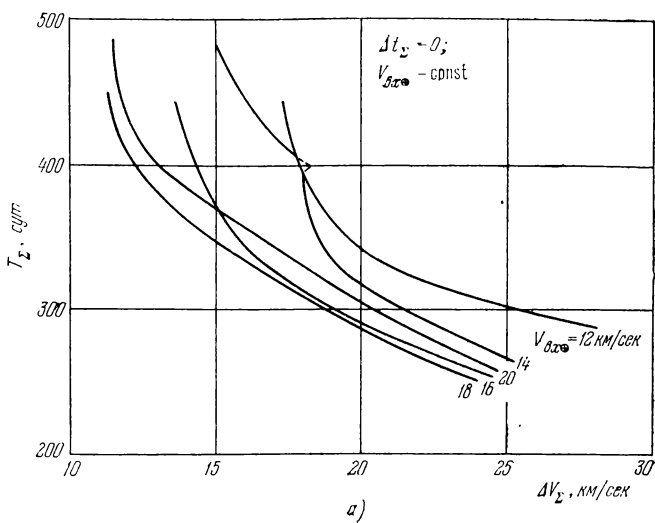


Рис. 12.4.32.

Трехимпульсные перелеты с заданной скоростью входа в атмосферу рассматривались для заданного времени ожидания на орбите ИС Марса Δt_z . Оптимальные перелеты в этом случае, в соответствии со сказанным в разделе 12.3.3, определяются среди

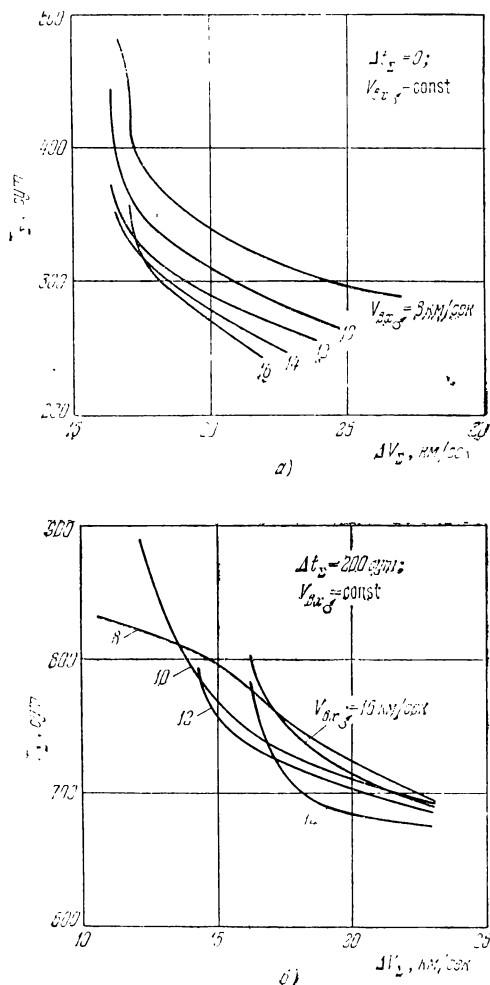


Рис. 12.4.33.

всех возможных сочетаний маршрутов в рамках рассматриваемой модели движения планет для заданных условий ($\Delta V_z = \text{const}$, $\Delta t_z = \text{const}$, $V_{\infty} = \text{const}$, $k = \text{fix}$) и соответствуют абсолютному

$\min \Delta V_z$. Зависимости $T_z = T_z(\Delta V_z; V_{вх} = \text{const}; \Delta t_z = \text{const})$ для перелетов с торможением в атмосфере Земли приведены на рис. 12.4.32, для перелетов с торможением в атмосфере Марса — на рис. 12.4.33. Отметим, что быстрые перелеты с торможением в атмосфере Земли при $V_{вх\oplus} = 18$ км/сек ($\Delta t_z = 0$) дают

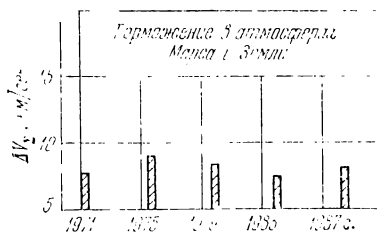
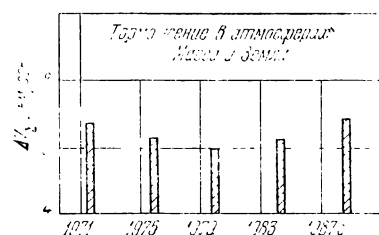
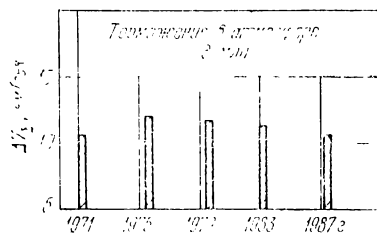
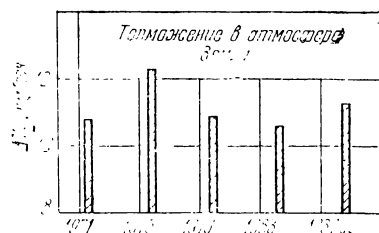
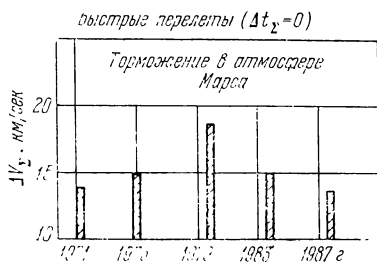
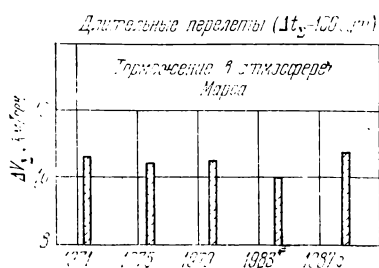


Рис. 12.4.34.

Рис. 12.4.35.

$\min \Delta V_z \approx 11,5$ км/сек; дальнейшее увеличение $V_{вх\oplus}$ не дает снижения ΔV_z . Аналогично, для быстрых перелетов с торможением в атмосфере Марса $\min \Delta V_z \approx 16$ км/сек и реализуется при $V_{вх\oplus} = 12$ км/сек; при дальнейшем увеличении $V_{вх\oplus}$ ΔV_z возрастает. Решение задачи с заданной скоростью входа в атмосферу позволяет получить оптимальные траектории приемлемой продолжительности с достаточно малыми скоростями входа в атмосферу,

Таблица 12.46

Характеристики перелетов минимальной энергии

Вариант торможения в атмосфере	Быстрые перелеты				
	$\Delta t_{\Sigma}=0$				
	Дата старта с орбиты ИСЗ	ΔV_{Σ} , км/сек	$V_{ВХ\delta}$, км/сек	$V_{ВХ\oplus}$, км/сек	T_{Σ} , сут
Торможение в атмосфере Марса	30.04.71	13,71	10,3	—	365
	26.12.74	15,0	8,6	—	485
	22.11.79	19,07	12,7	—	386
	11.02.84	15,07	11,6	—	365
	11.12.87	13,76	8,3	—	466
Торможение в атмосфере Земли	6.05.71	10,6	—	16,0	449
	14.09.75	12,2	—	21,5	445
	14.11.79	11,85	—	20,5	464
	21.02.83	11,33	—	16,0	424
	29.06.87	10,86	—	13,0	444
Торможение в атмосферах Марса и Земли	16.05.71	7,77	8,4	14,2	386
	7.09.75	8,85	8,6	19,4	423
	26.11.79	8,37	10,2	19,0	403
	8.02.84	7,55	10,2	15,5	383
	3.07.88	8,19	7,8	15,7	403
Вариант торможения в атмосфере	$\Delta t_{\Sigma}=100$ сут				
	Дата старта с орбиты ИСЗ	ΔV_{Σ} , км/сек	$V_{ВХ\delta}$, км/сек	$V_{ВХ\oplus}$, км/сек	T_{Σ} , сут
Торможение в атмосфере Марса	24.02.71	17,7	12,1	—	497
	22.06.75	23,17	10,3	—	497
	12.11.79	22,07	8,9	—	491
	9.02.84	17,55	12,2	—	457
Торможение в атмосфере Земли	2.05.71	12,28	—	20,2	517
	13.09.75	14,57	—	25,4	498
	9.11.79	15,06	—	20,5	498
	20.02.83	13,05	—	18,2	518
	8.06.87	12,73	—	22,6	519
Торможение в атмосферах Марса и Земли	5.05.71	9,16	9,2	17,5	478
	16.06.75	11,32	9,9	20,4	519
	25.10.79	10,12	8,6	20,2	519
	6.02.84	9,08	10,3	16,6	480

Таблица 12.4.6 (продолжение)

Вариант торможения в атмосфере	Длительные перелеты				
	$\Delta t_{\Sigma} = 100 \text{ сут}$				
	Дата старта с орбиты ИСЗ	ΔV_{Σ} , км/сек	$V_{\text{вх}\delta}$, км/сек	$V_{\text{вх}\oplus}$, км/сек	T_{Σ} , км/сек
Торможение в атмосфере Марса	20.09.71	10,62	7,9	—	842
	28.10.75	10,41	10,1	—	848
	25.03.80	10,51	10,6	—	820
	18.07.84	10,05	7,9	—	805
	20.10.88	10,82	8,5	—	842
Торможение в атмосфере Земли	20.09.71	10,72	—	11,8	825
	18.11.75	12,12	—	12,8	843
	30.11.79	10,9	—	11,8	908
	17.07.84	10,57	—	11,7	803
	28.09.88	11,34	—	11,8	842
Торможение в атмосферах Марса и Земли	19.09.71	6,78	7,8	11,7	850
	3.12.75	6,28	9,3	11,6	887
	23.02.80	6,00	9,7	11,7	887
	15.07.84	6,26	7,9	11,9	787
	13.10.88	6,93	8,3	11,9	840

выпадающие из рассмотрения при оптимизации перелетов без ограничения скорости входа в атмосферу.

Результаты расчета перелетов с учетом эллиптичности и наклона орбит планет. Расчеты перелетов без ограничения скорости входа в атмосферу проводились для полного синодического цикла пары Земля — Марс (см. таблицу 12.4.3). Отыскивались оптимальные перелеты, даты старта которых t_0 близки к следующим датам t_{00} : $t_{00} = 0$ января 1971 г.; 0 января 1975 г.; 0 января 1979 г.; 0 января 1983 г.; 0 января 1987 г. Результаты расчета перелетов, которые для рассматриваемого варианта торможения и заданного времени ожидания обеспечивают минимальную величину характеристической скорости $\Delta V_{\Sigma \text{opt}} = \min_{\{T_{\Sigma}\}} \Delta V_{\Sigma}(T_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma} = \text{const})$, приведены на

рис. 12.4.34, 12.4.35 и в таблице 12.4.6.

Для быстрых перелетов (рис. 12.4.34) при всех вариантах торможения $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ заметно зависит от рассматриваемого синодического периода: увеличение $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ в «неблагоприятный» период 1975—1979 гг. по сравнению с перелетами в 1971 г. или 1987 г. объясняется, как и для четырехимпульсных перелетов, выходом аппарата на орбиту ИС при нахождении Марса в апоцентрической (для 1971 г. и 1987 г. — соответственно перигецентрической) части своей орбиты (см. раздел 12.4.1 и рис. 12.4.16). Скорость

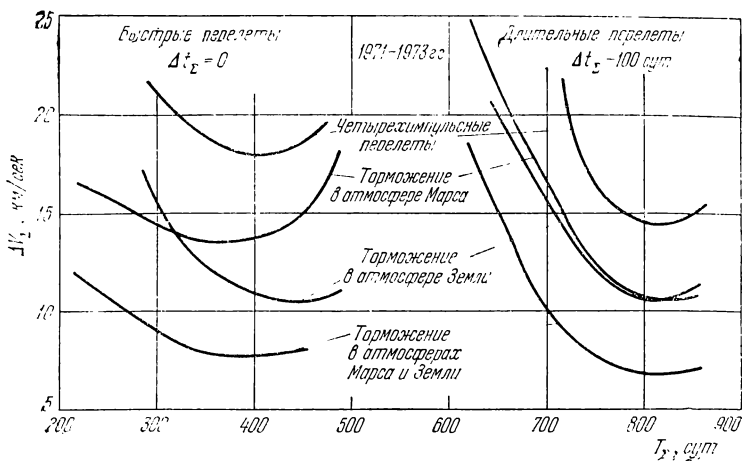


Рис. 12.4.36.

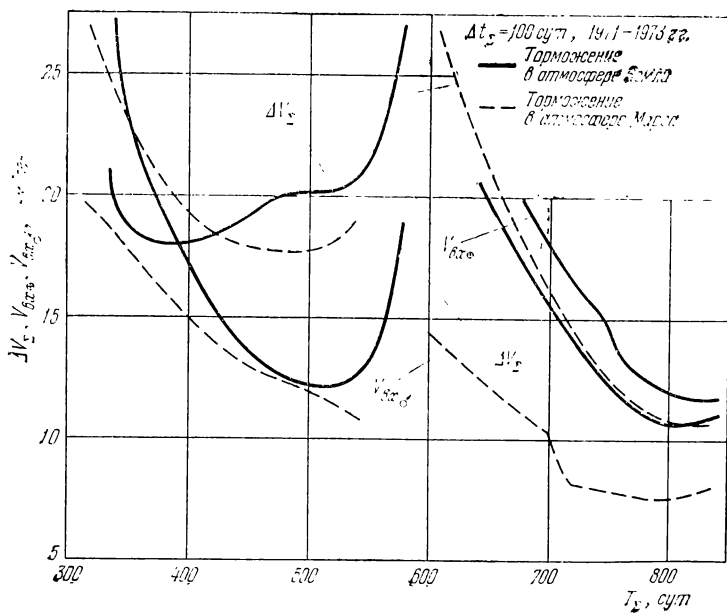


Рис. 12.4.37.

входа в атмосферу Земли в период 1975—1979 гг. происходит $V_{вх \oplus} = 16$ км/сек, в то время как в 1971 г. и 1987 г. возможны перелеты с $V_{вх \oplus} = 13 \div 15$ км/сек.

В случае длительных перелетов (рис. 12.4.35) для всех вариантов торможения $\Delta V_{\Sigma \text{opt}}$ на протяжении всего синодического цикла изменяется сравнительно мало. Скорость входа в атмосферу Земли составляет $V_{вх \oplus} = 11,6 \div 12,8$ км/сек, а скорость входа в атмосферу Марса — $7,8 \div 10,6$ км/сек.

Эффективность различных вариантов торможения в атмосфере сравнивается на рис. 12.4.36 для оптимальных перелетов, ближайших по дате старта к 0 января 1971 г. Для этих же перелетов на рис. 12.4.37 приведены зависимости $\Delta V_{\Sigma}(T_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma} = \text{const})$ и $V_{вх}(T_{\Sigma}, \Delta t_{\Sigma} = \text{const})$. Для практических приложений важно, что в случае длительных перелетов минимальные значения $V_{вх}$ и ΔV_{Σ} реализуются при одинаковой продолжительности T_{Σ} , т. е. для одних и тех же перелетов. Для быстрых же перелетов минимальные значения $V_{вх}$ и ΔV_{Σ} соответствуют различным перелетам (т. е. различным T_{Σ} и датам старта).

Рассмотрим оптимальные быстрые перелеты с торможением в атмосфере Земли и продолжительностью $T_{\Sigma} = 360 \div 640$ сут, со временем ожидания $\Delta t_{\Sigma} = 30$ сут, для которых скорости входа в атмосферу Земли заданы и составляют $V_{вх \oplus} = 16$ и 20 км/сек. В качестве периода возможных дат осуществления перелетов Земля — Марс — Земля возьмем полный синодический цикл 1971—1987 гг., указанный в таблице 12.4.3, включающий синодические периоды $N = 1, 2, \dots, 9$. В соответствии с методикой раздела 12.3.3 орбита Земли при расчете перелета Марс — Земля считалась круговой. На рис. 12.4.38 в качестве примера приведена зависимость характеристической

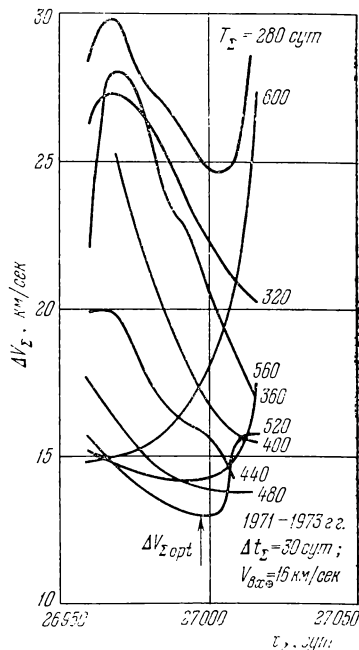


Рис. 12.4.38.

скорости оптимальных перелетов от юлианской даты старта с орбиты ИС Марса t_2 и продолжительности перелета T_{Σ} для синодического периода $N = 2$ (соответствующие юлианские даты: $t_N = 26960$, $t_{N+1} = 27741$). Видно, что в пределах синодического периода существует оптимальная продолжительность перелета T_{Σ} , для которой в диапазоне $t_2 \in [t_N, t_{N+1}]$ достигается $\Delta V_{\Sigma \text{opt}} =$

$= \min_{\{T_{\Sigma}, t_2\}} \Delta V_{\Sigma}$. При заданных Δt_{Σ} , $V_{\text{вх } \oplus}$ и N параметры этого пере-

лета, которые будем отмечать индексом «opt», определяются однозначно, поэтому $\Delta V_{\Sigma \text{ opt}} = \Delta V_{\Sigma \text{ opt}}(\Delta t_{\Sigma}, V_{\text{вх } \oplus}, N)$.

Влияние выбора N синодического периода или, что то же самое, юлианской даты старта с орбиты ИСЗ $t_{0 \text{ opt}}$ на $\Delta V_{\Sigma \text{ opt}}$ пока-

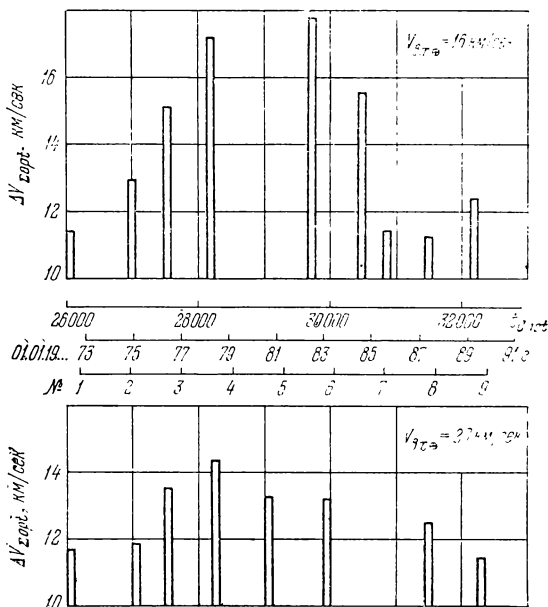


Рис. 12.4.39.

зано на рис. 12.4.39 ($t_{0 \text{ opt}}$ отсчитывается в сутках от основной эпохи 0,5 января 1900 г.).

Следует отметить, что для перелетов с $V_{\text{вх } \oplus} = 16 \text{ км/сек}$ характеристическая скорость сильно зависит от периода старта. Минимальные значения $\Delta V_{\Sigma \text{ opt}} = 11,2 \div 12,4 \text{ км/сек}$ достигаются для перелетов в 1971—1973 гг. и 1985—1989 гг. Период 1977—1984 гг. следует считать неблагоприятным для осуществления полета к Марсу с возвращением к Земле, так как в этом случае требуемые значения характеристической скорости составляют 16—18 км/сек. Для траекторий с $V_{\text{вх } \oplus} = 20 \text{ км/сек}$ энергетические затраты гораздо меньше зависят от периода старта, при этом минимальные значения $\Delta V_{\Sigma \text{ opt}} = 11,4 \div 12 \text{ км/сек}$ соответствуют 1971—1975 гг. и 1988—1990 гг.

Оптимальная продолжительность перелета $T_{\Sigma \text{ opt}}$ составляет 440—520 сут для благоприятных периодов старта, соответствую-

щих минимальным значениям потребной характеристической скорости, и 480—560 *сут* для неблагоприятных периодов, с повышенными требованиями к энергетике перелета. При этом оптимальные даты старта $t_{2 \text{ опт}}$ с орбиты ИСМ при $V_{\text{вх } \oplus} = 16 \text{ км/сек}$ получаются спустя 40—120 *сут* после соответствующего противостояния Земли и Марса (см. рис. 12.4.38), а при $V_{\text{вх } \oplus} = 20 \text{ км/сек}$ — спустя 140—200 *сут*.

Для выявления зависимости характеристической скорости перелета от величины скорости входа в атмосферу Земли для перелетов в 1973—1975 гг. рассмотрим траектории с $V_{\text{вх } \oplus} = 14 \div 24 \text{ км/сек}$ (рис. 12.4.40). Минимальные энергетические затраты достигаются в этом случае для $V_{\text{вх } \oplus} = 20 \text{ км/сек}$, а изменение

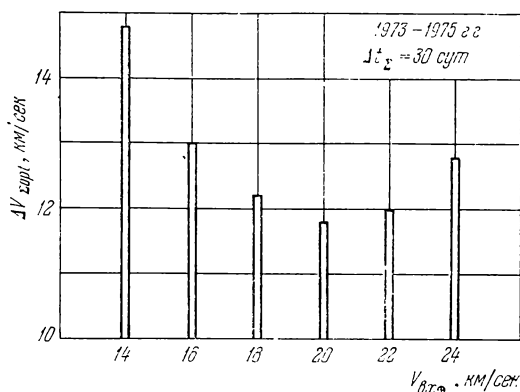


Рис. 12.4.40.

последней в пределах $\pm 2 \text{ км/сек}$ вызывает сравнительно небольшое увеличение $\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}$, в то время как достижение $V_{\text{вх } \oplus} = 14 \text{ км/сек}$ увеличивает потребную энергетику на 3 *км/сек*.

Для того же периода дат старта увеличение времени ожидания на орбите ИСМ Δt_{Σ} от 30 до 100 *сут* приводит к возрастанию $\Delta V_{\Sigma \text{ опт}}$ на 2—3 *км/сек*, при этом продолжительность оптимального перелета увеличивается на 100—140 *сут*.

Следует отметить, что решение задачи оптимизации перелетов Земля — Марс — Земля с фиксированной скоростью входа в атмосферу Земли позволило найти семейства траекторий с характеристическими скоростями, близкими к характеристическим скоростям траекторий без ограничения скорости входа, с существенно меньшими скоростями $V_{\text{вх } \oplus}$.

Оптимальные перелеты с торможением в атмосфере планет, как и перелеты без торможения, расположены в плоскостях, имеющих небольшой наклон к плоскости эклиптики (в пределах

1—3°). Поэтому оптимизация таких перелетов, как и четырехимпульсных, может проводиться без учета некомпланарности орбит планет, что существенно упрощает алгоритм расчета и обеспечивает в то же время достаточную точность.

§ 12.5. Оптимизация схемы перелета

12.5.1. Постановка и методика решения задачи. Вернемся теперь к более общим исходным задачам I, II и III, поставленным в разделе 12.2.1. В соответствии с постановкой этих задач рассмотрим вопрос об оптимизации схемы перелета, т. е. установлении оптимального количества и моментов приложения импульсов скорости. Будем считать, что ориентация в пространстве орбиты ИС планеты в момент выхода на псс задана заранее и вектор $V_{сф 1}$ не компланарен, вообще говоря, плоскости орбиты ИС планеты.

Необходимость априорного задания ориентации в пространстве орбиты ИС планеты может быть обусловлена различными причинами, например научными целями. При рассмотрении более сложных схем полета, включающих высадку десанта в заданном районе поверхности планеты и возврат его на орбиту ИС планеты, начальная ориентация орбиты ИС планеты может выступать в качестве одного из оптимизируемых параметров, который при решении внешней задачи ММСВ, естественно, фиксируется.

Аналогично, ориентацию орбит ИСЗ в моменты t_0 и t_3 также можно считать заранее заданной. Однако к ориентации этих орбит не предъявляются столь жесткие требования, как к ориентации орбиты ИС планеты. Как и в разделе 12.3.2, рассмотрим пучки плоскостей, проходящих через центр Земли и векторы $V_{сф 0}$ и $V_{сф 3}$ соответственно. Наклонение этих плоскостей к плоскости земного экватора i_j , $j = 0, 3$, заключено в пределах

$$V_{сф j, z_{экв}} \leq i_j \leq 180^\circ - V_{сф j, z_{экв}}, \quad j = 0, 3, \quad (12.5.1)$$

где $V_{сф j, z_{экв}}$ — угол между вектором $V_{сф j}$ и осью $z_{экв}$, нормальной к плоскости земного экватора. Если допустимые наклонения орбит ИСЗ в моменты t_0 и t_3 находятся в пределах (12.5.1), то переходы орбита ИСЗ — сфера влияния Земли можно считать плоскими, что и будем предполагать в дальнейшем.

Решение задач оптимизации будем проводить для пространственной эллиптической модели движения планет в рамках общих предположений $1^\circ - 5^\circ$, сделанных в начале раздела 12.2.1. Как и в §§ 12.3, 12.4, орбиты ИСЗ и ИС планеты считаем круговыми. В качестве оптимальных решений внутренней задачи рассматриваются одно- или двухимпульсные, с импульсом на сфере влияния, переходы сфера влияния — орбита ИС. В последнем

случае, согласно сказанному в разделах 12.2.1, 12.2.3, импульс на сфере влияния считается гелиоцентрическим.

В соответствии с общим планом, изложенным в разделе 12.2.2, задача оптимизации схемы перелета решается в следующей последовательности. Сначала по методике, изложенной в разделах 12.3.2, 12.3.3, находится решение задач Ia, IIa, IIIa с минимальным количеством импульсов. Ориентация орбиты ИС подбирается в соответствии со сказанным в разделе 12.3.2 и обеспечивает плоский переход орбита ИС — сфера влияния планеты. Решения указанных задач приведены в § 12.4.

Для пайденого таким образом перелета проверяется выполнение условий строгой локальной оптимальности. Для этого, согласно сказанному в разделе 12.2.2, при фиксированных датах t_i , $i = 0, 1, 2, 3$, соответствующих пайденому оптимальному перелету, с помощью соотношений (12.2.34), (12.3.35), (12.2.41), (12.2.42), (12.2.48) находится решение сопряженной системы. Так как фазовая траектория задана, условия трансверсальности (гравитационное поле — ньютоновское!) сводятся к системе шести линейных алгебраических уравнений для определения постоянных A, B, C, D, E и F в решении сопряженной системы уравнений (3.1.9) — (3.1.11), (3.1.19) — (3.1.21). Поскольку плоскости перелетов не совпадают с плоскостями орбит планет, векторы $V_{c\phi i}$, $i = 0, 1, 2, 3$, и $\text{grad } \Delta V(V_{c\phi i})$ не компланарны плоскостям перелета. Поэтому, если систему цилиндрических координат для перелетов Земля — планета и планета — Земля выбрать так, чтобы плоскость перелета совпадала с плоскостью r, φ (см. рис. 1.3.1), то в указанной системе координат, вообще говоря, $s_z \neq 0$, $p_z \neq 0$ и $E \neq 0$, $F \neq 0$. Так как даты t_i в задачах Ia, IIa и IIIa выбраны оптимально, для пайденого решения сопряженной системы выполняются также условия трансверсальности (12.2.36), (12.2.43), (12.2.44).

