# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МЕХАНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1983

УДК 531/534(091)

**Исследования по истории механики.** М. Наука, 1983. 288 с

В сборник вошли статьи по общим вопросам истории механики и по истории отдельных ее направлений. В его подготовке участвовали известные специалисты по механике и ее истории.

Сборник открывается статьей, посвященной исследованиям по истории механики за последние 25 лет. Следующие статьи объединены в четыре раздела и посвящены истории механики сплошной среды, теории механизмов и машин, общей механики и взаимосвязи механики и физики. Отдельная статья посвящена научной, общественной и педагогической деятельности академика А. Ю. Ишлинского.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

А. Т. ГРИГОРЬЯН

Редактор-составитель

кандидат физико-математических наук

Н. М. МЕРКУЛОВА

И $\frac{1703010000-247}{042(02)-83}$ 142-83, III

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник открывается статьей, посвященной исследованию развития истории механики. Историография науки — необходимое звено в изучении ее истории. Однако до сих пор подобные исследования ведутся недостаточно. Первая статья сборника восполнит в определенной степени этот пробел в истории механики. Новое исследование охватывает работы по истории механики как в СССР, так и в других странах за последние 25 лет.

Весь материал сборника объединен в разделы, соответствующие традиционным направлениям развития классической механики. Внутри каждого раздела соблюдается в основном хронологический принцип расположения статей. Первый раздел «Общая механика» начинается с изложения истории одного из основных понятий механики — скорости. Это понятие имеет важное значение для развития познания реальных процессов, поэтому всегда осознавалась необходимость его точного определения. В статье «История определения понятия скорость» дан обстоятельный обзор определений этого понятия в основном в XVII—XX вв.

Новым в историко-научной литературе является исследование развития механики нити в России. В статье, посвященной этом вопросу, рассматриваются работы отечественных ученых в XIX в.

Интересен также вопрос развития теории интегральных инвариантов механики. В сборнике рассмотрены различные случаи применения метода интегральных инвариантов к решению задач механики, выявлена его роль в развитии механики до 70-х годов нашего века.

В сборник включена статья о современном состоянии одной из важнейших задач динамики твердого тела — построения точных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе. В этой задаче все точные решения принадлежат отечественным ученым, однако сколько-нибудь полного обзора достигнутых в этой области результатов нет. Этот пробел частично и восполняет предлагаемая статья.

Раздел «Теория механизмов и машин» начинается с предыстории механики машин, исследуются главным образом результаты механиков средневекового Востока. При разборе античных сочинений, посвященных «простым машинам», особый интерес вызывает анализ сочинения псевдо-Аристотеля «Механические проблемы» (по неопубликованному переводу этого сочинения И. Н. Веселовским).

Логическим продолжением этого исследования является статья, где прослежен процесс становления динамики машин. Здесь выделены три динамические проблемы науки о машинах в XVIII в. — теория движителя, учение о движении машин, проблема регулирования хода машин. Работа ученых и механиков-практиков привела к созданию основ динамики машин.

Заключает этот раздел статья по истории второго направления учения о машинах — кинематики машин. В ней излагается история исследований по кинематике изменяемых систем, и главным образом исследований основоположника этого направления теории механизмов и машин — П. О. Сомова.

В 1983 г. исполняется 200 лет со дня смерти Леонарда Эйлера — одного из основоположников современной механики. Известно, насколько широк круг научных проблем, поставленных и решенных ученым. В одной из статей дается краткий очерк жизни и научной деятельности ученого в области механики. В другой дан анализ процесса формирования эйлеровой гидродинамики. Рассматриваются работы преимущественно второй четверти XVIII в. Автор пользуется главным образом опубликованными на эту тему в 1954—1968 гг. работами К. Трусделла. Эти работы на русском языке освещены недостаточно, и их рассмотрение привлечет внимание историков механики. Далее публикуется статья о работах Эйлера в области гидравлики, в которой излагаются его исследования по гидравлике с привлечением современных представлений и понятий. Последние две статьи включены в раздел «Механика сплошной среды».

В одной из статей этого раздела читатель может познакомиться с забытой работой (1891 г.) отечественного ученого П. А. Шиффа по теории упругости.

Две другие статьи этого раздела посвящены истории аэродинамики. В самом начале XX в. закончилось ее формирование как науки. На последующие десятилетия приходится период развития основных теоретических ее положений и методов аэродинамического эксперимента. Основополагающие работы в аэродинамике принадлежат отечественным ученым — Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину и немецкому ученому Л. Прандтлю. В первой статье, рассматривающей историю развития аэродинамики, изложены классические результаты Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, подчеркиваются приоритетные вопросы. Вторая статья посвящена достижениям советских аэродинамиков за первые пятнадцать лет существования Советского государства. В ней показано, что уже в начале 20-х годов определились основные научные направления развития аэродинамики в нашей стране и были получены важные результаты для развития аэродинамики в целом.

Раздел «Механика и физика» посвящен проблеме взаимосвязи механики и физики — проблеме, имеющей важное значение при решении задач в этих областях науки. Эта проблема непосредственно связана как с развитием механики, так и с развитием физики. В сборнике рассматриваются классические работы Галилея, Эйлера, Бошковича, Эйнштейна, Эренфеста. Начинается раздел с изложения истории галилеевского принципа относительности — фундаментального принципа механики. Далее публикуется статья, в которой приводится анализ пространственно-временных представлений Р. И. Бошковича и А. Эйнштейна. Заключает этот раздел исследование трехмерности пространства и его проявления в фундаментальных законах механики и физики. В связи с этим рассматривается работа П. Эренфеста, которой до сих пор не уделялось должного внимания историками науки.

В 1983 г. исполнилось 70 лет со дня рождения выдающегося советского ученого-механика А. Ю. Ишлинского. Научные исследования А. Ю. Ишлинского относятся к общей механике, теории упругости и пластичности, сопротивления материалов, теории автономного управления и инерциальных систем, прикладной математике и механике. А. Ю. Ишлинский широко известен также и как историк науки. Он — автор многих обзоров по истории механики и о значении современной механики для развития науки в целом и ее приложений к практике. В статье, посвященной А. Ю. Ишлинскому, излагаются его основные научные результаты, общественная и педагогическая деятельность.

Считаем своим приятным долгом выразить благодарность профессорам М. М. Гернету, В. Г. Демину, Г. М. Идлису, А. А. Космодемьянскому, Н. И. Левитскому, И. В. Новожилову, Б. А. Розенфельду, Н. А. Слезкину, Б. И. Спасскому, Б. Н. Фрадлину, Г. С. Шапиро за ценные замечания и полезные советы по различным статьям сборника и по сборнику в целом.

УДК 531/534(091)

*А. Т. Григорьян, Г. К. Михайлов*

# ВКЛАД ПОСЛЕДНИХ ДВАДЦАТИ ПЯТИ ЛЕТ В РАЗВИТИЕ ИСТОРИИ МЕХАНИКИ[1]

1. В последние десятилетия все отчетливее проявляется интерес к истории науки, стремление осмыслить пути и закономерности развития науки на основании изучения ее прошлого. История науки стала важным элементом самосознания современной науки. Ее роль прекрасно охарактеризовал при открытии проходившего в Москве в 1971 г. XIII Международного конгресса по истории наук президент Академии наук СССР академик М. В. Келдыш. «Для правильного понимания процесса развития науки, стимулирования развития ее важнейших направлений, — сказал он, — громадное значение имеет изучение истории науки, ее генезиса, тенденций ее развития, ее связей со всей историей общества. Вместе с тем история науки воскрешает перед нами захватывающую картину проникновения человеческого гения в глубочайшие тайны мироздания, величайшие проявления человеческого интеллекта и примеры борьбы во имя истины» [1].

Интерес ученых к истории науки в целом проявляется издавна. В далеком прошлом, когда дифференциация наук была еще незначительна, интерес к их развитию был тесно связан с общими гносеологическими проблемами. Однако вслед за выделением отдельных самостоятельных наук появляются и исследования, посвященные их развитию. Так, в XVIII в. мы находим ряд сочинений по общей истории математики. С середины XIX в. появляются монографии по истории физики (отметим, в частности, многотомный труд Н. А. Любимова [2]). Одновременно в прошлом веке выходили в свет и обширные сочинения по всеобщей истории естествознания. Само собой разумеется, что освещение исторического развития в старых работах давалось в значительной степени фактографически и сообразно с гносеологическими представлениями того времени. Но при этом происходило систематическое накопление историко-научного материала, который ожидал своего правильного критического анализа.

Что касается механики, то обостренный интерес к ее началам зародился еще в середине XVIII в. Это было вызвано труд-

[1] Расширенный текст доклада, прочитанного на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Алма-Ате 1 июня 1981 г.

ностью формального определения основных понятий ньютоновой динамики и возможностью построения механики на основе различных конкурирующих принципов. Все это обусловило живое обсуждение основных принципов механики, в том числе и в историческом плане. Дополнительным толчком послужило также открытие в XIX в. закона сохранения энергии, тесно связавшего механику с различными разделами физики.

В результате во второй половине прошлого века появилось несколько больших сочинений, посвященных историко-критическому анализу общих принципов механики (X. Клейна, Е. Дюринга и Э. Маха, если указывать их в хронологическом порядке). Однако эти целенаправленные работы нельзя рассматривать как освещающие всю историю механики в целом. К тому же они опирались в основном лишь на классический материал.

В конце XIX и в первой половине XX в. было опубликовано довольно большое количество исследований, посвященных деятельности отдельных ученых-механиков и некоторым специальным вопросам истории механики. Значительное внимание уделялось по-прежнему истории общих принципов, и в частности вариационных принципов механики. Однако обобщающие работы по истории механики отсутствовали. В качестве самостоятельного нового направления, заложенного в истории механики в этот период, можно указать только одно, а именно изучение средневековой механики, открытой П. Дюэмом для современного исследователя лишь в начале XX в., после трехвекового ее забвения.

Первая книга под названием «История механики», в какой-то мере охватывающая все развитие этой науки, вышла в свет только в 1950 г. Это объемистый том французского историка механики Р. Дюга [3], включающий материал от античной науки до волновой и квантовой механики (четыре года спустя была опубликована «Механика в XVII веке» того же автора [4]).

Таким образом, история механики в отличие от истории математики, астрономии и физики не имеет уходящих в далекое прошлое традиций.

В Советском Союзе работы по истории науки стали появляться с середины 20-х годов. Большое внимание было уделено тогда внедрению в нее марксистско-ленинской методологии. Разработка основ диалектического и исторического материализма дала в руки ученым новый метод изучения природы. Такие замечательные публицистические работы, как «Анти-Дюринг» (1878 г.) Ф. Энгельса и «Материализм и эмпириокритицизм» (1909 г.) В. И. Ленина, явились образцом творческого подхода к изучению философии естествознания. Еще в предисловии ко второму изданию «Анти-Дюринга» Энгельс ставил задачу показать, что «в природе сквозь хаос бесчисленных изменений прокладывают себе путь те же диалектические законы движения, которые и в истории господствуют над кажущейся случайностью событий» [5]. Однако Энгельс не успел реализовать эти намеченные им в середине 70-х годов XIX в. планы. Незавершенная рукопись его «Диалектики природы» увидела свет только в 1925 г. [6]. Такая же судьба постигла и задуманное В. И. Лениным сочинение по теории материалистической диалектики. Подготовительные материалы к этому ненаписанному сочинению Ленина были опубликованы в виде так называемых «Философских тетрадей» лишь в 1929—1930 гг. [7].

Примечательно, что одним из первых больших советских методологических исследований по истории науки была доложенная в 1931 г. на II Международном конгрессе по истории наук в Лондоне работа члена-корреспондента Академии наук СССР Б. М. Гессена «Социально-экономические корни механики Ньютона» [8].

Работы по истории науки были начаты в СССР в созданной в 20-х годах в Академии наук Комиссии по истории знаний (первоначально под председательством академика В. И. Вернадского). Весной 1932 г. эта комиссия была преобразована в Институт истории науки и техники, развивший с момента своей организации активную научно-исследовательскую и редакционно-издательскую деятельность. В этом институте сотрудничали такие крупные советские ученые, как С. И. Вавилов, А. Н. Крылов. Институт существовал до начала 1938 г., а в конце 1944 г. на смену ему в Академии наук СССР был создан Институт истории естествознания (с 1953 г. Институт истории естествознания и техники), который вновь развернул широкий фронт работ по истории науки в стране.

С Институтом истории естествознания и техники АН СССР связано и большинство выполненных в нашей стране исследований по истории механики. Среди других наших научных центров и школ в области истории механики можно отметить Московский университет и украинскую школу истории механики.

Необходимо отметить, что организационное оформление истории науки происходило во второй четверти XX в. и в международном масштабе. В 1929 г. в Париже был созван I Международный конгресс по истории наук и создан постоянно действующий Международный комитет по истории наук, преобразованный позже (в 1935 г.) в Международную академию истории наук. С тех пор международные конгрессы по истории наук созывались регулярно (кроме военных лет).

После второй мировой войны (в 1947 г.) был создан Международный союз истории наук, объединившийся в 1956 г. с Международным союзом логики, методологии и философии наук в единый Международный союз истории и философии наук. С 1956 г. в этот союз вошли и советские ученые. Надо отметить высокий авторитет советских историков науки в этих международных организациях. Достаточно сказать, что президентом Международной академии истории наук в 1965—1968 гг.

был историк математики профессор А. П. Юшкевич, а президентом Международного союза истории и философии наук в 1978—1981 гг. — профессор А. Т. Григорьян.

Отдельных работ по истории механики за последние 25 лет опубликовано во всем мире свыше 2000, и дать их сколько бы то ни было полный анализ в кратком обзоре практически невозможно. Ниже рассмотрены в основном только два представляющиеся наиболее интересными цикла зарубежных исследований по истории механики и дан краткий обзор основных работ, выполненных в нашей стране. При этом приложенная библиография содержит, как правило, лишь самостоятельные монографии, а отдельные статьи включены в нее только выборочно.

**2.** В течение последних 25 лет был внесен фундаментальный вклад в ньютоноведческие исследования. Как это ни странно, первое критическое издание «Начал» И. Ньютона вышло в свет лишь в 1972 г. [9, 10], причем оно было подготовлено не англичанами, а А. Койрэ (Франция) и Б. Коэном (США). В этот же период в Англии было предпринято фундаментальное издание «Переписки» Ньютона [11] и его «Математических рукописей» [12], общую редакцию которых возглавили соответственно Х. У. Тернбулл (а после его смерти Дж. Ф. Скотт, А. Р. Холл и Л. Тиллинг) и Д. Уайтсайд. Для уяснения процесса создания «Начал» особенно важен шестой том «Математических рукописей» (1974 г.), содержащий тексты первоначальных набросков Ньютона 1684—1686 гг. Анализу становления ньютоновой механики были специально посвящены относящиеся к рассматриваемому периоду многочисленные исследования А. Р. Холла и М. Боус-Холл [13], Р. С. Уэстфолла [14], Дж. Херивела [15].

Любопытно, что рукописное наследие Ньютона привлекло пристальное внимание ученых только во второй половине нашего века, хотя значительная его часть была передана Кембриджскому университету в так называемой Портсмутской коллекции еще сто лет тому назад. Коллекция эта, хранившаяся у потомков великого англичанина (внучатая племянница Ньютона была замужем за сыном первого графа Портсмутского), содержит обширную переписку Ньютона, экземпляры «Начал» с личной правкой автора, свыше 1000 страниц заметок по тексту «Начал», ставшую теперь широко известной «Черновую книгу» («Waste-Book») с первыми записями Ньютона по динамике и многое другое. Краткий каталог Портсмутской коллекции был опубликован еще в 1888 г., но в силу его лаконичности и отсутствия в нем точных формулировок он не привлек тогда должного внимания. Восходящие еще к концу XIX в. разговоры о необходимости подготовки критического издания «Начал» реализовались лишь в середине 50-х годов, когда А. Койрэ и Б. Коэн приступили к своей работе, завершившейся в 1972 г. (А. Койрэ скончался в 1964 г.).

К П. Дюэму и его школе восходит интерес к изучению формирования тех или иных научных представлений не только в процессе общего исторического развития науки, но и в творчестве отдельных ученых. В этом плане большие усилия ньютоноведов были направлены на попытки реконструкции процесса выработки Ньютоном его системы механики, сразу появившейся в практически завершенном виде в «Началах» в 1687 г. Тщательный анализ рукописей позволил довольно надежно заключить, что уже в 1665—1666 гг. молодой Ньютон опирался на закон Галилея $s \sim t^2$, естественно обобщенный им на действие произвольной силы (хотя четкого определения последней у него тогда и не было), а также на знание механики Декарта. Испытывая отвращение к картезианской философии, Ньютон тем не менее заимствовал у Декарта правильное представление о принципе инерции и ложное представление о центробежных силах. Элементы кинематики не причиняли Ньютону никаких серьезных трудностей, и в одной из ранних заметок этого же времени он дает определение скорости для произвольного графика зависимости пути от времени через наклон касательной, вполне адекватное аналитическому определению $ds/dt$. Однако в дальнейшем Ньютон отказался от использования каких-либо элементов аналитической геометрии (не в знак ли протеста против Декарта?), и мы находим в «Началах» классический синтетический метод древних, задержавший дальнейшее развитие механики по крайней мере на полвека. В задаче об упругом соударении тел Ньютон сразу понял необходимость рассмотрения алгебраической суммы количеств движения. Совокупность представлений о соударении тел и законах инерции и количества движения привела его к понятию силы (хотя в рукописях эта линия четко и не прослеживается).

Остановимся подробнее лишь на одном месте из недавно изученных ранних исследований Ньютона. Интересен его первый подход к началам динамики — рассмотрение простейшего криволинейного движения, а именно движения по окружности [15]. В отличие от Декарта, непосредственно рассматривавшего вращаемый на шнурке камень, Ньютон отталкивается от прямолинейного движения и анализирует сначала движение шарика в полом круговом цилиндре, со стенками которого шарик упруго соударяется.

Пусть шарик, двигаясь со скоростью $v$, описывает в круге изображенную на рис. 1 ломаную, четырежды ударяясь о стенку цилиндра за время одного полного оборота. Тогда при каждом соударении изменение количества движения равно $mv\sqrt{2}$ (заметим, что понятие массы здесь у Ньютона не вводится), а общее изменение количества движения за время одного полного оборота составляет $\Delta mv = 4mv\sqrt{2}$. Отношение этой суммы к собственному количеству движения шарика $4\sqrt{2}$ равно отношению описываемого шариком пути $4R\sqrt{2}$ к радиусу круга $R$. Из чисто геометрических соображений легко установить, что это свойство сохраняется и при увеличении числа соударений шарика с цилиндром, когда он описывает в круге любой правильный многоугольник. Всегда $\Delta mv/mv = L/R$, где $L$ — периметр описываемого шариком многоугольника. При неограниченном увеличении числа сторон многоугольника траектория шарика стремится к окружности, а рассматриваемое отношение принимает в пределе значение $2\pi$. Таким образом, за время одного

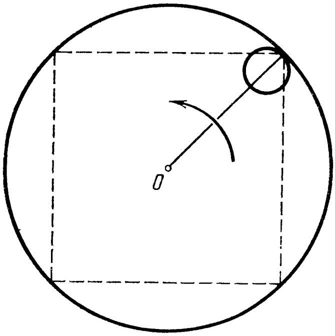


*Рис. 1*

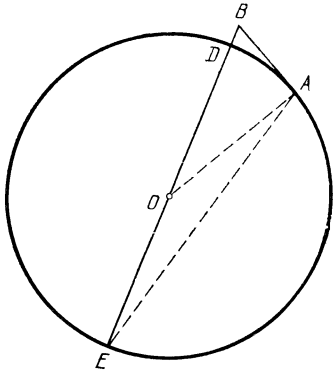


*Рис. 2*

обращения шарика по окружности ($T = 2\pi R/v$) общее изменение количества движения составляет $2\pi mv$.

Ньютон не говорит здесь прямо о центробежной силе, но фактически оценивает ее, анализируя прямолинейный путь, который совершил бы шарик при непрерывно оказываемом на него за счет изменения количества движения воздействии. Согласно правилу Галилея, для неравномерного движения вдоль прямой (восходящему, собственно говоря, к мертонской школе) $S = {}^1/_2\ VT$, и, стало быть, шарик прошел бы за время полного оборота под рассматриваемым воздействием путь

$$S = \frac{1}{2}(2\pi v)\,\frac{2\pi R}{v} = 2\pi^2 R. \tag{1}$$

Это соотношение Ньютон получает и прямо из сопоставления движений шарика вдоль окружности и по инерции вдоль касательной к ней (рис. 2). Из геометрии известно, что $BE/BA = BA/BD$. Рассматривая малые дуги $DA$, Ньютон заменяет эту пропорцию на $2R/DA = DA/DB$. Согласно обобщенному закону Галилея ($s \sim t^2$),

$$S/DB = (2\pi R/DA)^2, \tag{2}$$

и из приведенного отношения следует, что $S = 2\pi^2 R$. В современной терминологии это значит, что ускорение шарика в рассматриваемом Ньютоном мысленно прямолинейном движении $a = v^2/R$ (поскольку $a = 2S/T^2$). В «Началах» эти рассуждения Ньютона нашли скромное место в виде второй половины «поучения» к предположению IV первой книги.

Получив способ оценивать центростремительные силы, Ньютон попытался, по-видимому, тогда же (в 1666 г.) сопоставить силу тяжести на поверхности Земли с силой тяготения, необходимой для удержания Луны на ее орбите (эту силу он определил из закона обратной пропорциональности квадрату расстояний). Однако не исключено, что использованные им исходные числовые данные привели его к неудовлетворительному соответствию результатов и именно это вызвало разочарование и повлекло тогда отказ от дальнейшей разработки основ небесной механики. Во всяком случае, около пятнадцати лет Ньютон вовсе не возвращался к вопросам механики, посвятив себя в 70-х годах целиком оптике, теологии и алхимии[2]. К подготовке «Начал» он приступил, как хорошо известно, лишь в середине 80-х годов в связи с дискуссией с Р. Гуком и благодаря инициативе Э. Халли (Галлея).

Здесь невозможно разбирать ньютоноведческие исследования рассматриваемого периода по существу. (Некоторые нетрадиционные взгляды на «Начала» Ньютона будут упомянуты, впрочем, в следующем разделе обзора.) Отметим попутно лишь еще два справочных издания общего характера [17, 18].

3. Еще один цикл работ по истории механики, вполне четко определившийся за последние 25 лет, относится к развитию механики сплошной среды. Надо заметить, что подавляющее большинство предшествующих историко-научных исследований было посвящено становлению принципов динамики материальной точки и механической системы и только попутно затрагивало задачи механики жидкости и деформируемого твердого тела. К 50-м годам относятся, правда, две книги по истории преимущественно инженерных аспектов этих разделов механики — это «История науки о сопротивлении материалов» С. П. Тимошенко [19] и «История гидравлики» Х. Рауса и С. Инса [20]. Однако серьезное внимание к развитию основ механики сплошной среды было привлечено главным образом американским ученым-механиком К. Трусделлом. Он приобрел вкус к историческим исследованиям под влиянием своего учителя П. Ф. Немени (которому принадлежит посмертно опубликованный очерк развития гидродинамики [21]) и в начале 50-х годов был приглашен к подготовке томов «Полного собрания трудов» Л. Эйлера, содержащих сочинения по механике жидкости и газа. Трусделл увлекся сначала подлинными трудами Эйлера, затем тщательно изучил связанные с ними работы XVIII и начала XIX в. и вскоре приобрел репутацию одного из ведущих историков механики. Оставаясь оригинальным ученым, активно работающим в области трудных проблем нелинейной механики сплошной среды и вопросов ее общего обоснования, он придал своеобразный стиль и своим историческим исследованиям. Для цикла этих публикуемых с 1954 г. работ характерны систематическое изучение первоисточников и основанный на глубоком понимании современной механики историко-критический анализ полученных ранее результатов. Часть работ Трусделла собрана в его «Очерках по истории механики» [22].

По-видимому, не случайно история механики сплошной среды и развитие общей механики за последние полтора века (за исключением, пожалуй, только общих вариационных принци-

[2] Своим работам в области алхимии Ньютон придавал весьма большое значение. По оценкам Р. С. Уэстфолла, общий объем алхимических рукописей Ньютона превышает миллион слов. Он превосходит объем его рукописей по оптике и механике и, по крайней мере, сопоставим с объемом рукописей чисто математического содержания [16].

пов) не входили в традиционный круг историко-механических исследований до последнего времени, когда историей механики стали шире заниматься не только профессиональные историки науки, но и ученые, активно работающие в соответствующих областях современной механики. Это объясняется тем, что для анализа развития более тонких разделов механики недостаточно одного изучения и сопоставления первоисточников, но совершенно необходимо и глубокое понимание (а не только знание!) существа изучаемых вопросов, которое едва ли может быть приобретено попутно с собственно исторической работой.

Трусделл пересмотрел традиционные взгляды на формирование механики в XVIII в.[3], подчеркнув, что в «Началах» Ньютона не была еще создана современная ньютонова механика. Ньютон положил начало формулировке общих принципов механики, но отнюдь не завершил этого дела. У него нет еще общих уравнений движения, нет уравнения момента количества движения, отсутствуют решения для систем, содержащих более двух точек, нет никаких общих подходов к механике сплошной среды. Трусделл акцентрировал внимание на том, что ньютоновы «Начала» содержат гениальные обобщения идей предшественников, принесшие Ньютону великую славу, но в них имеется и много совершенно нового. Это новое относится к задаче трех тел (во второй половине первой книги) и к ряду разделов механики жидкости и газа (вторая книга: упругость воздуха, истечение воды из отверстия, распространение волн по поверхности, колебания жидкости в трубке, сопротивление тел в разреженных и плотных средах, распространение звука, внутреннее трение в жидкости). Однако все это новое, выявляющее в своем изложении почерк гения, не привлекало до последнего времени заслуженного им пристального внимания, хотя почти ничего из этого материала и не вошло в современную механику без переработки.

Известное завершение построения ньютоновой механики Трусделл находит лишь в сочинениях Леонарда Эйлера, противопоставляя их формализованной «Аналитической механике» Ж. Л. Лагранжа[4]. Он привлек внимание к мемуару Эйлера «Открытие нового принципа механики» [24], в котором последний впервые выписал уравнения поступательного движения материальной точки элемента сплошной среды в декартовых

---

[3] В частности, К. Трусделл критиковал Э. Маха за недостаточное знакомство с фактическим ходом развития механики и первоисточниками, а также за непонимание ряда более тонких методологических вопросов.

[4] Изложению историко-механических (как, впрочем, и некоторых других) работ К. Трусделла свойственна высокая эмоциональность и порой острая критика тех или иных положений и взглядов. Так, его резкие суждения об отрицательном влиянии формализма Лагранжа на развитие и понимание основ механики шокируют многих современных ученых-механиков, воспитанных в духе «Аналитической механики» Лагранжа. (Некоторые компромиссные высказывания по этому поводу можно найти у И. Б. Погребысского [23].)

координатах:

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\qquad M\,\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\qquad M\,\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \tag{3}$$

Само собой разумеется, что Эйлер пользовался другой формой записи. При чтении подлинного текста Эйлера и особенно при рассмотрении его формул надо иметь в виду широко применявшуюся тогда систему единиц измерения. За основные единицы в ней приняты всего две: длина $L$ и сила $F$. Масса измеряется в единицах веса (силы), т. е. $[M]=F$. При этом согласно основному уравнению динамики (второму закону Ньютона) ускорения безразмерны и, в частности, принимается, что ускорение свободного падения «в наших краях Земли» $g=1$. Отсюда сразу же должно следовать, что размерность времени $[T]=L^{1/2}$. Однако в середине XVIII в. это следствие получалось из независимого определения скорости и времени. Скорость измерялась корнем квадратным из высоты, при падении с которой из состояния покоя тело приобретает данную скорость; время же измерялось отношением проходимого телом пути к так определенной скорости. Отсюда вытекает, что как скорость, так и время имеют размерность $L^{1/2}$ (это подтверждает еще раз безразмерность ускорения).

Для перехода в формулах, записанных в традиционной системе единиц того времени, к современной системе надо, сохраняя величины сил и расстояний, заменять остальные величины по следующей схеме:

$$\text{Середина XVIII в.}\ \left\{\begin{array}{l}\text{масса} \to mg\\ \text{скорость} \to v/\sqrt{2g}\\ \text{время} \to t\sqrt{2g}\end{array}\right\}\ \text{XX в.}$$

Так, приведенные выше уравнения записаны у Эйлера в следующей форме:

$$2Mddx=Pdt^2,\qquad 2Mddy=Qdt^2,\qquad 2Mddz=Rdt^2. \tag{4}$$

Заменяя здесь массу $M$ на $Mg$ и время $t$ на $t\sqrt{2g}$, получаем современную запись.

В системе уравнений (3) Эйлер и видел аналитическое представление своего нового принципа механики, о котором он писал тогда, что «его можно рассматривать как единственное основание всей механики и других наук, которые трактуют о движении произвольных тел». Современники оценили эту работу Эйлера. Любопытно, что английский перевод извлечения из нее был опубликован в 1754 г. под названием «Об общем и фундаментальном принципе всей механики, на котором должны основываться все другие принципы, относящиеся к движению твердых тел и жидкостей». Однако впоследствии эта работа Эйлера была забыта и координатная запись второго закона Ньютона для элементарного объема и тем более для материальной точки стала казаться всем вполне естественной.

Позже Эйлер установил полную самостоятельность закона сохранения момента количества движения и в своем «Новом методе определения движения твердых тел» (1776 г.) четко указал [25, § 27] на то, что движение тела или элементарного объема определяется шестью уравнениями — тремя динамическими уравнениями поступательного движения и тремя уравнениями моментов. Совокупность этих шести уравнений движения Труселл предложил назвать эйлеровыми законами механики [22, с. 260].

Трусделлу принадлежит анализ становления понятия внутреннего давления в жидкости в трудах Д. и И. Бернулли и Л. Эйлера, а также тщательный разбор гидродинамических исследований Эйлера и его современников Д. и И. Бернулли, Ж. Д'Аламбера и Ж. Л. Лагранжа. Далее он рассмотрел также процесс становления понятия о внутреннем напряжении в сплошной среде, введенного в его современном виде в 1822 г. О. Коши и явившегося основой последующего развития всей механики сплошной среды. Трусделл изучал также развитие ранних кинетических теорий газа в первой половине XIX в. (здесь надо упомянуть также и соответствующие работы С. Браша [26]). Совсем недавно вышла, наконец, вторая монография Трусделла по истории науки «Трагикомическая история термодинамики, 1822—1854 гг.» [27].

Работы К. Трусделла в значительной степени расширили тематику историко-механических исследований и привлекли к ней внимание историков механики [5].

**4**. Остановимся выборочно еще на некоторых отдельных иностранных работах.

К 50-м годам относятся две фундаментальные работы, посвященные механике западноевропейского (и лишь частично арабского) средневековья и содержащие многочисленные тексты. Это сборник «Средневековая наука о весах», подготовленный Э. Муди и М. Клагеттом [29], и «Наука механики в средние века» М. Клагетта [30]. Вторая из этих книг в известной мере завершает определенный этап изучения средневековой западноевропейской механики, начатый еще работами П. Дюэма. (Обе монографии входят в издаваемую под общей редакцией Клагетта серию «Публикации Висконсинского университета по средневековой науке», содержащую и много других важных работ по средневековой механике.) Надо отметить, что в последние десятилетия большее внимание уделяется в истории механики, пожалуй, средневековому Востоку, и в этой области можно ожидать еще много интересных находок.

Исследователей продолжает привлекать становление основных понятий и представлений механики в XVI и XVII вв., большой вклад в изучение которого внес в прошлом А. Койрэ. В 70-х годах в связи с 500-летием со дня рождения Н. Коперника в ряде стран была подготовлена обширная и серьезная

[5] Работы К. Трусделла вызвали некоторую критику со стороны отдельных профессиональных историков науки (см., например, [28]), поскольку Трусделл рассматривает и оценивает все основные исторические результаты прошлого преимущественно с точки зрения нынешней механики и в меньшей степени вникает в личную творческую лабораторию ученых прошлого. Однако такой подход будет, по-видимому, развиваться и далее по мере дифференциации наук и приближения объекта исторического исследования к нашим дням, когда возрастает связь этого объекта с творчеством самого исследователя.

Copernicana. Большой и содержательный сборник был выпущен в эти же годы по случаю 400-летия со дня рождения И. Кеплера [31]. Ряд итальянских работ XVI в. по механике рассмотрен С. Дрейком и И. Драбкиным [32]. Пожалуй, впервые внимательно были изучены интересные работы по механике Т. Харриота [33]. Большое внимание уделялось естествоведческим сторонам творчества Г. Галилея. Отметим, в частности, обстоятельную диссертацию М. Клавелена [34], исследования У. Уизан [35] и У. Уоллеса [36] о ранних работах Галилея и последние книги С. Дрейка [37] и П. Галлуцци [38]. Недавно издан также первый том переписки учеников Галилея (1642—1648 гг.) [39]. Для истории механики и всего естествознания в середине XVII в. большой интерес представляет продолжающееся издание переписки М. Мерсенна, среди корреспондентов которого были такие ученые, как Р. Декарт, Г. Галилей, К. и Х. Гюйгенсы, Ж. Роберваль, Э. Торричелли. Три первых тома этой переписки вышли в свет в 1932—1946 гг., а последующие 11 томов публиковались с 1955 по 1980 г. (ожидаются еще, по-видимому, два тома). Некоторая библиография работ по истории механики в XVII в., относящихся к периоду до 1970 г., имеется в уже упоминавшейся книге Р. С. Уэстфолла [14].

Развитие механики в середине XVIII в. неразрывно связано с творчеством Л. Эйлера. Поэтому для историков механики существенно продолжающееся швейцарское издание «Полного собрания трудов» («Opera omnia») Эйлера. Как известно, 72-томное издание это было начато в форме трех серий еще в 1911 г., и вторая его серия, посвященная механике и астрономии, должна содержать 31 том. Шесть томов этой серии вышли в свет в 1912—1950 гг. и еще 20 томов — с 1954 по 1979 г. В подготовке этих 20 томов принимали участие Ш. Бланк (общая механика), Л. Курвуазье (небесная механика), К. Труcделл (механика сплошной среды) и другие ученые. В настоящее время между Швейцарским естествоведческим обществом и Академией наук СССР достигнута договоренность о совместном издании четвертой серии «Полного собрания трудов» Л. Эйлера, содержащей 15 томов его преимущественно научной переписки и избранных рукописей. Помимо общего аннотированного описания сохранившейся переписки, составившего опубликованный в 1975 г. первый том серии, в 1980 г. вышел том, содержащий переписку Эйлера с А. К. Клеро, Ж. Д'Аламбером и Ж. Л. Лагранжем. Переписка эта, подготовленная к печати под редакцией А. П. Юшкевича и Р. Татона, содержит много интересных для историка механики деталей. Сейчас готовится к публикации переписка Эйлера с семьей Бернулли. Начатое в Швейцарии в 1955 г. издание полного собрания сочинений ученых из семьи Бернулли после смерти инициатора этого дела О. Шписа (1966) пока продвигается очень медленно.

Говоря об истории механики XVIII в., нельзя не обратить внимание на то, что до сих пор, к сожалению, не проведено тщательного изучения научного наследия Ж. Д'Аламбера, вследствие чего место его в истории механики оценивается разными исследователями неоднозначно.

К интересам истории механики близок анализ процесса становления фундаментальных понятий пространства, времени, силы и массы (см., например, книги М. Джеммера [40—42]).

Развитие механики в XIX и XX вв. в целом не представлено сколько бы то ни было крупными историко-научными исследованиями, за исключением, разве, работ, посвященных вариационным принципам общей механики и некоторым вопросам аналитической механики. Это объясняется, по-видимому, как указывалось выше, трудностью совмещения при таких исследованиях надлежащей квалификации историка науки и одновременно ученого-механика. Поэтому в этой области пока происходит только накопление материала: издаются собрания трудов отдельных ученых, а также различного рода сборники и обзоры. В частности, можно отметить много содержательных в историко-научном плане статей из новой «Энциклопедии физики» («Handbuch der Physik»), относящиеся к механике тома которой были опубликованы в 1959—1974 гг. Укажем еще, например, такие издания, как сборник классических работ по турбулентности [43] и своеобразный четырехтомный сборник работ по основам современной нелинейной механики сплошной среды (1945—1961 гг.), выпущенный в 1965 г. [44] и представляющий новую, преимущественно американскую школу в этом разделе механики. Наконец, обратим внимание на многочисленные серии «Annual Review», содержащие часто достаточно широкие научные обзоры.

Из крупнейших зарубежных ученых-механиков, чьи собрания трудов были опубликованы в последние десятилетия, отметим Л. Прандтля [45], Т. Кармана [46, 47], Дж. Тейлора [48], Т. Леви-Чивиту [49]. Примечательно, что единственное собрание избранных трудов А. Эйнштейна издано в СССР на русском языке [50].

Для историков науки представляют интерес также мемуары видных ученых и составленные ими очерки развития науки в области их узкой специализации (хотя надо сказать, что такие материалы требуют всегда критического подхода). Образцом содержательных книг такого рода могут служить, например, книги Т. Кармана — воспоминания [51] и очерки развития аэродинамики [52, 53].

В заключение отметим три разноплановые монографии по общей истории механики, вышедшие в 60-х и 70-х годах. Это, во-первых, изданная в 1976 г. «История принципов механики и их важнейших приложений» И. Сабо [54]. Книга эта не содержит, правда, общего изложения истории механики, но представляет собой систематическую серию очерков развития принципов механики с XVII в., включая не только проблемы общей механики, но и механики жидкости и газа (ей посвящена самая большая глава) и линейной теории упругости. Изложение автора опирается в основном на изучение классических первоисточников, но без широкого привлечения историко-научной литературы, что несколько обедняет эту хорошо и легко написанную книгу.

Еще одна книга была издана в 1966 г. в Румынии. Это очерки «Из истории механики» Шт. Бэлана и И. Иванова [55]. Книга состоит из двух частей: первая (значительно меньшего объема) посвящена общему обзору развития механики, а вторая — началам статики (к первой части, носящей, особенно в конце, в известной мере конспективный характер, приложена обширная, но некритически отобранная библиография).

Наконец, укажем еще очерки «Из истории механики» (от Аристотеля до Гаусса), опубликованные в Болгарии в трех выпусках Б. Долапчиевым и И. Чобановым в 1961—1966 гг. [56].

5. Следующий далее краткий обзор выполненных в СССР исследований по истории механики, в отличие от предшествующего выборочного рассмотрения зарубежных работ, содержит, несмотря на его естественную неполноту, значительно больше ссылок на работы отдельных авторов. Тем не менее и здесь ссылки даются главным образом на самостоятельные книги и брошюры, а отдельные статьи упоминаются лишь эпизодически.

Сначала рассматриваются исследования по истории общей механики, затем по механике сплошной среды и прикладной механике. Отдельно освещены работы, относящиеся к развитию отечественной механики, а рассмотрение более общих работ по истории механики вынесено в конец обзора.

5.1. Среди работ, посвященных античной и средневековой науке, отметим прежде всего изданные в переводе И. Н. Веселовского сочинения Архимеда [57]. В своем комментарии переводчик приложил и соответствующие тексты из Паппа и Герона. Им же были подготовлены переводы птолемеева «Алмагеста» и «Механических проблем» псевдо-Аристотеля, которые до сих пор, к сожалению, еще не опубликованы. Анализ ряда античных источников был проведен А. Т. Григорьяном и В. Ф. Котовым [58], причем все цитаты из древнегреческих текстов для этого очерка были проверены В. П. Зубовым. Последнему принадлежит также ряд исследований по западноевропейской средневековой механике (Буридан, Орем, Николай Кузанский), частично отраженных в его большой работе «У истоков механики» [59], включенной в совместную с А. Т. Григорьяном книгу «Очерки развития основных понятий механики» [60]. Упомянем здесь также опубликованное В. П. Зубовым в 1955 г. фундаментальное издание «Избранных естественнонаучных произведений» Леонардо да Винчи [61].

Механике на средневековом Востоке посвящен, в частности, цикл работ М. М. Рожанской, подытоженный в 1976 г. в ее сводной монографии [62], где рассматривается развитие исследований по механике в IX—XV вв. (теоретическая и прикладная статика, общее учение о движении, кинематика небесных движений). Еще одна книга написана ею на близкую тему совместо с А. Т. Григорьяном [63].

В 1964 г. впервые опубликован полный русский перевод книги Н. Коперника «О вращениях небесных сфер», выполненный И. Н. Веселовским [64]. Этот том содержит также переводы «Малого комментария» и так называемой «Упсальской записи» Коперника, а также сочинения Г. Ретика (1541) с первым изложением коперниковой системы. Из обширной литературы, посвященной 500-летию со дня рождения Коперника, отметим здесь только одну его научную биографию, написанную И. Н. Веселовским и Ю. А. Белым [65] (последнему принадлежит также биография И. Кеплера [66]).

К 400-летию со дня рождения Г. Галилея было приурочено издание двухтомного собрания его сочинений [67], в которое были включены и некоторые новые переводы. Весь комментарий к ранее публиковавшимся трудам Галилея был при этом составлен заново. Одновременно была опубликована серия различных работ о Галилее, включая его научную биографию, подготовленную Б. Г. Кузнецовым [68].

Становлению классической механики в XVII в. посвящен ряд исследований, довольно полно отраженных в общих сочинениях по истории механики, о которых будет сказано ниже. Поэтому сошлемся здесь только на одну из более значительных работ — работу И. Б. Погребысского [69]. Отметим также публикацию научных биографий классиков XVII в. Б. Паскаля и Х. Гюйгенса [70, 71].

Обширная работа велась в СССР по изучению механики XVIII в. Наибольшее внимание было уделено трудам Л. Эйлера. В 60-х годах при ближайшем участии Г. К. Михайлова было составлено научное описание рукописного наследия Эйлера [72], хранящегося в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде, и издан том сохранившихся в рукописях ранних его заметок по аналитическому изложению начал механики [73]. Механике Л. Эйлера и Ж. Л. Лагранжа посвящено уже упоминавшееся исследование И. Б. Погребысского [23], а также ряд других работ (И. Н. Веселовского, А. Т. Григорьяна, А. П. Мандрыки, Г. К. Михайлова, И. Б. Погребысского, Л. С. Полака, М. Ф. Субботина, Л. Н. Сретенского, И. А. Тюлиной, Л. С. Фреймана и др.). Научная биография Лагранжа составлена И. А. Тюлиной [74].

Большой цикл исследований был выполнен по историко-критическому анализу вариационных принципов механики. Этой тематике были посвящены относящиеся к 50-м годам и более ранние исследования Л. С. Полака, завершившиеся публикацией им в 1960 г. сводной монографии [75] и подготовкой большого сборника текстов (от П. Ферма и И. Бернулли до Э. Шредингера и П. Дирака) [76]. Историей вариационных принципов занимались также А. Т. Григорьян, Т. В. Путята, Н. Я. Цыганова. Последняя изучала, в частности, принцип наименьшего принуждения с его модификациями и обобщениями вплоть до работ Н. Г. Четаева и В. В. Румянцева (1966—1977).

Развитие аналитической механики в XIX в. является предметом монографии И. Б. Погребысского «От Лагранжа к Эйнштейну» [77]. В ней автор попытался проследить преемственность развития классической механики от Лагранжа через разработку аналитических методов в трудах Гамильтона, Якоби и Остроградского вплоть до конца XIX в. Отдавая себе отчет в громадности поставленной таким образом задачи, автор сознательно оставил в стороне анализ таких проблем механики, как, например, теория канонических систем (во второй половине века), применения теории непрерывных групп, аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений, теория устойчивости, небесная механика, динамика твердого тела. Вместе с тем автор рассмотрел относящиеся к первой половине века «молекулярные» модели сплошной среды и становление технической (индустриальной) механики.

Ряд исследований был посвящен механике Г. Герца. Отметим, в частности, подготовленное А. Т. Григорьяном и Л. С. Полаком издание русского перевода «Принципов механики» Герца [78], а также научную биографию Герца [79]. Изучалась также история отдельных разделов общей механики — статики, кинематики, механики твердого тела. В этом последнем разделе сошлемся на выполненный в 70-х годах цикл исторических исследований, посвященных выводу уравнений движения твердого тела и движению твердого тела с неподвижной точкой (см. [80]). Из специальных проблем механики, развитие которых подверглось изучению в рассматриваемый период, укажем механику неголономных систем (Б. Н. Фрадлин и др.), механику тел переменной массы (Г. К. Михайлов, И. А. Тюлина), аксиоматику механики (Л. Л. Кульвецас и др.).

Заслуживает специального упоминания издание в 1971—1974 гг. «Избранных трудов» А. Пуанкаре [81], содержащих перевод его «Новых методов небесной механики».

Наконец, обратим внимание на обширную литературу, посвященную истории теории относительности, как специальной (СТО), так и общей (ОТО). Помимо упомянутого уже издания «Собрания научных трудов» А. Эйнштейна [50], были опубликованы многочисленные книги, сборники и отдельные статьи, в том числе приуроченные к 100-летию со дня рождения Эйнштейна. В двух сборниках собраны основополагающие работы, определившие зарождение и становление теории относительности и гравитации [82, 83]. Ряд историко-философских очерков о принципе относительности (и вообще о связи развития механики с эволюцией физических идей) и научная биография Эйнштейна [84] были подготовлены Б. Г. Кузнецовым. Серия собственно исторических исследований, посвященных теории относительности, принадлежит У. И. Франкфурту [85]. Заметим, что в связи с изучением становления основных представлений теории относительности в последнее время привлекают большее, чем раньше внимание труды А. Пуанкаре (СТО) и Д. Гильберта (ОТО).

5.2. Количество выполненных в СССР исследований по истории механики сплошной среды сравнительно невелико. Из изданий классиков укажем дополнительно только довольно старые (1959—1961 гг.) публикации «Гидродинамики» Д. Бернулли [86], исследований по баллистике Л. Эйлера [87] и мемуаров о кручении и изгибе призм А. Сен-Венана [88].

Серия работ по истории аэродинамики и газовой динамики принадлежит Н. М. Меркуловой. Ее монография «История механики газа» [89] включает обширный материал от установления адиабаты Лапласа—Пуассона до открытия адиабаты Югонью—Рэнкина, а также очерк, касающийся некоторых физических аспектов газовой динамики, изучения аэродинамического сопротивления при больших скоростях и работ по до- и сверхзвуковой газодинамике, относящихся уже к концу XIX и началу нашего века.

В тесной связи с общим развитием гидроаэромеханики находятся труды Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, деятельности которых было посвящено ранее много публикаций (В. В. Голубев, А. А. Космодемьянский, Л. С. Лейбензон и др.). Необходимо также отметить многолетнюю систематическую исследовательскую работу, ведущуюся в Научно-мемориальном музее Н. Е. Жуковского под руководством Н. М. Семеновой.

К аэродинамике примыкает ряд задач внешней и внутренней баллистики. А. П. Мандрыке принадлежат многочисленные и хорошо документированные исследования по истории баллистики (преимущественно в XVIII и XIX вв.) и ракетодинамики (в XIX и XX вв.), подытоженные в серии его монографий [90—92]. Недавно им написан также очерк развития аэромеханических лабораторий в Петербурге [93].

Ряд материалов по истории аэродинамики и газовой динамики можно найти в издающихся Советским национальным объединением историков естествознания и техники сборниках «Из истории авиации и космонавтики» (38 выпусков за 1964—1980 гг.). Сама по себе история ракетостроения и космонавтики образует самостоятельную область, относящуюся скорее к истории техники и выходящую за рамки настоящего обзора. Отметим здесь только написанную А. А. Космодемьянским научную биографию К. Э. Циолковского [94], а также представляющие интерес и для историков механики три тома избранных трудов «Пионеры ракетной техники», содержащих основополагающие работы 1891—1945 гг. [95—97].

Серьезных работ по истории механики деформируемого твердого тела выполнено за последние 25 лет очень мало. После опубликования в 1957 г. очерков С. А. Бернштейна по истории методов расчета неразрезных балок, ферм и арок [98] можно отметить, пожалуй, только несколько статей по истории теории упругости и строительной механики в России в XIX в.

Большое внимание, особенно в украинской школе историков механики, уделяется в последние десятилетия изучению истории прикладной механики. А. Н. Боголюбов подготовил библиографию работ по механике машин за два с половиной века (1700—1964 гг.) [99] и опубликовал наряду с рядом специальных исследований две сводные монографии: «История механики машин» [100] и «Теория механизмов и машин в историческом развитии ее идей» [101]. Под руководством А. Н. Боголюбова активно работает в этой области и группа его учеников.

5.3. Естественно, что наибольшее число опубликованных в СССР за последние десятилетия работ по истории механики посвящено развитию механики в нашей стране. Можно определенно сказать, что именно в эти годы было начато и в общих чертах завершено изучение общего развития механики в России, причем связанный с этим обширный круг исследований был проведен главным образом в Институте истории естествознания и техники Академии наук СССР. Еще в 50-х годах А. Т. Григорьян, А. А. Космодемьянский и Л. С. Полак подготовили главы по истории механики для двух первых томов издававшейся тогда этим институтом «Истории естествознания в России». В 1961 г. вышли две книги содержательных очерков по истории механики в России — А. Т. Григорьяна [102], которая представляла первый опыт систематического обзора всего развития исследований по механике в России от основания Петербургской академии наук, и А. А. Космодемьянского [103], в которой были освещены избранные темы (механика XVIII в. и Л. Эйлер, Н. Е. Жуковский, И. В. Мещерский, К. Э. Циолковский и др.).

Большое внимание было уделено в начале рассматриваемого периода изучению научного наследия М. В. Остроградского (Б. В. Гнеденко, А. Т. Григорьян, И. Б. Погребысский, Л. С. Полак и др.). В 1959—1961 гг. было издано его «Полное собрание трудов» [104] и в начале 60-х годов вышел ряд специально посвященных ему работ (см., например, [105, 106]). Тогда же в Парижской академии наук были обнаружены некоторые неопубликованные ранние рукописи Остроградского [107]. В результате всех этих исследований удалось расширить наши представления о фундаментальном вкладе Остроградского в развитие прикладной математики и аналитической механики и окончательно восстановить его приоритет в ряде научных вопросов.

Из русских ученых-механиков XIX и начала XX в., которым было посвящено наибольшее число исторических исследований, надо в первую очередь указать П. Л. Чебышева, Н. Е. Жуковского, С. В. Ковалевскую, А. М. Ляпунова, И. В. Мещерского, К. Э. Циолковского, А. Н. Крылова, С. А. Чаплыгина, С. П. Тимошенко, а также О. И. Сомова, Н. В. Маиевского, В. Л. Кирпичева, Г. К. Суслова, Е. А. Болотова, Я. И. Грдину, П. В. Ворон, ца, И. Г. Бубнова, Л. В. Ассура (конечно, этот список не включает даже всех ученых, которым посвящены самостоятельные исследования). К сожалению, объем обзора не позволяет остановиться на отдельных посвященных им работах или привести сколько бы то ни было представительную библиографию этих работ. Поэтому отошлем только к некоторым опубликованным научным биографиям и снабженным комментариями собраниям трудов ученых-механиков [108—123].

Ряд общих очерков развития механики в России, которые могут помочь ориентироваться в материале, имеется в работах А. Т. Григорьяна [124—126], а также в сводных трудах по истории механики, которые вкратце освещены в следующем (последнем) разделе обзора.

Развитию механики в СССР (после 1917 г.) посвящено также большое количество работ. Были изданы собрания сочинений ряда ученых, имеются очерки об отдельных ученых и научных учреждениях. Что же касается более общих работ, то они делятся в основном на две группы. К одной относятся различные обзоры развития отдельных разделов механики, подготовленные учеными-механиками, не преследовавшими собственно историко-научных целей. Это, например, сборники типа «Механика в СССР за 50 лет» [127] (в первом его томе приложен список обзоров, опубликованных до 1967 г.), «Строительная механика в СССР, 1917—1967» [128] и т. п. К другой группе относятся очерки, подготовленные историками механики (иногда в сотрудничестве с учеными, активно работающими в специальных областях механики). Сюда можно отнести изданный в 1967 г. под редакцией академика А. Ю. Ишлинского юбилейный сборник «Развитие механики в СССР» [129] (он содержит довольно полную библиографию работ по истории механики, опубликованных в СССР до 1967 г.). Опыт собственно исторического очерка представляет собой книга А. Т. Григорьяна и Б. Н. Фрадлина «Механика в СССР» [130]. Надо иметь, конечно, в виду, что составление историко-критических обзоров развития науки, охватывающих период времени, непосредственно примыкающий к моменту их написания, весьма затруднительно в силу очевидных объективных и субъективных причин. Существует даже точка зрения, что эта задача не относится к сфере истории науки [131].

5.4. Наряду с работами, посвященными частным проблемам истории механики, в последние десятилетия были подготовлены и труды более широкого плана. Первую попытку написать систематический курс истории механики (с методологическим уклоном) предпринял в нашей стране Н. Д. Моисеев, читавший в течение ряда лет лекции по этому предмету в Московском университете. Однако он не успел подготовить свою рукопись к печати и его «Очерки развития механики» [132] были опубликованы лишь посмертно в 1961 г.[6] в обработке его учеников И. А. Тюлиной и Е. Н. Ракчеева. Характерным для изложения Моисеева был упор на социально-экономические факторы, в результате чего он считал предметом истории механики изучение ее развития «как общественного явления». На основе «Очерков» своего учителя Тюлина и Ракчеев составили тогда же свое более короткое учебное пособие [134]. Читая много лет лекции по истории механики в Московском университете после Моисеева, Тюлина подготовила недавно книгу «История и методология механики» [135], сохранившую общий стиль и установки Моисеева, но основанную в значительной степени на использовании ряда ее собственных работ.

В 70-х годах появился ряд монографий, посвященных общей истории механики. В 1971 г. вышла книга А. Т. Григорьяна «Механика от античности до наших дней» [136], содержащая серию популярных очерков, охватывающих все развитие механики. В 1974 г. появились «Очерки по истории теоретической механики» И. Н. Веселовского [137], в которых рассматривается история общей механики до начала XX в., а также содержится краткий очерк развития механики сплошной среды (главным образом гидроаэродинамики). В 1972—1975 гг. вышли в свет монографии А. П. Мандрыки [138, 139], специально посвященные эволюции механики в ее взаимосвязи с техникой с древнейших времен до наших дней (в близком к этому аспекту плане написаны и небольшие очерки А. Н. Боголюбова [140, 141]).

Особый интерес представляет опыт создания всеобщей истории механики, предпринятый Институтом истории естествознания и техники АН СССР с привлечением большого авторского коллектива. В результате в 1971—1972 гг. под общей редакцией А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского вышли два тома «Истории механики», посвященные соответственно периодам с древнейших времен до конца XVIII в. [142] и с конца XVIII до середины XX в. [143]. К составлению 23 независимых очерков, вошедших в эти два тома, были привлечены 24 автора, из которых часть не является, вообще говоря, историками механики. Предпринятый опыт оказался в целом удовлетворительным, хотя сравнительно узкая специализация отдельных авторов вызвала неоднородность общего стиля монографии и отсутствие должной стыковки отдельных обзоров. Теперь, спустя почти десять лет, можно трезво оценить достоинства и недостатки этой первой в своем роде монографии и продумать подготовку второго, переработанного ее издания.

Завершая обзор, отметим, что за последние 25 лет история механики вполне сформировалась в самостоятельную науку и заняла прочное место в ряду историко-научных дисциплин.

[6] В 1961 г. вышел также «Очерк развития классической механики» Ф. Д. Бублейникова и Е. Я. Минченкова [133], рассчитанный на широкий круг читателей, изучающих механику в объеме средней школы и интересующихся историей естествознания.

Рамки данного обзора не дали, конечно, возможности коснуться всех исследований по истории механики, выполненных за последние 25 лет и тем более дать их критический разбор. Поэтому текст очерка носит в значительной степени конспективный характер. В связи с этим авторы приносят извинения всем ученым, работы которых по истории механики не оказались упомянутыми в настоящем обзоре или отражены в нем не в должной мере[7].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Келдыш М. В.* Речь.. на открытии XIII Международного конгресса по истории науки.— Вопросы истории естествознания и техники, 1980, № 1.
2. *Любимов Н. А.* История физики. Опыт изучения логики открытий и их истории: В 3-х т. СПб., 1892—1896; Журн. М-ва нар. просвещения, 1897, ч. 310—311.
3. *Dugas R.* Histoire de la mécanique. P.: Dunod, 1950. 651 p.
4. *Dugas R.* La mécanique au XVII$^e$ siècle. P.: Dunod, 1954. 620 p.
5. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч 2-е изд., т. 20, с. 11.
6. *Engels F.* Naturdialektik (в последующих изданиях: Dialektik der Natur).— Арх. Маркса и Энгельса. М.; Л.: Госиздат, 1925, кн. 2. XXXII+ +504 с.— Пер. на рус. яз.: *Энгельс Ф.* Диалектика природы.— Там же. (Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20.)
7. *Ленин В. И.* Философские тетради.— Ленинский сб., 1929, т. 9. 320 с.; 1930, т. 12. 478 с. (Полн. собр. соч., т. 29).
8. *Гессен Б. М.* Социально-экономические корни механики Ньютона. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. 77 с.
9. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica: 2 vol./Ed. A. Koyré, I. B. Cohen. 3rd ed. with variant readings. Cambridge: Univ. press, 1972. XL+916 p.
10. *Cohen I. B.* Introduction to Newton's «Principia». Cambridge: Univ. press, 1971. XXIX+380 p.
11. *Newton I.* The correspondence: 7 vol./Ed. H. W. Turnbull, J. F. Scott, A. R. Hall, L. Tilling. Cambridge: Univ. press, 1959—1977.
12. *Newton I.* The mathematical papers: 8 vol./Ed. D. T. Whiteside. Cambridge: Univ. press, 1967—1981.
13. *Newton I.* Unpublished scientific papers/A selection from the Portsmouth collection, chosen, ed. and transl. by A. R. Hall. and M. B. Hall. Cambridge: Univ. press, 1962. XXI+416 p. (2nd ed., 1978).
14. *Westfall R. S.* Force in Newton's physics. The science of dynamics in the 17th century. L.: Macdonald, 1971. XII+579 p.
15. *Herivel J.* The background to Newton's «Principia». Oxford: Clarendon press, 1965. XVI+338 p.
16. *Westfall R. S.* Newton's marvelous years of discovery and their aftermath: myth versus manuscript.— Isis, 1980, vol. 71, N 256, p. 109—121.
17. *Wallis P., Wallis R.* Newton and Newtoniana, 1672—1975: A bibliography. Folkestone (Kent): Dawson, 1977. XXIV+362 p.
18. *Harrison J.* The library of Isaac Newton. Cambridge etc.: Cambridge Univ. press, 1978. XIV+286 p.
19. *Timoshenko S. P.* History of strength of materials with a brief account on the history of theory of elasticity and theory of structures. N. Y. etc.; McGraw-Hill, 1953. X+452 p.— Пер. на рус. яз.: *Тимошенко С. П.* Исто-


[7] В декабре 1981 г. был опубликован довольно подробный обзор исследований по истории механики, выполненных в СССР за 60 лет (1917—1977 гг.) [144], к которому читатель может обратиться за дополнительными справками.

рия науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Гостехиздат, 1957. 536 с.
20. *Rouse H., Ince S.* History of hydraulics. Iowa Inst. of Hydraulic Res., 1957. XII+269 p. (Dover: 1963).
21. *Neményi P. F.* The main concepts and ideas of fluid dynamics in their historical development.— Arch. Hist. Exact Sci., 1962, vol. 2, N 1, p. 52—86.
22. *Truesdell C.* Essays in the history of mechanics. B. etc.: Springer-Verl., 1968. (XII)+384 p.
23. *Погребысский И. Б.* К истории механики XVIII столетия.— В кн.: Механика и физика XVIII в. М.: Наука, 1976, с. 9—57.
24. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de mécanique.— Mém. Acad. roy. sci. et belles-lettres (Berlin), 1752, t. 6 (1750), p. 185—217 (Opera omnia, 1957, vol. II-5).
25. *Euler L.* Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.— Novi comm. Acad. sci. imp. Petrop., 1776, t. 20 (1775), p. 208—238 (Opera omnia, 1968, vol. II-9).
26. *Brush S. G.* The development of the kinetic theory of gases.— Ann. Sci., 1957, vol. 13, p. 188—198, 273—282; 1958, vol. 14, p. 185—196, 243—255; Amer. J. Phys., 1961, vol. 29, p. 593—605; 1962, vol. 30, p. 269—281.
27. *Truesdell C. A.* The tragicomical history of thermodynamics, 1822—1854. N. Y. etc.: Springer-Verl., 1980. XIII+372 p.
28. *Aiton E. J.* Understanding classical mechanics (C. Truesdell. Essays in the history of mechanics).— Stud. Hist. and Philos. Sci., 1970, vol. 1, N 3, p. 265—273.
29. The medieval science of weights/Ed. E. A. Moody, M. Clagett. Madison: Univ. Wisconsin press, 1952. X+438 p. (2nd print.: 1960).
30. *Clagett M.* The science of mechanics in the middle ages. Madison: Univ. Wisconsin press, 1959. XXIX+711 p. (2nd print.: 1961).
31. Kepler. Four hundred years: Proc. of conf. held in honour of Johannes Kepler. Oxford etc.: Pergamon press, 1975. XX+1034 p. (Vistas in Astronomy; Vol. 18).
32. Mechanics in sixteenth-century Italy. Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo, and Galileo/Transl. and annot. by S. Drake, I. E. Drabkin. Madison etc.: Univ. Wisconsin press, 1969. XII+428 p.
33. *Lohne J. A.* Essays on Thomas Harriot.— Arch. Hist. Exact Sci., 1979, vol. 20, N 3/4, p. 189—312.
34. *Clavelin M.* La philosophie naturelle de Galilée. Essai sur les origines et la formation de la mécanique classique. P.: Colin, 1968. 505 p.
35. *Wisan W. L.* The new science of motion: a study of Galileo's «De motu locali».— Arch. Hist. Exact Sci., 1974, vol. 13, N 2/3, p. 103—306.
36. *Wallace W. A.* Galileo's early notebooks: the physical questions. Notre Dame (Ind.): Univ. Notre Dame press, 1977. XIII+321 p.
37. *Drake S.* Galileo at work. His scientific biography. Chicago: Univ. Chicago press, 1978. XXIII+536 p.
38. *Galluzzi P.* Momento: studi galileiani. Roma: Ateneo e Bizzarri, 1979. XV+435 p.
39. Le opere dei discepoli di Galileo Galilei. Vol. 1. Carteggio 1642—1648/A cura di P. Galluzzi e M. Torrini. Firenze: Giunti Barbera, 1975 [1979]. XLIV+644 p.
40. *Jammer M.* Concepts of space. The history of theories of space in physics. Cambridge (Mass.): Harvard Univ. press, 1954. XVI+196 p. (2nd ed., 1969).
41. *Jammer M.* Concepts of force. A study in the foundations of dynamics. Cambridge (Mass.): Harvard Univ. press, 1957. IX+269 p.
42. *Jammer M.* Concepts of mass in classical and modern physics. Cambridge (Mass.): Harvard Univ. press, 1961. IX+230 p.— Пер. на рус. яз.: *Джеммер М.* Понятие массы в классической и современной физике. М.: Прогресс, 1967. 256 с.
43. Turbulence. Classic papers in statistical theory. N. Y. etc.: Interscience, 1961. VII+187 p.

44. Continuum mechanics: In 4 vol./Ed. Truesdell C. N. Y. etc.: Gordon and Breach, 1965. Vol. 1. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. XVI+218 p..; Vol. 2. The rational mechanics of materials. 436 p.; Vol. 3. Foundation of elasticity theory. 310 p.; Vol. 4. Non-linear elasticity. 263 p.
45. *Prandtl L.* Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik: 3 Bd. B. etc.: Springer-Verl., 1961, XIX+1620 S.
46. *Kármán Th.* Collected works: 4 vol. L.: Butterworths, 1956. Vol. 1. IX+ +531 p.; Vol. 2. 436 p.; Vol. 3. 391 p.; Vol. 4. 480 p.
47. *Kármán Th.* Collected works, 1951—1963. S. l.: Kármán Inst. Fluid Dynamics, 1975. 388 p.
48. *Taylor G. I.* Scientific papers: 4 vol. Cambridge: Univ. press, 1958—1971.
49. *Levi-Civita T.* Opere matematiche: 6 t. Bologna: Zanichelli, 1954—1966.
50. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр.: В 4-х т. М.: Наука, 1965—1967.
51. *Kármán Th.* The wind and beyond. Boston: Little, Brown a. Co, 1967. VI+376 p.
52. *Kármán Th.* Aerodynamics. Selected topics in the light of their historical development. Ithaca: Cornell Univ. press, 1954. IX+203 p.
53. *Kármán Th.* From low-speed aerodynamics to astronautics. N. Y.: Macmillan, 1963. XV+82 p.
54. *Szabó I.* Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. Basel: Birkhäuser, 1976. XV+491 S. (2. Aufl. 1979).
55. *Bălan Şt., Ivanov I.* Din istoria mecanicii. Buc.: Ed. ştiinţ., 1966. 763 p.
56. *Долапчиев Б., Чобанов И.* Из историята на механиката. София: Наука и изкуство, 1961. Вып. 1. От Аристотел до Нютон. 156 с.; 1963. Вып. 2. От Ойлер до Даламбер. 180 с.; 1966. Вып. 3. От Лагранж до Гаус. 141 с.
57. *Архимед.* Сочинения/Пер., вступ. ст. и коммент. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
58. *Григорьян А. Т., Котов В. Ф.* О некоторых вопросах истории античной механики.— Ист.-мат. исслед., 1957, вып. 10, с. 671—765.
59. *Зубов В. П.* У истоков механики.— В кн.: Григорьян А. Т., Зубов В. П. Очерки развития основных понятий механики. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 3—173
60. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 275 с.
61. *Леонардо да Винчи.* Избранные естественнонаучные произведения/Ред., пер., ст. и коммент. В. П. Зубова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 1028 с.
62. *Рожанская М. М.* Механика на средневековом Востоке. М.: Наука, 1976. 324 с.
63. *Григорьян А. Т., Рожанская М. М.* Механика и астрономия на средневековом Востоке. М.: Наука, 1980. 200 с.
64. *Коперник Н.* О вращениях небесных сфер: Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись/Пер. И. Н. Веселовского; Ст. и общ. ред. А. А. Михайлова. М.: Наука, 1964. 654 с.
65. *Веселовский И. Н., Белый Ю. А.* Николай Коперник, 1473—1543. М.: Наука, 1974. 436 с.
66. *Белый Ю. А.* Иоганн Кеплер, 1571—1630. М.: Наука, 1971. 296 с.
67. *Галилей Г.* Избранные труды: В 2-х т. М.: Наука, 1964. Т. 1. 572 с.; Т. 2. 640 с.
68. *Кузнецов Б. Г.* Галилей. М.: Наука, 1964. 327 с.
69. *Погребысский И. Б.* Становление классической механики (XVII в).— В кн.: История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971, с. 83—121.
70. *Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И.* Паскаль, 1623—1662. М.: Наука, 1971. 432 с.
71. *Франкфурт У. И., Френк А. М.* Христиан Гюйгенс, 1629—1695. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 328 с.
72. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. 1. Научное описание. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. 428 с.

73. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. 2. Труды по механике. Ч. 1. М.; Л.: Наука, 1965. 575 с.
74. *Тюлина И. А.* Жозеф Луи Лагранж, 1736—1813. М.: Наука, 1977. 224 с.
75. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. М.: Физматгиз, 1960. 600 с.
76. Вариационные принципы механики: Сб. ст./Ред., послесл. и примеч. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. 932 с.
77. *Погребысский И. Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. Классическая механика XIX века. М.: Наука, 1966. 328 с.
78. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 381 с.
79. *Григорьян А. Т., Вяльцев А. Н.* Генрих Герц, 1857—1894. М.: Наука, 1968. 310 с.
80. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 295 с. (Библиографию по данному вопросу см.: Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой. Библиографический указатель литературы (1749—1979 гг.)/Сост. Л. А. Степанова. Донецк, 1980. 132 с.).
81. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3-х т. М.: Наука, 1971—1974.
82. Принцип относительности: Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. 332 с.
83. Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. М.: Мир, 1979. 592 с.
84. *Кузнецов Б. Г.* Эйнштейн: Жизнь, смерть, бессмертие. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1980. 680 с.
85. *Франкфурт У. И.* Специальная и общая теория относительности: Исторические очерки. М.: Наука, 1968. 332 с.
86. *Бернулли Д.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 552 с.
87. *Эйлер Л.* Исследования по баллистике. М.: Физматгиз, 1961. 591 с.
88. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 519 с.
89. *Меркулова Н. М.* История механики газа (до начала XX века). М.: Наука, 1978. 232 с.
90. *Мандрыка А. П.* Баллистические исследования Л. Эйлера. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958. 187 с.
91. *Мандрыка А. П.* История баллистики (до середины XIX в.). М.; Л.: Наука, 1964. 375 с.
92. *Мандрыка А. П.* Генезис современной ракетодинамики. Л.: Наука, 1971. 216 с.
93. *Мандрыка А. П.* Аэромеханические лаборатории Петербурга. Л.: Наука, 1980. 110 с.
94. *Космодемьянский А. А.* Константин Эдуардович Циолковский (1857—1935). М.: Наука, 1976. 296 с.
95. Пионеры ракетной техники: Кибальчич Н. И., Циолковский К. Э., Цандер Ф. А., Кондратюк Ю. В.: Избранные труды. М.: Наука, 1964. 672 с.
96. Пионеры ракетной техники: Ветчинкин В. П., Глушко В. П., Королев С. П., Тихонравов М. К.: Избранные труды. (1929—1945). М.: Наука, 1972. 796 с.
97. Пионеры ракетной техники: Гансвиндт Г., Годдард Р., Эсно-Пельтри Р., Оберт Г., Гоман В.: Избр. тр. (1891—1938). М.: Наука, 1977. 632 с.
98. *Бернштейн С. А.* Очерки по истории строительной механики. М.: Стройиздат, 1957. 236 с. См. также: *Бернштейн С. А.* Избр. тр. по строительной механике. М.: Стройиздат, 1961, с. 272—448.
99. *Боголюбов А. Н.* Развитие проблем механики машин: Библиография. Киев: Наук. думка, 1967. 291 с.
100. *Боголюбов А. Н.* История механики машин. Киев: Наук. думка, 1964. 464 с.
101. *Боголюбов А. Н.* Теория механизмов и машин в историческом развитии ее идей. М.: Наука, 1976. 467 с.

102. *Григорьян А. Т.* Очерки истории механики в России. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 292 с.
103. *Космодемьянский А. А.* Очерки по истории механики. М.: ВВИА им. Жуковского, 1961. 376 с. (2-е изд. М.: Просвещение, 1964. 456 с.)
104. *Остроградский М. В.* Полн. собр. тр.: В 3-х т. Киев: Изд-во АН УССР, 1959—1961.
105. *Григорьян А. Т.* Михаил Васильевич Остроградский. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 91 с.
106. *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Михаил Васильевич Остроградский, 1801—1862: Жизнь и работа, научное и педагогическое наследие. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
107. *Юшкевич А. П.* О неопубликованных ранних работах М. В. Остроградского.— Ист.-мат. исслед., 1966, вып. 16, с. 11—48.
108. *Артоболевский И. И., Боголюбов А. Н.* Леонид Владимирович Ассур (1878—1920). М.: Наука, 1971. 265 с.
109. *Цыганова Н. Я.* Евгений Александрович Болотов. М.: Наука, 1969. 88 с.
110. *Савин Г. Н., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н.* Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики [посвящается П. В. Воронцу]. Киев: Наук. думка, 1964. 376 с.
111. *Путята Т. В., Фрадлин Б. Н.* Ярослав Иванович Грдина, 1871—1931. М.: Наука, 1970. 112 с.
112. *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская, 1850—1891. М.: Наука, 1981. 312 с.
113. *Путята Т. В., Лаптев Б. Л., Розенфельд Б. А., Фрадлин Б. Н.* Александр Петрович Котельников, 1865—1944. М.: Наука, 1968. 123 с.
114. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений; В 5-ти т. М.: Изд-во АН СССР, 1954—1965.
115. *Мандрыка А. П.* Николай Владимирович Маиевский. М.: Гостехиздат, 1954. 244 с.
116. *Никифорова Т. Р.* Осип Иванович Сомов. М.; Л.: Наука, 1964. 128 с.
117 *Григолюк Э. И.* Степан Прокофьевич Тимошенко (1878—1972).—Науч. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1977, № 47, с. 1—59.
118. *Писаренко Г. С.* Степан Прокопович Тимошенко. Київ: Наук. думка, 1979. 196 с.
119. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Физматгиз, 1971. 808 с.
120. *Тимошенко С. П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 564 с.
121. *Тимошенко С. П.* Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975. 704 с.
122. Сергей Алексеевич Чаплыгин: Материалы к научной биографии.— Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1429. 84 с.
123. *Прудников В. Е.* Пафнутий Львович Чебышев, 1821—1894. Л.: Наука, 1976. 284 с.
124. *Григорьян А. Т.* Эволюция механики в России. М.: Наука, 1967. 168 с.
125. *Григорьян А. Т.* Механика в России. М.: Наука, 1978. 192 с.
126. *Григорьян А. Т.* Механика.— В кн.: Развитие естествознания в России (XVIII — начало XX века). М.: Наука, 1977, с. 67—75, 171—175, 296—318.
127. Механика в СССР за 50 лет: В 3-х т. М.: Физматгиз, 1968—1972. Т. 1. Общая и прикладная механика. 416 с.; Т. 2. Механика жидкости и газа. 880 с.; Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. 480 с.
128. Строительная механика в СССР, 1917—1967. М.: Стройиздат, 1969. 424 с.
129. Развитие механики в СССР/Под ред. А. Ю. Ишлинского. М.: Наука, 1967. 368 с.
130. *Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н.* Механика в СССР. М.: Наука, 1977. 192 с.
131. *Михайлов Г. К.* Современное состояние и задачи истории механики.— В кн: Современные проблемы теоретической и прикладной механики Киев: Наук. думка, 1978, с. 168—185.
132. *Моисеев Н. Д.* Очерки развития механики. М.: Изд-во МГУ, 1961. 479 с.
133. *Бублейников Ф. Д., Минченков Е. Я.* Очерк развития классической механики. М.: Учпедгиз, 1961. 224 с.

134. *Тюлина И. А., Ракчеев Е. Н.* История механики: Уч. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1962. 228 с.
135. *Тюлина И. А.* История и методология механики. М.: Изд-во МГУ, 1979. 284 с.
136. *Григорьян А. Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Наука, 1971. 312 с. (2-е изд., 1974. 480 с.).
137. *Веселовский И. Н.* Очерки по истории теоретической механики. М.: Высш. школа, 1974. 288 с.
138. *Мандрыка А. П.* Эволюция механики в ее взаимной связи с техникой (до середины XVIII в.). Л.: Наука, 1972. 252 с.
139. *Мандрыка А. П.* Взаимосвязь механики и техники (1770—1970). Л.: Наука, 1975. 324 с.
140. *Боголюбов О. М.* Нариси з історії механіки. Київ: Наук. думка, 1974. 192 с.
141. *Боголюбов А. Н.* Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978. 152 с.
142. История механики с древнейших времен до конца XVIII века/Под общ. ред. А. Т. Григорьяна, И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1971. 298 с.
143. История механики с конца XVIII века до середины XX века/Под общ. ред. А. Т. Григорьяна, И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1972. 416 с.
144. *Григорьян А. Т., Рожанская М. М.* Исследования по истории механики в СССР за 60 лет (1917—1977).— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1981, с. 5—36.

# ОБЩАЯ МЕХАНИКА

УДК 531/534(091)

*Л. Л. Кульвецас*

## К ИСТОРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ СКОРОСТИ

Современному механику или физику кажется, что нет ничего легче, чем дать определение скорости — самого фундаментального, наряду со временем, понятия механики, с которого начинается построение всего концептуального аппарата науки о движении. Но часто бывает так, что вещи, кажущиеся простыми и элементарными, в действительности оказываются весьма сложными. Что касается понятия скорости, то еще Р. Декарт подчеркнул его трудность и глубину: «Невозможно сказать что-либо хорошее и прочное касательно скорости, не разъяснив на деле, что такое тяжесть и вместе с тем вся система мира» (цит. по: [1, с. 167]).

Сказать что-либо «хорошее и прочное» о скорости в такой науке, как механика,— это прежде всего дать строгое и адекватное определение этого понятия — определение, которое не отождествляло бы эту физическую величину с другими объектами, не подпадающими под это понятие, например с числом, длиной, отрезком. Если принять это совершенно естественное условие, то приходится констатировать, что на протяжении всего процесса развития механики понятию скорости, несмотря на его кажущуюся элементарность и интуитивность, не было дано такого строгого и адекватного определения.

Чтобы убедиться в истинности этого, на первый взгляд парадоксального, тезиса, нет необходимости начинать исследование с первых этапов эволюции механики: попытки явного определения понятия скорости начинаются сравнительно поздно — лишь в XVII в. До этого в механике определяли, как правило, не саму скорость, а только понятия, связанные с ней: соотношение $>_v$ повышения по скорости одного равномерно движущегося тела другим, соотношение $=_v$ равенства (относительно скорости) двух равномерно движущихся тел, само понятие равномерного движения, отношение $V:v$ скоростей двух равномерно движущихся тел. Историко-критический обзор определений этих понятий можно найти, например, в [2, с. 59—70; 3, с. 74—101, 150—152].

Если же до этой эпохи термину «скорость» и стремились дать какое-то определение, то результатом этих стремлений были лишь качественные, порой даже метафизические дефиниции: скорость подводили под род некоторого аффекта движения — *affectio motus*, или (иногда) *passio motus*, или *perfectio motus*, или *qualitas motus*, или просто *motus*. Таковы определения скорости, данные Дунсом Скоттом [4, с. 261], Альбертом Саксонским [5], Т. Брадвардином [6, с. 118], П. Гассенди [7, с. 579], Т. Гоббсом [8, с. 144] и др.

В настоящей статье (разд. 1—6) анализируются те определения понятия скорости, которые были даны в трудах по механике XVII—XVIII вв. и которые уже служили для их авторов более или менее удовлетворительными посылками при выводе теорем механики. Нас будут интересовать только сами определения скорости и то, что непосредственно относится к ним, т. е. мы ограничимся обзором лишь (некоторой части) *стадии формализации* (см. [9, с. 66]) понятия скорости. Стадии концептуализации и систематизации этого основного понятия кинематики требуют отдельного исследования.

Определения термина «скорость», данные в более поздние эпохи, будут рассмотрены в разд. 7—14.

**1. Трактовка понятия скорости Г. Галилеем.** Великий создатель «новой науки о предмете чрезвычайно старом» Г. Галилей глубоко понимал сущность понятия скорости. Однако, как известно, явного определения этого понятия, как и понятия ускорения, он не дал. Но в Дне третьем «Бесед и математических доказательств» Галилей попытался определить скорость неявно, аксиоматически: термин «скорость», обозначающий для Галилея, как и всех механиков, некоторую величину, входит в его аксиомы III и IV, которые вместе с двумя первыми аксиомами и точным определением равномерного движения поставлены им во главу миниатюрной дедуктивной теории, названной «О равномерном движении» [10, с. 234—238].

Несмотря на старательное изложение, аксиоматическая характеристика скорости, данная Галилеем, далека от полноты. Аксиомы III и IV, взятые вместе, исчерпывающе характеризуют (определяют) лишь соотношение $>_v$ (ср. [2, с. 61]), а этого еще недостаточно для доказательства теорем о равномерном движении, сформулированных автором «Бесед». Так, доказывая теорему II при помощи евклидовой теории пропорций, Галилей существенно опирается на предположение, что если имеются два равномерных движения и за одинаковое время тело в первом движении проходит в $m$ раз большее расстояние, чем во втором, то и скорость первого движения в $m$ раз больше скорости второго движения [10, с. 235—236]. Но это предположение как раз то, что требуется доказать, что утверждается в самой теореме II[1]. Поэтому галилеево доказательство теоремы II ошибочно:

[1] Теорема II гласит [10, с. 236]: «Если тело проходит два расстояния в равные промежутки времени, то эти расстояния относятся между собой как скорости движения».

в нем содержится порочный круг. В свою очередь доказательства Галилеем всех остальных его теорем о равномерном движении (теорем III—VI) основаны на теореме II. Более того, на ту же теорему II (или на теоремы, доказанные с ее помощью) опираются доказательства и целого ряда теорем следующего раздела кинематики Галилея, названного им «О естественно-ускоренном движении» (таковы, например, теоремы II, IV—X).

Таким образом, галилеевы теории равномерного и естественно-ускоренного движения, несмотря на всю их важность, воздвигнуты на еще непрочном, неразработанном основании.

Если теорию равномерного движения, изложенную в «Беседах», можно легко «исправить», переведя теорему II в разряд аксиом или определений и не силясь сконструировать явное определение самого термина «скорость», то в следующей за ней теории равномерно ускоренного движения без такого явного определения термина «скорость» уже не обойтись, так как приращения скорости $v' - v$, фигурирующие в самой дефиниции равномерно ускоренного движения [10, с. 240], определяются только через операцию $+_v$ сложения скоростей. Свойства же операции $+_v$ не вытекают из свойств соотношения $>_v$ или отношения $V:v$ скоростей, т. е. из свойств понятий, определяемых галилеевыми аксиомами и теоремой II.

Как видим, отсутствие явного определения скорости у Галилея не является маловажным обстоятельством, оно влечет за собой заметные логические недостатки его «новой науки». Многое в ней, касающееся понятия скорости, остается еще в сфере интуиции. Но до тех пор, пока соответствующие интуиции не выражены строго, т. е. не воплощены в непротиворечивую систему определений и аксиом, они могут вызвать сомнения и привести к неверным выводам; примеры этого находим и в известных рассуждениях Сальвиати—Галилея в том же Дне третьем — рассуждениях, касающихся закона возрастания скорости свободно падающего тела (вспомним хотя бы аргументацию Сальвиати [10, с. 245], «опровергающую» пропорциональность скорости свободно падающего тела пройденному пути).

**2. Определение скорости Дж. Валлисом (1669 г.).** Дж. Валлис является, видимо, первым механиком, попытавшимся сформулировать явное определение понятия скорости. Первую главу своей «Механики» [11] он начинает двадцатью двумя определениями, три из которых (IX—XI) касаются понятия скорости.

Термину «скорость» (celeritas) Валлис дает такое определение [11, с. 576]:

«IX. *Скорость есть свойство движения, отражающееся в сравнении длины и времени; а именно, она определяет, какая длина в какое время проходится*».

Затем Валлис определяет «равномерную скорость» (там же):

«X. *Равномерная скорость — та, которая в одинаковое время проходит равную длину*».

Наконец, «бо́льшая скорость» определяется Валлисом следующим образом (там же):

«XI. *Бо́льшая скорость — та, которая в одинаковое время проходит бо́льшую длину или одинаковую длину в меньшее время; притом бо́льшая в таком отношении, в каком указанная длина больше или время меньше. Меньшая (скорость) — наоборот».*

Уже старший современник и настойчивый научный оппонент Валлиса Томас Гоббс указал на слабость определения IX. В работе «Краткий разбор валлисова учения о движении» («Doctrinae Wallisianae de motu ceñsura brevis»), в которой Гоббс резко критикует основы «Механики» Валлиса, об определении IX пишется так [12, с. 54—55]: «Известное (определено.— *Л. К.*) через неизвестное. Ибо слово „скорость" известно всем, а „свойство движения" („affectio motus") — никому... „Отражать свойство" („resultare affectionem") ничего не означает, это — оборот, совершенно непригодный для доказательств. Что же сказано далее: „она определяет, какая длина в какое время проходится" — правильно, но заимствовано из моей книги „De Corpore"..., где я скорость определил как движение, поскольку благодаря ему известная длина проходится в известное время. Эту мою дефиницию, заменив слово „velocitas" на „celeritas" и укоротив, но вместе с тем настолько же затуманив, теперь выдает за свою».

Гоббс, разумеется, прав, когда утверждает, что genus proximum валлисова определения скорости — «свойство (affectio) движения» — термин неизвестный, и поэтому само определение «непригодно для доказательств». Но в определении скорости, данном Валлисом, главной является вторая часть формулировки, начинающаяся словами «а именно»,— она как бы имплицирует первую часть определения. Однако и эта вторая часть не может претендовать на точное определение понятия скорости: расплывчатая фраза «она определяет» (неясно ведь, в каком смысле «определяет») делает дефиницию неадекватной, слишком широкой (если, например, величина $v$ определяет, «какая длина в какое время проходится», то $mv$, где $m$ — любое фиксированное число или фиксированная величина (например, масса), также в некотором точном смысле определит то же самое).

Ясно, что претензии Гоббса на приоритет в адекватном определении термина «скорость» необоснованны: определением Гоббса скорость отождествляется с движением [2]. Но скорость — это не движение, а определенная величина, конструируемая на основании понятия равномерного движения [13, с. 77]. Отождествление Гоббсом скорости и движения можно объяснить тем, что значение слова «скорость» он считал «известным для всех»; потому и определение IX Валлиса он квалифицирует как notum per ignota (см. выше). На самом же деле определение Валлиса есть

[2] «Движение называется скоростью, поскольку благодаря ему известная длина может быть пройдена в известный промежуток времени» [8, с. 144].

определение ignotum per ignota — не следует путать обыденное значение слова «скорость» с его научным значением, которое ведь и требуется определить.

Таким образом, у Валлиса, как и у Галилея, понятие скорости в сущности не определено и многое, касающееся этого понятия, остается и у него в сфере интуиции. Но, в отличие от Галилея, Валлис принимает в качестве определения положение, что для равномерных движений отношение скоростей равно отношению пройденных за одинаковое время путей (или обратному отношению времен, затраченных для прохождения одинаковых путей) (определение XI). Опираясь на это определение, Валлис доказывает ряд теорем о прямолинейном движении (теоремы XXIII—XXX). Доказательства теорем XXIII—XXVI, касающихся равномерного движения, вполне корректны, так как в них он оперирует лишь заранее определенными отношениями скоростей равномерно движущихся тел [3]. Однако отсутствие в валлисовой теории явного и строгого определения понятия скорости, а также понятия мгновенной скорости является причиной — как и в «новой науке» о движении Галилея — ряда логических дефектов этой теории.

Так, доказывая теорему XXVII, Валлис опирается на теорему XXV, гласящую, что для равномерных движений «скорости находятся в отношении, составленном из прямого отношения (пройденных) длин и обратного отношения (соответствующих) времен», т. е. что

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}\frac{t_2}{t_1}. \qquad (1)$$

Но теорема XXVII относится к равномерно ускоренному, а не к равномерному движению, ибо в ней рассматриваются движения тел, происходящие под действием постоянных сил [4]. Конечно, формула (1) верна и для равномерно ускоренных движений ($v_1$ и $v_2$ означали бы скорости тел соответственно в конце времен $t_1$ и $t_2$), но доказать это невозможно, не определив сперва, что такое мгновенная скорость, и не установив законов изменения ее и пройденного пути $s$. Поэтому в доказательстве теоремы XXVII Валлисом допущена ошибка petitio principii [5], и обус-

[3] Теоремы XXIII и XXIV — это простые переформулировки основного определения XI, включенные Валлисом в текст, видимо, лишь в подражание галилеевой теории равномерного движения (теорема XXIII, например, гласит [11, с. 591]: «Если в сравниваемых равномерных движениях времена перемещений равны, то степени скорости пропорциональны пройденным расстояниям»).

[4] Формулировка теоремы XXVII: «В сравниваемых движениях градусы сил при прочих равных условиях находятся в отношении, составленном из отношений весов и скоростей» [11, с. 592].

[5] Т. Гоббс о такой ошибке писал, что она «вводит в заблуждение не только неопытного ученика, но временами и учителя, ибо благодаря ей кажется доказанным то, что в действительности вовсе не доказано» [8, с. 122].

ловлена она прежде всего нечеткой разработкой понятия скорости.

Несмотря на неполноту и совершенно недостаточную строгость, подход Валлиса к понятию скорости служил примером долгое время и для многих авторов. Например, спустя почти столетие после выхода в свет «Механики» Валлиса, Паоло Фризи еще определяет скорость как «то свойство (affectio) движения тела, в силу которого в некоторое время проходится большее или меньшее пространство» [14, с. 1].

Следует заметить, что слово affectio, употребленное Валлисом и другими в определении скорости, иногда понималось (в соответствующих определениях) и в другом смысле — как «аффект», «чувство». Разумеется, при таком понимании этого слова определение скорости, данное Валлисом, становится еще более неопределенным, «антропоморфическим». Так, именно слово affectio понимал Гоббс, когда, возражая Валлису по поводу его определения скорости, писал: «В собственном смысле affectio приписывается одушевленным существам, как passio — телам» [12].

Тот же смысл слово affection имеет и в определении скорости, данном Д'Аламбером в его и Дидро «Encyclopédie» [15, с. 359): «Скорость (в механике) — аффект (affection) движения, в силу которого тело способно пробегать определенное пространство в определенное время».

**3. Г. В. Лейбниц и Х. Вольф о скорости.** После Валлиса дальнейшая история формализации понятия скорости, казалось бы, должна быть связана с именем Ньютона. Но великий основатель динамики, как известно, не дал определений ни одного из кинематических понятий и вообще не принялся, подобно Галилею, за изложение какой-нибудь чисто кинематической теории движения (о возможной причине этого см. [16, с. 25]). Поэтому, минуя Ньютона [6], мы обращаемся к знаменитому его современнику Г. В. Лейбницу, а потом к популяризатору и систематизатору идей последнего Х. Вольфу.

В своих высказываниях о понятии «скорость» Лейбниц не пошел заметно дальше Валлиса. У Лейбница, как и у Валлиса, встречаем определение ignotum per ignota скорости (как некоего аффекта движущегося тела) и другое определение, которым устанавливается лишь отношение скоростей двух равномерно движущихся тел. Так, в работе «Dynamica de potentia et legibus naturae corporeae» («Динамика о силе и законах телесной при-

[6] По аналогичной причине мы оставляем в стороне и таких представителей «века гениев», как И. Кеплер, Р. Декарт, Х. Гюйгенс. Не останавливаемся также и на весьма содержательных высказываниях о скорости И. Барроу [17, с. 7—9], так как они относятся к стадии концептуализации этого понятия; данная же им характеристика скорости как «мощи (potentia), вследствие которой тело в некоторое время может пройти некоторое пространство» [17, с. 7], не нашла, если не считать К. Маклорена [18, с. 54], приверженцев.

роды») Лейбниц дает такое общее определение понятия скорости [19, с. 375].

«Определение I. *Скорость в произвольном движении есть аффект движущегося тела* (*affectio mobilis*), *пропорциональный длине, которую оно пробежало бы, если бы в течение данного времени его движение продолжалось с тем же аффектом. Аффект же тела остается тем же, если в равные времена оно пробегает равные расстояния; в таком случае движение называется равноскорым* (*aequivelox*)».

По сравнению с определением Валлиса новый момент в этой формулировке — это стремление охватить общий случай (поступательного) движения тела, для чего Лейбниц воспользовался известной еще с XIV в. идеей характеристики мгновенной скорости (velocitas instantanea «мертонской школы» [20, с. 53]). Но лейбницево определение, как и «мертонская» характеристика понятия мгновенной скорости, содержит в себе круг: тот «аффект движущегося тела», который, согласно определению Лейбница, является скоростью тела, характеризуется в этом определении с помощью понятий, зависящих от того же «аффекта» (ср. фразу «*аффект движущегося тела*, пропорциональный длине, которую... *с тем же аффектом*» (курсив наш. — *Л. К.*)).

Кроме того, определение I Лейбница страдает еще одним существенным недостатком. Согласно этому определению фраза «если бы в течение данного времени его движение продолжалось с тем же аффектом» означает то же, что и фраза «если бы в равные времена оно пробежало равные расстояния». Но о том, какие (какой величины) эти равные расстояния, пробегаемые телом в равные промежутки времени, следующие за данным моментом, в дефиниции ничего не сказано. А ведь для однозначного определения мгновенной скорости эти расстояния необходимо точно знать.

Таким образом, определения скорости такого типа, как лейбницево определение I, нельзя признать удовлетворительными. Тем не менее так определяли скорость довольно долгое время; например, дефиниции, аналогичные определению I, встречаем еще в XIX в. у Р. Виллиса [21, с. 7], У. Томсона и П. Тэта [22, с. 12] и др.

В другой своей работе «Essay de Dynamique sur les lois du mouvement...» («Опыт динамики о законах движения...»), относящейся к 1691 г., Лейбниц относительно скорости пишет следующее [19, с. 222]:

«Так как движущее действие есть то, что получается при умножении формального эффекта [7] на скорость, то я хочу дать

[7] В системе понятий динамики Лейбница формальный эффект (равномерного) движения определяется как произведение массы движущегося тела на длину перемещения [19, с. 221].

более ясную оценку скорости. Известно, что из двух равномерно движущихся тел, пробегающих одинаковые пространства в неодинаковое время, скорость того, которое пробегает это расстояние в меньшее время, больше в такой пропорции, в какой время короче. Таким образом, при равных путях скорости обратно пропорциональны временам. Но если времена равны, скорости относятся как пройденные пространства. Ибо если одно движущееся тело пробегает один фут в минуту, а другое два фута, то ясно, что скорость второго двойная. Следовательно, скорости находятся в сложном отношении, составленном из прямого отношения пройденных пространств и обратного отношения затраченных времен. Или, что одно и то же, для оценки скорости надо разделить пространство на время. Например, пусть $A$ пробегает 4 фута за 3 секунды, а $B$ — два фута за 1 секунду; скорость $A$ будет определяться как 4, деленное на 3, то есть как 4/3, а скорость $B$ — как 2, деленное на 1, т. е. как 2, так что скорость $A$ так относится к скорости $B$, как 4/3 к 2, т. е. как 2 к 3».

Как видим, в этом фрагменте Лейбниц фактически определяет не скорость, а лишь *отношение скоростей* двух равномерно движущихся тел. Это определение соответствует определению XI Валлиса и теореме II Галилея (см. разд. 1, 2) и своими корнями восходит к «Книге о движении» Герарда Брюссельского и трактату «О пропорциях» Т. Брадвардина (см. [3, с. 112; 6, с. 130]). О том, что такие дефиниции не достигают цели определения самого понятия скорости, подробнее будет сказано ниже, при анализе определений скорости Л. Эйлером и Ж. Д'Аламбером (см. разд. 5).

В своих произведениях, пользовавшихся долгое время широкой известностью и авторитетом, Х. Вольф трактует понятие скорости в основном, как Валлис и Лейбниц. Но его трактовка отличается и некоторыми новыми моментами. Все-таки Вольфу не удалось предложить более строгую и точную характеристику понятия скорости.

Во втором томе «Элементов всеобщей математики», посвященном механике, Вольф так определяет скорость [23, с. 6]:

«Определение 10. *Скорость*, или *быстрота*, есть то свойство движущей силы (ea vis motricis affectio), благодаря которому тело делается способным пробежать данное пространство в данное время».

Вслед за этим определением приводится следствие, соответствующее определению XI Валлиса:

«Кроме того, скорость является двойной, если в то же время проходится двойное пространство; тройной, если тройное; четверной, если проходится четверное, и так далее до бесконечности для любых кратностей или подкратностей» [23, с. 6].

В отличие от Валлиса и Лейбница скорость (быстрота) по Вольфу является определенным свойством (affectio) не самого движущегося тела или движения, а движущей силы, действующей на тело. Но связать одну только силу с быстротой подвергающегося ее действию тела никак нельзя [8], и в результате дефиниции Вольфа (определение 10) скорость остается совершенно неопределенной. Если же и допустить, что такое свойство движущей силы, о котором идет речь в определении 10, может быть установлено, то это определение корректно лишь при условии использования в нем понятия равномерного движения: под фразой «пробежать данное пространство в данное время» подразумевается, очевидно, фраза «пробежать *равномерно* данное пространство в данное время» (курсив наш.— *Л. К.*). Однако Вольф понятие равномерного движения определяет через понятие скорости: «*Движение равномерно*, если тело непрерывно движется с одной и той же скоростью» [23, с. 7].

Этот (опосредствованный) порочный круг снижает уже и так невысокую точность вольфовского определения скорости.

Ясно, что приведенное выше следствие, помещенное Вольфом вслед за определением 10, из этого определения никак не вытекает: высказывание, дающее лишь нечеткое понятие о скорости, не может служить надежной предпосылкой при выводе строгой пропорции $V:v=S:s$.

Видимо, чувствуя слабость и неэффективность своего определения 10, Вольф при дальнейшем изложении теории равномерного движения принимает ряд аксиом, цель которых — обеспечить недостающее основание для вывода общеизвестных, сформулированных еще Галилеем кинематических теорем. Так, его аксиома 2 гласит [23, с. 7]:

«*Если тело движется с той же самой скоростью, то в равные времена оно проходит равные пространства*».

Необходимость принять это утверждение в качестве аксиомы показывает всю слабость определения 10: из него нельзя вывести даже такого простого факта!

То же можно сказать и относительно следующей аксиомы Вольфа — аксиомы 3 [9].

Плохое определение понятия скорости сказывается и на доказательствах Вольфом его теорем. Например, доказывая теорему 3, совпадающую в сущности с теоремой II Дня третьего «Бесед» (см. разд. 1), Вольф повторяет ошибку Галилея — порочный круг в доказательстве, так как он опирается на то, что

---

[8] Очень лаконично указывают на это известные формулы $m\mathbf{v}=\int\limits_0^t \mathbf{F}dt$ и $\frac{1}{2}mv^2=\int\limits_{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $v_0=0$. Быстрота $v$ определяется не только силой, но и массой тела, временем или траекторией его движения. Зависимость скорости тела не только от силы, действующей на него, но и от других факторов явствует также из ряда теорем, доказываемых Вольфом в его «Элементах» (см., например, [23, § 83, 529]).

[9] Аксиома 3 утверждает, что «*если два тела движутся с одинаковой скоростью, то в одно и то же время они проходят равные пространства*» [23, с. 7].

требуется доказать. Приводим соответствующий фрагмент «Элементов» [23, с. 8]:

«Теорема 3. *Если два тела движутся с неодинаковыми скоростями, то пространства, описанные в одно и то же время в равномерном движении, относятся между собой как скорости.*

Доказательство. В самом деле, если тело $A$, движущееся со скоростью $c$, за время $t$ описывает пространство $s$, то, двигаясь с вдвое большей скоростью, оно за то же время $t$ опишет вдвое большее пространство, а двигаясь с какой-нибудь кратной или подкратной скоростью $nc$,— кратное или подкратное пространство $ns$ (§ 14)».

Но параграф 14 в «Элементах» Вольфа, на который он ссылается,— это как раз упоминавшееся выше следствие определения 10 — следствие, которое совпадает с утверждением теоремы 3!

В своем основном философском сочинении «Первая философия или онтология» («Philosophia prima sive Ontologia») в главе, посвященной движению, Вольф несколько видоизменяет определение скорости — он отказывается от применения в этом определении метафизического термина «affectio»: «*Скорость* есть то, благодаря чему тело делается способным пробежать данное пространство в данное время» [24, с. 294].

Однако это определение явно не адекватно, так как под него подпадает не только скорость, но и количество движения, живая сила и даже произвольные функции от каждой из этих величин.

Итак, в отношении понятия скорости Вольфу не удалось реализовать свою методологическую установку, согласно которой «определения являются первыми идеями о предметах, с помощью которых эти предметы различаются между собой и откуда выводится все остальное, что о них представляется» [25, с. 6].

**4. Попытка Я. Германа дать количественное определение понятия скорости.** Определения понятия скорости Валлисом, Лейбницем и Вольфом все же следует считать качественными, так как скорость определяется ими как некоторое свойство, аффект тела или движения (или движущей силы), причем точная количественная характеристика этого свойства не вытекает из предлагаемых определений.

В изданной в 1716 г. «Форономии» Я. Германа, наоборот, встречаем попытку количественного определения скорости — определения, которое было бы сформулировано в четких математических терминах и могло бы служить надежной предпосылкой при выводе теорем механики. В какой мере удалось Герману решить эту задачу?

Прежде чем определить скорость, Герман останавливается на понятии времени.

«Время можно рассматривать, — пишет он [26, с. 1], — как равномерное течение одной неделимой его отметки, которую будем называть моментом, или мгновением,— почти так же, как геометры мыслят линии, порождаемые движением, с той, однако, разницей, что движение чертящей линию точки можно представлять себе то ускоренным, то замедленным, тогда как течение нашего момента происходит, так сказать, равномерным шагом, так что равные части времени соответствуют равным расстояниям, или интервалам, текущего момента от первого места, где они начинаются».

Сделав несколько замечаний об измерении времени, Герман переходит к понятиям равномерного движения и скорости [26, с. 2]: «Если наша уносящаяся точка или даже произвольное тело перемещается однообразным способом, т. е. точно так же, как мыслится однообразно текущим момент времени, то движение точки или тела называется *равномерным*. И путь (или длина, которую также называют пространством, описанным движением тела), приложенный (applicatum) или деленный на протяжение времени, которое между тем образовано текущим моментом, т. е. на время движения, называется *быстротой*, или *скоростью*».

Итак, по Герману, скорость равномерно движущейся точки или тела — это частное от деления пройденного пути на соответствующее время. Но как сравнить, как разделить одну на другую две разнородные величины?

В одном из своих писем, опубликованном в 1721 г., И. Бернули спрашивал адресата [27, с. 165]: «Скажите мне, ради бога, кто из геометров когда-нибудь сравнивал линию и прямоугольник, которые являются разнородными величинами? Я бы не прочь сравнить также звук и цвет или время и вес!». Герман в «Форономии» ничего не говорит относительно частного от деления двух разнородных величин, и по многим контекстам его трактата приходится заключить, что это частное — как и во всей математической литературе того времени (ср., например, [28, с. 6]) — заменяется отвлеченным числом, получающимся от деления отвлеченных же чисел, измеряющих соответствующие геометрические или механические величины [26, с. 4, 65, 69, 71]. Но при строгом подходе к понятию скорости важно не заменить ее каким-то инородным объектом, например числом, а отыскать главные ее признаки, не упуская из виду того, что скорость прежде всего некоторая величина. Это хорошо понимали Валлис и Лейбниц; это хорошо подчеркнуто Э. Мариоттом [29, с. 15]: «Можно сравнить скорость одного тела со скоростью другого, выражая их числами, которые обозначают их отношения; когда, например, скорость одного тела относится к скорости другого как шесть к одиннадцати, то говорят, что скорость одного есть в шесть градусов, а скорость другого — в одиннадцать градусов». (И. Бернулли пишет прямо: «Со скоростью 3 гр.», «скоростью 2 гр.», «скоростью 1 гр.» [30, с. 322].)

Престарый термин «градус скорости», который ясно и непосредственно указывает на природу скорости как величины, употребляется и Германом в его трактате. Например, рассматривая движение тяжелого тела в сопротивляющейся среде (воздухе), Герман пишет [26, с. 280]: «Поэтому скорость (падающего тела.— *Л. К.*) непрерывно возрастает, не достигая, однако, никогда определенного *градуса скорости* (курсив наш.— *Л. К*), не говоря уже о его превышении. Эту скорость, которую падающие тела никогда не могут достигнуть, хотя они к ней все больше и больше приближаются, Гюйгенс называет *конечной скоростью*, Лейбниц же — *максимальной скоростью*».

В этом, да и во многих других фрагментах «Форономии» скорость рассматривается как конкретная кинематическая величина. Арифметическая же трактовка частного от деления пути на время, которой, следуя традиции, придерживается Герман в своем трактате, делает его определение скорости неадекватным, так как понятие скорости как кинематической величины заменяется другим — отвлеченным числом. (Мы увидим далее, что это несоответствие между содержанием понятия скорости и ограниченной в данную эпоху возможностью его математического выражения со всей остротой почувствуют лишь спустя столетие.)

Недостатком трактовки понятия скорости в «Форономии» является и то обстоятельство, что дефиниция понятия скорости дана в ней только для случая равномерного движения точки или тела. Понятие мгновенной скорости тела Герман оставил без определения, хотя в большинстве теоретических построений его трактата оно играет центральную роль (достаточно указать на кривую скоростей (scala celeritatum) и понятие момента скорости [26, с. 54—55]). Таким образом, попытку Я. Германа дать точное и адекватное количественное определение понятия скорости нельзя считать удавшейся.

**5. Понятие скорости в «Механике» Л. Эйлера и «Динамике» Ж. Д'Аламбера.** Подход Л. Эйлера к понятию скорости в его работе «Механика или наука о движении» («Mechanica sive motus scientia») — первом учебнике по аналитической механике [31, с. 24] — весьма близок к трактовке этого понятия Лейбницем. Но, в отличие от Лейбница, Эйлер (как и Х. Вольф в «Онтологии», а также Я. Герман в «Форономии») в дефиниции скорости уже не применяет выражения «affectio mobilis». Этим он избегает дефектов определения, обусловленных нечеткостью понятия, являющегося значением этого выражения. Однако другие недостатки определения скорости, свойственные трактовке Лейбница, Эйлером не устранены; в том или другом виде они обнаруживаются и в его формулировках.

Самым важным для интересующей нас проблемы является определение 5 первого тома «Механики» [32, с. 49]:

«О всяком теле, которое движется, говорят, что оно имеет быстроту, или скорость, и эта скорость измеряется тем расстоянием, которое тело, двигаясь равномерно, проходит в данное время. *А именно, если тело В при равномерном движении проходит двойное расстояние в то самое время, в которое тело А,* *двигаясь также равномерно, проходит одинарное, то говорят, что тело В имеет вдвое большую скорость, чем тело А»* [10].

В первом предложении этой дефиниции, в фразе «и эта скорость измеряется...» легко опознать идею У. Хейтесбери описания мгновенной скорости. Правда, в формулировке Эйлера нет того круга, который характерен для высказываний ученого Мертонского колледжа об этом понятии [11]. Зато в нее вкрадывается неопределенность другого типа: в дефиниции Эйлера нет никакого указания на то, *какое* из бесчисленного множества возможных (мыслимых) равномерных движений тела должно совершаться «в данное время» для того, чтобы пройденным в это время (и в этом равномерном движении) расстоянием могла «измеряться» определяемая мгновенная скорость тела. (Кажущийся естественным ответ — «двигаясь равномерно с той скоростью, которою тело обладает в данное мгновение» — вернул бы нас к порочному кругу Хейтесбери.)

Этот недостаток делает определение 5 непригодным для строгого вывода многих теорем кинематики. Вот два примера из «Механики».

А. Как следствие 1 определения 5 Эйлер приводит общеизвестное утверждение: «При неравномерном движении тело последовательно приобретает то одну, то другую скорость» [32, с. 49]. Но, пользуясь неопределенностью выбора того равномерного движения, о котором говорится в определении 5, легко доказать и противоположное следствие 1! В самом деле, для каждого момента времени $t$ можно так подобрать равномерное движение $D_t$ данного тела, чтобы расстояния, которые тело проходит в «данное время» в каждом из движений $D_t$, были бы равны между собой. (Если «данное время» одинаково для каждого момента $t$, то все $D_t$ идентичны.) При таком выборе равномерных движений $D_t$ неравномерно движущееся тело будет (в силу определения 5) иметь всегда одну и ту же скорость!

Б. Несколькими страницами ниже Эйлер доказывает теорему (предложение 3): *«При каком угодно неравномерном движении можно допустить, что самые маленькие элементы пути проходятся равномерным движением»* [32, с. 54].

---

[10] В русском переводе соответствующей части «Механики» [32] единый текст определения 5 разбит, в отличие от оригинала, на два абзаца, каждый из которых состоит из одного предложения; кроме того, курсивом набрано не второе предложение, как в оригинале, а первое. Мы восстановили форму оригинала и слова «Таким образом», с которых в переводе начинается второе предложение, заменили словами «А именно», лучше передающими латинское «Scilicet».

[11] Например: «В пространственном дифформном движении в любое мгновение скорость определяется по линии, которую прочертила бы наиболее быстро движущаяся точка, если бы на протяжении времени она стала бы двигаться униформно с тем градусом скорости, с которым она движется в это мгновение,— какое бы мгновение ни взять» (цит. по: [2, с. 69]).

Как видим, скорость $v_t$ в любое мгновение $t$ определяется с помощью «того градуса скорости, с которым точка движется в это мгновение», т. е. с помощью той же скорости $v_t$!

В доказательстве теоремы Эйлер пишет: «В самом деле, эти элементы или проходятся равномерным движением или *изменение скорости в этих элементах настолько ничтожно* (курсив наш.— *Л. К.*), что ее увеличением или уменьшением можно пренебречь без всякой ошибки. Таким образом, и в том и в другом случае выявляется справедливость предложения, что и требовалось доказать».

Однако выделенное нами утверждение Эйлера не вытекает из его же определения скорости, оно при помощи этого определения даже может быть опровергнуто (подобно тому как следствие 1 в примере А). Поэтому эйлерово доказательство предложения 3 кажущееся, оно заключает в себе ошибку petitio principii.

Вообще все приводимые Эйлером в «Механике» доказательства теорем кинематики, касающихся свойств равномерного движения, являются нестрогими именно из-за отсутствия в «Механике» точного, правильного определения мгновенной скорости. Доказательства эти основаны не на дефиниции, а на интуиции.

Более удовлетворительной является вторая часть определения 5, которую Эйлер выделил курсивом. Можно считать, что в ней, подобно соответствующим текстам Валлиса, Лейбница, Вольфа (см. разд. 2, 3), дается определение отношения скоростей двух равномерно движущихся тел [12]. Однако знание *отношения скоростей* таких тел не означает знания того, чтó такое сама скорость как физическая величина. Не раскрыв же содержания понятия скорости равномерного движения, нельзя дать исчерпывающего определения понятия мгновенной скорости. У Эйлера, как и у других предшествующих ему авторов, это фундаментальное понятие кинематики и остается в сущности неопределенным: определением 5, как мы видели, понятие мгновенной скорости установлено неточно, а расчетная формула $c=ds/dt$, появляющаяся впервые в решении задачи предложения 6 [32, с. 65], выведена им на основании фактически недоказанного предложения 3 (см. выше).

Обратимся теперь к определению скорости, данному другим корифеем механики XVIII в.— Ж. Д'Аламбером [33, с. 48]:

«Если пути, пройденные двумя равномерно движущимися телами за одно и то же время $AB$, равны $BD$ и $Bd$, то говорят, что *скорости* этих тел относятся друг к другу, как $BD$ к $Bd$».

Как видим, дефиниция Д'Аламбера — это в сущности вторая часть определения 5 «Механики» Эйлера, это пропорция, предложенная еще Герардом Брюссельским и Брадвардином, определяющая понятие скорости равномерно движущегося тела не

[12] Правда, Эйлер здесь ограничивается лишь случаем отношения 2 : 1, но уже при доказательстве предложения 2 он, как бы обобщая этот пример, берет общую пропорцию скоростей и пройденных расстояний: $C:c=S:S'$, $S'=s\frac{T}{t}$ [32, с. 51].

непосредственно, а лишь в контексте «отношение скоростей двух равномерно движущихся тел».

Кратко определения такого типа можно записать формулой

$$\frac{v(P_1)}{v(P_2)} = \frac{s(P_1, T)}{s(P_2, T)}, \tag{2}$$

где символ $v(P)$ является сокращением выражения «скорость равномерно движущейся точки $P$», а символ $s(P, T)$ — сокращением выражения «путь, пройденный точкой $P$ за время $T$».

В связи с тем, что и Д'Аламбер определяет понятие скорости по образцу (2), отметим один существенный недостаток таких определений. Для этого ознакомимся сперва с фрагментом статьи Д'Аламбера «Définition» в знаменитой «Encyclopédie» [34, с. 748]:

«Кроме других выгод определения, имеется еще одна. Часто ведь четкое понятие о вещи можно составить себе, только употребив много слов для ее обозначения. Было бы скучно, особенно в научных книгах, всегда повторять этот длинный ряд слов. Поэтому, разъяснив дело с помощью всех этих слов, образованное сложное понятие связывают с одним отдельным словом, которое заменяет все другие. Так, установив, что существуют числа, которые делятся на два без остатка, и не желая повторять все эти термины, присваивают имя этому свойству, говоря: каждое число, которое делится на два без остатка, мы называем *четным числом*. Это показывает, что всякий раз, когда употребляется слово, которому было дано определение, надо мысленно подставить определение на место определенного и учитывать это определение так, что как только называется, например, четное число, оно в точности понимается как такое, которое делится на два без остатка. Эти две вещи настолько взаимосвязаны и нераздельны в уме, что как только речь выражает одну, ум немедленно присоединяет туда другую: ибо те, которые определяют термины, как это тщательно делают геометры, делают это только для того, чтобы сократить речь, которая от таких частых многословий навела бы скуку».

Ту выгоду, вернее, то свойство правильного определения, которое так образно (и четко!) описывает Д'Аламбер, теперь называют *переводимостью* определения [35, с. 106]: определение термина $W$ (на основании данного языка) должно быть таким высказыванием, чтобы при помощи его можно было перевести каждое языковое выражение, содержащее термин $W$, на равнозначное выражение, не содержащее термина $W$ (короче: можно было исключить $W$ из любого контекста).

Нетрудно убедиться, что определение типа (2) термина «скорость тела» не удовлетворяет именно этому условию переводимости. В самом деле, возьмем, например, предложение из той же «Динамики» Д'Аламбера [33, с. 50]: «При ускоренном или замедленном движении скорость тела меняется в каждый момент...».

Из этого контекста исключить термин «скорость тела» с помощью определения (2) никак нельзя, ибо в определении (2) говорится о *двух* телах, движущихся *равномерно*, а во взятом предложении — об *одном* теле, движущемся *неравномерно*.

Таким образом, определение скорости Д'Аламбером в его «Динамике», как и вообще любое определение типа (2), является неправильным, так как оно не удовлетворяет условию переводимости (предъявляемому самим Д'Аламбером) [13].

**6. Другое определение скорости Эйлером и Д'Аламбером (1765 г.).** Спустя почти 30 лет после выхода в свет «Механики», Эйлер в «Теории движения твердых тел» еще раз принялся за изложение основных понятий механики точки. Понятию скорости он теперь дал такое определение [32, с. 286]:

«Определение 6. *При равномерном движении отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они проходятся, называется быстротой, или скоростью*».

Как видим, в этой дефиниции Эйлер уже не старается установить общее понятие мгновенной скорости или определить отношение скоростей двух равномерно движущихся тел, как в определении 5 в 1736 г. Он говорит только об одном равномерном движении и скорость его (или скорость соответствующего тела) определяет как «отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они проходятся»: $v = s/t$.

Разумеется, такое определение, совпадающее в сущности с определением Я. Германа (см. разд. 4), имеет смысл лишь при условии, что заранее известно (или определено) понятие отношения двух разнородных величин. Однако этого понятия не выработала ни вся доэйлеровская математика, ни вся доэйлеровская механика. Лишь Ф. Виет приблизился к нему в своих «Правилах видовой логистики», введя операцию «приложения» в шкале геометрических и квазигеометрических величин различных измерений [36, с. 235—237].

Эйлер был далек от мысли развивать далее идею Виета. Он, как и Герман, в трактовке понятия частного от деления двух разнородных величин придерживался традиционной точки зрения и считал нужным «свести все к отвлеченным числам» [32, с. 288].

«В самом деле,— поясняет он [32, с. 288—289],— если для измерения путей мы изберем определенную длину в качестве единицы и точно так же для времен изберем в качестве единицы определенный промежуток времени (...), то все пути и времена выразятся в отвлеченных числах, и тогда для деления первых на вторые не будет никаких препятствий».

---

[13] Неправильность определения (2) для современного механика или логика сразу бросается в глаза: дефиниенс этого определения содержит определяемый функтор $v(.)$ дважды и, кроме того, в нем фигурирует ранее введенный функтор знака деления (см., например, [35, с. 124, 126]).

Эта арифметизация понятия деления пути на время вполне соответствует методологической установке Эйлера как крупного аналитика. Согласно ему «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций», значениями же этих переменных количеств являются *«все числа* (курсив наш.— *Л. К.*), как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные» [37, с. 19, 24]. Но сведение понятия отношения $s/t$ «к отвлеченным числам» и определение скорости $v$ именно как этого отношения $s/t$ автоматически ведут к отождествлению скорости $v$ с числом. Такое заключение, однако, интуитивно неприемлемо для Эйлера как механика, и он, как бы желая отмежеваться от него, в примечании, следующем сразу после разъяснений о сведении $s/t$ к числам, переопределяет понятие скорости, особо подчеркивая то обстоятельство, что скорость является величиной, свойством движения [32, с. 290]: «Таким образом, скорость можно рассматривать как некоторое особое свойство движения, независимое от описанного пути...

В силу этого *скорость* можно определить и таким образом, что она является определенной мерой движения, благодаря которой при этом движении обеспечивается прохождение определенного пути за определенное время».

Как и аналогичное определение Вольфа (см. конец разд. 3), это определение, разумеется, слишком широко, так как под него подпадает не только скорость $v$, но и количество движения $mv$, живая сила $mv^2$ и т. д.

Интересно отметить, что в статье Д'Аламбера «Скорость», помещенной в XVII томе «Энциклопедии», вышедшем, как и «Теория движения твердых тел» Эйлера, в 1765 г., дано определение скорости, совпадающее с определением 6 Эйлера: «Собственная (propre) или абсолютная *скорость* тела есть отношение пройденного им пространства ко времени, в течение которого тело движется» [15, с. 360].

Какой смысл вкладывает Д'Аламбер в это определение, видно из следующего далее фрагмента статьи: «Если $s$ есть пространство, а $t$ — время, то $s:t$ есть скорость при условии, что движение равномерно. Относительно этой меры скорости можно сделать серьезное возражение: что пространство и время, как две разнородные величины, несравнимы и что вовсе нет ясного понятия об отношении $s:t$. На это следует ответить, что это выражение для скорости означает не что иное, как то, что скорости двух тел всегда относятся между собой как отношения пространств, деленных на времена, если только пространства и времена изображаются через отвлеченные числа, которые относятся между собой так, как эти пространства и как эти времена. См. конец статьи *«Уравнение»*.

В указанной статье Д'Аламбер выражается еще яснее [38, с. 854—855]: «Иногда в геометрии и механике уравнением называют то, что является простой пропорциональностью, обозначенной сокращенным способом... Например, когда говорят, что скорость равномерно движущегося тела равна пространству, деленному на время, это в более развернутом виде обозначает следующее. Если два тела движутся равномерно и одно пробегает пространство $E$ в течение времени $T$, а другое пространство $e$ в течение времени $t$; если, далее, отрезок $a$ берется в качестве общей меры пространств $E$, $e$, а время $\theta$ в качестве общей меры времен $T$, $t$, то скорости относятся между собой так, как число $E:a$, деленное на число $T:\theta$, относится к числу $e:a$, деленному на число $t:\theta$».

Итак, для Д'Аламбера формула $v=s:t$, определяющая скорость, является лишь сокращением более развернутого определения:

$$\frac{v(P_1)}{v(P_2)}=\frac{E/a:T/\theta}{e/a:t/\theta}, \qquad E=s(P_1, T), \qquad e=s(P_2, t). \tag{3}$$

Это определение лишь своим дефиниенсом отличается от рассмотренного в разд. 5 определения (2). Поэтому оно также неправильно — не удовлетворяет условию переводимости.

Таким образом, и относительно новых определений скорости Эйлером и Д'Аламбером нельзя сказать, что они дают точную и адекватную дефиницию этого понятия.

**7. Арифметизация понятия скорости.** Несмотря на их недостатки, трактовки понятия скорости Эйлером и Д'Аламбером (см. разд. 5, 6) оказали сильное влияние на дальнейший процесс формализации этого понятия. Прежде всего, кажущееся естественным предложение Эйлера свести определяющее скорость отношение $s:t$ «к отвлеченным числам» усилило уже издавна проявлявшиеся в математике и механике тенденции не делать различия между геометрическими, кинематическими, а также другими величинами и соответствующими им числами (вспомним хотя бы знаменитую VI книгу «Арифметики» Диофанта и длинный процесс «арифметизации геометрии» [39, с. 379]). Это привело к тому, что формальные определения понятия скорости и комментарии к ним не стали соответствовать интуитивному содержанию этого понятия, выработанному в долгой стадии его концептуализации [14]: скорость начали представлять как некоторое отвлеченное действительное число.

Проиллюстрируем сказанное на примере нескольких трактатов, сыгравших первостепенную роль в развитии науки о движении.

Вот как излагает понятие скорости П. С. Лаплас в «Небесной механике» [41, с. 37]: «В равномерном движении пройден-

[14] Очень ясно и сжато сущность интуитивного понятия о скорости выразил еще в XIV в. представитель известной Мертонской школы Р. Свайнсхед [40, с. 245]: «Всякой степени в местном движении соответствует определенное линейное расстояние, которое с этой степенью было бы пройдено в некоторое данное время».

ные пространства пропорциональны временам. Но времена, употребленные для прохождения определенного пространства, бывают бо́льшими или меньшими сообразно величине движущей силы. Эти различия породили идею скорости, которая в равномерном движении есть отношение пространства ко времени, необходимому для его прохождения. Таким образом, если $s$ обозначает пространство, $t$ — время и $v$ — скорость, то $v=s/t$. Но время и пространство являются разнородными величинами, и, следовательно, они несравнимы; поэтому выбирают в качестве единицы времени определенный интервал времени, такой, как секунда; выбирают также единицу пространства, такую, как метр. *Пространство и время* тогда *являются отвлеченными числами*, которые выражают, сколько они содержат единиц соответствующего им рода, и которые могут сравниваться между собой. *Скорость* таким образом становится *отношением двух отвлеченных чисел*, и единицей ее является скорость тела, которое пробегает один метр в секунду» (курсив наш.— *Л. К.*).

В этом фрагменте легко распознать то определение скорости и те пояснения к нему, которые даны Эйлером в «Теории движения твердых тел» [32, с. 286—289]. Но Лаплас существенно усиливает формулировки Эйлера: в пояснении 2 к своему определению 6 Эйлер говорит только, что «все пути и времена *выразятся* в отвлеченных числах» и что отношения $s/t$ и $S/T$ таких отвлеченных чисел «будут действительно *обозначать* некоторые скорости» [32, с. 289], в то время как Лаплас пишет прямо, что «пространство и время *являются* отвлеченными числами», что «скорость *становится* отношением двух отвлеченных чисел», т. е. отвлеченным числом [15] (курсив наш.— *Л. К.*).

Вместе с тем в этом отрывке «Небесной механики» обнаруживается и противоречивость такой арифметизации пространства, времени, скорости: если, по словам Лапласа, пространство и время являются отвлеченными числами, то как они могут «содержать единицы соответствующего им рода», т. е. единицы времени и длины? И если скорость также становится отвлеченным числом, то какой имеет смысл говорить о «единице скорости», которую, кроме того, можно выбрать произвольно? [16]

Такую же арифметизацию и эйлерову трактовку (1736 г.) скорости находим и в «Аналитической механике» Ж. Лагранжа [44, с. 322]: «...и будем измерять *ускоряющую силу* именно с помощью этой самой скорости; последняя же в свою очередь должна измеряться тем пространством, которое движущееся тело прошло бы в течение такого же времени (равного принятой единице времени.— *Л. К.*), если бы оно продолжало двигаться равномерно...

---

[15] Этим Лаплас как бы распространяет на механику арифметизацию геометрии, завершенную А. Лежандром [42, с. 61—62].

[16] Э. Бур справедливо замечает [43, с. 21], что при таком понимании скорости единица ее измерения вообще не существует.

Таким образом, силы, пространства, времена и скорости явятся лишь простыми отношениями, обыкновенными математическими количествами».

Очень ярко это отождествление скорости и действительного числа акцентировано С. Д. Пуассоном в первом издании его «Трактата по механике». В параграфе «Равномерное движение» он пишет [45, с. 261—262]: «Наиболее простое движение, которое может совершать материальная точка, это движение прямолинейное, в котором равные пространства проходятся в равные времена. Именно такое движение называется *равномерным. Скоростью* называют постоянное отношение пройденных пространств к временам, протекшим с начала движения, или, что одно и то же, пространство, пройденное в единицу времени... Обозначая через $a$ скорость, через $t$ время, протекшее с определенного момента, через $e$ пространство, пройденное движущейся точкой за это время $t$, будем иметь согласно определению скорости

$e/t=a$ или $e=at$.»

Далее Пуассон приводит более общую форму уравнения равномерного движения:

$$e=at+b,$$

где $b$ означает начальное расстояние движущейся точки от фиксированной точки траектории.

Относительно этого уравнения Пуассон пишет [45, с. 262]: «Заметим, что когда уравнение содержит величины разных родов, как здесь время $t$ и линии (les lignes) $e$, $a$, $b$, *то эти величины являются не чем иным, как отвлеченными числами*, которые обозначают *их отношения к единицам соответствующего им рода*. Это то замечание, которое мы уже имели случай сделать в п° 94 и которое мы повторяем теперь раз и навсегда» [17] (курсив наш.— *Л. К.*).

Противоречивость арифметизации, осуществляемой Пуассоном, и в этих контекстах бросается в глаза. В самом деле, пусть некоторое уравнение содержит символ величины $Q$; пусть $q$ — единица измерения этой величины и пусть число $\alpha=Q/q$. Тогда выделенное нами утверждение Пуассона эквивалентно отождествлению двух разных вещей: $Q$ и $\alpha$.

**8. Отождествление скорости с пространством, пройденным в единицу времени.** Широкое применение математического анализа в механике превратило ее к концу XVIII — началу XIX в.

[17] В указанном месте (п° 94) трактата читаем [45, с. 122]: «Заметим только, что если через $P$ обозначим вес тела, через $V$ его объем, через $D$ его плотность и через $g$ тяжесть... то $P=VDg$. Относительно этого уравнения, где величины $P$, $V$, $D$, $g$ — разного рода, следует заметить, что *эти буквы представляют собой отвлеченные числа*, именно, отношения соответствующих величин к произвольным единицам того же рода, что и каждая из них» (курсив наш.— *Л. К.*).

в наиболее развитую естественнонаучную дисциплину. Это объясняется главным образом тем, что с помощью анализа были разработаны мощные методы решения выдвигаемых перед механикой задач. Но в процессе уточнения, строгого обоснования понятий главных механических величин математический анализ не играл такой плодотворной роли. Причина этого проста: анализ (мы имеем в виду «классический анализ» XVIII—XIX вв.) занимается прежде всего числами и числовыми функциями, а не величинами. Как писал М. В. Остроградский, анализ «не рассматривает величин, но только их отношения» [46, с. 13]. Поэтому неудивительно, что в трудах творцов классического анализа мы часто сталкиваемся с полным смешением величин (кинематических, механических, физических) и соответствующих им чисел [18]. В этой дисциплине еще со времен Эйлера «все сводится к числам»: время, длины, скорости, силы и т. д. Это обстоятельство привело к тому, что в механике наряду с представлением скорости как числа возникла и широко распространилась практика отождествления скорости с пространством (путем), пройденным в единицу времени (или в любое данное время). Эта концепция впервые появилась, видимо, в «Трактате о флюксиях» К. Маклорена [19]; она четко изложена Пуассоном в его «Трактате по механике» (см. цитату из этого трактата в разд. 7). При том смешении величин и измеряющих их чисел, которое допускается в анализе, отношение $s:t$ и «пространство, пройденное в единицу времени», на самом деле являются одним и тем же числом, как и утверждает в своей дефиниции Пуассон.

Следуя Маклорену и Пуассону, определение скорости как пространства (или пути), пройденного в единицу времени, дают многие авторы (см., например, [49, с. 30, 32; 50, с. 6; 51, с. 2; 52, с. 1]). Однако ученые чувствовали неудовлетворительность этого определения, и первый, кто обратил на это внимание, был сам Пуассон.

**9. Высказывание С. Д. Пуассона о скорости (1833 г.).** В 1833 г. вышло второе издание «Трактата по механике» Пуассона — увеличенное и измененное. Очень важной переработке знаменитый автор подверг изложение понятия о скорости. Высказывание Пуассона о скорости в новом издании его трактата указывает на некоторую эволюцию его точки зрения и имеет первостепенное значение для нашего анализа.

В первой части раздела «Динамика» Пуассон пишет [53, с. 206—207]: «Одно равномерное движение отличается от дру-

---

[18] Например, такое смешение этих двух различных понятий имеется в известной работе А. Коши «Мемуар о дифференциальном отношении двух величин, изменяющихся совместно» [47] (см. в особенности с. 253, 256—257); впрочем, достаточно заметить, что в этой работе термины «величина» (grandeur) и «количество» (quantité) Коши считает синонимами [47, с. 214]. В номенклатуре же Коши «количество» — это «число, перед которым стоит знак + или —» [48, с. 17, 20].

[19] «Под скоростью (равномерного.— *Л. К.*) движения мы понимаем пространство, всегда описываемое в данное время» [18, с. 53].

того величиной пространства, пройденного в единицу времени. В каждом равномерном движении это постоянное пространство называется *скоростью* движущейся точки; но, строго говоря, это пространство является лишь мерой скорости, а не самой скоростью. Скорость движущейся материальной точки есть какая-то вещь, которая заключается в ней самой, которою она одушевлена (est animé), которая отличает ее от покоящейся материальной точки, и не поддается другому определению».

Это откровенное заявление великого ученого замечательно, прежде всего, тем, что в нем признается неадекватность (предложенного и самим Пуассоном в 1811 г.) определения скорости как пространства, пройденного в единицу времени. Кроме того, от читателя не скрывается сложность понятия скорости и невозможность дать этому понятию — на уровне науки того времени — строгое и ясное определение. Таким образом, из высказывания Пуассона следует, что механики вынуждены пользоваться заведомо неточными дефинициями скорости.

**10. Трактовка понятия скорости М. В. Остроградским.** Подчеркнутые Пуассоном проблематичность понятия скорости и то обстоятельство, что для ученых того времени скорость «не поддается другому определению», кроме отождествления с некоторым числом или длиной, очень хорошо подмечаются в замечательных, самобытных «Лекциях по аналитической механике» М. В. Остроградского.

К понятию скорости — «количества $a$» ($a$ — некоторое отвлеченное число) Остроградский приходит с помощью весьма оригинальных и интересных рассуждений.

Остроградский начинает с характеристики анализа и прикладного анализа [46, с. 13]: «Наука о числах называется чистым или общим анализом; она не рассматривает величин, но только их отношения. Величины рассматривает анализ прикладной... Всякая часть прикладного анализа излагает сначала способы измерять те величины, которыми она должна заняться; потом, с помощью общего анализа, она производит известные действия над числами, получаемыми ею от измерения».

Охарактеризовав геометрию как первую часть прикладного анализа, Остроградский далее пишет (Там же): «За геометриею следует механика; последняя, сверх протяжения... говорит о материи и времени. Посему механика, прежде *слияния* (курсив наш.— *Л. К.*) своего с общим анализом, должна научить нас измерять *количество материи* и *количество времени*».

Эту программу и реализует Остроградский в своих лекциях, ограничиваясь сначала кинематикой [46, с. 17]: «Возвратимся к точке, которая, двигаясь, описывает кривую $ABCD$. Обозначим через $S$ абсолютную величину пространства $AB$ и через $t$ величину времени, употребленного на его прохождение; $S$ и $t$ нельзя между собой сравнивать, но если $S'$ означает абсолютную величину пространства $BC$ и $t'$ — время, употребленное на его прохождение, то можно бы искать отношения между $S$ и $S'$, между $t$ и $t'$, можно бы также искать зависимость между отношениями $S/S'$ и $t/t'$...

Но... гораздо проще искать отношение пространства $S$ к единице длины и отношение величины $t$ к единице времени...; таким образом, $S$ и $t$ *сделаются числами отвлеченными* и отношение их выразится посредством уравнения $S=\varphi(t)$... *Количества* $S$ *и* $t$ *суть, действительно, числа отвлеченные*, но для удобства и для краткости речи мы будем называть их пространством и временем» (курсив наш.— *Л. К.*).

Дойдя таким образом до чисел в отношении пространства и времени, Остроградский далее переходит к установлению понятия скорости. Для этого он задается вопросом: какова должна быть функция $\varphi(t)$, чтобы соответствующее движение было «однообразным» (т. е. равномерным)?

Простые соображения дают ответ: $S=\varphi(t)=at$, где $a$ — некоторое постоянное число («количество» по терминологии Остроградского и по терминологии Коши — см. сноску 18). Теперь следует определение [46, с. 18]: «Количество $a$ называется *скоростью*». И далее: «Таким образом, *скорость* в однообразном движении *есть* не что другое, как *отношение пространства ко времени»* (курсив наш.— *Л. К.*).

Следствие это вполне обоснованно: раз количества $S$ и $t$ суть числа отвлеченные, $S=at$ и $a$ называется скоростью, то ясно, что скорость — это число, являющееся отношением $S/t$. Но если (после слияния геометрии с анализом) пространства сливаются с числами, что число $a$ — также и пространство, проходимое в единицу времени. Эта вторая часть пуассонова определения скорости 1811 г. также имеется у Остроградского.

«Скорость,— пишет он несколько далее [46, с. 18],— можно рассматривать как линию или как количество особенного рода, имеющее свою собственную меру. В первом случае *скорость есть пространство, пробегаемое в единицу времени* (курсив наш.— *Л. К.*), во втором — должно избрать какую-нибудь единицу скорости. Пусть будет единицею скорости скорость тела, проходящего пространство $L$ во время $\theta$, тогда скорость тела, проходящего пространство $S$ во время $t$, выразится отношением между отношениями $S/t$ и $L/\theta$, т. е. отношением $(S:L)(\theta:t)$, которое есть число отвлеченное. Скорости у нас рассматриваются как прямые линии».

Из этого фрагмента явствует, что Остроградского не удовлетворяет понимание скорости как отвлеченного числа $a$. Скорость — какая-то величина, «имеющая свою собственную меру» (хотя по его же определению — это только число $a$!). Значит, скорость — что-то иное, чем отношение $S/t=a$, чем «пространство, пройденное в единицу времени».

Эту мысль, напоминающую высказывание Пуассона о скорости, еще раз встречаем в другом отрывке (Там же): «Понятие скорости рождается, как мы видели, из сравнения пространства и времени. Скорость не есть свойство тела, потому что может измениться, ни в чем не изменив самого тела; скорость есть подобно самому движению состояние некоторого тела».