Если всюду на траектории выполняется условие (12.2.52), то проверяемая траектория строго локально оптимальна. Результаты проведенных расчетов показали, что для траекторий, рассмотренных в § 12.4, условие (12.2.52) в подавляющем большинстве случаев имеет место (см. раздел 12.5.2). Поэтому примем сначала, что для рассматриваемого исходного перелета это условие выполнено.

Изменим незначительно ориентацию в пространстве круговой орбиты ИС планеты, оставляя исходные даты t_i неизменными. Предполагая, что гелиоцентрические участки по-прежнему представляют кеплеровы дуги, параметры которых остаются постоянными вследствие неизменности дат t_i , найдем оптимальные одноп импульсные пространственные перелеты сфера влияния — орбита ИС (см. раздел 10.2.2). Изменение решения впутренней задачи ММСВ приведет к модификации краевых условий

при определении решения сопряженной системы. Если по-прежнему на гелиоцентрических участках выполнено условие (12.2.52), то и при новой ориентации орбиты ИС планеты траектория, состоящая из старых гелиоцентрических кеплеровых дуг и оптимальных одноимпульсных решений внутренней задачи, строго локально оптимальна для перелета с заданными t_i . При этом, естественно, эти даты уже не будут оптимальными и условия трансверсальности (12.2.36), (12.2.43), (12.2.44) будут нарушены. Если при новой ориентации орбиты ИС планеты снова решить экстремальную задачу оптимизации дат t_i , то указанные условия снова будут удовлетворены.

Будем при фиксированных датах t_i менять ориентацию орбиты ИС планеты так, чтобы параметр σ (12.2.59) монотонно убывал. Поскольку при этом параметр κ (12.2.57) остается неизменным, начиная с некоторого значения параметра σ оптимальными решениями внутренней задачи станут двухимпульсные перелеты с импульсом на сфере влияния (см. § 10.3). Если по-прежнему гелиоцентрические перелеты считать кеплеровыми дугами без импульсов в крайних точках (на сфере влияния планеты) и найти, как и выше, одноимпульсное решение внутренней задачи и соответствующее решение сопряженной системы, то вследствие заведомой неоптимальности такой траектории в целом, условие (12.2.52) уже не может выполняться и на некоторых промежутках Δt_j будет

$$s(\Delta t_j) \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad \Delta t_j \in [t_0, t_1] \cup [t_2, t_3]. \quad (12.5.2)$$

Заметим, что промежутки Δt_j не обязательно примыкают к моментам времени $t_1 = 0$ и $t_2 \neq 0$. В самом деле, как показано в разделе 10.3.2, импульс на сфере влияния, когда он выгоден, изменяет ориентацию векторов $V_{сф1}^-$ и $V_{сф2}^+$ так, что векторы $V_{сф1}^+$ и $V_{сф2}^-$, соответственно, оказываются примерно в плоскости орбиты ИС. Но такого же эффекта можно, вообще говоря, добиться путем приложения одного или нескольких небольших промежуточных импульсов на гелиоцентрических участках, изменяющих ориентацию векторов $V_{сф1}^-$, $V_{сф2}^+$ в нужном направлении (подробнее см. раздел 12.5.2г).

Зная поведение функции $s(t)$, в соответствии с общей методикой, изложенной в разделе 2.3.3, можно приближенно задать моменты приложения и ориентацию дополнительных импульсов и с помощью экстремального подхода найти оптимальную многоимпульсную гелиоцентрическую траекторию. После этого, аналогично изложенному выше, надо найти решение сопряженной системы и по условиям (12.2.52), (12.2.53) установить строгую локальную оптимальность найденного перелета.

Предположим, что найденная многоимпульсная траектория строго локально оптимальна. Продолжая изменять ориентацию орбиты ИС и параметр σ , можно теперь в качестве исходной взять полученную многоимпульсную траекторию и поступать совершенно аналогично изложенному выше. Таким образом будет исчерпан диапазон заданных ориентаций плоскости орбиты ИС планеты.

Аналогично тому, как это сделано для σ , можно проследивать влияние любых непрерывно изменяющихся параметров задачи на оптимальность схемы перелета. В частности, таким образом можно перейти от круговых орбит ИС планеты назначения к эллиптическим орбитам, плоскость которых и линия аписид произвольно ориентированы в пространстве (см. конец раздела 12.5.2г).

При изложенном подходе к установлению строгой локальной оптимальности траекторий перелеты Земля — планета и планета — Земля в задачах II и III рассматриваются, по существу, независимо друг от друга. Далее, как показывает анализ, основное влияние на решение сопряженной системы оказывают не параметры кеплеровых дуг перелета, а параметры κ и σ , особенно последний, от которых зависят решение внутренней задачи и $\text{grad } \Delta V_1 (V_{\text{сф}1}^-)$, $\text{grad } \Delta V_2 (V_{\text{сф}2}^+)$. Учитывая в целом схожесть кеплеровых дуг перелетов Земля — планета и планета — Земля для оптимальных траекторий, рассмотренных в § 12.4, ограничимся в дальнейшем анализом строгой локальной оптимальности перелетов Земля — планета с крайними условиями (12.2.34), (12.2.35) для сопряженной системы. Полученные при этом результаты будут справедливы для задачи I, обоих перелетов «туда» и «обратно» в задаче II и для перелета Земля — планета в задаче III. Что касается перелета планета — Земля в задаче III, то для него решение сопряженной системы должно находиться из условий (12.2.41), (12.2.48). С учетом сказанного далее ограничимся общим рассмотрением перелетов орбита ИСЗ — орбита ИС планеты, конкретно перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ.

Согласно сделанному выше предположением орбиты ИСЗ и ИСМ круговые, ориентация орбиты ИСМ в пространстве задается ортом ее кинетического момента j_n , плоскость орбиты ИСЗ проходит через вектор $V_{\text{сф}0}^-$. Тогда, согласно (12.2.34), (12.2.35), (12.2.73) и (12.2.75), крайние условия в моменты t_0 и t_1 для сопряженной системы записываются, соответственно, в виде

$$s_0^+ = M_0 \frac{V_{\text{сф}0}^-}{V_{\text{сф}0}^-}, \quad (12.5.3)$$

$$s_1^- = - \left(M_1 \frac{V_{\text{сф}1}^+}{V_{\text{сф}1}^+} + N_1 j_n \right), \quad (12.5.4)$$

где, согласно (12.2.66), (12.2.67) и (12.2.74),

$$M_0 = M(\kappa, \sigma = 1)|_{t_0-0} = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa_0^-}} \frac{V_{\text{сф}0}^-}{V_{\text{кр}0}}, \quad (12.5.5)$$

$$M_1 = M(\kappa, \sigma)|_{t_1+0} = 2 \left[\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} \frac{V_{\text{сф}1}^+}{V_{\text{кр}1}^2} + \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{1 - \sigma_1^+}{V_{\text{сф}1}^+} \right]_{t_1+0}, \quad (12.5.6)$$

$$N_1 = N(\kappa, \sigma)|_{t_1+0} = -2 \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{1 - \sigma_1^+}}{V_{\text{сф}1}^+} \Big|_{t_1+0} \text{sign}(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^\perp, \mathbf{j}_n). \quad (12.5.7)$$

В формулах (12.5.5)–(12.5.7) $V_{\text{кр}i}$ ($i = 0, 1$) — скорости движения точки по заданным орбитам ИСЗ и ИСМ соответственно, $\kappa_0^- = \frac{\rho_0}{a_0}$ и $\kappa_1^+ = \frac{\rho_1}{a_1^+}$ — параметры из (12.2.57), ρ_i — высота орбиты ИСЗ ($i = 0$) и ИСМ ($i = 1$) соответственно, a_0 ($V_{\text{сф}0}^-$) и a_1 ($V_{\text{сф}1}^+$) — действительные полуоси соответствующих гипербол перехода (12.2.58), σ_1^+ — параметр (12.2.59):

$$\sigma_1^+ = 1 - \frac{(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+, \mathbf{j}_n)^2}{(V_{\text{сф}1}^+)^2}. \quad (12.5.8)$$

Производные $\frac{\partial \Delta V}{\partial \kappa} \Big|_{t_1+0}$ и $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \Big|_{t_1+0}$ вычисляются с помощью соотношений (12.2.68), (12.2.69).

Если радиус сферы влияния $\rho_{\text{сф}i} \rightarrow \infty$, $i = 0, 1$, то (см. (12.2.57), (12.2.58))

$$\kappa_0^- = \frac{(V_{\text{сф}0}^-)^2}{V_{\text{кр}0}^2}, \quad \kappa_1^+ = \frac{(V_{\text{сф}1}^+)^2}{V_{\text{кр}1}^2}. \quad (12.5.9)$$

В этом случае из (12.5.5) получаем

$$M_0 = \left(\frac{\kappa_0^-}{2 + \kappa_0^-} \right)^{1/2}. \quad (12.5.10)$$

Векторы скорости аппарата на сферах влияния $\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+$ вычисляются с помощью соотношений (12.2.5), (12.2.6). Итак, при заданных датах t_0 , t_1 , параметрах орбит ИСЗ и ИС планеты сопряженные векторы $\mathbf{s}_0^+$, $\mathbf{s}_1^-$ определяются полностью векторами $\mathbf{V}_{\text{сф}0}^-$, $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+$.

Как следует из (12.5.6), (12.5.7), величины M_1 и N_1 зависят от параметров круговой орбиты ИСМ только через κ_1^+ и σ_1^+ . Что касается вектора $\mathbf{s}_1^-$ и, следовательно, решения сопряженной системы, то они, согласно (12.5.4), непосредственно зависят от ориентации орбиты ИС планеты через вектор $\mathbf{j}_n$. Поскольку переход от кеплеровой дуги перелета к многоимпульсной гелиоцентрической траектории, как уже указывалось выше, зависит в основном от параметров $\kappa_1^-(V_{\text{сф}1})$ и $\sigma_1^-(V_{\text{сф}1})$, где κ_1^- и σ_1^- вычисляются по тем же формулам, что и κ_1^+ и σ_1^+ , с заменой $V_{\text{сф}1}^+$ на $V_{\text{сф}1}^-$, при изучении влияния ориентации в пространстве орбиты ИСМ удобно в качестве основного параметра взять величину σ_1^- .

Каждое значение σ_1^- определяет семейство орбит ИС планеты, плоскости которых расположены под заданным углом к $V_{\text{сф}1}^-$, так что одну из составляющих вектора $\mathbf{j}_n$ можно считать свободным параметром. Выведем соотношения, позволяющие определить составляющие вектора $\mathbf{j}_n$ для любого заданного $\sigma \in [0, 1]$. Пусть векторы $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ заданы своими проекциями на оси гелиоцентрической прямоугольной правой декартовой системы: радиус-вектор аппарата, трансверсаль и нормаль к траектории:

$$\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_n(j_{nr}, j_{n\tau}, j_{nz}), \quad \mathbf{V}_{\text{сф}} = (V_{\text{сф}r}, V_{\text{сф}\tau}, V_{\text{сф}z}).$$

Введем для краткости обозначения:

$$\frac{V_{\text{сф}r}}{V_{\text{сф}}} = x, \quad \frac{V_{\text{сф}\tau}}{V_{\text{сф}}} = y, \quad \frac{V_{\text{сф}z}}{V_{\text{сф}}} = z. \quad (12.5.11)$$

Используя (12.2.59), (12.5.11), запишем систему уравнений:

$$j_{nr}^2 + j_{n\tau}^2 + j_{nz}^2 = 1, \quad (12.5.12a)$$

$$j_{nr}x + j_{n\tau}y + j_{nz}z = \sqrt{1 - \sigma} \operatorname{sign} \cos \alpha, \quad (12.5.12b)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (12.5.12b)$$

где α — угол между векторами $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ и $\mathbf{j}_n$ (см. § 10.3, $0 \leq \alpha \leq \pi$). Случай $\alpha > \pi/2$ приводится к случаю $\alpha < \pi/2$ либо отображением $\mathbf{V}_{\text{сф}}$ относительно плоскости орбиты ИС, либо изменением знака $\mathbf{j}_n$. Для этих случаев характеристическая скорость перехода на орбиту ИС $\Delta V(\mathbf{V}_{\text{сф}})$ одна и та же, расположение же в пространстве гиперболы перехода сфера влияния — орбита ИС и — при изменении знака $\mathbf{j}_n$ — положение точки выхода на орбиту ИС меняются. Из (12.5.4) — (12.5.7) следует, что при изменении знака $\mathbf{j}_n$ вектор $\mathbf{s}_1^-$ остается неизменным, поэтому решение задачи оптимизации перелета при переходе от $\alpha > \pi/2$ к $\alpha < \pi/2$

и наоборот не изменяется. Для построения же гиперболы перехода эти случаи можно интерпретировать как отображение вектора V_{cf} относительно плоскости орбиты ИС и воспользоваться результатами раздела 10.2.5. На основании сказанного ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая $\alpha \leq \pi/2$. Определяя из (12.5.12) $j_{n\tau}$, имеем

$$j_{n\tau} = \frac{1}{y^2 + z^2} \left[y(\sqrt{1 - \sigma} - j_{nr}x) \pm \right. \\ \left. \pm z\sqrt{(y^2 + z^2)(1 - j_{nr}^2) - (\sqrt{1 - \sigma} - j_{nr}x)^2} \right]. \quad (12.5.13)$$

Требую, чтобы выражение под знаком радикала в (12.5.13) было неотрицательным, и учитывая (12.5.12в), получаем

$$j_{nr}^2 - 2j_{nr}x\sqrt{1 - \sigma} + x^2 - \sigma \leq 0, \quad (12.5.14)$$

откуда

$$x\sqrt{1 - \sigma} - \sqrt{\sigma(1 - x^2)} \leq j_{nr} \leq x\sqrt{1 - \sigma} + \sqrt{\sigma(1 - x^2)}. \quad (12.5.15)$$

На основании (12.5.15) имеем

$$j_{nr} = \frac{V_{c\phi r}}{V_{c\phi}} \sqrt{1 - \sigma} + \lambda \sqrt{\sigma \left(1 - \frac{V_{c\phi r}^2}{V_{c\phi}^2} \right)}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1, \quad (12.5.16)$$

а $j_{n\tau}$ и j_{nz} определяются из (12.5.13) и (12.5.12б) соответственно.

Проведенное в § 12.4 исследование оптимальных перелетов Земля — Марс — Земля и Земля — Венера — Земля показало, что кеплеровы дуги этих перелетов при практически приемлемых значениях характеристической скорости располагаются в окрестности орбит Земли и Марса и Земли и Венеры соответственно. Таким образом, в целом движение аппарата на каждой кеплеровой дуге, входящей в перелет, не очень сильно отличается от движения по круговой орбите некоторого среднего радиуса R_{cp} , во всяком случае, как показывают оценки, отношения $\frac{|r(t) - R_{cp}|}{R_{cp}}$,

$\frac{|V(t) - V_{cp}|}{V_{cp}}$, где $r(t)$ и $V(t)$ — текущие радиус-вектор и вектор

скорости аппарата, $V_{cp} = \sqrt{\mu_0/R_{cp}}$ — гелиоцентрическая скорость движения точки по круговой орбите радиуса R_{cp} , на большей части гелиоцентрической траектории находятся в пределах применимости линеаризованной теории. Рассмотрение задач I, II и III в линеаризованной постановке может быть эффективно использовано для приближенного аналитического исследования свойств оптимальных перелетов. В частности, воспользовавшись

для вектора s линеаризованным решением в цилиндрических координатах (6.1.9), получим, что определитель системы (12.5.3), (12.5.4) относительно постоянных A, B, C, D, E и F , входящих в решение сопряженной системы, обращается в нуль только при угловой гелиоцентрической дальности перелета $\eta_{01} = 180^\circ$. Но, как было показано в разделах 12.3.2, 12.4.1, кеплеровы дуги с дальностью $\eta_{01} = 180^\circ$, $\eta_{23} = 180^\circ$ практически не могут входить в состав оптимальных перелетов. Следовательно, для оптимальных перелетов система (12.5.3), (12.5.4) разрешима относительно постоянных A, B, C, D, E и F .

15.5.2. Результаты численного исследования. Приведенные ниже результаты получены Н. А. Истоминым.

В качестве исходных кеплеровых траекторий были взяты двухимпульсные перелеты Земля — Марс из состава оптимальных траекторий Земля — Марс — Земля с заданной скоростью входа в атмосферу Земли (см. раздел 12.4.3). Всего было исследовано девять вариантов перелетов, отличающихся датами старта, продолжительностью и угловой дальностью полета (табл. 12.5.1). Среди рассмотренных траекторий имеются как траектории, содержащие перигелий (варианты № 3, 4, 6, 7, 9), так и не содержащие его (остальные варианты). Орбиты ИСЗ и ИСМ считались круговыми, плоскость орбиты ИСЗ принадлежит пучку геоцентрических орбит, содержащих вектор $V_{сф0}^+$ (см. раздел 12.3.2), так что $\sigma_0^+ = 1$. При решении внутренних задач ММСВ, как и в § 12.4, полагалось

$$H_{\pi\oplus} = H_{\alpha\oplus} = H_{\pi\delta} = H_{\alpha\delta} = 0,$$

$$\rho_{сф\oplus} = \rho_{сф\delta} = \infty.$$

В дальнейшем для краткости траектории, для которых плоскость орбиты ИСМ и векторы $V_{сф1}^-$ компланарны ($\sigma_1^- = 1$), будем называть *плоскими*, а траектории, для которых вектор $V_{сф1}^-$ не лежит в плоскости орбиты ИСМ ($\sigma_1^- < 1$) — *пространственными*.

а) Проверка оптимальности плоских перелетов. Поскольку $\sigma_1^- = 1$, соотношение (12.5.4) принимает вид (12.5.3). С учетом (12.5.10) имеем

$$\begin{aligned} s_0^+ &= \left(\frac{\kappa_0^-}{2 + \kappa_0^-} \right)^{1/2} \frac{V_{сф0}^-}{V_{сф0}^-}, \\ s_1^- &= - \left(\frac{\kappa_1^+}{2 + \kappa_1^+} \right)^{1/2} \frac{V_{сф1}^+}{V_{сф1}^+}. \end{aligned} \quad (12.5.17)$$

В рассматриваемом случае решение сопряженной системы не зависит от λ .

Основные характеристики исходных двухимпульсных перелетов

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_0	71.06.13,7	71.05.23,2	88.06.29,9	75.09.13,2	84.02.21,8	75.09.14,0	71.05.02,3	79.11.24,1	71.04.30,5
t_1	71.10.27,1	71.11.07,9	88.12.28,9	76.03.28,4	84.09.03,1	76.04.03,4	71.10.27,7	80.07.09,3	71.11.25,9
$t_{01}, \text{сут}$	135,362	168,665	182,004	197,274	194,229	202,365	178,343	228,229	209,308
$\eta_{01}, \text{град}$	104,225	132,095	140,744	142,107	142,611	143,909	145,344	155,965	164,875
$\Delta V_{\Sigma}, \text{км/сек}$	6,878	6,181	6,141	7,127	6,803	6,961	6,429	6,767	6,087
$r_0(t_0), 10^6 \text{ км}$	151,911	151,435	152,071	150,525	147,923	150,498	150,745	147,701	150,667
$\Delta V_0, \text{км/сек}$	3,919	3,663	3,797	4,095	3,758	4,086	3,740	3,827	3,782
$V_{\text{сф}0}, \text{км/сек}$	3,845	2,968	3,452	4,359	3,319	4,332	3,253	3,552	3,401
κ_0	0,2364	0,1408	0,1905	0,3037	0,1760	0,3000	0,1692	0,2017	0,1849
$r_1(t_1), 10^6 \text{ км}$	209,060	210,345	223,299	246,962	211,098	247,414	209,120	236,660	212,737
$\Delta V_1, \text{км/сек}$	2,960	2,517	2,344	3,032	3,045	2,875	2,689	2,940	2,306
$V_{\text{сф}1}, \text{км/сек}$	4,136	3,391	3,067	4,249	4,270	4,001	3,693	4,105	2,992
κ_1	1,3199	0,8873	0,7259	1,3931	1,4068	1,2350	1,0519	1,3002	0,6908

Примечание. t_0, t_1 — даты старта с орбиты ИСЗ и выхода на орбиту ИСМ: 71.06.13,7 — 13 июня 1971 г., 0,7 сут от 0 часов. Для всех вариантов $H_{\oplus} = H_{\odot} = 0$, первые космические скорости $V_{\oplus} = 7,9094 \text{ км/сек}$, $V_{\odot} = 3,6004 \text{ км/сек}$, $\rho = \rho_{\text{сф}}$.

Из (12.5.17) непосредственно следует:

$$s_0^+ < 1, s_1^- < 1. \quad (12.5.18)$$

В результате определения сопряженной системы установлено, что для всех выбранных вариантов $|s(t)| < 1$ во всех точках траектории. Итак, в случае, плоского выхода аппарата на орбиту ИСМ

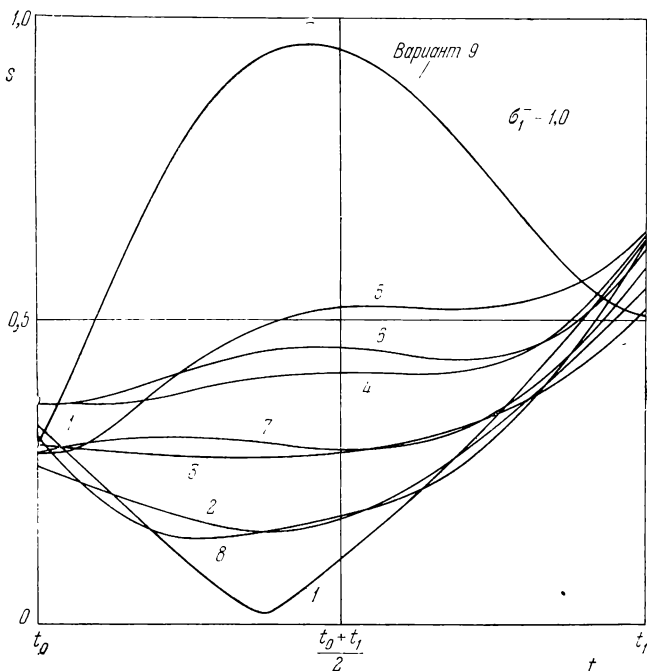


Рис. 12.5.1.

($\sigma_1^- = \sigma_1^+ = 1$) рассматриваемые двухимпульсные перелеты с импульсами на орбитах ИС и пассивными гелиоцентрическими кеплеровыми дугами являются строго локально оптимальными.

Характер функции $s(t)$ для различных вариантов при $\bar{\sigma}_1^- = 1$ показан на рис. 12.5.1. Заметим, что промежуток $[t_0, t_1]$ на этом рисунке соответствует различным длительностям перелета t_{01} (см. таблицу 12.5.1). Из приведенных данных видно, что с увеличением продолжительности t_{01} и угловой дальности η_{01} перелета (см. таблицу 12.5.1) двухимпульсные кеплеровы дуги приближаются к границе их строгой локальной оптимальности.

Оптимальность перелетов между орбитами Земли и Марса при различных значениях t_{01} и η_{01} исследована в работах Гравье,

Маршала, Калпа [2], Минкоффа, Лайона [1], Пельтье [1], Уиллиса [1]. Область строгой локальной оптимальности двухимпульсных кеплеровых перелетов между плоскими круговыми орбитами Земли и Марса без выхода на орбиты ИС планет, заимствованная из работы Пельтье [1] (с учетом аналогичных данных в работе Минкоффа, Лайона [1]), отмечена на рис. 12.5.2 буквой A , буквой B на этом рисунке отмечена область оптимальности трехимпульсных перелетов, а также двухимпульсных и трехимпульсных перелетов с участком движения по начальной или конечной орбитам. Точки соответствуют вариантам, приведенным в таблице 12.5.1, цифрой рядом с точкой указан номер варианта. Сопоставим область A с аналогичной областью для перелетов между орбитами ИС планет. Из сказанного в разделе 12.2.2 (см.

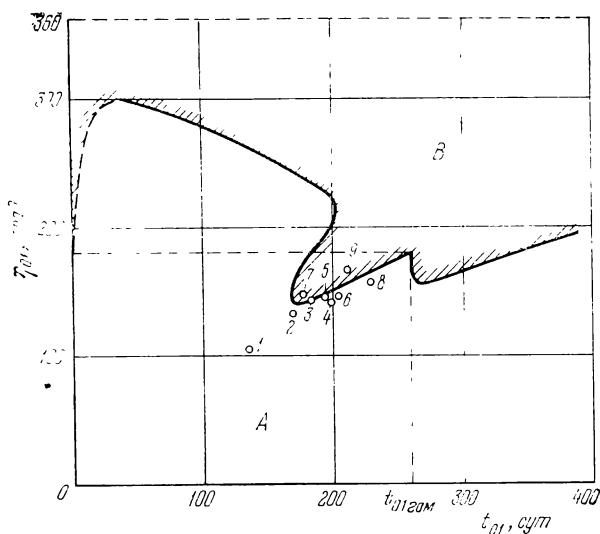


Рис. 12.5.2.

соотношения (12.2.76) — (12.2.85)) следует, что в последнем случае вследствие (12.2.76) можно ожидать некоторого уменьшения величин $s(t)$ и некоторого соответствующего расширения области оптимальности двухимпульсных перелетов в плоскости (t_{01}, η_{01}) . Результаты проведенных расчетов (см. рис. 12.5.2) подтверждают этот вывод: варианты № 3, № 7 и № 9, попавшие в область неоптимальности двухимпульсных перелетов на рис. 12.5.2, на самом деле являются строго локально оптимальными.

В работе Уиллиса [1] рассматривались двух- и трехимпульсные перелеты Земля — Марс и Марс — Земля в задаче на минимизацию характеристической скорости ΔV_{Σ} перелета Земля —

Марс — Земля с заданной суммарной продолжительностью T_2 и временем ожидания Δt_2 (см. §§ 12.3, 12.4). Задача решалась в экстремальной постановке с учетом эллиптичности и наклона орбиты Марса для круговых орбит ИС Земли и Марса малой высоты ($H_{ср\oplus} \approx 0$, $H_{ср\mars} \approx 0$). Предполагалось, что промежуточный импульс сообщается в плоскости перелета Земля — Марс или Марс — Земля. Расчеты показали, что этот импульс приводит к снижению характеристической скорости быстрых перелетов, если он сообщается на кеплеровой дуге с угловой дальностью η_{01} (или η_{23}), большей примерно 230° , соответствующей сильному залету внутрь орбиты Земли (см. раздел 12.4.1). Оптимальный промежуточный импульс сообщается примерно по трансверсали к исходной траектории в окрестности ее перигелия в направлении, обратном движению аппарата. Для перелетов в период 1971 и 1980 гг., соответствующих началу и середине синодического цикла, к которым относятся приводимые результаты, перестановка маршрутов «туда» и «обратно» дает примерно одни и те же результаты. Результаты расчета оптимальных четырехимпульсных перелетов и соответствующих импульсов (рис. 12.5.3) показывают, что использование промежуточного импульса приводит к заметному уменьшению характеристической скорости, особенно в неблагоприятный период 1980 г. Строгая локальная оптимальность рассмотренных траекторий была установлена в работе Минкоффа, Лайона [1].

В дальнейшем ограничимся указанным в таблице 12.5.1 диапазоном продолжительностей перелета t_{01} и угловых дальностей η_{01} , для которых оптимальными плоскими перелетами являются кеплеровы дуги. Все приводимые ниже результаты справедливы именно для указанного диапазона гелиоцентрических продолжительностей и угловых дальностей перелета.

Полученные результаты позволяют сделать следующий общий вывод.

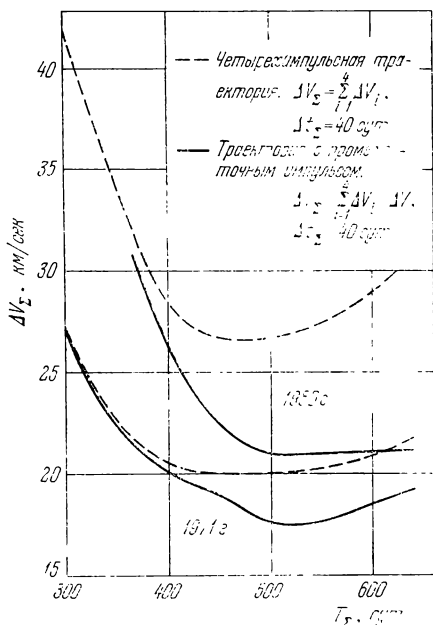


Рис. 12.5.3.

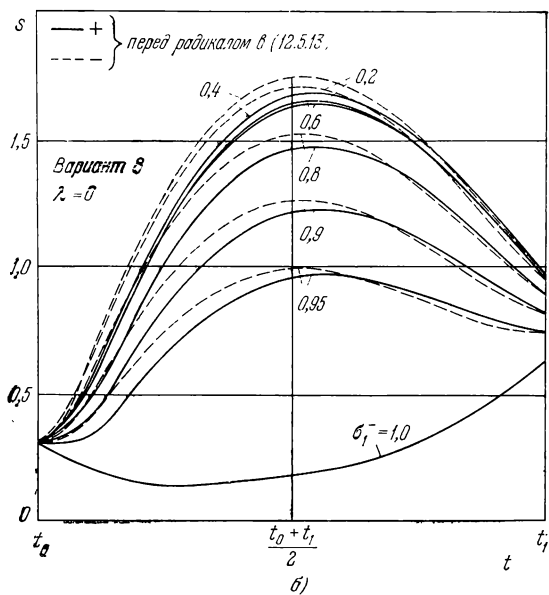
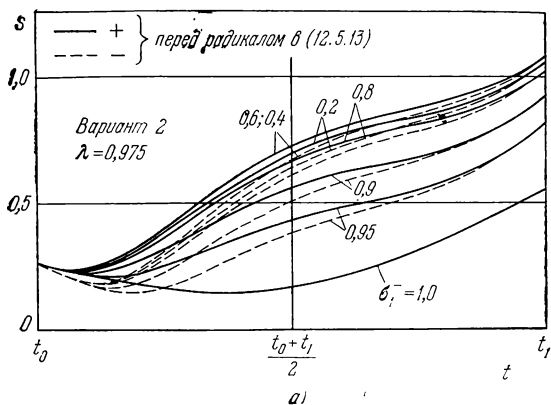
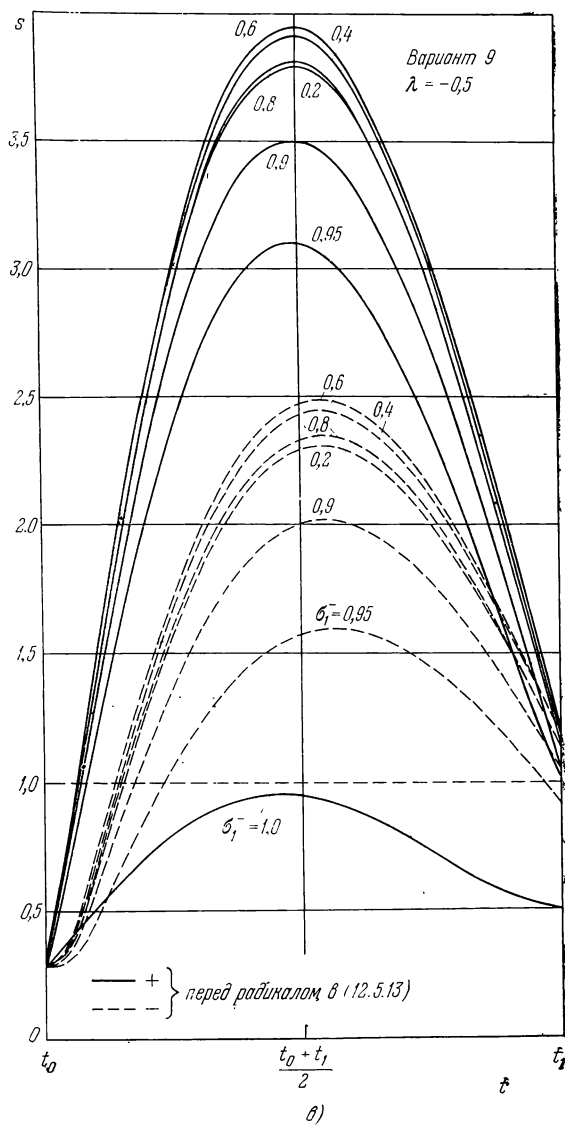


Рис. 12.5.4.



Оптимальные траектории, являющиеся решениями задач Ia и IIa, а также перелеты Земля — Марс в оптимальных траекториях задачи IIIa, в которых круговые орбиты ИС планет и векторы $V_{сф\ i}$, $i = 0, 1, 2, 3$, компланарны, состоящие из одноимпульсных оптимальных переходов сфера влияния — орбита ИС и пассивных гелиоцентрических кеплеровых дуг, являются строго локально оптимальными траекториями.

Рассмотрим теперь плоские трех- и двухимпульсные перелеты с торможением в атмосфере планет без ограничения скорости входа в атмосферу (см. разделы 12.3.3, 12.4.3). Для таких перелетов у планеты, где аппарату сообщается импульс, краевое условие для вектора s имеет вид (12.5.3), а у планеты, в атмосфере которой происходит торможение аппарата, — (12.2.55). Сопоставление этих краевых условий с краевыми условиями (12.5.17) с учетом вида функции $s(t)$ (см. рис. 12.5.1) показывает, что трех- и двухимпульсные плоские перелеты без ограничения скорости входа в атмосферу также строго локально оптимальны.

б) Кеплеровы перелеты с произвольно ориентированной орбитой ИС. Для всех указанных в таблице 12.5.1 вариантов в соответствии с общей схемой раздела 12.5.1 была проанализирована функция $s(t)$ при изменении σ_1^- в пределах $0,2 \leq \sigma_1^- \leq 1$ и различных фиксированных λ . Поскольку решение краевой задачи и вектор $s(t)$ непрерывно зависят от σ_1^- , при $\lambda = \text{fix}$ в некоторой области значений σ_1^- , примыкающих к 1, $s(t) < 1$ всюду на траектории. При этих значениях λ и σ_1^- траектории, включающие исходную кеплерову дугу и оптимальный одноимпульсный переход на орбиту ИСМ, по-прежнему являются строго локально оптимальными.

По мере уменьшения σ_1^- (увеличения наклона плоскости орбиты ИС к плоскости гелиоцентрической кеплеровой дуги перелета) точка (κ_1^-, σ_1^-) переходит из области оптимальности одноимпульсного перехода на орбиту ИСМ в область, где оптимальным должен быть двухимпульсный переход с приложением второго импульса на сфере влияния Марса (см. рис. 10.3.5). Поэтому, начиная с некоторого значения $\sigma_1^- < 1$, $\max_{t \in [t_0, t_1]} s(t) > 1$

и анализируемая траектория становится заведомо неоптимальной. Как показал численный анализ, для большинства значений σ_1^- и λ можно указать два характерных типа деформации функции $s(t)$ с уменьшением σ_1^- при $\lambda = \text{fix}$, показанных на рис. 12.5.4. В соответствии с общей теорией, изложенной в разделах 2.3.2, 2.3.3, в случае, представляемом рис. 12.5.4, а, вероятной оптимальной траекторией является траектория с импульсом на сфере влияния Марса, а в случаях, изображенных на рис. 12.5.4, б и 12.5.4, в, — с промежуточным импульсом на гелио-

центрическом участке. Во втором из них можно предполагать также наличие двух импульсов — на гелиоцентрическом участке и на сфере влияния Марса. По мере уменьшения σ_1^- область, где $s(t) > 1$, как правило, расширяется, $\max s(t)$ возрастает, что свидетельствует об усилении степени неоптимальности двухимпульсных перелетов.

Заметим, что приведенные рассуждения носят предварительный качественный характер и окончательное решение задачи оптимизации перелета может, вообще говоря, их не подтвердить.

в) Перелеты с импульсом на сфере влияния Марса. Если оптимальной схеме перелета соответствует импульс на сфере влияния Марса, то, согласно (12.2.35), (12.2.90),

$$s_1^- = -\operatorname{grad} \Delta V_1(\mathbf{V}_{\text{сф}1}^+) = \frac{\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}}{|\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}|}, \quad s_1^- = 1. \quad (12.5.19)$$

Для построения оптимальной фазовой траектории перелета орбита ИСЗ — орбита ИСМ с импульсом на сфере влияния Марса при фиксированной гелиоцентрической кеплеровой дуге необходимо численно решать задачу оптимизации двухимпульсного перехода сфера влияния Марса — орбита ИСМ при заданном векторе $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^-$.

Рассмотрим схему, аналогичную приведенной на рис. 10.3.1 (рис. 12.5.5), для случая $\alpha_1^- = \arcsin \sqrt{\sigma_1^-} < \pi/2$. В разделе 10.3.1 показано, что из оптимальности $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}$ следует, что точка B лежит внутри криволинейного треугольника, ограниченного вектором $\mathbf{V}_{\text{сф}1}^-$, его проекцией на плоскость орбиты ИС ON и дугой CN окружности, построенной на OC как на диаметре (эта дуга является геометрическим местом концов векторов $\Delta \mathbf{V}_\alpha$, см. рис. 10.3.3).

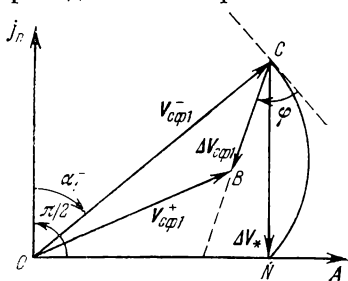


Рис. 12.5.5.

Для отыскания оптимального импульса на сфере влияния $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}$ можно использовать результаты численного исследования раздела 10.3.2, в частности установленную там при определенных значениях κ_1^- и σ_1^- близость вектора $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}$ к вектору $\Delta \mathbf{V}_*$ (см. рис. 10.3.6, 10.3.7). Однако с учетом того, что при $\sigma_1^- \geq 0,5$ и значениях κ_1^- , близких к граничной кривой на рис. 10.3.5 (т. е. в наиболее интересной переходной области), векторы $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}$ и $\Delta \mathbf{V}_*$ заметно различаются, для нахождения оптимального импульса $\Delta \mathbf{V}_{\text{сф}1}$ был использован следующий алгоритм. Кри-

волинейный треугольник OCN покрывается сравнительно крупной сеткой и на определенном таким образом множестве значений импульсов $\Delta V_{сф1}$ (в узлах сетки) отыскивается такое, которое доставляет минимум характеристической скорости перелета

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{сф1} + \Delta V_1(\kappa_1^+, \sigma_1^+), \quad (12.5.20)$$

где $\Delta V_1(\kappa_1^+, \sigma_1^+)$ — величина импульса перехода на орбиту ИС, определяемая вектором

$$\mathbf{V}_{сф1}^+ = \mathbf{V}_{сф1}^- + \Delta \mathbf{V}_{сф1}. \quad (12.5.21)$$

Вектор $\Delta \mathbf{V}_{сф1}$ далее легко уточняется методом Ньютона. Здесь также можно использовать соотношение (10.2.62).

С учетом всего сказанного при $\sigma_1^- = \text{var}$, $\sigma_1^- < 1$, $\lambda = \text{fix}$ для всех вариантов, указанных в таблице 12.5.4, одноимпульсный

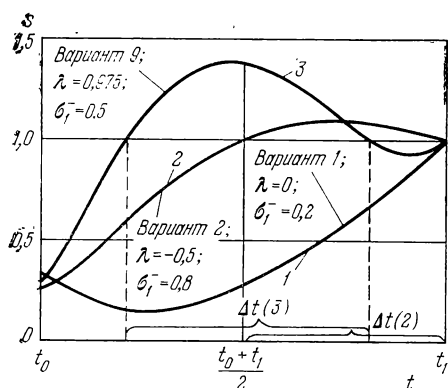


Рис. 12.5.6.

(рис. 12.5.6, для всех вариантов взят знак «+» перед радикалом в (12.5.13)). Для первого типа (обозначенного на рис. 12.5.6 цифрой 1)

$$s^-(t_1) = 1, \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_1=0} > 0, s(t) < 1 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (12.5.22)$$

Соответствующие перелеты с импульсом на сфере влияния Марса являются строго локально оптимальными.

Для второго и третьего типов (обозначенных на рис. 12.5.6 цифрами 2 и 3 соответственно)

$$s^-(t_1) = 1, s(t) > 1, t \in \Delta t \subset [t_0, t_1], \quad (12.5.23)$$

причем промежуток Δt либо примыкает к моменту t_1 (тип 2), либо находится внутри промежутка $[t_0, t_1]$ (тип 3). В соответствии с общей теорией (см. §§ 2.2, 2.3) и сказанным в разделе

перелет сфера влияния Марса — орбита ИСМ (см. раздел 12.5.26) сравнивался с соответствующим двухимпульсным перелетом и при наличии выигрыша в характеристической скорости заменялся последним. При этом кеплерова дуга перелета Земля — Марс остается по-прежнему неизменной. Краевое условие (12.5.4) заменяется условием (12.5.19).

Анализ результатов расчета позволил выявить три характерных типа получаемых при этом функций $s(t)$

12.5.1, такие перелеты заведомо неоптимальны. Вероятными оптимальными схемами перелета при этом являются либо перелет с промежуточным гелиоцентрическим импульсом и импульсом на сфере влияния Марса, либо перелет с одним промежуточным импульсом (см. ниже).

Заметим, однако, что и в указанном случае переход во внутренней задаче от одноимпульсных перелетов к двухимпульсным приводит к заметному уменьшению $\max s(t)$ и, следовательно, уменьшает «степень неоптимальности» исходного перелета.

Результаты исследования строгой локальной оптимальности без промежуточных гелиоцентрических импульсов всех вариантов перелетов, указанных в таблице 12.5.1, при всех возможных значениях λ и σ_1^- приведены в таблице 12.5.2. На рис. 12.5.7 для варианта № 7 показано поведение функции $s(t)$ при различных значениях λ и σ_1^- . При проведении расчетов крайние значения $\lambda = \pm 1$ для исключения особенностей при счете на ЭЦВМ заменялись значениями $\lambda = \pm 0,975$ (см. рис. 12.5.7а и в). Кривые $s(t)$, для которых $s^-(t_1) = 1$, соответствуют тем значениям σ_1^- , при которых оптимальным является перелет с импульсом на сфере влияния Марса.

Проанализируем влияние основных параметров κ_1^- , σ_1^- и λ , связанных с условиями полета аппарата к сфере влияния Марса и параметрами орбиты ИСМ — ее ориентацией и высотой, на оптимальную схему перелета орбита ИСЗ — орбита ИСМ. Оптимальность той или иной схемы перелета определяется главным образом положением точки (κ_1^-, σ_1^-) относительно граничной кривой на рис. 10.3.5. Если точка (κ_1^-, σ_1^-) находится в глубине соответствующей области на рис. 10.3.5, то оптимальная схема включает либо одноимпульсные перелеты, либо двухимпульсные перелеты сфера влияния Марса — орбита ИСМ; при этом промежуточные импульсы на гелиоцентрическом участке, как правило, отсутствуют (варианты №№ 1, 2, 3, 4, 6).

На рис. 12.5.8 приведена типичная зависимость характеристических скоростей одноимпульсного $\Delta V(\kappa_1^-, \sigma_1^-)$ и двухимпульсного $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{\text{сф1}} + \Delta V(\kappa_1^+, \sigma_1^+)$ оптимальных переходов сфера влияния — орбита ИСМ, а также соответствующих импульсов $\Delta V_{\text{сф1}}$ и $\Delta V(\kappa_1^+, \sigma_1^+)$ от σ_1^- при $\kappa_1^- = \text{const}$. Эти результаты, относящиеся к внутренней задаче, при $\sigma_1^- = \text{const}$ справедливы для всех значений λ . Видно, что при малых σ_1^- оптимизация схемы перелета дает существенный выигрыш в характеристической скорости перелета.

Если же точка (κ_1^-, σ_1^-) находится вблизи граничной кривой на рис. 10.3.5, то оптимальными перелетами, наряду с указанными

Т а б л и ц а 12.5.2 (продолжение)

Вариант	$\sigma_1 \backslash \lambda$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
6	-0,975		—	—	—	—	—	—	—	—
	-0,5		—	—	—	—	—	—	—	—
	0		—	—	—	—	—	—	—	—
	0,5		—	—	—	—	—	—	—	—
	0,975									
7	-0,975			±	±					
	-0,5		+	±	±	+	+			
	0		+	±	±	+	+			
	0,5		+	+	+	+				
	0,975									
8	-0,975									
	-0,5		±	±	±	±	+			
	0		±	±	±	±	±			
	0,5		±	±	±	±	±			
	0,975				—	—				
9	0,975		±	±	±	±	±	±	±	±
	-0,5		±	±	±	±	±	±	+	+
	0		±	±	±	±	±	+	+	+
	0,5		±	±	±	+	+	+	+	+
	0,975		+	+	+	+	+	+	+	+

Примечания. 1. «+» — плюс перед радикалом в (12.5.13), «—» — минус перед радикалом в (12.5.13).

2. Клетки, помеченные знаками «+» и «—», соответствуют тем значениям σ_1 и λ , при которых $\max_{\{t\}} s(t) > 1$.

3. Жирная черта разделяет область по σ_1 на две подобласти: в левой оптимальным является одноимпульсный переход на орбиту ИСМ, в правой — с дополнительным импульсом на сфере влияния Марса (см. рис. 10.3.5).

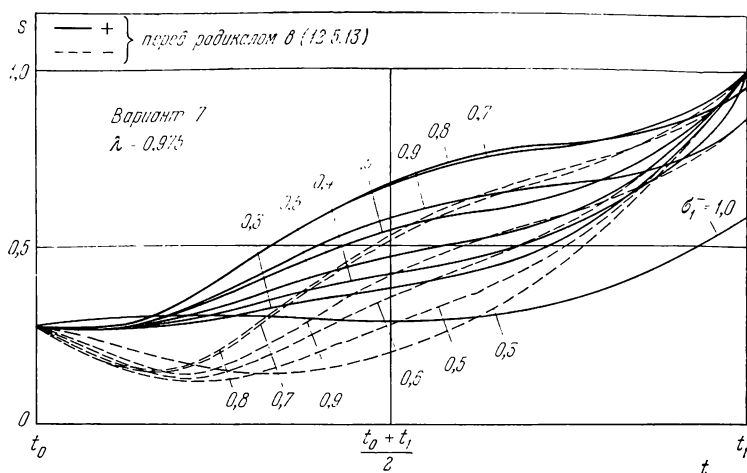


Рис. 12.5.7а.

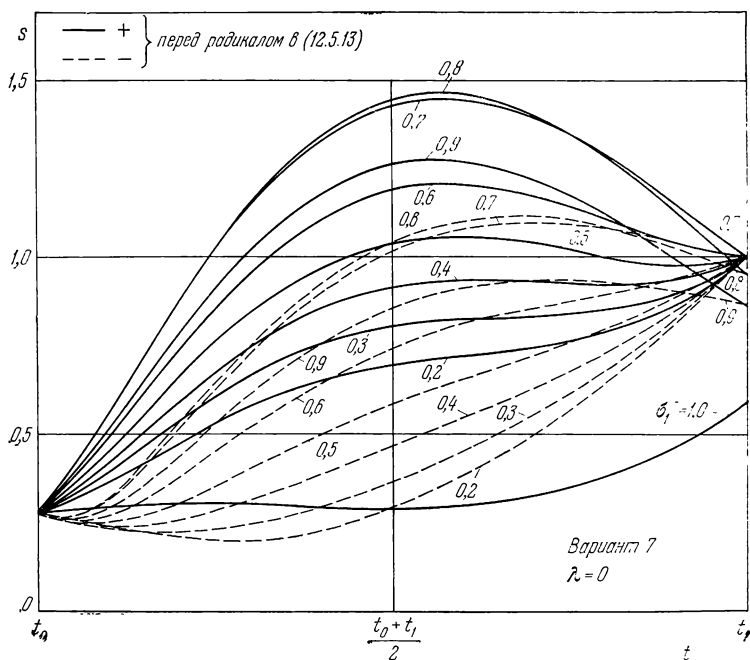


Рис. 12.5.7б.

выше, являются перелеты с промежуточными импульсами на гелиоцентрическом участке. Для ряда вариантов (№№ 5, 7, 8, 9) при $\kappa_1^- = \text{const}$ область значений σ_1^- и λ , в которой оптимальными являются перелеты с промежуточными импульсами (переходная область), оказывается довольно значительной.

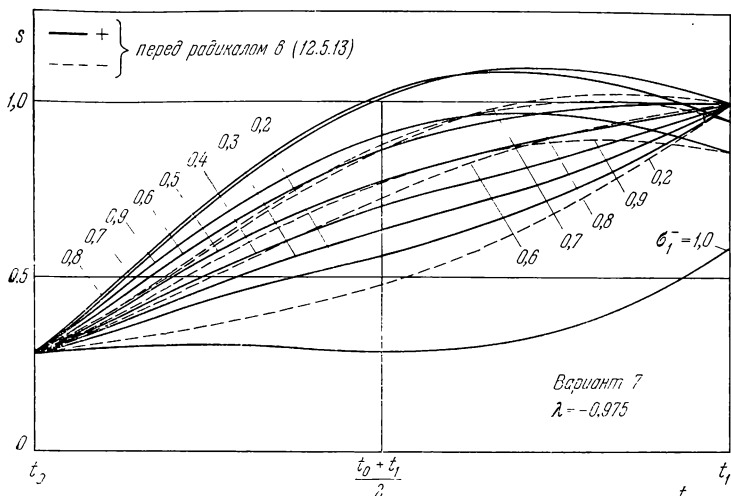


Рис. 12.5.7в.

С увеличением высоты орбиты ИСМ H_s (при фиксированных прочих параметрах перелета) и параметра $\kappa_1^- = \frac{R_s + H_s}{a(V_{сф1})}$, вследствие смещения точки ($\kappa_1^-, \sigma_1^- = \text{const}$) в область оптимальности одноимпульсных перелетов, указанная область значений σ_1^- и λ уменьшается, а область оптимальности (по значениям σ_1^- и λ) одноимпульсного перехода расширяется. При $\kappa_1^- > (2 + \sqrt{2})^2 \approx 11,6$ (см. (10.3.38)), т. е. начиная с высот орбит ИСМ порядка $30 \cdot 10^3 \div 40 \cdot 10^3$ км, оптимальная схема перелета при любом $\sigma \in [0, 1]$ и любом $\lambda \in [-1, 1]$ включает в себя только одноимпульсные переходы сфера влияния — орбита ИСМ (рис. 12.5.9, знак «+» перед радикалом в (12.5.13)).

Из таблицы 12.5.2 видно, что наличие и размеры переходной области определяются в основном угловой дальностью перелета η_{01} ; с ростом η_{01} эта область, как правило, расширяется. Кроме того, на размеры переходной области оказывает влияние величина характеристической скорости и продолжительность перелета, а также перераспределение импульсов на орбитах ИСЗ и ИСМ.

Если при $\kappa_1^- = \text{const}$, $\sigma_1^- = \text{const}$ в соотношении (12.5.16) варьировать λ , то плоскость орбиты ИСМ поворачивается таким

образом, что j_1 описывает поверхность конуса вокруг оси $V_{сф1}^-$ с углом полураствора $\alpha = \arcsin \sqrt{\sigma_1^-}$. Варьирование λ существенным образом сказывается на поведении функции $s(t)$ (см. таблицу 12.5.2 и рис. 12.5.7). В частности, для всех рассмотренных вариантов и любого заданного σ_1^- надлежащим выбором

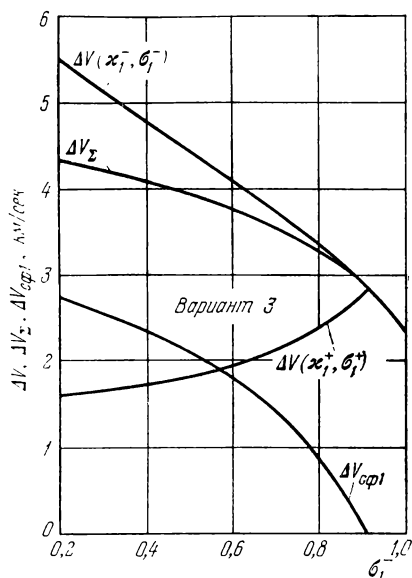


Рис. 12.5.8.

ориентации орбиты ИС в пространстве (т. е. величины λ и знака перед радикалом в (12.5.13)) можно добиться того, что всюду на траектории при $t < t_1$ $s(t) < 1$, т. е. обеспечивает строгую локальную оптимальность траектории перелета.

Проведенное исследование, так же как и в разделе 12.5.2а, позволяет сделать следующий общий вывод.

При произвольно заданной ориентации орбиты ИС планеты оптимальные схемы перелета в задачах I, II и оптимальный перелет Земля — планета в задаче III определяются параметрами κ_1^- , σ_1^- , λ_1 для перелета Земля — планета и соответствующими параметрами κ_2^+ , σ_2^+ , λ_2 для перелета планета — Земля (при фиксиро-

ванном знаке перед радикалом в (12.5.13)). Схема перелета зависит в первую очередь от величин параметров κ_1^- , σ_1^- и κ_2^+ , σ_2^+ .

1°. При значениях $\sigma_1^- \approx 1$, $\sigma_2^+ \approx 1$, т. е. при малых углах наклона плоскости орбиты ИС планеты к векторам $V_{сф1}^-$, $V_{сф2}^+$, и практически при любых κ_1^- , κ_2^+ строго локально оптимальные схемы перелета состоят из гелиоцентрических кеплеровых дуг и одноимпульсных переходов сфера влияния планеты — орбита ИС планеты.

2°. При $\sigma_1^- < 1$, $\sigma_2^+ < 1$, особенно при $\sigma_1^- \ll 1$, $\sigma_2^+ \ll 1$, соответствующих большим углам наклона плоскости орбиты ИС планеты к векторам $V_{сф1}^-$, $V_{сф2}^+$, оптимальная схема перелета зависит в основном от величины κ_1^- , κ_2^+ . При значениях κ_1^- , κ_2^+ , соответствующих попаданию параметров κ_1^- , σ_1^- ; κ_2^+ , σ_2^+ в область оптимальности одноимпульсных перелетов сфера влияния — орбита ИС планеты, особенно при $\kappa_1^- \gg 1$,

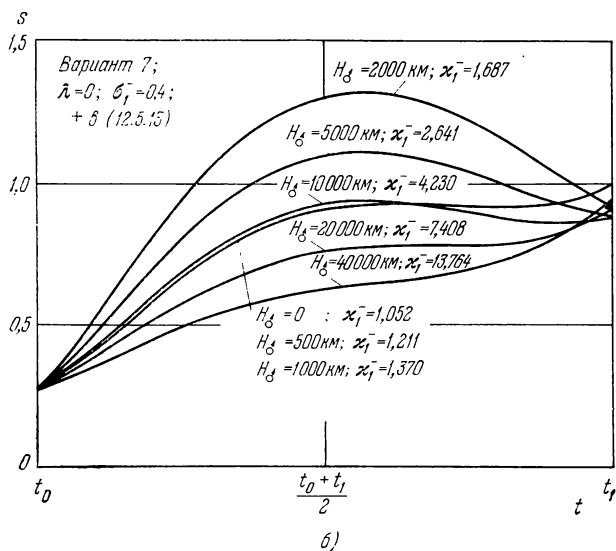
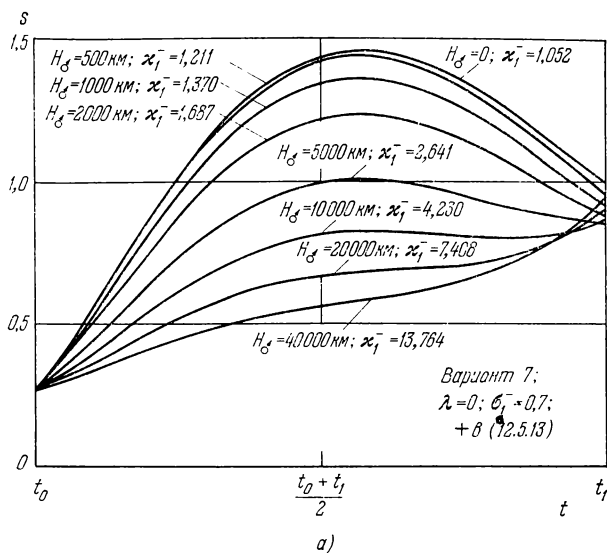


Рис. 12.5.9.