Как видим, трактовка понятия скорости Остроградским не вполне однозначна и последовательна. Он определяет скорость как отвлеченное число $a$, но затем в своих рассуждениях выходит из рамок этого определения. Можно сказать, что по отношению к этому фундаментальному понятию кинематики Остроградский не выдерживает своего методологического принципа: механика как часть прикладного анализа должна, согласно ему, «рассмотреть» («изложить») свои величины (т. е. в первую очередь определить их), чтобы затем, дойдя до чисел, «слиться» с чистым анализом. Остроградский же выполняет или старается выполнить эту программу лишь относительно первой кинематической величины — времени. Следующую кинематическую величину — скорость он уже определяет с позиций не прикладного, а чистого анализа (ср. его рассуждения, с помощью которых устанавливается линейность функции $\varphi(t)$ [46, с. 17]). Слияние механики с анализом у Остроградского происходит слишком рано. Как показывают приведенные фрагменты «Лекций», Остроградский это чувствует, но для него, как и для Пуассона, скорость «не поддалась» другому определению.

**11. Определение понятия мгновенной скорости Ж. Лагранжем.** Во введении в «Теорию аналитических функций» Ж. Лагранжа имеется интересный фрагмент, касающийся понятия скорости [54, с. 5]: «Этот метод или исчисление (речь идет о ньютоновом методе флюксий, опирающемся, как известно, на понятие скорости.— *Л. К.*) согласуется по существу с дифференциальным исчислением и отличается от него только метафизикой, которая в самом деле кажется яснее, так как все имеют или думают, что имеют, понятие о скорости. Но, с одной стороны, вводить движение в исчисление, объектом которого являются лишь алгебраические количества, значит вводить туда понятие инородное...; с другой стороны, надо сознаться в том, что *мы все же не имеем вполне ясного понятия о скорости точки в любой момент, если эта скорость меняется*» (курсив наш.— *Л. К.*).

Поэтому в третьей части своего трактата, посвященной применению теории функций в механике, Лагранж задается целью разъяснить и определить понятие мгновенной скорости, которое уже давно обсуждалось в науке о движении и которое, как мы видели, действительно не получило вполне ясного и строгого определения.

Вначале Лагранж рассматривает прямолинейное и равномерное движение, которое описывается наиболее простой функцией времени: $x = ft = at$ ($x$ — это «пространство, пройденное за время $t$»). Для «алгебраического количества», т. е. для числа $a$, Лагранж дает такое определение [54, с. 311—312]: «Постоянная $a$, выражающая отношение пространства ко времени, является мерой того, что называют *скоростью*».

Как видим, Лагранж, в отличие от Остроградского (см.

разд. 10), постоянную $a$ в уравнении $x=at$ определяет не как скорость, а лишь как *меру* скорости. Разумеется, $a$ — *численная* мера, или, как говорят, *численное* значение скорости.

Обозначив меру, или численное значение, некоторой величины $Q$ символом $\{Q\}$, приведенное выше определение Лагранжа можно записать так:

$$(a=\{v\})=_{Df}(a=x/t). \tag{4}$$

Определив аналогично меру $b$ ускоряющей силы (для движения $ft=bt^2$), Лагранж далее переходит к рассмотрению прямолинейного движения, заданного уравнением $x=ft$, где $f$ — произвольная функция от $t$. Разложив разность $f(t+\theta)-f(t)$ (представляющую собой «пространство, пройденное за время $\theta$, которое начинается в мгновение, когда время $t$ кончилось») в ряд по степеням $\theta$:

$$\theta f't+\frac{\theta^2}{2}f''t+\frac{\theta^3}{2\cdot 3}f'''t+\ldots,$$

Лагранж замечает [54, с. 314]: «Таким образом, общее движение слагается из различных частных движений, в которых пройденные за время $\theta$ пространства равны $\theta f't$, $(\theta^2/2)f''t$ и т. д.; и мы видим, что первое из этих частных движений — равномерное, *со скоростью, измеряемой через* $f't$ (курсив наш.— *Л. К.*)...».

Ясно, что в силу лагранжева определения (4) выделенная нами фраза означает, что

$$\{v_\mu\}=f't; \tag{5}$$

$\mu$ — это то частное равномерное движение, о котором идет речь в приведенном выше фрагменте.

Теперь уже Лагранж подходит к самому понятию мгновенной скорости [54, с. 316]: «Если бы причины, мешающие данному движению быть равномерным, внезапно исчезли, то движение, начиная с этого момента, продолжалось бы равномерно *со скоростью, измеряемой через* $f't$ (курсив наш.— *Л. К.*)... Итак, во всяком прямолинейном движении, в котором пробегаемое пространство является данной функцией протекшего времени, функция первая от этой функции [20] представит скорость, а функция вторая [21] — ускоряющую силу в любой момент».

Учитывая выражения (4) и (5), это лагранжево определение мгновенной скорости произвольного движения $\mathscr{M}$ в момент $t$ — кратко: $v(\mathscr{M}, t)$ — можно представить так:

$$\{v(\mathscr{M}, t)\}=f'_{\mathscr{M}}t. \tag{6}$$

Несколько далее Лагранж пишет [54, с. 317]: «Таким образом, пространство, скорость и сила, рассматриваемые как функции времени, представляются соответственно первоначальной

[20] Так Лагранж называет производную $f'$.
[21] Так Лагранж называет вторую производную $f''$.

функцией (т. е. $f$.— *Л. К.*), ее функцией первой и ее функцией второй...

Эти понятия скорости и ускоряющей силы, как видим, весьма просты и не зависят от любой метафизики».

Казалось бы, Лагранжем дано ясное и точное определение понятия мгновенной скорости (и мгновенного ускорения). Но ведь Лагранж определил не саму скорость $v$, а только ее меру — численное значение $\{v\}$. Такое косвенное определение понятия скорости $v$ или, точнее, $v(\mathscr{M}, t)$ не является правильной дефиницией, ибо, как нетрудно убедиться, оно не удовлетворяет *условию переводимости* (см. разд. 5), т. е., опираясь на это определение, нельзя исключить термин $v$ (или $v(\mathscr{M}, t)$) из каждого контекста. Например, если $[v]$ означает то же, что «единица скорости», то уже из выражения $[v]$, опираясь только на дефиницию (4), нельзя исключить $v$. Такие контексты имеются в самой «Теории аналитических функций»; например [54, с. 318]: «Если данную скорость хотим принять за единицу скорости...».

Итак, Лагранжу не удалось последовательно осуществить свой замысел — дать строгое определение понятия мгновенной скорости. Заметим, что попытки определить понятие мгновенной скорости, делавшиеся после Лагранжа, также нельзя считать удачными: как правило, понятие мгновенной скорости так или иначе сводилось к понятию скорости равномерного движения (см., например, определения С. Пуассона [45, с. 268; 53, с. 209], Ж. Понселе [49, с. 33], Г. Кориолиса [55, с. 3], А. Резаля [51, с. 4], В. Шелля [56, с. 103]). Поскольку же скорость равномерного движения понималась как число или как пространство, пройденное в единицу времени, то с этими «математическими количествами», по определению, отождествлялась и мгновенная скорость. Таким образом, высказывание Пуассона о трудности и неадекватности определения скорости (см. разд. 9) полностью относится и к понятию мгновенной скорости.

**12. Геометризация понятия скорости.** Как известно, классический анализ к концу XIX в. обогатился новой главой — векторным анализом. В связи с этим концепция скорости как числа или как пространства, пройденного в единицу времени, претерпела метаморфозу — скорость стали рассматривать как ориентированный отрезок с началом в движущейся точке (приложенный вектор). Вначале — в 60—80-х годах XIX столетия — эта «геометрическая» концепция вводилась лишь как некоторое удобное графическое представление «обычной» скорости — числа $s/t$ или $ds/dt$. Так, И. Сомов, определив скорость в произвольном криволинейном движении как производную $ds/dt = f'(t)$, пишет [57, с. 4]: «Мы будем изображать эту скорость длиною $MT = f'(t)$, отложенною на касательной к траектории в точке $M$ и направленною в ту сторону, куда движется точка $m$ во время $t$».

Позднее и на самом деле скорость стали определять как некоторый ориентированный отрезок — приложенный вектор обычного трехмерного евклидова пространства. Типичным примером может служить изложение понятия о скорости в трактате П. Аппеля.

Уже в случае равномерного прямолинейного движения вдоль оси $Ox$ скорость определяется Аппелем не как некоторое число или пространство, пройденное в единицу времени, а как геометрический объект — ориентированный отрезок этой оси [58, с. 58]: «Пусть $M$ — положение движущейся точки в момент времени $t$, а $M_1$ — ее положение в момент $t+\Delta t$, где $\Delta t>0$. Геометрическая величина $MM_1$ [22], если ее отсчитывать вдоль оси $Ox$, имеет алгебраическое значение, равное $\Delta x$. Если в направлении $MM_1$ отложить от точки $M$ отрезок $MW$, равный $MM_1/\Delta t$ [23], то *геометрическая величина* $MW$, алгебраическое значение которой равно $\Delta x/\Delta t$, называется *скоростью равномерного движения*».

Мгновенная скорость в общем случае криволинейного движения вводится Аппелем следующим образом [58, с. 59]: «Пусть $M$ и $M_1$ — положения движущейся точки в моменты $t$ и $t+\Delta t$. Отложим на хорде $MM_1$ в направлении $MM_1$ отрезок $MW$, равный $MM_1/\Delta t$. Вектор $MW$ называется *средней скоростью* движущейся точки за промежуток времени $\Delta t$. Это — скорость, которую должна иметь воображаемая точка, описывающая прямолинейно и равномерно отрезок прямой $MM_1$ за промежуток времени $\Delta t$. Когда $\Delta t$ стремится к нулю, средняя скорость $MW$ стремится к предельному вектору $MV$, *касательному* к траектории, который называется *скоростью движущейся точки в момент* $t$. Скорость есть полярный вектор, приложенный к движущейся точке».

Такое изложение понятия о скорости стало общепринятым. С теми или иными несущественными изменениями его можно встретить почти в каждом современном трактате или учебнике по теоретической механике.

Можно ли считать, что это — строгое и адекватное определение понятия скорости как кинематической величины? Вовсе нет.

Во-первых, это определение не является адекватным, так как в нем геометрический объект — ориентированный отрезок $MV$ обычного трехмерного евклидова пространства отождествляется с физической (кинематической) величиной. Перефразируя слова Пуассона (см. разд. 9), можно сказать: геометрическая величина (вектор) $MV$ является лишь *образом* скорости движущейся точки в момент $t$, а не самой скоростью.

---

[22] Геометрической величиной, или вектором, Аппель называет отрезок прямой $A_1B_1$, имеющий начало в точке $A_1$ и конец в точке $B_1$ [58, с. 16].

[23] Согласно Аппелю, $\Delta t$ является действительным положительным числом. Вообще буква $t$ обозначает число, «которое измеряет в каких-нибудь единицах (например, в секундах среднего времени) промежуток времени между рассматриваемым и начальным моментами» [58, с. 57].

Кроме того, отождествление скорости, а следовательно и ускорения, и некоторых других механических величин с векторами трехмерного евклидова пространства приводит к нелепому выводу — возможности сложения скоростей и ускорений, радиусов-векторов и скоростей и т. д. [59].

Во-вторых, рассмотренное нами определение не является и строгим. Определяемый термин в нем, если выписать его полностью, есть «скорость движущейся точки $P$ в момент времени $t$». Здесь буква $t$, как отмечено выше (см. сноску 23), обозначает действительное число. Но одно фиксированное число $t$ само собой, без предварительного указания начального момента времени $C_0$ и избранной единицы длины интервалов времени $\tau_0$ — кратко: без указания избранной аффинной системы координат $S=(C_0, \tau_0)$ в одномерном пространстве моментов времени — никакого момента времени не определит (ср. [60, с. 117]). Поэтому термин «момент времени $t$» нуждается в существенном дополнении: «момент времени, которому в системе координат $S$ соответствует число $t$» — кратко: $\mathfrak{m}_S(t)$ [24]. Определяемый термин, таким образом, является выражением: «скорость движущейся точки $P$ в момент времени, которому в системе координат $S$ соответствует число $t$» — кратко: $\mathbf{v}(P, \mathfrak{m}_S(t))$.

Если через $\mathbf{r}$ обозначим радиус-вектор движущейся точки относительно избранной системы отсчета, то определение мгновенной скорости, данное Аппелем, можно записать так:

$$\mathbf{v}(P, \mathfrak{m}_S(t)) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{r}(P, \mathfrak{m}_S(t+\Delta t)) - \mathbf{r}(P, \mathfrak{m}_S(t))}{\Delta t}. \tag{7}$$

Однако логика не считает правильным определение (7), так как определяемое выражение $\mathbf{v}(P, \mathfrak{m}_S(t))$ содержит в себе другой, ранее введенный функтор $\mathfrak{m}_S$ (см. [62, с. 76]; ср. также [63, с. 143]). Неправильное же определение обычно приводит к ложным следствиям. Такое ложное следствие определения (7) получим, если произведем простое преобразование:

$$S\to S'=(C_0, \tau_0'), \qquad \tau_0'=\alpha\tau_0, \qquad \alpha\neq 0, \qquad \alpha\neq 1.$$

Тогда, как легко видеть, в правой части соотношения (7) лишь знаменатель $\Delta t$ умножится на $1/\alpha$, остальные же ее члены (векторы) останутся без изменения (ср. [64, с. 4]); следовательно, приходим к ложному выводу:

$$\dot{\mathbf{v}}(P, \mathfrak{m}_S(t)) = \alpha\mathbf{v}(P, \mathfrak{m}_S(t)).$$

Таким образом, широко распространенное определение скорости как ориентированного отрезка (вектора) $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\mathbf{MM_1}}{\Delta t}$ нельзя считать удовлетворительным — это неправильное определение, приводящее к ложным следствиям.

---

[24] Это уточнение обычного краткого термина «момент времени $t$» принадлежит Г. Вейлю [61, с. 7].

Следует отметить, что некоторые авторы, определяя кинематические понятия с помощью векторного анализа, стараются избежать прямого отождествления скорости с ориентированным отрезком. Соответствующую производную радиуса-вектора точки $P$ они называют не скоростью, а *вектором* скорости точки $P$ в момент времени $t$ (см., например, [64, с. 3; 65, с. 15; 66, с. 312]). В этом случае непосредственно определяемое понятие уже несколько иное: «вектор скорости точки $P$ в момент времени $t$» — кратко: $\mathrm{Vect}\, V(P,\ t)$; само же определение может быть записано так:

$$\mathrm{Vect}\, V(P,\ t) = d\mathbf{r}(P)/dt. \tag{8}$$

Термин $V(P,\ t)$ определяется в (8) косвенно — ситуация, вполне аналогичная той, которую мы отметили выше, рассматривая определение понятия мгновенной скорости Лагранжем (см. разд. 11). К сожалению, аналогия идет и дальше: как и упомянутое определение Лагранжа, дефиниция (8) является неправильной, ибо она не удовлетворяет условию переводимости, т. е. не из всякого контекста она позволяет исключить термин $V(P, t)$.

Для примера возьмем такой фрагмент из «Лекций о принципах механики» Л. Больцмана [65, с. 15]: «Он сам (т. е. только что определенный Больцманом вектор скорости материальной точки в момент $t$.— *Л. К.*) изображает скорость данной материальной точки по величине и направлению, ее составляющие по трем осям координат, проекции которых равны $u$, $v$, $w$, и притом безразлично, из какой точки пространства он откладывается».

Если отношение изображения, о котором идет речь в этом отрывке, обозначить через $D$, то высказывание Больцмана можно кратко записать так:

$$\mathrm{Vect}\, V(P, t) D V(P, t).$$

Ясно, что на основании определения (8) термин $V(P,\ t)$ из этого контекста исключить нельзя.

Заметим, что определение (8) неудовлетворительно и по другой причине: фигурирующая в нем переменная $t$ пробегает некоторое множество $R$ действительных чисел, и если восстановить строгость, преобразуя термин «момент времени $t$» в уже знакомый нам термин $\mathfrak{m}_s(t)$ и соответственно термин $V(P,\ t)$ в термин $V(P,\ \mathfrak{m}_s(t))$, то определение (8) приведет к такому же противоречию, как и определение (7).

Все сказанное в этом и в предшествующих разделах показывает, что ни попытки точного и адекватного определения понятия скорости в рамках чистого анализа, ни такие же попытки в рамках — если употребить слова Остроградского — чистого векторного анализа не были удачными.

**13. Особая трактовка понятия скорости Д. Бобылевым.** Весьма оригинальное изложение понятия о скорости, выгодно отличающееся от ставшего традиционным отождествления ее или с числом, или с длиной, или, наконец, с ориентированным отрезком, имеется в капитальном «Курсе аналитической механики» Д. Бобылева [67]. Рассмотрим вкратце наиболее интересные фрагменты этого «Курса», касающиеся нашей темы.

Д. Бобылев сперва определяет термин «средняя скорость в пути» [67, с. 17]: «*Среднею скоростью в пути, совершаемом точкою в течение промежутка времени* $(t_2—t_1)$, *называется отношение между длиною пути* $l$, *пробегаемого точкою в течение этого промежутка времени, и величиною самого промежутка*, т. е.

$$(\text{средняя скорость в пути}) = l/(t_2 - t_1)».$$

Как мы знаем (см. разд. 7), это отношение разнородных величин, следуя Эйлеру, обычно сводили «к отвлеченным числам». Бобылев же, как бы возвращаясь к идеям видовой логистики Ф. Виета и обобщая их, сохраняет за этим отношением статус величины sui generis и строго отграничивает его от отвлеченного числа. Он эксплицирует свое определение следующим образом [67, с. 17—18]:

«Пусть $l$, длина пути, заключает в себе $L$ единиц длины, а величина промежутка времени $(t_2—t_1)$ заключает $\tau$ единиц времени ($L$ и $\tau$ суть отвлеченные количества целые или дробные); по приведенному определению средняя скорость в пути равна:

$$\frac{L\times(\text{единица длины})}{\tau\times(\text{единица времени})} = \frac{L}{\tau}\times\left[\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}\right],$$

т. е. средняя скорость в $L/\tau$ раз более той скорости, при которой длина пути, пройденного в единицу времени, равна единице длины... Выражение

$$\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}$$

есть символ единицы средней скорости; это есть величина вполне определенная, коль скоро известно, что принято за единицу длины и что за единицу времени».

Как показывает этот фрагмент, Бобылев, преобразуя выражение $l/(t_2—t_1)$, совсем четко пользуется принципом, согласно которому любая физическая величина $Q$ равна произведению двух сомножителей: единицы измерения этой величины $[Q]$ и соответствующего ей численного значения $\{Q\}$ величины $Q$:

$$Q = \{Q\}\cdot[Q]. \qquad (9)$$

Как известно, в 20-е годы уже нашего века этот принцип положил в основу своей теории «уравнений величин и уравнений численных значений» Ю. Валлот (см., например, [68]).

Все же следует заметить, что, несмотря на использование формулы (9), точный смысл отношения двух разнородных величин — длины и времени, а следовательно, и понятия скорости остаются в курсе Бобылева нераскрытыми. Ведь отношение $l/(t_2-t_1)$ разнородных величин $l$ и $t_2-t_1$ с помощью (9) Бобылевым сведено к произведению числа $L/\tau$ и величины

$$\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}, \tag{10}$$

которая в свою очередь сама является отношением таких же разнородных величин! Кроме того, вынесение числовых множителей $L$ и $\tau$ из числителя и знаменателя и помещение их частного $L/\tau$ перед отношением (10) (ассоциативность умножения таких отношений на действительные числа) требует отдельного обоснования (Бобылев это свойство ассоциативности оставляет без доказательства).

Таким образом, хотя средняя скорость в пути, по определению Бобылева, не отождествляется ни с числом, ни с длиной, но в соответствии с (9) признается величиной особого рода, логико-математические основания образования такого понятия остаются неопределенными. Эта неопределенность сказывается на дальнейших понятийных конструкциях «Курса». Так, необоснованной остается дефиниция мгновенной скорости [67, с. 19]:

«*Величина скорости $v$ точки в какой-либо момент времени есть предел, к которому приближается средняя скорость в пути, совершаемом точкою в течение промежутка времени, начинающегося в момент $t$, при уменьшении величины промежутка до нуля, т. е.*

$$v = \text{пределу} \left[\frac{l(t+\vartheta,\ t)}{\vartheta}\right]_{\vartheta\to 0} \text{»}.$$

В самом деле, ведь в новой системе объектов $V$, которыми являются «средние скорости в пути», т. е. отношения $l:\vartheta$, и которые не отождествлены с действительными числами, понятие предельного перехода еще не установлено! Пока же понятие предела для элементов множества $V$ точно не определено, понятие мгновенной скорости также нельзя считать строго определенным.

Далее в своем курсе Бобылев, следуя устанавливающимся традициям векторного исчисления, величину скорости $v$ представляет «как отрезок линии, заключающий в себе столько линейных единиц, сколько в самой скорости заключается единиц скорости, и отложенный от положения точки по направлению движения» [67, с. 26].

Замечательно, что Бобылев (уже *в отличие* от устанавливающихся традиций (см. разд. 12)) такой отрезок $\overline{UU_1}$, представляющий определенную скорость, чаще всего не отождествляет с этой самой скоростью — он резко разграничивает эти два объекта.

«Здесь $\overline{UU_1}$,— читаем на с. 232 первой части «Курса аналитической механики»,— означает длину, скорость же, представляемая этою длиною, равна

$$\frac{\partial}{в}\frac{\overline{UU_1}}{\partial}=\frac{\overline{UU_1}}{в} » .$$

(Здесь буквы $\partial$ и $в$ обозначают избранные единицы длины и времени.)

Таким образом, Бобылев допускает деление геометрических векторов на единицу длины и на единицу времени, а вследствие произвольного выбора последних — вообще на длину и на время. С помощью такой обобщенной операции деления им определяется, например, понятие ускорения точки: «Ускорение есть

$$\text{предел}\left[\frac{\text{скорость }\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta\to 0}=\frac{1}{в}\text{ предел}\left[\frac{\overline{UU_1}}{\vartheta}\right]_{\vartheta\to 0} »$$

[67, с. 231] (последнее соотношение — следствие того факта, что скорость $\overline{UU_1}$, т. е. приращение скорости точки за время $\vartheta$, или «скорость, представляемая хордой $\overline{UU_1}$», есть, согласно Бобылеву, частное $\overline{UU_1}/в$).

Однако, как и в случае скалярных величин $l/\vartheta$, новые объекты — отношения $\overline{UU_1}/\vartheta$ и $\overline{UU_1}/l$ — вводятся Бобылевым в кинематику без надлежащего логико-математического обоснования. Между тем такие символы, как $\overline{UU_1}/\vartheta$, $\overline{UU_1}/l$, где $\vartheta$ — длина промежутков времени, $l$ — длина отрезков, не могут применяться со смыслом в той системе понятий, к которой примыкает Бобылев.

В самом деле, начальные понятия векторного исчисления вводятся Бобылевым по Сен-Венану: постулируется наличие нескольких «линий конечной длины и определенного направления: линии $A_1A_1'$, имеющей направление от $A_1$ к $A_1'$ и длину $a_1$, линии $A_2A_2'$, имеющей направление от $A_2$ к $A_2'$ и длину $a_2$, ..., наконец, линии $A_nA_n'$, имеющей направление от $A_n$ к $A_n'$ и длину $a_n$» [67, с. 122]. Затем обычным способом определяются геометрическая сумма этих линий (или, по Бобылеву, «этих длин») и понятие геометрического вычитания. При таком (стандартном) понимании исходных данных векторного исчисления «линии» можно делить только на числа (см. хотя бы [69, с. 7; 70, с. 6]). Если, например, $\overline{UU_1}$ — некоторая линия, то $\overline{UU_1}/\alpha$ для всякого числа $\alpha\neq 0$ — также линия, имеющая определенную длину, но символ $\overline{UU_1}/\partial$, где $\partial$ — единица длины, не имеет смысла: если разделить длину линии $\overline{UU_1}$ $(UU_1)$ на единицу длины $\partial$, то получится уже не длина, а число $UU_1/\partial$!

Таким образом, в системе понятий векторного исчисления, принятой Бобылевым, ни выражение $\overline{UU_1}/\partial$, ни выражение $\overline{UU_1}/в$ (или $\overline{UU_1}/\vartheta$) не имеют смысла. Тем не менее сам факт введения в кинематику новых объектов — величин $\overline{UU_1}/\vartheta$, которые являются скоростями par excellence и которые никак нельзя отождествить с векторами $\overline{UU_1}$, заслуживает внимания. На фоне всех предшествующих попыток точного представления понятия скорости факт этот указывает на то, что строгое и адекватное определение этого фундаментального понятия механики требует более сильных логико-математических средств.

**14. Понятие скорости в аксиоматических системах механики.** Работой Г. Гамеля «Об основаниях механики», опубликованной в 1908 г. [71] и стимулированной известным парижским докладом Д. Гильберта [72], начался этап серьезных попыток поставить классическую механику на аксиоматическую основу. В этом направлении уже достигнуты немалые успехи, особенно за время после второй мировой войны.

Естественно было бы думать, что именно в аксиоматизированной механике, построенной по строгим правилам дедуктивных наук, такое важное ее понятие, как «скорость», получило точное и адекватное определение. Однако это предположение не подтверждается действительностью; во всех предложенных до сих пор аксиоматических системах классической механики скорость определяется просто как ориентированный отрезок прямой, как вектор трехмерного евклидова пространства, в котором совершаются движения изучаемых механикой материальных тел. В этом отношении аксиоматизация механики не дала ничего нового по сравнению с предшествующим ей периодом развития механики.

Для примера рассмотрим определения понятия скорости в трех аксиоматических системах механики — системе Гамеля, системе С. Зарембы и системе В. Нолла — К. Трусделла.

1. В упомянутой работе Гамеля 1908 г. самая первая аксиома гласит [71, с. 355]:

«a) Существует вещественная, непрерывно изменяющаяся величина $t$, абсолютное *время*».

Как видим, в системе Гамеля время отождествляется с некоторой независимой вещественной переменной $t$.

Следующая аксиома относится к существованию пространства:

«b) Существует определенное (евклидово) абсолютно *неподвижное пространство*.

В этом пространстве каждая его точка $X$ определяется вектором $\mathbf{x}$, который проводится от некоторой неподвижной точки $O$ к точке $X$» (Там же).

Таким образом, $\mathbf{x}$ является обычным радиусом-вектором точки $X$.

Несколько далее даются определения обеих главных кинематических величин [71, с. 356]: «$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{x}}{dt}$ называется мгновенной *скоростью* точки $A$, $\mathbf{w} = \frac{d^2\,\mathbf{x}}{dt^2}$ — *ускорением*».

Следовательно (в силу аксиом a и b), **v** и **w** — это обычные, геометрические векторы евклидова неподвижного пространства и определение скорости, данное Гамелем, в сущности совпадает с рассмотренным выше определением этого понятия, данным П. Аппелем (см. разд. 12).

2. В оригинальном и глубоком по содержанию, аксиоматически построенном курсе теоретической механики С. Зарембы понятие скорости вводится тремя определениями [73, с. 201—202]:

«279. Определение. Движение физической точки, определяемое уравнениями

$$x = a't + a, \qquad y = b't + b, \qquad z = c't + c,$$

называется *равномерным прямолинейным* движением, а вектор, равный вектору, описанному рассматриваемой точкой в единицу времени, называется *скоростью* этой точки...

280. Определение. Выражение *средняя скорость физической точки M в некотором ненулевом промежутке времени* $(t_1, t_2)$ означает скорость, с которою должна бы двигаться прямолинейным равномерным движением некоторая точка $P$, чтобы в моментах $t_1$ и $t_2$ ее положения слились соответственно с положениями точки $M$...

282. Определение. Выражение *скорость физической точки в некоторый момент* $t_1$ означает предел ее средней скорости в промежутке времени $(t_1, t_2)$, когда $t_2$ стремится к $t_1$, принимая значения, не равные числу $t_1$».

Самая последняя фраза цитированного фрагмента показывает, что Заремба, подобно Гамелю, переменную $t$ рассматривает как числовую переменную; весь же цитированный фрагмент доказывает, что скорость в системе механики Зарембы — это ориентированный отрезок прямой (вектор). Определение мгновенной скорости, данное Зарембой, совпадает с определениями этого понятия, данными Аппелем и Гамелем.

3. Обратимся к известному «Первоначальному курсу рациональной механики сплошных сред» К. Трусделла [74]. В главе I автор, приняв сначала, что «пространство $E_1$ моментов времени отождествляется с действительной прямой $R$», пишет следующее [74, с. 37—38]: «В механике принято, за исключением специально оговариваемых случаев, рассматривать только такие движения $\chi$, которые для каждого $X$ (тела-точки.— *Л. К.*) дифференцируемы по $t$ по крайней мере дважды, а часто и большее число раз, столько, сколько требуется. Производные от $\chi$ по $t$ обозначают через $\dot{\chi}, \ddot{\chi}, \ldots, \overset{(n)}{\chi} \ldots$ и значения этих производных называют *скоростью* $\dot{\mathbf{x}}$, *ускорением* $\ddot{\mathbf{x}}, \ldots$, $n$-*й скоростью* $\overset{(n)}{\mathbf{x}}$ тела-точки $X$ в момент времени $t$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\chi}(X, t), \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\chi}(X, t), \ \ldots, \qquad \overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\chi}(X, t). \qquad (\text{I.7—7})$$

Легко показать, что для любого данного движения $\chi$ скорости представляют собой векторы

$$\overset{(n)}{x} \in \mathscr{V}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{»}. \tag{I.7—8}$$

Через $\mathscr{V}$ Трусделл обозначает так называемое трансляционное пространство для трехмерного евклидова пространства мест $E_3$ [74, с. 34].

Итак, по определению Трусделла, не только скорость $\dot{\mathbf{x}}$ тела-точки $X$, но и ее ускорение $\ddot{\mathbf{x}}$, а также все ее ускорения высших порядков $\overset{(n)}{\mathbf{x}}$ $(n > 2)$ являются обычными векторами линейного пространства $\mathscr{V}$.

Так как определения понятия скорости в аксиоматических системах механики сводят это понятие к простому (геометрическому) вектору, то этим определениям свойственны те же недостатки, о которых подробнее говорилось выше при анализе концепции скорости как ориентированного отрезка (см. разд. 12).

**Заключение.** Все изложенное выше позволяет сделать вывод, что в процессе эволюции механики одному из важнейших ее понятий — понятию скорости — не было дано строгого и адекватного определения. Хотя, разумеется, степени строгости, предъявляемой к дефинициям понятий механики, менялись вместе с развитием самой механики, вывод о несуществовании точного и адекватного определения понятия скорости относится — как показывает проведенный анализ — к каждому этапу эволюции механики.

Одной из главных причин неудовлетворительности предлагавшихся вариантов количественного определения скорости является упрощенная, неточная трактовка понятия времени в механике[25]. Если — как это принято во многих учебниках, трактатах, аксиоматических системах классической механики — время отождествляется с некоторой независимой вещественной переменной $t$, значения которой непрерывно возрастают, то традиционные дефиниции скорости как производной радиуса-вектора по времени дают только неправильные определения, которые как таковые приводят к ложным следствиям.

Таким образом, к строгому, адекватному определению понятия скорости поведет лишь надлежащая реконструкция (в рамках классической механики) понятия времени — основной кинематической величины.

---

[25] В механике трудно найти другой термин, который употреблялся бы в ней так неоднозначно, как выражение «время». Например, в «Рациональной механике» И. Сомова [57] на одной лишь с. 4 фраза «время $t$» употребляется в четырех разных значениях: как действительное число (3-я строка сверху), как промежуток времени (13-я строка сверху), как длина промежутка времени (11-я строка снизу), как момент времени (6-я строка снизу).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Григорьян А. Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Наука, 1974. 479 с.
2. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 274 с.
3. *Clagett M.* The Liber de motu of Gerard of Brussels and the origins of kinematics in the West.— Osiris, 1956, vol. 12, p. 73—175.
4. *Duns Scotus J.* In VIII libros Physicorum Aristotelis Questiones.— In: Duns Scoti J. Opera. Lugduni, 1639, t. 2. 662 p.
5. *Saxo de A.* Epitome in proportiones. Cap. VII.— In: Pauli Soncinatis Epitomes quaestionum Joannis Capreoli super librum sententiarum (sine anno), p. 5—14.
6. *Bradwardinus Th.* Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus.— In: Thomas of Bradwardine. His Tractatus de Proportionibus. Its significance for the development of mathematical physics/Ed. and transl. by H. L. Crosby, jun. Madison, 1955, p. 64—140.
7. *Gassendi P.* Epistolae tres de proportione qua gravia decidentia accelerantur.— In: Gassendi P. Opuscula Philosophica. Lugduni, 1658, t. 3. 662 p.
8. *Гоббс Т.* Избранные произведения: В 2-х т. М.: Мысль, 1964. Т. 1. 583 с.
9. *Джеммер М.* Понятие массы в классической и современной физике. М.: Прогресс, 1967. 254 с.
10. *Галилей Г.* Избранные труды: В 2-х т. М.: Наука, 1964. Т. 2. 571 с.
11. *Wallis J.* Mechanica, sive de motu tractatus geometricus.— In: Wallis J. Opera mathematica. Oxoniae, 1695, vol. 1, p. 575—1063.
12. *Hobbes T.* Opera philosophica quae latine scripsit omnia. Studio et labore G. Molesworth. Londini, 1845. Vol. V.
13. *Кульвецас Л.* Логика и определения понятий физических величин. Вильнюс, 1979. 110 с.
14. *Frisi P.* De gravitate universali corporum libri tres. Mediolani, 1768.
15. *D'Alembert J. B. R.* Vitesse.— In: Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné... Paris, 1765. T. 17, p. 359—361.
16. *Крылов А. Н.* Собр. тр. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7. 696 с.
17. *Barrow I.* Lectiones Geometricae. Londini, 1672.
18. *Maclaurin C.* A Treatise of Fluxions. Edinburgh, 1742. Vol. 1. 412 p.
19. Leibnizens mathematische Schriften/Herausg. von C. I. Gerhardt. Zweite Abt., Halle, 1860. Bd. 2. 514 S.
20. История механики с древнейших времен до конца XVIII века/Под общ. ред. А. Т. Григорьяна, И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1971. 298 с.
21. *Willis R.* Principles of Mechanism. 2 ed. London, 1870. 458 p.
22. *Thomson W., Taite P. G.* Treatise on Natural Philosophy. Cambridge, 1879, vol. 1, pt 1. 508 p.
23. *Wolff Chr.* Elementa matheseos universae. Halae, 1748. T. 2. 506 p.
24. *Wolff Chr.* Philosophia prima sive Ontologia methodo scientifica pertractata. Veronae, 1736. 424 p.
25. *Wolff Chr.* Elementa matheseos universae. Halae, 1742. T. 1. 680 p.
26. *Hermann J.* Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum. Amstelaedami, 1716. 401 p.
27. *Bernoulli J.* Opera omnia. Lausannae; Genevae, 1742. T. 4. 588 p.
28. *Bartholino E.* Principia matheseos universalis seu introductio ad geometriae methodum Renati Des Cartes. 3 ed. Amstelodami, 1683. 420 p.
29. *Mariotte E.* De la percussion ou de choc des corps.— In: Oeuvres de M. Mariotte. Leide, 1717. t. 1, p. 1—116.
30. *Bernoulli J.* Opera omnia. Lausannae; Genevae, 1742. T. 1. 563 p.
31. *Voss A.* Die Prinzipien der rationellen Mechanik.— Encyklopädie math. Wiss., Leipzig, 1901—1908, Bd. IV, 1, S. 3—121.
32. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. М.; Л.: ОНТИ, 1938. 499 с.
33. *Даламбер Ж.* Динамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. 344 с.
34. *D'Alembert J. B. R.* Définition.— In: Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers..., Paris, 1754. T. IV.

35. *Горский Д. П.* Определение: (Логико-методологические проблемы). М.: Мысль, 1974. 310 с.
36. *Viète Fr.* Introduction à l'art analytique/Trad. par F. Ritter.— Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Phisiche, 1868, vol. 1, p. 228—276.
37. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. М.: Физматгиз, 1961. Т. 1. 315 с.
38. *D'Alembert J. B. R.* Équation.— In: Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné..., Paris, 1755. T. 5.
39. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Комментарии к книге «Начала Евклида».— В кн.: Начала Евклида, кн. I—VI. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 368—405.
40. *Swineshead R.* De motu.— In: Clagett M. The science of mechanics in the Middle Ages. Madison, 1959, p. 245—246.
41. *Laplace P. S.* Traité de mécanique céleste. Paris, 1799. Vol. 1.
42. *Legendre A. M.* Eléments de géometrie. 7 éd. Paris, 1808. 421 p.
43. *Bour E.* Cours de mécanique et machines. Première fasc. Cinématique. Paris, 1865.
44. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. Т. 1. 594 с.
45. *Poisson S. D.* Traité de mécanique. Paris, 1811. T. 1. 507 p.
46. *Остроградский М. В.* Собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. Т. 1. Ч. 2. Лекции по аналитической механике. 288 с.
47. *Cauchy A.* Exercises d'analyse et de physique mathématique, t. II.— In: Oeuvres complètes D'Augustin Cauchy. II sér. Paris, 1916, t. 12, p. 214—262.
48. *Cauchy A.* Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. I pt.— In: Oeuvres complètes D'Augustin Cauchy. II sér., Paris, 1897. T. 3, p. 1—331.
49. *Poncelet J. V.* Cours de mécanique industrielle. Metz, 1829. 248 p.
50. *Delaunay Ch.* Traité de mécanique rationnelle. Paris, 1857.
51. *Résal H.* Traité de cinématique pure. Paris, 1862. 412 p.
52. *Poincaré H.* Cinématique pure. Mécanismes. Paris, 1887. 136 p.
53. *Poisson S. D.* Traité de mécanique. 2 éd. Paris, 1833. T. 1. 567 p.
54. *Lagrange J. L.* Théorie des fonctions analytiques. Nouvelle éd. Paris, 1813. 383 p.
55. *Coriolis G.* Traité de mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines. Paris, 1844.
56. *Schell W.* Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig, 1870. 422 S.
57. *Сомов И.* Рациональная механика. СПб., 1872. Ч. 1. 397 с.
58. *Аппель П.* Теоретическая механика. М: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.
59. *Кульвецас Л. Л.* К проблеме аксиоматического обоснования понятия времени в классической механике.— В кн.: Из истории развития физико-математических наук/Под ред. А. Н. Боголюбова. Киев: Наук. думка, 1981, с. 95—103.
60. *Whitney H.* The mathematics of physical quantities.— Amer. Math. Month., 1968, vol. 75, N 2, p. 115—138.
61. *Weyl H.* Raum. Zeit. Materie. B., 1921. 300 S.
62. *Greniewski H.* Elementy logiki formalnej. W-wa, 1955. 492 S.
63. *Слупецкий Е., Борковский Л.* Элементы математической логики и теория множеств. М.: Прогресс, 1965. 368 с.
64. *Julia G.* Cours de cinématique. P., 1936.
65. *Boltzmann L.* Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. Leipzig, 1897. T. 1. 241 S.
66. *Chatelet A., Kampe de Fériet J.* Calcul vectoriel. P., 1923. 425 p.
67. *Бобылев Д.* Курс аналитической механики. СПб., 1880. Ч. 1. 282 с.
68. *Wallot J.* Dimensionen, Einheiten, Maßsysteme.— In: Handbuch der Physik//Herausg. von H. Geiger und K. Scheel. B., 1926, Bd. 2, S. 1—41.
69. *Wilson E. B.* Vector analysis founded upon the lectures of J. W. Gibbs. New Haven, 1913. 436 p.
70. *Marcolongo R.* Theoretische Mechanik. Leipzig; Berlin, 1911. Bd. 1. 346 S.
71. *Hamel G.* Über die Grundlagen der Mechanik.— Math. Ann., 1908, Bd. 66, S. 350—397.

72. *Гильберт Д.* Математические проблемы.— В кн.: Проблемы Гильберта/ /Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969, с. 13—64.
73. *Zaremba S.* Zarys mechaniki teoretycznej. Kraków, 1933, Т. 1. 311 s.
74. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

УДК 531/534(091)

*В. П. Лишевский*

# К ИСТОРИИ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МЕХАНИКЕ НИТИ В РОССИИ В XIX В.

Среди задач, решение которых способствовало созданию прикладной механики и которые в значительной степени повлияли на развитие математического анализа в XVII и XVIII вв., учение о гибкой нити занимает особое место. Важность этой проблемы объясняется чисто практическими нуждами: канаты применялись в шахтах для подъема грузов и на кораблях для крепления мачт и парусов, требования к созданию особо прочных тканей для выделки парусов обусловили необходимость изучения прочности нитей и т. д. Тогда же были поставлены задачи о трении нити, о провисании ее (закрепленной в двух точках) под действием собственного веса и т. п.

XIX век к изложенным выше задачам добавил новые. Появляются канатные дороги, висячие цепные мосты, ременная передача выдвигается на первое место среди различных трансмиссий, и это место она занимает на протяжении всего XIX в. Позже появляется новое приспособление для перемещения материалов — транспортерная лента.

Все сказанное выше объясняет, почему многие ученые за рубежом и у нас в стране уделяли внимание механике нити.

Несмотря на важное значение механики нити и на ее многочисленные научные и практические пересечения с различными направлениями науки и техники, процесс ее развития изучен явно недостаточно. Отрывочные разрозненные сведения по истории механики нити можно найти в монографиях по истории механики и механике нити, но в них почти ничего не говорится об исследованиях русских ученых. Исключение составляют работы [1—4] и некоторые другие, в которых содержатся отдельные сведения об исследованиях отечественных ученых по механике нити. В этой небольшой статье сделана попытка показать основные результаты, полученные русскими учеными в области механики нити.

Прежде всего необходимо отметить исследования по механике нити, выполненные нашим соотечественником М. В. Остроградским. 7 ноября 1834 г. он прочитал в Петербургской академии наук доклад «Общие соображения относительно моментов сил» (опубликован в 1838 г.), посвященный распространению принципа возможных перемещений на систему с освобождающими связями. В докладе в качестве примеров ученый рассматривает равновесие веревочного многоугольника и равновесие гибкой нерастяжимой нити [5, с. 13—21].

Обозначая число вершин веревочного многоугольника через $n+1$, координаты вершины с номером $i$ через $x_i$, $y_i$, $z_i$, проекции сил на оси координат через $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, отрезок веревки, заключенный между двумя соседними вершинами $i$ и $i+1$, через $r_i$, ученый получает следующее выражение для полного момента[1]:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Так как веревка нерастяжима, дифференциал $dr_i$ может принимать положительные значения только для перемещений, которые система никогда не сможет сделать. Поэтому, обозначая через $\lambda_i$ некоторую отрицательную величину, уравнение равновесия рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i + \lambda_i dr_i) = 0.$$

причем величина $\lambda_i$ отрицательна для любого $i$.

Проведя ряд преобразований, Остроградский приходит к системе

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} X_i &= -\lambda_i dr_i/dx_i, \\ \sum_{i=1}^{n+1} Y_i &= -\lambda_i dr_i/dy_i, \\ \sum_{i=1}^{n+1} Z_i &= -\lambda_i dr_i/dz_i, \end{aligned} \qquad (1)$$

откуда получает

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} Z_i = 0.$$

Если обозначить для краткости

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_i = A_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} Y_i = B_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} Z_i = C_i, \quad \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} = R_i,$$

[1] Под моментом сил Остроградский подразумевал работу сил.

то систему (1) можно преобразовать к виду

$$\lambda_i = A_i/\cos\alpha_k = B_i/\cos\beta_k = C_i/\cos\gamma_k = R_i,$$

где $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$ — углы, образуемые стороной многоугольника с осями координат.

Равнодействующая $R_i$ отрицательна, так как величины $\lambda_i$, а следовательно, и дроби $A_i/\cos\alpha_k$, $B_i/\cos\beta_k$, $C_i/\cos\gamma_k$ отрицательны. Знак у $\lambda_i$ и, следовательно, у $R_i$ мог бы быть любым, если бы многоугольник состоял не из нитей, а из жестких стержней.

Далее Остроградский переходит к определению условия равновесия гибкой нити. Эта задача выводится из условия равновесия веревочного многоугольника, если каждая из его сторон становится бесконечно малой, а число $n$ — бесконечно большим. Ученый указывает, что вопрос зависит от рассмотрения двух видов дифференциалов: первые относятся к бесконечно малым перемещениям, а другие — к переходу от одной точки нити к бесконечно близкой точке. Первые дифференциалы он обозначает буквой $\delta$, вторые — $d$.

Пусть $Xdm$, $Ydm$, $Zdm$ — проекции на оси координат сил, приложенных к элементу $dm$ нити, который соответствует координатам $x$, $y$, $z$. Тогда условие равновесия будет выражаться следующим образом:

$$\sum\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\left(\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}\right)\right] = 0.$$

В этом случае величина $\lambda$ также должна быть отрицательной.

Этим уравнением описывается равновесие свободной нити. Если же, например, ее концы закреплены, то, обозначая через $x_1$, $y_1$, $z_1$ координаты первой точки закрепления нити, а через $x_2$, $y_2$, $z_2$ — второй, для всех виртуальных перемещений получили бы

$$\delta x_1=0,\quad \delta y_1=0,\quad \delta z_1=0,\quad \delta x_2=0,\quad \delta y_2=0,\quad \delta z_2=0$$

и к общему уравнению равновесия следовало бы добавить функцию

$$a_1\delta x_1 + b_1\delta y_1 + c_1\delta z_1 + a_2\delta x_2 + b_2\delta y_2 + c_2\delta z_2,$$

где $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ произвольны по величине и по знаку. Тогда, преобразуя уравнение равновесия и приравнивая нулю коэффициенты при всех $\delta$, Остроградский получает три уравнения, относящиеся ко всем точкам нити:

$$X\,dm - d\lambda dx/ds = 0,\qquad Y\,dm - d\lambda dy/ds = 0,$$

$$Z\,dm - d\lambda dz/ds = 0,$$

и условия на концах:

$$a_1 + \lambda_1 dx_1/ds_1 = 0,\qquad b_1 + \lambda_1 dy_1/ds_1 = 0,\qquad c_1 + \lambda_1 dz_1/ds_1 = 0,$$

$$a_2 + \lambda_2 dx_2/ds_2 = 0,\qquad b_2 + \lambda_2 dy_2/ds_2 = 0,\qquad c_2 + \lambda_2 dz_2/ds_2 = 0,$$

которым всегда можно удовлетворить, выбрав соответствующие $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$.

Через несколько лет Остроградский вновь возвратился к этому вопросу. 18 января 1839 г. он прочитал в Петербургской академии наук доклад «О равновесии веревочного многоугольника и гибкой нерастяжимой нити» [5, с. 60—69]. В первой части доклада он рассмотрел условия равновесия веревочного многоугольника под действием некоторой системы сил.

Переходя к рассмотрению равновесия гибкой нити, Остроградский предполагает, что она закреплена на концах и в каждой точке на нее действуют силы, изменяющиеся при переходе от одной точки к другой и являющиеся, следовательно, функциями трех переменных $x$, $y$, $z$. Если обозначить через $ds$ элемент длины нити, через $q$ — площадь поперечного сечения, через $\rho$ — ее плотность и через $w_1$, $w_2$, $w_3$ — проекции ускорения на оси координат, то тогда составляющие силы, приложенной к этому элементу нити, будут $w_1\rho q ds$, $w_2\rho q ds$, $w_3\rho q ds$.

Пусть $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_2$, $y_2$, $z_2$ — координаты крайних точек нити; условия их закрепления будут

$$\delta x_1=0,\quad \delta y_1=0,\quad \delta z_1=0,\quad \delta x_2=0,\quad \delta y_2=0,\ \delta z_2=0.$$

Вследствие идеальной гибкости и нерастяжимости нити справедливо неравенство $\delta ds\leqslant 0$.

Общее уравнение равновесия нити имеет следующий вид:

$$\int \rho q\,(w_1\delta x + w_2\delta y + w_3\delta z)\,ds + \int \lambda ds + \\ + a_1\delta x_1 + b_1\delta y_1 + c_1\delta z_1 + a_2\delta x_2 + b_2\delta y_2 + c_2\delta z_2 = 0. \qquad (2)$$

После ряда преобразований Остроградский получает уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &w_1\rho q ds - d\lambda dx/ds=0,\\ &w_2\rho q ds - d\lambda dy/ds=0,\\ &w_3\rho q ds - d\lambda dz/ds=0 \end{aligned} \qquad (3)$$

и уравнения

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 = a_1, \quad \lambda_2\left(\frac{dx}{ds}\right)_2 = -a_2,\\ &\lambda_1\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 = b_1, \quad \lambda_2\left(\frac{dy}{ds}\right)_2 = -b_2,\\ &\lambda_1\left(\frac{dz}{ds}\right)_1 = c_1, \quad \lambda_2\left(\frac{dz}{ds}\right)_2 = -c_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

которые позволяют вычислить величины $a_1$, $b_1$, $c_1$ и $a_2$. $b_2$, $c_2$ — составляющие реакций связей на концах нити.

Далее Остроградский исследует уравнения (3), которые единственно нужны для равновесия. Для определения значений $\lambda$, равных абсолютным величинам натяжений нити, он получает уравнение

$$d\lambda = \rho q (w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz),$$

интегрируя которое, находит, что

$$\lambda = \int \rho q (w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz).$$

Затем он подставляет эту величину в тройное равенство

$$d\lambda = \frac{w_1 \rho q ds - \lambda d\,(dx/ds)}{dx/ds} = \frac{w_2 \rho q ds - \lambda d\,(dy/ds)}{dy/ds} = \frac{w_3 \rho q ds - \lambda d(dz/ds)}{dz/ds},$$

выведенное из уравнений (4). Так Остроградский получает дифференциальные уравнения кривой, образуемой нитью в состоянии равновесия.

Далее ученый применяет полученную теорию к частному случаю равновесия однородной весомой нити, свободно подвешенной за оба неподвижные конца и имеющей по всей длине одинаковое поперечное сечение, и получает уравнение цепной линии

$$y = \frac{A}{2a} e^{ax} + \frac{1}{2Aa} e^{-ax} + B,$$

где $A$ и $B$ — постоянные величины.

Определяя постоянные интегрирования, окончательно он получает

$$y = (e^{ax} + e^{-ax} - 2)/2a.$$

Остроградский находит также длину цепной линии и натяжение в ее нижней части и завершает свой анализ применением механики нити к теории висячих мостов.

В 1879 г. была напечатана интересная статья Н. Е. Жуковского «Связь между вопросами о движении материальной точки и о равновесии гибкой нити» [6], содержание которой ученый доложил на заседании Московского математического общества 18 ноября 1878 г. В этой статье прослеживается аналогия между движением материальной точки и равновесием гибкой нити.

Предположим, пишет Жуковский, что материальная точка движется по некоторой поверхности под действием силы, имеющей силовую функцию $U$.

Дифференциальные уравнения движения точки, масса которой равна единице, можно записать так:

$$dU/ds = v dv/ds, \qquad dU/dn = v^2/\rho. \tag{5}$$

Здесь $v$ — скорость точки, $ds$ — элемент дуги траектории, $\rho$ — радиус кривизны элемента дуги геодезической линии на поверхности, $dn$ — элемент нормали к траектории по направлению $\rho$.

Далее Жуковский предполагает, что вдоль рассматриваемой на поверхности траектории лежит гибкая нить, плотность которой всюду равна единице, и записывает дифференциальные уравнения равновесия этой нити под действием силы натяжения нити $T$ и сил, имеющих силовую функцию $F$.

На каждый элемент длины нити $ds$ по направлению касательной к этому элементу будет действовать сила, равная $\frac{dT}{ds}ds$, а по нормали — сила $Tdn/\rho$. Тогда уравнения равновесия нити запишутся так:

$$-dF/ds = dT/ds, \quad -dF/dn = T^2/\rho. \tag{6}$$

Интегрируя первые уравнения систем (5) и (6), Жуковский находит скорость точки $v$ и натяжение нити $T$:

$$v = \sqrt{2U}, \qquad T = -F. \tag{7}$$

Затем, пользуясь уравнениями (7), он приводит уравнения (5) к виду уравнений (6) и наоборот. Из уравнений (5) получается, что

$$\frac{d\sqrt{2U}}{ds} = \frac{dv}{ds}, \qquad \frac{d\sqrt{2U}}{dn} = \frac{v^2}{\rho}, \tag{8}$$

а из уравнений (6) —

$$\frac{d\,(^1/_2F^2)}{ds} = T\,\frac{dT}{ds}, \qquad \frac{d\,(^1/_2F^2)}{dn} = \frac{T^2}{\rho}. \tag{9}$$

Если положить в уравнениях (8) $\sqrt{2U} = -F$, а $v = T$, то получаются уравнения (6). Если же, наоборот, в уравнениях (9) положить $F^2/2 = U$, а $T = v$, то получаются уравнения (5).

«Это показывает,— заключает ученый,— что, изменяя надлежащим образом силовую функцию, можно переходить от задачи о движении материальной точки к задаче о равновесии гибкой нити, и, наоборот, сохраняя для траектории и для нити одну и ту же кривую, а для скорости и натяжения — одну и ту же величину» [6, с. 49].

В конце статьи Жуковский указывает примеры «некоторых взаимных случаев движения материальной точки и равновесия гибкой нити», т. е. показывает, как аналогично записываются силовая функция и скорость (для точки) и силовая функция и натяжение (для нити), когда материальная точка движется по параболе и гибкая нить в равновесии представляет собой параболу; когда материальная точка движется по эллипсу и гибкая нить в равновесии представляет собой эллипс и т. д. Если материальная точка на поверхности движется по геодезической линии, то силовая функция и скорость постоянны. Если гибкая нить на поверхности натянута по геодезической линии, то силовая функция и натяжение нити постоянны. И так далее.

В 1880 г. выходит в свет исследование В. Г. Имшенецкого, в котором он рассматривает равновесие гибкой нерастяжимой нити [7].

Имшенецкий получает канонические уравнения равновесия нити в следующем виде:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial H}{\partial k_x},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{\partial H}{\partial k_y},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{\partial H}{\partial k_z},$$

$$\frac{dk_x}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{dk_y}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \frac{dk_z}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{10}$$

Здесь $k_x=T\frac{dx}{ds}$, $k_y=T\frac{dy}{ds}$, $k_z=T\frac{dz}{ds}$, $H=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}+$ $+U(x,\ y,\ z)$, $ds$ — элемент нити, $T$ — натяжение, $U$ — силовая функция.

Далее он составляет соответствующее им дифференциальное уравнение в частных производных:

$$U(x, y, z)+\sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2}=h=\text{const}, \tag{11}$$

где

$$\partial W/\partial x=k_x,\quad \partial W/\partial y=k_y,\quad \partial W/\partial z=k_z. \tag{12}$$

Зная интеграл уравнения (11) $W(x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ h)$ ($a,\ b,\ h$ — произвольные постоянные), можно найти интегральные кривые системы (10) по уравнениям $\partial W/\partial a=\alpha=\text{const}$ и $\partial W/\partial b=\beta=$ $=\text{const}$, т. е. фигуру равновесия нити. Натяжение нити Имшенецкий определяет из выражения $T=h-U$, а ее длину $s$ — из уравнения $\partial W/\partial h-s=\gamma=\text{const}$.

В работе рассмотрен также случай равновесия нити на заданной неподвижной поверхности.

Н. П. Петров свою статью «Влияние трения при передаче работы упругим ремнем» начинает следующими словами: «Более 100 лет тому назад знаменитый Леонард Эйлер определил соотношение между уравновешивающими силами, приложенными к концам гибкой и нерастяжимой нити, огибающей круглый цилиндр в плоскости, перпендикулярной к оси, и силами трения между нитью и поверхностью цилиндра» [8, с. 1]. Далее автор говорит о том, что, несмотря на то что формула Эйлера выведена в предположении нерастяжимости нити, ею пользуются и тогда, когда нить растяжима. Петров ставит перед собой задачу определить, какую ошибку допускает инженер, пользуясь при расчете упругой ременной передачи формулой Эйлера. Он получает уравнение

$$\frac{T(1+\Delta k^2/Eg)-k^2\Delta q/g}{t(1-\Delta k^2/Eg)-k^2\Delta q/g}=e^{f\varphi}, \tag{13}$$

которое должно быть принято (вместо известного уравнения Эйлера), когда нельзя считать ремень нерастяжимой нитью, не имеющей массы, и когда желательно учесть при расчете упругость ремня, выраженную коэффициентом $E$, и центробежную силу ремня, уменьшающую его давление на шкив, зависящую от поперечных размеров ремня $q$ и его удельного веса $\Delta$ ($T$ — натяжение ведущего ремня, $t$ — ведомого, $k$ — величина, пропорциональная скорости ремня, $g$ — ускорение свободного падения, $f$ — коэффициент трения).

Если ремень так мало растяжим, что можно считать $E=\infty$, то уравнение (13) принимает вид

$$\frac{T - k^2\Delta q/g}{t - k^2\Delta q/g} = e^{f\varphi}. \tag{14}$$

Здесь $\varphi$ — угол охвата.

Член $k^2\Delta q/g$ выражает влияние центробежной силы. Если скорость ремня так мала, что величиной $k^2\Delta q/g$ можно пренебречь, то получается формула Эйлера $T=te^{f\varphi}$.

В заключение автор говорит, что уравнение Эйлера может быть принято во всех случаях практического применения с достаточной степенью точности. «Неправильность этого уравнения становится тем больше, чем больше величина скорости $k$, чем меньше коэффициент упругости $E$, чем меньше напряжение $R$ (наибольшее напряжение, приходящееся на квадратную единицу, т. е. $R=T/q$.— *В. Л.*) и чем больше отношение сил $T/t$» [8, с. 21].

Петров отмечает, что в первом приближении погрешность может быть вычислена как $\lg(T/t)$, и производит расчет для случая $k=10$ м/с, $E<5$ кг/мм², $R<0{,}2$ кг/мм², $T/t>2$. Получается, что отношение натяжений, вычисленных по формулам Эйлера и Петрова, равно 1,047. И далее следует вывод: «Влияние центробежной силы ремня, и при очень больших скоростях его, очень невелико» [8, с. 43].

Одновременно с Н. П. Петровым вопросом применимости формулы Эйлера к гибкой связи занимался М. Н. Демьянов. Он тоже ставил перед собой задачу «выяснить по возможности те последствия, которые являются результатом пренебрегаемой растяжимости ремня» [9, с. 2].

В своих трех статьях «О значении упругости ремня при передаче им работы» (1891—1893 гг.) Демьянов выводит формулы, по которым можно вычислять скорости, натяжения, работу ременных передач; доказывает справедливость уравнения Понселе; иным способом выводит формулу Кретца для ременных передач.

У Демьянова несколько иной подход к рассмотрению данной проблемы, чем у Петрова. Если Демьянов предполагает, что упругий ремень скользит на каждом шкиве вдоль всей дуги охвата и объясняет разнообразие рабочих усилий, передаваемых ременной передачей, зависимостью коэффициента трения от сил натяжения свободных частей ремня $T$ и $t$, то Петров считает, что коэффициент трения $f$ постоянен, не меняется, а ремень скользит не на всей дуге охвата, а только на части ее.

Так как подход авторов к решению данной задачи разный, то различны и полученные ими результаты. Кто же из них прав? На этот вопрос отвечает Жуковский в своей статье «О скольжении ремня на шкивах» [10], в которой он подробно разбирает исследования Петрова и Демьянова.

Жуковский приходит к выводу, что прав Петров: ремень скользит не на всех дугах охвата $\varphi_1$ и $\varphi_2$, а только на частях этих дуг $\varphi_1'$ и $\varphi_2'$. Поэтому основные формулы Демьянова приближенны, так как получены им из неправильного предположения.

Далее Жуковский замечает, что в уравнение Кретца

$$\frac{r_1\omega_1}{1+T/E}=\frac{r_2\omega_2}{1+t/E} \tag{15}$$

($\omega_1$, $r_1$, $\omega_2$, $r_2$ — угловые скорости и радиусы шкивов, $T$ — натяжение ведущей ветви, $t$ — натяжение холостой ветви ремня, $E$ — модуль упругости) не входит коэффициент трения, так как оно является следствием условия сохранения массы ремня в данном месте пространства. А вот соотношение Понселе

$$T_0=(T+t)/2$$

надо считать приближенным, справедливым при большой длине ремня $l$ сравнительно с $r_1$ и $r_2$.

Указывая на достоинства исследования Петрова, Жуковский отмечает полученный им интересный результат: работа, потерянная на преодоление трения скольжения ремня по ведущему шкиву, равна потерянной работе на рабочем шкиве.

В заключительном разделе своей статьи Жуковский пишет: «М. Н. Демьянов в конце своей статьи говорит по поводу существования нескользящих дуг, что „окончательный приговор в данном случае принадлежит опыту“... Подтверждение существования нескользящих дуг прямым опытом не лишено интереса. Этот последний параграф моей статьи будет посвящен объяснению небольшого прибора, построенного мною для упомянутой цели» [10, с. 508—509]. И далее Жуковский рассказывает об устройстве прибора, построенного им для доказательства существования нескользящих дуг, и о своих опытах, подтвердивших справедливость утверждения Петрова.

Русских ученых и инженеров интересовали также вопросы проектирования и расчета конструкций различных висячих мостов. В книге П. Усова «Строительное искусство» [11] содержится обширный материал по теории и расчету висячих мостов. Приведено дифференциальное уравнение равновесия цепи висячего моста, определяется форма равновесия при равномерной нагрузке, даются расчетные формулы для определения величины провисания и натяжения цепи. Приводится решение задачи об определении прогиба моста от нагрузки, сосредоточенной в середине пролета, а также приближенные формулы для учета упругих и температурных деформаций.

Л. Ф. Николаи в своем «Курсе мостов» [12] дает определение формы равновесия цепи гибкого висячего моста при равномерно распределенной нагрузке, формулы для нахождения усилий, действующих в цепи, метод определения длины дуги посредством разложения в ряд, приближенные формулы для вычисления упругих деформаций, приводит примеры расчета различных элементов висячего моста.

Таким образом, мы видим, что ученые России внесли существенный вклад в механику нити. Правда, они, так же как и ученые на Западе, решали лишь отдельные задачи по механике нити. Создателем механики нити как самостоятельного раздела науки считается советский ученый А. П. Минаков, который собрал воедино исследования о нити, разделил имеющийся материал на статику, кинематику и динамику, ликвидировал «белые пятна». Систематизируя разрозненный материал и делая большие обобщения, Минаков создал динамику нити с учетом ее упругости — раздел, который до него был разработан лишь частично. Кроме того, он построил теорию стационарных движений идеальной гибкой нерастяжимой нити, установив стройную классификацию таких движений и найдя изящный метод их изучения, значительно более простой и удобный, нежели методы предшествующих авторов. Теперь в механике нити наряду с уравнениями Эйлера и Дарбу есть уравнение Минакова и функция Минакова [13], которые строятся в зависимости от формы нити и сил, действующих на нее. И хотя Минаков в своих работах не упоминает отечественных исследователей механики нити, он безусловно знал их работы и следовал в своей деятельности традициям русской школы механиков.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Михаил Васильевич Остроградский, 1801—1862. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
2. *Григорьян А. Т.* История механики в России. М.: Наука, 1978. 192 с.
3. *Космодемьянский А. А.* Теоретическая механика и современная техника. 2-е изд. М.: Просвещение, 1975. 256 с.
4. *Щедров В. С.* Основы механики гибкой нити. М.: Машгиз, 1961.
5. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. Киев, 1961. Т. 2. 360 с.
6. *Жуковский Н. Е.* Связь между вопросами о движении материальной точки и о равновесии гибкой нити.— Мат. сб., 1879, т. 9, вып. 3, с. 530—535. (Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949, т. 1, с. 47—50.)
7. *Имшенецкий В. Г.* Канонические дифференциальные уравнения гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны в случае потенциальных сил. Харьков, 1880. 38 с.
8. *Петров Н. П.* Влияние трения при передаче работы упругим ремнем.— Изв. Петербург. технол. ин-та, 1893, с. 1—43.
9. *Демьянов М. Н.* О значении упругости ремня при передаче им работы.— Изв. Петербург. технол. ин-та, 1891—1893: Отд. изд. СПб., 1892—1894, вып. 1—3.
10. *Жуковский Н. Е.* О скольжении ремня на шкивах.— Тр. Отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. М., 1894, т. 7, вып. 1, с. 5—12; Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949, т. 3, с. 497—514.

11. *Усов П.* Строительное искусство. СПб., 1864. Ч. 2. Вып. 3. 430 с.
12. *Николаи Л. Ф.* Расчетная часть курса мостов. СПб., 1893, Ч. 1. 412 с.
13. *Минаков А. П.* Основы механики нити.— Науч. исслед. тр. Моск. текстил. ин-та, 1941, т. 9, вып. 1, с. 1—88.

УДК 531/534(091)

*Ю. П. Сурков*

# РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

**1. Теория интегральных инвариантов Пуанкаре.** В 1885 г. по поручению Шведской академии наук жюри в составе М. Г. Миттаг-Лёффлера, К. Вейерштрасса и Ш. Эрмита объявило конкурс на тему: найти в виде сходящихся рядов интегралы уравнений движения системы $n$ точек при условии ее устойчивости. Высокую оценку жюри получил представленный в 1889 г. мемуар А. Пуанкаре «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» [1]. Во второй части первой главы этого мемуара, названной автором «Теория интегральных инвариантов», впервые применен термин «интегральные инварианты» к дифференциальным уравнениям задач динамики. По определению Пуанкаре, «это некоторые определенные интегралы, простые или кратные, которые остаются постоянными, когда область интегрирования меняется согласно некоторому закону, определенному дифференциальным уравнением» [2, с. 637].

Позднее, в 1897—1899 гг., Пуанкаре посвятил отдельный том «Новых методов небесной механики» [3] дальнейшим исследованиям теории интегральных инвариантов и ее применению к задачам двух и трех тел, нахождению асимптотических и двоякоасимптотических решений задачи трех тел, к изучению устойчивости движения небесных тел.

Пуанкаре устанавливает связь между относительным интегральным инвариантом порядка $p$ и абсолютным интегральным инвариантом порядка $p+1$, доказывает теорему, утверждающую, что всякий относительный интегральный инвариант можно представить как сумму абсолютного интегрального инварианта и интеграла от полного дифференциала.

Важное значение имеет связь между интегральными инвариантами и введенными Пуанкаре в [1, 3] уравнениями в вариациях. Если имеется $p$ систем уравнений в вариациях

$$\frac{d\xi_{i,k}}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\xi_{i,j},$$

соответствующих системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t), \tag{1}$$

и линейный интеграл

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \begin{vmatrix} \xi_{1,\alpha_1} & \xi_{1,\alpha_2} & \cdots & \xi_{1,\alpha_p} \\ \xi_{2,\alpha_1} & \xi_{2,\alpha_2} & \cdots & \xi_{2,\alpha_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{p,\alpha_1} & \xi_{p,\alpha_2} & \cdots & \xi_{p,\alpha_p} \end{vmatrix} = \\ = \mathrm{const}, \tag{2}$$

то, согласно Пуанкаре, имеется интегральный инвариант порядка $p$

$$J_p = \underbrace{\iint \cdots \int}_{p} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \cdot dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}. \tag{3}$$

Наоборот, интегральному инварианту (3) соответствует интеграл (2). Это дает возможность образовывать новые интегральные инварианты, а также, что более важно, находить новые интегралы системы дифференциальных уравнений (1) по известным интегральным инвариантам.