$\kappa_2^+ \gg 1$ (большая высота орбиты ИС и (или) большие скорости $V_{сф1}^-$, $V_{сф2}^+$), строго локально оптимальной является та же схема перелета, что и в случае 1°. При значениях κ_1^- , κ_2^+ , соответствующих попаданию параметров κ_1^- , σ_1^- ; κ_2^+ , σ_2^+ в область оптимальности двухимпульсных перелетов сфера влияния — орбита ИС планеты, особенно при $\kappa_1^- \ll 1$, $\kappa_2^+ \ll 1$ (малая высота орбиты ИС и (или) малые скорости $V_{сф1}^-$, $V_{сф2}^+$), строго локально оптимальные схемы перелета включают импульс на сфере влияния планеты $\Delta V_{сф i}$, $i = 1, 2$, так что векторы $V_{сф1}^+ = V_{сф1}^- + \Delta V_{сф1}$, $V_{сф2}^- = V_{сф2}^+ - \Delta V_{сф2}$ оказываются примерно компланарными плоскости орбиты ИС планеты. При этом промежуточные гелиоцентрические импульсы для всех указанных значений σ_1^- , κ_1^- ; σ_2^+ , κ_2^+ по-прежнему отсутствуют.

3°. При значениях параметров κ_1^- , σ_1^- ; κ_2^+ , σ_2^+ , соответствующих переходу от оптимальных одноимпульсных к оптимальным двухимпульсным переходам сфера влияния — орбита ИС, оптимальные схемы перелета Земля — планета и планета — Земля могут включать промежуточные гелиоцентрические импульсы. При этом конкретный вид оптимальной схемы перелета при заданных κ_1^- , σ_1^- или κ_2^+ , σ_2^+ существенно зависит от параметра λ_1 или λ_2 соответственно (при фиксированном знаке перед радикалом в (12.5.13)). В частности, можно так выбрать параметр λ_i и, следовательно, ориентацию орбиты ИС планеты в пространстве при заданном угле между ее плоскостью и вектором $V_{сф1}^-$ или $V_{сф2}^+$, что промежуточные гелиоцентрические импульсы на оптимальных траекториях будут отсутствовать.

г) Перелеты с промежуточным гелиоцентрическим импульсом. Как показал проведенный выше анализ, переход к схемам перелета с промежуточными гелиоцентрическими импульсами может оказаться целесообразным как при отсутствии импульса на сфере влияния (см. рис. 12.5.4, б), так и при его наличии (см. рис. 12.5.7, б). Примеры функций $s(t)$ подобного вида приведены на рис. 12.5.10 и 12.5.11 соответственно. Во всех расчетах этого подраздела перед радикалом в (12.5.13) брался знак «+». Здесь, как и ранее, при наличии импульса на сфере влияния $s^-(t_1) = 1$. Для определения оптимального перелета с промежуточным импульсом скорости воспользуемся общими соображениями, изложенными в разделе 2.3.2.

Пусть t_m — момент, соответствующий максимуму $s(t)$, $t_m \in (t_0, t_1)$, а $\mathbf{r}_m(x_m, y_m, z_m)$ — гелиоцентрический радиус-вектор аппарата в этот момент времени. Все векторы считаем заданными в некоторой гелиоцентрической прямоугольной декартовой системе координат xyz . Рассмотрим некоторую окрестность G точки

(x_m, y_m, z_m, t_m) фазового четырехмерного пространства (x, y, z, t) . Пусть точка $K(x_K, y_K, z_K, t_K) \in G$. Построим траекторию перелета Земля — планета, проходящую через точку K и состоящую из двух кеплеровых дуг: дуги Земля — точка K (OK) и дуги точка K — планета (KI) (рис. 12.5.12). Для дуги OK заданы момент t_0 , радиусы-векторы $\Gamma_0, \Gamma_K(x_K, y_K, z_K)$ и продолжительность

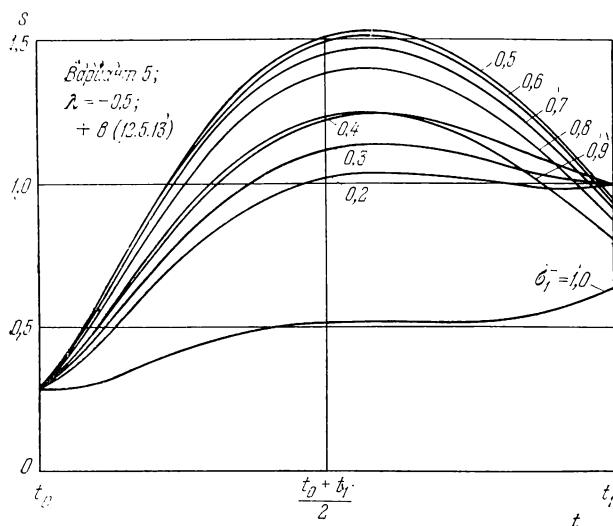


Рис. 12.5.10.

полета $t_K - t_0$, поэтому ее определение сводится к решению стандартной задачи (см. раздел 5.1.4, пример 3). При решении уравнения (5.1.95) в качестве начального приближения для фокального параметра p_{OK} дуги OK можно взять его значение, соответствующее исходной кеплеровой траектории перелета OI . Если радиус-вектор Γ_m далек от апсидального, то маршрут дуги OK считаем совпадающим с маршрутом дуги исходной траектории на участке $t_0 t_m$. Если же радиус-вектор Γ_m близок к апсидальному, то в качестве возможных маршрутов дуги OK надо рассматривать два маршрута, соответствующих маршрутам на исходной дуге без апсидальной точки и с включением апсидальной точки. Точно так же можно построить кеплерову дугу KI , проходящую через Γ_K и Γ_1 , со временем полета $t_1 - t_K$, момент времени $t_1 = \text{fix}$. Если $\mathbf{V}_K^-$ и $\mathbf{V}_K^+$ — векторы скорости аппарата в точке K на дугах OK и KI соответственно, то импульс $\Delta \mathbf{V}_K$ в точке K равен

$$\Delta \mathbf{V}_K = \mathbf{V}_K^+ - \mathbf{V}_K^- \quad (12.5.24)$$

Зная вектор скорости аппарата $\mathbf{V}_0^+$ на дуге OK , найдем вектор $\mathbf{V}_{сф0}$ и импульс схода с орбиты ИСЗ $\Delta \mathbf{V}_0 = \Delta \mathbf{V}_0(\alpha_0, \sigma_0)$. Точно так

же, вычислив вектор скорости аппарата у планеты на дуге $K1$, найдем характеристическую скорость перелета сферы влияния —

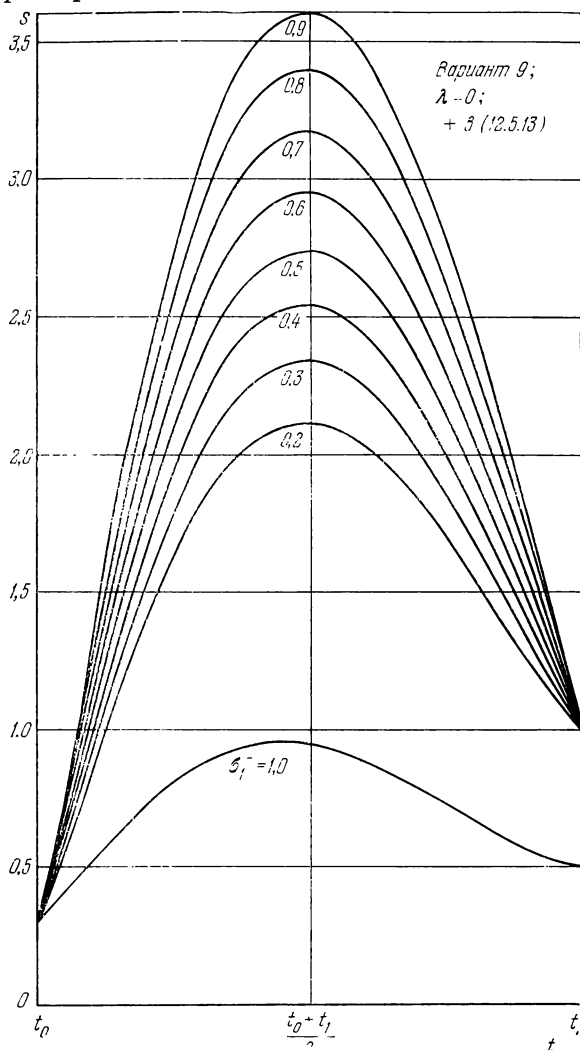


Рис. 12.5.11.

орбита ИС планеты:

$$\Delta V_{\Sigma 1} = \begin{cases} \Delta V_1(\kappa_1^-, \sigma_1^-) & \text{для одноимпульсного перехода,} \\ \Delta V_1(\kappa_1^+, \sigma_1^+) + \Delta V_{\text{сф1}} & \text{для двухимпульсного перехода.} \end{cases} \quad (12.5.25)$$

В результате характеристическая скорость ΔV_{Σ} перелета орбита ИСЗ — орбита ИС планеты с промежуточным импульсом в точке K равна

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_0 + \Delta V_K + \Delta V_{\Sigma 1}. \quad (12.5.26)$$

Варируя координаты r_K , t_K точки K , отыскиваем минимум функционала (12.5.26), который, очевидно, и соответствует оптимальной в G -окрестности точки K траектории перелета с одним промежуточным гелиоцентрическим импульсом (схема перелета задана!).

Далее проверяем оптимальность найденного перелета с помощью сопряженной системы. Для этого на дугах OK и KI находим решение сопряженной системы (3.1.9) — (3.1.14), удовлетворяющее в точках O и I условиям (12.5.3), (12.5.4), а в точке K — условию (2.2.46):

$$\bar{s}_K = s_K^+ = \frac{\Delta V_K}{\Delta V_K}. \quad (12.5.27)$$

Если найденная фазовая траектория с промежуточным импульсом действительно строго локально оптимальна, то в этой точке найденного решения сопряженной системы должно выполняться условие непрерывности вектора $p(t)$ (2.2.44)

$$\bar{p}_K = p_K^+, \quad (12.5.28)$$

и, поскольку момент t_K также оптимизируется, условие (2.2.51):

$$\dot{s}(t_K) = 0. \quad (12.5.29)$$

Во всех же остальных точках траектории на дугах OK и KI , кроме точки I , должно быть

$$s(t) < 1 \quad \forall t \in [t_0, t_K) \cup (t_K, t_1) \quad (12.5.30)$$

Заметим, что если решение сопряженной системы для фиксированной оптимальной фазовой траектории с промежуточным импульсом находится путем численного решения краевой задачи (например, в гравитационном поле, отличном от ньютоновского), то в качестве краевых условий используются только (12.5.3), (12.5.4). Условия же (12.5.27), (12.5.28) учитываются в силу непрерывности получаемого численного решения сопряженной системы при переходе через импульс. В этом случае признаками

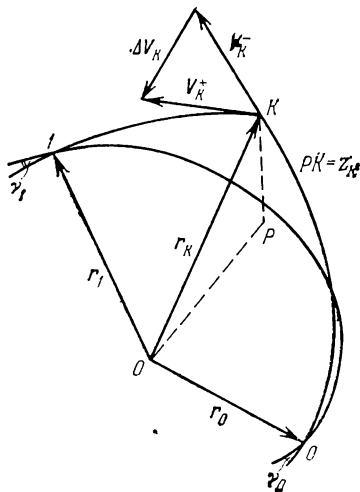


Рис. 12.5.12.

Таблица 12.5.3

Вариант			№ 5; $\lambda = -0.5$				№ 9; $\lambda = 0$				
			знак «+» перед радикалом в (12.5.13)								
σ_1^-			0,9	0,7	0,5	0,3	0,9	0,7	0,5	0,3	
Без импульса на гелиоцентрическом участке	с оптимизацией внутрисферного движения	без опти- мизации	ΔV_0 , км/сек	3,758	3,758	3,758	3,758	3,782	3,782	3,782	3,782
			$\Delta V_1^{(0)}$, км/сек	3,483	4,238	4,935	5,652	2,880	3,715	4,422	5,121
			$\Delta V_\Sigma^{(0)} = \Delta V_0 + \Delta V_1^{(0)}$	7,241	7,996	8,693	9,310	6,662	7,496	8,204	8,903
			$\Delta V_{сф1}$, км/сек	—*)	—	—	3,588	0,199	1,402	2,079	2,527
			$\Delta V_1^{(1)}$, км/сек	3,483	4,238	4,935	1,762	2,677	2,097	1,801	1,634
			$\Delta V_{сф1} + \Delta V_1^{(1)}$	3,483	4,238	4,935	5,350	2,875	3,498	3,879	4,161
			$\Delta V_\Sigma^{(1)} = \Delta V_0 +$ $+ \Delta V_{сф1} + \Delta V_1^{(1)}$	7,241	7,996	8,693	9,108	6,657	7,281	7,661	7,942
С промежуточным импульсом ΔV_K на гелиоцентрическом участке		$\Delta V_0^{(2)}$, км/сек	3,713	3,675	3,672	3,680	3,666	3,632	3,637	3,657	
		ΔV_K , км/сек	0,283	0,746	1,043	1,285	0,271	0,484	0,650	0,802	
		$\Delta V_1^{(2)}$, км/сек	3,208	3,367	3,637	4,013	2,289	2,399	2,586	2,890	
		$\Delta V_K + \Delta V_1^{(2)**}$	3,490	4,113	4,680	5,298	2,560	2,883	3,236	3,692	
		$\Delta V_\Sigma^{(2)} = \Delta V_0^{(2)} +$ $+ \Delta V_K + \Delta V_1^{(2)}$	7,204	7,788	8,352	8,979	6,226	6,515	6,872	7,349	
$\delta_1(\Delta V_\Sigma) = \Delta V_\Sigma^{(2)} - \Delta V_\Sigma^{(0)}$			0,038	0,208	0,341	0,331	0,436	0,981	1,332	1,554	
$\delta_2(\Delta V_\Sigma) = \Delta V_\Sigma^{(2)} - \Delta V_\Sigma^{(1)}$			0,038	0,208	0,341	0,129	0,431	0,765	0,789	0,594	

*) Для варианта № 5 при $\sigma_1^- = 0,9; 0,7; 0,5$ оптимальным является одноимпульсный переход со сферы влияния Марса на орбиту его ИС.

**) При наличии ΔV_K импульс на сфере влияния Марса $\Delta V_{сф1}$ отсутствует.

строгой локальной оптимальности найденной фазовой траектории выступают условия (12.5.29) и (12.5.30).

В таблице 12.5.3 и на рис. 12.5.13, 12.5.14 приведены результаты расчета оптимальных траекторий с промежуточным гелиоцентрическим импульсом для двух вариантов (вариант № 5, $\lambda = -0,5$ и вариант № 9, $\lambda = 0$) при различных значениях σ_1^- . Исходными траекториями для указанных вариантов являются траектории с оптимизацией внутрисферного движения при $s^-(t_1) > 1$ (см. рис. 12.5.10 и 12.5.11). В случае варианта № 5, $\lambda = -0,5$ исходная траектория включает как одноимпульсный переход со сферы влияния на орбиту ИСМ ($\sigma_1^- = 0,9; 0,7; 0,5$), так и двухимпульсный ($\sigma_1^- = 0,3$); в случае же варианта № 9, $\lambda = 0$ все соответствующие переходы двухимпульсные. В процессе расчета вектор $\mathbf{j}_n$, соответствующий заданным σ_1^- и λ , фиксировался. В этой же таблице приведены импульсы ΔV_0 , $\Delta V_1^{(0)}$ и характеристическая скорость $\Delta V_\Sigma^{(0)} = \Delta V_0 + \Delta V_1^{(0)}$, соответствующие перелетам, рассмотренным в разделе 12.5.26.

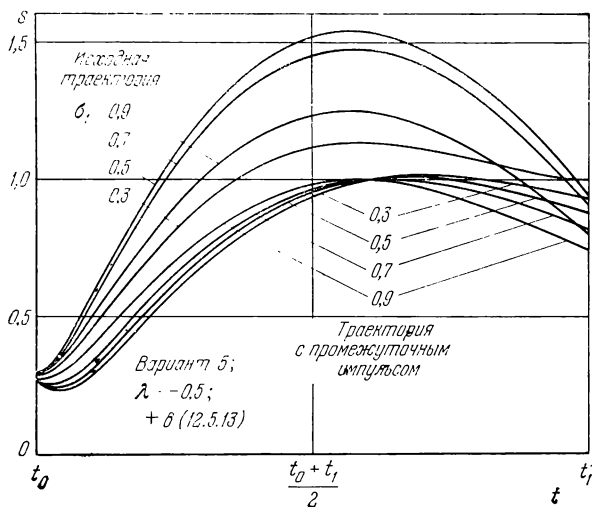


Рис. 12.5.13.

Подробное сопоставление исходных траекторий и траекторий с промежуточным импульсом дано в таблице 12.5.4. Все векторы приведены в гелиоцентрической декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy совпадает с плоскостью исходной кеплеровой дуги $0I$, ось x направлена по радиусу-вектору $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_*(t_0)$, положительное направление оси z совпадает с направлением вектора кинетического момента точки, движущейся

по дуге 01 . В таблице 12.5.4 для исходной траектории в качестве параметров, соответствующих точке K оптимальной траектории

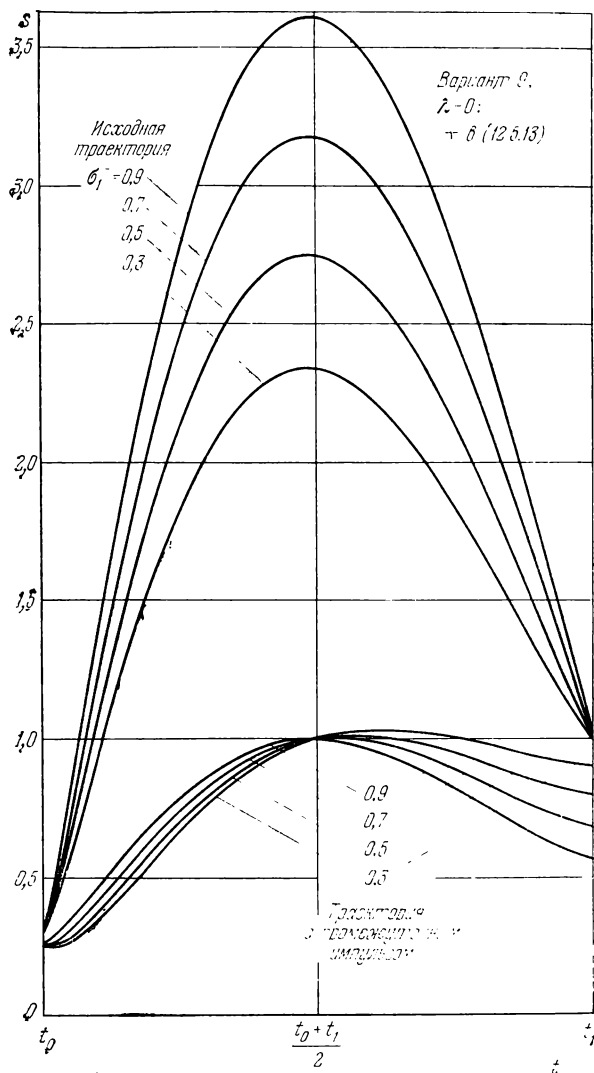


Рис. 12.5.14.

с промежуточным импульсом, приведены данные в момент времени t_m достижения $\max s(t)$ (на исходной траектории).

Полученные данные показывают, что моменты t_m и t_k , как и координаты x_m , y_m и x_k , y_k , незначительно отличаются друг от

Т а б л и ц а 12.5.4

Параметры траектории	Вариант № 5; $\sigma_1^- = 0,5$; $\lambda = -0,5$		Вариант № 9; $\sigma_1^- = 0,7$; $\lambda = 0$	
	знак «+» перед радикалом в (12.5.13)			
	исходная траектория	с промежуточным импульсом	исходная траектория	с промежуточным импульсом
$t_K - t_0$, сут	111,26	112,12	101,90	102,58
x_K , 10^6 км	-16,34	-17,38	-23,34	-23,41
y_K , 10^6 км	190,48	190,74	174,61	174,56
z_K , 10^6	0	9,39	0	9,88
r_K , 10^6 км	191,18	191,76	176,16	176,40
v_0 , град	0	2,82	0	3,24
v_1 , град	0	-3,81	0	-3,48
V_0^+ , км/сек	32,402	32,387	32,218	32,144
V_1^- , км/сек	22,666	22,834	22,910	23,040
p_{0K} , 10^6 км	172,49	172,26	177,70	176,94
e_{0K}	0,18606	0,18617	0,18243	0,17634
p_{K1} , 10^6 км	172,49	174,99	177,70	179,52
e_{K1}	0,18606	0,17528	0,18243	0,17758
σ_1^-	0,5	0,82959	0,7	0,98748
σ_1^+	0,5	0,82959	0,98548	0,98748
V_{Kx}^- , км/сек	-25,290	-25,203	-27,961	-27,846
V_{Ky}^- , км/сек	2,235	2,046	1,283	1,138
V_{Kz}^- , км/сек	0	0,101	0	0,064
V_K^- , км/сек	25,363	25,287	28,016	27,869
V_{Kx}^+ , км/сек	-25,290	-25,365	-27,961	-28,037
V_{Ky}^+ , км/сек	2,235	1,936	1,283	1,113
V_{Kz}^+ , км/сек	0	-0,923	0	-0,380
V_K^+ , км/сек	25,363	25,456	28,016	28,061
ΔV_{Kx} , км/сек	0	-0,162	0	-0,191
ΔV_{Ky} , км/сек	0	-0,110	0	-0,025
ΔV_{Kz} , км/сек	0	-1,024	0	-0,444
ΔV_K , км/сек	0	1,043	0	0,484
ΔV_0 , км/сек	3,758	3,672	3,782	3,632
ΔV_1 , км/сек	4,935	3,637	2,097	2,399
$\Delta V_{сф1}$, км/сек	0	0	1,402	0
ΔV_Σ , км/сек	8,693	8,352	7,281	6,515

друга. Таким образом, точка (r_m, t_m) может служить хорошим начальным приближением при отыскании точки (r_k, t_k) . Каждая кеплерова дуга, входящая в оптимальную траекторию, близка к соответствующей части исходной кеплеровой дуги, повернутой на небольшой угол ν_i , $i = 0, 1$, относительно радиуса-вектора r_i , $i = 0, 1$. Из сопоставления составляющих промежуточного импульса ΔV_k видно, что он направлен практически по нормали к плоскости исходной траектории и приводит к ее излому на незначительный угол $\sim 6,5^\circ$. Поскольку вектор $V_{сф1}^- = V_1^- - U_s$ на сфере влияния Марса равен разности двух больших по модулю векторов V_1^- и U_s , сравнительно небольшие изменения в ориентации вектора V_1^- могут привести к значительному изменению ориентации вектора $V_{сф1}^-$. Как показывает сравнение величин σ_1^- и $\Delta V_1^{(1)}$, $\Delta V_1^{(2)}$ (см. таблицу 12.5.3), оптимальный промежуточный импульс ΔV_k приводит к резкому уменьшению угла наклона вектора $V_{сф1}^-$ к плоскости орбиты ИСМ, в результате чего либо существенно уменьшается импульс выхода на орбиту ИСМ (вариант № 5, $\sigma_1^- = 0,9; 0,7; 0,5$), или же двухимпульсный переход заменяется одноимпульсным с гораздо меньшей величиной $\Delta V_{\Sigma 1}$ (12.5.25) (вариант № 5, $\sigma_1^- = 0,3$; вариант № 9). При этом импульс схода с орбиты ИСЗ ΔV_0 незначительно уменьшается. Максимальный суммарный выигрыш в характеристической скорости $\delta_2(\Delta V_{\Sigma}) = \Delta V_{\Sigma}^{(2)} - \Delta V_{\Sigma}^{(1)}$ в первом случае составляет $\sim 0,34$ км/сек, а во втором $\sim 0,77$ км/сек. Заметим, что различие величин выигрыша в ΔV_{Σ} согласуется со степенью «неоптимальности» исходных траекторий, характеризуемой величиной $\max s(t) = s(t_m)$ (см. рис. 12.5.13, 12.5.14).

Сравнение величин $\delta_1(\Delta V_{\Sigma}) = \Delta V_{\Sigma}^{(2)} - \Delta V_{\Sigma}^{(0)}$ и $\delta_2(\Delta V_{\Sigma})$ показывает, что в тех случаях, когда промежуточный импульс ΔV_k невелик, основную роль в уменьшении ΔV_{Σ} играет оптимизация внутрисферного движения (вариант № 9, $\lambda = 0$, $\sigma_1^- = 0,9; 0,7$), без деформации кеплеровой дуги перелета. Если же промежуточный импульс достаточно велик (вариант № 9, $\lambda = 0$, $\sigma_1^- = 0,5; 0,3$), то в уменьшение ΔV_{Σ} заметный вклад вносят как оптимизация внутрисферного движения, так и деформация гелиоцентрического участка перелета. Приведенные на рис. 12.5.13, 12.5.14 функции $s(t)$ показывают, что найденные траектории с промежуточным импульсом строго локально оптимальны.

На рис. 12.5.13, 12.5.14 некоторые из кривых $s(t)$ для траекторий с промежуточным импульсом лежат чуть выше значения $s = 1$, т. е. имеет место некоторое расхождение с теоретическими результатами. Этот факт объясняется следующим образом.

Как показал анализ, гиперповерхности $\Delta V_{\Sigma}(r_k, t_k)$ (12.5.26) в окрестности минимума являются весьма пологими. Поскольку

величина оптимального промежуточного импульса значительно меньше суммарной характеристической скорости ΔV_{Σ} , при определении точки $K(\mathbf{r}_K, t_K)$, доставляющей $\min \Delta V_{\Sigma}(\mathbf{r}_K, t_K)$, требуется весьма высокая точность вычислений на ЭЦВМ. Поэтому для того, чтобы получить кривую $s(t)$, строго касающуюся прямой $s = 1$, нужно выполнить значительное число итераций по определению точки K . Очевидно, что эти итерации приводят к крайне незначительному уменьшению характеристической скорости. В результате при практически приемлемой точности определения $\min \Delta V_{\Sigma}(\mathbf{r}_K, t_K)$ точка K определяется с некоторой ошибкой по отношению к точке K_{opt} , что и приводит к указанному выше эффекту.