Доказанная Пуанкаре теорема о композиции интегральных инвариантов позволяет из интегральных инвариантов порядков $p$ и $q$ получить интегральный инвариант порядка $r = p + q$ простым умножением подынтегральных выражений, изменяя знак произведения при изменении порядка двух дифференциалов, взятых в качестве сомножителей, и считая, следовательно, нулем произведение двух одинаковых дифференциалов. Тогда любой интегральный инвариант порядка, большего $n$, оказывается тождественно равным нулю. Это находится в полном соответствии с утверждением Пуанкаре, что наивысший возможный порядок интегрального инварианта системы уравнений (1) равен ее порядку. Таким образом, наложенное Пуанкаре условие $r \leqslant n$ оказывается несущественным.

Связав теорию интегральных инвариантов с теорией последнего множителя, Пуанкаре указывает тем самым на возможность применения последнего множителя для построения интегрального инварианта наивысшего порядка, так как если $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t)$ — последний множитель системы уравнений (1), то $\underbrace{\iint \cdots \int}_{n} M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ — ее интегральный инвариант. Справедливость обратного утверждения позволяет вычислить последний множитель по известному интегральному инварианту. Пуанкаре доказал также, что отношение двух последних множителей системы уравнений (1) дает ее интеграл. Применяя эту теорему к каноническим уравнениям Гамильтона, можно легко и быстро доказать теорему Пуассона о скобках, являющуюся, таким образом, непосредственным следствием теории интегральных инвариантов [4].

Вообще «канонические уравнения динамики обладают замечательными интегральными инвариантами, и существование этих инвариантов проливает яркий свет на их (канонических уравнений.— *Ю. С.*) свойства» [2, с. 638].

Особое значение имеет рассмотрение Пуанкаре интегральных инвариантов как одного из эффективных средств проверки решений уравнений задачи трех тел, получающихся в форме рядов после трудных и длинных вычислений [3].

**2. Предшественники Пуанкаре.** Хотя разработка всех основных положений теории интегральных инвариантов принадлежит Пуанкаре, отдельные аналитические выражения, приводящие к интегральным инвариантам, встречались до работ Пуанкаре.

Так, Ж. Л. Лагранж в 1788 г., рассматривая возмущенное движение планет [5], приходит к независимым от времени выражениям, называемым, как известно, скобками Лагранжа. Полученный Лагранжем результат нетрудно обобщить и привести к интегралу $\iint \sum_{i,j} [a_i, a_j]\, da_i da_j$, который не зависит от времени и легко преобразуется [4] к абсолютному интегральному инварианту второго порядка

$$\iint \sum_k (dx_k d\dot{x}_k + dy_k d\dot{y}_k + dz_k d\dot{z}_k).$$

Исследуя аналогичную проблему, Ж. Лиувилль в 1838 г. [6] приходит к выводу, что $\frac{du}{dt} = 0$. В современных обозначениях $u$ записывается в виде

$$u = \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \ldots, \dot{x}_{n0})}. \tag{4}$$

Следствием этого результата явилась известная теорема о постоянстве фазового объема (ее часто называют теоремой Лиувилля). Однако можно встретить [7] утверждение, что она доказана Лиувиллем в 1855 г. в работе [8].

Пуанкаре начинает изложение теории интегральных инвариантов с некоторых интегральных инвариантов гидродинамики (объем несжимаемой жидкости, масса, циркуляция). Эти интегральные инварианты были выведены (без применения термина «интегральный инвариант») в работах Г. Гельмгольца [9] и У. Томсона [10] по теории вихревых движений жидкости.

**3. Развитие теории интегральных инвариантов в конце XIX и начале XX в.** Новое понятие «интегральный инвариант» сразу же привлекло внимание ученых — современников Пуанкаре[1].

[1] Основная библиография по теории интегральных инвариантов содержится в книгах Э. Картана [11] и Х. Рунда [12].

Уже в 1895—1896 гг. появляются две работы Г. Кёнигса. В первой его работе [13] показано, что канонический вид системы [1] определяется ее интегральным инвариантом. Во второй работе [14] интегральный инвариант применен для вывода нового метода нахождения последнего множителя.

Вскоре, в 1899—1902 гг., появляются первые работы Э. Картана по интегральным инвариантам. В связи с большой ролью Картана в развитии теории интегральных инвариантов его работам посвящен специальный раздел.

Исходя из равенства (4), Дж. Гиббс в 1901 г. [15] доказал теорему о постоянстве фазового объема для гамильтоновых систем, т. е. получил интегральный инвариант наивысшего порядка. Заметим, что постоянство фазового объема сразу вытекает из теории интегральных инвариантов, так как для гамильтоновых систем последний множитель $M=1$. Доказательство, данное Гиббсом, достаточно сложно. Возможно, это связано с тем, что Гиббс, работая над своей книгой, последней в его жизни, вероятно, не успел познакомиться с «Новыми методами небесной механики» Пуанкаре.

В 1901 г. Т. Дондер [16] доказал теорему: если система уравнений $\frac{dx_k}{X_k}=\frac{dy_k}{Y_k}=dt$ имеет относительный интегральный инвариант $J=\int\sum y_k\delta x_k$, то она является канонической.

В этой работе Дондер ввел в качестве обозначения дифференциала в подынтегральном выражении интегрального инварианта символ $\delta x$ вместо употребляемого Пуанкаре и Кёнигсом обычного обозначения $dx$. Символика Дондера предпочтительнее, так как она подчеркивает независимость этого дифференциала от изменения времени и связывает его лишь с вариациями начальных условий или иных постоянных интегрирования системы уравнений (1). Это не столь существенно для интегральных инвариантов Пуанкаре, при вычислении которых рассматриваются одновременные состояния изучаемой механической системы, но становится весьма важным после появления в аналитической механике интегральных инвариантов Картана. В результате предложенная Дондером символика стала общеупотребительной в последние годы.

В работе 1913 г. [17] Дондер определяет интегральные инварианты процесса распространения тепла.

Опубликованные в 1914 г. статья Р. Донто [18] и статьи Дондера [19] и Э. Вессио [20], в которых авторы развивают идеи Донто, посвящены применению интегральных инвариантов к изучению процесса распространения света.

В 1915 г. Э. Гурса [21] исследует канонические уравнения гамильтоновой системы в виде

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_k},\qquad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

Вводя параметры $u$ и $t$, Гурса преобразует ее интегральный инвариант

$$J_2 = \iint \sum_k dx_k dp_k \tag{5}$$

к виду

$$J_2 = \iint \frac{\partial F}{\partial u} du dt. \tag{6}$$

Если гамильтониан $F$ постоянен, то $J_2=0$, так как

$$\partial F/\partial u=0. \tag{7}$$

Однако, как нетрудно убедиться, этот результат Гурса не соответствует действительности. Это связано с тем, что интегральный инвариант (5) имеет место лишь для сравниваемых одновременных состояний гамильтоновой системы. Следовательно, при его вычислении нельзя использовать время $t$ в качестве переменной, по которой производится интегрирование. Кроме того, хотя в случае постоянного гамильтониана $F$ действительно справедливо равенство (7), но в качестве подынтегральной функции в (6) надо брать аналитическое выражение производной $\partial F/\partial u$, а не ее нулевое значение.

Рассматривая интегральный инвариант плоского движения жидкости и интегральный инвариант общей теории относительности, Вессио в 1918 г. [22] устанавливает аналогию между полем скоростей в жидкости и полем тяготения.

Первая попытка вычисления интегрального инварианта для системы с неголономными связями относится к 1928 г. и принадлежит Н. Г. Четаеву [23].

В 1929 г. Ж. Шази [24] исследует такие движения в задаче трех тел, для которых постоянная живых сил $h$ по отношению к центру масс системы отрицательна. Вычисленные при этом условии интегральные инварианты (двенадцатого порядка) системы дифференциальных уравнений движения оказываются конечными, на основании чего Шази делает вывод об устойчивости движения, т. е. о невозможности захвата — перехода от гиперболо-эллиптической при $t\to-\infty$ траектории к ограниченной при $t\to+\infty$. Невозможен также и обратный переход с ограниченной при $t\to-\infty$ траектории на гиперболо-эллиптическую при $t\to+\infty$. Шази распространяет полученные результаты на другие случаи и приходит к неправильному теоретически и опровергнутому практикой выводу о невозможности захвата и при $h\geqslant 0$. В 1953 г. Ю. Л. Газарян [25] и в 1954 г. Г. А. Мерман [26] доказали необоснованность применения результата вычисления интегральных инвариантов, найденного Шази, к другим случаям.

**4. Интегральные инварианты Картана.** Введенные Картаном [27—29] инвариантные формы не отличаются по существу от интегральных инвариантов. Их сопоставление легло в основу написанной Картаном в 1922 г. книги «Лекции об интегральных инвариантах», русский перевод которой назван «Интегральные инварианты» [11].

В отличие от Пуанкаре, Картан не ограничивается рассмотрением одновременных состояний механической системы и получает новый интегральный инвариант первого порядка

$$J_1 = \oint \left( \sum_i p_i \delta q_i - H \delta t \right), \tag{8}$$

следствием которого в случае $\delta t = 0$ является интегральный инвариант Пуанкаре. С другой стороны, наличие интегрального инварианта (8) требует обязательного выполнения канонических уравнений Гамильтона.

Это позволило Картану положить в основу механики сформулированный им новый принцип сохранения количества движения и энергии: движение материальной системы с вполне голономными связями, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию, управляется дифференциальными уравнениями первого порядка, связывающими время, параметры положения и параметры скоростей. Эти дифференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что интеграл тензора «количества движения — энергии» (работа вектора меры $n+1$, компонентами которого являются обобщенные импульсы и гамильтониан системы, взятый с обратным знаком), распространенный на любую непрерывную линейную замкнутую последовательность состояний, не меняет значения при перемещении этих состояний вдоль соответствующих траекторий [11].

Принцип сохранения количества движения и энергии является крупнейшим вкладом Картана в механику, вполне достаточным для высокой оценки его монографии. Однако Картан, применяя разработанный им метод внешних производных, получает интегральные инварианты высших порядков, также представляющие собой обобщение интегральных инвариантов Пуанкаре на неодновременные состояния механической системы.

В монографии Картана построены интегральные инварианты задач гидродинамики, небесной механики и оптики. При этом в задаче $n$ тел Картан рассматривает ее общий случай, когда сила взаимодействия между телами $S_1$ и $S_2$ обратно пропорциональна $(S_1S_2)^p$. Построенные им интегральные инварианты приводят к интегралам энергии и площадей, теореме о движении центра масс и (в случае ньютоновского взаимодействия) к интегралу Якоби.

Используя интегральные инварианты, Картан доказывает важную теорему в теории последнего множителя: если известны $p$ независимых первых интегралов системы $n$ дифференциальных уравнений, то можно найти множитель системы $n—p$ уравнений, к которым приводится данная система. Простым следствием этой теоремы Картана является известная теорема Якоби о приведении системы $n$ дифференциальных уравнений к одной квадратуре, если найдены ее последний множитель и $n-1$ независимых первых интегралов.

Картану принадлежит первый учебный курс теории интегральных инвариантов, который и послужил основой книги «Интегральные инварианты». Эта книга, давно уже ставшая библиографической редкостью, представляет собой единственное учебное пособие по теории интегральных инвариантов, изданное в нашей стране. Правда, Л. Н. Сретенский читал в 40-х годах курс интегральных инвариантов в Московском государственном университете, но, к сожалению, этот курс не был издан.

**5. Развитие теории интегральных инвариантов современными учеными.** Классическая теория интегральных инвариантов развита Пуанкаре и Картаном для голономных механических систем, движение которых описывается с помощью лагранжевых или гамильтоновых переменных. Однако важное значение имеют также движения, ограниченные наложенными на систему неголономными связями. Кроме того, во многих случаях дифференциальные уравнения движения голономных систем значительно упрощаются, если для их составления использовать неголономные координаты [30]. Естественно поэтому возникла проблема обобщения теории интегральных инвариантов на неголономные координаты и на системы с неголономными связями, рассмотренная советскими учеными В. В. Добронравовым и Н. Г. Четаевым.

В 1945 г. появилась статья В. В. Добронравова [31], содержащая построение интегральных инвариантов в неголономных координатах и ставшая основой для развития теории интегральных инвариантов в неголономных координатах в его работе, опубликованной в 1948 г. [30]. Он исходит из дифференциальных уравнений движения механической системы в неголономных координатах Больцмана — Гамеля и получает относительный интегральный инвариант картановского типа

$$J_1 = \oint \left(\sum_i p_i \delta\pi_i - H\delta t\right) = \text{const}, \tag{9}$$

формально совпадающий с интегральным инвариантом Картана (8) в голономных координатах. Применение картановского метода внешних форм позволило В. В. Добронравову вывести интегральные инварианты высших порядков типа Картана (при $\delta t \neq 0$) и Пуанкаре (при $\delta t = 0$).

В. В. Добронравов обобщил на случай неголономных координат теорему Ли — Кёнигса, утверждающую, что наличие интегрального инварианта (8), роль которого в неголономных координатах играет интегральный инвариант (9), является необходимым условием канонических уравнений движения.

Используя теорему Пуанкаре о связи между последним множителем системы дифференциальных уравнений и ее интегральным инвариантом высшего порядка, В. В. Добронравов отыскивает последний множитель для уравнений движения в неголономных координатах в виде

$$M = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — матрица коэффициентов преобразования, связывающего голономные и неголономные координаты.

Эта формула успешно применена для вычисления последнего множителя в задаче о сферическом движении твердого тела. Конечно, он может быть найден и обычным путем, но применение формулы (10) существенно упрощает вычисления. Кроме того, из формулы (10) следует важный вывод о том, что последний множитель канонических уравнений движения полностью определяется структурой преобразования, связывающего голономные и неголономные координаты. В частности, в случае голономной системы коэффициенты этого преобразования $\alpha_{ij}=0$ при $i \neq j$, $\alpha_{ii}=1$. Этим и объясняется то, что для системы канонических уравнений движения в голономных координатах последний множитель $M=1$.

Применение теории интегральных инвариантов дало В. В. Добронравову возможность обобщить на случай неголономных координат теоремы Пуассона и Лорана, позволяющие найти новый первый интеграл системы канонических уравнений, если известны два или четыре ее независимых первых интеграла, с помощью скобок

$$((f_1, f_2)) = \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \pi_\lambda} \frac{\partial f_2}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f_2}{\partial \pi_\lambda} \right) + \sum_i \sum_r \sum_s \gamma_{isr} \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_r} p_s = \mathrm{const}$$

или

$$((f_1, f_2, f_3, f_4)) = \sum_\rho \sum_\sigma \frac{\partial (f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial (p_\rho, \pi_\rho, p_\sigma, \pi_\sigma)} + \sum_i \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu i \nu} p_i \frac{\partial (f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial (p_\lambda, \pi_\lambda, \pi_\mu, \pi_\nu)} + \sum_i \sum_j \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \sum_h \gamma_{\lambda i \mu} \gamma_{\nu j h} p_i p_j \frac{\partial (f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial (\pi_\lambda, \pi_\mu; \pi_\nu, \pi_h)} = \mathrm{const},$$

представляющих собой соответственно обобщенные скобки Пуассона и обобщенные скобки Лорана и обращающиеся для голономных координат в обычные скобки Пуассона (или Лорана).

Полученные результаты В. В. Добронравов распространил также и на механические системы с линейными неголономными связями [30].

Н. Г. Четаев [23] изучает уравнения движения неголономной системы в форме Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum_s \sum_k c_{sik} \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \eta_s + X_i(T - U). \tag{11}$$

Вводя в качестве новых переменных обобщенные импульсы $y_i = \frac{\partial T}{\partial \eta_i}$, а также гамильтониан $H = \sum_i y_i \eta_i$, он преобразует систему уравнений (11) к каноническому виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_s \sum_k c_{sik} \frac{\partial H}{\partial y_s} \dot{y}_k - X_i(H), \quad \frac{dx_i}{dt} = X^i(H). \tag{12}$$

Для этой системы Н. Г. Четаев получает относительный интегральный инвариант картановского типа

$$\oint \left[\sum_i y_i \eta_i \delta t - H\delta t\right] = \text{const}. \tag{13}$$

В случае, когда система уравнений (12) имеет два известных независимых первых интеграла $\varphi(x_i, y_i, t) = a$ и $\psi(x_i, y_i, t) = b$, наличие интегрального инварианта (13) позволило Н. Г. Четаеву сделать вывод о возможности отыскания еще одного первого интеграла в виде

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} X_i(\psi) - \frac{\partial \psi}{\partial y_i} X_i(\varphi)\right] + \\ + \sum_s \sum_i \sum_k c_{sik} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} y_k = c.$$

Этот результат представляет собой, собственно говоря, обобщение теоремы Пуассона о скобках.

В статье Х. Ли 1947 г. [32] даны формулировка и доказательство важнейшей теоремы о единственности линейных интегральных инвариантов типа Пуанкаре

$$J_1 = \oint \sum_i p_i \delta q_i, \quad J_2 = \iint \sum_i \delta p_i \delta q_i, \quad J_3 = \iiint \sum_{i,j} p_i \delta q_i \delta p_j \delta q_j,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$J_{2n} = \underbrace{\iint \dots \int}_{2n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \delta p_{i_1} \delta q_{i_1} \delta p_{i_2} \delta q_{i_2} \dots \delta p_{i_n} \delta q_{i_n}. \tag{14}$$

Эти интегральные инварианты имеют место для любой гамильтоновой системы независимо от конкретного вида гамильтона. Поэтому Ли назвал их «универсальными интегральными инвариантами». Вопрос о возможности построения для любой гамильтоновой системы каких-либо иных интегральных инвариантов, отличающихся существенным образом от интегральных инвариантов (14), до работы Ли оставался открытым. Ли доказал, что любые линейные универсальные интегральные инварианты отличаются от интегральных инвариантов (14) только постоянными множителями. Следует, однако, заметить, что статья Ли несколько труднее других работ для восприятия, так как она использует аппарат тензорного исчисления, пока еще мало распространенный в учебной и научной литературе по теоретической и аналитической механике.

Ф. Р. Гантмахер [33] доказал теорему Ли о единственности универсального интегрального инварианта Пуанкаре первого порядка. Это доказательство проведено лишь для систем с одной степенью свободы. Однако Гантмахер указал одновременно на возможность его распространения на системы с произвольным числом степеней свободы. Это распространение осуществлено М. А. Айзерманом [34]. Метод Гантмахера—Айзермана доказательства теоремы о единственности существенно отличается от метода Ли доказательства этой теоремы [32] простотой математического аппарата, хотя и уступает ему в общности, так как ограничивается интегральным инвариантом первого порядка. При доказательстве теоремы о единственности Ю. П. Сурков [35] использует простой математический аппарат, и в то же время его доказательство применимо к интегральным инвариантам любых порядков.

Мы уже отмечали, что Ю. Л. Газарян [25] и Г. А. Мерман [26] уточнили и упростили рассуждения Шази [24], доказали справедливость его вывода о невозможности захвата в задаче трех тел при $h<0$ и установили, что распространение этого вывода на движение с $h \geqslant 0$ недопустимо по форме и неверно по существу.

Г. Блок в 1954 г. [36] рассматривает методический вопрос о вычислении интегрального инварианта второго порядка и указывает на возможные при этом ошибки. Природа этих ошибок— в неправильном применении теоремы Стокса. Эти ошибки являются следствием того, что не учитывается необходимость изменения знака произведения при изменении порядка следования перемножаемых дифференциалов.

Работа А. Вилькенса 1955 г. [37] содержит интересные интегральные инварианты, разработанные им специально для задач теории возмущения в небесной механике и примененные для изучения движения астероидов и комет. Построения Вилькенса реализуют идею Пуанкаре о применении интегральных инвариантов в качестве эффективного средства контроля результатов приближенного решения задачи.

Интегральные инварианты Вилькенса целиком принадлежат общей теории интегральных инвариантов. Вилькенс усматривает существенное отличие построенных им интегральных инвариантов от интегральных инвариантов Пуанкаре в том, что подынтегральные выражения интегральных инвариантов Вилькенса могут содержать явным образом время $t$ или иную независимую переменную. Однако это утверждение Вилькенса, несомненно, вызвано недоразумением, ибо в действительности любые интегральные инварианты также могут иметь подынтегральные выражения, явно зависящие от $t$. Отличие интегральных инвариантов Вилькенса от интегральных инвариантов Пуанкаре (14) и интегральных инвариантов Картана (8), справедливых для любых гамильтоновых систем, состоит в том, что первые имеют место лишь для конкретной задачи и могут быть несправедливыми для близких задач.

Используя методику Вилькенса, К. Штумпф [38] строит интегральный инвариант для аналогичной задачи.

Статья Л. Лоско 1973 г. «О применении интегральных инвариантов к задаче $n$ тел» [39] интересна прежде всего новым проявлением внимания к теории интегральных инвариантов и ее возможностям в механике. Лоско получила дифференциальные формы (по существу интегральные инварианты Картана)

$$\omega = (1+k/2)\,pdq - d(pq) + t(1-k/2)\,dH$$

и

$$\omega^* = (1+k/2)\,pdq - d(pq) + (1-k/2)\,tdH - kH\,\delta t,$$

которым соответствуют, как известно, первые интегралы уравнений движения в вариациях. Тем самым Лоско нашла новые интегралы в задаче $n$ тел:

$$F = (1+k/2)\,p\,\xi - (p\,\xi + q\,\eta) + t(1-k/2)\,\delta h$$

и

$$\tilde{F} = (1+k/2)\,p\xi - (p\xi + q\,\eta) + t(1-k/2)\,\delta h - kh\,\Delta t.$$

Отсюда она делает вывод об орбитальной неустойчивости движения с нулевой полной энергией и об устойчивости траекторий движения с $h \neq 0$ в случае $\delta h = 0$.

Таким образом, к настоящему времени теория интегральных инвариантов достаточно глубоко развита. Из этой теории следует, что наличие интегральных инвариантов является неотъемлемым свойством гамильтоновых систем и что «метод интегральных инвариантов позволяет объединить различные ветви аналитической механики, давая большей частью простое доказательство теоремам и указывая внутреннюю связь между ними» [4, с. 35]. Вместе с тем «теория интегральных инвариантов дает возможность глубже проникнуть в природу канонических уравнений, обнаружить ряд новых, не замеченных ранее специфических свойств системы канонических уравнений, а также с новой точки зрения оценить уже известные теоремы, относящиеся к этой системе» [7, с. 182]. Интегральные инварианты механики «являются не декоративным украшением теории, а ее рабочим аппаратом» [33, с. 9].

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.— Acta math., 1890, t. 13, p. 1—270.
2. *Poincaré H.* Analyse des travaux scientifiques de Henry Poincaré, faite par lui-même.— Acta math., 1921, t. 38, p. 3—135.— Пер. на рус. яз.: *Пуанкаре А.* Аналитическое резюме (Анализ работ Анри Пуанкаре, сделанный им самим).— В кн.: Пуанкаре А. Избр. тр. М.: Наука, 1974, т. 3, с. 579—663.
3. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, 1897. T. 3.— Пер. на рус. яз.: *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1972, т. 2, с. 9—356.
4. *Сретенский Л. Н.* Аналитическая механика (XIX век).— В кн.: История механики. С конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972, с. 7—45.
5. *Lagrange J. L.* Mécanique analytique. Paris, 1788.— Пер. на рус. яз: *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. Т. 2. 386 с.
6. *Liouville J.* Note sur la théorie de la váriation des constantes arbitraires.— J. math. pures et appl., 1838, t. 3, p. 342—349.
7. *Савин Г. Н., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н.* Очерки развития некоторых проблем механики. Киев: Наук. думка, 1964. 366 с.
8. *Liouville J.* Note sur les équations de la dynamique.— J. math. pures et appl., 1855, t. 20, p. 137—138.
9. *Helmholtz H.* Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.— J. reine und angew. Math., 1858, Bd. 55, H. 1, S. 25—55.— Пер. на рус. яз.: *Гельмгольц Г.* Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям.— В кн.: Helmholtz H. Два исследования по гидродинамике. М., 1902, с. 5—51.
10. *Thomson W.* On vortex motion. Mathematical and physical papers. Cambridge, 1910, vol. 4, p. 13—66.
11. *Cartan E.* Leçons sur invariants intégraux. P., 1922.— Пер. на рус. яз.: *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.: Гостехтеориздат, 1940. 214 с.
12. *Rund H.* The Hamilton-Jacoby theorie in the calculus of variations. Its role in mathematics and physics. L., 1966.
13. *Koenigs G.* Application des invariants intégraux à la reduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles.— C. r. Acad. sci. Paris, 1895, t. 121, N 24, p. 875—878.
14. *Koenigs G.* Sur les invariants intégraux.— C. r. Acad. sci. Paris, 1896, t. 122, N 1, p. 25—27.
15. *Gibbs J. W.* Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics. N. Y., 1902.— Пер. на рус. яз.: *Гиббс Дж.* Основные принципы статистической механики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946. 203 с.
16. *Donder Th. de.* Sur les invariants intégraux.— C. r. Acad. sci. Paris, 1901, t. 133, N 11, p. 431—433.
17. *Donder Th. de.* Sur le mouvement de la chaleur dans un corps athermane.— C. r. Acad. sci. Paris, 1913, t. 157, N 25, p. 1400—1403.
18. *Dontot R.* Sur les invariants intégraux et quelques points l'optique géometrique.— Bull. soc. math. France, 1914, t. 42, p. 53—91.
19. *Donder Th. de.* Sur les invariants intégraux de l'optique.— Bull. soc. math. France, 1914, t. 42, p. 91—95.
20. *Vessiot E.* Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes.— Bull. soc. math. France, 1914, t. 42, p. 101—122.
21. *Goursat E.* Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux.— J. math. pures et appl., 1915, t. 1, N 3, p. 241—259.
22. *Vessiot E.* Sur un invariant intégral de l'hydrodynamique et sur son application à la théorie de la relativité générale.— C. r. Acad. sci. Paris, 1918, t. 167, N 27, p. 1065—1068.
23. *Четаев Н. Г.* Об уравнениях Пуанкаре.— В кн.: Четаев Н. Г. Устойчи-

вость движения. Работы по неголономной механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 199—200.
24. *Chazy J.* Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.— J. math. pures et appl., 1929, t. 8, N 4, p. 353—380.
25. *Газарян Ю. Л.* О доказательстве Шази невозможности захвата в задаче трех тел.— Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. Штернберга, 1953, № 92, с. 23—45.
26. *Мерман Г. А.* К вопросу об исследованиях Шази в задаче трех тел.— Бюл. Ин-та теорет. астрон., 1954, т. 4, № 9, с. 594—605.
27. *Cartan E.* Sur certaines expressions différentielles et le probléme de Pfaff.— Ann. sci. École norm. sup., 1899, t. 16, p. 239—332.
28. *Cartan E.* Sur l'integration des systèmes différentielles complétement intégrales.— C. r. Acad. sci. Paris, 1902, t. 134, p. 1415—1417.
29. *Cartan E.* Sur l'integration des systèmes différentielles complétement intégrales.— C. r. Acad. sci. Paris, 1902, t. 136, p. 1564—1566.
30. *Добронравов В. В.* Аналитическая механика в неголономных координатах.— Учен. зап. МГУ. Механика, 1948, вып. 122, т. 2, с. 77—182.
31. *Добронравов В. В.* Интегральные инварианты уравнений аналитической механики в неголономных координатах.— Докл. АН СССР. Новая сер., 1945, т. 46, № 5, с. 196—199.
32. *Lee H. C.* The universal integral invariants of Hamiltonian systems and application to the theory of canonical transformation.— Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, A, 1947, vol. 62, pt 3, p. 237—246.
33. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 290 с.
34. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974. 363 с.
35. *Сурков Ю. П.* О единственности интегральных инвариантов Пуанкаре.— В кн.: Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. школа, 1976, вып. 7, с. 91—95.
36. *Block H. D.* A remark on integral invariants.— Quart. Appl. Math., 1954, vol. 12, N 2, p. 201—203.
37. *Wilkens A.* Über die Integral-Invarianten des Störungstheorie.— Sitzungsber. Bayersch. Acad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 1955, N 123, S. 123—173.
38. *Stumpff K.* Himmelmechanik. B., 1965, Bd. 2.
39. *Losco L.* Sur une application des invariants intégraux au probléme des *n* corps.— C. r. Acad. sci. Paris, A, 1973, t. 277, N 7, p. 323—325.

УДК 531/534(091)

*Г. В. Мозалевская, А. И. Хохлов*

# СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

В последние годы в динамике твердого тела широкое распространение при исследовании движения тела получил предложенный П. В. Харламовым [1] метод годографов. Систематическое применение этого метода в классической задаче о движении тела, имеющего неподвижную точку, в ряде случаев принесло исчерпывающую информацию о всех особенностях движения тела на всем промежутке времени и тем самым привело к построению полного (в смысле Пуансо) решения этой задачи.

Особенно удобно применять метод годографов в тех случаях, когда имеется аналитическое решение задачи в виде совокупности первых интегралов. В этих случаях годографы исследуются как кривые, определяемые пересечением поверхностей, уравнениями которых являются соответствующие интегралы. В связи с этим существенно возрастает роль так называемых случаев интегрируемости, когда обычно ограничиваются построением полной системы интегралов. Число случаев интегрируемости в классических задачах динамики твердого тела было значительно увеличено в результате применения метода инвариантных соотношений. Развернутый обзор важнейших результатов, полученных как в построении решений в замкнутой форме, так и в исследовании движения методом годографов, дан в монографии [2] (см. также обзоры [3—5]).

Под точными решениями в настоящей работе понимаются именно такие решения, в которых указано достаточное число интегралов для сведения задачи к квадратурам. Известны и другие формы построения точных решений. Таковыми, например, являются в классических задачах динамики твердого тела решения, в которых зависимость основных переменных от времени представима сходящимися рядами. Однако такие представления не имеют обычно практической ценности, так как вследствие чрезвычайно медленной сходимости этих рядов получить какую-либо информацию о свойствах движения вряд ли возможно.

В прикладной постановке задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе в течение длительного времени существенно использовалось то обстоятельство, что в реальных конструкциях кинетический момент ротора значительно превышает кинетические моменты колец. Это позволяло при составлении уравнений пренебречь массой колец, а в наиболее важных задачах — игнорировать и нутацию оси ротора. Такие допущения, лежащие в основе инженерных теорий гироскопа, сделали доступными для исследований многие задачи, возникающие при анализе и синтезе самых разнообразных гироскопических приборов. Созданная на этом пути так называемая прикладная теория гироскопов является в настоящее время надежным математическим аппаратом в руках конструкторов. Прикладной теории посвящено громадное количество работ, она излагается в целом ряде монографий. Все возрастающий уровень исследований в этой области в отечественной литературе отражен в монографиях А. Н. Крылова, Ю. А. Круткова [6], Б. В. Булгакова [7] и др. Специфика современных задач гироскопии, неизбежность формирования нелинейной теории, вытекающая из тех высоких требований к точности расчета, которые предъявляет теперь конструктор гироскопических приборов, продемонстрированы в монографии А. Ю. Ишлинского [8], в книгах [9, 10] (в частности, в обзорах [11, 12]), а также в обзоре [13].

Возрастание требований к точности расчета должно было, естественно, привести и к появлению строгих теорий, в которых

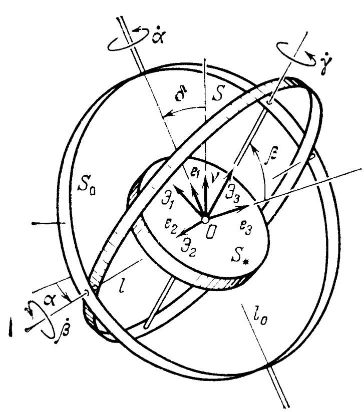


Рис. 1

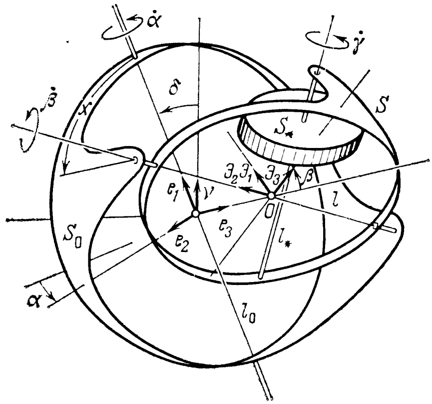


Рис. 2

гироскоп в кардановом подвесе рассматривается как механическая система трех связанных тел (ротор и кольца). По отношению к дифференциальным уравнениям этой задачи столь же естественно было поставить вопрос об условиях их интегрируемости и о построении точных решений такой задачи, подобно тому как это сделано в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Такие исследования проводились, но, в отличие от классической задачи, где в дополнение к важнейшим результатам, принадлежащим ученым нашей страны, имелись некоторые решения, полученные за рубежом, в задаче о гироскопе в кардановом подвесе все точные решения принадлежат отечественным ученым. Однако сколько-нибудь полного обзора достигнутых в этой области результатов не было. Этот пробел восполняет настоящая статья.

**О постановке задачи.** На рис. 1 изображен гироскоп в кардановом подвесе. Единичный вектор $\mathbf{э}_2$ направлен по оси ротора, зафиксированной во внутреннем кольце, по отношению к которому положение ротора задает угол $\gamma$. Ортогональная оси ротора ось внутреннего кольца закреплена во внешнем кольце, и угол $\beta$ определяет положение внутреннего кольца во внешнем. Ось последнего закреплена на некоторой платформе и ортогональна оси внутреннего кольца. Угол $\alpha$ задает поворот внешнего кольца по отношению к платформе. В совершенной конструкции все три оси пересекаются в одной точке $O$, принадлежащей платформе. Неизменно связанные с внутренним кольцом оси, указываемые векторами ортонормированного базиса $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$, $\mathbf{э}_3$, полагают главными осями инерции этого кольца в точке $O$. По распределению масс ротор имеет структуру гироскопа Лагранжа.

Разумеется, в реальной конструкции эти требования удовлетворены лишь приближенно. Но отказ от любого из них существенно усложняет задачу. В большинстве работ конструктивные несовершенства полагают малыми и влияние их исследуют методами, использующими малость соответствующего параметра.

В конструкции, представленной на рис. 2, почти все из указанных выше ограничений сняты. Оси тел могут быть и неортогональными, и непересекающимися. К тому же для колец они могут и не быть главными осями инерции. Сохранено лишь требование, чтобы ротор по распределению масс оставался гироскопом Лагранжа.

Найденные к настоящему времени точные решения относятся к тому случаю, когда ось внешнего кольца неподвижна, связи идеальны, а из внешних сил приняты во внимание лишь силы тяжести.

Вращающееся вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести тело называют маятником. Если в этом теле закреплена ось другого тела и оси обоих тел параллельны, говорят о двойном маятнике. Такая система совершает плоское движение. П. В. Харламов [14] составил уравнения движения системы тел, которую назвал составным пространственным маятником. Оси вращения тел такой системы в общем случае непараллельны. Конструкция, изображенная на рис. 2 (так же как и ее частный случай — на рис. 1), является тройным пространственным маятником.

Тело $S_0$ закреплено на неподвижной оси $l_0$, составляющей угол $\delta$ с единичным вектором $\mathbf{v}$ направления силы тяжести. Положение $S_0$ в пространстве задает угол $\alpha$. В $S_0$ закреплена ось $l$ тела $S$. Точка $O \in l$ — основание общего перпендикуляра осей $l$ и $l_0$ (тривиальный случай $l \| l_0$ не рассматриваем), $s$ — расстояние между этими осями, а $\chi$ — угол между ними. Угол $\beta$ определяет положение $S$ в $S_0$, а угол $\gamma$ — положение ротора $S_*$ в $S$. Ограничений на положение оси $l_*$ ротора $S_*$ в $S$ не накладываем. Базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ неизменно связан с $S_0$, а $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$, $\mathbf{э}_3$ — с $S$. Центр масс ротора принадлежит его оси $l_*$, поэтому координаты $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ этой точки в базисе $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$, $\mathbf{э}_3$ постоянны, а значит, постоянны и координаты $c\cos\varkappa$, $c_*$, $c\sin\varkappa$ центра масс тел $S$ и $S_*$. В таких обозначениях силовая функция системы имеет вид

$$U = mg\Big\{[\mu c_1 + c_*\cos\chi + c\sin\chi\sin(\beta-\varkappa)]\cos\delta + \\ + \Big[(\mu c_3 + s)\sin\alpha - (\mu c_2 + c_*\sin\chi)\cos\alpha + \\ + c\cos^2\frac{\chi}{2}\cos(\alpha+\beta-\varkappa) - c\sin^2\frac{\chi}{2}\cos(\alpha-\beta+\varkappa)\Big]\sin\delta\Big\}. \tag{1}$$

Здесь $m$ — сумма масс тел $S$ и $S_*$; $\mu m$ — масса тела $S_0$; $c_1$, $c_2$, $c_3$ — координаты центра масс тела $S_0$ в неизменно связанных с этим телом осях.

Пусть $J_0$ — момент инерции тела $S_0$ относительно оси $l_0$, $A_*$ — момент инерции ротора относительно $l_*$, $B_*$ — центральный экваториальный момент инерции ротора, а тензор инерции тела $S$ в точке $O$ задан матрицей

$$\left\| \begin{matrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{matrix} \right\|.$$

Кинетическая энергия системы записывается так:

$$2T = J(\beta)\dot{\alpha}^2 + 2G(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + B\dot{\beta}^2 + A_* n^2, \tag{2}$$

где

$$J(\beta) = J_0 + ms^2 + B\cos^2\chi + {}^1/_2(A + C)\sin^2\chi -$$
$$-(D\sin 2\chi + 2msc\cos\varkappa)\sin\beta - (F\sin 2\chi - 2msc\sin\varkappa)\times$$
$$\times\cos\beta + [{}^1/_2(A - C)\cos 2\beta - E\sin 2\beta]\sin^2\chi,$$

$$G(\beta) = B\cos\chi - (D\sin\chi + msc\cos\chi\cos\varkappa)\sin\beta -$$
$$-(F\sin\chi - msc\cos\chi\sin\varkappa)\cos\beta,$$

$$\dot{\gamma} + n_2\dot{\beta} + [(n_1\cos\beta + n_3\sin\beta)\sin\chi + n_2\cos\chi]\dot{\alpha} = n, \tag{3}$$

$$A = A' + (n_2^2 + n_3^2)B_* + (\xi_2^2 + \xi_3^2)m_*, \qquad D = D' + n_2 n_3 B_* + \xi_2\xi_3 m_*,$$

$$B = B' + (n_3^2 + n_1^2)B_* + (\xi_3^2 + \xi_1^2)m_*, \qquad E = E' + n_3 n_1 B_* + \xi_3\xi_1 m_*,$$

$$C = C' + (n_1^2 + n_2^2)B_* + (\xi_1^2 + \xi_2^2)m_*, \qquad F = F' + n_1 n_2 B_* + \xi_1\xi_2 m^*$$

В дополнение к обозначениям, введенным ранее, здесь $m_*$ — масса ротора, $n_1$, $n_2$, $n_3$ — направляющие косинусы его оси $l_*$ в базисе $\text{э}_1$, $\text{э}_2$, $\text{э}_3$. В таких обозначениях и изложены в дальнейшем результаты работ, рассматриваемых в настоящем обзоре. Авторы этих работ пользовались различными обозначениями, и сохранение их потребовало бы пояснений в каждом случае и к тому же затруднило бы сопоставление результатов.

Большинство работ относится к конструкции, указанной на рис. 1. В этом случае

$$\begin{gathered} s=0, \quad \chi=\pi/2, \quad D'=E'=F'=0, \quad B'=C', \\ n_1=n_2=0, \quad n_3=1, \quad \xi_1=\xi_2=0, \quad c_2=c_3=0, \quad c_*=0, \end{gathered} \tag{4}$$

$$A=A'+B^*, \quad B=B'+B^*, \quad C=C', \quad D=E=F=0, \tag{5}$$

где $B^*=B_*+m_*\xi_3^2$ — экваториальный момент инерции ротора в точке $O$. Кроме того,

$$U=mgc(\cos\delta - \sin\delta\sin\alpha)\sin(\beta - \varkappa), \tag{6}$$

$$2T = (J_0 + A\cos^2\beta + C\sin^2\beta)\dot{\alpha}^2 + B\dot{\beta}^2 + A_* n^2, \tag{7}$$

$$\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta = n. \tag{8}$$

**Решение Е. Л. Николаи.** Гироскоп в кардановом подвесе в случае идеальных (лишенных трения) подшипников в потенциальном силовом поле является механической гамильтоновой системой с тремя степенями свободы. При отсутствии конструктивных несовершенств угол собственного вращения ротора и угол поворота внешнего кольца оказываются циклическими координатами и в системе в дополнение к интегралу энергии имеются два циклических интеграла — система интегрируема, приводится к квадратурам. При построении точных решений в задачах динамики твердого тела основной интерес представляет нахождение дополнительного интеграла (или инвариантного соотношения), вытекающего из общих теорем механики. Но, поскольку в задаче о движении совершенного уравновешенного гироскопа ($c=0$) теоремы механики дают достаточное для получения квадратур количество интегралов, заслугу Николаи нужно видеть не в установлении факта интегрируемости этой задачи, а в приоритете постановки ее, в анализе квадратур, следствием чего явилось установление ряда особенностей движения ротора, вызываемых влиянием колец. Уже из построения работы [15] следует, что и сам Николаи считает интегрируемость системы тривиальным фактом, он даже не выписывает дифференциальных уравнений задачи, а прямо обращается к интегралам, отметив, что наличие их — следствие общих теорем механики.

В принятых здесь обозначениях в дополнение к циклическому интегралу (8) (роль постоянной интегрирования отведена величине $n$) интегралами являются

$$(J_0+A\cos^2\beta+C\sin^2\beta)\,\dot{\alpha}^2+B\dot{\beta}^2=h, \tag{9}$$

$$(J_0+A\cos^2\beta+C\sin^2\beta)\,\dot{\alpha}+H\sin\beta=k,\quad H=A_*n. \tag{10}$$

Исключая отсюда $\dot{\alpha}$ и обозначая $u=\sin\beta$, Николаи получает для переменной $u$ уравнение

$$[J_0+A-(A-C)u^2]B\dot{u}^2=(1-u^2)\{[J_0+A-(A-C)u^2]h-\\-(k-Hu)^2\}, \tag{11}$$

из которого после обращения гиперэллиптической квадратуры устанавливается зависимость угла $\beta$ от времени, после чего уравнение (10) определит зависимость от времени угла $\alpha$, а (8) — угла собственного вращения $\gamma$.

В общем случае обращение гиперэллиптического интеграла по соотношению (11) не выполнено, но при условии

$$A-C=0 \tag{12}$$

(что для исходных величин, как следует из (5), означает $A'+B^*=C^*$) этот интеграл сводится к эллиптическому. Приведенная в [16, с. 43—49] зависимость переменных от времени будет отмечена в дальнейшем в связи с работой [17].

Тем же методом, каким Пуассон исследовал движение точки оси гироскопа Лагранжа, Николаи изучает сферическую кривую, описываемую точкой оси ротора, открыв при этом ряд весьма специфических случаев, обусловленных влиянием колец. Он отметил и некоторые простейшие движения, характеризуемые с аналитической стороны тем, что многочлен, стоящий справа в (11), имеет кратные корни. Особый интерес представляет обстоятельный анализ тех случаев, когда в процессе движения ось ротора в некоторые мгновения совпадает с осью внешнего кольца. Николаи указал, в частности, условия устойчивости гироскопа, когда в невозмущенном движении ось быстро вращающегося ротора совпадает с осью внешнего кольца.

Другой путь анализа этой задачи указал А. Ю. Ишлинский [8, с. 441—463]. Записав уравнения Лагранжа для уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе и указав их интегралы (8)—(10), он представляет результат исключения $\dot{\alpha}$ из (9), (10) в виде

$$H^2 \frac{(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{J_0 + A\cos^2\beta + C\sin^2\beta} + Bv^2 = h, \qquad (13)$$

где $\sin\beta_* = k/H$, $v = \dot{\beta}$. Движение гироскопа Ишлинский классифицирует по виду фазовых траекторий, определяемых уравнением (13) в плоскости $(v, \beta)$.

Исследования Николаи дополнил Х. Л. Смолицкий [18]. Он отметил некоторые опущенные Николаи типы движений, указал разбиение плоскости параметров на области, отвечающие различным типам движений.

Р. П. Кузьмина [19], основываясь на работе С. Смейла [20], нашла бифуркационное множество в трехмерном пространстве параметров, которыми служат постоянные циклических интегралов и интеграла энергии. Варьируя значения последнего параметра, получаем для каждого из них сечение бифуркационного множества. Получаемые этим путем фигуры оказываются подобными. Поэтому строение бифуркационного множества достаточно изучить в одном плоском сечении. В результате получена топологическая классификация траекторий точек оси ротора.

**Решение Н. Г. Четаева.** Задачу о гироскопе в кардановом подвесе Четаев рассматривает [21] в более общей постановке, чем Николаи. Он предполагает, что центр тяжести ротора хотя и остается на оси симметрии ($\varkappa=0$), но не принадлежит точке пересечения осей ротора и колец ($c \neq 0$). Если гироскоп находится в поле силы тяжести, задача становится интегрируемой, когда ось внешнего кольца вертикальна ($\delta=0$). Записав уравнения Лагранжа, Четаев приводит интегралы (8), (10) и записывает интеграл энергии

$$(J_0 + A\cos^2\beta + C\sin^2\beta)\,\dot{\alpha}^2 + B\dot{\beta}^2 = h + mgc\sin\beta.$$

Для переменной $u$ вместо (11) теперь имеем уравнение

$$[J_0 + A - (A - C)\,u^2]\,B\dot{u}^2 =$$
$$= (1 - u^2)\,\{[J_0 + A - (A - C)\,u^2]\,(h + mgcu) - (k - Hu)^2\}. \qquad (14)$$

Явная зависимость $u$ от $t$ в работе [21] не указана, а лишь отмечено, что после обращения гиперэллиптического интеграла углы $\alpha$ и $\gamma$ будут найдены квадратурами из (8), (10).

**Случай Д. М. Климова — Н. П. Степаненко.** Полное аналитическое решение рассмотренной Четаевым задачи дано в работе [17] для случая (12), когда определяемая уравнением (14) функция $u(t)$ является эллиптической. Использовав функции Якоби, авторы указали явную зависимость углов $\beta$ и $\alpha$ от времени. Здесь же отмечен частный случай уравновешенного гироскопа, характеризуемый в дополнение к (12) условием $c=0$.

**Решение А. А. Богоявленского.** В работах [22—25] Богоявленский исследует движение гироскопа в кардановом подвесе в случае, когда ось внешнего кольца горизонтальна ($\delta=\pi/2$), а центр тяжести тел кожух—ротор не совпадает с неподвижной точкой пересечения осей ($c\neq 0$, $\varkappa\neq 0$). В этом случае угол $\alpha$ уже не является циклической координатой и из общих теорем механики следуют лишь два интеграла. Богоявленскому удалось указать условия, при которых рассматриваемая система оказывается интегрируемой. Результаты последней по времени опубликования статьи [25] заключают в себе как частные случаи решения, приводимые в работах [22, 24].

Распределение масс подчинено условиям $A=C$, $J_0+A=B$, и так как $\delta=\pi/2$, то соотношения (6), (7) принимают вид

$$U=-mgc\sin\alpha\sin(\beta-\varkappa),\qquad 2T=B(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)+A_*n^2.$$

Полагая далее $n=0$ и записав уравнения Лагранжа, автор получает дополнительный интеграл

$$B\dot\alpha\dot\beta=-mgc\cos\alpha\cos(\beta-\varkappa)+l.$$

Комбинируя его с интегралом энергии

$$B(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)/2=-mgc\sin\alpha\sin(\beta-\varkappa)+h,$$

получим для углов

$$\psi=\alpha-\beta+\varkappa,\qquad \varphi=\pi-(\alpha+\beta-\varkappa)\tag{15}$$

разделенные уравнения

$$B\dot\varphi^2=-2mgc\cos\varphi+b_0,\qquad B\dot\psi^2=-2mgc\cos\psi+b^0$$

(постоянные $b_0$ и $b^0$ введены вместо $l$ и $h$), и задача сводится к эллиптическим квадратурам. Их обращение Богоявленский выполняет посредством функций Вейерштрасса.

**Решение П. В. Харламова.** Обратимся к рассмотренной П. В. Харламовым задаче о составном пространственном маятнике как обобщении задачи о гироскопе в кардановом подвесе [14, с. 81—82]. Кинетическая энергия (2) этой системы не содержит в своем выражении координат $\gamma$ и $\alpha$, а силовая функция (1) не содержит $\gamma$. Поэтому (3) — циклический интеграл с постоянной $n$, а

$$J(\beta)\dot{\alpha}^2 + 2G(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + B\dot{\beta}^2 = 2[h + U(\alpha, \beta)]$$

— интеграл энергии. Если ось $l_0$ тела $S_0$ вертикальна ($\delta=0$), то

$$U(\beta) = mgc \sin\chi \sin(\beta - \varkappa)$$

(несущественная постоянная $mg(\mu c_1 + c_* \cos\chi)$ опущена) и координата $\alpha$ также оказывается циклической. Ей сопоставлен интеграл

$$J(\beta)\dot{\alpha} + G(\beta)\dot{\beta} + H(n_1 \cos\beta + n_3 \sin\beta)\sin\chi = k. \tag{16}$$

Использовав его для исключения $\dot{\alpha}$ из интеграла энергии, П. В. Харламов сводит задачу к квадратурам:

$$[BJ(\beta) - G^2(\beta)]\dot{\beta}^2 = 2[h + U(\beta)]J(\beta) - \\ - [k - H(n_1 \cos\beta + n_3 \sin\beta)\sin\chi]^2.$$

В результате обращения абелева интеграла определяется зависимость $\beta$ от $t$, а затем из уравнений (16) и (8) — зависимость от времени углов $\alpha$ и $\gamma$.

Решение Четаева является весьма частным случаем решения Харламова и получается из него при условиях (4), принимаемых в дополнение к условию $\delta=0$.

**Решение М. П. Харламова.** Поскольку задача о составном пространственном маятнике существенно обобщает задачу о гироскопе в кардановом подвесе, естественно было направить усилия на построение такого решения уравнений движения составного пространственного маятника, из которого в качестве частного случая вытекало бы решение Богоявленского. Такое решение построил М. П. Харламов [26, 27]. Так же как и в случае Богоявленского, принято, что ось $l_0$ горизонтальна ($\delta=\pi/2$) и пересекается с осью $l$ ($s=0$), но угол $\chi$ оставлен произвольным. Распределение масс подчинено условиям $A=C$, $J_0=(B-A)\sin^2\chi$, $D=E=F=0$ и, кроме того, $c_3=0$, $\mu c_2 + c_* \sin\chi = 0$. При этом кинетическая энергия (2) и силовая функция (1) записываются так:

$$2T = B(\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\chi + \dot{\beta}^2) + A_* n^2,$$

$$U = mg\sigma[\cos(\alpha + \beta - \varkappa)\cos^2(\chi/2) - \cos(\alpha - \beta + \varkappa)\sin^2(\chi/2)].$$

При замене (15) и нулевом значении постоянной в циклическом интеграле (3) уравнения Лагранжа в переменных $\varphi$ и $\psi$ оказываются разделенными. Их интегралы

$$^1/_2 B\dot{\varphi}^2 + mgc\cos\varphi = h_0, \qquad ^1/_2 B\dot{\psi}^2 + mgc\cos\psi = h^0$$

Харламов приводит с помощью замены $2u^2 = h_0 - mgc\cos\varphi$, $2v^2 = h^0 - mgc\cos\psi$ к виду

$$B\dot{u}^2 = \left(u^2 - \frac{h_0 - mgc}{2}\right)\left(\frac{h_0 + mgc}{2} - u^2\right),$$

$$B\dot{v}^2 = \left(v^2 - \frac{h^0 - mgc}{2}\right)\left(\frac{h^0 + mgc}{2} - v^2\right),$$

определяя зависимость $u$, $v$, а следовательно, и исходных переменных $\alpha$, $\beta$ от времени посредством эллиптических функций Якоби.

Всевозможные допустимые значения постоянных $h^0$, $h_0$ дают шестнадцать различных типов траекторий в конфигурационном пространстве. Их топологическая классификация дана в работе [27].

Таковы все найденные к настоящему времени точные решения задачи о гироскопе в кардановом подвесе и ее обобщения на задачу о движении составного пространственного маятника. Наиболее общими являются решения П. В. Харламова и М. П. Харламова. Остальные следуют из этих решений как частные случаи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Kharlamov P. V.* New methods in the dynamics of systems of rigid bodies. Dynamics of multibody systems. (IUTAM Munich/Germany, 1977). B etc.: Spring.-Verl., 1978, p. 133—143.
2. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978.
3. *Демин В. Г., Степанова Л. А.* О построении и исследовании точных решений уравнений динамики твердого тела.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 9, с. 3—17.
4. *Харламов П. В.* Новые методы исследования задач динамики твердого тела.— В кн.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. М.: Наука, 1975, с. 317—326.
5. *Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* О точных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.— История и методология естеств. наук. Математика и механика, 1973, вып. 14, с 225—241.
6. *Крылов А. Н., Крутков Ю. А.* Общая теория гироскопов. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. 394 с.
7. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. М.: Гостехтеориздат, 1955. 355 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
9. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973. 456 с.
10. История механики гироскопических систем. М.: Наука, 1975. 128 с.
11. *Новожилов И. В.* Приближенные методы исследования гироскопических систем.— В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973, с. 368—378.
12. *Бутенин Н. В., Климов Д. М., Лунц Я. Л., Степаненко Н. П.* Нелинейные задачи теории гироскопических систем.— В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973, с. 379—402.
13. *Климов Д. М.* Современное состояние теории астатического гироскопа в кардановом подвесе.— В кн.: Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964, с. 120—129.
14. *Харламов П. В.* Составной пространственный маятник.— В кн.: Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972, вып. 4, с. 73—82.
15. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. 584 с.
16. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.

17. *Климов Д. М., Степаненко Н. П.* Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе.— Инж. журн. МТТ, 1967, № 6, с. 143—150.
18. *Смолицкий Х. Л.* О движении гироскопа в кардановом подвесе.— Инж. журн. МТТ, 1966, № 2, с. 17—22.
19. *Кузьмина Р. П.* Движения гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 14—22.
20. *Smale S.* Topology and mechanics.— Invent. Math., 1970, vol. 10, N 4, p. 305—331; 1970, vol. 11, N 1, p. 45—64.— Пер. на рус. яз.: Смейл С. Топология и механика.— Успехи мат. наук, 1972, т. 27, вып. 2, с. 77—133.
21. *Четаев Н. Г.* О гироскопе в кардановом подвесе.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 379—381.
22. *Богоявленский А. А.* Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 958—960.
23. *Богоявленский А. А.* Обобщенные циклические переменные для гироскопа в кардановом подвесе в частном случае движения.— В кн.: Тр. Межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механике. Казань, 1964, с. 38—44.
24. *Богоявленский А. А.* Об одном частном решении задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. МТТ. 1974, вып. 2, с. 27—29.
25. *Богоявленский А. А.* К вопросу о частных решениях задачи движения гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 1974, с. 38, вып. 4, с. 757—760.
26. *Харламов М. П.* Одно точное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе.— Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 4, с. 823—825.
27. *Харламов М. П.* Фазовая топология одной задачи о движении гироскопа.— В кн.: Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1981, вып. 13, с. 14—23.

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

УДК 531/534(091)

*И. С. Левинова, М. М. Рожанская*

## У ИСТОКОВ МЕХАНИКИ МАШИН

Механику машин можно с полным основанием считать древнейшим направлением в истории развития механических представлений. История механики начинается именно с истории науки о машинах и механизмах. Как известно, простые машины (клин, рычаг, наклонная плоскость) применялись в строительстве грандиозных сооружений Древнего Востока, а колесо согласно археологическим данным появилось еще в эпоху неолита и ранней бронзы. В связи с развитием ирригационного земледелия в государствах Древнего Востока для подъема воды применялся рычаг (шадуф, чигирь и др.).

К столь же глубокой древности восходит применение и еще одного вида рычага — весов. Об этом можно судить по данным и археологии, и письменных источников (многочисленные находки гирь разного достоинства при раскопках в междуречье Тигра и Евфрата, изображения весов в письменных источниках Древнего Египта). Это равноплечие весы простейшей формы в виде балки, к двум концам которой подвешены чаши с грузом, с осью, проходящей через ее середину.

Однако ни древнеегипетские, ни клинописные тексты не содержат описания и правил действия «простых машин». Это была эпоха накопления и применения результатов практического опыта и сложения практических правил, ибо никакому теоретическому осмыслению эти вещи не подвергались. Элементы собственно теории простых машин и их комбинаций появляются только в античной науке.

Развитие учения о «простых машинах» в античную эпоху связано с кинематическим направлением античной механики. В основе этого направления лежит практика использования их для поднятия и перемещения грузов. В этом случае законы статики изучались на неуравновешенном рычаге. Кинематическое направление, тяготеющее к ремесленной традиции, сформировалось в позднеэллинистическую эпоху, эпоху расцвета Римской империи, где, как известно, основное внимание было обращено не на теоретические проблемы, а на разработку вычислительных методов, практических приемов и правил.

Наиболее раннее из дошедших до нас античных сочинений, посвященных «простым машинам»,— «Механические проблемы» псевдо-Аристотеля (III в. до н. э.). Древнейшая ремесленная традиция имела дело с тремя «простыми машинами»— клином, рычагом и наклонной плоскостью. В «Механических проблемах» рассматриваются клин, рычаг и блок, причем это первое упоминание блока в письменных источниках.

Трактат состоит из задач, построенных в форме вопросов и ответов (иногда лишь предполагаемых). В нем впервые в известных нам письменных источниках дано описание «простых машин», которое сопровождается правилами пользования ими и элементами теоретических рассуждений. Главная тема трактата — рычаг, и поэтому основное содержание «Механических проблем» — описание различных модификаций рычага, лежащего в основе описываемых устройств. «Явления, замечаемые у коромысла весов,— пишет автор,— сводятся к кругу, замечаемые же у рычага — к коромыслу, и почти все остальное, относящееся к механическим движениям, сводится к рычагу» [1, с. 2—3] [1].

Приведем некоторые задачи, посвященные каждой из упомянутых в трактате «простых машин». Вот, например, одно из описаний рычага. «По какой причине,— спрашивает автор,— малые силы при помощи рычага движут большие тяжести...?» «Может потому,— отвечает он,— что причина этому — рычаг, являющийся коромыслом с веревкой снизу, которое разделено на неравные части... Но под действием равных грузов быстрее приводится в движение большая из линий, проведенных из центра, а на рычаг действуют три, прежде всего опора, веревка или центр, а затем два груза — движущий и движимый. И как движимый груз относится к движущему, так будут в обратной пропорции и длины, и всегда чем дальше от опоры, тем легче приводить в движение. Причина этому будет вышеизложенная, а именно, что более длинный радиус описывает больший круг» [1, с. 9—10].

Вот как описывает автор «Проблем» клин и его действие. «По какой причине,— спрашивает он,— раздвигаются большие тяжести и массы тел при помощи клина, который сам невелик и получает сильное давление? Может быть потому, что клин представляет собой два рычага, противоположные друг другу: каждый имеет и груз, и опору, которую он разрывает, или давит. Затем движение удара увеличивает тяжесть, которая ударяет и приводит в движение; вследствие же того, что приводится в движение уже движущееся от скорости, движение усиливается еще больше. Таким образом, самому по себе небольшому клину сопутствуют большие силы, поэтому он и движет сильнее, чем можно было бы предположить по его величине» [1, с. 18—19].

Задача о блоках формулируется следующим образом: «По какой причине подымаемое или влекомое мы легче и быстрее двигаем большими кругами? Как, например, большими блока-

---

[1] Здесь и далее мы пользуемся неопубликованным переводом И. Н. Веселовского «Механических проблем» [1].

ми по сравнению с меньшими, а также и катками. Может быть, потому, что чем больше радиус, тем большее пространство он проходит в одинаковое время. То же самое он делает и при наличии сопутствующей ему равной тяжести. Эта причина одинакова с той же, как мы уже сказали, что большие коромысла точнее меньших. Действительно, веревка является центром, обе же половины коромысла по ту и другую сторону веревки будут соответствовать линиям, проведенным из центра» [1, с. 15].

О времени создания «Механических проблем» существуют разные точки зрения: одни авторы относят их к III в. до н. э., другие, например И. Н. Веселовский, считают, что трактат написан гораздо позже, в эпоху деятельности Герона Александрийского, т. е. на рубеже I—II вв. н. э. [2, с. 61]. Очевидно, автор «Проблем» принадлежал к школе Аристотеля, но пользовался каким-то гораздо более ранним и не дошедшим до нас источником, который впоследствии упоминает и Герон под названием «задачи древних». Псевдо-Аристотель более философ, чем механик, и ответы на поставленные им вопросы не всегда правильны.

Следующее упоминание о «простых машинах» мы встречаем в трактате Витрувия «Об архитектуре» [3], написанном на рубеже нашей эры. Механике посвящена последняя из десяти книг трактата. Как архитектора механика интересует Витрувия только с точки зрения сооружения устройств, облегчающих поднятие тяжестей. Он не дает описания самих «простых машин», каждой в отдельности, а рассматривает их комбинации. В связи с этим он приводит определение такой комбинации, которую он, впрочем, называет машиной (machina). «Машина,— говорит он,— есть сочетание соединенных вместе деревянных частей, обладающее огромными силами для передвижения тяжестей» [3, с. 190]. Исходя из своего определения, Витрувий в основном рассматривает грузоподъемные механизмы, кроме них,— подмостные, пневматические и водоподъемные. Специальный раздел Витрувий посвящает военным машинам. Описываемые им устройства — некоторые виды комбинаций «простых машин»: система блоков, сочетания ворот — ось, ворот — рычаг, улитка, прибор для измерения величины пройденного пути. Как и псевдо-Аристотель, принцип действия «простой машины» Витрувий усматривает в круговом движении. «Действует машина посредством круговращения»,— говорит он [3, с. 190].

Единственным сочинением эллинистической эпохи, которое представляет собой полный курс механики (и главным образом механики «простых машин») и которое целиком дошло до нас (правда, в арабском переводе сирийца Косты ибн Луки, сделанном в IX в.), является «Механика» Герона Александрийского (I в. н. э.) [4]. Впрочем, начало ее сохранилось в подлиннике в одной из книг «Математической библиотеки» Паппа Александрийского [5]. По всей вероятности, Герон в работе над своей книгой опирался на целый ряд не дошедших до нас более древних сочинений по механике. О некоторых из них он упоминает сам. Это сочинения Архимеда «О весах» и «Книга опор», а также «Механика» его предшественника Филона Александрийского (ок. 270—220 гг. до н. э.), значительная часть которой сохранилась только в изложении Герона. Теории «простых машин» посвящена вторая из трех книг «Механики».

Приступая к их описанию, Герон последовательно перечисляет все пять «простых машин». «Существует, — говорит он, — всего пять потенций, при помощи которых заданный груз передвигается заданной силой: ворот, рычаг, полиспаст, клин, винт» [4, с. 96]. Но он не просто перечисляет эти пять «потенций». Герон приводит подробное описание каждой из них по определенному плану: название, материал, из которого изготавливают соответствующую «потенцию», способ изготовления, форма, соотношение ее частей, «действующая причина», т. е. принцип ее действия, и, наконец, теоретические соображения о расчете сил при ее работе. Вот, например, как он описывает процесс изготовления винта: «Берем крепкое твердое дерево, длина которого соответствует нашим намерениям. Та часть, из которой мы хотим сделать винт, должна быть обточена и толщина ее должна быть во всех частях однородной, так чтобы поверхность ее была цилиндрической. Проведем на ее поверхности образующую цилиндра. Разделим эту образующую на равные части соответственно высоте хода винта. Возьмем на плоскости две прямые линии, из которых одна перпендикулярна другой, и сделаем одну из них равной длине окружности цилиндра, а другую соразмерно высоте хода винта. Соединим конечные точки обеих линий прямой, противолежащей прямому углу, и изготовим треугольник, равный построенному, настолько тонкий, что мы могли бы сгибать его как угодно. После того, как это сделано, кладем линию, равную высоте винтового хода, на первое из равных расстояний, которое мы отметили на стороне цилиндра. Затем обвиваем тонкий медный треугольник вокруг цилиндрического дерева и доводим остающийся острый угол треугольника до соприкосновения с прямым углом медной фигуры, потому что основание треугольника равно окружности цилиндра. Затем мы скрепляем оба угла вместе и проводим изгиб винтовой линии по прямой, противолежащей прямому углу. После этого мы поворачиваем треугольник по второму расстоянию и помещаем высоту тонкого треугольника на второе расстояние. Тем же самым способом мы проводим второй изгиб винтовой линии в непосредственной связи с первым» [4, с. 96—97].

Герона прежде всего интересует «причина, действующая в каждом употребляемом движении», т. е. «причина, по которой каждая из этих машин поднимает большие тяжести при помощи малой силы» [4, с. 51]. Таким образом, его интересует общий принцип работы всех описанных «простых машин». Этот общий принцип он, как псевдо-Аристотель, видит в круге. Поэтому Герон свое объяснение начинает с рассмотрения двух концентрических кругов, соединенных вместе и расположенных в вертикальной плоскости.

«Вообразим два круга, — говорит он, — с одним центром *A* (рис. 1), диаметры которых суть соответственно линии *BC* и *DE*. Пусть оба круга могут двигаться вокруг точки *A*, их общего центра, и пусть они будут оба перпендикулярны горизонту. Подвесим теперь в точках *B* и *C* равные грузы, а именно *F* и *H*; ясно, что круги не будут иметь склонности ни в ту, ни в другую сторону, потому что веса *F* и *H* равны и расстояния *AC* и *BA* тоже равны, так что *BC* представляет коромысло весов, которое может вращаться вокруг точки привеса *A*. Если мы находящийся в точке *C* груз передвинем и поместим его в *E*, то вес *F* опустится вниз и приведет круги во вращение. Если мы теперь увеличим груз *Q*, то он снова будет удерживать равновесие грузу *F*, и тогда груз *Q* относится к грузу *F*, как расстояние *BA* к расстоянию *AE*; таким образом, мы представляем линию *BE* как весы, которые могут двигаться около точки подвеса *A*. Это показал Архимед еще в своем сочинении «О равновесии»» [4, с. 51—52].

Действительно, если линию BE рассматривать как коромысло весов, закрепленное в неподвижном общем центре, то очевидно, что, поместив больший груз на какой-либо дуге малого круга, а меньший — на дуге большого круга, большой груз можно привести в движение с помощью небольшой силы. Таким образом, опираясь на извлечения из Архимеда и применяя геометрические приемы, Герон следует принципам геометрической статики. С этой точки зрения он объясняет принципы действия всех пяти «простых машин», разбив их на две группы: рычаг, ворот, блок и клин—винт. Действие первых трех он описывает четко. Что же касается клина и винта, который он определяет как «обвитый кругом клин, приводимый в движение не ударом, а с помощью рычага», то причины их действия Герону не вполне ясны. Он ограничивается замечанием, что действие клина зависит «от угла и удара».

Но в то же время Герон рассматривает точки приложения сил не в состоянии равновесия, а в процессе *нарушения* этого равновесия, т. е. следует и принципам кинематического направления статики. Он доказывает, что при применении «простых машин» груз перемещается медленнее: «что выигрывается в силе, то проигрывается в скорости» — знаменитое золотое правило механики. Правда, сам Герон так формулирует основной закон работы «простой машины»: «Если при пользовании машиной требуется увеличение силы, то в результате происходит замедление, ибо чем менее движущая сила по отношению к движимой тяжести, тем больше потребуется и времени; таким образом, сила к силе и время ко времени находятся в том же самом обратном отношении» [4, с. 57—58]. (Понятия скорости в античной механике еще не было.) Исходя из этого принципа, Герон объясняет действие уже не «простых машин», а их комбинаций, к описанию которых он переходит далее.