Поскольку при нахождении решения сопряженной системы условие (12.5.27) выполняется точно, степень неоптимальности найденной траектории, характеризуется нарушением равенства (12.5.28). Оказалось, что условие (12.5.28) по отдельным компонентам вектора $\mathbf{p}$, ввиду их малости, в некоторых случаях выполняется с относительной погрешностью примерно 10%, однако относительная погрешность $|\mathbf{p}_K^+ - \mathbf{p}_K^-|/|\mathbf{p}_K^-|$ во всех случаях не превосходит $\sim 1\%$. Как видно из рис. 12.5.13 и 12.5.14, точность выполнения условий (12.5.29), (12.5.30) имеет тот же порядок.

Анализ функции $s(t)$ для всех вариантов, указанных в таблице 12.5.1, при всех возможных значениях σ_1^- и λ показал, что в тех случаях, когда при $s^-(t_1) \leq 1$ траектория не является строго локально оптимальной, $\max s(t) = s(t_m) > 1$, эта функция имеет вид, показанный либо на рис. 12.5.10, либо на рис. 12.5.11. Поэтому полученные выше результаты для рассмотренных примеров можно считать достаточно типичными.

Аналогичное исследование с использованием схожей методики проведено в работе Хэзелрига [4].

В заключение отметим, что если параметры κ_1^- , σ_1^- и λ находятся достаточно глубоко в области оптимальности той или иной схемы перелета для круговой орбиты ИС ($e_1 = 0$), то, вследствие непрерывной зависимости решения краевой задачи от e_1 при малой эллиптичности орбиты ИС ($e_1 \ll 1$), оптимальная схема перелета остается неизменной. При большой эллиптичности орбиты ИС можно воспользоваться приведенными выше результатами для оптимизации схемы перелета в зависимости от деформации функции $s(t)$ при непрерывном изменении параметра e_1 .

П Р И Л О Ж Е Н И Е

СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается нормальной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t). \quad (\text{П.1})$$

Здесь

$$x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}, \quad (\text{П.2})$$

$$f = \{f^1, f^2, \dots, f^n\} \quad (\text{П.3})$$

суть n -мерные векторы линейного нормированного пространства E^n ,

$$\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m) \in G_\mu \quad (\text{П.4})$$

— m -мерный вектор параметров, принадлежащий множеству G_μ линейного нормированного пространства E^m . Вектор x , определяющий в любой момент времени t состояние системы (П.1), называют *вектором фазовых переменных* или *фазовым вектором*. В дальнейшем будем полагать, что вектор x принадлежит некоторому множеству $G_x \subset E^n$, а независимая переменная (время) t изменяется на отрезке $G_t: [t_i, t_f]$.

В дальнейшем будем полагать, что для рассматриваемой системы (П.1) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и теоремы непрерывности и дифференцируемости решения по начальным данным и по параметрам (см., например, Коттингтон, Левинсон [1], Л. С. Понтрягин [1]). Не останавливаясь на деталях формулировок этих теорем, будем, следуя Л. С. Понтрягину [1], считать, что правая часть (П.1) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем компонентам векторов x и μ на некоторой области $\Gamma \subset G_x \times G_\mu \times G_t$:

$$f(x, \mu, t), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C_0 \{ \Gamma \subset G_x \times G_\mu \times G_t \}. \quad (\text{П.5})$$

В дальнейшем полагаем, что начальное значение фазового вектора $x_0 = x(t_0)$ и значение параметра μ таковы, что на рассматриваемом промежутке времени G_t фазовая траектория находится в области Γ :

$$x(t) \in \Gamma \quad \forall t \in G_t. \quad (\text{П.6})$$

Пусть $x = x^*(t)$ — некоторая траектория системы (П.1), соответствующая начальному значению фазового вектора $x(t_0) = x_0^*$ и некоторому значению вектора параметров $\mu = \mu^*$.

Возмущенной траекторией системы (П.1) относительно исходной называется любая траектория системы $x = x(t)$, для которой существует $t_1 \in G_t$ такое, что

$$x(t_1) \neq x^*(t_1) \quad (\text{П.7})$$

Разность

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t) \quad (\text{П.8})$$

называется *вектором возмущений* фазовых координат.

Если норма

$$\|\delta x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in G_t, \quad (\text{П.9})$$

где ϵ — достаточно малое положительное число, так что систему (П.1) можно линеаризовать относительно δx , то вектор $\delta x(t)$ называется *вектором вариаций* фазовых координат и удовлетворяет уравнению (см. Л. С. Понтрягин [1])

$$\frac{d\delta x}{dt} = \Phi \delta x + \delta f. \quad (\text{П.10})$$

Здесь

$$\Phi = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{П.11})$$

— матрица $n \times n$ частных производных $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$,

$$\delta f = (\delta f^1, \delta f^2, \dots, \delta f^n) \quad (\text{П.12})$$

— вектор возмущающих сил.

Ниже будем рассматривать малые по норме вариации и считать выполненным соотношение (П.9).

В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть соответствующая (П.10) однородная система

$$\frac{d\delta x}{dt} = \Phi \delta x. \quad (\text{П.13})$$

Системы уравнений (П.10) и (П.13) будем называть *системами уравнений в вариациях* относительно фазовых координат системы (П.1). Это название соответствует принятому в аналитической механике (см., например, А. И. Лурье [1], Уиттекер [1]) в отличие от применяемого в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Л. С. Понтрягин [1]).

Пусть $K(t, \tau)$ — *фундаментальная матрица* системы (П.13) (Коддингтон, Левинсон [1], Хартман [1]), удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{dK(t, \tau)}{dt} = \Phi K(t, \tau), \quad (\text{П.14})$$

$$K(t, t) = K(\tau, \tau) = E, \quad (\text{П.15})$$

где E — единичная матрица, $\tau \in G_t$.

Если $y(t)$ — некоторое частное решение системы (П.13), то

$$K(t, \tau) y(\tau) = y(t) \quad (\text{П.16})$$

Справедливость (П.16) проверяется дифференцированием (П.16) по t с последующим учетом (П.13) и (П.14).

С помощью фундаментальной матрицы $K(t, \tau)$ общее решение системы (П.10) можно записать в виде *формулы Лагранжа — Коши*:

$$\delta x(t) = K(t, t_0) \delta x_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \delta f(\tau) d\tau. \quad (\text{П.17})$$

Формула (П.17) может быть получена методом вариации постоянных Лагранжа. Справедливость соотношения (П.17) устанавливается непосредственно подстановкой (П.17) в (П.10) и использованием соотношений (П.14) — (П.16).

Матрица $K(t, \tau)$, позволяющая по известной вариации фазового вектора в момент t_0 и известному возмущению δf найти вариацию фазового вектора в любой момент $t > t_0$, может быть названа *переходной матрицей*. Аппарат переходных матриц нашел широкое применение в астродинамике (см. Бэттин [2] и раздел 2.3.2).

Наряду с системой (П.13) рассмотрим *сопряженную систему* (Коддингтон, Левинсон [1], Хартман [4])

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Phi^T \psi, \quad (\text{П.18})$$

где

$$\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n) \quad (\text{П.19})$$

— n -мерный вектор сопряженных переменных $\psi \in E^n$, значок «Т» означает транспонирование матрицы.

Пусть δx — некоторое решение системы (П.10). Составим скалярное произведение

$$(\psi, \delta x) \equiv \psi^T \delta x \quad (\text{П.20})$$

и найдем с учетом (П.10) и (П.18)

$$\frac{d}{dt} (\psi^T \delta x) = \psi^T \frac{d\delta x}{dt} + \frac{d\psi^T}{dt} \delta x = \psi^T (\Phi \delta x + \delta f) - \psi^T \Phi \delta x = \psi^T \delta f \equiv (\psi, \delta f), \quad (\text{П.21})$$

откуда

$$(\psi, \delta x) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t (\psi, \delta f) dt \quad \forall t, t_0 \in G_t. \quad (\text{П.22})$$

Соотношение (П.22), представляющее собой частный случай формулы Грина (Коддингтон, Левинсон [1], Хартман [4]), было введено в ракетомеханику Блиссом [1] и обычно называется *формулой Блисса* (Цянь Сюэ-сень [1]).

Если $\delta f = 0$, то из формулы (П.22) следует, что любые решения систем (П.13), (П.18) связаны соотношением

$$(\psi(t), \delta x(t)) = (\psi(t_0), \delta x(t_0)) = \text{const} \quad \forall t_0, t \in G_t, \quad (\text{П.23})$$

где постоянная в правой части зависит от выбора конкретных решений δx и ψ .

Сопряженность является взаимным свойством двух линейных систем — система (П.13), в свою очередь, сопряжена к (П.18).

Рассмотрим *фундаментальные матрицы решений*

$$\delta X = \{\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n\}, \quad (\text{П.24})$$

$$\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \quad (\text{П.25})$$

систем (П.13) и (П.18) соответственно. Матрицы δX и Ψ удовлетворяют матричным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\delta X}{dt} = \Phi \delta X, \quad (\text{П.26})$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Phi^T \Psi. \quad (\text{П.27})$$

Если дана одна из фундаментальных матриц δX или Ψ , то вторая из этих матриц является фундаментальной матрицей соответствующей сопряженной системы тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (см. Коддингтон, Левинсон [1])

$$\Psi^T \delta X = C, \det C \neq 0, \quad (\text{П.28})$$

которое представляет собой матричную запись соответствующих скалярных соотношений (П.23). Здесь C — некоторая невырожденная постоянная матрица (зависящая от выбора матриц (П.24) и (П.25)).

Рассмотрим, как изменяется решение сопряженной системы при замене вектора фазовых переменных. Пусть задано непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение между векторами фазовых переменных x и y (И. Д. Кудрявцев [1], т. II):

$$x = F(y), \quad y = F^{-1}(x). \quad (\text{П.29})$$

Отображение (П.29) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством G_x значений вектора x и множеством $G_y \subset E^n$ значений вектора y .

Вариации векторов x и y при отображении (П.29) связаны линейным соотношением

$$\delta x = A(y) \delta y, \quad (\text{П.30})$$

где $A(y)$ является матрицей Якоби преобразования (П.29):

$$A(y) = \frac{dx}{dy} \equiv \frac{dF}{dy}. \quad (\text{П.31})$$

Поскольку якобиан отображения (П.29)

$$\det \left(\frac{dx}{dy} \right) = |A(y)| \neq 0 \quad \forall y \in G_y, \quad (\text{П.32})$$

матрица $A(y)$ всюду на множестве G_y невырождена. Из (П.30) с учетом (П.32) получаем

$$\delta y = A^{-1} \delta x. \quad (\text{П.33})$$

Пусть вариация δx удовлетворяет системе уравнений (П.13). Дифференцируя (П.33) по t с учетом (П.13) и (П.30), получим

$$\frac{d\delta y}{dt} = \left(\frac{dA^{-1}}{dt} A + A^{-1} \Phi A \right) \delta y. \quad (\text{П.34})$$

Обозначим через ψ_x и ψ_y векторы, сопряженные к векторам δx и δy соответственно, связанным соотношением (П.30). Вектор ψ_x удовлетворяет системе уравнений (П.18), а вектор ψ_y , как это следует из (П.18) и (П.34), удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\psi_y}{dt} = - \left[A^T \frac{d(A^T)^{-1}}{dt} + A^T \Phi^T (A^T)^{-1} \right] \psi_y. \quad (\text{П.35})$$

Обозначим через δX , Ψ_x и δY , Ψ_y фундаментальные матрицы решений систем (П.13), (П.18) и (П.34), (П.35) соответственно. На основании (П.28) имеет место матричное равенство

$$\Psi_x^T \delta X = C, \quad (\text{П.36})$$

где C — некоторая постоянная невырожденная матрица. Поскольку из (П.30) следует, что

$$\delta X = A \delta Y, \quad (\text{П.37})$$

получаем, подставляя (П.37) в (П.36),

$$\Psi_x^T A \delta Y =: C. \quad (\text{П.38})$$

С другой стороны, фундаментальные матрицы δY и Ψ_y также связаны соотношением

$$\Psi_y^T \delta Y = C, \quad (\text{П.39})$$

где матрицы C в правых частях соотношений (П.38) и (П.39) можно считать совпадающими, поскольку любые фундаментальные матрицы линейного однородного уравнения получаются одна из другой умножением на некоторую невырожденную постоянную матрицу. Сравнивая (П.39) с (П.38), получаем, что

$$\Psi_y = A^T \Psi_x \quad (\text{П.40})$$

и для любой пары соответствующих друг другу векторов ψ и ψ_y

$$\psi_y = A^T \psi_x. \quad (\text{П.41})$$

Непосредственно можно убедиться в том, что вектор ψ_y (П.41) удовлетворяет уравнению (П.35).

Таким образом, приходим к следующему окончательному результату: сопряженные векторы ψ_x и ψ_y , соответствующие фазовым векторам x и y , связанным друг с другом непрерывно дифференцируемым невырожденным преобразованием (П.29), выражаются друг через друга с помощью соотношения (П.41), где матрица A (П.31) является якобиевой матрицей преобразования (П.29).

Аналогичный результат, относящийся непосредственно к задачам оптимизации, приведен в книге В. С. Новоселова [1].

Рассмотрим частный случай преобразования (П.29), когда p компонент фазового вектора остаются неизменными, а преобразуются друг в друга лишь остальные $n - p$ компонент фазового вектора. Без ограничения общности можно считать, что неизменными остаются первые p компонент фазового вектора. Тогда преобразование (П.29) может быть записано как

$$x^i = y^i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{П.42})$$

$$x^j = F^j(y^{p+1}, y^{p+2}, \dots, y^n), \quad j = p+1, p+2, \dots, n, \quad (\text{П.43})$$

где F^j — соответствующие компоненты вектора (П.29). Для преобразования (П.42), (П.43) матрица A (П.31) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad (\text{П.44})$$

где E — единичная матрица $p \times p$, а матрица A' $(n - p) \times (n - p)$ имеет вид

$$A' = \left(\frac{\partial F^j}{\partial y^k} \right), \quad j, k = p+1, p+2, \dots, n. \quad (\text{П.45})$$

Транспонированная к (П.44) матрица равна

$$A^T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A'^T \end{pmatrix}. \quad (\text{П.46})$$

Из (П.46), (П.40) и (П.41) следует, что в случае преобразования (П.42), (П.43) компоненты сопряженного вектора, соответствующие неизменным компонентам фазового вектора, остаются неизменными. Что касается компонент сопряженного вектора, соответствующих преобразуемым компонен-

там фазового вектора, то они по-прежнему находятся с помощью соотношений (П.40) и (П.41), где матрица A (П.31) заменяется на матрицу A' (П.45).

Рассмотрим вдоль траекторий системы (П.1) некоторый функционал $\varphi(x(t), t)$, (П.47)

который будем считать непрерывно дифференцируемым по x и t . Варпацию этого функционала для любого $t = \text{fix}$ при условии (П.9) можно записать в виде

$$\delta\varphi|_{t=\text{fix}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{t=\text{fix}}^T \delta x(t) \equiv (\text{grad } \varphi, \delta x)_{t=\text{fix}}. \quad (\text{П.48})$$

Положим для $t = \text{fix} = T \in G_t$

$$\psi(T) = \text{grad}\varphi(x(T), T) \quad (\text{П.49})$$

и найдем частное решение системы (П.18), удовлетворяющее условию (П.49). Тогда из (П.22), (П.48) и (П.49) получим

$$\delta\varphi|_{t=T} = (\text{grad } \varphi, \delta x)_{t=T} = (\psi(T), \delta x(T)) = (\psi, \delta x)_{t_0} + \int_{t_0}^T (\psi, \delta f) dt. \quad (\text{П.50})$$

Формула (П.50), являющаяся частным случаем формулы (П.22), также обычно называется *формулой Бласса*. Формула (П.50) показывает, что влияние начальных отклонений $\delta x(t_0)$ и возмущений δf на величину вариации функционала $\delta\varphi$ для $\forall t = T \in G_t$ полностью определяется найденным сопряженным вектором $\psi(t)$. Поэтому $\psi(t)$ часто называют вектор-функцией влияния возмущений (см. В. И. Чарный [3]).

С помощью векторов правых частей f (П.3) и сопряженных переменных ψ (П.19) составим функцию Гамильтона систем (П.1) и (П.18) (см. Ф. Р. Гаптахер [1], А. И. Лурье [1]):

$$H(x, \psi, t) = (f(x, \mu, t), \psi) \equiv f^T(x, \mu, t) \psi = \sum_{i=1}^n f^i(x, \mu, t) \psi^i. \quad (\text{П.51})$$

Используя функцию Гамильтона (П.51), запишем исходную (П.1) и сопряженную (П.18) системы уравнений в симметричной гамильтоновой форме:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad (\text{П.52})$$

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (\text{П.53})$$

Если рассматриваемая динамическая система автономна, т. е. вектор f (П.3) явно не зависит от t , то гамильтониан H (П.51) сохраняет вдоль траекторий системы (П.1) постоянное значение:

$$H = (f(x), \psi) = \text{const}. \quad (\text{П.54})$$

Уравнение (П.1) в результате перехода к вектору y с помощью замены (П.29) запишется в виде

$$\frac{dy}{dt} = A^{-1}(y) f[F(y), \mu, t]. \quad (\text{П.55})$$

Тогда соответствующий гамильтониан равен

$$H_y = (A^{-1}(y) f[F(y), \mu, t], \psi_y) \equiv [A^{-1}(y) f[F(y), \mu, t]]^T \psi_y \quad (\text{П.56})$$

и

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H_y}{\partial \psi_y}, \quad (\text{П.57})$$

$$\frac{d\psi_y}{dt} = -\frac{\partial H_y}{\partial y}. \quad (\text{П.58})$$

Можно показать, что уравнение (П.58) совпадает с (П.35).

Между решениями и интегралами исходной системы (П.1), однородной системы уравнений в вариациях (П.13) и сопряженной системы (П.18) имеются связи, которые позволяют по известным решениям и интегралам системы (П.1) находить решения системы (П.13) и сопряженной системы (П.18) (см. Бёрнс [1], Биркгоф [1], А. И. Лурье [1], Пуанкаре [1], Уиттекер [1], В. И. Чарный [3]). В свою очередь известны преобразования, переводящие решения систем (П.13) и (П.18) друг в друга (Биркгоф [1], В. И. Чарный [3]). Использование этих связей позволяет эффективно находить интегралы, частные решения, решения и фундаментальные системы решений сопряженной системы (П.18). Полученные здесь результаты могут быть заметно усилены при переходе от систем общего вида к гамильтоновым автономным системам (см. В. И. Чарный [3]). Они находят широкое применение при отыскании решения сопряженной системы в ньютоновском гравитационном поле. (С. В. Дубовский [1, 2], Лайон, Хэнделсмен [1], Пауэрс, Тэпли [1], В. И. Чарный [3]).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось эллипса, действительная полуось гиперболы.
 $\mathbf{a}$ — вектор ускорения КА от силы тяги.
 c — скорость истечения газов из сопла двигательной установки.
 e — эксцентриситет конического сечения
 $\mathbf{e}$ — орт вектора тяги.
 $\mathbf{e}_k$ — орт k -го импульса скорости.
 G — функционал вариационной задачи Майера оптимизации перелета КА.
 $\mathbf{g}$ — вектор гравитационного ускорения.
 H — функция Гамильтона (гамильтониан); высота над поверхностью планеты.
 h — постоянная интеграла энергии для кеплеровой траектории.
 I — характеристическая скорость перелета в однородном поле тяготения (гл. VIII, IX).
 i — наклонение.
 $\mathbf{i}_n$ — орт, нормальный к плоскости планетоцентрической гиперболы; с конца орта $\mathbf{i}_n$ движение по гиперболе видно происходящим против часовой стрелки.
 $\mathbf{i}_v$ — орт, дополняющий орты $\mathbf{i}_n$ и $\mathbf{i}_n$ до правой тройки.
 $\mathbf{i}_n$ — орт, направленный из центра тяготения в перигей центр планетоцентрической гиперболы.
 $\mathbf{j}_n$ — орт, нормальный к плоскости орбиты ИС; с конца орта $\mathbf{j}_n$ движение по орбите видно происходящим против часовой стрелки.
 $\mathbf{j}_v$ — орт, дополняющий орты $\mathbf{j}_n$ и $\mathbf{j}_n$ до правой тройки.
 $\mathbf{j}_n$ — орт, направленный из центра тяготения в перигей центр орбиты ИС.
 $K(t, \xi)$, $L(t, \xi)$ — функции влияния ускорения от тяги на радиус-вектор и вектор скорости аппарата соответственно в однородном поле тяготения (гл. VIII, IX).
 $K(t, \tau)$ — фундаментальная (переходная) матрица.
 k — постоянная интеграла площадей для кеплеровой траектории.
 L — функция Лагранжа (гл. VI, VII).
 M_1 , M_N — начальное и конечное многообразия, которым принадлежат фазовые векторы $(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1^+)$ и $(t_N, \mathbf{r}_N, \mathbf{V}_N^+)$, соответственно.
 m — масса аппарата; масса планеты или Солнца.
 m_k^+ , m_k^- — масса аппарата в начале и конце k -го активного участка; до и после k -го импульса скорости, соответственно.
 $\Delta m_k = m_k^+ - m_k^-$ — расход массы аппарата на k -м активном участке; в k -м импульсе скорости.
 N — количество активных участков, импульсов скорости на траектории.
 n — отношение радиусов двух копланарных концентрических круговых орбит (внешней к внутренней), отношение длин радиусов-векторов конечных точек кеплеровой дуги перелета ($n > 1$).

- $\mathbf{n}$ — вектор тяговооруженности КА.
 p — фокальный параметр конического сечения.
 $\mathbf{p}$ — вектор сопряженных к $\mathbf{r}$ переменных.
 p_q — сопряженная к q переменная.
 q — характеристическая скорость аппарата при конечной тяге двигателя; характеристическая скорость гелиоцентрического участка полета.
 Δq_k — приращение характеристической скорости на k -м активном участке; при k -м импульсе скорости.
 R — средний радиус планеты; радиус круговой орбиты.
 $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс КА относительно начала некоторой инерциальной системы координат; гелиоцентрический радиус-вектор центра масс КА; гелиоцентрический радиус-вектор центра масс планеты.
 $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор КА в момент сообщения k -го импульса скорости.
 $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор аппарата при его свободном движении в однородном гравитационном поле (гл. VIII, IX).
 $\Delta \mathbf{r}(T)$ — вектор конечного промаха по радиусу-вектору аппарата (гл. VIII, IX).
 $\mathbf{s}$ — вектор сопряженных к $\mathbf{V}$ переменных.
 T — продолжительность полета; заданный момент времени.
 $\mathbf{T}$ — вектор тяги аппарата.
 T_Σ — суммарная продолжительность перелета Земля-планета-Земля.
 t — время.
 $t_i (i=0, 1, 2, 3)$ — даты старта с орбиты ИСЗ, прибытия на орбиту ИС планеты, старта с орбиты ИС планеты, прибытия на орбиту ИСЗ или полета к Земле, соответственно.
 t_k — момент сообщения КА k -го импульса скорости.
 t_k^-, t_k^+ — начало и конец k -го активного участка, соответственно.
 $t_{ij} (ij=01; 23)$ — продолжительность перелета орбита ИСЗ — Луна, орбита ИСЗ — орбита ИС планеты ($ij=01$); Луна — Земля, орбита ИС планеты — Земля ($ij=23$).
 $\Delta t_k = t_k^+ - t_k^-$ — продолжительность k -го активного участка.
 Δt_Σ — время ожидания на орбите ИС планеты назначения.
 $\mathbf{U}$ — вектор скорости движения центра масс планеты.
 u — аргумент широты.
 $\mathbf{V}$ — вектор скорости центра масс аппарата.
 $\mathbf{V}_k^-, \mathbf{V}_k^+$ — вектор скорости КА непосредственно перед и сразу после k -го импульса скорости, соответственно.
 $\mathbf{V}_{кр}$ — вектор скорости движения КА по круговой орбите ИС.
 $\mathbf{V}_{сф}$ — вектор планетоцентрической скорости КА на сфере влияния.
 $\mathbf{V}_0(t)$ — вектор скорости аппарата при его свободном движении в однородном гравитационном поле (гл. VIII, IX).
 V_I — первая космическая скорость.
 ΔV — характеристическая скорость маневра КА.
 $\Delta V(T)$ — вектор конечного промаха по вектору скорости аппарата (гл. VIII, IX).
 $\Delta V_{ij} (ij=01; 23)$ — характеристическая скорость двухимпульсного перелета орбита ИСЗ — орбита ИС планеты ($ij=01$), орбита ИС планеты — орбита ИСЗ ($ij=23$).
 ΔV_Σ — суммарная характеристическая скорость.
 ΔV — импульс скорости.
 $\mathfrak{M}$ — матрица направляющих косинусов ортов $\mathbf{i}_\pi, \mathbf{i}_\nu, \mathbf{i}_n$ относительно осей координат $x_\pi y_\nu z_n$.
 $\alpha_i (i=1, 2)$ — углы между плоскостью орбиты Луны и плоскостями перелета Земля — Луна ($i=1$) и Луна — Земля ($i=2$).
 β — угол между радиусом-вектором $\mathbf{p}$ точки выхода или схода на орбиту ИС и вектором скорости КА на сфере влияния $\mathbf{V}_{сф}$, $0 \leq \beta \leq \pi$.

$\bar{\beta}$ — граничное значение угла β , соответствующее пересечению орбиты ИС в перицентре планетоцентрической гиперболы КА.

$\Delta_0, \Delta_s, \Delta_z$ — параметры, определяющие взаимное расположение двух близких околокруговых орбит (см. соотношения (7.2.3), (7.2.4), (7.3.1), гл. VI, VII).

δ — угол между векторами $V_{сф}$ и i_v (гл. X, XI).

η — истинная аномалия.

η_{ij} ($ij=01; 23$) — угловые дальности перелетов Земля — Луна, Земля — планета ($ij=01$) и Луна — Земля, планета — Земля ($ij=23$).

θ — угол наклона вектора скорости КА V к местной трансверсали.

ϕ — истинная аномалия точки на орбите ИС; функция переключения.

κ — отношение фокального параметра орбиты ИС p_0 к действительной полуоси планетоцентрической гиперболы a (гл. X ÷ XII); для круговой орбиты $\kappa = \rho/a$, где ρ — радиус орбиты; при $\rho_{сф} = \infty$ для круговой орбиты $\kappa = V_{сф}^2/V_{кр}^2$.

λ — неопределенный множитель Лагранжа; долгота в сферических координатах.

μ — гравитационная постоянная планеты.

ρ — планетоцентрический радиус-вектор КА; радиус-вектор точки на орбите ИС.

$\rho_{сф}$ — радиус сферы влияния планеты.

σ — параметр, характеризующий ориентацию вектора $V_{сф}$ относительно плоскости орбиты ИС, $\sigma = \sin^2 \alpha$, где α — угол между векторами $V_{сф}$ и j_n (гл. X ÷ XII).

τ — орт трансверсали.

φ — полярный угол в цилиндрической системе координат; широта в сферических координатах.

χ — угол между гелиоцентрическими радиусами-векторами Земли и планеты ($0 \leq \chi \leq 2\pi$).

Ω — долгота восходящего узла.

ω — среднее движение планеты (средняя угловая скорость движения планеты по орбите, гл. XI, XII).

Маршруты перелета

A, B, C, D — дуги кеплеровой траектории перелета:

A — не содержит вершин конического сечения (Ve);

B — содержит перицентр (Ve);

C — содержит апоцентр ($e < 1$);

D — содержит обе вершины конического сечения ($e < 1$).