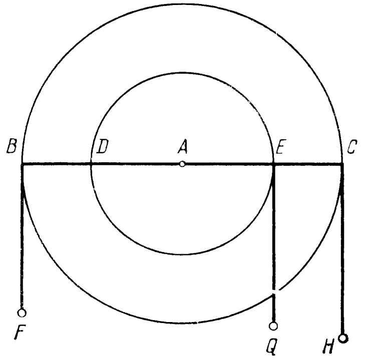


*Рис. 1*

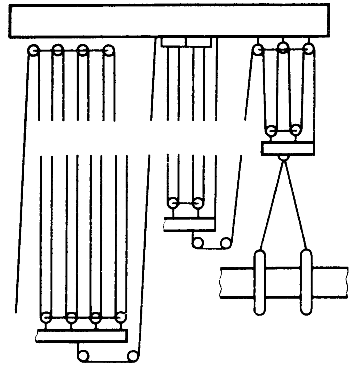

*Рис. 2*

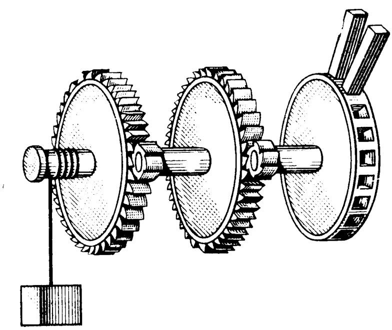

*Рис. 3*

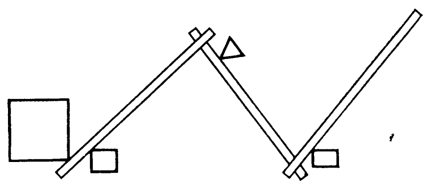

*Рис. 4*

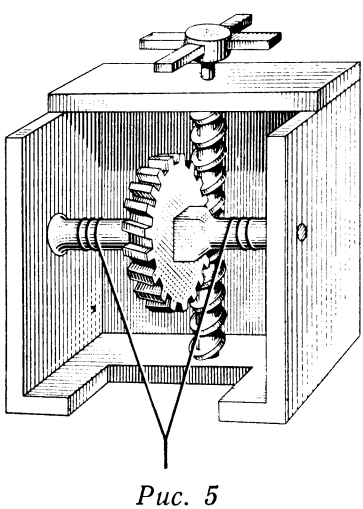

*Рис. 5*

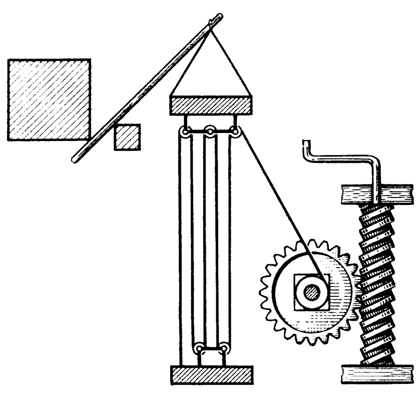

*Рис. 6*

Он рассматривает два типа таких комбинаций: 1) комбинации однородных «простых машин» — сочетания по нескольку блоков, воротов и рычагов (рис. 2—4); 2) комбинации неоднородных «простых машин» — сочетания ворот—винт, блок—рычаг—ворот—винт (рис. 5, 6). Сопровождая описание этих комбинаций числовыми примерами, он на каждом из них демонстрирует «золотое правило механики».

Мы рассмотрели сочинения трех античных авторов, которые можно практически отнести к одному периоду — когда на смену ремесленной традиции в прикладной механике приходит теория. Эти три сочинения в некоторой степени пересекаются. И в «Механических проблемах», и у Герона, и у Витрувия встречаются одинаковые задачи, которые, возможно, восходят к общему, более древнему источнику («задачам древних», как называет их Герон). Причину действия «простых машин» все три автора возводят к кругу. Но если Витрувий ограничивается голословным утверждением, то псевдо-Аристотель и Герон приводят свои объяснения, в которых первый следует кинематической традиции в ее философском аспекте, а второй объединяет в своем объяснении архимедовскую традицию и «золотое правило механики». Витрувий отдельно простые машины не рассматривает: его интересуют только их комбинации, которые применяются в строительстве и архитектуре. Даже его определение «простых машин» по сути дела определение такого устройства. Псевдо-Аристотель описывает всего три «простые машины». Герон — все пять, и самое главное — Герон впервые пытается их как-то классифицировать, распределяя их комбинации по принципу сочетания однородных и неоднородных «простых машин». Именно это сыграло впоследствии важную роль в работах его последователей, и в значительной степени этим объясняется популярность «Механики» Герона на средневековом Востоке.

В основу учения о простых машинах и механизмах на средневековом Востоке (илм ал-хийал — дословно: «наука о хитроумных ухищрениях») легли многие дошедшие и не дошедшие до нас трактаты, практические правила, рецепты и описания приемов, применяемых при строительстве зданий, дорог и других инженерных сооружений. «Илм ал-хийал» этого периода имела два основных направления: учение об устройствах для поднятия тяжестей и устройствах, применяемых в ирригационном земледелии. Описание различных модификаций «простых машин» и их комбинаций, как правило, содержится в любой энциклопедии наук того времени. В некоторых из них особо выделяется «наука о подъеме воды», которой посвящены и специальные трактаты.

Первый этап развития науки о «простых машинах» на средневековом Востоке состоял в переводе, обработке и комментировании сочинений античных авторов: главным образом Герона и в меньшей степени Витрувия и псевдо-Аристотеля. Обработкой трактатов Герона является самое раннее из таких сочинений — «Книга о механике» (точнее, о «хитроумных приспособлениях») братьев Бану Муса (IX в.) [6], которая породила целый ряд подобных ей сочинений. Но наиболее значительны для этого периода сочинения крупнейшего ученого-энциклопедиста X в. Ибн Сины. «Механические проблемы» и «Механика» Герона лежат в основе механических глав его «Книги знания» [7] и трактата «Мерило разума» [8], специально посвященного описанию пяти простых машин. Трактат состоит из двух частей. В основу первой части положена «Механика» Герона, причем настолько, что описания и рисунки некоторых «простых машин» и их соединений взяты непосредственно у Герона. Трактат Герона в значительной степени определил и структуру этой части: название и определение «простых машин», требования, предъявляемые к материалам, из которых они изготавливаются, условия, обеспечивающие прочность и надежность «простых машин», подготовка их к перемещению и поднятию груза и соединение «простых машин» между собой. В отличие от «Механики» Герона трактат Ибн Сины не содержит никакой теоретической части. В нем последовательно дается только описание каждой из пяти «простых машин», сопровождаемое чертежом, правилом действия и обязательно одним или несколькими числовыми примерами ее расчета на основе «золотого правила механики». Вот как, например, описан в нем ворот (рис. 7): «Для того чтобы этой машиной поднять вверх груз в тысячу манов[1] действующей силой в один ман, надо построить ворот, колесо которого имеет диаметр, в тысячу раз больший диаметра его вала. Но построить такое колесо неудобно или невозможно. Поэтому ворот надо изготовить из железа или стали, а длину диаметра его вала нужно взять равной одной восьмой гяза, причем величина гяза здесь — длина диаметра колеса.

Изготовим теперь ворот, имеющий вал $AB$ и около конца $B$ — колесо $K$, диаметр которого в двадцать раз больше диаметра вала. Тогда диаметр колеса будет два с половиной гяза. По окружности колеса сделаем зубцы. Возьмем два вертикальных деревянных столбика $CD$ и $ER$ и пропустим вал $AB$ в отверстия в верхних частях этих столбиков горизонтально. Изготовим ворот $H$, который мог бы поднять пятьдесят манов груза, около конца $F$ построим колесо $O$ диаметром в четверть гяза, похожее на столик мельницы. Около конца $H$ построим колесо $L$, диаметр которого в десять раз больше диаметра колеса $O$. Вал ворота $FH$ проденем в отверстия в столбиках $CD$ и $ER$ горизонтально. Далее изготовим ворот $MN$, который мог бы поднять пять манов груза: около конца $M$ построим колесо $X$, подобное колесу $O$. Вал ворота $MN$ пропустим через отверстия в столбиках $CD$ и $ER$ параллельно $FH$. При этом зубцы колеса $X$ должны соответствовать зубцам колеса $L$. К вороту $MN$ прикрепим такую рукоятку $QP$, чтобы ее длина была в шесть

[1] 1 ман = 816,5 г.

раз больше диаметра колеса $X$ и чтобы рукоятка была перпендикулярна к валу. Веревку, которая могла бы поднять тысячу манов груза, прикрепим к грузу, а другой ее конец прикрепим к валу ворота $AB$. Если мы теперь будем вращать рукоятку $QP$ с силой в один ман, то начинает вращаться колесо $X$. Оно будет вращать колесо $L$, это колесо, в свою очередь, станет вращать колесо $O$, а это последнее колесо будет вращать колесо $K$. Поэтому веревка будет наматываться на вал ворота $AB$ и груз поднимется вверх. Для ворота $MN$ справедлива пропорция $6:1=P_1:F_1$. Поэтому, так как $F_1=1$ ману, сила тяжести груза $P_1=6$ манам. Для ворота $FH$ имеет место пропорция $10:1=$ $=P_2:6$, откуда $P_2=60$ манам. Для ворота $AB$ имеет место пропорция $20:1=P_3:60$, откуда $P_3=1200$ манам.

Следовательно, пользуясь воротом, можно силою в один ман поднять вверх груз весом более тысячи манов» [8, с. 42—45, 50].

Вторая часть трактата содержит описание комбинаций «простых машин». Как и Герон, Ибн Сина классифицирует эти комбинации, распределяя их по группам по принципу однородности и неоднородности составляющих их «простых машин». Но если Герон рассматривает только некоторые из таких комбинаций, то Ибн Сина последовательно перебирает все возможные варианты. Вначале описываются варианты соединений всех однородных «простых машин»: рычагов, блоков, воротов, винтов (за исключением клина), аналогично тому, как это сделано у Герона. Затем он рассматривает все практически возможные попарные соединения неоднородных «простых машин»: ворот—винт, ворот—блок, ворот—рычаг (рис. 8—10). И наконец следует описание механизма, представляющего собой комбинацию всех «простых машин», естественно, кроме клина (рис. 11).

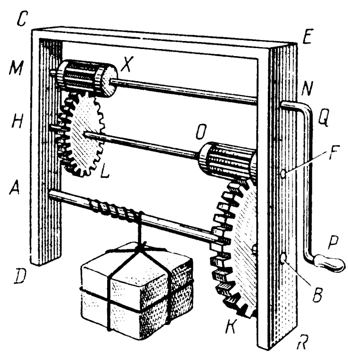

Рис. 7

Хотя трактат Ибн Сины абсолютно лишен даже элементов теории и представляет собой чисто практическое руководство, значение его в истории механики велико. Это фактически первая попытка классификации «простых машин» и их соединений. Заметим, что интерес к подобной классификации не случаен ни для эпохи Ибн Сины, ни для него лично. Для науки этого периода на средневековом Востоке вообще характерна тенденция к классификации научных фактов, явлений и категорий и даже к классификации разделов науки. Эта тенденция свойственна многим научным сочинениям и философского плана, и сочинениям по минералогии, и энциклопедиям того времени. Вслед за

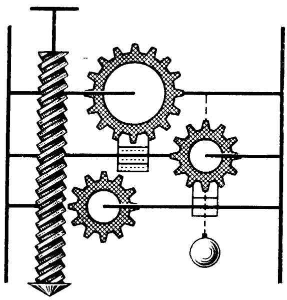

*Рис. 8*

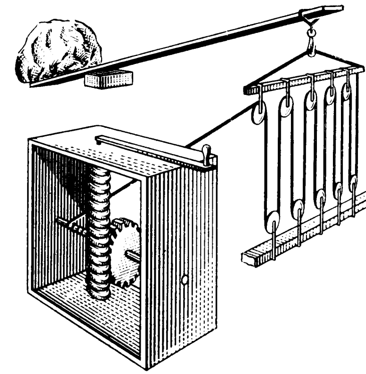

*Рис. 9*

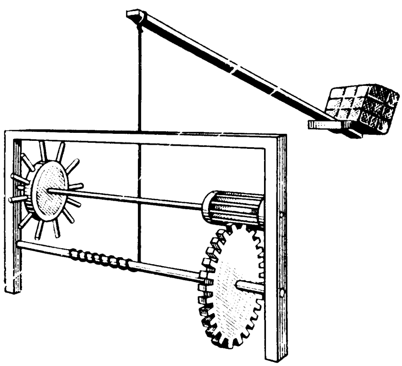

*Рис. 10*

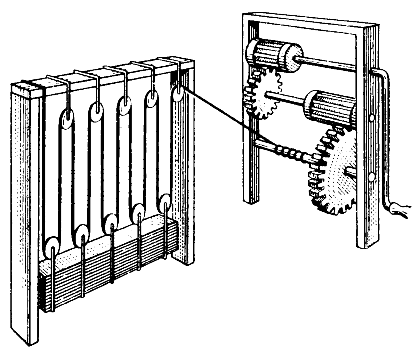

*Рис. 11*

ал-Фараби и сам Ибн Сина был автором сочинения по классификации наук своего времени [9] (илм ал-хийал, в частности, он причисляет к «ветвям» наук, понимая под «ветвью» каждой науки совокупность относящихся к ней практических приемов). Можно утверждать, что трактатом Ибн Сины на средневековом Востоке завершается период усвоения античного научного наследия в области прикладной механики и он же характеризует начало нового этапа ее развития.

Для этого этапа, хронологически относящегося к XI—XII вв., характерна уже совершенно иная тенденция. В трактатах этого времени обычно рассматривается один какой-либо вид «простых машин», приводится максимально строгая его теория и затем даются описание и классификация всевозможных комбинаций и устройств, являющихся его модификациями. Или рассматривается какое-нибудь подразделение одной из «ветвей» наук и опять-таки все возможные машины, механизмы и приборы, на ней основанные и с ней связанные. Характерным примером сочинений такого типа является знаменитый трактат ал-Хазини «Книга весов мудрости» [10].

«Книга весов мудрости» представляет собой исчерпывающее изложение основных проблем теории и практического приложения самого распространенного вида «простых машин» — рычага и наиболее применяемой его модификации — весов. Структура трактата ал-Хазини в известной степени напоминает структуру современной научной монографии. Изложению собственных результатов автора предшествует, как мы теперь назвали бы, историография проблемы: подробный критический обзор всего достигнутого в этой области античными учеными и его предшественниками на средневековом Востоке. Сочинение ал-Хазини состоит из восьми разделов — отдельных «книг». Первая «книга» — теоретическая. Это теории рычага, центра тяжести, методов определения центра тяжести различных плоских фигур и пространственных тел, теории равновесия и его видов, устойчивости равновесия и т. д. В этом разделе даны различные трактовки понятия веса того времени и т. д. Во второй книге речь идет о принципах конструирования, «искусстве изготовления» и градуировке весов. В остальных разделах описываются все известные в его время модификации весов, предназначенных для самых разнообразных целей. Это и обыкновенные равноплечие весы — мизан с двумя чашами и определенным набором разновесов, подобранных таким образом, чтобы с помощью минимального числа разновесов можно было взвешивать достаточно тяжелые грузы, это и всевозможные разновидности безменов. В специальном разделе описывается взвешивание ювелирных изделий и денег с помощью модификаций весов, применяемых в торговле драгоценностями и в обменных операциях — весьма существенной стороне международной торговли в средние века. Два раздела посвящены одной из наиболее важных областей применения весов — определению удельного веса металлов и минералов. Для этой цели ал-Хазини предложил собственную модификацию особо точных весов — «весов мудрости» (мизан ал-хикма), предназначенных для взвешивания грузов в воздухе и жидкости. С помощью этих весов, кроме того, можно было определять состав двух- и трехкомпонентных сплавов. Вот как характеризует их сам ал-Хазини.

«Весы мудрости — самые честные весы, которыми пользуются люди в ремесле и торговле. Они применяются по причине точности взвешивания и преимуществ, связанных с этим. Они отличаются от других весов тем, что указывают вес предмета и ничего больше ...дают нам знание о точности веса взвешиваемого тела... и... вес сплава и его составных частей без рафинирования и переплавки» [10, с. 100]. «Весы мудрости» ал-Хазини состоят из коромысла с поперечиной посредине, язычка, неподвижно закрепленного поперечно балке, «ножниц» и пяти подвешенных к коромыслу чаш равного размера. Две чаши в форме полусферы, неподвижно закрепленные на концах балки,

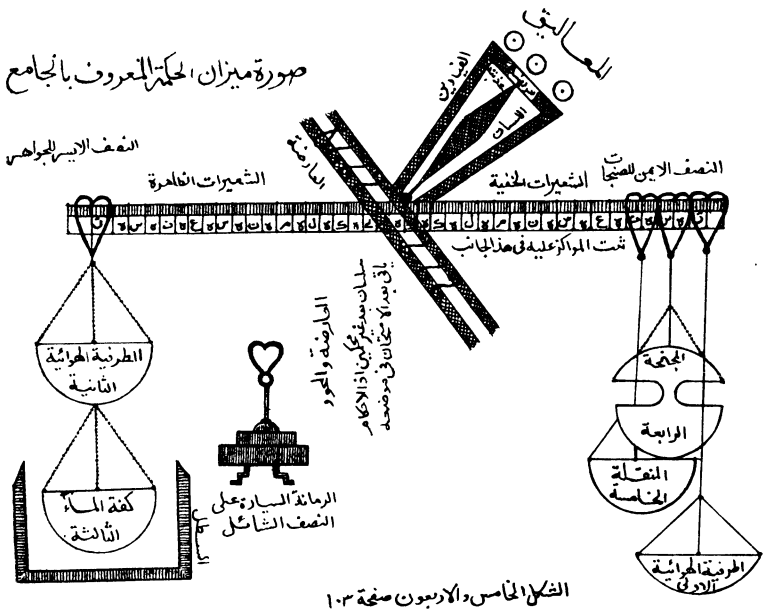


*Рис. 12*

предназначены для взвешивания груза в воздухе, такая же третья с конусообразной насадкой на днище подвешивается к крюку в днище одной из неподвижно закрепленных чаш и предназначается для взвешивания груза в воде. Четвертая и пятая чаши играют роль передвижных гирь. На коромысло нанесена градуировка в соответствии с удельными весами металлов и минералов (рис. 12). В специальном разделе трактата ал-Хазини описывается применение весов в геодезических и нивелировочных работах. Это всевозможные модификации устройств, предназначенных для измерения разности высот данных точек поверхности Земли, определения высоты гор, зданий, расстояний до недоступных предметов и т. д. Простейший из таких приборов — так называемые земляные весы. Это коромысло с язычком и «ножницами» посредине, к концам которого прикреплены нити с грузиками. К прибору прилагаются два колышка одинаковой длины, которые ставятся в различных по высоте точках поверхности, и через них пропускаются нити. При этом весы будут выведены из положения равновесия. Для восстановления равновесия надо отпускать нить на одном из колышков до тех пор, пока язычок не войдет в ножницы и не успокоится в этом положении. Длина отпущенного отрезка нити будет равна разности высот обеих точек (рис. 13).

Наконец, последняя, восьмая, книга трактата ал-Хазини посвящена модификации весов, предназначенной для определения времени, точнее, часов, специально предназначенных для астрономических наблюдений.

Весы-часы ал-Хазини представляют собой комбинацию неравноплечих весов типа безмена и песочных или водяных часов (клепсидры). Конструкция их близко напоминает устройство современных медицинских весов. Коромысло состоит из двух металлических планок с нанесенными на них шкалами и двумя передвижными гирями, большой и малой, перемещаемыми по каждой шкале. На коромысле сделано углубление для подвешивания в этом месте сосуда с водой или песком. Один из концов коромысла за кольцо со шнуром подвешивается к крюку в потолке предназначенного для них специального помещения таким образом, чтобы это коромысло все время оставалось параллельным плоскости горизонта. Длина коромысла, вес гирь и сосуда с песком или водой подбираются специальным образом, путем расчета с помощью пропорций. Если шкалы градуируются в часах, то шкала большой гири содержит 24 деления и вес малой гири должен составлять 1/24 веса большой, а если в «заманах», т. е. в градусах небесного экватора, — то 360 делений и вес малой гири равен $^1/_{120}$ веса большой.

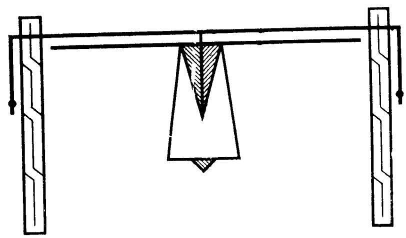

*Рис. 13*

Весы-часы ал-Хазини должны быть установлены в помещении с постоянной температурой, вода или песок специально подбираются, чтобы по возможности устранить влияние побочных факторов. Способ употребления весов-часов крайне прост. В фиксированный момент времени открывается отверстие в сосуде с песком или водой и освобождают конец коромысла. Весы выходят из положения равновесия. Для его восстановления надо передвигать малую, а затем по истечении часа (или градуса) и большую гири. Число делений на шкалах соответствует истекшему интервалу времени. Обычно к большим весам-часам прилагались малые, градуированные для одного часа, которые включались, чтобы не прерывать отсчета времени в тот момент, когда в больших иссякал песок или вода и надо было вновь наполнить сосуд. Заметим, что описание ал-Хазини — первое упоминание астрономических весов в научной литературе.

* * *

Изложенное выше — первая попытка проследить некоторые закономерности зарождения и формирования учения о «простых машинах» в глубокой древности и средневековье. От первоначального описания действия «простых машин» и их комбинаций к попыткам их классификации, а затем монографическому описанию отдельных видов «простых машин», содержащему теорию, конструкцию и все модификации данного вида, — такова специфика этого направления механики в эпоху античности и восточного средневековья. Именно это своеобразие характеризует начальные этапы развития статики, которые можно отнести к истокам механики машин.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Псевдо-Аристотель.* Механические проблемы: Неопубл. пер. с греч. И. Н. Веселовского.— Арх. Ин-та истории естеств. и техн. АН СССР, 1977. 25 с.
2. *Веселовский И. Н.* Очерки по истории теоретической механики. М.: Высш. школа, 1974. 287 с.
3. *Витрувий Марк Поллион.* Десять книг об архитектуре. М., 1936. 331 с.
4. *Heron von Alexandria.* Mechanik und Katoptrik/Hrsg. und übers. von L. Nix und W. Schmidt, Leipzig, 1900. 567 S.
5. *Pappus d'Alexandrie.* La collection mathématique. P., 1933. 253 p.
6. *Hauser F.* Über das «Kitâb al-hijal» der Benû Mûsa.— Sitzungsber. phys.-med. Soz., Erlangen, 1922, Bd. 53/54, S. 376—391.
7. *Ибн Сина.* Книга знания. (Донишнаме). Душанбе, 1957. 286 с.
8. *Ахадова М. А.* Трактат Абу Али ибн Сины «Мерило разума».— В кн.: Из истории точных наук на средневековом Среднем и Ближнем Востоке. Ташкент, 1972, с. 42—57.
9. *Каримов У. И.* Классификация наук по Ибн Сине.— В кн.: Материалы Всесоюзн. конф. востоковедов (Ташкент, 4—11 июня 1957 г.). Ташкент, 1958, с. 986—990.
10. *Абд ар-Рахман ал-Хазини.* Книга весов мудрости. (Китаб мизан ал-хикма). Хайдарабад, 1359 (1941). 169 с. На араб. яз.


УДК 531/534(091)

*А. Н. Боголюбов*

# СТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ МАШИН

Научная революция XVII в. нашла свое логическое завершение в «Математических началах натуральной философии» Ньютона, первое издание которых было опубликовано в 1687 г. Тем самым было положено начало ньютонианскому миропониманию, которое, по меткому выражению Дж. Сартона, изменило мир. Тогда же началась интенсивная работа над разработкой проблем механики и математики непрерывных процессов, работа, которую вели в обоих этих направлениях одни и те же ученые: высказанные ими идеи во многом определили дальнейшее развитие математического естествознания.

Вместе с тем повышается интерес к изучению машин. Если в XVI—XVII вв. машины только описывались и лишь изредка возникали попытки осмыслить построение их отдельных элементов или отдельных технологических процессов, то в XVIII в., когда повсеместно начинают появляться машины, принципиально непохожие на все то, что было создано до того времени, становится необходимым глубже разобраться в этом растущем и изменяющемся царстве и вывести соответствующие законы и положения. Машины входят в круг важнейших интересов Лондонского королевского общества, Французской, Российской и иных академий. Продолжается работа над описанием известных, малоизвестных и новых машин («машиноведение»), но вместе с тем начинается и исследовательская работа, которая впоследствии, уже в XIX в., вызвала к жизни появление механики машин. Если отвлечься от исследований в области гидравлики, гидродинамики, сопротивления материалов, которые также в определенной степени сыграли роль в деле становления учения о машинах, то собственно изучению машин были посвящены работы, которые условно можно назвать исследованиями по кинематике механизмов и по динамике машин. В настоящей статье автор пытается установить вехи становления динамики машин.

Важнейшими из проблем динамики машин, над которыми размышляли механики XVIII в., были: теория движителей, учение о движении машины и проблема регулирования хода машины.

Теория движителей в том виде, как она сформировалась в XVIII в., изучала два вопроса — величину и возможности механического действия, которые можно было получить от источников энергии того времени — силы человека и животных, силы ветра, воды, водяного пара. Эталоном служила на протяжении почти всего века сила человека; лишь к концу века появляется новая единица измерения — лошадиная сила. И объем соответствующих исследований, и «эталонные» единицы измерения мощности доказывают, что в XVIII в. главными источниками энергии продолжали оставаться сила человека и животных. Что касается второго вопроса, то приемники силового воздействия изучались применительно к движителям и к их механической структуре.

Учение о движении машины, основы которого заложил Л. Эйлер, развивалось в конце XVIII — начале XIX в. в трудах Л. Карно, А. Гениво, Ж. Кристиана. Важнейшими его составляющими были уравнение движения машины и учение о силах инерции (у Карно).

Учение о регулировании хода машин (соответствующие механические устройства назывались тогда модераторами) включало не только сведения о маховике и о регуляторе, которые обычны для этого раздела механики машин в ее современном состоянии, но и некоторые другие вопросы, которые впоследствии (и, добавим, совершенно напрасно) были исключены из механики машин. Этого вопроса мы коснемся несколько позже.

Рассмотрим эти основные динамические проблемы учения о машинах так, как они сформировались в XVIII в. и в двух первых десятилетиях XIX в.

1. Вопрос об оценке источников энергии относительно поздно попал в поле зрения ученых и техников. Издавна в этих целях пользовались силами человека и животных, с V—IV вв. до н. э. начинают применять для привода машин в движение силу воды, с IX—XI вв. н. э. — силу ветра, со второй половины XVII в. начинают размышлять над силой пара. Применялись, правда, еще с IV в. до н. э. упругие элементы в качестве привода военных машин, а с XIII в. в тех же целях — порох, но эти источники энергии обеспечивали лишь дискретное действие военных машин, хотя и делались попытки применения их и для машин непрерывного действия.

При использовании силы человека для приведения в движение машины учитывалось то, что при этом можно применить или мускульную силу человека, или его вес, или оба рода сил одновременно. Для оценки возможных результатов эксперименты проводились на протяжении почти всего века. Так, по опытам Ш. Кулона, человек может поднять груз в двадцать килограммов на высоту одного метра двадцать раз в течение минуты при трех часах действительной работы в день, полагая, что все остальное время будет затрачено, но непроизводительно [1, с. 6]. Давление, которое может произвести рабочий, оценивалось [1, с. 6] в среднем в 130 кг, т. е. как удвоенный вес человека; в отдельных случаях для более сильных рабочих эта величина оценивалась в 200 и даже в 300 кг.

Некто Демандр изобрел приспособление, с помощью которого можно было одновременно пользоваться и мускульной силой рабочего, и его весом; по этому поводу Г. Прони указал, что величина усилия зависит от продолжительности работы, что, в свою очередь, зависит от усталости. По его словам, «что касается усталости, то работа, ее вызывающая, производит на организм человека двоякое действие. Во-первых, это расслабленность мускулов и нервов, находящихся в работе, в результате чего они теряют свою эластичность и теряют возможность выполнять свои функции. Во-вторых, это истощение путем незаметного испарения жизненных сил, которые обеспечиваются питанием. Это истощение свойственно здоровому человеку даже тогда, когда он не работает, и значительно увеличивается упражнением или работой тела. Первая причина усталости свойственна той или иной части тела, которую она поражает отдельно и у которой она сможет снизить или приостановить способность действия, не производя такого же действия на другие части. Так, например, человек после работы на ступательном колесе может работать руками; возможность его действия в этом отношении снизилась значительно меньше, чем в его нижних конечностях. Что касается второй причины усталости, то вызванное ею ослабление распределяется по всему телу и может сделать рабочего полностью неспособным к действию, хотя в работе была только одна часть его организма...» [1, с. 6—7]. Таким образом, в соответствии с тем, что сила человека являлась важнейшим источником энергии, в XVIII в. было проведено много экспериментов в этом направлении и предложено несколько приемников, с помощью которых можно было наилучшим образом использовать человеческую силу.

Все это имело свое глубокое основание: на протяжении всего XVIII в. только сила человека и животных могла служить паллиативом универсального двигателя; более мощные источники энергии — вода и ветер — были привязаны к определенному месту, и перенос необходимой энергии в конкретное место, не имевшее потока воды или доступа ветра, осуществлялся переброской значительных количеств людей и животных. Отсюда и необходимость достаточно глубокого изучения этих источников энергии в целях возможно более интенсивной их эксплуатации.

Но одновременно производились и эксперименты с водяными и ветряными двигателями; поиски наилучших моделей вызывались необходимостью получить при прочих равных условиях оптимальную отдачу. Так, в случае водяных колес исследовались относительная отдача верхне- и нижнебойных колес, форма колес, число и распределение лопаток, пропорции всех частей колеса, форма и расположение отводного потока.

Одним из первых экспериментов был следующий: на вал колеса (или модели колеса) наматывался канат с прикрепленным к нему грузом, величина которого обеспечивала равновесие системы. Ньютон указал, что для случая, когда вода выливалась из отверстия в сосуде, уровень в котором поддерживался постоянным, величина груза должна быть равна весу воды в объеме с основанием, равным отверстию, и высотой в 2 раза больше высоты сосуда [2]. Почти одновременно Э. Мариотт и Ф. Лагир утверждали, что равновесие может быть достигнуто при высоте столба жидкости, равной высоте сосуда.

Первое теоретическое исследование предпринял А. Паран (1704). Он установил зависимость отдачи колеса от скорости его вращения. По его мнению, колесо не смогло бы вращаться со скоростью потока, ибо в этом случае оно не преодолевало бы никакого сопротивления и, следовательно, не производило бы никакого действия. С другой стороны, если бы не было движения, то действие также равнялось бы нулю. Следовательно, между скоростями колеса и потока воды должно существовать некоторое соотношение, которому соответствует максимум действия. По мнению Парана, такой оптимальный случай достигается, когда скорость колеса равна 1/3 скорости потока.

Мнение Парана было общепринятым среди гидравликов в течение двух третей века. В той или иной форме к нему присоединились Б. Ф. Белидор, К. Маклорен, Л. Эйлер. Только в 1767 г. Ж.-Ш. Борда установил, что скорость колеса должна быть равна половине скорости потока [2].

Жан-Шарль Борда был избран в 1756 г. в Французскую академию наук. Военный инженер по специальности, он в 1767 г. перешел на военно-морскую службу в звании младшего лейтенанта. Через четыре года по поручению Академии наук Борда занимается поверкой в открытом море морских инструментов. В 1782 г. он командир линейного корабля и конвоирует войска, отправляемые на Мартинику. В 1788 г. вместе с Г. Монжем, П. С. Лапласом, Ж.-Л. Лагранжем и М. Кондорсе он представляет Академии наук «Рапорт о выборе единицы измерения». В 1795 г. его избирают в первые составы Бюро долгот и Национального института. Борда внес большой вклад в науку кораблевождения, применив к ней математические методы.

Экспериментальная проверка предположений, сводившихся к тому, считать ли давление воды на лопатки колеса пропорциональным второй (Ньютон) или первой степени скорости (Ш. Борда, Хорхе Хуан) потока жидкости, была начата самим Ньютоном. Дальнейшие эксперименты провели Э. Мариотт, Д. Бернулли. Последний, а вслед за ним Л. Ю. Крафft установили, что эффект действия зависит от характера подачи воды на колесо — спокойное течение воды или ударное ее воздействие на колесо. Значительная экспериментальная работа в этом направлении была выполнена выдающимся английским механиком Дж. Смитоном в 1752—1753 гг. и доложена им в 1757 г. Лондонскому королевскому обществу.

Дж. Смитон внес ряд усовершенствований в технику построения водяных и ветряных двигателей, построил на Темзе насосную станцию для снабжения Лондона питьевой водой, усовершенствовал паровую машину Т. Ньюкомена. Выполнил также ряд значительных строительных работ. Он член Королевского общества с 1753 г.

В середине века вопросами теории движения водяных колес занимались также французский математик Ш. Боссю и испанский инженер и мореплаватель Хорхе Хуан.

Ш. Боссю уже в возрасте 22 лет по рекомендации Ж. Д'Аламбера и А. Клеро был назначен профессором математики Военной школы в Мезьере. В 1768 г. он был избран членом Академии наук и получил кафедру гидравлики в Лувре. Ш. Боссю сотрудничал с Д. Дидро и Ж. Д'Аламбером при создании ими «Энциклопедии». В 1795 г. он был избран в Национальный институт и назначен экзаменатором учеников Политехнической школы.

Боссю провел ряд экспериментов над водяными колесами и пришел к заключению, что скорость колеса, соответствующая его оптимальной отдаче, должна быть приблизительно равной 2/5 скорости потока, что полностью совпало с результатами соответствующих опытов Смитона. Он подтвердил также предположение, высказанное Х. Хуаном, о том, что давление на колесо следует считать пропорциональным первой степени скорости потока.

Хорхе Хуан и Сантасилья учился в Сарагосском университете, с 1729 г. служил во флоте. В 1734 г. Х. Хуан совместно с А. Ульоа принимал участие в измерении меридиана в Южной Америке. С 1746 г. он занимал в Испании ряд правительственных постов, работал над вопросами навигации и вооружения, а также над вопросами практической механики.

В XVIII в. были теоретически исследованы оба случая приведения во вращение водяных колес: путем удара воды о лопатки и весом воды, подаваемой сверху на ковшеобразные лопатки. Инженеры и в первую очередь крупнейший авторитет того времени в области строительной и гидравлической техники Б. Ф. Белидор считали, что последний способ менее выгоден, чем первый. На основании ряда экспериментов А. Депарсье установил [3, с. 603], что для случая разности уровней не менее 4 м выгоднее применять наливное колесо. Почти одновременно с публикацией Депарсье Эйлер представил Геттингенскому обществу наук мемуар, в котором пришел к аналогичным выводам. Эйлер рассмотрел три класса водяных двигателей, действующих от удара жидкости, ее веса и реактивного действия воды.

Так же как для случая подливных (нижнебойных) колес, при черпаковых колесах может оказаться, что колесо не может преодолеть сопротивления нагрузки: этим были определены эксперименты, целью которых стал поиск оптимальной скорости. По опытам Смитона оказалось, что оптимальная скорость для таких колес равна 3 фут/с, причем диаметр колеса не влияет на величину скорости; при этом Смитон пришел к заключению, что нижнебойные колеса в 2 раза слабее верхнебойных. Назвав механической мощностью произведение расхода жидкости на величину ее падения, он нашел, что механическая мощность относится к действию колеса, как 3 : 2.

Смитон пришел также на основании своих экспериментов к следующим выводам: 1) в случае одной и той же виртуальной или эффективной нагрузки на лопатки колеса действие колеса в точности пропорционально расходу воды; 2) при постоянном расходе воды действие колеса почти точно пропорционально виртуальной или эффективной нагрузке; 3) расход воды при постоянном ее уровне определяет действие колеса, почти точно равное квадрату скорости течения воды; 4) при одной и той же площади отверстия в сосуде действие колеса почти точно равно кубу скорости истечения воды.

Смитон установил также, что для больших колес отношение между мощностью и действием колеса в среднем равно 3 : 1, а среднее отношение между скоростью истечения воды и скоростью вращения колеса равно 5 : 2.

К такому же результату пришел и Боссю. Он установил также, что на колесе следует ставить как можно больше лопаток, но так, чтобы это не утяжеляло колеса [1, с. 50—51].

К концу века в связи с необходимостью повышения мощности энергетических установок стали увеличивать как диаметр отдельных колес, так и число колес в отдельных установках. Самыми большими установками последней четверти XVIII в. были гидравлическая система, построенная К. Фроловым на Змеиногорском руднике, водопроводная установка в Марли под Парижем и насосная установка у Лондонского моста. Впрочем, эти установки работали не на оптимальных режимах, найденных наукой того времени.

Несколько особняком стоит сегнерово колесо — прообраз гидравлической турбины, теорию которого разработал Эйлер в 1750—1761 гг. Эйлер также улучшил конструкцию турбины: он устроил направляющий аппарат, изменил характер трубок, заменив прямолинейные трубки криволинейными, увеличил их число, установил заслонки на выходе из рабочего колеса. Созданная Эйлером теория турбин все же не была достаточно строгой, так как в ней не учитывалось, в частности, трение жидкости.

Важным источником энергии в XVIII в. была также сила ветра. Внимание исследователей было сосредоточено на поисках рациональной формы приемника — ветряного колеса, наклона лопастей колеса по отношению к направлению ветра, скорости вращения колеса.

Первые исследования ветряных колес принадлежали Парану. Он предположил, что давление ветра — сила, действующая на лопасть ветряного колеса, — пропорционально квадрату скорости ветра и квадрату синуса угла между направлением ветра и плоскостью лопаток лопасти, т. е. синусу угла атаки лопасти. В результате своих экспериментов Паран показал, что эффективная величина этого угла равна 54°44′. Однако ни он, ни Б. Ф. Белидор и А. Пито не приняли во внимание, что при вращении колеса его действие зависит не от абсолютной, а от относительной скорости ветра и что, следовательно, найденный угол в процессе движения не является оптимальным. К такому выводу пришел в 1738 г. Д. Бернулли.

В 1742 г. вопросом действия ветряного колеса заинтересовался Маклорен, который пытался определить оптимальные элементы его лопастей. Как Д. Бернулли, так и Маклорен рассматривали ускоренное и равномерное вращение лопасти. Они нашли, что лопасть быстро приходит в состояние равномерного вращения и в таком состоянии обеспечивает оптимальную отдачу.

Специально вопросами формы лопасти ветряного колеса занимался Эйлер [4, с. 172]. Предположив, что лопасть является плоской и имеет заданный угол атаки, он ищет максимальную скорость вращения лопасти. Последняя оказалась приблизительно пропорциональной произведению тангенса угла атаки лопасти на скорость ветра. Принимая, что в начале движения угол атаки равен 54°44′, Эйлер нашел, что во время движения его можно довести до 80°. При этом предполагалось, что этот угол является постоянным по всей длине лопасти. Эйлер указал, что в оптимальном случае скорость вращения лопасти должна равняться половине произведения скорости ветра на тангенс угла атаки лопасти ветряного колеса.

В 1756 г. Эйлер опять обратился к этому вопросу. Затем, в 1781 г. теорией ветряного колеса занялся Ш. Кулон.

Исследования Кулона наглядно свидетельствуют о результатах развития двух почти непересекающихся ветвей механики, теоретической и практической, действительно являющейся результатом многовековой деятельности практиков. При построении машин, инженерных и архитектурных сооружений практики, не зная ни строительной механики (которая была создана в XIX в.), ни механики машин (также разработанной в XIX в.), пришли к тем же результатам, которые позже получили ученые.

Значительную экспериментальную работу по определению эффективности работы ветряных мельниц провел Смитон. В своих опытах он менял форму лопастей, их положение и наклон. Эти опыты подтвердили теоретические предположения о том, что плоскости лопастей имеющих угол атаки 55°, действительно испытывают наибольшее давление ветра, но лишь в том случае, когда они находятся в состоянии покоя. Если же лопасть находится в движении, то действие оказывается меньшим. Он нашел, что наилучшей формой лопасти является такая, при которой крайние элементы (у конца лопасти и у его втулки) имеют углы атаки, соответственно равные 70°30′ и 22°30′. Эти опыты подтвердили предположение Эйлера [4].

Смитон пришел в результате своих экспериментов к следующим выводам: 1) скорость вращения лопастей мельницы, не нагруженной или работающей под полной нагрузкой, пропорциональна скорости ветра, если форма лопасти и ее наклон остаются одними и теми же; 2) сила, соответствующая максимуму действия колеса, пропорциональна величине, несколько меньшей квадрата скорости ветра, при условии, что форма и положение лопастей остаются теми же самыми; 3) максимальное действие одних и тех же лопастей пропорционально величине, несколько меньшей куба скорости ветра; 4) нагрузка на одни и те же лопасти, соответствующая максимуму действия, равна приблизительно квадрату, а их действие — приблизительно кубу числа оборотов лопастей в заданный период времени; 5) когда лопасти нагружены и обладают максимальным действием при заданной скорости, то, если при той же нагрузке скорость ветра незначительно возрастает, действие колеса приблизительно равно квадрату скорости ветра, а если скорость ветра удвоится, то действия лопасти относятся между собой приблизительно, как 10 : 27,5.

Остальные выводы Смитона относятся к типам мельниц, формам лопасти и характеру нагрузки на лопасть ветряного колеса.

Исследования паровой машины проводились в самом конце века; они имели главным образом термодинамическое содержание, но обусловили становление исследований в двух важных направлениях: в поисках уравнения движения машины и в вопросах регулирования хода машины.

2. Несмотря на то что ученые XVIII в. старались рассматривать водяной и ветряной двигатели в процессе их работы, они все же сводили их механическую сущность к положению равновесия и решали практические задачи с помощью статики

(теории и соответствующего эксперимента): это было совершенно естественно, так как водяные и ветряные колеса как источник энергии рассматривались не отдельно, а как интегральная часть мельниц — технологических машин. Впервые Эйлер в двух мемуарах — «О машинах вообще» (1753 г.) [5] и «Принципы теории машин» (1763 г.) [6] — указал на то, что машину нужно изучать не в состоянии покоя, а в движении, и поставил все основные вопросы теории машин.

Следующей работой, в которой исследовались вопросы динамики машин, явилась работа Л. Карно «Опыт о машинах вообще», изданная в 1783 г. Она была переиздана в 1803 г. под измененным заглавием «Основные принципы равновесия и движения» [7]. Собственно механике машин посвящена последняя часть этого трактата — «Рассуждения о применении к машинам движущих сил».

По определению Карно, «машины вообще суть тела, которые устанавливают между двумя или несколькими мощностями для передачи действия от одной к другой, следуя тем или иным условиям, в соответствии с выполняемым заданием» [7]. Таким образом, Карно еще не знает структуры машины и под его определение подходят и машины, и механические приспособления, и даже «простые машины» — рычаг, блок, клин и иные. Но далее он рассматривает движение как важнейшее свойство машин; он считает основным для них то, что их действия на вводе в машину и выводе из нее относятся как обратные величины соответствующих скоростей. При этом в случае движения следует учитывать действительные скорости, а в случае равновесия — скорости виртуальные [7, с. 229]. Карно указывает также на одно из важнейших свойств машины, впервые замеченное им самим: «Для того чтобы произвести наибольшее возможное действие, необходимо, чтобы полностью отсутствовали ударные явления, т. е. чтобы давление менялось постепенно» [7, с. XX].

Карно вводит понятие работы, определяя его как произведение величины силы на высоту подъема, и называет полученную величину действием мощности (effet d'une puissance). Работу, совершаемую машиной, он выражает так:

$$FVT=PH,$$

где $F$ — сила, $V$ — скорость, $T$ — время, $P$ — вес, $H$ — высота подъема. Он называет $F$ действующей силой, а $P$ — сопротивляющейся силой и вводит также силу инерции, определяемую выражением $\int m\frac{dV}{dt}$, где $m$ — масса каждого из тел системы, относящихся и к действию, и к сопротивлению, и к самой машине. Карно считает, что от силы инерции следует абстрагироваться при условии равномерного движения, когда $dV=0$ [7, с. 232].

Приведем соображения Карно о силах инерции, которые он вводит в своем анализе сил, действующих на машину в процессе ее работы. Он пишет: «Количество движения, которое каждое из тел передает другому, когда то изменяет движение первого, называется силой инерции этого первого. Подобное же происходит и тогда, когда в наличии имеется система тел. В этом случае будем называть силой инерции каждого из них в каждый момент времени то сопротивление, коим оно противится изменению своего состояния, т. е. реакцию, производимую им на систему других тел, побуждающих его перейти от состояния покоя к движению, от движения к покою или от одного движения к иному движению, иными словами, силу, равную и противоположную той, которую следует приложить к этому подвижному телу, чтобы заставить его перейти от того состояния, в котором оно находилось, в другое состояние, в котором оно окажется через мгновение.

Отсюда следует, что если разложить эффективную скорость подвижного тела перед ударом на две другие, из которых одна — та, которую тело приобретет после удара, то другая, умноженная на массу этого тела, и будет тем, что мы называем силой инерции в момент удара...

Из изложенного следует, что сила, действующая в каждый момент от каждого из тел системы, является результирующей движущей силы и силы инерции.

Итак, обратно: сила инерции является результирующей сил, производимых движущимся телом на все другие тела системы давлением или напряжением, и силы, равной и противоположно направленной действующей силе.

Следовательно, если действующая сила равна нулю, т. е. если система движется исключительно за счет прежде произведенного движения, которое меняется только благодаря тому действию, которое производят тела друг на друга в каждое мгновение, сила инерции окажется для каждого тела и для каждого мгновения равной и противоположно направленной испытываемому им давлению.

Если, наоборот, все тела свободны и движутся исключительно под действием движущих сил, как, например, тяжести, то сила инерции каждого из них в каждый момент времени равна и противоположно направлена его движущей силе.

Наконец, в случае равновесия или равномерного движения сила инерции всегда равна нулю, какими бы ни были движущие силы, действующие на систему, ибо сила инерции не выражает изменения, испытанного системой, если считать уже приобретенными те движения, которые она стремится воспроизвести, но лишь с учетом эффективных движений, которые она приобрела уже ранее вследствие действия движущей силы.

«Мне следует заметить,— говорит Эйлер в 66-м письме к немецкой принцессе,— что весьма неудачно называть силой то свойство тел, с помощью которого они удерживают свое состояние: ибо если под словом «сила» понимают все то, что может изменить состояние тел, то качество, благодаря которому они сохраняют свое состояние, является скорее противоположностью силе. Посему, лишь заблуждаясь, некоторые авторы дают наименование силы инерции этому свойству, которое они называют силой инерции. Это заблуждение может привести к грубейшим ошибкам».

Приведенное замечание Эйлера резко. Однако нетрудно избежать этих ошибок, отличая то, что просто называют инерцией, от силы инерции. Инерция является лишь свойством, которое не входит в расчеты, а сила инерции есть настоящее количество, для которого возможна точная оценка. Инерция — это только свойство каждого тела сохранять свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, а сила инерции — это количество движения, с которым это тело действует на всякое иное тело, стремящееся вывести его из этого состояния.

Таким образом, сила инерции действительно имеет те свойства, которые имеет то, что вообще называется силой, т. е. всего того, что меняет состояние покоя или движения тел; ибо, поскольку она является сообщенным количеством движения, она обязательно меняет состояние тела, которому она передана: что же касается состояния того тела, которое ее сообщило, оно также меняется одновременно. Последнее происходит благодаря реакции другого тела, реакции, которая является не чем иным, как силой инерции этого другого тела» [7, с. 71—73].

Приведенный отрывок из рассуждений Карно по поводу сущности сил инерции доказывает, что с этой проблемой механики столкнулись уже в XVIII в. Выяснение движения машины является важнейшей задачей, ибо оно является (как это ранее показал Эйлер) основной характеристикой машины. По определению Карно, «машины в общем являются телами, которые устанавливают между двумя или многими мощностями для переноса действия от одной к другой, в соответствии с теми условиями, которые соответствуют выполняемому предмету» [7, с 227]. Машины приводятся в движение силой человека и животных, а поэтому (указывает Карно) основным законом, которому подчинено движение машины, является закон живых сил

$$PH = {}^1/_2 mV^2.$$

Силы, приводящие машину в движение, сперва превышают по величине силы сопротивления; возникающее движение постепенно ускоряется, однако или вследствие уменьшения движущей силы, или же благодаря увеличению сопротивлений почти всегда отношение этих сил уменьшается, они взаимно уравновешиваются и машина приходит к равномерному движению. Исходя из закона живых сил, Карно приходит к заключению, что для получения от машин наилучшей отдачи совершенно важно строить их таким образом, чтобы движение их изменялось весьма незначительно. Кроме того, он утверждает, что с той же целью следует или полностью исключить, или снизить, насколько это возможно, трение, жесткость канатов, сопротивление воздуха.

Таким образом, в своем анализе Карно достаточно глубоко проник в сущность машины и пришел к ряду заключений, которые получили свое обоснование уже в XX в.

В предисловии к трактату Ж. Ашетта Карно еще раз возвращается к вопросу о движении машины. Он рассматривает последнюю в состоянии покоя и в состоянии движения. В первом случае его расчет машины основывается на принципе виртуальных сил, а во втором — на принципе сохранения живых сил. Хотя оба эти принципа и являются всего лишь двумя различными аспектами одного закона, но для исследования машин пользуются принципом живых сил, применение которого удобно и в то же время приводит к более общим результатам.

Некоторые замечания о теории машин делает Г. Прони в своем трактате «Новая гидравлическая архитектура» [8]. В этом трактате впервые объектом научного исследования становится паровая машина. Дело в том, что, несмотря на очень глубокие рассуждения о сущности машин, Карно все еще не может избавиться от влияния устаревшего (даже в те годы) учения о «простых машинах», сводя роль машины к функциям «простой машины» или совокупности таковых. Прони полностью оставил подобную точку зрения, и его исследования опережают результаты Карно как по времени, так и принципиально.

Прони вводит некоторые коррективы в учение Эйлера о двух видах и классах машин с полностью равномерным движением их частей или же с ускоренным и замедленным движением. Прони указывает, что, хотя движения частей машин и могут быть ускоренными или замедленными, все же машину следует отнести к первому классу по причине периодической и равномерной повторяемости движений. Таким образом, первый класс по классификации Прони всеобъемлющ, тогда как у Эйлера он невелик.

Прони вводит понятия «усилия движения» $PV$, что в современном понимании соответствует понятию мощности, и «усилия сопротивления» $P'V'$, причем $PV=P'V'$. Этим соотношением он выражает основной закон движения машины. По его утверждению, «самые сложные случаи равновесия сводятся к случаю двух количеств движения, действующих в противоположных направлениях. Отсюда ...с помощью общего принципа (Д'Аламбера.— *А. Б.*) вопросы движения могут быть сведены к вопросам равновесия. Это сведение производится... разложением, т. е. с помощью параллелограмма сил, и при предположении, что тела сами не имеют и не имеют за счет своей собственной энергии никакого побуждения к изменению своего состояния и не могут этого сделать иначе, как с помощью некоторой внешней причины или, выражаясь одним словом, используя то свойство, которое мы назвали инерцией. Инерция, равновесие и параллелограмм сил — вот основания для решения всех вопросов статики и динамики» [8, с. 171].

Следующая попытка обобщения учения о машинах была сделана французским инженером А. Гениво. В трактате «Опыт науки о машинах» он пробует теоретически осмыслить принципы действия машин. По его мнению, механика, которой Лагранж уже придал образцовую форму, все же еще не применяется к машинам. Он намечает следующую программу для своего исследования: «Теория машин должна составить самостоятельную науку: опыт и наблюдение составят ее основу, а рассуждения при помощи математического анализа дадут возможность вывести общие и частные законы равновесия и движения машин. Она должна дать те формулы, которые включали бы все механические свойства и с помощью которых можно было бы предвидеть и рассчитать действия машин для всех возможных случаев» [9, с. 2].

Гениво делит машины на два класса. К первому он относит механизмы, состоящие из большого числа частей и служащие для выработки тканей, часовых механизмов и т. д., т. е. механизмы, обеспечивающие передачу определенных движений. Ко второму классу Гениво относит машины, предназначенные для производства «физических сил». Таким образом, у него впервые в истории науки имеется выделение двух различных классов машин: рабочих и энергетических. Его первый класс шире класса технологических машин — это класс, в котором особенную роль играют кинематические параметры [9, с. 14—16].

Гениво считает затем, что для полного понимания машины следует знать: условия равновесия для простых и сложных машин; простые способы передачи движений, сравнение их между собой; их комбинации; построение и сборку частей машин; прочность частей машин.

В 1819 г. вышло в свет второе издание «Курса построения машин» И.-М. Ланца и А. Бетанкура, подготовленное к печати первым автором. В курс были включены некоторые новые материалы и статьи, в частности полностью мемуар А. Пти «О применении принципа живых сил к вычислению действия машин» [10].

А. Пти 16 лет первым по списку был принят в Политехническую школу и в 1809 г. окончил ее. Он был оставлен при Школе, был репетитором по математическому анализу, репетитором по физике, а в 1815 г. получил звание профессора. Упоминаемый здесь мемуар был написан им в 1818 г.

Хотя, по словам Пти, давно уже общепризнано, что для изучения машин лучше всего подходит принцип живых сил, однако им пользовались недостаточно, и теорию машин, рассматриваемую с этой точки зрения, еще предстоит создать.

Уравнение движения машины он записывает в форме

$$gmH = {}^1/_2 mV^2$$

ч приходит к заключению: «Живая сила, сообщенная сопротивлению, равна той, которой обладал двигатель, уменьшенной на живые силы, потерянные при резком изменении скорости, и той, которую сохраняет двигатель, выполнивший свое действие» [10, с. 23]. В качестве примеров Пти рассматривает уравнение живой силы применительно к истечению воды из сосуда и к случаю паровой машины.

Так обстояло дело с построением динамики машин к концу второго десятилетия XIX в. В дальнейшем в трудах Ж. Понселе и Г. Кориолиса роль общепризнанного универсального двигателя переходит к паровой машине, и на протяжении века динамика машин развивается как динамика паровой машины.

**3.** Паровая машина, которой суждено было сыграть роль первого универсального двигателя промышленности и транспорта, была создана в результате интенсивной деятельности ряда изобретателей на рубеже XVII и XVIII вв. Лучший вариант машины, нашедший себе практическое применение, был создан Т. Ньюкоменом к 1705 г.; первый патент был получен Дж. Уаттом в 1769 г. Таким образом, на протяжении первых двух третей XVIII в. в Англии на угольных копях работали в качестве насосных установок пароатмосферические машины, которые, таким образом, на целую треть века обогнали начало промышленного переворота.

Однако новые машины, заменившие руку человека и его уменье, приводились в движение силой человека, животных, воды, и лишь машина Уатта стала действительным универсальным двигателем. Правда, попытки создания универсальной машины были и раньше; заключались они в попытках сагрегировать машину Ньюкомена с водяным колесом: паровая машина должна была качать воду, которая своим падением приводила бы во вращение колесо, а уже от последнего приводились бы в движение технологические машины. Подобные попытки не увенчались успехом из-за крайней неравномерности хода пароатмосферической машины, не говоря уже о том, что машины Ньюкомена были «пожирательницами угля».

Необходимость регулирования хода машины была замечена давно: первые регулирующие устройства применялись еще на ветряных мельницах Афганистана в X—XIII вв. «В Афганистане все мельницы и водочерпальные колеса приводятся в движение северным ветром и поэтому ориентированы только по нему. Этот ветер дует там постоянно, летом и зимой, однако сильнее и упорнее летом. Иногда он прекращается один или два-три раза на дню или в ночи, и тогда в этой местности стоят все мельницы и все водочерпальные колеса. Затем он опять дует, и они тоже приходят в движение. На мельницах у них устроены люки, которые открываются и закрываются, чтобы ветра попадало то больше, то меньше. Потому что, когда он дует слишком сильно, мука горит и выходит черной, порой даже жернов раскаляется и разваливается в куски» [11, с. 363]. Так писал Гузули в конце XIII в.

Подобные приспособления ставились повсеместно также на водяных мельницах.

Паровая машина потребовала более сложного прибора для регулирования хода. Первым подобным прибором стал, по-видимому, катаракт. С его помощью устанавливалось определенное число ходов машины в единицу времени; как рабочий, так и холостой ходы выполнялись с определенной скоростью. В момент достижения верхнего положения поршень останавливался. Тогда включался катаракт, конструкция которого в сущности ничем не отличалась от клепсидры (водяных часов).

Происхождение центробежного регулятора связано с происхождением маховика. Одним из вариантов последнего была крестовина с насаженными на ее концах тяжелыми шарами, вращающаяся около оси. Однако от этого еще далеко до механизма с двумя степенями свободы, изобретенного Уаттом, по-видимому, в результате серии попыток. В 1766 г. И. И. Ползунов также чисто практическим путем сконструировал свой регулятор прямого действия для автоматического поддержания постоянства уровня воды в паровом котле его двигателя. Интересно и то обстоятельство, что регуляторы двух изобретателей паровой машины, предназначенные для разных целей (в одном случае для поддержания числа оборотов при переменной нагрузке машины, в другом — для постоянства уровня воды в котле при переменном расходе), по принципу своего действия одинаковы. Это одноимпульсные регуляторы прямого действия с одним регулируемым параметром [12, с. 66—67].

Маховик ведет свое происхождение от рукоятки ворота и от гончарного круга. По-видимому, в XV в. на главный вал ветряной мельницы начали насаживать маховик для сообщения ее ходу равномерности. Но лишь в конце XVIII в. при преобразовании возвратно-поступательного движения поршня паровой машины во вращательное движение кривошипа достижение хотя бы относительной равномерности хода стало необходимостью.

Попытка развить теорию маховика была предпринята А. Гениво [9]. Интересно, что он исходит из следующих принципов, которые должны быть положены в основу создания науки о машинах: эксперимент и наблюдение составят ее базу, а рассуждение и математический анализ дадут возможность вывести ее законы и вычислить действия машин для всех случаев их работы. Все же маховику он дает лишь описание: «Чаще всего к вращающимся машинам добавляют одно или два весьма тяжелых колеса (из чугуна), называемые маховиками; они служат для увеличения массы машины, и к ним можно приложить все то, что было сказано о машинах: маховики служат для поддержания равномерности движения, если двигатель или сопротивление подвержены действию некоторых мгновенных изменений; они сохраняют движение мотора, и сопротивления являются прерывистыми и противодействуют тому, чтобы изменение скорости происходило резко, что вызвало бы крушение машины» [9, с. 59—60]. Как указывает далее Гениво, маховики в особенности нужны в тех машинах, движение которых должно быть весьма равномерным и нужно сохранять постоянную скорость. Единственным «расчетным» указанием у Гениво служит замечание, что для получения момента инерции каждую элементарную массу следует умножить на квадрат ее расстояния от оси. Отсюда вытекает, что маховикам необходимо придавать возможно бóльшие размеры.

Подобным же является рассуждение Ж.-А. Борньи. Пятая книга первого тома его «Прикладной механики» посвящена «регуляторам». Борньи делит все нерегулярности движения на малые, находящиеся в узких пределах, и на большие иррегулярности. В зависимости от этого в конструкцию машин включаются «модераторы» трех родов. Модераторы первого рода регулируют малые неравномерности движения машины, модераторы второго рода — большие неравномерности. Наконец, третий вид модераторов предназначен для регулирования хода машины с одновременным регулированием ее скорости. Борньи относит маховики к первому роду модераторов и определяет их как органы машин, предназначенные для весьма быстрого вращения, имеющие свойство исправить ограниченные неравномерности движения. Компенсация движения, производимая маховиками, является результатом сил инерции, которые действуют тем лучше, чем больше момент маховика. Этот момент зависит от двух величин: от массы маховика и от его скорости. Чересчур большая масса маховика нежелательна: лучше делать маховик с малой массой, но с большой скоростью.

Модераторы второго и третьего рода Борньи относит к часовым механизмам, затем рассматривает регуляторы различного типа, в большинстве своем также относящиеся к часовым механизмам и к приборам; в числе последних он рассматривает «конический маятник Уатта».

Таким образом, на протяжении первых двух десятилетий XIX в. маховик рассчитывается «по соображению» и, в сущности, нет еще полного понимания принципиального различия между маховиком и «коническим маятником» — центробежным регулятором. Ученые и инженеры лишь приближаются к пониманию трудности регулирования поршневой машины, но опять-таки не в результате исследования, а «по соображению». Впервые понятие коэффициента неравномерности, несколько отличное от современного, ввел А. Навье в своих добавлениях к переизданию I тома «Гидравлической архитектуры» Б. Белидора (1819 г.). Здесь же Навье дает первый теоретический расчет веса обода маховика.

**4.** Предыстория динамики машин была бы неполной, если бы опустить тот вклад, который был сделан практиками. Выше уже отмечалось, что результаты творчества практиков оказались в удивительном совпадении с теми, которые были получены математиками в результате проведенных ими исследований. На протяжении всего XVIII и начала XIX в. профессий заводского инженера-технолога и инженера-механика по оборудованию не существовало. Инженеры были военной или в крайнем случае военизированной профессией, они состояли на государственной службе. А для обслуживания мельниц и фабричных мануфактур существовала профессия «фабричного механика» (millwright). Вот как определяет эту профессию У. Фэйрберн: «Механик прошлых дней был в основном единственным представителем механического искусства, и его считали авторитетом во всем, что касалось приложения ветра и воды, при любых условиях их использования в качестве движущей силы мануфактуры. Он был инженером округа, в котором он проживал, чем-то вроде мастера на все руки, который мог с одинаковой легкостью работать на станке, на наковальне или на верстаке столяра...

Таким образом, фабричный механик прошлого века был бродячим инженером и механиком высокой репутации... Он обязательно знал арифметику, помнил кое-что из геометрии, работал с уровнем, умел измерять и иногда владел весьма серьезными познаниями в практической математике. Он мог подсчитать скорости, прочность и мощность машин, мог начертить их в плане и в разрезе, построить здания, провести водопроводы в любых формах и при всяких условиях, требуемых его профессиональной практикой; он мог строить мосты, прорезать каналы и выполнять самые разнообразные работы, которые являются теперь обязанностью гражданских инженеров» [13, с. V—VI].

Эти «фабричные механики», которые строили технологические мельницы по всей Европе и наблюдали за их эксплуатацией, на протяжении всего XVIII в. внесли своими изобретениями и усовершенствованиями важный вклад в становление науки о машинах. Так, в 1738 г. Т. Мийд взял патент на применение «конического маятника» для регулирования помола зерна: надо было обеспечить тонкость помола, установив постоянную величину зазора между обоими жерновами.

Важнейшее сочинение, посвященное практике построения машин в XVIII в., написал Я. Лейпольд. Он был практиком, хотя и учился в школе в Цвиккау, а затем в Иенском и Виттенбергском университетах. Всю жизнь он мечтал стать богословом, но из-за отсутствия средств университета не закончил. Работал он преподавателем, строителем, горным мастером, надзирателем госпиталя; к машинам пришел со стороны и познакомился с ними практически. Это не помешало ему сделать важный шаг, без которого немыслимо было создание учения о машинах: он смог увидеть частное в общем и понять, что множество машин сооружается из относительно небольшого количества деталей. Свой «Театр машин» [14] в семи томах он издал на протяжении 1724—1726 гг. Уже после его смерти были изданы восьмой (1739 г.) и девятый (1735 г.) тома. В 1774 г. весь этот колоссальный труд был переиздан. Пользовались им на протяжении всего XVIII и в начале XIX в.; для того чтобы иметь возможность прочитать труд Лейпольда, Уатт изучил немецкий язык.

В 1787 г. патент Т. Мийда на центробежный регулятор в применении к помолу зерна получил дальнейшее распространение. По-видимому, к этому времени возникли сомнения относительно прав Уатта на изобретение центробежного регулятора. Значительно позже, в 1825 г., Элдерсон утверждал, что не доверяет этим правам. Принцип регулятора был заимствован из патента Мийда, который задолго до Уатта регулировал помол зерна (см. об этом в [15, с. 84]).

Пример с регулятором, как и ряд других (например, применение к паровой машине кривошипно-ползунного механизма для преобразования возвратно-поступательного движения в круговое), наглядно доказывает, что некоторые идеи буквально «носились в воздухе». Становление машиностроения в конце XVIII — первых десятилетиях XIX в. как последний, завершающий этап промышленного переворота настоятельно требовало научно-инженерного подхода к созданию машин. Если кинематика механизмов, впервые оформившаяся в науку в «Опыте построения машин» Ланца и Бетанкура, и смогла некоторое время развиваться «без математики», то рост скорости машин заставил обратить внимание на вычисление размеров некоторых важнейших частей машины, в первую очередь маховика, для обеспечения безопасной и длительной работы машин. Мы видели, что первая попытка в этом направлении принадлежала Навье.

Этап становления науки как отдельного научного направления, возникшего на основе применения законов динамики к изучению машин, завершается трудами Ж. Понселе и Г. Кориолиса. Понселе издал литографированный «Курс механики в приложении к машинам» в 1824 г. Он в значительной степени находится под влиянием Ж.-А. Борньи, хотя и более последователен в изложении основных положений учения о машинах. В первой части своего курса Понселе выводит уравнение живых сил как основное уравнение движения машины и рассматривает его для некоторых частных случаев. Во второй части курса он разбирает вопросы регулирования машин.

Дальнейший шаг был сделан Кориолисом. В 1829 г. он опубликовал трактат «Вычисление действия машин» [16], основным положением которого явилось понятие работы (введенное самим Кориолисом). Он установил объем динамики машин и указал на ее связь с учениями о передаче движений в машинах и об орудиях последних. В 1832 г. Кориолис опубликовал мемуар «О влиянии момента инерции балансира паровой машины и его средней скорости на равномерность вращения, сообщаемого маховику поступательным движением поршня» [17], в котором

9*

разобрал некоторые важные вопросы динамики машин и впервые применил к решению ее задач графические методы.

Так в результате более чем столетней работы ученых и механиков-практиков были созданы основы динамики машин.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Borgnis J.-A.* Traité complet de mécanique appliquée aux arts. Composition des machines. Paris, 1818.
2. *Borda Ch.* Mémoire sur les roues hydrauliques.— Mém. de l'Acad. des sci. P., 1767, p. 270—287.
3. *Deparcieux A.* Mémoire dans lequel on demontre que l'eau d'une chute destinée à faire mouvoir quelque machine peut toujours produire beaucoup, plus d'effet en agissant par sur poids qu'en agissant par son choc.— Mém. de l'Acad. des sci. P., 1754.
4. *Euler L.* Discussion de diverses manières d'elever l'eau par le moyen des pompes, avec le plus grand avantage.— Mém. de l'Acad. de Berlin pour l'année 1752.
5. *Euler L.* De machinis in genere.— Novi Commentarii Acad. sci. Petropolitanae, 1753, t. 3, p. 254—285.
6. *Euler L.* Principia theoriae machinarum.— Novi Commentarii Acad. sci. Petropolitanae, 1763, t. 8, p. 230—253.
7. *Carnot L.* Principes foundamentaux de l'équilibre et du mouvement. Paris, 1803, 261 p.
8. *Prony G.* Nouvelle architecture hydraulique. Paris, 1790. T. 1.
9. *Guenyveau A.* Essai sur la science des machines. Lyon, 1810. 290 p.
10. *Petit A.* Sur l'emploi du principe des forces vives dans le calcul de l'effet des machines.— In: Bethencourt A., Lanz J.-M. Essai sur la composition des machines. Ed. 2. Paris, 1819, p. 21—33.
11. *Мец А.* Мусульманский ренессанс. М.: Наука, 1966. 458 с.
12. *Конфедератов И. Я.* Джемс Уатт — изобретатель паровой машины. М.: Наука, 1969. 223 с.
13. *Fairbairn W.* Treatise on mills and mill-work. Pt 1. Ed. 2. L., 1864.
14. *Leupold J.* Theatrum machinarum. Leipzig, 1724—1726. B. 1—7; Leipzig, 1739. B. 8. Leipzig, 1735. Bd. 9.
15. *Armitage W. H. G.* A social history of engineering. L., 1961.
16. *Coriolis.* Du calcul de l'effet des machines ou considerations sur l'emploi des moteurs et sur leur évalution, pour servir d'introduction à l'étude spesiale des machines. Paris, 1829.
17. *Coriolis.* Sur l'influence du moment d'inertie du balancier d'une machine à vapeur et de sa vitesse moyenne sur la régularité du mouvement de rotation que le va-et vient du piston communique au volant.— J. Ecole polyt., 1832, l. 21, t. 13, p. 228—267.


УДК 531/534(091)

*Л. Д. Леднева*

# СТАНОВЛЕНИЕ КИНЕМАТИКИ ИЗМЕНЯЕМЫХ СИСТЕМ

Во второй половине XIX в. было изобретено и исследовано множество шарнирных механизмов. Благодаря простоте устройства своих частей и плавности движения они использовались в практике гораздо чаще, чем другие механизмы. Появилась обширная литература по кинематике и синтезу шарнирно-рычажных механизмов. Требовалось систематизировать и обобщить полученные знания. Этот процесс шел одновременно в двух направлениях: создание общей теории шарнирных механизмов (П. Л. Чебышев, Л. Бурместер, В. Бооль, Н. Б. Делоне); обобщение кинематики неизменяемых систем и переход к изменяемым (Л. Бурместер, П. О. Сомов, Д. Н. Зейлигер).

Остановимся на работах второго направления и главным образом на исследованиях П. О. Сомова — одного из основоположников кинематики изменяемых систем. Хотя это направление стало развиваться с 1874 г. и особенно с 1885 г., однако результаты по кинематике изменяемых систем были успешно применены к синтезу шарнирных механизмов уже в 1900 г. Впервые это было сделано П. О. Сомовым [1], причем многие из вновь созданных им механизмов выполняли совершенно новые преобразования движений.

Кинематикой изменяемых систем начали заниматься в связи с задачами теории упругости и гидродинамики, поэтому первое время ограничивались изучением движения бесконечно малого тела. Возможность пренебречь величинами высших порядков позволяла свести вопрос к изучению таких движений, в которых скорости точек являются линейными функциями. Поэтому предполагалось, что бесконечно малое тело изменяется коллинеарно (или гомологически), т. е. любая плоскость, составленная из его точек, во все время движения остается плоскостью, прямая линия — прямой. Это обстоятельство, а также известные в то время свойства коллинеарных фигур навели, по-видимому, на мысль изучать движение таких изменяемых систем, в которых не только бесконечно малые элементы, но и всякие любые фигуры, составленные из точек этих систем, остаются во все время движения себе коллинеарными.

Некоторые ученые (сначала Л. Бурместер, позже П. О. Сомов) обратили внимание на то, что неизменяемую систему можно рассматривать как частный случай коллинеарно-изменяемой. Так, Сомов в магистерской диссертации в 1885 г. писал: «Можно было бы наперед ожидать, что большей частью кинематические свойства неизменяемой системы могут быть получены как частные случаи кинематических свойств системы коллинеарно-изменяемой» [2, с. 4]. На первых порах наибольший интерес представляла подобно-изменяемая система, так как она по своим кинематическим свойствам ближе всего стояла к неизменяемой системе. Первой работой, имеющей важное значение для кинематики подобно-изменяемой системы, была статья М. Шаля (1830 г.) [3]. Хотя Шаль и не занимался изучением движения такой системы, но он сформулировал теорему о существовании для подобных фигур двойной прямой (или двойной точки). Позднее было замечено, что эта прямая или эта точка в случае двух бесконечно малых положений подобно-изменяемой системы играют такую же роль, как мгновенная ось или мгновенный центр в движении неизменяемой фигуры.

Некоторые частные случаи свойств кинематики подобно-изменяемой системы, имеющие исключительно геометрический интерес, были рассмотрены в середине XIX в. Т. Шенеманом, Ч. Петерсеном, А. Дюраном, Л. Хр. Винером.

Значительный шаг вперед был сделан в 1870 г. А. Груаром [4], который обратил внимание на существование мгновенного центра в движении подобно-изменяемой системы и показал, что скорости всех ее точек в каждый момент времени составляют с радиусами-векторами, проведенными к этим точкам из мгновенного центра, одинаковый угол — «угол скоростей». Ускорения плоских подобно-изменяемых систем также впервые были рассмотрены А. Груаром. Он доказал существование центра ускорений и кругов, аналогичных кругам Брессе в движении неизменяемой системы. Им же рассмотрены вопросы о кривизне кривых, огибаемых прямой линией, принадлежащей плоской подобно-изменяемой системе.

Наиболее существенный вклад был сделан Л. Бурместером [5—9]. Исходя из частных случаев движения, он приемами синтетической геометрии рассмотрел многие вопросы не только по кинематике подобно-изменяемой системы, но и вывел некоторые свойства других изменяемых систем двух и трех измерений. Наиболее важным среди этих свойств была теорема о тождестве кривой линии, огибаемой линией, принадлежащей коллинеарно-(гомологически-, или подобно-)изменяемой системе, и кривой, огибаемой траекториями различных точек, лежащих на той же линии, принадлежащей этой системе. Эта теорема дала ему возможность с помощью результатов, найденных для одной системы, решать вопросы о движении системы, изменяющейся по другому закону.

Позже, в 1879 г., И. Гайзенхаймер [10] обратил внимание на то, что указанная выше теорема Бурместера приложима не только к таким изменяемым системам, которые удовлетворяют условию коллинеарности, но и вообще ко всякой непрерывно-изменяющейся системе, т. е. такой, при движении которой всякая фигура, ей принадлежащая, деформируется и перемещается непрерывным образом, причем нигде не образуется разрыва между точками системы. Кроме того, Гайзенхаймер показал, что известная формула Савари может быть распространена на подобно-изменяемую систему, и вообще исследовал различные вопросы о кривизне траекторий и о кривизне кривых, огибаемых линиями, принадлежащими системе. Он же довольно подробно разобрал частный случай движения подобно-изменяемой системы, в которой траектории всех точек между собой гомологичны.

Дюран аналитически изучает движение гомологически-изменяемой системы трех измерений (1872—1875 гг.). Аналогия между конечной гомологически-изменяемой системой и изменением бесконечно малого элемента упругого тела, по-видимому, навела его на мысль перенести приемы, употребляемые при кинематическом изучении последнего (состоящие главным образом в рассмотрении эллипсоида деформации), на конечную подобно-изменяемую систему. Он доказывает существование трех главных осей деформации, изучает распределение скоростей и дает выражение для ускорения, которое, как он показывает, слагается из трех частей — ускорения, тождественного с ускорением неизменяемой системы, ускорения, зависящего исключительно от деформации, и ускорения, зависящего одновременно от вращения и деформации гомологически-изменяемой системы.

В 1885 г. П. О. Сомов издает магистерскую диссертацию «Кинематика подобно-изменяемой системы двух измерений» [2], в которой приводит в систему основные результаты, относящиеся к кинематике плоских подобно-изменяемых систем, с помощью одних и тех же, по возможности простых, аналитических приемов. «Вполне сознавая,— пишет Сомов,— важное значение геометрических методов в кинематике, я отдал предпочтение аналитическим методам перед геометрическим главным образом потому, что с помощью их скорее может быть достигнуто единство изложения, которого... не достает настоящему предмету» [2, с. 5]. Кроме того, с «их помощью при изложении даются некоторые дополнения, ускользающие от внимания при синтетическом способе исследования». Такой подход позволил Сомову получить результаты, составившие основу кинематики изменяемых систем.

Книга П. Сомова состоит из семи глав. Первая глава посвящена выявлению тех элементов, с помощью которых наиболее просто определяется движение подобно-изменяемой системы. Она интересна тем, что Сомов дает общие указания относительно исследования кинематики подобно-изменяемой системы и указывает на ее связь с кинематикой неизменяемой системы (т. е. кинематикой твердого тела).

Для определения движения неизменяемой системы необходимо знать шесть независимых между собой параметров. У изменяемой системы их число зависит еще от степени изменяемости системы, от ее деформации. Подобно-изменяемая система получается из неизменяемой путем деформации, одинаковой по всем направлениям. Следовательно, деформация подобно-изменяемой системы определяется единственным параметром $\varepsilon$, названным Сомовым коэффициентом расширения такой системы. Число элементов, определяющих движение подобно-изменяемой системы, будет на единицу больше, чем у неизменяемой: при пространственном движении — семь параметров, при плоском — четыре.

Коэффициент расширения определяется по формуле

$$d\sigma/dt = \varepsilon\sigma,$$

где $\sigma$ — длина какой-либо прямой, принадлежащей системе, $d\sigma$ — удлинение, получаемое ею за промежуток времени $dt$.

Так как в каждый момент времени коэффициент расширения одинаков во всей подобно-изменяемой системе, то всякая точка системы может быть принята за центр расширения.

Принимая за центр расширения точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, Сомов записывает проекции скорости расширения радиуса-вектора $M_1M$ в виде $\varepsilon(x-x_1)$, $\varepsilon(y-y_1)$, $\varepsilon(z-z_1)$, где $x_1$, $y_1$, $z_1$ — координаты центра расширения.

Определяя полную скорость $v$ точки $M$ как геометрическую сумму скорости точки $M_1$, перпендикулярной к радиусу-вектору $M_1M$, скорости вращения точки $M_1$ и скорости расширения с центром в точке $M_1$, направленной вдоль радиуса-вектора $M_1M$, он находит следующие выражения для проекций скорости $v$ на оси координат:

для пространственной подобно-изменяемой системы

$$\begin{aligned} v_x &= dx/dt = a_1 + \varepsilon(x-x_1) - r(y-y_1) + q(z-z_1), \\ v_y &= dy/dt = b_1 + r(x-x_1) + \varepsilon(y-y_1) - p(z-z_1), \\ v_z &= dz/dt = c_1 - q(x-x_1) + p(y-y_1) + \varepsilon(z-z_1); \end{aligned} \tag{1}$$

для плоской подобно-изменяемой системы

$$\begin{aligned} v_x &= dx/dt = a_1 + \varepsilon(x-x_1) - r(y-y_1), \\ v_y &= dy/dt = b_1 + r(x-x_1) - \varepsilon(y-y_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $a_1$, $b_1$, $c_1$ — проекции на оси координат скорости точки $M_1$, $p$, $q$, $r$ — проекции угловой скорости.

Учет того, что движение плоской подобно-изменяемой системы определяется любыми четырьмя параметрами, позволяет Сомову определить движение системы двумя заданными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. В этом случае получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(a_2-a_1)(x_2-x_1)+(b_2-b_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \\ r &= \frac{(b_2-b_1)(x_2-x_1)-(a_2-a_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначив через $l$ расстояние $M_1M_2$, через $h$ — геометрическую разность между скоростями точек $M_2$ и $M_1$, формулы (3) он записывает так:

$$\varepsilon = \frac{h}{l}\cos(\widehat{l,h}), \qquad r = \frac{h}{l}\sin(\widehat{l,h}).$$

Угол $(\widehat{l,h})$ определяется как угол, для которого $\operatorname{tg}(\widehat{l,h}) =$

$=r/\varepsilon$, т. е. его величина одна и та же в каждый момент. Бурместер назвал его «углом скоростей» (Geschwindigkeitwinkel).

Сомов отмечает, что система элементов ($x_1$, $y_1$, $\varepsilon$, $r$) более связана с основным понятием о движении подобно-изменяемой системы, а система ($x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$) имеет преимущества благодаря симметрии формул, в которые входят ее элементы. Этими свойствами систем элементов и определяется выбор формул (1) или (2).

Далее Сомов указывает еще два способа задания движения подобно-изменяемой системы. В одном из них уравнение движения выражается через дифференциальные параметры полярных координат $\rho$, $\varphi$, $\psi$, во втором движение системы задается относительно системы координат, неизменно связанной с изменяемой системой.

Последнее, четвертое, задание движения изменяемых систем широко используется в современной механике сплошной среды. Указанную систему координат Л. И. Седов [11, с. 27] называет «вмороженной в среду».

В этой же главе Сомов построил кривую линию «указательницу», точки которой определяются координатами $\varepsilon$ и $r$. Он особо выделяет эту кривую, так как введение ее приводит к большей наглядности и во многих случаях дает возможность проще формулировать полученные результаты. Абсциссы точек этой линии являются коэффициентами расширения, а ординаты — угловыми скоростями в соответствующий момент времени. Поэтому эта линия полезна при решении вопросов о скоростях и сложении движения подобно-изменяемой системы, так как введение этой линии способствует выявлению аналогии между движением плоских подобно-изменяемых систем и неизменяемых, и радиус-вектор, проведенный из начала координат к точке на линии-указательнице, в подобно-изменяемой системе играет совершенно такую же роль, как угловая скорость вращения около мгновенного центра в системе неизменяемой.

Во второй главе П. О. Сомов указывает, как с помощью тех или других элементов может быть определено движение каждой точки системы. Формулы, характеризующие движение системы, составляются на основании понятия о подобно-изменяемой системе и о коэффициенте расширения. Затем он выводит дифференциальные уравнения, интегралы которых выражены в функциях от времени координат какой-либо точки системы. Сомов отмечает, что нет необходимости прибегать к этим уравнениям, так как их интегралы всегда известны. Однако исследование уравнений при различных предположениях относительно их коэффициентов, которые являются функциями от элементов ($x_1$, $y_1$, $\varepsilon$, $r$) движения, приводит к некоторым частным случаям движения подобно-изменяемой системы. При этом сделанные относительно коэффициентов дифференциальных уравнений предположения позволяют определить не только движение каждой точки системы, но и функции от времени, которыми будут при этом элементы движения.

Так, движение подобно-изменяемой системы вполне определяется формулами

$$x = x_1 + \sigma_0 \exp\left(\int_0^t \varepsilon dt\right) \cos\left(\alpha_0 + \int_0^t r dt\right),$$

$$y = y_1 + \sigma_0 \exp\left(\int_0^t \varepsilon dt\right) \sin\left(\alpha_0 + \int_0^t r dt\right),$$

если $x_1$, $y_1$, $r$ заданы как функции времени.

Сомов рассматривает дополнительно следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(2\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\varepsilon^2 + r^2 - \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{dr}{dt}\right)x -$$

$$- \frac{da_1}{dt} + \left(2\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)a_1 - \left(\varepsilon^2 + r^2 - \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{dr}{dt}\right)x_1 = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left(2\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\varepsilon^2 + r^2 - \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{dr}{dt}\right)y -$$

$$- \frac{db_1}{dt} + \left(2\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)b_1 - \left(\varepsilon^2 + r^2 - \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{dr}{dt}\right)y_1 = 0.$$

Использование коэффициентов этих двух уравнений может привести к определению зависимостей, которые должны существовать между четырьмя элементами $x_1$, $y_1$, $\varepsilon$, $r$ для того, чтобы движение точек системы было заданного вида. Введя для этих коэффициентов обозначения

$$G = 2\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}, \qquad H = \varepsilon^2 + r^2 - \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{dr}{dt},$$

$$K = -\frac{da_1}{dt} + Ga_1 - Hx_1, \qquad L = -\frac{db_1}{dt} + Gb_1 - Hy_1,$$

Сомов делает различные допущения относительно функций $G$, $H$, $K$, $L$ и получает не только определенное движение системы, но и зависимости, которые должны существовать между элементами $x_1$, $y_1$, $\varepsilon$, $r$.

Положив, например, $G = H = K = L = 0$, он получает результаты, из которых следует, что «подобно-изменяемая система может иметь такое движение, и притом не поступательное, при котором все точки двигаются прямолинейно. В частности ...одна точка системы может при этом оставаться неподвижной» [2, с. 20].

Если $G = H = 0$, $K \neq 0$, $L \neq 0$, то «движение всякой точки системы слагается из движения прямолинейного равномерного и из движения некоторой точки $M_1$» [2, с. 20]. Так как движение точки $M_1$ может задаваться величинами $K$ и $L$ произвольно, го получается бесчисленное множество движений подобно-изменяемой системы. Например, при $K=0$, $L=\text{const}$ точка $M_1$ совершает движение по параболе, значит, и все точки системы в этом случае описывают параболы. Если точка $M_1$ совершает равномерное движение по кругу, то остальные точки будут двигаться по циклоидам.

На случай, когда движение подобно-изменяемой системы задано движением двух ее точек, т. е. вторым способом, координаты, третьей, произвольной точки $M(x, y)$ записываются так:

$$x = \frac{k_1 k_2 (y_2 - y_1) + k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2},$$

$$y = \frac{-k_1 k_2 (x_2 - x_1) + k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2}.$$

Из этих формул видно, что координаты $x$ и $y$ являются линейными функциями $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$.

Основное внимание здесь обращено на два случая, когда траектории «основных» точек $M_1$ и $M_2$ подобны и гомологичны.

Вид траектории точки $M$ зависит как от вида траекторий точек $M_1$ и $M_2$, так и от их относительного положения на этих траекториях. Если вопрос состоит только в определении вида траекторий различных точек системы, тогда достаточно знать траектории точек $M_1$ и $M_2$ и зависимость между двумя координатами, не принадлежащими одной и той же точке, т. е.

$$F_1(x_1, y_1) = 0, \qquad F_2(x_2, y_2) = 0, \qquad f(x_1, y_2) = 0.$$

Если заданы только траектории точек $M_1$ и $M_2$, то траектория точки $M$ может иметь бесчисленное множество видов, поэтому закон относительного перемещения точек $M_2$ и $M_1$ на их траекториях может быть выбран так, чтобы точка $M$ описывала траекторию данного вида.

Эти положения Сомов использовал при синтезе шарнирных механизмов.

Рассматривая уравнения кривых линий, составленных из точек системы и линий, их огибающих, Сомов дает аналитическое доказательство теоремы Бурместера о тождестве огибаемых линий двух родов. Бурместер доказал ее синтетическим путем.

В третьей главе книги Сомова изложены различные вопросы о распределении скоростей в плоской подобно-изменяемой системе. Формулы, полученные в этой и следующих главах, достаточно сложны. Поэтому мы их не приводим.

Сомов рассматривает центр скоростей, подвижную и неподвижную линии центров. Он аналитически доказывает, что подвижная линия катится по неподвижной, деформируясь при этом согласно закону расширения системы. Частные случаи, в которых подвижная линия центров представляется особенно просто, пояснены различными примерами движения системы.

В четвертой главе рассмотрены ускорения, их распределения в системе и центр ускорений. Затем определяются условия, при которых центр ускорений неподвижен или совпадает с центром скоростей.

Рассмотрение соотношений между скоростью и ускорением каждой точки системы приводит к определению линий, аналогичных кругам Бресса. Эти линии, как еще раньше указал А. Груар, оказываются тоже кругами. Сомов с помощью линии — указательницы ускорений представил уравнения этих кругов и некоторые другие результаты в более простом виде. В частности, к проекциям ускорений высших порядков могут быть приложены различные результаты, найденные для ускорений первого порядка.

Пятая глава посвящена применению введенных ранее общих формул. Сомов рассматривает три простейших случая движения: прямолинейное и круговое, которые послужили Л. Бурместеру исходной точкой в его синтетических исследованиях, а также гармоническое движение, которое в некоторых отношениях исследовано Бурместером и Гайзенхаймером. В первых двух примерах Сомов показал значение введенной им линии-указательницы, а также составил на основании общих формул уравнения некоторых огибаемых кривых. В третьем примере он обращает особенное внимание на случай движения, аналогичного рассматриваемому обычно в курсах кинематики неизменяемой системы: две точки движутся гармонически по двум взаимно делящимся пополам простым линиям. Изменяемость системы позволяет при этом начальные фазы гармонического движения этих двух точек задавать произвольно, чего нельзя сделать, когда система неизменяема. Оказывается, что такое гармоническое движение плоской подобно-изменяемой системы может быть осуществлено качением изменяющего свои размеры круга по некоторой замкнутой кривой линии четвертого порядка.

Главным вопросом шестой главы является обобщение задачи о сложении вращений плоской неизменяемой системы около двух или нескольких центров для подобно-изменяемой системы. Сомов показывает правило для построения мгновенного центра в движении подобно-изменяемой системы, состоящей из двух движений, в которых мгновенные центры даны. Известное построение его для неизменяемой системы получается отсюда как частный случай.

В седьмой главе рассматривается относительное и сложное движение плоской подобно-изменяемой системы. Сначала выводятся формулы, выражающие зависимости между абсолютными координатами точки и ее координатами в подвижных осях, состоящих из самих точек системы. С помощью этих формул Сомов находит зависимости между скоростями и ускорениями в сложном, относительном и переносном движениях. Он указывает, что ускорение сложного движения слагается геометрически из ускоренного переносного движения, ускоренного относительного движения и ускорения, которое, будучи взято в обратном направлении, аналогично тому, которое в неизменяемой системе обыкновенно называется поворотным. Для подобно-изменяемой системы поворотное ускорение выражается совершенно так же, как и для неизменяемой, если только угловую скорость заменить радиусом-вектором линии-указательницы.

Отметим, что вопросы, исследованные Сомовым в последних двух главах, до него рассмотрены не были.

Таким образом, изложив единую теорию кинематики подобно-изменяемой системы, П. О. Сомов доказывает положение, высказанное вначале предположительно: почти все свойства движения неизменяемой системы могут быть получены как следствия из соответствующих свойств движения коллинеарно-изменяемой, в частности подобно-изменяемой, системы.

Результаты Сомова для плоских подобно-изменяемых систем таковы: 1) в движении подобно-изменяемой системы радиус-вектор указательницы скоростей играет такую же роль, как угловая скорость в движении неизменяемой системы; 2) с учетом предыдущего результата построение центра скоростей в движении подобно-изменяемой системы по данным скоростям двух точек системы является обобщением такого же построения для неизменяемой системы; 3) ускорение центра скоростей в движении подобно-изменяемой системы выражается аналогично тому, как оно выражается в движении неизменяемой системы; 4) правило для построения центра скоростей в составном движении подобно-изменяемой системы по данным центрам скоростей составляемых движений представляется обобщением такого же рода правила для неизменяемой системы; 5) в относительном движении подобно-изменяемой системы существует ускорение, аналогичное поворотному ускорению в относительном движении неизменяемой системы, и выражается оно совершенно аналогично, если учесть сказанное во втором пункте; 6) решение некоторых вопросов кинематики подобно-изменяемой системы в аналитическом отношении представляется проще, чем решение подобных вопросов в кинематике неизменяемой системы, благодаря тому, что координаты двух точек, определяющих движение подобно-изменяемой системы, не связаны между собой никакими условиями.

Последнее (шестое) положение, а также результаты исследований частных видов движения подобно-изменяемой системы Сомов использовал для построения плоских шарнирных механизмов, выполняющих новые виды движений [1], что было отмечено в начале статьи. Сомов указывает, что это положение распространяется и на случай гомологически-изменяемой системы трех измерений, так как ее движение определяется движением трех точек системы, координаты которых также не связаны между собой никакими условиями. Это, очевидно, и побудило его перейти к исследованию коллинеарно-изменяемой системы трех измерений.

Кинематикой коллинеарно-изменяемой системы стали заниматься в конце XIX в. При этом основное внимание уделялось таким свойствам, которые вытекают из основных начал синтетической геометрии.

Впервые на коллинеарно-изменяемую систему обратил внимание В. Н. Лигин. В своей работе [12] он указывал на существование мгновенных осей и центров коллинеарно-изменяемой системы двух измерений. Л. Бурместер в статье 1874 г. [5] подробнее развил некоторые кинематические свойства этой системы и более определенным образом выяснил отличие ее от системы однородно-изменяемой, хотя и не указал тот характерный элемент деформации, которым коллинеарно-изменяемая система общего вида отличается от однородно-изменяемой. Он рассматривал систему не только плоскую, но и трехмерную. При этом выбор вопросов обусловливался чисто геометрическими приемами исследования и касался преимущественно частных случаев движения. Поэтому он не исследовал многие задачи, интересные с точки зрения кинематики, и главным образом такие, решение которых выражается количественными соотношениями между различными кинематическими элементами.

Докторская диссертация Сомова, опубликованная в виде книги в 1891 г. [13], представляла собой систематическое изложение кинематики коллинеарно-изменяемой системы общего вида. Чтобы не увеличивать и без того большого объема работы, он исследует вопросы, наиболее полно характеризующие системы данного вида, и дает формулы, которые необходимы для дальнейшего изучения системы. Статьи, относящиеся к указанной теме, Сомов начал публиковать в 1886 г. В 1886—1891 гг. он выступал с докладами на заседаниях Варшавского общества естествоиспытателей, во время которых демонстрировал построенные им модели различных механизмов.

Построение второй книги Сомова аналогично предыдущей.

В первой главе он рассматривает элементы, определяющие конечное перемещение коллинеарно-изменяемой системы, и дает ряд формул, которыми пользуется в дальнейшем. При этом определяется геометрическое значение этих элементов введением пяти точек системы, движением которых вполне определяется движение всей системы. Пять тетраэдров, имеющих вершинами последовательно четыре из этих точек, дают возможность в простом виде представить геометрическое значение коэффициентов. В конце главы рассмотрен частный случай движения, когда четыре из заданных точек неподвижны и, следовательно, движение всех точек системы определяется произвольно заданным движением одной точки. Такое движение названо Бурместером однообразным (einförmige Bewegung). Оно рассмотрено Сомовым как имеющее важное значение для общего случая движения.

Одновременно с общим случаем коллинеарно-изменяемой системы он рассматривал некоторые системы более общего вида, а также частные виды коллинеарно-изменяемой системы: система однородно-изменяемая, подобно-изменяемая и неизменяемая.

Вторая глава посвящена рассмотрению параметров, которыми определяется деформация коллинеарно-изменяемой системы. В первую очередь Сомов определяет тот элемент деформации, которым эта система отличается от однородно-изменяемой системы. Этот параметр он назвал раздвиганием и установил, что если его соответствующим образом измерять и изображать графически, то он обладает тем же свойством, как и многие другие элементы, т. е. может быть разложен по координатным осям и вообще подчиняться закону геометрического сложения.

Далее Сомов рассматривает составное перемещение коллинеарно-изменяемой системы и отыскивает случаи этого движения, в которых законы сложения представляются в наиболее простом виде. Например, сложение двух раздвиганий. Раздвигания с общим центром слагаются по закону геометрического сложения, а параллельные раздвигания — как угловые скорости около параллельных осей.

В третьей главе изучаются скорости и распределение скоростей в коллинеарно-изменяемой системе. Характерным параметром скоростей является скорость раздвигания, которая измеряется геометрической производной раздвигания. При исследовании распределения скоростей Сомов отыскивает плоскости, которые в бесконечно малый промежуток времени перемещаются параллельно самим себе и, в частности, плоскости, прямые линии и точки системы, сохраняющие свое положение в течение бесконечно малого промежутка времени. На существование таких прямых и точек для пространственной коллинеарно-изменяемой системы имеются указания у Бурместера, а для плоской системы — у Лигина. Сомов нашел зависимость уравнений движения от параметров, характеризующих движение системы, и вытекающие отсюда законы, которым подчиняется распределение скоростей в общем случае движения коллинеарно-изменяемой системы. Этому и посвящена большая часть третьей главы его книги.

В конце главы рассматривается вопрос о скоростях в составном движении, главным образом для тех случаев, когда в определение скоростей входит скорость деформации раздвигания. Определив влияние, которое оказывает на скорости перенесение всех кинематических центров в одну общую точку, Сомов достаточно просто решает вопрос о сложении скоростей. В заключение он находит условия, при которых сложение чистого раздвигания с движением системы как однородно-изменяемой дает опять чистое раздвигание.

В четвертой главе ускорения в движущейся коллинеарно-изменяемой системе разлагаются на простейшие составные элементы. Указываются некоторые поправки к формулам, полученным ранее Дюраном для однородно-изменяемых систем.

Пятая глава состоит из трех статей, в которых рассматриваются главным образом вопросы, связанные с линиями огибаемыми, и особенно такими, которые при движении системы сами себя огибают (линия тока). По числу плоскостей, которые при бесконечно малом перемещении коллинеарно-изменяемой системы не изменяют своего положения, самоогибаемые линии делятся Сомовым на два различных типа. В первой статье приводятся дифференциальные уравнения этих кривых и их интегралы, после чего исследуется общий характер этих кривых для двух указанных случаев. Вычерчиваются эти кривые при некоторых частных параметрах движения.

У Бурместера имеется краткое указание, что в случае существования на плоскости одного действительного центра скоростей самоогибаемые линии будут спиралями. Определение характера этих спиралей Бурместером не дано, без чего, по мнению Сомова, нельзя судить об их свойствах. Поэтому П. О. Сомов исследовал самоогибаемые линии для различных случаев общего движения коллинеарно-изменяемой системы. В двух последних статьях рассматривается распределение объемного расширения этой же системы, а также формулы для изучения деформации поверхности, принадлежащей коллинеарно-изменяемой системе.

Таким образом, в диссертациях П. О. Сомова дана общая теория по кинематике подобно-изменяемой, однородно- и коллинеарно-изменяемой систем. Это стало возможным благодаря аналитическим методам исследования. Однако многие результаты Сомова получены в виде достаточно сложных формул. В связи с этим Д. Н. Зейлигер писал: «К сожалению, то обстоятельство, что автором не выделено из общего движения лучистое, лишает его результаты простоты и значения для кинематики трех измерений» [14, с. 102].

Однако дело не в «лучистом» движении. Требовался новый математический аппарат исследования, и поиски его начались уже с конца 90-х годов XIX в. В эти годы появляются работы И. М. Занчевского [15], Д. Н. Зейлигера [14, 16, 17], П. О. Сомова [18, 19], в которых разрабатывались методы векторного исчисления и теории винтов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Сомов П. О.* О некоторых приложениях кинематики изменяемых тел к шарнирным механизмам.— Изв. Варшав. ун-та, 1900, вып. 7, с. 1—46.
2. *Сомов П. О.* Кинематика подобно-изменяемой системы двух измерений. СПб., 1885. 180 с.
3. *Chasles M.* Note sur les propriétés générales de deux corps seblambles entre eux et placés d'une maniére quelconque dans l'espace et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre.— Bull. sci. math. Ferussae, 1830, t. 14, p. 321—324.

4. *Grouard A.* Figures semblables.— L'Institut, 1870, p. 27, 84, 124, 171.
5. *Burmester L.* Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig ähnlich-veränderlicher ebenen Systeme.— Ztschr. Math. und Phys., 1874, Bd. 19, S. 154—169.
6. *Burmester L.* Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affinveränderliche, ähnlich-veränderlicher und starren räumliche oder ebenen Systemen.— Ztschr. Math. und Phys., 1878, Bd. 23, S. 108—131.
7. *Burmester L.* Über den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebenen Systeme.— Civilingenieuer, 1878, Bd. 24, S. 147—172.
8. *Burmester L.* Über die Festlegung projectivisch-veränderlicher ebenen Systeme.— Math. Ann., 1879, Bd. 14, S. 472—497.
9. *Burmester L.* Über das bifocal-veränderlicher System.— Math. Ann., 1880, Bd. 14, S. 89—111.
10. *Geisenheimer I.* Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme.— Schlömlichzeitschrift, 1879, Bd. 24, S. 129.
11. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. 492 с.
12. *Лигин В. Н.* Обобщения некоторых геометрических свойств движения систем. Одесса, 1873. 36 с.
13. *Сомов П. О.* Кинематика коллинеарно-изменяемой системы общего вида. Варшава, 1891. 241 с.
14. *Зейлигер Д. Н.* Теория движения подобно-изменяемого тела. Казань, 1892. 105 с.
15. *Занчевский И. М.* Теория винтов и приложение ее к механике. Одесса, 1898. 131 с.
16. *Зейлигер Д. Н.* Механика подобно-изменяемой системы: Теория векторов. Одесса, 1890, Вып. 1. 122 с.
17. *Зейлигер Д. Н.* Теория винтов, вып. 2.— Зап. мат. отд. Новорос. о-ва естеств., Одесса, 1890, т. 11, с. 149—221.
18. *Сомов П. О.* О перемещениях неизменяемой поверхности, прикасающейся к одной или нескольким неподвижным поверхностям.— Изв. Варшав. у-та, 1893, с. 1—61.
19. *Сомов П. О.* О некоторых системах винтовых скоростей.— Изв. Варшав. у-та, 1895, с. 1—74.

# МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 531/531(091)

*Б. Д. Ковалев*

## ФОРМИРОВАНИЕ ЭЙЛЕРОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Принято считать, что теоретическая гидродинамика сформировалась как самостоятельная научная дисциплина в 1757 г. В этом году была опубликована основополагающая работа Леонарда Эйлера «Общие начала движения жидкостей» [1], содержащая вывод основной системы дифференциальных уравнений неразрывности и движения идеальной жидкости в их современном (с точностью до обозначений) виде. Определяя значение полученной им системы уравнений, Эйлер указывал, что «они заключают в себе всю теорию движения жидкостей» [2, с. 65]. Сейчас мы знаем, что это не так и уравнения Эйлера — лишь первое приближение в описании поведения реальных сред. Однако, являясь приближением главным, определяющим, они служат основным инструментом теоретического исследования механических процессов, происходящих в идеальных жидкостях и газах.

Представляется интересным провести хотя бы схематично анализ возникновения некоторых общих идей, лежащих в основе уравнений Эйлера, проследить этапы формализации этих идей и обсудить детали вывода указанных уравнений.

В ранней истории динамики идеальной жидкости можно выделить три периода.

1. Предыстория гидродинамики, относящаяся главным образом к расцвету Римской империи, когда некоторые основные задачи гидравлики были в общем виде поставлены практикой перед наукой, но не были решены в значительной степени ввиду отсутствия необходимого математического аппарата.

2. Ранний период истории гидродинамики, начавшийся на рубеже XVI—XVII вв. и продолжавшийся до конца 20-х годов XVIII в., когда решение задач гидравлики осуществлялось преимущественно с помощью методов элементарной математики.

3. Период, связанный с созданием базиса динамики идеальной жидкости (уравнений Эйлера), охватывающий промежуток времени с конца 20-х годов до середина 50-х годов XVIII в., когда в гидродинамике утвердились инфинитезимальные методы.

Из трех указанных периодов наибольший интерес представляют, очевидно, два последних, связанных с математизацией гидродинамики. Их анализ предпринимался в последнее время рядом авторов, среди которых в первую очередь следует отметить крупного специалиста современной механики и глубокого знатока ее истории К. Трусделла, исследования которого вошли, в частности, в двенадцатый том второй серии собрания сочинений Л. Эйлера в виде обширной редакционной статьи [3] и в сборник его статей разных лет [4]. Один из разделов этого сборника был опубликован ранее на русском языке в Советском Союзе [5]. В серии своих работ Трусделл выделил и подверг обстоятельному историко-критическому анализу ряд стержневых идей классической гидродинамики: понятие внутреннего давления в точке среды у И. Бернулли и Эйлера, понятие скалярного поля давлений у Эйлера и векторного поля скоростей у Д'Аламбера, представление о мысленно выделенном элементе жидкости у Ньютона, Д. и И. Бернулли, Д'Аламбера, Эйлера и т. д. Он также провел подробный анализ ряда основополагающих работ по гидродинамике Д. Бернулли, Д'Аламбера и Эйлера.

Настоящая работа является попыткой систематизации и развития идей в направлении, указанном Трусделлом (историко-критический анализ основных понятий и идей). В ней представлены некоторые результаты анализа зарождения и развития до 1757 г. основного постулата (гипотезы сплошности), основных понятий (понятий внутреннего давления в точке, движущей силы, ускорения) и основных уравнений гидродинамики (уравнений Ньютона, Бернулли, Д'Аламбера, Эйлера).

## ГИПОТЕЗА СПЛОШНОСТИ

Подобно тому как в основании ньютонианской механики точки лежат представления о дискретной структуре материального мира, восходящие к атомистике древних, базис теоретической гидромеханики Эйлера составляют континуальные представления, истоки которых также можно обнаружить еще у античных авторов.

Исходным моментом в выработке этих представлений был опыт, который указывал на наличие в жидкости как свойств, характерных для дискретной совокупности элементарных материальных корпускул (инерционность, сопротивление, оказываемое движущимся в жидкости телам, и т. д.), так и свойств, совсем для них не характерных (специфический характер взаимодействия с твердыми телами, вообще отличающийся от удара, текучесть и т. д.). Результатом поисков подходящей модели, сочетающей в себе как те, так и другие свойства, стала модель сплошной жидкости.

Вообще в ранней истории гидромеханики можно выделить три подхода к определению понятия сплошной жидкости: математический, физический и эмпирический.

При *математическом* подходе, отличающемся известной логической строгостью и наиболее последовательно изложенном Г. Галилеем [6, 7], сплошная жидкость рассматривалась как составленная из бесструктурных, «лишенных величины», т. е. не имеющих геометрических размеров, «неделимых» частиц, «находящихся в состоянии тесного соприкосновения» [8, с. 186]. К этому заключению Галилей пришел, как мы бы сказали сейчас, из предположения конечности объемов $\tau$ указанных частиц с последующим переходом к пределу $\tau \to 0$. Последний был необходим Галилею для объяснения характерных механических свойств жидкости, и в особенности свойства отсутствия «сопротивления разделению». (Отсутствие «сопротивления разделению» — оборот Галилея, выражающий в терминах структуры свойство текучести, т. е. свойство изменять форму под действием сколь угодно малой силы, или более точно: свойство неспособности жидкостей выдерживать касательные напряжения в состоянии покоя. Наиболее четко указанное свойство было сформулировано на феноменологическом языке И. Ньютоном [9]: «Жидкость есть такое тело, коего части уступают всякой как бы то ни было приложенной силе и, уступая, свободно движутся друг относительно друга» [10, с. 377].) В жидкости «нет никакого сопротивления разделению, так как нет частиц, которые могли бы быть разделяемы», заключал Галилей [8, с. 187].

Остановимся на указанных положениях Галилея более подробно. В сочинении «Рассуждение о телах, пребывающих в воде» [6] Галилей исходит из следующих соображений. Вода, как и любая другая жидкость, является особой материальной средой, о механических свойствах которой можно судить по большей части опосредованно, т. е. по тем лишь воздействиям, которые она оказывает на движущиеся в ней твердые тела. При таком «рассмотрении взаимодействия тел и воды» обнаруживается следующее. Среда настолько легко «облекает» твердые тела, что можно предположить, что между частицами жидкости никакой «связности и противодействия не существует» [8, с. 183]. Действительно, по мнению Галилея, «невозможно найти тело какого бы то ни было состава, формы и величины, которое, помещенное в воду, осталось бы неподвижным благодаря связности частей воды между собою, а не двигалось вверх и вниз сообразно имеющей в данном случае место причине движения» [8, с. 183]. На основании ряда подобных наблюдений Галилей формулирует вывод: «В жидкой среде, как-то в воздухе, воде и других жидкостях, нет противодействия разделению, но все они малейшей силою разделяются и проникаются» [8, с. 166].

Далее Галилей пытается обосновать указанное свойство жидкости посредством обращения к ее внутренней структуре. «Когда мы займемся более внимательным исследованием природы воды и других жидкостей, то мы, быть может, откроем, что строение их таково, что они не только противятся разделению, но что в них нет ничего, что подлежало бы разделению» [8, с. 186].

Прежде чем приступить к такому исследованию, Галилей указывает на возможность существования «двух родов проникновения одних тел через другие: одно — через тела, части коих связаны, откуда неизбежно вытекает необходимость их разделения; другое — через тела, представляющие агрегат частиц, не связанных, а только прилегающих друг к другу; здесь требуется не разделение, но лишь передвижение» [8, с. 186]. Все жидкости Галилей считает относящимися ко второй группе, хотя «еще не решил окончательно» [8, с. 186], полагая частицы жидкости находящимися всегда в состоянии «тесного соприкосновения» [8, с. 186], а не свободно расположенными друг относительно друга.

Более того, вскоре оказывается, что эти частицы должны вырождаться в не имеющие геометрических размеров «неделимые» тела-точки. Причем начала разработки этой идеи закладываются Галилеем в 1611—1612 гг. в его «Рассуждении о телах, пребывающих в воде», а к окончательным выводам он приходит в «Беседах и математических доказательствах, касающихся двух новых отраслей науки», т. е. спустя 26 лет.

«Если, например,— пишет Галилей в первой из этих работ,— я возьму кусок серебра или другого металла в холодном и твердом виде, то, разделяя его на две части, я почувствую сопротивление...; если захотим разделить обе половины на две части и так последовательно далее, то постоянно будем встречать подобное же сопротивление, но тем меньшее, чем мельче разделимые части» [8, с. 186]. Отсюда уже лишь один шаг до вывода о том, что в пределе — после бесконечного дробления, когда частицы в конечном счете превратятся в гипотетические тела-точки,— указанное сопротивление разделению будет в точности равно нулю, и мы придем таким образом к сплошной жидкой среде.

Однако, продолжает свои рассуждения Галилей, в действительности такая попытка получения предельно размельченной структуры указанным выше способом наталкивается на непреодолимую трудность. Она заключается в недостижимости бесконечного подразделения механическим путем, т. е. дроблением. «Если я беру твердое тело, будь то камень или металл,— поясняет Галилей в «Беседах и математических доказательствах»,— и молотком или тончайшим напильником превращаю его в возможно тонкий порошок, то ясно, что отдельные частицы его все-таки конечны и имеют форму и число, хотя благодаря своей малой величине они неощутимы и неразличимы нашим глазом; отсюда получается, что сдвинутые вместе они лежат кучкою; если вырыть в них углубление, то оно таковым и остается и окружающие частицы не стремятся его заполнить; при сотрясении они приходят в движение, но тотчас же останавливаются, как только внешняя движущая причина их покидает. Подобные явления мы можем наблюдать на скоплении телец и большего размера различной, а не только сферической формы, как-то: на кучках проса, пшеницы, свинцовой дроби и всяких других веществ. Но если мы попытаемся усмотреть то же явление, взяв воду, то не увидим ничего похожего: поднимаемая вверх, она тотчас же разливается, если не удерживается сосудом или другой внешней причиной; вырываемое в ней углубление тотчас заполняется, и волны распространяются в ней на большие пространства. Отсюда, кажется мне, можно вполне основательно заключить, что частицы воды, из которых она, по-видимому, состоит (более тонкие, нежели любой мельчайший порошок, и лишенные всякой устойчивости), весьма отличны от частиц конечных и делимых; и я не могу найти причины различия иначе, как в том, что они неделимы» [11, с. 147—148].

В совокупности с замечанием о «тесном соприкосновении» этих компонент, исключающим наличие пустот между последними, указанное высказывание можно рассматривать как определение понятия сплошной жидкой среды в смысле Галилея.

Невозможность механического превращения, т. е. путем дробления, твердых тел в сплошное жидкое вещество с нулевым сопротивлением разделению не исключает, по мнению Галилея, достижимости такого предельного непрерывного состояния какими-либо иными путями, например плавлением. При этом твердые тела «делаются жидкостями и расплавляются лишь тогда, когда неделимые частицы огня или солнечных лучей растворяют и разлагают их, как я думаю, на первоначально неделимые и бесконечно малые части» [11, с. 148].

Подведем некоторые итоги. Мы видели, что исходным моментом в формировании взгляда на жидкость как на материальный континуум является у Галилея опыт (опытный факт отсутствия сопротивления разделению). Опыт наводит также на идею о возможном способе получения сплошной жидкой среды (бесконечное размельчение и расплавление на непротяженные и плотно «прилегающие друг к другу» частицы). Описание этого способа, данное Галилеем, есть, по сути, операциональное определение материального жидкого континуума. Однако поскольку это определение требует «допущения предельного и крайнего разложения на лишенные величины и бесчисленные первичные составляющие» [11, с. 135], что механическим путем выполнить невозможно[1], то это основанное на опыте определение будет уже, по существу, определением математическим (см. в связи с этим [12]).

Таким образом, понятие сплошной жидкой среды определяется у Галилея, как мы сказали бы сейчас, асимптотически из предположения существования дискретных сред с последующим переходом к пределу. Результатом этого предельного перехода является у него превращение конечных твердых частиц в неделимые тела-точки. Совокупность таких тел-точек с исключенными в силу условия «тесного соприкосновения» пустотами между ними образует жидкий континуум.

Подчеркнем, что доказанная таким образом сплошность жидкой среды для Галилея не есть просто модель; следуя Аристоте-

[1] Можно лишь попытаться представить, как это превращение твердого тела в жидкий континуум будет происходить на самом деле, например при плавлении. Однако и это, по мнению Галилея, представить трудно, так как «бесконечное для нас, по существу, непостижимо, равно как и неделимое» [11, с. 139].

лю, он считает, что жидкое вещество действительно является непрерывным, что такова его реальная физическая структура. Примером «такого сплошного вещества ... как уже давно доказал наш Академик, является вода» [11, с. 126].

Представители *физического* подхода, на формирование которого влияние атомистических представлений сказалось в более сильной степени, думали иначе[2]. Они могли согласиться с интерпретацией материального континуума в смысле Галилея и даже ввести ее в свои рассуждения, но расценивали ее при этом не более чем как математическую модель, ибо только «из математики ... следует, что в нераздельных частицах могут быть мысленно различаемы еще меньшие части» [10, с. 503]. Реальные же тела должны обладать структурой, так как «протяженность... целого происходит от протяженности ... частей, отсюда мы заключаем, что все малейшие частицы всех тел протяженны... Таково основание всей физики» [10, с. 503].

В этой мысленной допустимости галилеевской математической интерпретации понятия материального континуума (когда «жидкости от разделения становились бы все более и более тонкими и образовывали бы средины бесконечно жидкие» [10, с. 466] или «совершенно лишенные твердости» [10, с. 325], т. е. лишенные твердых протяженных корпускул) можно усмотреть зачатки нового, рационального взгляда на гипотезу сплошности не как на предположение о реальной структуре вещества, а как на феноменологическую гипотезу, обосновывающую применение в конкретных задачах механики жидкости геометрического (Ньютон), а затем и аналитического (Д. и И. Бернулли, Д'Аламбер, Эйлер) аппарата. Основоположником такого рационального подхода стал Ньютон, который, несмотря на свою приверженность к атомистической концепции, ввел не только в тексте, но и в предметном указателе второго издания «Математических начал» [13] наряду *с термином* mediis noncontinuis также и термин mediis continuis, официально узаконив, таким образом, новый континуальный подход в механике.

Определяя сплошную жидкую среду феноменологически (см. его определение, данное выше в начале настоящего пункта), Ньютон становился, таким образом, на позиции представителей *эмпирического* естествознания, континуальные представления которых связывались с непосредственными ощущениями и не подвергались сложной логической, математической или физической обработке. Так, Леонардо да Винчи, отрабатывая в своих опытах с жидкостями методику визуализации потока с помощью семян проса, «позволял себе вольность, общую с математиками... приравнивая просо или песок к воде», несмотря на то, что «вода сама по себе — величина единая и непрерывная» [15, с. 382—383]. Б. Паскаль, объясняя парадоксы гидростатики (свойство изотропии давления, независимость давления от геометрии со-

[2] Главным выразителем этого подхода был И. Ньютон [9, 13, 14].

суда и др.) «непрерывностью и жидким состоянием воды» [8, с. 238], также стремился не прибегать к сложным аналитическим рассуждениям для уточнения этих понятий.

Все три отмеченных выше подхода — математический (при котором сплошность понималась в структурном смысле), физический (при котором гипотеза сплошности стала пониматься как феноменологическая гипотеза), эмпирический (который способствовал формированию феноменологического отношения к понятию сплошности) — легли в основание современной *гипотезы сплошности.* Используя ее в механике деформируемого тела, жидкости и газа, мы, подобно Ньютону, Паскалю и Леонардо, игнорируем фактическое строение реальных тел и вместо последних рассматриваем абстрактные (математические) сплошные среды в смысле Галилея. Подчеркивая роль перечисленных подходов, отметим особо, что без всей этой предварительной обработки исследователями XVI—XVII вв. античных идей о материальном континууме, без тонких рассуждений реологического характера и операционально-математического доказательства сплошности жидкостей Галилея, без ньютоновского перевода идей Галилея в ранг феноменологической гипотезы и, наконец, без элементарных наблюдений за поведением жидкостей в духе Леонардо и Паскаля едва ли в XVII—XVIII вв. могли возникнуть четкие, формулируемые в строгих математических терминах уникальные идеи об изотропных свойствах давления, о жидких объемах, о гипотетических стягивающихся в точку «бесконечно малых частицах» вещества и множество других рациональных идей, составляющих основной арсенал современной континуальной механики.

В наиболее четком виде гипотеза сплошности утвердилась в теоретической гидромеханике в первой половине XVIII в., когда в полной мере стали осознаваться преимущества, связанные с ее принятием. Главное из этих преимуществ состояло в том, что указанная гипотеза позволяла прийти к «гораздо более свободному и богатому математическому воззрению, чем это было возможно из рассмотрения даже системы многих твердых тел» [16, с. 89]. Строго говоря, будучи примененным к жидкостям, указанное рассмотрение системы материальных тел в классическом (лапласовском) духе приводило к практически не разрешимой задаче, на что прямо указывал еще Д'Аламбер. «Положим,—писал он в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей»,— что мы обладаем преимуществом, которого мы лишены, а именно знаем форму и взаимное расположение частиц, которые составляют жидкость. Тогда законы их сопротивления и их действия были бы безусловно сведены к известным законам движения, так как изучение движения, сообщенного одним телом любому числу окружающих его частиц, есть только задача динамики, для решения которой имеются все необходимые механические основы. Однако чем больше число частиц, тем труднее приложить эти принципы. Следовательно, этот метод мало пригоден для изучения сопротивления жидкостей. Но мы далеко не имеем всех необходимых данных для применения этого метода, так как мы не знаем не только формы и расположения частиц, но также того, как эти частицы толкаются телом и как они перемещаются друг относительно друга» [17, с. XXVII—XXVIII].

В рамках же гипотезы можно обойти все эти тонкие вопросы, сведя, подобно Стевину, Паскалю и Ньютону, сложные действительные (структурные) свойства реальной жидкости «к одному опытному принципу, а именно к равенству давления по всем направлениям», и определить это (уже феноменологическое) свойство модели как «основное свойство жидкости» [17, с. XXVIII]. Используя затем представление о давлении, можно, подобно Д. и И. Бернулли, перейти к задачам о движении жидкости, узловым понятием которых стало понятие *мысленно выделенного жидкого элемента*, также обязанное своим появлением гипотезе сплошности.

Переход от рассмотрения движения системы дискретных частиц реальной жидкости к анализу движения совокупности мысленно выделенных гипотетических «частиц» сплошной жидкости — жидких объемов (И. Ньютон [9, 13], Д. Бернулли [18], И. Бернулли [19] и др.) сыграл в истории гидродинамики исключительно важную роль. То обстоятельство, что указанные гипотетические «частицы» рассматривались «жидкими», позволяло исключить соударения и тому подобные неконтинуальные эффекты. А тот факт, что оперирование при этом производилось все-таки «частицами», давал возможность авторам XVIII в. применять в данном случае аппарат ньютонианской динамики точки. Имея в виду эту двойственность, Э. Маделунг в своей классификации физико-механических теорий отнес теоретическую гидромеханику к разряду так называемых квазиконтинуальных теорий в отличие от чисто континуальных — теории электромагнитного поля и т. п. [20].

Необходимо особо отметить, что в отличие от Ньютона исследователи первой половины XVIII в — Д. и И. Бернулли, Д'Аламбер, Эйлер — в качестве жидких объемов рассматривали не конечные элементы, а абстрактные математические объекты — стягивающиеся в точку «бесконечно малые частицы жидкости» (элементарные параллелепипеды, тетраэдры и пр.). «Ясно,— писал Эйлер в 1752 г. в связи с выводом дифференциального уравнения неразрывности [21],— что вся масса жидкости может быть разделена на элементы такого рода, так что все, что мы определяем для одного элемента, распространяется таким образом вообще на все остальные» [2, с. 138].

Переход от конечных жидких объемов к бесконечно малым открыл путь к интенсивному проникновению формальных методов анализа бесконечно малых в теорию движения жидкости. Кроме того, этот переход фактически определил тип и количество дифференциальных уравнений движения жидкости, полученных Эйлером в середине XVIII в. и носящих ныне его имя. Ими стали три скалярных уравнения, выражающие в проекциях на оси декартовой системы координат модифицированный второй закон ньютонианской динамики точки, который в этой новой модификации был, по утверждению Эйлера [22], универсальным «единственным основанием всей механики», достаточным для полного описания любого механического «движения любого рода тел» [23, с. 88] (важно только было относить указанный закон к бесконечно малым телам, которые «не пребывают ни в каком другом движении, кроме поступательного» [23, с. 88]; такими телами могли быть, по мнению Эйлера, как одиночные материальные точки, так и стягивающиеся в точку бесконечно малые элементы, мысленно выделенные в сплошной среде). Достаточность второго закона динамики обусловливалась тем, что описание чисто поступательного движения указанных объектов не требовало включения в число независимых законов механики (наряду с законом Ньютона) закона изменения момента количества движения. Учет последнего, строго говоря, необходим и, как известно, приводит, например в асимметрической гидромеханике и механике вязкой жидкости, к трем дополнительным соотношениям, выражающим асимметрию и симметрию тензора касательных напряжений соответственно. Однако в случае движения материальной точки и абсолютно твердого тела вывод Эйлера, как мы сейчас знаем, является допустимым и закон изменения момента количества движения оказывается не независимым, а непосредственно связанным с основным законом поступательного движения — законом Ньютона, что и было фактически продемонстрировано Эйлером в упомянутой выше работе [22] на примере вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Впрочем, впоследствии Эйлер изменил свою первоначальную точку зрения и включил в число основных независимых законов механики, помимо закона Ньютона, также и закон изменения момента количества движения [24] (см. в связи с этим [4, 25]).

Вопросы, связанные с идеей мысленного выделения в сплошной среде бесконечно малого элемента, были одними из наиболее принципиальных в механике XVIII в. Именно в ходе их разрешения было положено начало радикальной *математизации* теоретической гидромеханики, т. е. фактического слияния последней с анализом бесконечно малых. Будущее механики жидкости, начиная с этого периода, полностью определялось, по мнению Эйлера, уровнем развития математического анализа, ветвью которого она (гидромеханика) должна была в конечном счете стать. «Вся теория,— писал он в 1752 г. в «Началах движения жидкостей» [21] по поводу полученной им системы уравнений плоского течения несжимаемой жидкости,— сведена к чистому анализу, и все, что остается еще сделать в этом направлении, зависит только от последующего прогресса в анализе» [2, с. 134]. Впоследствии Ж. Лагранж, подчеркивая особую роль Эйлера в деле формализации континуальных представлений, повторил эту мысль во втором издании своей «Аналитической механики».

Достаточно высокая степень абстрактности в рассуждениях о гипотетических мысленно выделенных бесконечно малых «частицах» вещества, которые «по своим двусмысленным свойствам как бы занимают среднее место между величиной и нулем, между бытием и небытием» [26, с. 63—64], заставляла исследователей уже в то время искать *обоснование* метода выделения и континуального подхода в целом на стыке разных наук — математики, механики, физики, метафизики и др. По сути дела, обоснование континуальной механики проходило параллельно с ее развитием и включало в себя два аспекта. Первый, чисто математический, касался правомочности применения методов анализа бесконечно малых к гидромеханике. Этот аспект был тесно сопряжен со степенью понимания сути математического анализа [27], и как только это понимание было достигнуто, вопрос обоснования автоматически отпал. Другой аспект, физический, касался правомерности использования самой континуальной модели (модели сплошной жидкости) и должен был решаться, очевидно, на неформальном, физическом уровне. Первые попытки такого физического (структурного) обоснования континуальной модели относятся к уже известным нам работам Галилея, в которых автор фактически дал описание самой процедуры построения материального континуума на основе дискретной модели. Впоследствии, отмечая недостаточную физичность континуального подхода, Л. Больцман указывал, что «дифференциальные уравнения с частными производными, предназначенные для описания поведения континуума, должны рассматриваться как первоначально заданные», и отмечал, что «все-таки механическое обоснование дифференциальных уравнений при помощи средних чисел, связанных с представлением о приходе и уходе мельчайших частиц, чрезвычайно повышает их наглядность, и до сих пор, кроме атомистики, не найдено никакого иного механического обоснования явлений природы» [28, с. 27].

Строгое статистическое обоснование континуальной гидромеханики с позиций развитой Больцманом на основе идей Дж. Максвелла кинетической теории газов было дано Больцманом во второй половине XIX в.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Принятие гипотезы сплошности в XVIII в. не только определило основное направление развития теоретической гидромеханики, о чем говорилось выше, но также обусловило зарождение тех конкретных специфических понятий механики жидкости, которые вошли в 1757 г. в фундаментальные уравнения Эйлера. К ним относятся прежде всего понятия внутреннего давления в точке среды, движущей силы и ускорения.

Прежде чем говорить об основных тенденциях развития понятия *внутреннего давления в точке* среды, заметим, что таких понятий в современной механике сплошной среды существует, вообще говоря, два. Одно из них определяется в механике жидкости и газа строго математически через линейный инвариант тензора внутренних напряжений $p_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$, вторую вязкость $\mu'$ и дивергенцию скорости жидкости $\operatorname{div}\bar{v}$:

$$p' = -\frac{p_{11}+p_{22}+p_{33}}{3} + \mu' \operatorname{div}\bar{v}, \tag{1}$$

а другое вводится в термодинамике операционально и может быть определено, например, с помощью эмпирического уравнения состояния Клапейрона

$$p'' = R\rho T, \tag{2}$$

где $R$ — газовая постоянная; $\rho$ — плотность; $T$ — температура. Полагают, однако, что

$$p' = p'', \tag{3}$$

и говорят об одной величине — внутреннем давлении $p$ в точке.

Формирование представлений, относящихся к обеим формам давления, происходило достаточно сложным образом. На разных стадиях развития механики эти представления взаимно переплетались и дополняли друг друга. В результате вошедшее в конечном счете в дифференциальные уравнения Эйлера (1757 г.) выражение внутреннего давления отражает как идеи о действии жидкости на мысленно выделенную элементарную площадку (И. Бернулли, Эйлер и др.), так и операциональные соображения, связанные с чисто практической процедурой измерения давления с помощью барометра и ведущие к опытам Бойля, Паскаля, Торричелли, Вивиани и др. Становление этих (операциональных) представлений происходило не сразу, не вдруг: потребовалась не одна сотня лет, прежде чем стереотипное представление о давлении как «надавливании», как направленной величине (предполагающей наличие твердой поверхности, на которую действует направленная определенным образом сила давления) трансформировалось в представление о давлении как скалярной, или термодинамической в указанном выше смысле, характеристике (относящейся к самой жидкой среде, характеризующей ее внутреннее сжатие и измеряемой с помощью барометра).

На первых этапах развития гидромеханики давление в жидкости понималось как вертикальное давление и отождествлялось с весом жидкой массы (*Архимед.* О плавающих телах. III в. до н. э.). Переход к рассмотрению жидкостей, содержащихся в сосудах, и связанная с этим формулировка принципа затвердевания привели к созданию основ классической гидростатики, установлению изотропных свойств давления и формулировке принципа всестороннего одинакового сдавливания (Леонардо да Винчи. XV—XVI вв.; *Стевин.* Начала гидростатики. 1586; *Паскаль.* Трактат о равновесии жидкостей. 1663). В качестве иллюстрации последнего Паскаль, например, опускал в воду герметичные мешки, наполненные воздухом [29]. Факт всестороннего сдавливания становился здесь визуально наблюдаемым: вода, «давя на них со всех сторон», сжимала их «по направлению к центру» [8, с. 248]. Величина оказываемого давления (или всестороннего сдавливания) определялась по Паскалю с помощью вертикальной трубки, вставленной в указанный мешок с налитой в него ртутью.

Ньютон затем перешел от идеи сдавливания тела в жидкости к всестороннему сдавливанию мысленно выделенного конечного ее объема [9], который «заключается в остальной жидкости как в сосуде» и испытывает с ее стороны при покое усилия, «одинаковые... по всей поверхности» указанного объема [10, с. 379]. Детализируя механизм взаимодействия этого объема с окружающей средой, Ньютон указывал, что в каждой точке его границы можно построить аналогичный объем, соприкасающийся с данным, так что оба элемента в точке касания будут действовать друг на друга согласно третьему закону динамики с равными и противоположно направленными силами внутреннего давления.

Идеи, связанные со всесторонним одинаковым сдавливанием элемента среды, вместе с указанной Паскалем процедурой измерения этого сдавливания, или сжатия, легли в основу обобщенного, включающего и случай движущейся жидкости, определения понятия внутреннего давления в точке. Первый шаг в этом направлении сделал Д. Бернулли, экстраполировавший для одномерного случая понятие термодинамического, т. е. измеряемого с помощью барометрической трубки, давления (всестороннего сдавливания) в духе Стевина, Паскаля и Ньютона на случай описания напряженного состояния в движущейся среде [18]. Осуществление Д. Бернулли этой экстраполяции фактически эквивалентно формулировке утверждения (3), постулирующего равенство величин термодинамического и гидродинамического давлений. Если бы мы просверлили отверстие в канале с текущей водой и присоединили вертикальную трубочку,— пишет Д. Бернулли в первой части «Гидродинамики», то «в последней вода поднялась бы на некоторую высоту до состояния покоя в трубочке и эта вода поддерживалась бы снизу водой, протекающей по каналу, так что здесь установилось бы равновесие между текущими водами и покоящимися» [30, с. 25].

Указанные идеи Д. Бернулли нашли свое окончательное выражение в эйлеровом определении понятия внутреннего давления как характеристики поля, или как скалярной функции точки [21]. Согласно этому определению давление $p$ в любой точке $l$ пространства, занятого жидкой массой, могло быть представлено с помощью «высоты, или глубины, выражающей состояние сжатия в $l$», и являлось, таким образом, «определенной функцией координат $x$ и $y$, а если давление в $l$ изменялось также со временем, время также входило в функцию $p$» [2, с. 289—290]. Обобщение понятия внутреннего давления в точке жидкой среды с плоского случая на случай трехмерных течений было также осуществлено Эйлером [1].

Зарождение и развитие понятия *движущей силы* в жидкости происходило в процессе разработки теории одномерных течений или, говоря более конкретно, в ходе вывода уравнения Бернулли. В 30—40-х годах XVIII в. указанное уравнение традиционно трактовалось как *кинематическое* выражение движущей силы, действующей на некоторый мысленно выделенный элемент жидкости в трубке тока [17—19]. (Четкое понимание того, что эта сила, численно выражаемая полуразностью квадратов скоростей, представляет собой не что иное, как разность сил давлений, действующих в двух ограничивающих указанный жидкий элемент сечениях трубки тока, пришло лишь в 40-х годах XVIII в. [1, 21, 31, 32].)

Начала такого направления в гидродинамических исследованиях были положены Д. Бернулли [18], который поставил и решил задачу определения давления в некотором сечении трубы с протекающей в ней со скоростью $v$ в направлении оси $x$ жидкостью. С этой целью он использовал прием, эквивалентный соотнесению указанной исходной задаче гипотетической задачи воображаемого истечения жидкости из этой трубы, внезапно обрезанной в рассматриваемом сечении. Полученное при этом из принципа живых сил соотношение типа уравнения второго закона Ньютона [18, ч. 12, § 5]

$$v\,(dv/dx) = F_{\text{дв}}^{\text{ДБ}} \tag{4}$$

он интерпретировал затем как дифференциальное уравнение указанного гипотетического истечения, в котором правая часть, равная

$$F_{\text{дв}}^{\text{ДБ}} = (a - v^2)/2c, \tag{5}$$

выражала представленную в кинематических терминах движущую силу, или «давление», по терминологии Д. Бернулли (здесь $v$ и $\sqrt{a}$ — скорости потока в исследуемом сечении трубы и в отверстии истечения соответственно, $c$ — константа). С другой стороны, по смыслу вывода указанная движущая сила в гипотетической задаче и искомое давление в задаче исходной суть одно и то же. Отсюда Д. Бернулли интерпретировал соотношение (5) как уравнение, связывающее давление в некотором сечении трубы со скоростью. В этом качестве уравнение (5) вошло в историю гидродинамики под названием уравнения, или интеграла, Бернулли.

В 1743 г. И. Бернулли предложил иной, ставший впоследствии стандартным способ вывода интеграла Бернулли (или, если следовать логике и терминологии авторов XVIII в., кинематического выражения движущей силы), основанный на непосредственной записи дифференциального уравнения движения для действительной, а не гипотетической задачи о течении в трубе и последующем его интегрировании [19]. Полученное им выражение для элементарной движущей силы (или «мертвой силы»), необходимой для сообщения ускорения бесконечно тонкому слою жидкости, перемещающейся в канале произвольного сечения $\sigma$, имело вид

$$F_{\text{дв}}^{\text{ИБ}} = \sigma v dv. \tag{6}$$

Эту величину И. Бернулли называл «мертвой силой, сдавливающей слой жидкости» [19, с. 400]. В случае конечного жидкого элемента, ограниченного сечениями 1 и 2, движущая сила принимала у И. Бернулли значение

$$\tilde{F}_{\text{дв}}^{\text{ИБ}} = \sigma_1 \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right), \tag{7}$$

«каковое [выражение] обозначает мертвую силу в трубе... необходимую... для изменения скорости из меньшей в бо́льшую» [19, с. 400].

В 1745 г. Эйлер [33] использовал метод И. Бернулли при определении «силы, действующей в направлении $mS$, касательной к каналу (т. е. к элементарной трубке тока.— *Б. К.*) в $m$» и требующейся «для измерения движения текучей среды в канале $AaMm$ в каждой точке $M$» [34, с. 292]. В обозначениях формулы (6) найденная Эйлером движущая сила может быть представлена в виде

$$F_{\text{дв}}^{\text{Э}} = -2\sigma v dv. \tag{8}$$

Здесь впервые появился знак минус, указывающий на разнонаправленный характер изменения скорости и давления в трубке тока.

Спустя четыре года, Д'Аламбер [17] также воспользовался методом И. Бернулли и, интегрируя правую часть соотношения

$$F_{\text{дв}}^{\text{Д}} = -v dv, \tag{9}$$

получил для трубки тока «весьма малой» толщины выражение конечной движущей силы вида

$$\tilde{F}_{\text{дв}}^{\text{Д}} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}. \tag{10}$$

При этом полученное выражение, связывающее скорость $v_2$ в некотором произвольном сечении 2 указанной трубки тока с постоянной скоростью $v_1 = \text{const}$ набегающего потока (сечение 1), Д'Аламбер называл «давлением в [точке] $P$», лежащей в сечении 2 [17, с. 23].