B^+, B^- — перелеты со сферы влияния на орбиту ИС по маршруту B ; поворот от ρ к $V_{сф}$ на угол β ($0 < \beta < \pi$) происходит в направлении движения по гиперболе (B^+) или против него (B^-).

$AA, BB, CC, DD, AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC$ — маршруты перелета Земля — планета — Земля: первая буква обозначает маршрут перелета Земля — планета, вторая буква — маршрут перелета планета — Земля.

$AA^\pm, CC^\pm, AC^\pm, CA^\pm$ — маршруты перелета Земля — Луна — Земля: первая буква обозначает маршрут перелета Земля — Луна, вторая — Луна — Земля, знаки «+» и «-» соответствуют $\text{sign}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = 1$ и $\text{sign}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = -1$.

Система координат

$x_{уп}z_{п}$ — правая прямоугольная декартова планетоцентрическая система координат: ось $x_{п}$ направлена по орбитальному радиусу-вектору планеты; ось $y_{п}$ по трансверсальной составляющей вектора орбитальной скорости планеты.

$x_c y_c z_c$ — правая прямоугольная селеноцентрическая система координат: ось x_c направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора центра масс Луны Γ_L , ось y_c направлена вдоль трансверсальной составляющей вектора скорости центра масс Луны.

$i_{\pi} i_y i_n$ — правая прямоугольная декартова система координат, связанная с планетоцентрической гиперболой и образованная ортами i_{π} , i_y , i_n .

$j_{\pi} j_y j_n$ — правая прямоугольная декартова система координат, связанная с орбитой ИС и образованная ортами j_{π} , j_y , j_n .

$O\sigma\varphi z$ — цилиндрическая система координат с началом в точке O .

Нижние индексы

a — активный участок.

v — вырожденный перелет (гл. VII).

верт — вертикальная траектория.

вкл — включение двигателя (гл. VIII, IX).

вх — вход в атмосферу планеты.

выкл — выключение двигателя (гл. VIII, IX).

вых — выход на орбиту ИС.

гом — гомановский перелет.

имп — импульс скорости; импульсная траектория; импульсный перелет.

кр — круговая орбита.

Л — Луна.

π — планета; планетоцентрический; пассивный участок.

пл — плоская круговая модель движения планет (гл. XII).

s — селеноцентрический, селеносферический.

син — синодический.

ср — среднее значение; середина активного или пассивного участка.

сф — сфера влияния планеты.

сх — сход с орбиты ИС.

экл — эклиптика; проекция на плоскость эклиптики.

f — конечное значение.

i — начальное значение.

k — k -й активный участок; k -й импульс скорости.

max — максимальное значение

min — минимальное значение.

opt — оптимальное значение.

r — радиальное направление; радиальная компонента.

x — проекция на ось x .

y — проекция на ось y .

z — проекция на ось z .

α — апоцентр.

π — перицентр.

Σ — суммарное значение.

τ — трансверсаль.

φ — сопряженная к полярному углу φ переменная.

0 — начальное значение; начальная точка.

1 — конечное значение; конечная точка.

01 — кеплерова дуга перелета между точками 0 и 1; геоцентрический перелет Земля — Луна; гелиоцентрический перелет Земля — планета.

23 — геоцентрический перелет Луна — Земля; гелиоцентрический перелет планета — Земля.

$*$ — характерное значение, используемое в качестве масштаба при введении безразмерных величин.

∞ — предельное значение при $r \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow +\infty$.

Верхние индексы

* — заданное значение.

—, + начало и конец активного участка; непосредственно перед и сразу после импульса скорости, соответственно.

0 — орт для соответствующего вектора.

(0) — начальное приближение.

Символы планет

☉ — Солнце.

☾ — Луна.

⊕ — Земля.

♂ — Марс.

♀ — Венера.

Принятые сокращения

ИС — искусственный спутник.

ИСЗ — искусственный спутник Земли.

ИСЛ — искусственный спутник Луны.

ИСМ — искусственный спутник Марса.

КА — космический аппарат.

ЛКА — лунный космический аппарат.

МСВ — метод сфер влияния.

ММСВ — модифицированный метод сфер влияния.

P_1 — правило приближенного построения активных участков с помощью известной импульсной траектории (гл. IV).

P_2 — правило приближенного построения оптимальной траектории при конечной тяге с помощью известной импульсной траектории (гл. IV).

Математическая символика

$c_j[a, b]$ — класс функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ до j -й производной включительно.

fix — фиксированная величина.

$x \Rightarrow \max(\min)$ — величина x достигает максимума (минимума).

$x|y=\text{const}, \dots, z=\text{const}$ — величина x рассматривается при условиях $y=\text{const}, \dots, z=\text{const}$.

$(x, y, \dots, z, u \Rightarrow \text{extr})$ — изопериметрическая задача для функций $x, y, \dots, z, u$; $u: x=\text{const}, y=\text{const}, \dots, z=\text{const}; u \Rightarrow \text{extr}$.

(x, y) — скалярное произведение n -мерных векторов $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ и

$y = \{y^1, y^2, \dots, y^n\} : (x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i$.

$[x, y]$ — векторное произведение трехмерных векторов x и y .

(x, y, z) — смешанное произведение трехмерных векторов x, y, z .

$\frac{\partial x}{\partial y} = \text{grad}_y x$ — производная скаляра $x(y, z)$ по n -мерному вектору y :

вектор, компонентами которого являются частные производные x по компонентам y (x зависит также от m -мерного вектора z).

$\Delta(\)$ — приращение величины $(\)$.

$\delta(\)$ — вариация величины $(\)$.

$\forall$ — для всех; для произвольного; для каждого.

ЛИТЕРАТУРА

Принятые сокращения

- ВРТ — Вопросы ракетной техники;
ДАН — Доклады Академии наук СССР;
ЖВМ и МФ — Журнал вычислительной математики и математической физики;
КИ — Космические исследования;
ПММ — Прикладная математика и механика;
AIAA J. — American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (журнал издается в переводе на русский язык издательством «Мир» под названием «Ракетная техника и космонавтика»);
AIAA Paper — American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper;
ARS J. — American Rocket Society Journal;
Astr. Acta — Astronautica Acta;
IAS Paper — Institute of Aeronautical Sciences Paper;
JAS — Journal of the Astronautical Sciences;
JASS — Journal of Aerospace Sciences;
JBIS — Journal of the British Interplanetary Society;
JOTA — Journal of Optimization Theory and Applications;
JSR — Journal of Spacecraft and Rockets;
Trans. ASME — Transactions of American Society of Mechanical Engineers.
- Авербух А. И., Волохов Ю. Д., Королева Л. С.
1. Методика прицеливания при перелете с Луны на Землю. КИ, 1973, т. XI, вып. 3, стр. 407—417.
- Авербух А. И., Гиршович Б. В.
1. Приближенное определение геометрических характеристик траекторий Луна — Земля. КИ, 1973, т. XI, вып. 5, стр. 680 — 684.
- Аврамченко Р. Ф., Безменов В. М., Випокуров В. А., Токарев В. В.
1. Минимальное время перелета Земля — Марс — Земля с нерегулируемым двигателем малой тяги. КИ, 1967, т. V, вып. 3, стр. 339—347.
- Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Ярошевский В. А.
1. Моделирование космических аппаратов. «Машиностроение», М., 1970.
- Алешин В. А., Бажинков И. К., Мельбард В. А.
1. Исследование траекторий полета к Луне и возвращения на Землю. КИ, 1967, т. V, вып. 6, стр. 833.
- Аллен К. У.
1. Астрофизические величины. ИЛ, М., 1960.
- Аллен, Эггерс (Allen H. J., Eggers A. J.)
1. A. Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Ballistic Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds. NASA Rep., № 1381, 1958.
- Аноров В. П.
1. Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида. Автоматика и телемеханика, 1967, № 3—4.
- Аппазов Р. Ф., Огарков В. И.
1. Исследование оптимальных многоимпульсных перелетов с ограниченными временем между близкими почти круговыми орбитами. КИ, 1976, т. XIV, вып. 2, стр. 163—174.

А п п е л ь П.

1. Теоретическая механика, т. II. Физматгиз, М., 1960.

А р ч е р (Archer J. L.)

1. Mission Modes to the Outer Solar System. AIAA Paper, № 70-58, 1970.

Б а г л и а (Buglia J.)

1. Planetary Flybys Resulting in Heliocentric Orbits Normal to the Ecliptic with Fixed Perihelia. JSR, 1973, v. 10, № 9, pp. 601—602.

Б а л а ш о в В. В.

1. Некоторые вопросы использования атмосфер планет для снижения энергетических затрат при осуществлении межпланетных перелетов. Труды четвертых чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского (Калуга, 17 — 19 сентября 1969 г.), Секция «Механика космического полета», М., 1970, стр. 40—49.
2. Исследование оптимальных перелетов к Марсу с возвращением в атмосферу Земли с заданной скоростью. Ученые записки ЦАГИ, 1971, т. II, № 1, стр. 82—91.

Б а л а ш о в В. В., И л ь и н В. А., И с т о м и н Н. А.

1. Синтез оптимальных многоимпульсных межпланетных траекторий. Труды вторых чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей Ф. А. Цандера, Секция «Астродинамика», М., 1974, стр. 13—26.

Б а р р а р (Barrar R. B.)

1. An Analytic Proof that the Hohmann-Type Transfer is the True Minimum Two-Impulse Transfer. Astr. Acta, 1963, v. 9, № 1, pp. 1—11.

Б а р т о с, Г р и н б е р г (Bartos G., Greenberg A. B.)

1. Abort Problems of the Lunar Landing Mission Technology of Lunar Exploration. Progr. in Astr. & Aeron. Acad. Press., 1963, v. 10, pp. 735—760.

Б а у з е В. Р. Э., Д а ш к о в А. А., К у б а с о в В. Н.

1. Траектории облета планеты с возвращением к Земле. КИ, 1968, т. VI, вып. 6, стр. 803.

Б ё р н с (Burns J. F.)

1. A Parallel between Keplerian Integrals and Integrals of the Adjoint Equations. AIAA J., 1970, v. 8, № 4, pp. 809—810.

Б и л л и к, Р о т (Billick B. H., Roth H. L.)

1. Studies Relative to Rendezvous Between Circular Orbits. Astr. Acta, 1967, v. 13, № 1.

Б и н (Bean W. C.)

1. Optimum Instantaneous Impulsive Orbital Injection to Attain a Specified Asymptotic Velocity Vector. Astr. Acta, 1971, v. 16, № 3, pp. 159—166.
2. Noncoplanar Minimum ΔV Two-Impulse and Three-Impulse Orbital Transfer from a Regressing Oblate Earth Assembly Parking Ellipse onto a Flyby Trans-Mars Asymptotic Velocity Vector. Astr. Acta, 1971, v. 16, № 4, pp. 217—231.

Б и р к г о ф Дж. Д.

1. Динамические системы. Гостехиздат, М.—Л., 1941.

Б л и с с Г. А. (Bliss G. A.)

1. Mathematics for Exterior Ballistics. N. Y., 1944.

Б о л т я н с к и й В. Г.

1. Математические методы оптимального управления. «Наука», М., 1969.

Б о с с а р т (Bossart K. J.)

1. Departure and Return in Interplanetary Flight. Aerospace Eng., 1958, v. 17, № 10, pp. 44—52.

Б р а й с о н, Д е н х э м (Bryson A. E., Denham W. F.)

1. A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems, Trans. ASME, J. of Appl. Mech., 1962, v. 29, Ser. E, № 2.

Б р а й с о н А., Х о Ю-ши

1. Прикладная теория оптимального управления. «Мир», М., 1972.

Брауде А. З.

1. Управление траекторий в задаче о мягкой встрече двух летательных аппаратов. Ученые записки ЦАГИ, 1975, т. VI, № 2, стр. 63—74.

Брауде А. З., Кузмак Г. Е.

1. Оптимальное изменение вектора скорости при движении в однородном поле тяготения. Ученые Записки ЦАГИ, 1975, т. VI, № 1, стр. 57—66.

Брауэр Д., Клеменс Дж.

1. Методы небесной механики, гл. XII. «Мир», М., 1964.

Брейкуэлл (Breakwell J. V.)

1. Minimum Impulse Transfer. AIAA Paper, № 63-416, 1963.

Брейкуэлл, Джиллспай, Росс (Breakwell J. V., Gillespie R. W., Ross S. E.)

1. Researches in Interplanetary Transfer. ARS J., 1961, v. 31, № 2.

Брейкуэлл, Перко (Breakwell J. V., Perko L. M.)

1. Matched Asymptotic Expansions Patched Conics and Computation of Interplanetary Trajectories. Methods in Astrodynamics and Celestial Mech., Progr. in Astronautics and Celestial Mechanics, v. 17, Acad. Press, N. Y.—L., 1966, pp. 159—182.

Брешерс (Breshears R. R.)

1. Spacecraft Propulsion Requirements for Lunar Missions. JSR, 1965, v. 2, № 1, pp. 25—32.

Брукс, Дрюри, Хэмпшайр (Brooks D. R., Drewry J. W., Hampshire W. F.)

1. Opportunities for Multiple Asteroid Flybys in 1970's and 1980's JSR, 1973, v. 10, № 9, pp. 588—592.

Бушув Е. И., Красовский А. А.

1. О геометрическом решении задачи импульсного перехода между близкими почти круговыми орбитами. КИ, 1969, т. VII, вып. 4, стр. 485.

Бэттин Р. (Battin R. H.)

1. The Determination of Round-Trip Planetary Reconnaissance Trajectories. JASS, 1959, v. 26, № 9, pp. 545—567.

2. Наведение в космосе. «Машиностроение», М., 1966.

Бэттин, Миллер (Battin R. H., Miller J. S.)

1. Trajectories and Guidance Theory for a Continuous Low Thrust Lunar Reconnaissance Vehicle. Proc. of 6th Symp. on Ball. Miss. and Space Technology, 1961, VII, p. 3.

де ла Валле Пуссен Ш. Ж.

1. Лекции по теоретической механике, т. II. ИЛ, М., 1949.

Вандервеен (Vanderveen A. A.)

1. Triple-Planet Ballistic Flybys of Mars and Venus. JSR, 1969, v. 6, № 4, pp. 333—389.

Де Вебек, Геертс (De Veubeke Fraeijis B., Geerts J.)

1. Optimization of Multiple Impulse Orbital Transfers by the Maximum Principle. Proceed. of 15th Intern. Astronaut. Congr., (Warszawa, 1964), v. 1, Gauthier — Villars, Paris, PWN, Warszawa, 1965.

Винх (Vinh N. X.)

1. Integration of the Primer Vector in a Central Force Field. JOTA, 1972, v. 9, № 1, pp. 51—58.
2. General Theory of Optimal Trajectory for Rocket Flight in Resisting Medium. JOTA, 1973, v. 10, № 2, p. 189—202.

Вождаев В. С.

1. Приближенное решение задачи об оптимальных перелетах Луна — Земля при старте с орбиты искусственного спутника Луны. Труды третьих чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского, М., 1969, стр. 54. См. также сборник «Идеи Циолковского и проблемы космонавтики», «Машиностроение», М., 1974, стр. 186—192.

- В о ж д а е в В. С., И л ь и н В. А.
1. Приближенное решение задачи об оптимальных одноимпульсных и двухимпульсных перелетах между компланарными круговыми орбитами. КИ, 1967, т. V, вып. 1, стр. 37—44.
- Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М.
1. Особые оптимальные управления. «Наука», М., 1973.
- Г а н т с е р (Gunther P.)
1. Asymptotically Optimum Two-Impulse Transfer from Lunar Orbit. AIAA J., 1966, v. 4, № 2, pp. 346—352.
- Г а н т м а х е р Ф. Р.
1. Лекции по аналитической механике. Физматгиз, М., 1960.
- Г а п ч и н с к и, Т о л с о н (Garcynsky J. P., Tolson R. H.)
1. Trajectory Considerations for the Return to Earth Phase of Lunar Exploration. Progr. in Astr. and Aeron., v. 10, Acad. Press, 1963.
- Г е д е о н (Gedeon G. S.)
1. Round Trip Trajectories to Mars and Venus. AAS Prep., № 62-30, 1962.
- Г е р б р а х т, П е н з о (Gerbracht R. J., Penzo P. A.)
1. Optimum Transfer between an Elliptic Orbit and Noncoplanar Escape Asymptote. AAS Paper, № 68-084, 1968.
- Г и л р у т, Ф э й д ж е т (Gilruth R. R., Feget M. A.)
1. The Manned Lunar Mission. Technology of Lunar Exploration. Progr. in Astr. and Aeron., v. 10, Acad. Press, 1963, pp. 281—290.
- Г л э н д о р ф (Glandorf D. R.)
1. Lagrange Multipliers and the State Transition Matrix for Coasting Arcs. AIAA J., 1969, v. 7, № 2, pp. 363—365.
 2. Primer Vector Theory for Matched — Conic Trajectories. AIAA J., 1970, v. 8, № 1, pp. 155—156.
- Г о б е ц, Д о л л (Gobetz F. W., Doll J. R.)
1. A Survey of Impulsive Trajectories. AIAA J., 1969, v. 7, № 8.
 2. How to Open the Heliocentric Launch Window for Earth — Mars Orbiter Missions. JSR, 1969, v. 6, № 4, pp. 353—360.
- Г о м а н В. (Hohmann W.)
1. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper. R. Oldenbourg, Munich, 1925. Русский перевод см. в книге: Рынин Н. А., Межпланетные сообщения. Теория космического полета. АН СССР, Л., 1932.
- Г о у л д (Gold L.)
1. Earth — Moon Rocket Trajectories, J. Frankl. Inst., 1958, v. 266, № 1.
- Г о у л д б а у м, Г а н к е л (Goldbaum, Gunkel)
1. Comparison of Two — Dimensional and Three — Dimensional Analysis of Earth — Moon Flight. Adv. in Astronaut. Sci., 1958, v. 3, pp. 31—41—31-15.
- Г р а в ь е, М а р ш а л, К а л п (Gravier J. P., Marchal C., Culp R. D.)
1. A Technique for Obtaining Optimal Interplanetary Transfer in the Real Case. JAS, 1970, IX, v. XVIII, № 2, pp. 101—117.
 2. Optimal Trajectories Between Earth and Mars in Their True Planetary Orbits. JOTA, 1972, II, v 9, № 2, pp. 120—136.
 3. Effects of Inclination and Excentricity on Optimal Trajectories between Earth and Venus. Astr. Acta, 1973, v. 18, № 4, pp. 273—279.
 4. Optimal Impulsive Transfers Between Real Planetary Orbits. JOTA, 1975, v. 15, № 5, pp. 587—604.
- Г р е б е н и к о в Е. А.
1. Оптимальные и краевые задачи астродинамики. Часть VIII в книге: Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, под ред. Г. Н. Дубошина, «Наука», М., 1976.
- Г р е б е н и к о в Е. А., Д е м и н В. Г.
1. Межпланетные полеты. «Наука», М., 1965.

Г р ё б н е р, К э н (Gröbner W., Cap F.)

1. The Three — Body Problem Earth — Moon Spaceship. Astr. Acta, 1957, v. V, № 5, p. 287.

Г р и н, Л е в и н (Green B. S., Lewin N.)

1. A Gradient Method for Obtaining Circumlunar Trajectories. AIAA Paper, № 63-401, 1963.

Г р о д з о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В.

1. Механика космического полета с малой тягой. «Наука», М., 1966.
2. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. «Наука», М., 1975.

Г р о д з о в с к и й Г. Л., О х о ц и м с к и й Д. Е., Б е л е ц к и й В. В., И в а н о в Ю. Н., К у р ь я н о в А. И., П л а т о н о в А. К., С а р ы ч е в В. А., Т о к а р е в В. В., Я р о ш е в с к и й В. А.

1. Механика космического полета. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Общая и прикладная механика», «Наука», М., 1968, стр. 265—320.

Г р о с с, П р а с с и н г (Gross L. R., Prussing J. E.)

1. Optimal Multiple-Impulse Direct Ascent Fixed-Time Rendezvous. AIAA J., 1974, v. 12, № 7, pp. 885—889.

Г у и н н (Gwinn J. M.)

1. Lunar Ascent with Plane Change. AIAA Paper, № 64-400, 1964

Г у с е в Л. И.

1. Метод определения характеристических скоростей при перелетах космического аппарата с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ и обратно. КИ, 1974, т. XII, вып. 5, стр. 682 — 690.
2. Оптимизация перелетов с орбит ИСЗ на орбиты ИСЛ и обратно в случае фиксированной плоскости орбит ИСЛ. Ученые записки ЦАГИ, 1975, т. VI, № 6, стр. 124—129.

Д а л л а с (Dallas S.)

1. Moon-to-Earth Trajectories. AIAA Preprints, № 402, 1963.

Д е м е ш к и н а В. В., И л ь и н В. А.

1. Исследование траекторий космического аппарата, стартующего с поверхности Луны и возвращающегося в атмосферу Земли. Ученые записки ЦАГИ, 1970, т. I, № 3, стр. 56—64.

Д е м и д о в и ч Б. П., М а р о н И. А.

1. Основы вычислительной математики. «Наука», М., 1966.

Д ж и л л с н а й (Gillespie R. W.)

1. A Systematic Approach to the Study of Stopover Interplanetary Round Trips. Adv. in Astronaut. Sci., 1963, v. 13, pp. 165—176.

Д ж о н с, А л е к с а н д е р (Johns R. A., Alexander J. D.)

1. Apollo Lunar Rendezvous. JSR, 1970, v. 7, № 9, pp. 1083—1086.

Д ж о н с о н (Johnson F.)

1. Free Return Circumlunar Trajectories from Launch Windows with Fixed Launch Azimuths. AIAA Paper, № 63-406, 1963.

Д ж о н с о н, С м и т (Johnson P., Smith R. L.)

1. Round-Trip Trajectories for Mars Observation. Adv. in Astr. Sci., v. 5, 1960.

Д и р у е с т е р, Д е й е м (Deerwester J. M., D'Haem S. M.)

1. Systematic Comparison of Venus Swingby Mode with Standard Mode of Mars Round Trips. AIAA Paper, № 67-27, 1967.

Д и р у е с т е р, М а к л а ф л и н, В у л ф (Deerwester J. M., McLaughlin J. F., Wolfe J. F.)

1. Earth-Departure Plane Change and Launch Window Considerations for Interplanetary Missions. JSR, 1966, v. 3, № 2, pp. 169—174.

Д о л л, Г о б е ц (Doll J. R., Gobetz F. W.)

1. Three-Impulse Interplanetary Rendezvous Trajectories. Proc. of the Southeastern Symposium on Missiles and Aerospace Vehicle Sci. of AAS, 1966, VII, pp. 55-1—55-14.

Дубовский С. В.

1. Межорбитальные и межпланетные перелеты. КИ, 1967, т. V, вып. 4, стр. 494—507.
2. Идеальный двигатель ограниченной скорости истечения (импульсные постановки). Гл. 5 в кн.: Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета. Проблемы оптимизации. «Наука», М., 1975.

Дубошин Г. Н.

1. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, М., 1963.
2. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. «Наука», М., 1964.
3. Небесная механика. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Общая и прикладная механика», «Наука», М., 1968, стр. 321—362.

Дубошин Г. Н., Охотимский Д. Е.

1. Некоторые проблемы астродинамики и небесной механики. КИ, 1963, т. I, вып. 2, стр. 195—208.

Дэрби (Darby W. O.)

1. Correction for the Effects of Finite Thrusting Time in Orbit Changing Maneuvers. IAS Paper № 61-154-1848, 1961.

Егоров В. А.

1. О некоторых задачах динамики полета к Луне. Успехи физ. наук, 1957, т. 63, вып. 1а, стр. 73—117.
2. Некоторые вопросы динамики полета к Луне. ДАН, 1957, т. 113, № 1, стр. 46—49.
3. Пространственная задача достижения Луны. «Наука», М., 1965..
4. О траекториях возвращения от Луны к Земле. КИ, 1967, т. V, вып. 4.
5. О влиянии разброса начальных данных на траектории возвращения от Луны к Земле. КИ, 1969, т. VII, вып. 1, стр. 3.
6. Оптимизация одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую с заданной скоростью на «бесконечности». КИ, 1972, т. X, вып. 5, стр. 661—672.

Егоров В. А., Золотухина Н. И., Тесленко Н. М.

1. Выбор траекторий возвращения к Земле с орбиты искусственного спутника Луны. КИ, 1973, т. XI, вып. 3, стр. 397—406.

Ежевский (Jezewski D. J.)

1. A Method for Determining Optimal Fixed-Time, N-Impulse Trajectories Between Arbitrarily Inclined Orbits. IAF Paper, AD-30, 1968, 19th Congr. IAF.

Ежевский, Розендал (Jezewski D. J., Rozendaal H. L.)

1. An Efficient Method for Calculating Optimal Free-Space N-Impulse Trajectories. AIAA J., 1968, v. 6, № 11, pp. 2160—2165.

Желин Ю. Н., Шилов А. А.

1. Траектории минимальной дальности при входе космического аппарата в атмосферу Земли со сверхкруговой скоростью. Ученые записки ЦАГИ, 1970, т. I, № 1, стр. 78—90.

Зон (Sohn R. L.)

1. Venus Swingby Mode for Manned Mars Missions. JSR, 1964, v. 1, № 5.
2. Manned Mars Trips Using Elyby Modes. JSR, 1966, v. 3 № 2.

Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.

1. Линейное и выпуклое программирование. Справочное руководство. «Наука», М., 1964.

Ивашкин В. В.

1. Энергетически оптимальные переходы с гиперболической орбиты при отсутствии ограничений на время перехода. КИ, 1966, т. IV, вып. 1, стр. 17.
2. Одноимпульсный переход с гиперболической на эллиптическую орбиту при радиальном импульсе. КИ, 1966, т. IV, вып. 3, стр. 339.

3. Оптимальные траектории импульсного перехода между орбитами при наличии ограничений по радиусу. КИ, 1966, т. IV, вып. 1, стр. 510.
 4. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. «Наука», М., 1975.
- И в а ш к и н В. В., С к о р о х о д о в А. Н.
1. Оптимальный пространственный одноимпульсный переход с гиперболической орбиты на круговую. КИ, 1971, т. IX, вып. 4, стр. 483—489.
- И в а ш к и н В. В., Т у п ц и н Н. Н.
1. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли. КИ, 1971, т. IX, вып. 2, стр. 163—172.
- И л ь и н В. А.
1. Оптимальный переход космического аппарата, тормозящегося в атмосфере планеты, на орбиту искусственного спутника. Инж. журнал, 1963, т. III, вып. 2, стр. 203—206.
 2. К расчету траекторий перелета космических аппаратов между комбинированными круговыми орбитами в ньютоновском гравитационном поле. КИ, 1964, т. II, вып. 5, стр. 698—712.
 3. Приближенное решение задачи синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли (тезисы доклада). Современные проблемы небесной механики и астродинамики. Труды Конференции по общим вопросам небесной механики и астродинамики, «Наука», М., 1973, стр. 233.
 4. Некоторые вопросы исследования траекторий облета Луны с возвращением космического аппарата в атмосферу Земли. Труды вторых чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского (Калуга, 16—18 сентября 1967 г.), Секция «Механика космического полета», М., 1968, стр. 80—95.
 5. Синтез траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли. ЖВМ и МФ, 1967, т. VII, № 2, стр. 367—388.
- И л ь и н В. А., Д е м е ш к и н В. В., И с т о м и н Н. А.
1. Исследование траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли. КИ, 1970, т. VIII, вып. 1, стр. 48—58; вып. 3, стр. 365—376.
 2. О синтезе оптимальных траекторий космических аппаратов с выходом на орбиту ИС планеты. Труды первых чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей Ф. А. Цандера (Рига, 12—15 мая 1970 г.), I, «Зинатне», Москва—Рига, 1972, стр. 20—35.
- И л ь и н В. А., И с т о м и н Н. А.
1. Приближенный синтез оптимальных траекторий Земля—Луна—Земля с выходом на орбиту искусственного спутника Луны. Ученые записки ЦАГИ, 1970, т. I, № 1, стр. 91—106.
 2. Оптимальные одноимпульсные перелеты между сферой влияния планеты и орбитой ее искусственного спутника. Ученые записки ЦАГИ, 1970, т. I, № 5, стр. 118—122.
- И с а е в В. К., Д а в и д с о н Б. Х.
1. Оптимальная посадка космического аппарата на поверхность Луны. КИ, 1969, т. VII, вып. 3, стр. 368.
 2. Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны. КИ, 1969, т. VII, вып. 3, стр. 374.
- И с а е в В. К., К о п н и н Ю. М.
1. Некоторые качественные результаты, полученные в задаче о перелете между орбитами с помощью принципа максимума. Труды ЦАГИ, вып. 1174, М., 1969.
- И с а е в В. К., С о н и н В. В.
1. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач. ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 6.