Первые попытки *динамического* представления движущей силы в жидкости также связаны с именем Д. Бернулли [18]. Как уже говорилось выше, движущая сила в задаче гипотетического истечения совпадала у него с искомым давлением $p$ в исходной задаче, что можно условно записать теперь в виде

$$F_{\text{дв}}^{\text{ДБ}} = p. \tag{11}$$

И. Бернулли [19] ввел затем представление об элементарной движущей силе, являющейся, по сути, работой сил давления на перемещении $dx$:

$$F_{\text{дв}}^{\text{ИБ}} = pdx, \tag{12}$$

которая уходит на приращение живой силы, определяемое правой частью соотношения (6). Для конечного промежутка $\Delta x = x_2 - x_1$ интегрирование (12) давало выражение конечной движущей силы, которое в принятых обозначениях имеет вид

$$\tilde{F}_{\text{дв}}^{\text{ИБ}} = \int\limits_{x_1}^{x_2} pdx. \tag{13}$$

Наконец, Эйлер впервые дал динамическое выражение движущей силы, адекватное современному:

в 1749 г.[3] [31]— для случая одномерного стационарного течения в трубе

$$F_{\text{дв}}^{\text{Э}} = \sigma dp; \tag{14}$$

в 1750 г. [32]—для случая двумерного стационарного течения в проекциях на оси $x$, $y$

$$\begin{gathered} pr_x F_{\text{уск}}^{\text{Э}} = \frac{1}{u_0} \frac{D(p, y)}{D(y_0, t)}, \\ pr_y F_{\text{уск}}^{\text{Э}} = -\frac{1}{u_0} \frac{D(p, x)}{D(y_0, t)} - 1 \end{gathered} \tag{15}$$

(здесь $pr_x F_{\text{уск}}^{\text{Э}}$, $pr_y F_{\text{уск}}^{\text{Э}}$ — проекции движущей силы на оси $x$, $y$ декартовой системы координат, отнесенные в единице массы; $y_0$ — начальная ордината данной трубки тока в сечении $x=0$; $u_0$ — скорость в этой точке в направлении горизонтальной оси $x$; $t$ — время);

[3] Здесь и далее в тексте указываются не даты опубликования классических работ авторов XVIII в. (эти даты указаны в списке литературы), а даты их написания.

в 1752 г. [21] — для случая произвольного плоского неустановившегося течения тяжелой несжимаемой жидкости

$$pr_x F^{\text{Э}}_{\text{уск}} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad pr_y F^{\text{Э}}_{\text{уск}} = g - \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{16}$$

где $g$—ускорение силы тяжести;

в 1755 г. [1] — для общего случая пространственного неустановившегося течения сжимаемой идеальной жидкости в произвольном поле массовых сил

$$pr_x F^{\text{Э}}_{\text{уск}} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad pr_y F^{\text{Э}}_{\text{уск}} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$pr_z F^{\text{Э}}_{\text{уск}} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{17}$$

Здесь $\rho$ — плотность; $X$, $Y$, $Z$ — проекции массовой силы на оси декартовой системы координат $x$, $y$, $z$.

Современная форма выражения для *ускорения* сплошной жидкости была введена в 1749 г. Д'Аламбером [17] в так называемых переменных Эйлера и в 1750 г. Эйлером [32] в так называемых переменных Лагранжа. В последнем случае выражение ускорения не отличалось от его выражения в динамике материальной точки и представляло собой вторую производную пути по времени. В случае же использования переменных Эйлера оно приобретало более сложный вид.

Именно, в основе частных, относящихся к случаю осесимметричного установившегося движения и специальному случаю неустановившегося движения, рассуждений Д'Аламбера, связанных с записью ускорения в эйлеровых переменных, лежало фактически введенное им понятие векторного поля скорости. Скорость полагалась дифференцируемой функцией $u=f_1(x, y)$, $v=f_2(x, y)$ цилиндрических координат $x$, $y$ (в случае установившегося течения) или функцией $u=f_3(x, y)g_1(t)$, $v=f_4(x, y)g_2(t)$ координат $x$, $y$ и времени $t$ (в случае неустановившегося течения). Сравнение проекций скорости в двух бесконечно близких точках пространства, заполненного текущей жидкостью, в сочетании с использованием правила дифференцирования сложной функции многих переменных приводило к знакомому нам выражению полного ускорения.

В 1752 и 1755 гг. Эйлер обобщил полученное Д'Аламбером выражение на случай произвольных плоских [21] и пространственных [1] течений жидкости соответственно. Следуя Д'Аламберу, он указывал, что при перемещении частицы жидкости из одной точки в другую, находящуюся на бесконечно близком расстоянии от первой, «имеет место двойное изменение: в отношении координат $x$, $y$, $z$, которые получают приращения $udt$, $vdt$, $wdt$, и в отношении времени, которое увеличивается на $dt$» (цит. по: [35, с. 14]). После преобразований выражение проекций полного ускорения на оси координат $x$, $y$, $z$ принимало у Эйлера вид, адекватный современному:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{dy} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{dt} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из сказанного следует, что утвердившаяся к настоящему времени терминология («переменные Эйлера», «переменные Лагранжа») не вполне соответствует действительному положению вещей. Приоритет в первом применении в гидродинамике плоских и пространственных течений переменных Эйлера следует, строго говоря, считать принадлежащим Д'Аламберу (1749, опубл. в 1752 г.), а приоритет в первой реализации переменных Лагранжа — Эйлеру (1750, опубл. в 1767 г.). Однако заметим, что лишь Эйлеру удалось внести в обоих случаях требуемые ясность и четкость.

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математическая постановка основных задач гидродинамики раннего периода (XVII — середина XVIII в.) сводилась фактически к системе двух групп уравнений — *неразрывности и движения*. Так, для решения классической задачи истечения тяжелой жидкости из отверстия в донной части цилиндрического сосуда Ньютон [13, кн. 2, предл. 36] использовал систему *алгебраических* уравнений, состоящую из принципа неразрывности в форме Леонардо да Винчи (обратная пропорциональность скоростей $v$ и площадей поперечного сечения $\sigma$ потока в гипотетической воронке, в которой, как в трубке тока, свободно падает внутри сосуда вытекающая из него жидкость) и принципа Торричелли (линейная связь квадрата скорости истечения с высотой уровня $a$)

$$v/v_2 = \sigma_2/\sigma, \qquad v^2/v_2^2 = a/a_2 \tag{19}$$

(величины с индексом 2 относятся к сечению трубки тока, лежащему в плоскости отверстия истечения, а без индекса — к произвольному ее сечению). Решение

$$a/a_2 = \sigma_2^2/\sigma^2 \tag{20}$$

системы (19) определяет уравнение поверхности указанной трубки тока, с помощью которого Ньютон, в частности, вычисляет вес жидкости, выдерживаемый дном в процессе истечения. Согласно Ньютону, этот вес $P$ равен весу остающейся по предположению в покое жидкости, ограниченной стенками сосуда, дном и поверхностью указанной трубки тока. Относя его к весу $P_0$ жидкости, выдерживаемому дном при закрытом отверстии истечения, Ньютон получает в четвертом следствии предложения 36

$$P/P_0=(\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2), \tag{21}$$

где $\sigma_1$ — площадь поперечного сечения сосуда.

Переходя от весов к давлениям по формулам

$$p=P/(\sigma_1-\sigma_2), \quad p_0=P_0/\sigma_1,$$

можно переписать результат Ньютона (21) в виде

$$p=\sigma_1 p_0/\ (\sigma_1+\sigma_2), \tag{22}$$

откуда следует, что $p \leqslant p_0$, т. е. что статическое давление на дно в случае движущейся жидкости вообще меньше полного давления на это дно при покое. Указанный факт можно расценивать как предвосхищение Ньютоном основной идеи теоремы Бернулли, заключающейся в том, что «движущиеся жидкости производят меньшее давление, чем покоящиеся» [30, с. 549].

Для сравнения приведем соответствующую формулу Д. Бернулли, завершающую § 5 двенадцатой части «Гидродинамики», где решается упоминавшаяся нами выше задача определения давления на стенки трубы. Указанная формула получается, почти как у Ньютона, путем решения системы, состоящей из уравнения неразрывности (первое уравнение (19)) и уравнения Бернулли (5), являющегося обобщением уравнения Торричелли (второе уравнение (19)). «Этим путем устанавливается, что искомое давление равно $\frac{n^2-1}{n^2}a$, что и требовалось определить» [30, с. 364]. В принятых нами обозначениях этот вывод можно записать в виде

$$p=\frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\,p_0, \tag{23}$$

откуда, как и из результата Ньютона (22), снова следует, что $p \leqslant p_0$ ($\sigma_1=n$ — площадь поперечного сечения трубы; $\sigma_2=1$ — площадь отверстия истечения в ее торцевой части; $a$ — высота поверхности уровня в сосуде, из которого жидкость поступает в трубу, над отверстием истечения).

Специфика математических постановок задач Ньютона и Д. Бернулли, сводящихся к записи двух уравнений — неразрывности и движения, стала впоследствии традиционной. Причем, начиная с И. Бернулли [19], исследователи стали использовать в качестве уравнения движения не его простейшие интегральные варианты (уравнения Торричелли и Бернулли), а дифференциальное уравнение, выражающее второй закон ньютонианской динамики. Для уравнения неразрывности этот переход от интегральной (в форме Леонардо) трактовки к дифференциальной был выполнен позже Д'Аламбером [17] и Эйлером [32, 21, 1].

Первую точную формулировку основной системы *дифференциальных* уравнений гидродинамики специального вида дал

Д'Аламбер, получивший в 1749 г. уравнения неразрывности и движения осесимметричного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости [17]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{y}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{24}$$

В основу вывода первого из этих соотношений был положен принцип неразрывности в форме Леонардо, модифицированный соответствующим образом применительно к осесимметричному случаю. Именно, Д'Аламбером было рассмотрено симметричное растекание жидкости на головной части гладкого тела вращения, при котором первоначально цельная круглая трубка тока, идущая вдоль оси симметрии, трансформировалась в струйку тока с кольцеобразным сечением. Скорость в произвольной точке на боковой поверхности обтекаемого тела тогда оказывалась обратно пропорциональной боковой поверхности усеченного конуса, равной площади поперечного сечения указанной кольцеобразной струйки тока. Из этой зависимости после элементарных преобразований следовало первое уравнение (24).

В основу вывода второго соотношения (24) был положен принцип, называемый теперь принципом Д'Аламбера, в котором в качестве заданной силы выступала движущая сила в кинематической форме, аналогичной (10), а в качестве даламберовой силы инерции — величина, выражаемая ускорением жидкой частицы. Первую из этих сил Д'Аламбер назвал la pression du Canal, вторую — la force du Canal. Приравнивание указанных сил приводило к чисто кинематическому соотношению, сходному по форме с уравнением (6), которое после преобразований принимало вид связи, называемый теперь условием потенциальности, или безвихренности (второе уравнение (24)).

В последующих разделах рассматриваемого сочинения Д'Аламбер распространил полученную систему на плоский случай, а также на случай осесимметричного течения сжимаемой жидкости. Для неустановившегося течения он рассмотрел особый случай, при котором система (24) сохранила вид.

В ходе рассуждений Д'Аламбер ввел в гидродинамику метод параллелепипедов, заменивший традиционный метод трубок тока и ставший впоследствии общепринятым. Реализация этого метода Д'Аламбером была осуществлена в рамках подхода Лагранжа, хотя результаты, полученные при этом, были записаны в переменных Эйлера. Таким «более общим методом» Д'Аламбером было заново получено, в частности, первое уравнение (24), причем в качестве исходной зависимости в этом случае использовался не принцип неразрывности в форме Леонардо, а условие сохранения массы в чистом, так сказать, виде: «бесконечно малая часть жидкости, заключенная в первом параллелепипеде (т. е. в первом положении данного мысленно выделенного в жидкости параллелепипеда.—*Б. К.*), равна части, которая будет заполнять второй параллелепипед» [17, с. 49—50].

Последовательную реализацию подхода Лагранжа впервые осуществил с помощью модели трубок тока Эйлер, получивший в 1750 г. систему дифференциальных уравнений гидродинамики, которая описывала плоское установившееся течение несжимаемой идеальной жидкости [32]. В этой работе Эйлер при выводе уравнения неразрывности также исходил непосредственно из условия сохранения массы жидкого элемента, который при движении вдоль трубки тока должен «оставаться непрерывным». Уравнение движения получалось простым приравниванием выражений ускорения и ускоряющих сил (15). Полученная система имела в обозначениях формулы (15) вид:

$$\frac{D(x, y)}{D(y_0, t)} = -u_0, \qquad 2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{u_0}\frac{D(p, y)}{D(y_0, t)}, \tag{25}$$

$$2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{u_0}\frac{D(p, x)}{D(y_0, t)} - 1.$$

В 1752 г., используя метод параллелепипедов, Эйлер вывел систему дифференциальных уравнений гидродинамики, описывающую в переменных Эйлера плоское неустановившееся течение несжимаемой идеальной жидкости в поле силы тяжести [21]. Идеи, разработанные в указанной работе, были обобщены Эйлером в 1755 г. на случай пространственного неустановившегося движения сжимаемой идеальной жидкости в произвольном поле массовых сил [1]. Полученная система дифференциальных уравнений неразрывности и движения имела вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод. Классическая механика дискретной материальной точки и классическая механика сплошной жидкости построены на двух взаимоисключающих друг друга постулатах — атомистической гипотезе и гипотезе сплошности. Тем не менее развитие гидромеханики на ранних этапах протекало таким образом, что ее основные методы заимствовались из механики точки, трансформируясь при этом определенным образом. Возможность достаточно корректного применения точечной динамики Ньютона к описанию движения континуума (первая попытка обоснования корректности такого применения была осуществлена Эйлером в цитированной выше работе [22]) была обусловлена реализацией центральной идеи гидромеханики — идеи мысленного выделения элементарного жидкого объема. То обстоятельство, что указанный объем рассматривался бесконечно малым, т. е. стягивающимся в точку, обеспечило проникновение формальных методов анализа бесконечно малых и теории дифференциальных уравнений с частными производными в механику жидкости. Параллельно с этим происходил процесс становления специфических понятий гидромеханики. Представление их в форме, в которой они могли быть измерены и, следовательно, могли быть выражены количественно, также стимулировало процесс интенсивной математизации гидромеханики. Указанные обстоятельства создали необходимые предпосылки для формулировки в середине XVIII в. основных уравнений динамики идеальной жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Euler L.* Principes généraux du mouvement des fluides.— Mém. de l'Acad. sci. de Berlin, 11 (1755), 1757.
2. *Euler L.* Opera omnia. Lausannae, 1954, s. 2, vol. 12.
3. *Truesdell C.* Rational fluid mechanics, 1687—1765.— In: Euler L. Opera omnia. Lausannae, 1954, s. 2, vol. 12.
4. *Truesdell C.* Essays in the history of mechanics. B. etc.: Spring.-Verl., 1968.
5. *Трусделл К.* Этапы развития понятия напряжения.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды: К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 439—447.
6. *Galilei G.* Intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono. Firenze, 1612.
7. *Galilei G.* Discorsi e Demonstrazioni matematichi intorno a duo nuove Scienze atteneti alla Mecanica e ai Movimento locali. Leida, 1638.
8. Начала гидростатики: Архимед, Стевин, Галилей, Паскаль. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1932. 260 с.
9. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. Londini, 1687.
10. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1936, Т. 7. Ис. Ньютон. Математические начала натуральной философии. 696 с.
11. *Галилей Г.* Избранные труды: В 2-х т. М.: Наука. 1964. Т. 2. 571 с.
12. *Ахутин А. В.* История принципов физического эксперимента: (от Античности до XVII в.). М.: Наука, 1976. 291 с.
13. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. Amstelaedami, 1714.
14. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. Londini, 1726.
15. *Леонардо да Винчи.* Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 1028 с.
16. *Мах Э.* Механика: Историко-критический очерк ее развития. СПб., 1909. 448 с.
17. *D'Alembert J.* Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris, 1752.
18. *Bernoulli D.* Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentorati, 1738.
19. *Bernoulli I.* Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata ex fundamentis pure mechanicis.— In: Opera omnia. Lausannae, Genevae, 1742. T. 4.
20. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.
21. *Euler L.* Principia motus fluidorum.— Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 6 (1756/1757), 1761.
22. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de mécanique.— Mém. de l'Acad. sci. de Berlin, 6 (1750), 1752.
23. *Euler L.* Opera omnia. Lausannae, 1957, s. 2, vol. 5.

24. *Euler L.* Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.— Novi Comm. Acad. Sci., Petrop., 20 (1775), 1776.
25. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
26. *Карно Л.* Размышления о метафизике бесконечно малых. М.: Партиздат, 1933. 325 с.
27. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972, т. 3. 495 с.
28. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Гостехтеориздат, 1956. 556 с.
29. *Pascal B.* Traité de l'équilibre des liquides. Paris, 1663.
30. *Бернулли Д.* Гидродинамика. Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 552 с.
31. *Euler L.* Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite.— Mém. de l'Acad. Sci. de Berlin, 8 (1752), 1754.
32. *Euler L.* Recherches sur le mouvement des rivieres.— Mém. de l'Acad. Sci. de Berlin, 16 (1760), 1767.
33. *Euler L.* Neue Grundsätze der Artillerie. Berlin, 1745.
34. *Эйлер Л.* Исследования по баллистике. М.: Физматгиз, 1961. 590 с.
35. *Михайлов Г. К.* Леонард Эйлер.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 1, с. 3—26.

УДК 531/534(091)

*И. А. Тюлина*

# О ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭЙЛЕРА

Многие из ранних набросков и размышлений Эйлера касались проблем гидравлики. Первое публичное выступление двадцатилетнего Эйлера в Петербургской академии наук в августе 1727 г. было посвящено его работе «О количестве истекающей из отверстия воды». В записной книжке, начатой Эйлером еще в Базеле, он набросал обширный план исследований по гидравлике (37 пунктов); там же имеется неполный план предполагаемого «Трактата о движении жидкостей и твердых тел в жидкостях» [1, с. 22—23]. Однако Эйлер осуществил лишь некоторые из своих замыслов и значительно позднее. Так, например, два пункта плана, указанного выше, Эйлер реализовал в 50-х годах XVIII в. Эти пункты близки по своей проблематике и названы им так: «О спуске жидкостей в неизменно наполненных продырявленных сосудах», «О спуске жидкостей в опорожняющихся продырявленных сосудах».

Обе задачи касаются истечения жидкости из отверстий в боковых стенках сосудов и реакции вытекающей струи. Это чисто теоретические проблемы в серии работ Эйлера [2—6]. Их решение, связанное с исследованием ряда практических задач, привело к созданию Эйлером проектов водометного судового движителя, заменяющего или дополняющего действие ветра на парус корабля, и промышленной гидрореактивной турбины. Краткие описания этих проектов встречаются в отечественной и зарубежной литературе. В предлагаемой статье основное внимание уделяется зарождению важнейших представлений о внутреннем давлении в жидкости, о реакции жидкости, протекающей в полости твердого тела, на поверхность полости, о новом в XVIII в. методе кинетостатики, введенных и развитых далее Эйлером. Эти исследования Эйлера соответствуют определенному циклу работ современной механики тел переменной массы.

## ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПО ЭЙЛЕРУ

Абстрактной моделью движущегося тела переменного состава (в том смысле, что состав входящих в систему частей изменяется, даже если общая масса системы постоянна по времени) в работах Эйлера является трубка переменного сечения $EEFF$, по которой протекает несжимаемая жидкость — вода [6]. Течение считается *одномерным*. Силы, действующие на систему, Эйлер разлагает на «актуальные», обозначая их результирующую через $P$ (в современном понимании это активные силы, например, вес), и силы реакции, обозначенные через $R$. Эйлер вводит также «требуемые силы» $Q$, которые понадобились бы для воспроизведения истинного движения жидкой массы, если бы она была свободна; для каждого элемента воды $Q$ равно произведению массы на его ускорение. Дифференциальные уравнения движения Эйлер получает (см. [7]), используя в *связанном движении* системы принцип эквивалентности актуальных сил силам требуемым, т. е. $Q=P+R$. Этот принцип назван Лагранжем именами Германа и Эйлера и является иной формой принципа Д'Аламбера.

Эйлер впервые вводит различие между весовым давлением жидкости и ее внутренним давлением (будь то в состоянии покоя или в движении). В § 90 работы [6] он пишет о состоянии сжатия воды в произвольном сечении трубки: «Хотя вода не допускает уменьшения своего объема, однако состояние сжатия может быть сравнимо с тем состоянием, которое вода имеет на различных глубинах». Несколько далее (в § 93) и в других работах, например в [5, § 43], Эйлер пишет о том, что в некотором произвольном сечении трубки $MM$ вода движется под действием силы тяжести и силы сжатия элементов воды; за счет этого совместного действия элемент получает ускорение по направлению трубки. Чтобы не смешивать эти два фактора, Эйлер вводит для величины давления символ $p$, а затем обозначения (рис. 1): $\sigma$ — площадь поперечного сечения $MM$ трубки; $v$ — скорость течения воды в этом сечении; $\rho=1$ — плотность воды; $\varphi$ — угол между направлением скорости $v$ и осью $Oy$. Считая элемент дуги средней линии трубки равным $ds=vdt$, Эйлер получает для элементарной массы воды, протекающей через сечение $MM$ за время $dt$, выражение $dm=\sigma ds$. Далее он составляет дифференциальное уравнение движения элемента с массой $dm$ вдоль средней линии трубки:

$$dm\,\frac{dv}{dt}=g\,dm\cos\varphi-\sigma\frac{\partial p}{\partial s}\,ds.$$

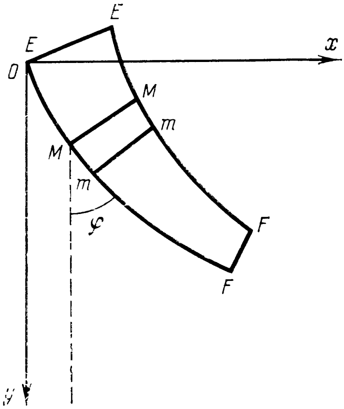


Рис. 1

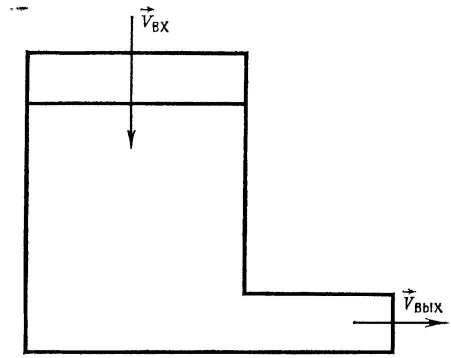


Рис. 2

Видоизменяя левую часть этого уравнения. Эйлер находит, что

$$\sigma ds\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}\right)=g\sigma\cos\varphi ds-\sigma\frac{\partial p}{\partial s}ds.$$

При интегрировании элементарных сил по всей длине трубки от сечения $EE$ до выходного сечения $FF$ Эйлер использует два свойства: секундный расход жидкости $\dot{m}=\sigma v$ постоянен в любом сечении трубки и не зависит от переменной интегрирования $s$; величина площади произвольного сечения $MM$ (т. е. $\sigma$) не зависит от времени. Тогда [1]

$$\sigma\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\sigma v)=\ddot{m}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\ddot{m}\int_E^F ds+\dot{m}\int_E^F\frac{\partial v}{\partial s}ds=\int_E^F g\sigma\cos\varphi ds-\int_E^F\sigma\frac{\partial p}{\partial s}ds.$$

Интеграл $-\int_E^F\sigma\frac{\partial p}{\partial s}ds$ равен результирующей всех поверхностных сил для жидкой массы, это есть реакция трубки на воду. Используя приведенные выше два свойства, Эйлер находит выражение для горизонтальной составляющей $X$ реакции протекающей воды на трубку:

$$X=-\{\ddot{m}\,[x]_E^F+\dot{m}\,[v_x]_E^F\},$$

где $x$ — проекция на $Ox$ точек линии $EF$; $v_x$ — проекция скорости течения жидкости на ось $Ox$. Для установившегося течения воды

[1] Обозначения $\dot{m}$ и $\ddot{m}$ наши.— *И. Т.*

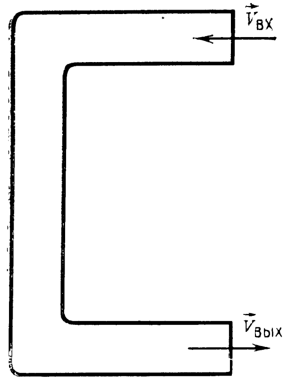


*Рис. 3*

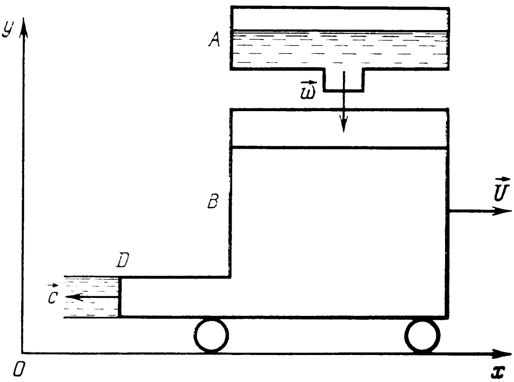


*Рис. 4*

в трубке $\ddot{m}=0$, тогда сила реакции равна

$$X = \dot{m}\,(v_{x\,вх} - v_{x\,вых}).$$

Последнее уравнение можно сопоставить с современным уравнением движения центра масс ракеты (например, [8, с. 47]) при условии, что в случае движения ракеты нет присоединяющихся масс.

Формулы Эйлера, относящиеся к реактивному движению тел переменной массы, все чаще приводятся не только в специальной, но и в учебной литературе. Так, например, в широко известном «Курсе теоретической механики» Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье приведенное выше уравнение Эйлера дано для случая установившегося одномерного движения трубки, когда вторая производная массы по времени равна нулю [9, с. 74].

Эйлер рассмотрел несколько схем устройства водометного судового движителя и гидрореактивной турбины, выявив наиболее рациональные, с его точки зрения, формы рабочих каналов жидкости. Мы приведем только две схемы водометного судового движителя Эйлера (рис. 2, 3). Наиболее выгодным Эйлер считал вариант с П-образным расположением труб водомета (см. рис. 3). Затем он ввел в схему такого водомета поршень и клапаны, необходимые при заборе воды из днища корабля.

Рассмотрим некоторые исследования Эйлера о поступательном движении гидрореактивного корабля или водомета как пример движения тела переменной массы.

## ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПО ЭЙЛЕРУ

Идея о реакции вытекающей жидкости принадлежит И. Ньютону. Он рассмотрел возможность использования реактивной струи жидкости, вытекающей в горизонтальном направлении из бокового отверстия сосуда.

В 1738 г. Д. Бернулли в трактате «Гидродинамика» развил эту идею Ньютона. Тогда же Д. Бернулли, а затем и Л. Эйлер (1753 г.) предложили проекты гидрореактивного судового движителя, или водомета, Эйлер разработал несколько вариантов устройства водомета [6]. Для водометов различных схем он нашел величину реактивной тяги и оптимальные формы трубопроводов. Соответствующая задача для простейшей схемы водометного движителя формулируется Эйлером так.

Из неподвижного, связанного с системой координат $xOy$ резервуара $A$ (рис. 4) через донное отверстие вытекает струя воды: площадь поперечного сечения отверстия $S$, скорость истечения воды $w=\text{const}$. Вода вливается в цистерну $B$, которая может перемещаться в горизонтальном направлении за счет реакции воды, вытекающей в горизонтальном направлении из бокового патрубка $D$. Подвижную систему — цистерна с протекающей в ней водой— назовем водометом. Обозначим: $M_{\text{ц}}$ — масса цистерны без воды; $U$ — скорость движения цистерны; $\sigma_{\text{вых}}$ — площадь поперечного сечения патрубка $D$; $c$ — относительная скорость истечения воды. Ставится задача: определить скорость движения водомета как функцию времени. Эту задачу Эйлер решает, привлекая введенный им принцип $Q=P+R$.

При дальнейшем изложении выкладок Эйлера мы используем современные обозначения и терминологию. Введем количество движения водомета и обозначим эту величину через $\mathbf{q}$. Эта величина состоит из трех слагаемых: $\mathbf{q}_{\text{ц}}$ — количество абсолютного движения пустой цистерны; $\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{пер}}$ — количество переносного движения воды, наполняющей цистерну в данный момент; $\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{отн}}$ — количество относительного движения воды, протекающей через цистерну.

Применяя к водомету теорему об импульсе сил и изменении количества движения за время $\Delta t$, получаем равенство

$$\Delta(\mathbf{q}_{\text{ц}}+\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{пер}}+\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{отн}})=\Delta m_{\text{вх}}\mathbf{v}_{\text{вх}}-\Delta m_{\text{вых}}\mathbf{v}_{\text{вых}}+\mathbf{F}\Delta t+\mathbf{P}\Delta t,$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ — сила внешнего сопротивления водомета и его вес соответственно. В современной дифференциальной форме эта теорема записывается так:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{\text{ц}}+\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{пер}}+\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{отн}})=\dot{m}_{\text{вх}}\mathbf{v}_{\text{вх}}-\dot{m}_{\text{вых}}\mathbf{v}_{\text{вых}}+\mathbf{F}+\mathbf{P}.$$

Рассмотрим четыре из всех случаев движения водомета, исследованных Эйлером.

**1. Струя, вытекающая из резервуара $A$ (подливаемая в цистерну вода), вертикальна. Движение воды в цистерне установившееся.** В этом случае $\dot{m}_{\text{вх}}=\dot{m}_{\text{вых}}=\dot{m}$, где $\dot{m}_{\text{вх}}$, $\dot{m}_{\text{вых}}$, $\dot{m}$ — секундный расход массы во входном, выходном и произвольном сечениях цистерны соответственно. Тогда масса цистерны с протекающей по ней водой постоянна, высота уровня воды $h$ в цистерне не изменяется, так как притекающая и вытекающая в секунду массы воды одинаковы. Течение воды в цистерне осредненно установившееся, поэтому справедливо соотношение

$$d\mathbf{q}^{\text{в}}_{\text{отн}}/dt = 0.$$

Если цистерна имеет ускорение, то можно считать, что оно не влияет на относительную скорость истечения $c$ воды из патрубка $D$ и эта скорость определяется по формуле Торричелли $c = \sqrt{2gh}$.

Абсолютная скорость вытекающей из патрубка $D$ цистерны воды будет $\mathbf{v}_{\text{вых}} = \mathbf{U} + \mathbf{c}$. В проекции на ось $Ox$ $v_{\text{вых}} = U - c$. Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$M\frac{dU}{dt} = \dot{m}(c - U) - F,$$

где $M$ — масса водомета.

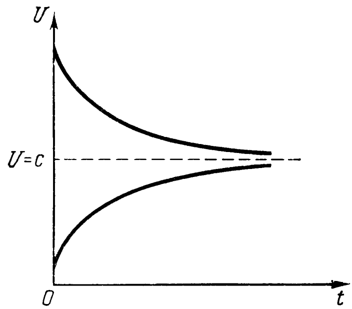

Рис. 5

Предположим, что зависимость сопротивления от скорости линейная: $F = \alpha U + \beta$. Тогда последнее уравнение запишем так:

$$M\frac{dU}{dt} = \dot{m}(c - U) - \alpha U - \beta.$$

Это неоднородное линейное уравнение имеет решение:

$$U = C(1 - e^{-kt}) + U_0 e^{-kt}, \quad C = \frac{\dot{m}c - \beta}{\dot{m} + \alpha}, \quad k = \frac{\dot{m} + \alpha}{M},$$

где $C$, $k$, $\alpha$, $\beta$ — постоянные.

При $c > \beta/\dot{m}$ кривая зависимости $U$ скорости цистерны от времени имеет вид, представленный на рис. 5.

**2. В условиях случая 1 принимается $F = 0$.** В этом случае в дифференциальном уравнении движения системы следует положить $F = 0$. Тогда

$$M\frac{dU}{dt} = -\dot{m}(U - c), \quad \frac{dU}{U - c} = -\frac{\dot{m}}{M}dt, \quad \frac{\dot{m}}{M} = \lambda.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\ln|U - c| = -\lambda t + \text{const}, \quad |U - c| = \text{const} \cdot e^{-\lambda t}.$$

При начальных условиях $t = 0$, $U = U_0 > c$ частное решение запишем в виде

$$U = c(1 - e^{-\lambda t}) + U_0 e^{-\lambda t}.$$

При $U_0 > c$ зависимость $U$ от $t$ приведена на рис. 6. При $U_0 < c$ зависимость $U(t)$ дана на рис. 7. В этом случае цистерна движется ускоренно.

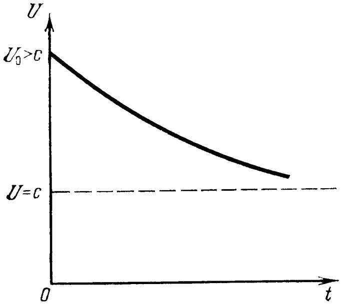


Рис. 6

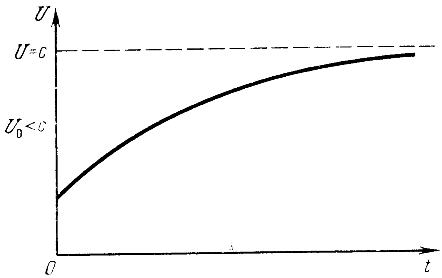


Рис. 7

3. **Струя, вытекающая из резервуара $A$ (подливаемая вода), не является вертикальной. Движение воды в цистерне установившееся; $F=\text{const}$.** Подобно устройству направляющего аппарата реактивной турбины, предложенного Эйлером, можно сконструировать и резервуар $A$, из которого вода поступает в цистерну водомета. Выгодно, чтобы в донном отверстии был сделан патрубок, который придавал бы струе некоторое отклонение от вертикали. Тогда скорость истечения из резервуара $A$ имеет компоненты $w_x$ и $w_y$. Допустим, что полезная нагрузка или сопротивление, преодолеваемое при движении водометного движителя, таково, что скорость $U$ имеет некоторое среднее значение при установившемся режиме работы движителя. Выходные патрубки резервуаров $A$, под которыми перемещается цистерна, устанавливаются так, чтобы горизонтальная составляющая скорости воды в струе $w_x$ была равна скорости $U$ цистерны, т. е. $w_x=U$. Принимается также, что сопротивление за счет полезной нагрузки не изменяется и равно $F_0$. Тогда дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$M\frac{dU}{dt}=\dot{m}U-\dot{m}(U-c)-F_0=\dot{m}c-F_0=\text{const}.$$

Откуда

$$U=\frac{\dot{m}c-F_0}{M}t+U_0.$$

Скорость цистерны может быть близка к постоянной, если $(\dot{m}c-F_0)/M$ близко к нулю, т. е. если сопротивление полезной нагрузки приблизительно равно $\dot{m}c$; $F_0\approx\dot{m}c$. Устройство гидрореактивного водометного движителя у Эйлера было иным, но сама идея направляющего аппарата в гидрореактивной турбине впервые высказана Эйлером. (В случае 3 используется идея Эйлера для водомета.)

4. **Струя, вытекающая из резервуара $A$ (вливаемая в цистерну вода), вертикальна. Течение неустановившееся.** Из двух воз-

можных случаев — уровень жидкости в цистерне понижается и уровень жидкости в цистерне повышается — наибольший интерес представляет второй. В этом случае секундный приток массы воды превышает секундный ее расход. Это возможно до момента заполнения цистерны водой до краев. Назовем этот случай «переливом»; условие «перелива»: $\dot{m}_{вх} > \dot{m}_{вых}$. Мгновенная масса цистерны в момент времени $t$ выражается так:

$$M(t) = M_ц + \int\limits_0^t (\dot{m}_{вх} - Ac)\, dt,$$

где $A = \rho\sigma_{вых}$ — произведение плотности воды на площадь поперечного сечения выходного патрубка (постоянно); $c$ — относительная скорость истечения воды; $M_ц$ — масса пустой цистерны.

Если ввести предположение[2] о медленном повышении уровня воды в цистерне, то можно считать $\mathbf{q}^в_{отн}$ — количество относительного движения воды в цистерне — постоянной величиной, т. е. $d\mathbf{q}^в_{отн}/dt = 0$.

Тогда приращение за время $\Delta t$ суммарного количества движения системы выражается так:

$$(M + \Delta M)(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) - M\mathbf{U} = \Delta (m_{вх}\mathbf{v}_{вх}) - \Delta (m_{вых}\mathbf{v}_{вых}) + \mathbf{F}\Delta t + \mathbf{P}\Delta t$$
$$\Delta M = \Delta m_{вх} - \Delta m_{вых}.$$

Левая часть равенства после отбрасывания величин второго порядка малости по сравнению с $\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ примет вид $\Delta M\mathbf{U} + M\Delta\mathbf{U}$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$M \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \dot{m}_{вх}(\mathbf{v}_{вх} - \mathbf{U}) - \dot{m}_{вых}(\mathbf{v}_{вых} - \mathbf{U}) + \mathbf{F} + \mathbf{P}.$$

Это уравнение называют уравнением И. В. Мещерского, хотя оно выведено впервые в 1753 г. Эйлером для системы твердая оболочка — жидкое наполнение переменной массы (жидкость идеальная). Заметим, что Эйлер не вводил ограничения о постоянстве количества относительного движения жидкости, протекающей в полости твердого тела, и его уравнение имело более общий вид.

Полагая $F = 0$, запишем последнее соотношение в проекции на ось $Ox$:

$$M \frac{dU}{dt} = \dot{m}_{вх}(0 - U) + \dot{m}_{вых}(-v_{вых} + U), \qquad c = U - v_{вых},$$

$$M \frac{dU}{dt} = -\dot{m}_{вх}U + Ac^2, \qquad \dot{m}_{вых} = Ac.$$

Введем выражение для мгновенной массы цистерны в момент

---

[2] Это предположение принадлежит И. Н. Звереву. Автор благодарна И. Н. Звереву за ряд полезных советов о трактовке выкладок Эйлера в современной форме.

времени $t$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\left[M_{ц} + \int_0^t (\dot{m}_{вх} - Ac)\, dt\right] \frac{dU}{dt} = -\dot{m}_{вх} U + Ac^2.$$

На основе предположения о постоянстве количества относительного движения воды в цистерне применим формулу Торричелли для выражения переменной величины $c$: $c^2 = 2gh(t)$. Высота уровня жидкости $h(t)$ в цистерне равна объему жидкости, деленному на площадь поперечного сечения цистерны $S_ц$, принимаемой за прямой цилиндр:

$$h(t) = \frac{M_в}{\rho S_ц},$$

$$c^2 = \frac{2g}{S_ц} \int_0^t (\dot{m}_{вх} - Ac)\, dt, \qquad \rho = 1.$$

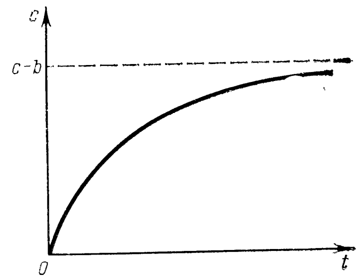


Рис. 8

Окончательно получаем

$$\int_0^t (\dot{m}_{вх} - Ac)\, dt = \frac{S_ц}{2g} c^2.$$

Дифференцирование по времени последнего равенства дает

$$\frac{2g}{S_ц} (\dot{m}_{вх} - Ac) = 2c \frac{dc}{dt}.$$

Преобразуя и интегрируя это соотношение, получаем:

$$\int_{c(0)}^{c(t)} \frac{2c\,dc}{c - b} = -a \int_0^t dt, \qquad a = \frac{2gA}{S_ц}, \qquad b = \frac{\dot{m}_{вх}}{A} = \mathrm{const},$$

$$c(t) \geqslant 0, \; c(0) = 0.$$

Поэтому искомая зависимость $c$ от $t$ будет следующей:

$$c + b \ln\left|1 - \frac{c}{b}\right| = -\frac{a}{2} t.$$

При $t \to \infty$ $\ln|1 - c/b| \to -\infty$, т. е. относительная скорость истечения воды $c$ стремится к величине $b$. Качественно искомая зависимость $c(t)$ представлена на рис. 8. Этот случай имеет место, когда высота боковых стенок цистерны $h_{\max} \geqslant 2g/b^2$.

Если же $h_{\max} < 2g/b^2$, то, начиная с момента достижения величиной $c$ значения $b_1 = \sqrt{2gh_{\max}}$, относительная скорость воды $c$ перестает увеличиваться и будет оставаться постоянной: $c = b_1 =$

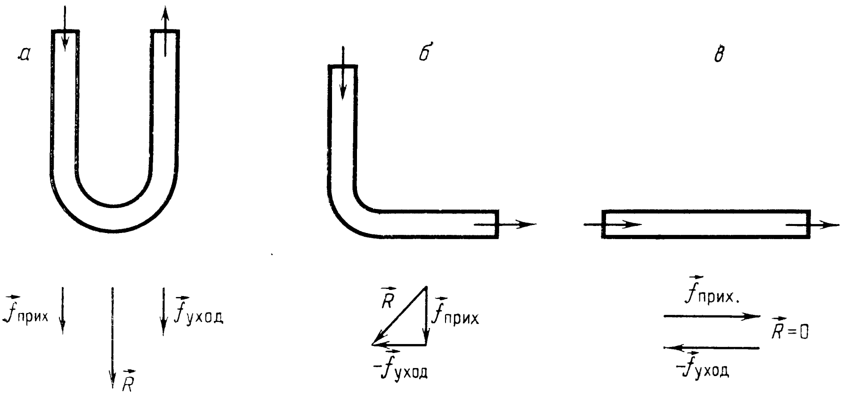


*Рис. 9*

$=\text{const}$. При этом дифференциальное уравнение движения системы примет вид

$$M\frac{dU}{dt} = -\dot{m}_{вх}U + \dot{m}_{вых}c = \dot{m}(c-U), \qquad \dot{m}_{вх} = \dot{m}_{вых} = \dot{m}.$$

Таким образом, при достижении величиной $c$ значения $b_1$ решение задачи о движении системы сводится к рассмотренному ранее случаю 2 об установившемся течении воды внутри подвижной цистерны.

Исследования Эйлером водомета, гидрореактивной турбины нашли отражение в современных учебниках механики. Например, в книге М. А. Айзермана «Классическая механика» (1974 г.) [10] обсуждаются рекомендации Эйлера по устройству реактивных двигателей (водометного движителя, турбины и других возможных вариантов), дано подробное изложение важнейших результатов Эйлера. Соответствующие иллюстрации воспроизведены [3] на рис. 9.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов Г. К.* К переезду Леонарда Эйлера в Петербург.— Изв. АН СССР. ОТН, № 3, 1957, с. 3—37.
2. *Euler L.* Application de la machine hydraulique de M. Segner à toutes sorte d'ouvrage et ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement.— Mém. de l'Acad. de Sci. de Berlin, 1753, t. 7, p. 271—304.
3. *Euler L.* Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par Mr. Segner prof. á Göttingene.— Histoire de l'Acad. de Sci. de Berlin, 1752, t. 6, p. 311—354.
4. *Euler L.* Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau.— Mém. de l'Acad. de Sci. de Berlin, 1756, t. 10, p. 227—295.

[3] В наших обозначениях $f=\sigma v^2$.— *И. Т.*

5. *Euler L.* De motu et reactiones aquae per tubos mobiles transfluentis.— Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 1761, t. 7, p. 312—335.
6. *Euler L.* Mémoire sur la manière la plus avantageuse de supplement a l'action du vent.— Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Acad. des Sci. Paris, 1771, t. 8, p. 1—42.
7. *Тюлина И. А.* О работах Л. Эйлера по теории гидрореактивного судна и водяной турбины.— Вопр. истории естествознания и техники, 1957, вып. 4, с. 34—46.
8. *Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П.* Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 307 с.
9. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. Ч. II. 580 с.
10. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Физматгиз, 1974. 367 с.

УДК 531/534(091)

*Р. Е. Мотылевская*

# РАБОТЫ П. А. ШИФФА ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача об определении колебаний в упругом твердом теле после получения системы дифференциальных уравнений теории упругости в начале XIX столетия была приведена к аналитической задаче об определении функций, выражающих проекции смещения. Эти функции должны были удовлетворять дифференциальным уравнениям колебаний упругого тела, а также некоторым условиям на его поверхности.

Если массовые силы отсутствуют, а граничная поверхность тела свободна от напряжений, то движения, которые при этом могут иметь место, называются свободными колебаниями. Они определяются решениями уравнений:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

которые на граничной поверхности тела удовлетворяют условиям следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,\nu)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(z,\nu)=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(y,\nu)+\frac{\partial v}{\partial z}\cos(z,\nu)=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(y,\nu)+\frac{\partial w}{\partial z}\cos(z,\nu)=0.$$

Свободные колебания изотропного упругого тела были темой многочисленных исследований XIX в. Д. Пуассон первым обратил внимание на характерную особенность системы дифференциальных уравнений колебаний упругого тела. Он показал, что возмущение в малой окрестности тела влечет за собой возникновение волн двух типов. Результаты, полученные Пуассоном, содержатся в двух его мемуарах, опубликованных в 1829 и 1831 гг.

Работы М. В. Остроградского о распространении малых колебаний в бесконечной упругой среде, доложенные в 1829—1832 гг. и опубликованные в 1831 и 1833 гг., по тематике близки к работам Пуассона, а по глубине исследований в некоторой мере превосходят их.

И Пуассон, и Остроградский пользовались методом, состоящим в синтезе решений простого гармонического типа, и получили решения, определяющие смещения в любой момент по заданному начальному значению смещений и скоростей.

Эти исследования были продолжены Стоксом (1849), который показал, что два типа волн Пуассона есть волны безвихревого расширения и волны равнообъемного искажения формы.

Много внимания уделялось в то время решению частных задач. Пуассон в упомянутых мемуарах дал решение проблемы свободных колебаний сферы. Клебш (1862) по методу Пуассона построил общую теорию. В эту теорию входит обобщение понятия «нормальных координат» на случай системы с бесконечно большим числом степеней свободы, введение соответствующих фундаментальных функций и доказательство тех свойств этих функций, с которыми приходится иметь дело при разложении любой заданной функции. Первоначально уравнения движения упругих тел использовались для решения одномерных задач о динамическом растяжении — сжатии и кручении стержней, изгибе балок и о колебаниях круговых цилиндров и сфер. Изучение распространения волн в упругой среде при помощи уравнений колебательного движения требовало иного подхода. Необходимо было исследовать вопрос интегрирования системы уравнений движения упругих тел.

В конце XIX столетия была напечатана интересная, но не ставшая широкоизвестной работа нашего соотечественника П. А. Шиффа, которая и явилась первой работой в этом направлении. Имя П. А. Шиффа в литературе по теории упругости встречается очень редко. В монографии «Применение комплексной переменной в теории упругости» Г. В. Колосов впервые делает ссылку на курс лекций по теории упругости П. А. Шиффа. Во второй раз имя Шиффа названо Е. Н. Ракчеевым в «Очерках о развитии теории упругости в России во второй половине XIX — начале XX столетий» по поводу его работы [1]. В книге А. И. Лурье «Теория упругости» названа работа П. А. Шиффа [2], в которой было установлено свойство обобщенной ортогональности однородных решений в применении к задаче равновесия упругого кругового цилиндра. Указанием на нее А. И. Лурье обязан Б. М. Нуллеру. Независимо от Шиффа свойство ортогональности однородных решений в применении к задачам изгиба прямоугольной плиты было установлено П. Ф. Папковичем в 1941 г. Интересно, что исследования П. А. Шиффа и П. Ф. Папковича пересеклись еще раз в вопросе общего представления решений системы уравнений равновесия упругого твердого тела с помощью гармонических функций.

П. А. Шифф преподавал в артиллерийских училищах, в Михайловской артиллерийской академии. Там он читал курсы теоретической механики, теории упругости, теории определенных интегралов, вариационного исчисления, интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Он принимал активное участие в образовании Санкт-Петербургского математического общества и в его работе, был бессменным секретарем общества до 1903 г. 15 декабря 1890 г. П. А. Шифф сделал доклад на заседании этого общества «Об интегрировании системы общих линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_n} + \Delta u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \alpha \text{ — константа».}$$

В 1891 г. была опубликована его работа [3], в которой он пишет: «Мы представляем эту работу с целью выразить функции $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \Delta u_1 = \tau(u_1) + X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \Delta u_2 = \tau(u_2) + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_n} + \Delta u_n = \tau(u_n) + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\theta = b_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

$$\Delta u_i = b_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + b_2 \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial x_2^2} + \ldots + b_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n^2},$$

$$\tau(u_i) = a_1 \frac{\partial u_i}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \ldots + a_p \frac{\partial^p u_i}{\partial t^p};$$

$\alpha$, $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$ — константы; $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_p$ — константы или функции от $t$, с помощью других функций $\omega_1$, $\omega_2$, $\ldots$, $\omega_n$ удовлетворяющих уравнениям $\Delta\omega_i = \tau(\omega_i)$».

Для интегрирования системы (1) он выбирает $u_1$, $u_2$, $\ldots$, $u_n$ в виде

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\sigma_{1n}}{\partial x_n},\\
u_2 &= \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\sigma_{2n}}{\partial x_n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \frac{\partial\sigma_{n1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{2n}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\sigma_{nn}}{\partial x_n},
\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\sigma_{ij}$ — дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\Delta\sigma_{ij} = \tau(\sigma_{ij}), \quad b_i\sigma_{ij} = -b_j\sigma_{ji}.$$

Подставив выражения (2) в систему (1), получаем результат:

$$\begin{aligned}
\alpha\theta + \Delta\sigma_{11} &= \tau(\sigma_{11}) + \int X_1 dx_1 + \varphi_1(x_1, \ldots, x_n),\\
\alpha\theta + \Delta\sigma_{22} &= \tau(\sigma_{22}) + \int X_2 dx_2 + \varphi_2(x_1, \ldots, x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha\theta + \Delta\sigma_{nn} &= \tau(\sigma_{nn}) + \int X_n dx_n + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Записав эти уравнения в более удобной форме, положив

$$x_1 = y_1\sqrt{b_1}, \quad x_2 = y_2\sqrt{b_2}, \quad \ldots, \quad x_n = y_n\sqrt{b_n},$$

он вычитает от всех уравнений первое уравнение

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma_{22} - \sigma_{11}) &= \tau(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + (Y_2 - Y_1),\\
\Delta(\sigma_{33} - \sigma_{11}) &= \tau(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + (Y_3 - Y_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta(\sigma_{nn} - \sigma_{11}) &= \tau(\sigma_{nn} - \sigma_{11}) + (Y_n - Y\ )
\end{aligned}$$

и получает

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} + \omega_2 + \frac{1}{A}\int^n \frac{Y_2' - Y_1'}{r^{n-2}}\, dy_1' dy_2' \ldots dy_n',$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{11} + \omega_3 + \frac{1}{A}\int^n \frac{Y_3' - Y_1'}{r^{n-2}}\, dy_1' dy_2' \ldots dy_n',$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} + \omega_n + \frac{1}{A}\int^n \frac{Y_n' - Y_1'}{r^{n-2}}\, dy_1' dy_2' \ldots dy_n',$$

где $\Delta\omega_i = \tau(\omega_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$;

$$\theta = \Delta\sigma_{11}' + \frac{\partial^2\omega_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\omega_3}{\partial y_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2\omega_n}{\partial y_n^2} + F;$$

$$F = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\int^n \frac{Y_2' - Y_1'}{r^{n-2}}\, dy_1' dy_2' \ldots dy_n'\right).$$

Подстановка полученных соотношений в первое уравнение системы дает

$$(\alpha + 1)\,\Delta\sigma_{11} - \alpha\left(\frac{\partial^2\omega_2}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\omega_n}{\partial y_n^2}\right) = \tau(\sigma_{11}) + Y_1 - \alpha F.$$

Обозначая через $\varepsilon$ интеграл уравнения

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\partial^2\omega_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\omega_3}{\partial y_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2\omega_n}{\partial y_n^2},$$

он находит

$$\sigma_{11} = \omega_1 + \beta\varepsilon - \frac{\alpha(1+\beta)}{2(1+\alpha)}\left(y_2\frac{\partial\omega_2}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial\omega_3}{\partial y_3} + \ldots + y_n\frac{\partial\omega_n}{\partial y_n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{A(\alpha+1)}\int^n \frac{Y_1' - \alpha F'}{r^{n-2}}\, dy_1' dy_2' \ldots dy_n',$$

где $\beta = 0$, если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ не зависят от $t$, и $\beta = -1$, если эти функции зависимы от $t$, $\omega_1$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha + 1)\,\Delta\omega_1 = \tau(\omega_1).$$

Искомые функции он представил в виде

$$u_1 = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\sigma_{1n}}{\partial x_n} + \beta\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1} -$$
$$- \frac{\alpha(1+\beta)}{2(1+\alpha)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial\omega_n}{\partial x_n}\right) + \xi_1,$$

$$u_2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \sigma_{2n}}{\partial x_n} + \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} -$$

$$- \frac{\alpha(1+\beta)}{2(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( x_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} \right) + \xi_2,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$u_n = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \sigma_{n1}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \sigma_{n,n-1}}{\partial x_{n-1}} + \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} -$$

$$- \frac{\alpha(1+\beta)}{2(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_n} \left( x_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_n} + \ldots + x_n \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} \right) + \xi_n,$$

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{A} \int^n \frac{Y_i' - Y_1'}{r^{n-2}} dy_1' dy_2' \ldots dy_n' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha+1)A} \int^n \frac{Y_1' - \alpha F'}{r^{n-2}} dy_1' dy_2' \ldots dy_n' \right],$$

$$\Delta\sigma_{ij} - \tau(\sigma_{ij}), \qquad i \gtrless j, \qquad b_i \sigma_{ij} = -b_j \sigma_{ij},$$

$$\Delta\omega_i = \tau(\omega_i), \qquad (\alpha+1)\Delta\omega_1 = \tau(\omega_1),$$

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial y_n^2}.$$

При $n=3$, $\tau(u) = a_2(\partial^2 u/\partial t^2)$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ он получает уравнение движения упругого твердого тела.

В 1885 г. была издана книга Буссинеска «Применение потенциалов в исследованиях равновесия и движения упругих тел». Это была одна из самых значительных книг того времени по теории упругости. В ней впервые дано общее представление решений системы дифференциальных уравнений равновесия упругого тела с помощью функций, которые при отсутствии объемных сил удовлетворяют бигармоническому уравнению.

При $\tau(u) = 0$, $n=3$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ общая задача, рассмотренная Шиффом, представляла собой задачу равновесия упругого твердого тела, которую и рассматривал Буссинеск в своей книге. Проблема интегрирования дифференциальных уравнений колебания, рассмотренная П. А. Шиффом, стала обобщением проблемы интегрирования дифференциальных уравнений равновесия упругого твердого тела, которой в то время было посвящено достаточно много исследований, в том числе и Буссинеска.

В 1891 г. появилась работа П. А. Шиффа [1], в которой автор применил свой метод интегрирования системы для решения частной задачи о действии выстрела из орудия на его лафет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шифф П. А.* Опыт приложения теории упругости к изучению действий выстрела на лафет.— Зап. Имп. акад. наук. СПб., 1891, т. 67, с. 23.
2. *Schiff P. A.* Sur l'équilibre d'un cylindre élastique.— J. math. pures et appl. Sér 3, 1883, t. 9, p. 407.
3. *Schiff P. A.* Sur l'integration d'un système d'équations différentielles lineairen simultanées aux dérivees partieles d'ordre supérieur.— Bull. de l'Acad. imp des sci. de St.-Pétersbourg Nouv. sér. II, 1891, t. 34, p 30

УДК 531/534(091)

*А. Т. Григорьян*

# РАЗРАБОТКА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ АВИАЦИИ В РАБОТАХ Н. Е. ЖУКОВСКОГО И С. А. ЧАПЛЫГИНА

Важнейшим результатом развития механико-математической мысли в России в конце XIX — начале XX в. было появление классических работ по гидродинамике и аэродинамике, принадлежащих Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину.

В 1868 г. Жуковский окончил физико-математический факультет Московского университета. С 1872 г. он преподавал в Московском высшем техническом училище сначала математику, а затем с 1874 по 1919 г. механику. В 1886 г. он возглавил кафедру механики в Московском университете. Преподавательская работа в двух крупнейших учебных заведениях России отражала в некоторой мере основное направление научной деятельности Жуковского, его стремление увязать развитие научных и технических идей и на основе общих теоретических построений получать решения задач, выдвигаемых практикой. Жуковскому принадлежит около 200 работ в области механики и ее приложений к различным задачам техники.

Особое место в исследованиях Жуковского занимает разработка теоретических основ авиации. Труды Жуковского и Чаплыгина в этой области были источником основных идей, на которых строится современная авиационная наука. Вопросами полета на аппаратах тяжелее воздуха Жуковский заинтересовался еще в конце 80-х годов. В эти годы одной из основных проблем при решении задач такого полета считалась проблема подъемной силы. Исследователи главным образом на основе эксперимента стремились в то время решить задачу о подъемной силе крыла. Было получено большое число экспериментальных данных, пригодных, однако, для оценки величины подъемной силы только в частных случаях. Попытки оценить величину подъемной силы на основе теоретических предпосылок и, в частности, на основе господствовавшей в то время теории струйного течения приводил к результатам, значительно отличающимся от опытных.

Жуковский считал необходимым первоначально установить физическую картину подъемной силы. В работе «К теории летания» (1890) он высказал мысль о том, что подъемная сила может быть результатом некоторого вихревого движения, обусловленного вязкостью жидкости.

В 1890—1891 гг. Жуковский изучал вопросы, связанные с решением задачи полета на аппаратах тяжелее воздуха. Уже в то время он обратил внимание на проблемы устойчивости самолета. В статье «О парении птиц» (1891) им впервые рассмотрена задача о динамике полета на аппаратах тяжелее воздуха и установлены основные формы движения самолета. Жуковский теоретически обосновал возможность осуществления сложных движений самолета в воздухе, в частности «мертвой петли» (впервые «мертвая петля» была выполнена в 1913 г. русским военным летчиком П. Н. Нестеровым). В той же статье он исследовал вопрос о центре давления аэродинамических сил и показал, что положение центра давления изменяется с изменением угла атаки.

В эти же годы Жуковский ставит эксперименты с целью изучения закономерности изменения положения центра давления крыла с простейшим профилем — плоской пластинкой. Уже тогда он отметил важность исследования вопросов устойчивости посредством испытаний планеров и змеев. Он изучал также вопрос о тяге винта, рассмотрел возможность создания летательных аппаратов тяжелее воздуха с машущими крыльями, целесообразность применения многовинтовых геликоптеров, прочность гребных винтов. Он определил условия наиболее экономичного полета самолета и в 1897 г. предложил метод вычисления наивыгоднейшего угла атаки (в работе «О наивыгоднейшем угле наклона аэропланов»).

Жуковский придавал большое значение постановке опытов в аэродинамических трубах. В его университетской лаборатории в 1902 г. была построена аэродинамическая труба. В 1904 г. по идее Жуковского был основан Аэродинамический институт в Кучино (под Москвой), оборудованный новейшими по тому времени приборами. В этом институте были проведены исследования винтов, пластинок, изучены многие вопросы, связанные с постановкой опытов в аэродинамических трубах, получен атлас аэродинамических спектров обтекания различных тел и т. д. Следует отметить, что Россия одной из первых стала широко применять метод испытаний в аэродинамических трубах, т. е. один из основных экспериментальных методов современной аэродинамики.

Наблюдения над полетом моделей самолетов и змеев, многосторонние экспериментальные исследования аэродинамических сил, действующих на простейшее крыло — пластинку, изучение динамики взаимодействия поступательного и вращательного движений тела и, конечно, глубокие изыскания в области классической гидродинамики позволили Жуковскому в 1905 г. дать исчерпывающее решение задачи о подъемной силе. В замечательной работе «О присоединенных вихрях» (1906) он установил, что подъемная сила возникает в результате обтекания потоком неподвижного присоединенного вихря или системы вихрей, которыми можно заменить тело, находящееся в потоке жидкости. Основываясь на этом, Жуковский доказал знаменитую теорему, позволяющую вычислить величину подъемной силы. По его формуле величина подъемной силы равняется произведению плотности воздуха, циркуляции скорости потока вокруг обтекаемого тела и скорости движения тела. Правильность теоремы была подтверждена экспериментами, поставленными по идее Жуковского в 1905—1906 гг. в аэродинамической лаборатории Кучинского института, с вращающимися в потоке воздуха продолговатыми пластинками. Однако применить теорему Жуковского к решению задачи о подъемной силе крыла сразу не удалось, так как не было известно, как определять входящую в формулу Жуковского величину циркуляции скорости по замкнутому контуру, охватывающему тело.

В 1910 г. Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным была решена задача о силах, действующих на крыло бесконечного размаха.

Введение Жуковским и Чаплыгиным постулата о сходе с задней кромки струй с верхней и нижней поверхностей крыла — так называемого постулата Жуковского – Чаплыгина — позволило полностью решить задачу о подъемной силе крыла, определить момент этой силы, разработать профили для крыльев самолетов (профили Жуковского – Чаплыгина). Вместе с тем Жуковский впервые исследовал вопрос о профильном сопротивлении крыла и установил, что существует сопротивление, обусловленное сбеганием вихрей с острой передней кромки крыла.

Этим исследованиям крыла бесконечного размаха посвящен ряд работ Жуковского 1910—1911 гг.: «О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов», «Геометрические исследования о течении Кутта», «О поддерживающих планах типа „Антуанетт"», «Определение давления плоскопараллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезок прямой».

Исследования Жуковского о подъемной силе составляют основу современной аэродинамики, его теорема о подъемной силе имеет фундаментальное значение для теории крыла.

В связи с развитием исследований в области аэродинамики по инициативе Жуковского создаются новые лаборатории, расширяются старые. В 1910 г. была основана аэродинамическая лаборатория в Московском техническом училище, где появился, в частности, новый тип труб — с плоским потоком, широко применяемый в настоящее время; расширена аэродинамическая лаборатория в Московском университете, в которой была построена новая труба, создан прибор для исследования гребных винтов, а также установка для изучения законов истечения газа. Необходимость изучения течения сжимаемой жидкости была ясна

Жуковскому еще в начале его деятельности. Уже в работе «Кинематика жидкого тела» (1876) он разбирал одновременно свойства сжимаемой и несжимаемой жидкостей.

В 1908 г. Жуковский занялся задачей о резком возрастании коэффициента сопротивления тела при приближении скорости его движения к скорости звука. На установке для изучения истечения газа по идее Жуковского проводились опыты для определения влияния скорости истечения и силы удара вытекающей струи на маленькие тела.

По аэродинамике больших скоростей Жуковский написал ряд статей: «Аналогия между движением тяжелой жидкости в узком канале и движением газа в трубе с большой скоростью», «О движении воды в открытом канале и о движении газов в трубах», «Движение волны со скоростью, большей скорости звука». В последней работе Жуковский изложил теорию распространения плоской и сферической волн при больших скоростях и показал возможность применения ее к определению сопротивления снарядов.

В аэродинамических лабораториях Московского университета и Московского технического училища в 1910—1911 гг. были поставлены эксперименты с целью проверки результатов теоретических исследований Жуковским аэродинамических профилей. Теория Жуковского была подтверждена с точностью, какую мог дать в то время эксперимент. Вместе с тем опыты с профилями Жуковского — Чаплыгина позволили установить ряд их ценных аэродинамических свойств, указать направление, в котором должны проводиться изыскания при проектировании различных типов профилей.

Мысль Жуковского о присоединенных вихрях послужила основой для дальнейшего развития теории крыла и создания вихревой теории винта. Возможность перехода от схемы присоединенного вихря крыла бесконечного размаха к вихревой схеме крыла конечного размаха и лопасти винта была логически обоснована Жуковским с помощью теоретических исследований Гельмгольца о вихрях, а также на основании экспериментальных данных об образовании вихрей за винтом. Идея замены крыла конечного размаха вихревой схемой лежит в основе исследований С. А. Чаплыгина подъемной силы и сопротивления крыла конечного размаха (1913). На этой же идее построена теория крыла конечного размаха, разработанная Прандтлем и его учениками (1913—1917).

Предполагая, что лопасть винта эквивалентна П-образному вихрю, Жуковский создал вихревую теорию винта. Эта теория была опубликована в четырех статьях в 1912, 1914, 1915 и 1918 гг. под одним и тем же названием: «Вихревая теория гребного винта». Теория Жуковского позволяет проектировать и строить воздушные винты всех типов: самолетные винты, вентиляторы аэродинамических труб, несущие винты геликоптеров и т. д. На основе этой теории были построены винты Жуковского — «винты НЕЖ», которые имели значительно лучшие характеристики, чем винты, построенные в то время за границей.

Разработка теории винта является одним из вопросов того широкого круга задач в области аэродинамики и авиации, которыми занимался Жуковский. В поле зрения Жуковского были все основные вопросы, выдвигавшиеся быстро развивающейся авиацией, а также вопросы, перспективность которых он предвидел.

Придавая большое значение исследованию сопротивления среды, Жуковский уже в 1907—1908 гг. поставил ряд опытов по определению сопротивления шара при малых скоростях и установил, что коэффициент сопротивления шара изменяется в зависимости от величины скорости — результат, полученный позднее А. Г. Эйфелем, Л. Прандтлем и др. Причины этого изменения Жуковский объяснил на основе анализа спектров обтекания шара изменением характера обтекания шара при увеличении скорости.

Жуковский считал, что причиной сопротивления тел, движущихся в жидкости, являются «убегающие» с поверхности тела вихри. Поэтому, когда в 1911—1913 гг. появилась теория Кармана — Прандтля, в которой определение сопротивления тел основывалось на рассмотрении вихревой картины, образующейся за обтекаемым телом, Жуковский посвятил ей свое сообщение, сделанное в 1913 г. в Отделении физических наук Общества любителей естествознания («Вихревая теория лобового сопротивления, данная проф. Т. Карманом», 1914 г.).

Особое значение придавал Жуковский изучению устойчивости самолета. Читая в Московском техническом училище лекции по теории авиации, Жуковский в 1912 г. излагал вопросы статической продольной устойчивости самолета; в 1913 г. он читал офицерам-летчикам специальную лекцию по динамике самолета «Динамика аэропланов в элементарном изложении (статья первая)», а в 1916 г. под тем же названием была опубликована вторая статья Жуковского. В этих лекциях рассматриваются продольная и поперечная устойчивости, дается расчет различных фигур: виража, «мертвой петли», а также разработаны первые научно обоснованные и точные методы аэродинамического расчета самолетов.

В 1910—1912 гг. Жуковский разработал теорию, в которой содержались основные элементы графоаналитических методов аэродинамического расчета самолета по кривым располагаемых и потребных тяг и мощности (теория глиссад). В 1915—1917 гг. Жуковский развил разработанные им ранее методы аэродинамического расчета самолетов и ввел новые диаграммы, впоследствии получившие название «сеток Жуковского». В 1916—1917 гг. Жуковским и его учениками А. Н. Туполевым и Н. С. Некрасовым метод аэродинамического расчета был значительно усовершенствован. В 1917 г. была опубликована работа Жуковского «Аэродинамический расчет аэропланов».

Жуковский исследовал также вопросы прочности самолета. В 1918 г. появилась его большая работа «Исследование устойчивости конструкции аэропланов», в которой рассматривается «задача о прочности конструкции аэропланов в предположении, что лонжероны обременены равномерной нагрузкой, происходящей от силы давления воздуха на крылья аэроплана и от веса крыльев».