Исакович Л. А., Кирпичников С. Н.

Некоторые случаи межпланетных переходов с использованием пертурбационного маневра. КИ, 1974, т. XII, вып. 5, стр. 675—681.

Казакова Р. К., Киселев В. Г., Платонов А. К.

1. Исследование свойств энергетически оптимальных орбит полета к Юпитеру. КИ, 1968, т. VI, вып. 1, стр. 3.

Кеворкян, Брэчет (Kevorkian J., Brachet G.)

1. Numerical Analysis of the Asymptotic Solution for Earth-to-Moon Trajectories. AIAA J., 1969, v. 7, № 5, pp. 885—889.

Келли (Kelley H. J.)

1. Gradient Theory of Optimal Flight Paths. ARS J., 1960, X, v. 30, № 10.

Келли, Эдорнато (Kelley Th. J., Adornato R. J.)

1. Determination Abort Way-Stations on a Nominal Circumlunar Trajectories. ARS J., 1962, v. 32, № 6.

Келли, Эдорнато, Спейсер (Kelley Th. J., Adornato R. J., Speiser K. H.)

1. Abort Considerations for Manned Lunar Missions. Technology of Lunar Exploration. Progr. in Astr. & Aeron., v. 10, Acad. Press, 1963.

Киблер (Kibler J. E.)

1. Round Trip Mars Mission Using Looping Trajectories in the 1980—2000. Time Period. JSR, 1973, v. 10, № 10, pp. 686—688.

Кислик М. Д.

1. Сферы влияния больших планет и Луны. КИ, 1964, т. II, вып. 6.

Клопп, Нихофф (Klopp D., Niehoff J.)

1. Jupiter Gravity-Assisted Trajectories. AAS Paper, №68-116, 1968.

Коддингтон Э. А., Левинсон Н.

1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958.

Колдуэлл (Caldwell D. M.)

1. Recovery of Lunar Vehicles. Geometric Constraints on Trajectories. Adv. in Astronaut. Sci., 1963, v. 16, part 1, pp. 923—943.

Контенсу (Contensou P.)

1. Theoretical Study of Optimal Trajectories in a Gravitational Field. Application in the Case of a Single Centre of Attraction. Astr. Acta, 1962, v. VIII, F. 2—3.

Коой, Бергуйс (Kooy J. M. J., Berghuis J.)

1. On the numerical Computation of Free Trajectories of a Lunar Space Vehicle. Astr. Acta, 1960, v. VI, F. 2—3, p. 5.

Копин Ю. М.

1. Об уравнениях, описывающих поворот орбитальной плоскости. КИ, 1967, т. V, вып. 1, стр. 32—36.

Корник, Северсайк (Cornick D. E., Seversike L. K.)

1. Optimum Parking Orbit Orientation for a Three Dimensional Capture-Escape Mission. JSR, 1970, v. 7, № 7, pp. 808—813.

Корнхаузер, Лайон, Хэзелриг (Kornhauser A. L., Lion P. M., Hazelrigg G. A.)

1. An Analytic Solution for Constant-Thrust, Optimal Coast, Minimum-Propellant Space Trajectories. AIAA J., 1971, v. 9, № 7, pp. 1234—1239.

Коул Дж.

1. Методы возмущений в прикладной математике. «Мир», М., 1972.

Коул, Мьюир (Cole D. M., Muir D. E.)

1. Around the Moon in 80 Hours. Adv. in Astronaut. Sci., 1958, v. 3.

Красовский Н. Н.

1. Теория оптимальных управляемых систем. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. I, «Общая и прикладная механика», «Наука», М., 1968.

Крокко (Crocko G. A.)

1. One Year Exploration Trip Earth—Mars—Venus—Earth. Proc. of the XIIth Intern. Astronaut. Congress, Rome, 1956.

К р о т о в В. Ф., Б у к р е с в В. З., Г у р м а н В. И.

1. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. «Машиностроение», М., 1969.

К у д р я в ц е в Л. Д.

1. Математический анализ, т. I, II. «Высшая школа», М., 1970.

К у з м а к Г. Е.

1. Линсаризованная теория оптимальных многоимпульсных плоских перелетов. КИ, 1965, т. III, вып. 1, стр. 3—26.
2. Исследование оптимальных многоимпульсных перелетов между близкими квазикруговыми некомпланарными орбитами. I, II. КИ, 1967, т. V, вып. 5, стр. 703—714; т. V, вып. 6, стр. 803—821.
3. Об учете протяженности активных участков при исследовании оптимальных перелетов между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами. ДАН СССР, 1968, т. 181, № 1, стр. 42—45.
4. Исследование оптимальных многоимпульсных перелетов между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами. Труды ЦАГИ, вып. 1120, 1969.
5. О некоторых свойствах оптимального управления пространственным движением материальной точки в однородном центральном поле тяготения. Ученые записки ЦАГИ, 1970, т. I, № 5, стр. 55—63.
6. Синтез оптимального управления при движении в однородном центральном поле в случае коллинеарности векторов конечного промаха по радиус-вектору и вектору скорости. Ученые записки ЦАГИ, 1971, т. II, № 1, стр. 60—72.
7. К вопросу о синтезе оптимального управления движением материальной точки в тонком сферическом слое центрального поля тяготения при неколлинеарных векторах конечного промаха по радиус-вектору и вектору скорости. КИ, 1972, т. X, вып. 5, стр. 650—660.

К у з м а к Г. Е., Б р а у д е А. З.

1. Приближенное построение оптимальных перелетов в малой окрестности круговой орбиты. КИ, 1969, т. VII, вып. 3, стр. 323—338.
2. Приближенное исследование оптимального управления движением материальной точки в тонком сферическом слое центрального поля тяготения. КИ, 1971, т. IX, вып. 2, стр. 195—210.

К у з м а к Г. Е., Л а в р е н к о Н. И.

1. Оптимальные перелеты между близкими околокруговыми некомпланарными орбитами. ДАН СССР, 1967, т. 173, № 6, стр. 1273—1276.

К у з м а к Г. Е., Л а в р е н к о Н. И., И с а е в В. К., С о н и н В. В.

1. Линсаризованная теория оптимальных многоимпульсных перелетов. Некоторые особенности задачи об оптимальном программировании тяги ракет. XVth International Astronautical Congress, Proceedings, Warszawa, 1964, Gauthier—Villars, Paris, PWN, Warszawa, 1965, pp. 311—345.

К у з м а к Г. Е., И с а е в В. К., Д а в и д с о н Б. Х.

1. Оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле. ДАН СССР, 1963, т. 149, № 1.

К ю н ц и Г. П., К р е л л е В.

1. Нелинейное программирование. «Советское радио». М., 1965.

Л а г е р с т р ё м, К е в о р к я н (Lagerström P. A., Kevorkian J.)

1. Earth-to-Moon Trajectories in the Restricted Three-Body Problem. J. de Mécanique, 1963, v. 11, № 2, pp. 189—218.
2. Earth-to-Moon Trajectories with Minimum Energy. J. de Mécanique, 1963, v. 11, № 4, pp. 493—504.
3. Some Numerical Aspects of Earth-to-Moon Trajectories in the Restricted Three-Body Problem. AIAA Paper, № 63-389, 1963.
4. Nonplanar Earth-to-Moon Trajectories in the Restricted Three-Body Problem. AIAA J., 1966, v. 4, № 1, pp. 149—152.

- Лайон, Хэнделсмен (Lion P. M., Handelsman M.)
 1. The Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories. AIAA J., 1968, v. 16, № 1, pp. 127—132; AIAA Paper, № 67-54, Jan. 1967.
- Ланкастер (Lancaster J. E.)
 1. Numerical Analysis of the Asymptotic Two-Point Boundary Value Solution for Moon-to-Earth Trajectories. AIAA Paper, № 70-1060, 1970.
- Ланкастер, Кеворкян (Lancaster J. E., Kevorkian J.)
 1. Nonplanar Moon-Earth Trajectories. AIAA J., 1968, v. 6, №10, pp. 1986—1991.
- Ланкастер, Уокер, Мэнн (Lancaster J. E., Walker J. C., Mann F. J.)
 1. Rapid Analysis of Moon-to-Earth Trajectories. AIAA J., 1969, v. 7, № 6, pp. 1017—1023
- Лалс Дж. П.
 1. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. ИЛ. М., 1962.
- Лассен (Lassen H. A.)
 1. Advanced Lunar Operations. Guidance and Control of Aerospace Vehicles, 1963.
- Левантовский В. И.
 1. Ракетой к Луне. Физматгиз, М., 1960.
 2. Механика космического полета в элементарном изложении, изд. 2-е, «Наука», М., 1974.
- Левин, Эллис, Джорджиев (Levine P., Ellis T. R., Georgiev S.)
 1. Factors Influencing the Design and Performance of Mars Entry Vehicles. JSR, 1965. III—IV, v. 2, № 2.
- Лейтман Дж. (ред.)
 1. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. «Наука», М., 1965.
- Летов А. М.
 1. Динамика полета и управление. «Наука», М., 1969.
- Ли (Lee G.)
 1. An Analysis of Two-Impulse Orbital Transfer. AIAA J., 1964, X, v. 2, № 10, pp. 1767—1773.
- Ли Р.
 1. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. «Наука», М., 1966.
- Ли, Джонс, Потт (Lee V. A., Jones D. W., Potet M. C.)
 1. Trajectory and Mission Analysis of Jupiter Flyby Probes. 18th Intern. Astr. Congr., Belgrade, Yugoslavia, Sept. 1967, v. 2, Pergamon Press — PWN, 1968. pp. 17—32.
- Ли, Флоренс (Lee V. A., Florence D. E.)
 1. Minimum Time Ballistic Interplanetary Trajectories. ARS J., 1961, III, v. 31, № 3, pp. 435—437.
- Лидов М. Л.
 1. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. В сб. «Искусственные спутники Земли». АН СССР, М., 1961. вып. 8, стр. 5—45.
- Лидов М. Л., Охотинский Д. Е., Тесленко Н. М.
 1. Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел. КН. 1964. т. II, вып. 6, стр. 843.
- Лисовская М. С.
 1. О траекториях полета ракеты вокруг Луны. Бюлл. ИТА АН СССР, 1957, № 8. стр. 558—565.
- Лондон (London H. L.)
 1. Escape from Elliptical Parking Orbits. AAS Paper, № 66-127, 1966.
- Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.
 1. Курс теоретической механики, ч. II, Динамика. Гостехиздат, 1948.

Лоуден Д. (Lawden D. F.)

1. Minimal Trajectories. JBIS, 1950, VII, v. 9, №4, pp. 179—186.
2. Entry into Circular Orbits. JBIS, 1951, I, v. 10 №1, pp. 5—17.
3. The Determination of Minimal Orbits. JBIS, 1952, IX, v. 11 № 5.
4. Orbital Transfer Via Tangential Elliptic. JBIS, 1952, XI, v. 11, №6.
5. Inter-Orbital Transfer of a Rocket, JBIS, 1952, v. 11, Annual Rep.
6. Escape to Infinity from Circular Orbits. JBIS, 1953, III, v. 12, №2.
7. Minimal Rocket Trajectories. ARS J., 1953, XI—XII, v. 23, №6.
8. Entry into Circular Orbits—2. JBIS, 1954, v. 13, № 7, p. 27.
9. Fundamentals of Space Navigation. JBIS, 1954, III, v. 13, № 2.
10. Perturbation Maneuvres. JBIS, 1954, v. 13, № 6, pp. 329—334.
11. Stationary Rocket Trajectories. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, XII, v. 7, № 4, pp. 488—504.
12. Optimal Programming of Rocket Thrust Direction. Astr. Acta, 1955, v. 1, № 1, pp. 41—56.
13. Optimal Transfer Between Circular Orbits Around Two Planets. Astr. Acta, 1955, v. 1, pp. 89—98.
14. Optimum Launching of a Rocket into an Orbit about the Earth. Astr. Acta, 1955, v. 1, fasc. 4, pp. 185 — 190.
15. Dynamic Problems of Interplanetary Flight. The Aeronautical Quarterly, 1955, VIII, v. 6, pp. 165 — 180.
16. Transfer between Circular Orbits. Jet Propulsion, 1956, VII, v. 26.
17. Optimum Escape from a Circular Orbit. Astr. Acta, 1958, v. 4.
18. Necessary Conditions for Optimal Rocket Trajectories. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, pp. 476—487.
19. Interplanetary Rocket Trajectories. Advances in Space Sciences, Academic Press, New York, 1959, Chap. 1, pp. 1—53. Русский перевод в сб. «Космические траектории», ИЛ, М., 1963, стр. 177—242.
20. Optimal Powered Arcs in Inverse Square Law Field. ARS J., 1961, v. 31, № 4, pp. 566—568.
21. Optimal Intermediate-Thrust Arcs in a Gravitational Field. Astr. Acta, 1962, v. 8, pp. 106—123.
22. Impulsive Transfer between Elliptical Orbits. Optimization Techniques, Academic Press, N. Y., 1962, Chap. 11, pp. 323—351. Русский перевод: Лейтман [1].
23. Analytical Techniques for the Optimization of Rocket Trajectories. The Aeronautical Quarterly, 1963, V, v. 14, pp. 105—124.
24. Оптимальные траектории для космической навигации. «Мир», М., 1966.

Лох У.

1. Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет. «Мир», М., 1966.

Лурье А. И.

1. Аппалитическая механика. Физматгиз, М., 1961.

Лэскоди, Торсон, Хэйторн, Маркус (Lascody D. H., Thorson E. D., Haithorne H. W., Markus G.)

1. Mars Round-Trip Mission Analysis for Infavorable 1975—1985 Time Period. AIAA Paper, № 64-403, 1964.
2. Mars Round-Trip Mission Analysis for the 1975—1985 Time Period. JSR, 1965, IX—X, v. 2, № 5, pp. 775—800.

Льюденс (Luidens R. W.)

1. Mars Nonstop Round-Trip Trajectories. AIAA J., 1964, v. 2, № 2.
- Магнесс, Пэйс, Пензо, Стейнер, Томпкинз (Magness T. A., Pace W. H., Penzo P. A., Steiner P., Tompkins E. H.)

1. Trajectory and Guidance Considerations for Lunar Return Missions. Technology of Lunar Explorations. Progr. in Astr. & Aeron., 1963, v. 10, Acad. Press, pp. 659—686.

- Майкл, Гриншоу (Michael W. H., Grenshaw J. W.)
1. Trajectory Considerations for Circumlunar Missions. JAS Paper, № 61-35, 1961, N. Y.
- Майнер, Эндрюс (Miner W. E., Andrews J. F.)
1. Necessary Conditions for Optimal Lunar Trajectories with Discontinuous State Variables and Intermediate Point Conditions, AIAA J., 1968, v. 6, № 11, pp. 2154—2159.
- Макнтайр, Крокко (McIntyre J. E., Crocco L.)
1. Linearized Treatment of Optimal Transfer of a Thrust-Limited Vehicle between Coplanar Circular Orbits. Astr. Acta, 1966, V—VI, v. 12, № 3.
 2. Higher Order Treatment of the Optimal Transfer of a Thrust-Limited Vehicle between Coplanar Circular Orbits. Astr. Acta, 1967, I—II, v. 13, № 1, pp. 3—21.
- Малкин И. Г.
1. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М., 1956.
- Марек (Mares J.—P.)
1. Transfers Infinitesimaux Impulsionnels Economiques Entre Orbites Quasi-Circulaires Non-Coplanaires. Presented at the 17th Intern. Astronaut. Congress, Madrid, Oct. 1966, ONERA TP 392, Dec. 1966.
 2. Optimal Impulse Rendezvous of Long Duration between Near-Circular Noncoplanar Close Orbits. Presented at Liege Colloquium on Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimization, June 1967.
 3. Transfer Impulsionnels Economiques Entre Orbites Quasi-Circulaires Proches non Coplanaires. Astr. Acta, 1968, XI, v. 14, № 1, p. 475.
 4. Rendez-Vous Multi-Impulsionnels Optimaux de Duree Moyenne Entre Orbites Quasi-Circulaires Proches Coplanaires. IAF Paper, AD-47, 1968, 19th, Cong. IAF.
- Медич (Meditch J. S.)
1. Введение в принцип максимума Л. С. Понтрягина. В сб. Современная теория систем управления» под ред. К. Т. Леондеса, «Наука», М., 1970, гл. 7.
- Мёкель (Moeschel W. F.)
1. Двигательные системы в астронавтике. ВРТ, 1959, № 3 (51), стр. 3—20.
 2. Interplanetary Trajectories with Excess Energy. Proc. of the IXth Intern. Astronaut. Congr., 1958, part I, 1959.
 3. Trajectories with Constant Tangential Thrust in Central Gravitational Fields. NASA TR R-53, 1959.
- Микелуэйт (Mickelwait A. B.)
1. Lunar Trajectories. ARS J., 1959, v. 29, № 12.
 2. Lunar and Interplanetary Trajectories. Guidance and Control of Aerospace Vehicles, 1963.
 3. Lunar Missions: Launch to Rendezvous. В сб. «Technology of Lunar Exploration. Progress in Astronautics and Aeronautics», v. 10, 1963.
- Микелуэйт, Бутон (Mickelwait A. B., Borton R. C.)
1. Analytical and Numerical Studies of Three-Dimensional Trajectories to the Moon. JAS Paper, № 59-90, 1959.
- Минкофф, Лайон (Minkoff M., Lion P. M.)
1. Optimal Multi-Impulse Rendezvous Trajectories. IAF Paper. AD 143, 19th Congr. IAF, 1968.
- Моисеев Н. Н.
1. Численные методы в теории оптимальных систем. «Наука», М., 1971.
- Мойер (Moyer H. G.)
1. A Computer Survey of Impulsive Ellipse-Ellipse Transfer. AIAA J., 1971, v. 9, № 2, pp. 321—322.
- Моррей Ч. Б. (Morrey C. B.)
1. Нелинейные методы. В кн. «Современная математика для инженеров» под ред. Э. Ф. Беккенбаха, ИЛ, М., 1958, гл. 14, стр. 375—417.

Мьеле (Miele A.)

1. An Extension of the Theory of the Optimum Burning Program for the Level Flight of Rocket-Powered Aircraft. JAS, 1957, v. 24, №12, 874—884.
2. General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket-Powered Aircraft, Missiles and Satellite Carriers. Astr. Acta, 1958, v. 4, № 4, pp. 264—288.
3. Some Recent Advances in Mechanics of Terrestrial Flight. Jet Propulsion, 1958, v. 28, № 9, pp. 581—587.
4. Theorem of Image Trajectories in the Earth-Moon-Space. Astr. Acta, 1960, v. VI, F. 5.

Мьюник (Munick H.)

1. Optimum Transfer between Circular and Hyperbolic Orbits. ARS J., 1962, v. 32, № 11, pp. 1739—1740.

Нариманов Г. С., Тихонравов М. К. (редакторы)

1. Основы теории полета космических аппаратов. «Машиностроение», М., 1972.

Нелсон (Nelson W. C.)

1. An Integrated Approach to the Determination and Selection of Lunar Trajectories. Adv. in Astr. Sci., 1961, v. 9, pp. 33—46.

Нип, Зола (Knip G., Zola G. L.)

1. Three-Dimensional Sphere of Influence Analysis of Interplanetary Trajectories to Mars. ARS J., 1962, v. 32, № 8, p. 1310.

Новоселов В. С.

1. Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Изд-во ЛГУ, 1972.

Нэйч (Naytch A. H.)

1. A Comparison of Three Perturbation Methods for Earth-Moon Space Ship Problem. AIAA J., 1965, v. 3, № 9, pp. 1682—1687.

Неполлин, Мендес (Napolin A. L., Mendez J. C.)

1. Target Orbit Selection for Mars Missions Using Aerodynamic Maneuvering. AIAA Paper, № 64-14, 1964.

О'Мэхонн, Беннет, Эскридж (O'Mahony M. S., Bennett A. G., Eskridge C. D.)

1. Mass Optimal Solutions of Some Variable Endpoint Trajectory Problems. Proc. of the Southeastern Symposium on Missiles and Aerospace Vehicles Sci. 1966, v. I, Amer. Astronaut. Soc. 1967, pp. 33-1—33-12.

Охочимский Д. Е., Энеев Т. М.

1. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Успехи физ. наук, 1957, вып. 1а, т. LXIII, стр. 5—32.

Пайнс (Pines S.)

1. Constants of the Motion for Optimum Thrust Trajectories in a Central Force Field. AIAA J., 1964, v. 2, № 11, pp. 2010—2014.

Пауэрс, Тэпли (Powers W. F., Tapley B. D.)

1. Canonical Transformation Applications to Optimal Trajectory Analysis. AIAA J., 1969, v. 7, № 3, pp. 394—399.

Пельтье (Peltier J. P.)

1. Some Impulsive Rendezvous Trajectories and Their Possible Optimality. AIAA J., 1972, v. 10, № 4, pp. 440—446.

Пензо (Penzo P. A.)

1. An Analysis of Free-Flight Circumlunar Trajectories. AIAA Paper, № 63-404, 1963.

Перко (Perko L. M.)

1. Interplanetary Trajectories in the Restricted Three-Body Problem. AIAA J., 1964, v. 2, № 12.

Петерсен (Petersen N. V.)

1. Orbital Assembly and Launch for Lunar Operations. Aerospace Eng., 1962, v. 21, № 8, p. 41.

- Петре (Petrains J. J.)
 1. Correction Factor for Initial Acceleration Effects on Impulsive Mission Requirements. ARS J., 1962, v. 32, № 6, pp. 957—959.
- Петухов С. В.
 1. Об одном способе приближенного решения уравнения Эйлера — Ламберта. КИ, 1966, т. IV, вып. 4, стр. 641.
- Пирс, Стэндиш (Pierce D. A., Standish E.)
 1. Numerical Aspects of the Family of Earth-to-Moon Trajectories with Consecutive Collisions. AIAA Paper, № 65-86, 1965.
- Пономарев В. М.
 1. Теория управления движением космических аппаратов. «Наука», М., 1965.
- Понтрягин Л. С.
 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, М., 1961.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
 1. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961.
- Пруссинг (Prussing J. E.)
 1. Illustration of the Primer Vector in Time-Fixed Orbit Transfer. AIAA J., 1969, v. 7, № 6, pp. 1167—1168.
- Причард (Pritchard E. B.)
 1. Velocity Requirements and Re-Entry Flight Mechanics for Manned Mars Missions. JSR, 1964, XI—XII, v. 1, № 6.
- Пуанкаре А.
 1. Избранные труды, т. II. «Наука», М., 1972.
- Пфеффер (Pfeffer J.)
 1. Terminal Guidance for Soft Lunar Landing. Guidance & Control of Aerospace Vehicles, 1963, pp. 563—587.
- Райдер Л. (Rider L. A.)
 1. Необходимая характеристическая скорость для перелета между некопланарными круговыми орбитами с помощью импульсов тяги. Ракетная техника, 1961, № 3, стр. 78—86.
- Репик, Бубак, Чэпел (Repic E. M., Boobac M. G., Chapel F. G.)
 1. Aerobraking as a Potential Planetary Capture Mode. JSR, 1968, v. 15, № 8, pp. 921—926.
- Ричардс П. Б. (ред.)
 1. Современное состояние механики космического полета. «Наука», М., 1969.
- Роббинс (Robbins H. M.)
 1. An Analytical Study of the Impulsive Approximation. AIAA J., 1966, v. 4, № 8, pp. 1417—1423.
- Розен (Rosen J. B.)
 1. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1960, III, v. 8, № 1, pp. 181—217; 1961, XII, v. 9, № 4, p. 514—532.
- Розенбаум, Уилверт, Уонг Ченг (Rosenbaum R., Willwerth R. E., Wang Cheng)
 1. Powered Flight Trajectory Optimization for Lunar and Interplanetary Transfer. Astr. Acta, 1966, v. 12, № 12, pp. 159—168.
- Розеноэр Л. И.
 1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 10, стр. 1320—1333; № 11, стр. 1441—1458; № 12, стр. 1561—1578.
- Росс (Ross S. E.)
 1. A Systematic Approach to the Study of Nonstop Interplanetary Round Trips. Adv. in Astronaut. Sci., v. 13, Amer. Astronaut. Soc., N. Y., 1963.

2. Синтез траекторий для исследования межпланетных операций. В сб. «Современное состояние механики космического полета». «Наука», М., 1969, стр. 11 — 39.
 1. Руководство по орбитальным полетам (Orbital Flight Handbook. Space Flight Handbooks, v. 1), NASA SP-33, 1964.
 1. Руководство по полетам к Луне (Lunar Flight Handbook. Space Flight Handbooks, v. 2), NASA, SP-34, 1964.
 1. Руководство по межпланетным полетам (Planetary Flight Handbook. Space Flight Handbooks, v. 3), NASA, SP-35, 1964.
- Рэгзак (Regzac R. V.)
1. Two-Vehicle Mars Stopover with Rendezvous, JSR, 1966, v. 3, № 6.
- Рэгзак, Тайтус (Ragsac R. V., Titus R. R.)
1. Analysis of Planetary Flyby Missions. Advances in Astronaut. Sci., 1963, v. 13, pp. 572—586.
- Санномия, Нисикава (Sannomiya N., Nishikawa J.)
1. Minimum-Impulse Orbital Transfer with a Fixed Time. Proc. of the 8th Intern. Symposium on Space Techn. & Sci., Tokyo, 1969, pp. 329—339.
- Седов Л. И.
1. Орбиты космических ракет в сторону Луны. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 5, 1960.
- Сейферт Г. (ред.)
1. Космическая техника. «Наука», М., 1964.
- Серджеевски (Sergeeyevsky A. B.)
1. Circumjovian Powered and Free-Return Trajectories. JSR, 1969, IV, v. 6, № 4, pp. 390—395.
- Смит (Smith G. C.)
1. The Calculation of Minimal Orbits. Astr. Acta, 1959, v. 5, № 5, pp. 253 — 265.
- Снайдер, Тэйлор (Snider, Taylor)
1. An Analysis of Lunar Injection Parameters and Their Effects upon the Characteristics of Entry into the Earth's Atmosphere. AAS Preprint 62 — 26.
- Соловьев Ц. В., Тарасов Е. В.
1. Прогнозирование межпланетных полетов. «Машиностроение», М., 1973.
- Старк (Stark H. M.)
1. Optimum Trajectories between Two Terminals in Space. ARS J. 1961 v. 31, № 2, pp. 261—263.
- Субботин М. Ф.
1. Курс небесной механики, т. II. ОНТИ, Л.— М., 1937.
 2. Введение в теоретическую астрономию. «Наука», М., 1968.
- Сушкевич А. К.
1. Основы высшей алгебры. ОНТИ, М.— Л., 1937.
- Тайтус (Titus R. R.)
1. Powered Flybys of Mars. Astr. Acta, 1965, v. 11, № 5, pp. 294—308.
 2. Early Manned Exploration of the Planets. AIAA Paper, № 70 — 59, 1970. См. также JSR, 1971, v. 8, № 5, pp. 517—522.
- Тинг Лу (Ting Lu)
1. Optimum Orbital Transfer by Impulse. ARS J. 1960, v. 30, № 11.
 2. Optimum Orbital Transfer by Several Impulses. Astr. Acta, 1960, v. 6, № 5, pp. 256—265.
- Томпкинс Ч. Б. (Tompkins Ch. B.)
1. Методы быстрого спуска. В кн. «Современная математика для инженеров», под ред. Э. Ф. Беккенбаха, ИЛ, М., 1958, гл. 16, стр. 441—472.
- Троицкий В. А.
1. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, стр. 668—679.
 2. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.

3. Оптимальные процессы колебаний механических систем. «Машиностроение», Л., 1976.
- Тр о с с (Tross C.)
1. Lunar Vehicle Orbit Determination. ARS J., 1962, v. 32, №4.
- Т ю р и н г (Thüring B.)
1. Zwei Specielle Mond Einfang-Bahnen in der Raumfahrt um Erde und Mond. Astr. Acta, 1959, v. V, F. 3/4.
- У а й л д Д. Дж.
1. Методы поиска экстремума. «Наука», М., 1967.
- У и л л и с (Willis E. A.)
1. New Class of Optimal Interplanetary Trajectories with Specified Trip Time. AIAA Paper, № 65 — 66, 1965.
- У и л с о н (Wilson S. W.)
1. A Multiple — Impulse Orbital Transfer Departure Technique for Manned Interplanetary Mission. AIAA Paper, № 69-126, 1969.
- У н г р о у Р. К. (Wingrove R. C.)
1. Динамика входа в атмосферу планет. В сб. «Современное состояние механики космического полета», «Наука», М., 1969, стр. 125—161.
- У и т т е к е р Е. Т.
1. Аналитическая динамика. Гостехиздат, М.— Л., 1937.
- У о л л э с (Wallace R. A.)
1. Trajectory Analysis of a 1975 Mission to Mercury via an Impulse Flyby of Venus. AIAA Paper, № 68—113, 1968.
- У о л т о н, М а р ш а л, К а л п (Walton J. M., Marschal C., Culp R. D.)
1. Synthesis of the Types of Optimal Transfers between Hyperbolic Asymptotes. AIAA J., 1975, v. 13, № 8, pp. 980—988.
- У о н г (Wang K.)
1. Estimate of Effect of Large Thrust on Hohmann-Type Transfers. ARS J., 1962, v. 32, № 4, pp. 642—645.
- У о н г, А н д е р с о н (Wong J. L., Anderson)
1. A Preliminary Study of Spacecraft for Manned Mars Orbiting and Landing Missions. SAE Paper, № 857B, 1964.
- У э б б (Webb E. D.)
1. Three — Impulse Transfer from Lunar Orbits. AAS Paper, № 66 — 134, 1966.
- Ф е р т р е г т (Vertregt M.)
1. Interplanetary Orbits. JBIS, 1958, v. 16, № 6 (79), pp. 326 — 354.
- Ф и н ч (Finch Th. W.)
1. Aerodynamic Braking Trajectories for Mars Orbit Attainment, JSR, 1965, VII — VIII, v. 2, № 4, pp. 497—500.
- Х а н т ц х е (Hantzche E.)
1. Earth — Moon — Earth Trajectories. Astr. Acta, 1973, v. 18, № 4, pp. 241—252.
- Х а р т м а н Ф.
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Мир», М., 1970.
- Х а с с, Х э й м е р, М е й е р (Huss C. R., Hamer H. A., Mayer J. P.)
1. Parameter Study of Insertion Conditions for Lunar Missions Including Varing Trajectory Conciderations. NASA TR R-122, 1961.
- Х е д л и Дж.
1. Нелинейное и динамическое программирование. «Мир», М., 1967.
- Х е л г о с т а м (Helgostam J. F.)
1. The Requirements for Efficient Mars Launch Trajectories. JSR, 1964, v. 1, № 5, pp. 539 — 544.
- Х ё л к е р, Б р а н д (Hoelker R. F., Brand N. J.)
1. Survey and Classification of Earth — Moon Trajectories Based on Newly Discovered Properties. AIAA Paper, № 63-150, 1963.

2. Mapping the Course for the Moon Trip. *Astronautics & Aeronautics*, 1964, v. 2, № 2.
- Хёлкер, Зилбер (Hoelker R. F., Silber R.)
 1. The Bi-Elliptical Transfer between Coplanar Circular Orbits. *Advances in Ballistic Missile and Space Technology*, v. 3, Pergamon Press, 1961, pp. 164 — 175; «*Planetary and Space Sci.*», v. 7, July, pp. 161 — 175.
- Хемпел (Hempel P. R.)
 1. Representation of the Lagrangian Multipliers for Coast Periods of Optimum Trajectories. *AIAA J.*, 1966, v. 4, № 4.
- Хиллер (Hiller H.)
 1. A Generalized Study of Two-Dimensional Trajectories in Earth — Moon — Space, *Astr. Acta*, 1962, v. VIII, F2-3.
 2. Entry into Elliptic Orbits Round the Moon. *Planetary and Space Sci.*, 1963, v. 11, Febr., pp. 111 — 124.
- Холл, Дитрич, Тирнэн (Hall B. A., Dietrich R. G., Tiernan K. E.)
 1. A Minimum Fuel Vertical Touchdown Lunar Landing Guidance Techniques. *AIAA Paper*, № 63-345, 1963.
- Холлистер (Hollister W. M.)
 1. Mars Transfer Via Venus. *AIAA Paper*, № 64-647, 1964.
 2. Predicted Launch Dates for Mars Transfer Via Venus. *JSR*, 1966, v. 3, № 6.
 3. Periodic Orbits for Interplanetary Flight. *JSR*, 1969, v. 6, № 4.
- Холлистер, Меннинг (Hollister W. M., Menning M. D.)
 1. Interplanetary Orbits for Multiple Swingby Missions. *AIAA Paper*, № 69-931, 1969.
- Холлистер, Прассинг (Hollister W. M., Prussing J. E.)
 1. Optimum Transfer to Mars Via Venus. *Astr. Acta*, 1966, v. 12, № 2.
- Хорнер (Horner J. M.)
 1. Optimum Impulsive Orbital Transfers between Coplanar Orbits. *ARS J.*, 1962, v. 32, № 7, pp. 1082 — 1089.
- Хэзелриг (Hazelrigg G. A.)
 1. Optimal Interplanetary Trajectories for Chemically Propelled Spacecraft. *JSR*, 1971, v. 8, № 9, pp. 915 — 919.
- Хэзелриг, Лайон (Hazelrigg G. A., Lion P. M.)
 1. Analytical Determination of the Adjoint Vector for Optimum Space Trajectories. *AIAA Paper*, № 69-916, 1969. См. также *JSR*, 1970, v. 7, № 10, pp. 1200 — 1207.
- Хэйнес (Haynes G. W.)
 1. The Calculus of Variations Approach to the General Optimum Impulsive Transfer Problem. *Proc. of the 12 th Intern. Astr. Congr.*, v. I; 1961, X.
- Хэнделсмен (Handelsman M.)
 1. Optimal Free - Space Fixed Thrust Trajectories Using Impulsive Trajectories as Starting Iteratives. *AIAA J.*, 1966, v. 4, № 6, pp. 1077 — 1082.
- Хэнли, Лайон (Hanley G. M., Lyon F. J.)
 1. The Feasibility of Spacecraft Deceleration by Aerodynamic Braking at the Planet Mars. *AIAA Paper*, № 64-479, 1964.
- Хьюз, Номикос (Hughes J. V., Nomicos G. N.)
 1. One-Way Reconnaissance to Mars. *Adv. in Astronaut. Sci.* v. 6, 1961, p. 744.
- Цандер Ф. А.
 1. Проблемы полета при помощи реактивных аппаратов. Оборонгиз, М., 1961.
- Цянь Сюэ-сень
 1. Техническая кибернетика, ИЛ, М., 1956.

Чарный В. П.

1. Об оптимальных траекториях со многими импульсами. В сб. «Искусственные спутники Земли», АН СССР, 1963, вып. 16, стр. 257 — 264.
2. Об изохронных производных. В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, АН СССР, 1963, стр. 226 — 237.
3. Некоторые свойства линеаризованной системы уравнений возмущенного движения и их применение к движению центра масс космического аппарата. КИ. 1965, т. 4, вып. 6, стр. 839 — 853.

Чеботарев Г. А.

1. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны. Бюлл. ИТА АН СССР, 1957, № 7 (80), стр. 487 — 492.
2. Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», М., 1965.

Чепмен Д. Р. (Chapman D. R.)

1. An Analysis of the Corridor and Guidance Requirements for Supercircular Entry into Planetary Atmospheres. NASA TR NR-55, 1959.
2. Приближенный аналитический метод исследования входа тел в атмосферы планет. ИЛ, М., 1962.

Чикала, Мьееле (Cicala P., Miele A.)

1. Generalized Theory of the Optimum Thrust Programming for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft. ARS J., 1956, v. 26, № 6, pp. 443 — 455.

Шванцгер А.

1. Исследование траекторий свободного облета Луны. Сб. обз. и перев. ин. период. литер. «Механика», 1965, № 5 (93), стр. 26 — 43.

Шебехели (Szebehely V. G.)

1. A Group of Earth — to — Moon Trajectories with Consecutive Collision. Celestial Mechanics and Astronautics. Academic Press, 1964.

Шебехели, Пирс (Szebehely V. G., Pierce D. A.)

1. Advantages of Regularization in Space Dynamics. AIAA J., 1967, v. 5, № 8, pp. 1520 — 1522.

Шехтер (Schechter H. B.)

1. Impulsive Interplanetary Transfers for Prescribed Launch Date. ARS J., 1962, v. 32, № 11, pp. 1716 — 1723.

Шилов А. А.

1. О некоторых особенностях одноимпульсного перехода космического аппарата на новую орбиту. Инж. журнал, 1964, т. IV, вып. 4, стр. 619 — 625.

Штернфельд А.

1. Искусственные спутники Земли. Гостехиздат, 1957.

Шэпланд, Прайс, Хирк (Shapland D. J., Price D. A., Hearke L. F.)

1. A Configuration for Reentry from Mars Missions Using Aerobraking. AIAA Paper, № 64-480, 1964.

Эггерс, Уонг (Eggers A. J., Wong Th. I.)

1. Motion and Heating of Lifting Vehicles During Atmosphere Entry. ARS J., 1961, v. 31, № 10, pp. 1364 — 1375.

Эдельбаум Т. Н. (Edelbaum T. N.)

1. Some Extensions of the Hohmann Transfer Maneuver. ARS J., 1959, v. 29, № 11, pp. 864 — 865.
2. How Many Impulses? AIAA Paper, № 66-7, 1966; Astronautics & Aeronautics, 1967, v. 5, № 11, pp. 64 — 69.
3. Minimum Impulse Transfer in the Vicinity of a Circular Orbit. JAS, 1967, III — IV, v. 14, № 2, pp. 66 — 73.
4. Оптимальные задачи в механике полета маневрирующих космических аппаратов. В сб. «Современное состояние механики космического полета», «Наука», М., 1969, стр. 162 — 178.

5. Optimal Nonplanar Escape from Circular Orbits. AIAA J., 1971, v. 9, № 12, pp. 2432—2436.
- Экенвилер (Eckenwiler M. W.)
1. Closed-Form Lagrangian Multipliers for Coast Periods of Optimum Trajectories. AIAA J., 1965, v. 3, № 6, pp. 1149—1151.
- Эльясберг П. Е.
1. Определение орбиты по двум положениям. Сб. «Искусственные спутники Земли», АН СССР, 1962, вып. 13, стр. 3—22.
 2. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. «Наука», М., 1965.
- Эндрас (Andrus J. F.)
1. Linear and Higher Order Corrections to Optimum Multiimpulse Trajectories. AIAA Paper, № 70—1014, 1970.
- Энеев Т. М.
1. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления, КИ, 1966, т. IV, вып. 5, стр. 651.
- Энтони, Сазакки (Anthony M. L., Sasaki F. T.)
1. On Some Single-Impulse Transfer Problems. AIAA Paper, № 63—421, 1963.
 2. Analytical Determination of Optimal Escape with Constant Thrust. Astr. Acta, 1971, v. 16, № 3, pp. 173—179.
- Эрике К. (Ehricke K.)
1. Orbit Theory. Cislunar Orbits. Proceed. of Symposia in Appl. Math., 1959, v. X, pp. 48—74.
 2. Zur Auswahl von Flugbahnen für bemannte Raumfahrzeuge zu den Planeten Mars und Venus. Raketentechnik und Raumfahrzeuge, 1960, I — III, B. IV, H. 1, S. 16.
 3. A Systems Analysis of Fast Manned Flights to Venus and Mars. Trans. ASME, J. of Eng. for Ind., 1961, II, v. 83, Ser. B, № 1, pp. 1—28.
 4. Mission Analysis of Fast Manned Flights to Venus and Mars. Adv. in Astronaut. Sci. 1963, v. 13, pp. 470 — 545.
 5. Космический полет, т. I. Окружающие условия и небесная механика. Физматгиз, М., 1963.
 6. Interplanetary Maneuvers in Manned Helionautical Mission. Methods in Astrodynamics & Celestial Mech., Progr. in Astr. & Aeron., v. 17, 1966, pp. 325—352.
 7. Космический полет, т. II. Динамика, ч. I (главы 1—4). «Наука», М., 1969.
 8. Космический полет, т. II. Динамика, ч. II (главы 5—9). «Наука», М., 1970.
- Эскобал П. (Escobal P. R.)
1. Методы определения орбит. «Мир», М., 1970.
 2. Методы астродинамики. «Мир», М., 1971.
- Эснин, Руз (Asnin S. K., Roos D. G.)
1. Mission Design and Navigation for a 1977—1978 Venus Swingby/Mercury Orbiter. JSR, 1973, v. 10, № 10, pp. 631—637.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Принятые сокращения: ИС — искусственный спутник, ИСЗ — искусственный спутник Земли, ИСВ — искусственный спутник Венеры, ИСМ — искусственный спутник Марса, КА — космический аппарат. Тире (—) заменяет опущенное слово, содержащееся в предшествующем понятии, знак равенства (=) заменяет группу слов, обозначающих характер перелета и выделенных выше курсивом.

Алгоритм регулярный 15
Аномалия истинная 59, 621
Апоцентр 197
Аппроксимация импульсная 16, 573
Аргумент широты 504, 547, 621
Астродинамика 8, 13

Блисса формула 166, 712, 715

Вариация полная («вариация точки») 79
— функционала 78, 86, 103, 108, 584
Вейерштрасса — Эрдмана условия 50
Вектор вариаций фазовых координат 79, 711

— сопряженных переменных 48, 62, 79
— — на неоптимальной траектории 116 и д.

— —, преобразование 128, 713
— фазовых координат (фазовый) 77, 710

Вектор-функция влияния возмущений 715
Возвращение с Луны и орбиты ИСМ в атмосферу Земли 552 и д.

Время ожидания 572, 604, 606
— заданное 644

— перелета оптимальное при жесткой встрече 359

Встреча спутников жесткая 232, 356 и д.
— — мягкая 234, 406 и д.

— — в однородном поле 408
Выведение 320 и д.

— с поверхности Марса на орбиту ИСМ 578

Выход на орбиту ИС 414

Гамильтониан 90, 583, 715

—, постоянство его 50, 85, 715

Гипербола 60, 98, 104, 141

— вырожденная 214

— планетоцентрическая 414, 416

— селеноцентрическая 512, 561

Годограф гелиоцентрической скорости на сфере влияния Земли 632

Гомановский перелет 149, 198, 616, 624, 638

Дальность угловая перелета 207

— — Земля — Луна 511

— — Земля — планета 606

— — Луна — Земля 510

— — планета — Земля 606

Даты старта и прибытия, приближенное определение 620, 623

Движение кеплерово см. Траектория кеплерова

— селеносферическое 532, 562

Деформация орбиты ИСМ в течение времени ожидания 602

Долгота восходящего узла 504, 547, 621

— перицентра 59, 621

— планетоцентрическая 414, 422

— селеноцентрическая 563

Задача вариационная Майера 47

— внешняя 29, 36, 449

— внутренняя 28, 36, 412, 545

— двух тел 25

— — ограниченная 58 и д. (см. также Траектория кеплерова)

—, обратная импульсной аппроксимации 76, 165

— *n* тел ограниченная 25

Изменение вектора скорости при маневрировании в тонком слое 369 и д.

Импульс скорости 16, 68

— — бесконечно малый 104

— — гелиоцентрический промежуточный 687, 700 и д.

— — на орбите ИС в точке перехода 422 и д., 432

— — на сфере влияния 463

— — — Марса 691 и д.

— — — планеты 579, 599

— —, точка приложения 83, 176

Инвариантность планетоцентрического движения 448

Интеграл площадей 59

— энергии 59

Классификация траекторий облета Луны 537—543

Коллинеарность векторов конечного промаха 376 и д.

Лагранжа функция 246, 259, 273, 288, 307
Линеаризация 16, 349

Лоудена условия оптимальности 72, 89

Луна, движение по орбите 500

— орбита и физические характеристики 524

Майера задача вариационная 47

- Маневр аэродинамический см. Торможение в атмосфере
- гравитационный у планеты 576—577 (см. также Облет)
- Маршрут перелета 206—207
- — Земля — Луна — Земля 508
- — Земля — планета — Земля 604
- Матрица направляющих косинусов 422
- переходная 161, 712
- фундаментальная 161, 711
- решенный 712
- Метод неопределенных множителей Лагранжа 81, 246, 273, 288, 307, 615
- приближенный 15
- сращения асимптотических разложений 28, 39
- — кеплеровых траекторий (метод сфер влияния) 28
- — сфер влияния (МСВ) 16, 28, 499, 500, 560
- — модифицированный (ММСВ) 16, 42, 499, 500, 533, 534, 561, 574, 578, 599, 627, 628
- Механика космического полета 13
- Многообразие конечное 46, 77, 102
- начальное 46, 77
- Модели приближенные гравитационного поля 27
- Модель движения планет плоская круговая 574, 601
- — — пространственная эллиптическая 574, 618, 632
- — — однородная центрального поля тяготения 327
- «Модельная» постановка задачи 14
- Наблюдение КА при облете Луны 534, 540, 543
- поверхности Луны при облете Луны 540, 543
- Наклонение орбиты к плоскости экватора 504, 524, 543, 547
- — — эклиптики 621, 636
- Несимметричность оптимальных перелетов Земля — Венера — Земля 657
- — — Земля — Марс — Земля 645
- — — при торможении в атмосферах планет 630, 660
- — — четырехимпульсных перелетов орбита ИСЗ — орбита ИСМ — орбита ИСЗ 641, 643
- Облет Венеры 575
- Луны 42, 497 и д.
- — близкий 498
- — — с возвращением в атмосферу Земли 497 и д., 522
- — — динамически симметричный 522
- — — симметричные траектории 496, 514
- — — без излома плоскости перелета 514, 516
- — — с изломом плоскости перелета 514, 518
- — — сравнение классов траекторий 537
- — — Марса 575
- — — и Венеры одновременный 576
- Однородность поля притяжения 16
- Определение орбиты по двум положениям 216
- Оптимальность строгая локальная 89
- — — схемы перелета 88, 111 и д., 485 и д., 588
- — — плоского орбита ИСЗ — орбита ИСМ 683
- Оптимальность, условия Лоудена 72, 89
- — — необходимые 77, 82 и д., 90
- — — при кеплеровой траектории, проходящей через бесконечность 101
- Оптимизация 14
- движения в ньютоновском поле тяготения (конечная тяга) 45 и д.
- ориентации плоскости орбиты ИСЗ 440
- — — перелетов с конечной тягой 164, 176 и д.
- — — схемы перелета 676
- — — —, крайние задачи 472 и д.
- — — орбита ИС — сфера влияния 468
- — — орбита ИСЗ — орбита ИС планеты 676
- Орбита гомановская см. Перелет гомановский
- кеплерова см. Траектория кеплерова
- — — круговая, векторы s и p 137, 139
- — —, оптимальная высота 434 и д.
- — — Луны 499
- Ориентация в пространстве плоскости орбиты ИС планеты 676, 678, 681
- Ось апсид, маневр для ее поворота 285
- Парабола 59, 98, 104
- Параметр фокальный 59
- — —, маневр для его изменения 283
- Перелет биэллиптический 74, 152
- — — близкий к гомановскому 653
- — — в точку с околокруговой орбиты 231, 258 и д.
- — — гомановский 149, 198, 213, 616, 624, 638
- — — Земля — Венера — Земля 638
- — — Земля — Марс — Земля 638
- — — Земля — Венера 75
- — — Земля — Венера — Земля быстрый 654
- — — — длительный 653
- — — Земля — внешняя планета — Земля 610, 612
- — — Земля — внутренняя планета — Земля 613
- — — Земля — Марс 75, 198, 202, 205, 208
- — — Земля — Марс — Земля 575
- — — —, близкий к гомановскому 651
- — — — быстрый 641
- — — — длительный 643, 654
- — — — с заданной скоростью входа в атмосферу Земли 634
- — — с торможением в атмосферах планет 660
- — — — в атмосфере Земли при ограничении скорости входа 630, 661
- — — — — Марса 631
- — — — — при ограничении скорости входа 662
- — — — — трехимпульсный быстрый 660
- — — — — длительный 660
- — — Земля — Луна 36, 39, 81, 494 и д.
- — — Земля — орбита ИСМ — Земля трехимпульсный 577
- — — Земля — планета двухимпульсный 631
- — — с торможением в атмосфере планеты 629
- — — —, нормальный к плоскости и эклиптики 624
- — — Земля — планета — Земля 572 и д.
- — — — — двухимпульсный 629
- — — — — трехимпульсный 629
- — — — — четырехимпульсный 608, 629
- — — Земля — Юпитер 576
- — — импульсный, современное состояние теории 72
- — — Луна — Земля при облете 526

- Перелет между орбитами в тонком слое, у которых в какой-то момент совпадают векторы в скорости 401
- — — ИС двух планет 202
 - — — одноимпульсный 203, 215
 - — — околорядовыми близкими 232
 - — — компланарными 272 и д.
 - — — некомпланарными 286 и д.
 - — — вырожденный 306
 - — — произвольными пересекающимися в однородном поле 392, 394
 - — — радиальный 213
 - межпланетный с возвращением см.
 - Перелет Земля — планета — Земля
 - многоимпульсный — линейаризованный 242
 - — — оптимальный 74 и д.
 - орбита ИС — сфера влияния 467
 - орбита ИСЗ — Луна 543
 - орбита ИСЗ — орбита ИСЛ 546—552
 - орбита ИСЗ — орбита ИСВ — Земля 576
 - орбита ИСЗ — орбита ИСВ — орбита ИСЗ четырехимпульсный 652
 - орбита ИСЗ — орбита ИСМ 580
 - —, оптимизация (задача I) 580, 584
 - орбита ИСЗ — орбита ИСМ — Земля 582
 - — с торможением в атмосфере Земли, оптимизация (задача III), 582, 586, 628
 - орбита ИСЗ — орбита ИСМ — орбита ИСЗ оптимизация (задача II) 581, 585
 - — четырехимпульсный 636
 - орбита ИСЗ — орбита ИС планеты — Земля 573
 - — с минимальным числом импульсов 601
 - орбита ИСМ — орбита ИСЗ 581
 - поверхность Луны — атмосфера Земли 552
 - с конечной тягой оптимальный 164 и д., 176 и д.
 - сфера влияния — орбита ИС 412
 - — в плоскости круговой орбиты 429
 - — двухимпульсный 455 и д.
 - — одноимпульсный 422 и д.
 - —, орбита ИС круговая 423, 455
 - —, — — эллиптическая 422
 - — по нормаль к плоскости круговой орбиты 430
 - сфера влияния Луны — круговая орбита ИСЛ 545
 - Переменные сопряженные 48, 62
 - —, степень гладкости 50
 - — фазовые, степень гладкости 50
 - Перигей условной орбиты возврата с Луны 510, 526, 552, 558
 - Период синодический 606, 637
 - Периоды движения пар Земля — Марс и Земля — Венера 622
 - Периселеный, наблюдение с Земли при облете Луны 534, 540
 - Перицентр 197
 - Планеты, орбиты и физические характеристики 636
 - Плоскость перелета Земля — Луна, Луна — Земля 507, 510
 - — Земля — планета 624—625
 - — управления 339, 340
 - Поворот оси апсид (маневр) 285
 - Подлет северный к Земле при возврате от Луны 557
 - Подход вариационный 18, 19, 70, 71, 153, 157
 - Подход экстремальный 17, 19, 70, 71, 157 160
 - Подъем вертикальный внутри селеносферы 556
 - Полуось большая эллипса 60
 - действительная гиперболы 60
 - Поле тяготения ньютоновское 44, 94, 98, 123, 154, 196
 - — однородное 17, 327, 330, 376
 - — центральное 328, 384, 404
 - — произвольное 53, 77, 105, 158
 - — стационарное 54
 - — «точное» 25
 - Полуэллипс гомановский см. Перелет гомановский
 - Потенциал гравитационный 25
 - Пояс астероидов 617
 - Правила пересчета параметров линейаризованных некомпланарных перелетов 289
 - Правило пересчета 189, 249
 - — углов для траектории в системе Земля — Луна 515, 525, 547, 554
 - построения активных участков 177
 - Принцип максимума Понтрягина Л. С. 48, 74, 227, 320, 341, 345
 - окаймленная 98, 102
 - Продолжительность перелета Земля — планета — Земля 572, 606
 - Противостояние Земли и Марса 648, 649
 - Прямая управления 339, 344, 369
 - Радиус сферы влияния 36
 - Радиус-вектор планетоцентрический 36
 - селеноцентрический 513
 - Разложение асимптотическое внешнее 28
 - — внутреннее 28
 - Решение Лодена сопряженной системы 123
 - — —, особенности в апсидальных точках 126 и д.
 - — приближенное 15
 - Сечение коническое 59
 - Сила возмущающая 30
 - Симметрия планетоцентрического движения 448 и д.
 - Синтез траектории 8, 14
 - — облет Луны 499, 509 и д.
 - — поверхность Луны — атмосфера Земли 552 и д.
 - Система координат естественная 90
 - — планетоцентрическая 414
 - —, связанная с гиперолой 415
 - — прямоугольная декартова 53, 129 и д.
 - — селеноцентрическая 504
 - — сферическая 90
 - — цилиндрическая 56, 90, 129
 - — уравниваний в вариациях 711
 - — сопряженная 712
 - — — в гравитационном поле 79
 - — — — ньютоновском 48, 79, 123 и д.
 - — — для линейаризованных управлений движения 62, 227
 - Скорость вторая космическая 627
 - круговая 45
 - первая космическая 524, 627, 637
 - планетоцентрическая 36, 412, 449
 - — на сфере влияния 619, 630
 - радиальная 60
 - селеноцентрическая на сфере влияния Луны 502, 511, 545, 554