Впервые в России Жуковский положил начало теории бомбометания с аэропланов. В 1915 г. в статьях «Бомбометание с аэропланов», в «Лекциях по баллистике» и в «Теории бомбометания с аэропланов» Жуковский разработал метод определения траектории и скорости бомбы, когда сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости, дал способ учета изменения плотности воздуха с высотой. В этих работах рассмотрены различные практические способы бомбометания и прицельные устройства.

Жуковский воспитал поколение ученых, инженеров в различных областях механики. Особенно велики его заслуги в подготовке авиационных специалистов. Здесь большую роль сыграли его «Теоретические основы воздухоплавания», читанные в Московском техническом училище,— первый в мире систематический курс теории авиации, в большей части опиравшийся на теоретические исследования самого Жуковского и Чаплыгина. В 1916 г. этот курс был издан в Париже.

В 1916 г. Жуковский организовал при аэродинамической лаборатории Московского технического училища Авиационное расчетно-испытательное бюро, в котором была сосредоточена экспериментально-теоретическая работа по созданию самолетов.

В начале XX в. появились работы С. А. Чаплыгина по аэродинамике. Под влиянием работ Жуковского по гидродинамике Чаплыгин, еще будучи студентом Московского университета, написал статью «О движении твердого тела в несжимаемой жидкости». В 1890 г. Чаплыгин окончил университет, а в 1894 г. начал преподавать в нем. В 1896—1906 гг. он преподавал также механику в Московском высшем техническом училище, а с 1901 г. — на Московских высших женских курсах, которыми заведовал в 1905—1918 гг. Первые научные работы были посвящены гидромеханике. В 1893 г. он написал большую работу «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости», которая была удостоена премии имени Брашмана. В 1897 г. была опубликована магистерская диссертация Чаплыгина под тем же названием. По этому поводу Жуковский писал, что Чаплыгин «в двух своих прекрасных работах показал, какой силой могут обладать остроумно поставленные геометрические методы исследования». В этих работах Чаплыгина сказалось влияние геометрического направления в решении механических задач, характерного для работ Жуковского.

Особое место среди работ Чаплыгина занимают его исследования по механике жидкости и газа. Уже в 90-х годах он проявляет большой интерес к исследованиям струйных течений. В то время струйная теория являлась фундаментом при изучении законов движения тел в жидкости. В 1899 г. Чаплыгин, основываясь на исследованиях Жуковского, несколько иным способом решил задачу о струйном обтекании пластинки потоком несжимаемой жидкости («К вопросу о струях в несжимаемой жидкости»). Особенно привлекала Чаплыгина задача о струйном обтекании тел газом, которая до него, как он писал, была «едва затронута».

В 1902 г. Чаплыгин опубликовал классическую работу «О газовых струях», в которой разработал метод, позволяющий во многих случаях найти решение поставленной ранее задачи о дозвуковом течении сжимаемого газа. Работа Чаплыгина тогда не получила широкого признания. Это было естественно, так как в то время проблема движения с большими, дозвуковыми скоростями не была острой. Для относительно малых скоростей аэродинамики с успехом пользовались формулами гидродинамики несжимаемой жидкости. Но уже в 30-х годах, когда скорости самолетов стали приближаться к звуковым, сама жизнь поставила вопрос о создании новой науки о движении и обтекании тел при больших дозвуковых, а также сверхзвуковых скоростях. Основы этой науки—газовой динамики — были заложены Чаплыгиным в его работе «О газовых струях». Через 33 года после ее появления, в 1935 г., на международном конгрессе по скоростной авиации в Риме зарубежные ученые Л. Прандтль и Т. Карман в своих докладах излагали основные положения теории, созданной С. А. Чаплыгиным. Важность работы Чаплыгина «О газовых струях» заключается не только в непосредственно полученных результатах, но и в примененных им методах. Они широко используются во всех странах и в настоящее время. Помимо использования в теории плоскопараллельных течений газа, эта работа получила впоследствии применение и при изучении пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком.

Центральное место в научном творчестве Чаплыгина занимает теоретическая разработка проблем, связанных с определением аэродинамических сил, действующих на крыло аэроплана, и с отысканием оптимальной формы крыла. Результаты исследований аэродинамических сил, действующих на крыло самолета, изложены им в работе 1910 г. «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана)», а также в докладе «Результаты теоретических исследований о движении аэропланов», сделанном в ноябре 1910 г. на заседании Московского общества воздухоплавания и изданном в 1911 г.

Применение теории струй позволило оценить величину сил, действующих на простейшее крыло — пластинку. Чаплыгин ссылается при этом на соответствующие работы Рэлея, Жуковского и на свою работу «О газовых струях», в которой он дал формулы распределения скоростей и указал путь для вычисления давления в случае обтекания пластинки со срывом струй. Однако величина силы, действующей на пластинку, определенная по формулам теории струй, была значительно меньше полученной опытным путем и далеко не достаточна, чтобы объяснить явление полета.

Чаплыгин рассмотрел вопрос о подъемной силе, основываясь на том, что появление циркуляции и подъемной силы связано с многозначностью потенциала скоростей, причем вычислил циркуляцию скорости вокруг бесконечно удаленной точки.

В своих работах он вывел интересное свойство изогнутых пластинок, показав, что при нулевом угле атаки подъемная сила пластинки зависит лишь от стрелки прогиба и не зависит от длины хорды пластинки.

Решив задачу о крыле бесконечного размаха. Чаплыгин отмечал необходимость и важность решения задачи о крыле конечного размаха, полагая при этом, что такое крыло может быть смоделировано вихревой схемой в виде П-образного вихря.

Чаплыгин также впервые занялся изучением величины продольного момента, действующего на крыло, считая этот вопрос существенным элементом теории крыла. Используя общую формулу для момента подъемной силы, он установил простую зависимость продольного момента от угла атаки, которая затем была найдена экспериментально и явилась впоследствии одной из основных аэродинамических характеристик крыла. Он показал, что коэффициент продольного момента при больших углах атаки положителен и уменьшается с уменьшением угла атаки; при угле атаки, соответствующем нулевой подъемной силе, он имеет отрицательную величину. При отрицательных углах атаки продольный момент остается отрицательным, но абсолютная величина его с ростом абсолютного значения угла атаки крыла возрастает. Указывая на наличие значительного опрокидывающего момента, действующего на самолет, Чаплыгин предупреждал об опасности быстрого изменения угла атаки.

Основываясь на своей работе «О газовых струях», Чаплыгин показал, что результаты его исследований крыла бесконечного размаха, выполненные при условии обтекания тел несжимаемым потоком, могут быть применены к определению аэродинамических характеристик крыльев самолетов. Вместе с тем он отметил, что при некоторых скоростях полета и углах атаки возникают местные звуковые скорости и тогда может наступить новое явление — течение с разрывом сплошности; в таких случаях эти результаты неприменимы. Идеи Чаплыгина нашли дальнейшее развитие в многочисленных работах советских и зарубежных ученых.

Деятельность Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина продолжалась в советское время. В первые же годы после Октябрьской революции они провели огромную работу по организации более широких теоретических и экспериментальных исследований в области авиации. При непосредственном участии Жуковского в 1918 г. был создан Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), где стали разрабатываться актуальные задачи авиационной науки и техники. Жуковский был избран первым председателем коллегии ЦАГИ.

В 1920 г. было отмечено 50-летие научной деятельности Жуковского. В декрете правительства, подписанном В. И. Лениным, были высоко оценены огромные заслуги Жуковского как «отца русской авиации». К сожалению, Н. Е. Жуковскому не суждено было стать свидетелем великолепного расцвета аэрогидромеханики в СССР; он скончался 17 марта 1921 г.

С. А. Чаплыгин продолжал неутомимо трудиться еще долгие годы. После кончины своего учителя и друга он стал руководителем ЦАГИ. В ЦАГИ Чаплыгин внес огромный вклад в решение задач в области механики жидкости и газов, и в частности аэродинамики больших скоростей. Его научная деятельность в советский период была весьма плодотворной. Особенно крупные результаты были получены им в аэрогидродинамике. В работе «К общей теории крыла моноплана», опубликованной в 1922 г., Чаплыгиным была введена для анализа устойчивости профиля крыла так называемая парабола устойчивости. В этой работе были рассмотрены некоторые типы профилей с закругленной задней кромкой, введен ряд важнейших понятий и идей. В работе «О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло», опубликованной в 1926 г., Чаплыгин заложил основы нового важного раздела аэродинамики и теории самолета, впервые создал общий метод для нахождения сил давления воздуха на крыло самолета при каком угодно его движении. До этой работы во всех исследованиях по теории крыла предполагалось, что крыло движется поступательно с постоянной скоростью, что далеко не всегда соответствует действительности, как, например, в том случае, когда самолет делает петлю Нестерова.

В 1931 г. Чаплыгин совместно с Н. С. Аржаниковым публикует работу «К теории открылка и закрылка», получившую широкую известность в СССР и за границей. Ему же принадлежат исследования по новым схемам обтекания. В работе «О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности», опубликованной в 1933 г., С. А. Чаплыгин вместе с А. Л. Лаврентьевым рассмотрел схему, промежуточную между схемой теории струй и схемой полного обтекания. Мы не будем останавливаться на всех исследованиях и открытиях, сделанных С. А. Чаплыгиным по различным проблемам науки. Важно подчеркнуть, что его самоотверженная работа во имя развития отечественной науки сыграла большую роль в быстром прогрессе советской авиации. Советское правительство высоко оценило заслуги С. А. Чаплыгина. За выдающиеся достижения, в частности в области аэрогидродинамики, он был избран академиком, награжден орденами Ленина и Трудового Красного Знамени, а в 1941 г. в день пятидесятилетнего юбилея научной деятельности С. А. Чаплыгин — признанный руководитель советской школы аэродинамики — был удостоен звания Героя Социалистического Труда. С именем С. А. Чаплыгина связаны многие страницы истории механики в СССР. Многие методы и теоремы Чаплыгина составляют основу современного механико-математического образования и названы его именем в учебных руководствах. Он прославился не только результатами своей научной деятельности, но и как основатель больших научных школ в области аэрогидродинамики и ее технических приложений.

УДК 531/534(091)

*Н. М. Меркулова*

# РАЗВИТИЕ АЭРОДИНАМИКИ В СССР (1917—1932)

В начале XX в. завершилось становление аэродинамики как самостоятельного раздела механики. Этот процесс определяли основополагающие работы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

Великая Октябрьская социалистическая революция открыла новые возможности в решении аэродинамических задач как основы развивающейся авиации. Уже в декабре 1918 г. был создан Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), призванный, в частности, решать проблемы и координировать исследования по теоретической и экспериментальной аэродинамике.

В СССР разрабатывались многие проблемы этой новой науки, и уже в 20-е годы наметились определенные направления развития аэродинамики. Продолжая традиции отечественной механики, научной школы Жуковского, советские ученые широким фронтом проводили исследования с целью решения насущных проблем авиационной науки и техники.

До сих пор начальный период развития в СССР авиационной науки, в частности аэродинамики, не получил достаточно полного освещения. В настоящей работе поставлена задача выявить основные направления исследований по аэродинамике в СССР до начала 30-х годов и выяснить значение их в развитии аэродинамики как в СССР, так и в других странах.

С. А. Чаплыгин — ученик и соратник Н. Е. Жуковского, возглавивший ЦАГИ после кончины Жуковского, развивал исследования в русле идей основателя научной школы аэродинамики. Ее характерной особенностью является широкий охват теоретических проблем, разносторонний эксперимент, быстрая реализация полученных решений, учет требований практики, а также привлечение молодых ученых, поиски новых организационных форм исследований. Если сравнивать научную школу Жуковского и возникшую почти одновременно геттингенскую научную школу аэродинамики Л. Прандтля, то для школы Жуковского характерны почти мгновенная реакция на возникавшие инженерно-технические задачи, удивительная проницательность в выявлении проблем, актуальность которых диктовалась не только сиюминутными требованиями практики. Решение этих проблем становилось ключом к разгадке явлений, казалось бы не связанных с данной проблемой. Так было с поставленной Жуковским проблемой подъемной силы, с созданием им теоретических профилей крыла, теории винта самолета, динамики полета самолета, а затем с решением его учениками и последователями задач о разрезных крыльях, крыльях малого удлинения, устойчивости самолета, новых методах экспериментальных исследований и т. д. Именно экспериментальные аэродинамические исследования уже в первые годы развертывания работ по аэродинамике в СССР стали фактором, в значительной мере определившим успех в решении задачи построения самолетов с высокими аэродинамическими характеристиками. И действительно решить эту задачу без достаточно оснащенной экспериментальной базы чрезвычайно трудно, если не невозможно. Создание опытных установок, разработка эффективных экспериментальных методов исследований стали первоочередной задачей советских аэродинамиков, одним из основных направлений развития аэродинамики в СССР.

Уже в начале 20-х годов были созданы новые аэродинамические установки в Москве, Ленинграде, Киеве, Харькове. В Москве в ЦАГИ в 1924 г. начала функционировать аэродинамическая труба НК с двумя рабочими частями (диаметром 1,5 и 2,25 м). Подобная ей аэродинамическая труба Т-I – Т-II (диаметром 3 и 6 м) создана в 1925 г. [1][1]. Это — самая большая по тому времени в мире аэродинамическая труба. Вскоре были построены трубы Т-III и Т-IV. В эти же годы началась модернизация оборудования аэродинамических лабораторий в Ленинградском и Киевском политехнических институтах, в Харьковском авиационном институте, Ленинградском институте инженеров путей сообщения.

В начале 1930 г. встал вопрос о новых лабораториях, установках и оборудовании. В эти годы началась реконструкция ЦАГИ, закончившаяся созданием нового ЦАГИ, оборудованного новейшими аэродинамическими установками. Новые экспериментальные установки появились несколько позднее в аэродинамических лабораториях Ленинградского политехнического института, Харьковского авиационного института.

Одной из первых практических задач, поставленных перед советскими учеными, была проблема посадки самолета. Для обеспечения нормальных условий посадки необходимо, в част-

---

[1] О деятельности ЦАГИ использовались также материалы из книги [2].

ности, чтобы при больших углах атаки подъемная сила достигала достаточно большой величины. Теоретические исследования в этом направлении привели к построению разрезных крыльев, идея создания которых уходит корнями в XIX в. Теоретическое обоснование работы разрезных крыльев дано в 1921 г. С. А. Чаплыгиным [3], получившим общие формулы для расчета разрезных крыльев, что позволило определить эффективность таких крыльев на различных режимах обтекания крыла. Эта статья Чаплыгина издана также на английском языке в 1929 г. в Париже. Тогда же в Германии (Г. Лахман) [4] и Англии (Х. Пейдж) [5] были опубликованы результаты экспериментов, позволившие конструировать разрезные крылья определенных типов. В 20-х годах разрезные крылья начали применяться на самолетах, а с конца 30-х годов они стали широко использоваться. Этому в значительной степени способствовали систематические эксперименты, проведенные в ЦАГИ (опубликованы П. П. Красильщиковым в 1930—1931 гг.) [6, с. 367—388], и существенное продвижение в теории разрезных крыльев благодаря работам С. А. Чаплыгина, В. В. Голубева, Н. С. Аржаникова и несколько позднее С. М. Тарга.

Одной из основных задач аэродинамики того времени было создание профилей крыльев с оптимальными аэродинамическими характеристиками, главным образом малой величиной сопротивления, что диктовалось постоянным требованием увеличения скорости полета самолета[2]. Значительные результаты в этом направлении были достигнуты благодаря развитию теории крыла бесконечного размаха и специально поставленных экспериментов.

Разработанные в 1910 г. профили Жуковского—Чаплыгина обладали хорошими аэродинамическими данными, но их применение на самолетах затруднялось из-за сложности выполнения острой задней кромки, характерной для этих профилей. В 1918 г. немецкие ученые Т. Карман и Е. Треффтц получили профили с краевым углом, отличным от нуля [8], посредством округления профилей типа «Антуанетт», теоретически исследованных Н. Е. Жуковским в 1911 г. Однако практическое выполнение таких профилей также вызывало трудности. Незначительная модификация задней кромки профилей Жуковского—Чаплыгина позволила создать практически выполнимые теоретические профили, которые в 20-х годах применялись на ряде самолетов, например на «Анрио», «Лиоре-Оливье», «Кульховен». Вместе с тем начали разрабатываться профили для самолетов различного назначения. В связи с попытками построения монопланов особое внимание уделялось изучению аэродинамических характеристик толстых профилей.

С 1918 г. в ЦАГИ проводились испытания профилей Жуковского—Чаплыгина, профилей новых форм и на основе этого

[2] О разработке профилей крыльев в 20-х годах см. в [7].

были составлены диаграммы для выбора наивыгоднейшего профиля крыла [9; 10, с. 112—196]. Поиски рациональной формы профиля крыла привели к построению новых теоретических профилей (типа инверсии эллипса) с тупой задней кромкой, что открывало возможность их практической реализации (С. А. Чаплыгин, 1922) [11]. Позднее Чаплыгин предложил достаточно простой метод построения профилей с заданными аэродинамическими характеристиками, легший в основу способа получения довольно широкого класса практически используемых профилей. Новые типы профилей, серии профилей были найдены и на основании экспериментов 1929—1930 гг. в ЦАГИ. Все это позволило издать в 1931 г. [12] атлас аэродинамических характеристик профилей[3], ставший руководством для конструкторов при выборе профилей проектировавшихся самолетов.

Одновременно решался вопрос об аэродинамических характеристиках крыла конечного размаха, имевший большое значение для выбора формы крыла в плане. Теория крыла конечного размаха, созданная в 1911—1918 гг. С. А. Чаплыгиным, Л. Прандтлем и его школой, основывается на идее Жуковского о присоединенном вихре. Эта идея лежит в основе модели несущей линии Прандтля, имитирующей поле скоростей около конечного крыла. В этом направлении в СССР в 20-х годах были разработаны приближенные методы решения выведенного Прандтлем основного интегро-дифференциального уравнения в теории крыла конечного размаха (В. В. Голубев, Б. Н. Юрьев, А. В. Чесалов, Ю. А. Победоносцев) [13], один из которых представлял собой усовершенствование метода английского аэродинамика Г. Глауэрта (1921—1922) [14]. Предложенные методы уже в то время использовались в практике конструкторских бюро для расчета крыла удлинением, большим 5, не только моноплана, но триплана и полиплана. Для крыльев удлинением, меньшим 5, применявшихся в то время на авиабомбах, снарядах, а позднее на скоростных самолетах, использовались обобщенная физическая модель несущей поверхности (В. В. Голубев, позднее Г. Ф. Бураго), а также построение потенциала течения (Н. Е. Кочин).

Советские ученые создали ряд монографий, в которых систематизированы исследования по теории крыла и дано дальнейшее их развитие. Так, в 1922 г. Б. Н. Юрьев опубликовал брошюру [15], а в 1926 г — книгу [16] по теории индуктивного сопротивления крыла, в 1923 г. появилась монография А. А. Саткевича «Аэродинамика как теоретическая основа авиации» [17], а в 1927 и 1931 гг. — две монографии В. В. Голубева [18, 19], составившие обширный трактат по теории крыла самолета, по которому учились многие поколения инженеров, механи-

---

[3] В 1940 г. ЦАГИ издал новый атлас аэродинамических характеристик профилей

ков, математиков. Это был курс, подобного которому в то время не было в мировой литературе.

К теории крыла конечного размаха примыкают исследования в направлении изучения работы винта. Его обтекание намного сложнее, чем обтекание крыла.

Теория винта Жуковского основана на его идее о присоединенных вихрях. Он построил вихревую модель, аппроксимирующую поле скоростей около движущегося винта. Отметим, что первая статья Жуковского по вихревой теории винта напечатана в 1912 г., задолго до опубликования теории Прандтля, в которой также использовано представление о присоединенном вихре. Эта статья и три другие его статьи, появившиеся в 1914, 1915 и 1918 гг., содержат общую теорию винта. В нее входят результаты исследований ученика Н. Е. Жуковского — В. П. Ветчинкина о винтах с переменной циркуляцией скорости по длине лопасти винта, о наивыгоднейшем винте, о графическом методе расчета винта. Развитием теории Жуковского были уточненные решения задачи о винте (В. П. Ветчинкин, Г. И. Кузьмин, позднее М. В. Келдыш, Ф. И. Франкль). Для расчета критических и срывных режимов работы винта применялась струйная теория, развитая Б. Н. Юрьевым в 1922 г., а затем В. П. Ветчинкиным, М. Н. Веселовским, Г. И. Кузьминым. В 1922 г. появились работы по теории винта с конечным числом лопастей (Б. Н. Юрьев), продолженные Н. Н. Поляховым (1937), предложившим метод проектирования и поверочный расчет винтов. Тогда же были опубликованы новые монографии по вихревой теории винта Жуковского (Б. Н. Юрьев [20], В. П. Ветчинкин [21], Г. И. Кузьмин [22]), ставшей уже в эти годы основой для проектирования и аэродинамического расчета винтов. Были построены винты типа НЕЖ, кроме того, созданы профили винтовой серии на основе опытных данных ЦАГИ.

Особенно важное значение для решения многих практических вопросов имели малоизученные задачи нестационарной аэродинамики. Неустановившиеся процессы имеют место при колебаниях крыла (машущие крылья), фигурных полетах, движении крыла в восходящем потоке воздуха и т. д. Это направление исследований, «на которые должно опираться теоретическое исследование продольной устойчивости самолета» [23, с. 182], открывается мемуаром С. А. Чаплыгина 1926 г. [23]. Общая теория Чаплыгина разработана для любого неустановившегося движения крыла в плоскопараллельном потоке при условии постоянства циркуляции скорости вокруг профиля крыла. При этих условиях Чаплыгин исследовал неустановившееся движение крыла, профилем которого являются плоская пластинка, дуга окружности, сильно вытянутый эллипс, а также контуры более сложного очертания. В дальнейшем исследования по нестационарной аэродинамике велись В. В. Голубевым, М. В. Келдышем, А. А. Космодемьянским, Н. Е. Кочиным, М. А. Лаврентьевым, А. И. Некрасовым, Л. И. Седовым.

С проблемой устойчивости самолета непосредственно связана другая задача, теоретическое решение которой дано С. А. Чаплыгиным. Речь идет о параболе метацентров — огибающей векторов аэродинамических сил при различных углах атаки крыла, которую Чаплыгин вводит в начале 1921 г. в своей работе о разрезных крыльях [3] и подробно исследует в 1922 г. в статье [11]. Несколько ранее, в начале 1920 г., Р. Мизес [24] изучал параболу метацентров, или, как он ее называл, параболу подъемной силы. Оба ученых вели исследования независимо друг от друга.

Для Мизеса парабола метацентров представляла лишь теоретический интерес. Введение же ее Чаплыгиным непосредственно связано с анализом устойчивости самолета. Именно Чаплыгину принадлежит термин «парабола устойчивости». Так он назвал параболу метацентров. В статье [11] Чаплыгин устанавливает зависимость характеристик устойчивости от параметров параболы метацентров, связь между параметрами метацентрической кривой и величиной и направлением подъемной силы, ее момента.

За всеми результатами советских аэродинамиков стоит творчество больших научных коллективов. Достигнутые успехи в аэродинамических исследованиях в значительной мере обязаны своевременной постановке вопроса о подготовке научных кадров, организации научного поиска. В 1919 г. Н. Е. Жуковский был инициатором учреждения Авиационного техникума, который он возглавил. Преподавателями техникума стали сотрудники недавно созданного ЦАГИ. На следующий год авиационный техникум реорганизуется в Институт инженеров Красного воздушного флота им. Н. Е. Жуковского, а позднее — в Военно-воздушную академию, которой также присваивается имя ученого. В 1930 г. на базе аэромеханического факультета МВТУ организуется Московский авиационный институт. Подготовка авиационных кадров велась также и на соответствующих отделениях факультетов других высших учебных заведений, например Московского государственного университета, Ленинградского политехнического, Киевского политехнического, Харьковского авиационного институтов.

В организации научных исследований особое значение имело издание ЦАГИ научных трудов как в виде отдельных публикаций, так и периодического издания «Труды ЦАГИ», начавшего выходить в свет в 1919 г. Это в значительной мере расширило область научной информации.

Организация исследований в ЦАГИ, их научная значимость привлекли внимание зарубежных ученых, которые неоднократно приезжали в ЦАГИ. Уже в 20-е годы ЦАГИ посетили известные ученые: гидродинамик И. Бюргерс (1924), аэродинамики Т. Карман (1927), Л. Прандтль (1929). Позднее с работой ЦАГИ ознакомились У. Нобиле (1931), Ж. Адамар, Ж. Перен (1934), Т. Леви-Чивита (1935) и др.

ЦАГИ с его отделами, соответствующими основным направлениям развития авиационной науки и техники, был новой формой организации исследований в области авиации. В Институте решались фундаментальные проблемы в области аэродинамики, разрабатывались конкретные рекомендации для конструкторских бюро и предприятий авиационной промышленности, проводились работы по проектированию самолетов. Уже в 1923 г. под руководством А. Н. Туполева был построен легкий спортивный моноплан АНТ-1. В 1922—1923 гг. самолет со свободнонесущим крылом создан В. Л. Александровым и В. В. Калининым (АК-1). В 1925 г. был построен цельнометаллический самолет АНТ-3 «Пролетарий» (Р-3), который экспонировался на Международной авиационной выставке в Берлине в 1928 г. Опытные самолеты серии АНТ строились в ЦАГИ ежегодно, среди них был и пассажирский самолет АНТ-9 (1929). Одновременно были организованы новые конструкторские бюро и творческие конструкторские группы: А. С. Яковлева (1927), А. Н. Путилова, А. А. Микулина (1930) [2, с. 9].

К середине 20-х годов авторитет ЦАГИ был настолько высок, что научный комитет Главвоздухфлота в 1924 г. предписал, что «без соответствующего свидетельства ЦАГИ ни одна машина не может подняться в первый раз в воздух» (цит. по: [2, с. 6]). За работы в области авиационной науки и техники ЦАГИ был награжден в 1926 г. орденом Трудового Красного Знамени.

К началу 30-х годов объем работ ЦАГИ настолько расширился, что стало возможным и необходимым отделение от ЦАГИ специализированных институтов. Координирующие функции остались за ЦАГИ, причем не только в рамках выделившихся институтов. Как и прежде, в поле зрения ЦАГИ были и другие авиационные центры страны (например, в Академии воздушного флота им. Н. Е. Жуковского, НАМИ, в Ленинградском политехническом институте, Харьковском авиационном институте). Такая форма организации исследований была эффективной, и это не замедлило сказаться на характере работ.

В этот период советские ученые достигли выдающихся результатов в области теоретической и экспериментальной аэродинамики. Это в значительной мере определялось быстрыми темпами развития авиации, которая ставила перед аэродинамикой все новые и новые задачи. Назрела необходимость подведения итогов и определения дальнейших направлений развития аэродинамики. С этой целью по инициативе ЦАГИ в мае 1931 г. созвана Первая Всесоюзная конференция по аэродинамике [25]. Доклады были посвящены основным результатам, полученным в СССР к началу 30-х годов в области аэродинамики. Большое внимание было уделено вопросу расширения экспериментальной базы, в частности необходимости постройки аэродинамических труб с большими скоростями. Это было весьма своевременно, так как значительное увеличение скорости полета самолета становилось реальностью. В связи с этим изучение течений с большими скоростями, обтекания тел газом приобретало все более самостоятельное значение, и к середине 30-х годов газодинамические исследования выделились в отдельный раздел механики — газовую динамику. Аэродинамика продолжала развиваться в традиционных направлениях вплоть до 50-х годов, когда в связи с созданием ЭВМ появились новые методы решения аэродинамических проблем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. ЦГАОР, ф. 3429, оп. 60, д. 1054, л. 113, 117 об., 119, 130.
2. ЦАГИ — основные этапы научной деятельности. 1918—1968. М.: Машиностроение, 1976. 352 с.
3. *Чаплыгин С. А.* Схематическая теория разрезного крыла аэроплана.— Науч.-техн. вестн. НТО ВСНХ, 1921, № 4/5, с. 21—34 (см. также: Чаплыгин С. А. Избр. тр. М.: Наука, 1976, с. 258—288).
4. *Lachmann G.* Das Unterteilte Flächenprofil.— ZFM, 1921, H. 11, S. 164—169.
5. *Page F. H.* The Handley Page wings.— Aeronaut. J., 1921, vol. 25, N 126.
6. *Красильщиков П. П.* Практическая аэродинамика. М., 1973. 449 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 1459).
7. *Меркулова Н. М.* Развитие экспериментальных аэродинамических исследований крыльев.— Сб. науч.-техн. ст. М., 1959, № 2 (65), с. 24—64.
8. *Karman Th., Trefftz E.* Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte.— ZFM, 1918, H. 9.
9. ЦГАОР, ф. 3429, оп. 10, д. 532, л. 195 об., 199 об., 200.
10. *Юрьев Б. Н., Лесникова Н. П.* Аэродинамические исследования. Эксп. аэродин. отдел лаборатории им. Н. Е. Жуковского, 1928. 427 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 33).
11. *Чаплыгин С. А.* К общей теории крыла моноплана. М.: Высш. воен. ред. Совет, 1922 (см. также: Чаплыгин С. А. Избр. тр. М.: Наука, 1976, с. 142.)
12. Атлас профилей. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1931. 32 с. (Тр. ЦАГИ; Вып. 99).
13. Материалы по аэродинамическому расчету: Сб. ст. М., 1929. 194 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 42).
14. *Glauert H.* The calculation of the characteristics of trapered wings.— Rep. ARC, 1921—1922, vol. 1, R. a. M., N 767, May 1921.
15. *Юрьев Б. Н.* Теория индуктивного сопротивления крыльев аэропланов. М.: Ин-т инж. Красного возд. флота им. проф. Н. Е. Жуковского, 1922. 54 с.
16. *Юрьев Б. Н.* Индуктивное сопротивление крыльев аэропланов. М., 1926. 122 с. (Тр. ЦАГИ; Вып. 20).
17. *Сапкевич А. А.* Аэродинамика как теоретическая основа авиации. 1923.
18. *Голубев В. В.* Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. М., 1927. 207 с. (Тр. ЦАГИ; Вып. 29).
19. *Голубев В. В.* Теория крыла аэроплана конечного размаха. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1931. 350 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 108).
20. *Юрьев Б. Н.* Воздушные гребные винты: (Пропеллеры). М., 1925. 196 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 10).
21. *Ветчинкин В. П.* Теория гребных винтов. М.: Изд. ВВА КА, 1926. 581 с.
22. *Кузьмин Г. И.* Исследования работы воздушных винтов. М.: Гостехтеориздат, 1930. 78 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 45).
23. *Чаплыгин С. А.* О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. М., 1926. 69 с. (Тр. ЦАГИ. Вып. 19) (см. также: Чаплыгин С. А. Избр. тр. М.: Наука, 1976, с. 182—243).
24. *Mises R.* Zur Theorie des Tragflächenauftriebes. Zweite Mitteilung.— ZFM, 1920, H. 5, S. 68—73; H. 6, S. 87—89.
25. Первая Всесоюзная конференция по аэродинамике (16—21 мая 1931 г.). М.: Гос. авиац. и автотракт. изд-во, 1932. 236 с.

# МЕХАНИКА И ФИЗИКА

УДК 531/534(091)

*Вл. П. Визгин*

## ГАЛИЛЕЕВСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Как специальная теория относительности и все релятивистские теории определяются прежде всего группой Пуанкаре, являющейся математическим выражением специального принципа относительности, который принято связывать с именами Х. А. Лоренца, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна, точно так же классическая механика и в значительной мере классическая физика в целом определяются группой Галилея—Ньютона, опирающейся на галилеевский принцип относительности (г. п. о.). Впрочем, фундаментальные группы Пуанкаре и Галилея—Ньютона наряду с симметрией, выражающейся в равноправии инерциальных систем отсчета и как раз имеющей смысл эйнштейновского принципа относительности в релятивистской и г. п. о. в классической физике, содержат симметрии, связанные с однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени.

Генезис классической механики был существенно связан с преодолением аристотелевских представлений о пространстве и времени и формированием концепций абсолютного пространства (бесконечного, однородного и изотропного), инерции, принципа инерции прямолинейного и равномерного движения и, наконец, г. п. о., выделяющего в качестве привилегированного класса систем отсчета именно инерциальные, т. е. движущиеся прямолинейно и равномерно. Вообще говоря, возникновение и развитие классических пространственно-временны́х представлений целесообразно рассматривать в целом, не прибегая к слишком дробному членению этого комплекса и рассмотрению истории различных его компонент в отдельности. Все же иногда представляется интересным и полезным такое выделение «мировой линии» одного фундаментального понятия или принципа. В частности, аналогичная задача может возникнуть, если попытаться создать своеобразную историко-научную энциклопедию, в которой в сравнительно сжатом виде прослеживалась бы история возникновения и развития отдельных научных понятий, законов, принципов. В настоящей заметке мы попытаемся такого рода идеализацию осуществить на примере одного из наиболее фундаментальных принципов классической физики — г. п. о.

Галилеевский принцип относительности — это принцип классической механики, согласно которому все механические явления при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Иначе говоря, г. п. о. утверждает равноправие всех инерциальных систем отсчета при описании механических явлений. Под инерциальными системами отсчета обычно понимаются такие системы, по отношению к которым пространство является однородным и изотропным, а время — однородным. Можно показать, что при этих условиях в системе отсчета всегда выполняется принцип инерции, согласно которому свободное движение тела происходит с постоянной (по величине и направлению) скоростью. Ньютон считал инерциальными такие системы, которые движутся равномерно и прямолинейно относительно системы отсчета, связываемой с абсолютным пространством. В 1885—1886 гг. Л. Ланге дал определение, близкое к современному (без ссылки на абсолютное пространство), и ввел термины «инерциальная система» и «инерциальная шкала времени». Согласно этим определениям «инерциальной системой называется система координат, в которой сходящиеся в одной точке траектории трех точек, выброшенных одновременно из одной и той же точки пространства и предоставленных затем самим себе, все прямолинейны (три точки не должны лежать на одной прямой)», а «инерциальной шкалой времени называется такая шкала времени, при которой предоставленная самой себе точка движется равномерно по своей инерциальной траектории» [1, с. 154].

Другим выражением г. п. о. является инвариантность основного динамического закона механики (2-го закона Ньютона или его эквивалента) относительно галилеевских преобразований, связывающих пространственно-временные координаты некоторого события в двух различных инерциальных системах отсчета $x$, $y$, $z$, $t$ и $x'$, $y'$, $z'$, $t'$:

$$x' = x - v_x t, \qquad y' = y - v_y t, \qquad z' = z - v_z t, \tag{1}$$

где $v_x$, $v_y$, $v_z$ — компоненты вектора скорости движения второй системы относительно первой.

Свое название г. п. о. получил, насколько мы можем судить, сравнительно недавно. В 1908 г. австрийский физик Ф. Франк уже после открытия специальной теории относительности назвал преобразования (1) галилеевскими (а соответствующую группу – группой Галилея) из-за их глубокого родства с принципом инерции, который со времен Ньютона связывался с именем Галилея [2]. Сочетание евклидовой группы с галилеевскими преобразованиями впервые стали называть группой Галилея — Ньютона, очевидно, после лекций по истории математики, которые в 1915—1917 гг. читал немецкий математик Ф. Клейн в Геттингенском университете [3]. Г. п. о. был сформулирован в XVII в. Принципом относительности его стали называть лишь накануне открытия теории относительности. В работах А. Пуанкаре 1900—1904 гг. мы находим следующие названия г. п. о.: сначала «принцип относительного движения», несколько позже «закон относительности», «постулат относительности» и, наконец, «принцип относительности» [4].

История г. п. о., как мы отмечали, неразрывно связана с формированием и последующим развитием пространственно-временных представлений классической механики и может быть условно разделена на следующие периоды: 1) преодоление аристотелевых представлений (до начала XVII в.); 2) рождение принципа (XVII в., от Галилея до Ньютона); 3) в тени забвения (до середины XIX в.); 4) в преддверии теории относительности (до 1905 г.); 5) через призму теории относительности (после 1905 г.).

**1. Преодоление аристотелевых представлений (до начала XVII в.).** Представления об однородности и изотропности пространства и однородности времени зародились в античности («пустота» античных атомистов как прообраз бесконечного однородного и изотропного пространства, пространственно-временные симметрии в космологии и динамике Аристотеля и т. д.). В дальнейшем концепция однородного и изотропного пространства получает развитие в трудах Николая Кузанского (XV в.). Формирование экспериментального метода (прежде всего в эпоху Возрождения) создало необходимые предпосылки для утверждения идеи однородности времени.

Вместе с тем в учении о движении на протяжении веков продолжала господствовать концепция Аристотеля, выделявшая покой как привилегированное состояние тел. Эта концепция в космологическом масштабе согласовывалась с геоцентрической птолемеевской системой Мира. Идея определенного равноправия покоящейся и движущейся систем отсчета, лежащая в основе г. п. о., восходит к Н. Копернику и его гелиоцентрической системе мироздания (первая половина XVI в.). Эта идея была необходима для опровержения возражений против возможного движения Земли из-за различных эффектов, порожденных этим движением. Коперник, однако, не пошел дальше кинематического аспекта относительности и не смог последовательно провести идею динамического равноправия покоящейся и движущейся систем отсчета [5—8]. Для этого нужно было иметь в руках классическую механику — детище XVII в. Если Коперник еще вынужден был прибегать к концепции «естественных» и «насильственных» движений Аристотеля, то Джордано Бруно на пороге XVII в. решительно порывает с аристотелевой традицией и подходит вплотную к г. п. о.: «То, что происходит на движущейся Земле, имеет строгую аналогию в том, что происходит в корабле, скользящем по поверхности воды, ибо там точно так же глобальное движение корабля не оказывает никакого воздействия на частичные движения» (цит. по: [7, с. 163]). Бруно развивает также аргументацию в пользу бесконечного однородного и изотропного пространства, приближаясь к ньютоновской концепции пространства. Однако выход за рамки аристотелевой космологии не означал перехода к новой физике, которая только и могла привести к правильному пониманию проблемы относительности.

**2. Рождение принципа (XVII в., от Галилея до Ньютона).** Борьба за гелиоцентрическую систему, явившуюся основным исходным пунктом г. п. о., достигла на рубеже XVI и XVII вв. кульминации (трагическая гибель Бруно, вмешательство инквизиции — осуждение учения Коперника специальным декретом от 5 марта 1616 г., инквизиционный процесс Галилея, 1633 г. и т. д.). Именно в этот насыщенный драматическими коллизиями период И. Кеплер, Г. Галилей, Р. Декарт, несколько позже X. Гюйгенс и др. закладывают основы «науки Нового времени». Галилей, развивая обоснование системы Коперника, дает в 1624 г. в «Послании к Инголи» хрестоматийную формулировку г. п. о., которую в более широком контексте повторяет в «Диалоге о двух главных системах мира» (1632 г.): «Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля... Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд...; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно...» [9]. Корабль как образное воплощение системы отсчета использовался со времен Аристотеля и Симпликия. Он встречается у Коперника, Бруно, Галилея и Гюйгенса. Не случайно и П. Гассенди проводил свои знаменитые опыты по проверке г. п. о. на галере [7, 8].

Среди историков науки вплоть до настоящего времени нет единого мнения о классе допустимых систем отсчета в галилеевской формулировке принципа относительности и о связанном с этим характере инерциального движения. Все согласны с тем, что Галилей имел в виду равномерное движение. Но одни (А. Койре, М.-А. Тоннела и др.) приходят к выводу, что у Галилея речь идет о круговых движениях (именно в этом случае г. п. о. может быть применен для обоснования системы Коперника [7, 10]). Другие же (С. Дрейк, Дж. Коффа и др.) полагают, что Галилей в качестве инерциальных выделял равномерные прямолинейные движения [11]. Более убедительной представляется вторая точка зрения, так как вопрос о круговом движении обсуждается Галилеем либо в случае «свободного» движения шарика по воображаемой идеально гладкой поверхности земного шара, но при этом учитывается действие силы тяжести на шарик, либо в случае движения планет вокруг Солнца. Но в последнем случае Галилей говорит о том, что бесконечное прямолинейное движение разрушило бы гармонию Солнечной системы. Кроме того, имеются основания считать, что Галилей знал об эллиптичности планетных орбит [12, 13]. Поэтому, говоря о круговых движениях, Галилей считал их, вероятно,«приближенно инерциальными» в отличие от равномерного прямолинейного движения, рассматриваемого им как действительно инерциальное. Хотя в «Послании к Инголи» и особенно в «Диалоге» Галилей обсуждает различные мысленные эксперименты для объяснения и подтверждения г. п. о., известно, что реальных экспериментов такого рода он не проводил. Один из подобных опытов был проведен в 1641 г. по инициативе французского ученого П. Гассенди: с вершины мачты на галере, движущейся поступательно с большой скоростью, сбрасывался камень, который падал около основания мачты и точно так же, как на неподвижном корабле. Точность этих опытов, правда, была невысока, и они, строго говоря, не могли служить веским аргументом в пользу г. п. о. [7, 8, 13].

Дальнейшее развитие учение об относительности движения и инерции получило в работах Э. Торричелли и Б. Кавальери — учеников Галилея, а также в трудах Декарта, Гассенди, Гюйгенса. Их усилия были направлены к тому, чтобы отчетливо ограничить класс инерциальных движений равномерными и прямолинейными и отделить проблему относительности и инерции от проблемы тяжести.

В 1652 г. Гюйгенс, опиравшийся на труды Галилея и Декарта, закончил исследование соударения абсолютно упругих тел, в котором он четко сформулировал и эффективно использовал г. п. о. для равномерно и прямолинейно движущихся систем отсчета: «Два тела, соударяясь, даже в случае, если оба вместе участвуют еще в другом равномерном движении, для лица, также участвующего в общем движении, действуют друг на друга так, как будто бы этого общего движения не существовало» [14, с. 213]. В 1660—1661 гг. Гюйгенс публично изложил свою теорию в Париже и Лондоне для будущих членов организующихся там Академии наук и Королевского общества. В этой работе была впервые продемонстрирована эвристическая мощь г. п. о.

К этому времени относятся и первые работы Ньютона по механике (1664—1666), приведшие в конечном счете к созданию «Начал» (1687 г.). Принципы симметрии пространства и времени, характерные для группы Галилея—Ньютона, нашли в них свое логическое завершение. Вместе с тем статус евклидовой симметрии пространства и однородности времени у Ньютона отличается от статуса г. п. о. Если принципы евклидовой симметрии пространства и однородности времени сформулированы в разделе «Определения» и тем самым предшествуют формулировке ньютоновских законов механики, то г. п. о. фигурирует лишь в качестве следствия из 2-го закона Ньютона: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения» [15, с. 49]. В этом уже проявляется характерный для Ньютона и его последователей динамический подход, согласно которому в основе механики лежит прежде всего динамический закон (2-й закон Ньютона), а считавшиеся до этого фундаментальными принципы сохранения, г. п. о. и некоторые другие аналогичные утверждения оказываются его следствиями и приобретают характер теорем [16].

Ньютонова концепция абсолютных пространства и времени в связи с этим может рассматриваться как физическая основа привилегированного положения инерциальных систем отсчета. Так примерно в течение полувека основные идеи и принципы механики трудами Галилея, Декарта, Гюйгенса и, наконец, Ньютона образовали систему классической механики с лежащими в ее основе принципами галилей-ньютоновской симметрии пространства и времени.

**3. В тени забвения (до середины XIX в.)** [16, 17]. В течение XVIII в. ньютоновская динамическая концепция постепенно становится общепризнанной. Выдающиеся успехи достигнуты в небесной механике Солнечной системы (Л. Эйлер, Ж. Лагранж, П. С. Лаплас и др.), в которой в качестве естественной абсолютной системы отсчета использовалась гелиоцентрическая система. Первостепенное значение приобретает разработка математических методов механики, которая приводит к возникновению в конце XVIII — первой трети XIX в. аналитической механики. Все эти обстоятельства отодвигают на второй план вопросы аксиоматики и физических оснований механики. Г. п. о. вообще перестает упоминаться в числе основ механики. Принципы евклидовой симметрии пространства и однородность времени также явно не формулируются, хотя и подразумеваются, например, в трудах классиков аналитической механики Ж. Лагранжа, У. Р. Гамильтона, К. Якоби, М. В. Остроградского и др. как основа для вывода законов сохранения импульса, момента импульса и энергии. К этому периоду, впрочем, относится замечательное исследование Эйлера (1739), посвященное анализу явления аберрации (которое было открыто Дж. Брэдли в 1727 г.) с позиций эфирно-волновой и корпускулярно-механической теорий света [18]. Проводя вычисления для двух случаев — когда движется излучающий объект и когда движется наблюдатель, он получает совпадение результатов при использовании корпускулярно-механической теории, опирающейся на г. п. о., и расхождение для волновой теории, которая выделяет абсолютную систему отсчета, связанную с эфиром. Разница в формулах была, однако, слишком мала (порядка $v^2/c^2$, где $v$ — относительная скорость наблюдателя и объекта, $c$ — скорость света), чтобы ее можно было обнаружить экспериментально, и в практических расчетах аберрации Эйлер использовал более простую формулу, основанную на корпускулярной теории и, таким образом, на г. п. о., хотя отдавал предпочтение эфирно-волновой концепции. Эта работа Эйлера предвосхитила центральный пункт дискуссий, связанных с оптикой движущихся сред и проблемой эфира во второй половине XIX в., и сыграла основополагающую роль в генезисе теории относительности.

**4. В преддверии теории относительности** [16, 17, 19—21]. В XIX в. механика продолжает оставаться теоретической основой физики, но развитие оптики, электродинамики, теории теплоты все больше выводит физику за рамки механики. Несводимость термодинамики к механике, неудачи в построении механической теории эфира, разработка концепции электромагнитного поля, выдвижение на первый план проблем оптики и электродинамики движущихся тел — все это привело в последней трети XIX в. к возникновению интереса к физическим основаниям механики, в частности к проблемам абсолютных пространства и времени и корректного определения инерциальной системы отсчета. К. Нейман в конце 60-х годов пытался связать абсолютное пространство с существованием некоторого гипотетического объекта во Вселенной — «телом альфа», что должно было придать и принципу инерции и г. п. о. известное физическое обоснование. Э. Мах примерно в это же время пытается найти решение проблемы в противоположном направлении, полагая, что принцип инерции должен быть переформулирован на основе отказа от понятий абсолютных пространства и времени. Л. Ланге, избегая этих крайностей, пытался дать физически обоснованное определение инерциальной системы отсчета и сохранить тем самым классическую формулировку г. п. о. (1885—1886) [1, 20].

Возобновление интереса к физическим основаниям механики в последней трети XIX в. сопровождалось введением новых геометрических и теоретико-инвариантных методов в механику и физику (неевклидовы геометрии и винтовое исчисление в механике, использование римановой геометрии в аналитической механике, теория касательных и канонических преобразований, использование теории групп в кристаллофизике и т. д.). Этому способствовало и утверждение теоретико-инвариантного подхода в геометрии (Эрлангенская программа Ф. Клейна, 1872), согласно которому каждая геометрия рассматривалась как теория инвариантов некоторых групп преобразований [19]. Одной из первых дорелятивистских работ, в которой г. п. о. был использован как принцип инвариантности для построения основ механики, было исследование И. Шютца (1897). Он вывел 2-й и 3-й законы ньютоновской механики из так называемого принципа абсолютного сохранения энергии, т. е. из условия справедливости закона сохранения энергии во всем классе инерциальных систем отсчета. Иначе говоря, он сформулировал классическую механику на основе принципов сохранения и инвариантности, а именно принципа сохранения энергии и г. п. о. [16].

**5. Через призму теории относительности.** Попытки преодоления в электронной теории, электродинамике и оптике движущихся тел трудностей, связанных с необходимостью непротиворечивого согласования теории электромагнитного поля, с одной стороны, с г. п. о., а с другой — с результатами опытов И. Физо, Дж. Б. Эри, Г. А. Роуланда, В. К. Рентгена, А. А. Эйхенвальда, Ч. Вильсона и особенно опытов Майкельсона — Морли привели в конечном счете к открытию специальной теории относительности, в которой решающую роль сыграли теоретические исследования Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна. Место г. п. о. при этом занял эйнштейновский принцип относительности, связанный с инвариантностью физических законов относительно преобразований Лоренца, а группа Галилея—Ньютона была заменена группой Пуанкаре или неоднородной группой Лоренца. Понимание того обстоятельства, до некоторой степени предвосхищенного Шютцем, что классическая механика может быть сформулирована как теория инвариантов группы Галилея—Ньютона, было фактически следствием соответствующей формулировки специальной теории относительности, развитой в 1907—1910 гг. Г. Минковским и Ф. Клейном. Клейн писал в 1910 г.: «Классическая механика, как и новая (т. е. релятивистская.— *Вл. В.*) механика, является «теорией относительности» по отношению к некоторой группе с десятью параметрами», т. е. группе Галилея—Ньютона [22, с. 170].

Представление об этой группе как единой совокупности преобразований, действующих на пространственно-временном многообразии и являющихся предельным случаем преобразований группы Пуанкаре, также было разработано Минковским и Клейном.

В соответствии с первой теоремой Нетер симметрии галилей-ньютоновской группы, а именно, однородность пространства и времени, изотропность пространства и г. п. о., связаны соответственно с законами сохранения импульса, энергии, момента импульса и движения центра тяжести [16]. Если связь первых трех законов с евклидовой симметрией пространства и однородностью времени была установлена уже классиками аналитической механики Лагранжем, Гамильтоном и др. в конце XVIII — первой половине XIX в., то связь закона сохранения движения центра тяжести с г. п. о. следовала из установленной немецким ученым Г. Герглотцем взаимосвязи преобразований Лоренца с релятивистским аналогом этого закона (1911). В 1916 г. Ф. Энгель непосредственно связал все симметрии галилей-ньютоновской группы с основными законами сохранения классической механики, включая закон сохранения движения центра тяжести, который следовал из инвариантности законов механики относительно галилеевских преобразований. Эти работы Герглотца и Энгеля сыграли существенную роль в установлении общих теорем Нетер о связи законов сохранения с принципами симметрии.

Группа Галилея—Ньютона является также группой пространственно-временной симметрии нерелятивистской квантовой механики, что позволяет естественным образом ввести основные динамические переменные этой теории: импульс, энергию и т. д. Основное значение для классификации состояний квантовомеханических систем и вычисления ряда квантовомеханических величин имеет, однако, не вся группа Галилея—Ньютона, а только ее подгруппа вращения, включающая пространственные отражения. Теория представлений группы вращения и перестановочной группы, развитая применительно к расчету атомных спектров Е. Вигнером, Дж. фон Нейманом, Г. Вейлем и др., сыграла существенную роль в развитии квантовой механики.

Вклад собственно г. п. о. в квантовую механику до недавнего времени ограничивался требованием инвариантности уравнения Шредингера относительно галилеевских преобразований. Только в 1954 г. В. Баргман показал, что г. п. о. в нерелятивистской квантовой механике приводит к такому правилу суперотбора, которое гарантирует существование строго фиксированного значения массы частиц [23, с. 384—391]. Результат Баргмана означает, что в галилей-инвариантной квантовой механике нельзя описывать состояния, в которых имеется спектр масс, или состояния, соответствующие нестабильным элементарным частицам.

Таким образом, эволюция г. п. о. и галилей-ньютоновской симметрии в неклассической физике протекала в двух направлениях. С одной стороны, она была связана с открытием сначала специальной, а затем общей теории относительности. Г. п. о. и группа Галилея—Ньютона в классической физике были заменены эйнштейновским принципом относительности и группой Пуанкаре в специальной теории относительности. Общая теория относительности, отвергнув привилегированное положение класса инерциальных систем отсчета, выдвинула общий принцип относительности, постулирующий равноправие произвольно движущихся систем отсчета. Другое направление относится к квантовой механике. Здесь кардинальных сдвигов в понимании г. п. о. и группы Галилея—Ньютона не произошло, если не считать нетривиальных выводов, связанных с теоремой Баргмана, и характерного для квантовой механики перехода от анализа инвариантов группы к теории ее представлений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лауэ М.* Д-р Людвиг Ланге. — В кн.: *Лауэ М.* Статьи и речи. М.: Наука, 1969, с. 153—162.
2. *Frank Ph.* Das Relativitaetsprinzip der Mechanik und Gleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körper.— Ann. Phys., 1908, Bd. 27, S. 897.
3. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. T. 2. B.: Springer, 1927. 208 S.

4. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1974, т. 3. 771 с.
5. *Кузнецов Б. Г.* Принцип относительности в античной, классической и квантовой физике. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 232 с.
6. *Идельсон Н. И.* Этюды по истории небесной механики. М.: Наука, 1975. 496 с.
7. *Koyré A.* Études galiléennes. P.: Hermann, 1939. Vol. 3. 184 p.
8. *Погребысский И. Б.* Становление классической механики (XVII в.).— В кн.: История механики с древнейших времен до конца XVIII в. М.: Наука, 1971, с. 83—121.
9. *Галилей Г.* Избр. тр. М.: Наука, 1964, т. 1, с. 285—286.
10. *Tonnelat M.-A.* Histoire du principe de relativité. P.: Flammarion, 1971. 561 p.
11. *Drake S.* Galileo at work. His scientific biography. Chicago; London: Univ. of Chicago press, 1978. 536 p.
12. *Кузнецов Б. Г.* Галилей. М.: Наука, 1964. 326 с.
13. *Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики с древнейших времен до конца XVIII в. М.: Наука, 1974. 350 с.
14. *Гюйгенс X.* О движении тел под влиянием удара. — В кн.: Гюйгенс X. Три мемуара по механике. М.: Изд-во АН СССР, 1951, с. 211—245.
15. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР. Т. 7. Ис. Ньютон. Математические начала натуральной философии/Пер. с лат. с примеч. и поясн. А. Н. Крылова. 1936. 696 с.
16. *Визгин В. П* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972. 240 с.
17. *Погребысский И. Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. М.: Наука, 1966. 327 с.
18. *Шпайзер Д.* Л. Эйлер: (Принцип относительности и основы классической механики). — В кн.: Механика и физика второй половины XVIII в. М.: Наука, 1978, с. 134—140.
19. *Визгин В. П.* «Эрлангенская программа» и физика. М.: Наука, 1975. 112 с.
20. *Лауэ М.* История физики. М.: Гостехтеориздат, 1956. 230 с.
21. *Treder H.-J.* Galilei-Transformationen.— Wiss. Ztschr. Humboldt Univ. Berlin, Math.-Phys. R., 1965, Bd. 14, S. 417—420.
22. *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцевой группы.— В кн.: Новые идеи в математике. СПб., 1914, № 5. Принцип относительности в математике, с. 144—174.
23. *Кэмпфер Ф.* Основные положения квантовой механики. М.: Мир, 1967. 391 с.

УДК 531/534(091)

*А. Т. Григорьян*

# ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

> Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность.
>
> *С. И. Вавилов*

В 1983 г. исполняется 200 лет со дня смерти Л. Эйлера — одного из основоположников современной механики.

Леонард Эйлер (1707—1783) — великий ученый, оказавший большое влияние на развитие физико-математических наук в XVIII в. В его творчестве поражает глубина исследовательской мысли, универсальность таланта и огромный объем оставленного научного наследия.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в Базеле (Швейцария) в семье пастора Пауля Эйлера. Первые уроки математики Леонард Эйлер получил у своего отца. Несмотря на исключительные математические способности сына, Пауль Эйлер хотел дать ему богословское образование, но, к счастью для науки, тот не сделался священником. В 1720 г. Эйлер поступил в Базельский университет. Его математическое дарование привлекло внимание Иоганна Бернулли. Под руководством Бернулли Эйлер в короткое время изучил ряд классических трудов по математике и добился замечательных успехов. Он стал другом сыновей своего учителя — Николая и Даниила Бернулли, которые также успешно занимались математическими науками. Эта дружба сыграла большую роль в жизни Эйлера.

8 июня 1724 г. Эйлер блестяще окончил университет и получил звание магистра искусств. Молодой ученый занялся поисками работы в Базеле, но безуспешно. Братья Бернулли также не смогли найти на Родине применения своим дарованиям.

В 1725 г. Николай и Даниил Бернулли были приглашены для работы в учрежденную в Петербурге Академию наук [1]. Оказавшись в Петербурге, братья Бернулли употребили много усилий, чтобы добиться приглашения туда Леонарда Эйлера. Президент Петербургской академии наук медик Л. Л. Блюментрост согласился предоставить Эйлеру место адъюнкта. Он принял это предложение.

5 апреля 1727 г. двадцатилетний Эйлер навсегда покинул Базель и 17 мая приехал в Петербург.

С этого времени начинается работа Эйлера в Петербургской академии наук. По своей интенсивности эта работа едва ли имеет равную себе в истории науки. С неукротимой энергией Эйлер занимается новыми и новыми проблемами математических и прикладных наук. Уже за время первого своего пребывания в Петербурге (1727—1741) он подготовил более 75 работ. В эти годы не вышло ни одного тома (за исключением первого) трудов Академии, который не содержал бы нескольких его крупных работ. В результате плодотворной научной деятельности Эйлера и других ученых «Commentarii» стали одним из лучших научных журналов того времени.

Уже тогда Эйлер пользовался огромным научным авторитетом. В этом смысле показательна его переписка с И. Бернулли. Она интересна не только в научном отношении. Бернулли — великий математик, которого называли Нестором геометрии, находившийся уже в преклонных летах,— не стеснялся советоваться с бывшим своим учеником, интересовался его мнением о своих новых трудах.

[1] Николай Бернулли проработал в Петербургской академии всего 8 месяцев. Он умер в 1726 г. в расцвете сил, успев опубликовать лишь две статьи в первом томе «Записок Петербургской академии наук» («Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae»): одну — по теории удара и другую — о решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наряду с многогранной научной деятельностью Эйлер принимал активное участие и в других работах Академии. Он читал лекции студентам академического университета, принимал экзамены и т. д. Эйлер основательно изучил русский язык и свободно говорил и писал по-русски. В Архиве Академии наук СССР хранятся письма ученого, написанные на русском языке.

Эйлера привлекали в качестве эксперта по вопросам техники; он участвовал в комиссии мер и весов, занимался вопросами устройства пожарных насосов и механических пил и т. д. В течение ряда лет Эйлер работал в Географическом департаменте, которому было поручено составление генеральной карты России. Здесь он был главным консультантом по вопросам математики, руководителем больших циклов работ, вычислителем, сам чертил карты. Впоследствии он писал: «Я уверен, что география российская через мои и г. профессора Гейнзиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли» [1, с. 255].

В 1740 г. в Петербургской академии наук установилась атмосфера деспотизма. Судьба Академии и ее членов зависела от таких невежественных людей, как Бирон, Шумахер и др. Очевидно, это в какой-то мере заставило Эйлера принять приглашение прусского короля Фридриха II и переехать в Берлин. Перед отъездом из Петербурга Эйлеру было присвоено звание почетного члена Петербургской академии наук с ежегодной пенсией в 200 рублей.

Берлинский период жизни Эйлера характеризуется прежней высокой научной активностью. За это время Эйлер опубликовал свыше 235 мемуаров, в том числе такие крупные работы, как «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (1744 г.), два тома «Введения в анализ бесконечно малых» (1748 г.), два тома «Морской науки» (1749 г.), «Теорию движения Луны» (1753 г.), «Дифференциальное исчисление» (1755 г.), «Теорию движения твердых тел» (1765 г.) и много других классических работ по математической физике, гидродинамике, баллистике, дифференциальной геометрии, тригонометрии, теории чисел и т. д.

Эйлер решал и чисто инженерные задачи. Так, в 1749 г. ему было поручено осмотреть канал между Гавелем и Одером, указать необходимые меры исправления этого водного пути, исправить водоснабжение в Сан-Суси и т. п. Эйлер написал ряд статей, обобщающих эти практические задачи.

Следует заметить, что свою работу «Морская наука» он начал по поручению Петербургской академии и вчерне закончил еще в 1737 г.; этот труд был издан в Петербурге. Точно так же по особой договоренности с Петербургской академией им были написаны «Дифференциальное исчисление» и «Теория движения Луны», изданные в Берлине.

Связь Эйлера с Петербургской академией не прекращалась в течение всего времени его пребывания в Берлине. За эти годы он опубликовал в изданиях Петербургской академии наук свыше

100 мемуаров. Он редактировал также математический отдел ее «Ученых записок» и вел с Академией весьма оживленную и важную переписку по самым разнообразным научным и научно-организационным вопросам. Он знакомил петербургских академиков с научными новинками Западной Европы, помогал советами в организации конкурсов, подбирал книги, инструменты, рецензировал работы студентов академического университета. На квартире у Эйлера годами жили присланные к нему для завершения образования русские адъюнкты Петербургской академии. Таким образом, Эйлер, как выразился его ученик академик Н. И. Фусс, никогда не переставал принадлежать русской Академии наук.

Однако пребывание в Берлине сопряжено было для Эйлера и с рядом трудностей. Его отношения с королем Фридрихом, постоянно вмешивающимся в дела Берлинской академии и недостаточно ценившим великого ученого, с годами все ухудшались. Эйлер чаще и чаще задумывался о возвращении в Россию. В середине 60-х годов натянутые отношения с королем переросли в резкий конфликт и после приглашения Екатерины II Эйлер решил вернуться в Россию.

В июле 1766 г. Эйлер вновь прибыл в Петербург, где и прожил до конца жизни.

За последние 17 лет жизни в Петербурге Эйлер опубликовал несколько сот работ по различным вопросам математики, механики, физики. В 1769—1771 гг. он подвел итог своим оптическим работам в трех томах «Диоптрики». В это же время академическая типография напечатала три тома его «Писем к одной немецкой принцессе», три тома «Интегрального исчисления», два тома «Алгебры», астрономические работы, статьи по теории мореплавания и др. В академических «Записках» по-прежнему регулярно появлялись статьи Эйлера. Он работал так много, что в «Записках» не успевали помещать его новые статьи и образовывался их запас на много лет. Эйлер шутливо говорил, что его статьи будут печататься в журналах Академии еще двадцать лет после его кончины. На самом же деле сочинения Эйлера публиковались Петербургской академией наук до 1862 г.

Своими трудами Эйлер прославил Академию наук. Его плодотворная научная деятельность сказалась на дальнейшем развитии физико-математических наук в России. Он оказал неоценимую услугу русской науке, воспитав целую плеяду выдающихся ученых. Многие петербургские академики — С. К. Котельников, С. Я. Румовский, М. Е. Головин, Н. И. Фусс, С. Е. Гурьев и др.— были или непосредственными его учениками, или же воспитывались на его сочинениях. Эти ученые играли большую роль в деле налаживания преподавания в самой Академии и в первых русских университетах — Московском и Казанском, а также в технических учебных заведениях Петербурга.

Работы Эйлера произвели на современных ему ученых не только глубокое, но, можно сказать, ошеломляющее впечатление. Д'Аламбер в одном из своих писем Лагранжу называет Эйлера «ce diable d'homme» («этот диавол»), желая выразить этим, что сделанное Эйлером превышает силы человеческие [2, с. 18].

Младший современник Эйлера Лаплас говорил своим ученикам: «Читайте, читайте Эйлера — он наш общий учитель». Эти слова знаменитого французского ученого и по сей день сохраняют свою силу. На трудах Леонарда Эйлера воспитывались все выдающиеся математики и механики второй половины XVIII в. Гаусс писал, что изучение трудов Эйлера является наилучшей школой в самых различных областях математики. Исключительно высоко оценивал работы Эйлера и их влияние на развитие математических наук во всем мире, и в частности в России, М. В. Остроградский. Труды Эйлера и в последующие столетия оставались богатым источником, из которого многие ученые, среди которых следует назвать имена таких знаменитых математиков и механиков, как Ж. Лагранж, Н. И. Лобачевский, К. Ф. Гаусс, П. В. Чебышев, Н. Х. Абель, К. Якоби, Г. Монж, Б. Риман, М. В. Остроградский, С. Д. Пуассон и др., черпали знания и проблемы для научной работы. Огромные заслуги Эйлера были признаны всем ученым миром. Он был избран академиком восьми стран мира (в том числе Англии, Германии, России, Франции).

Эйлер дожил до 76 лет и имел многочисленную семью. Сын его Иоганн—Альбрехт Эйлер (1734—1800) состоял членом Петербургской академии наук, Карл Эйлер (1740—1790) был лейб-медиком Екатерины II, Христофор Эйлер (1743—1808) — генералом русской армии и начальником оружейного завода в Сестрорецке. У Эйлера было 38 внуков. Потомки великого ученого и в наши дни живут в Советском Союзе.

Творческая работа Эйлера не прекращалась до 18 сентября 1783 г. — последнего дня его жизни. В этот день он беседовал с академиком Лекселем на астрономические темы, потом играл с внуком, а за чаем, внезапно почувствовав себя плохо, сказал: «Я умираю». Через несколько часов Эйлер, по образному выражению Кондорсе, «перестал вычислять и жить».

Характеристикой творческого труда Эйлера может служить количество его работ, среди которых, кроме статей как небольших, так и могущих составить целую книгу, имеется еще несколько многотомных сочинений. Эйлеру принадлежит около 850 работ, из которых более половины напечатаны в изданиях русской Академии наук, и огромное количество писем на различные научные темы. Значительная часть трудов Эйлера посвящена механике, которая, вслед за математикой, была другой главной областью его творчества. Первая работа его, написанная в 1725 г. в возрасте восемнадцати лет, посвящена изохронным кривым в случае движения точки в сопротивляющейся среде; она вышла в «Acta eruditorum» за 1726 г. По механике Эйлер написал свыше 200 статей и книг, что составляет около четверти всех его публикаций (это без учета его многочисленных работ по небесной механике). Исследования Эйлера охватывали все отделы механики. Более 160 относятся к ее теоретическим проблемам:

общим вопросам (учение о пространстве, о природе материи и сил, принципе наименьшего действия), механике точки и твердого тела, давлению и удару, трению, теории упругости, сопротивлению материалов, гидро- и аэромеханике. Остальные 40 работ имеют своим предметом теорию машин, гидравлику, баллистику, теорию корабля и некоторые другие области прикладной механики.

Вскоре после переезда в Петербург Эйлер приступил к исследованию различных механических задач. Он продолжает глубоко изучать творения своих предшественников и одновременно выступает в печати с рядом оригинальных результатов. Начиная со второго тома в «Записках Петербургской академии наук» появляются его статьи о таутохронных кривых в случаях движения точки в пустоте и сопротивляющейся среде, о колебаниях упругих пластин, об ударе и др. Из 28 работ, представленных им Академии до конца 1734 г., 9 относились непосредственно к механике. Уже в первые годы научной деятельности Эйлер составил программу грандиозного и всеобъемлющего цикла работ. Эта программа изложена в его первой двухтомной монографии «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» [3], изданной в Петербурге в 1736 г. В ней Эйлер писал: «Итак, разнообразие тел предопределяет для нас первоначальное деление нашей работы. Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину,— тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, представленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы» [3, с. 89—90] [2].

Реализация намеченной программы, естественно, растянулась на десятилетия. Цитированная монография содержала основания динамики точки — под механикой Эйлер понимал науку о движении, в отличие от науки о равновесии сил, или статики. Отличительной чертой «Механики» Эйлера явилось широкое использование нового математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления. Это нашло отражение уже в названии книги и было подчеркнуто в предисловии к ней. Кратко охарактеризовав основные труды по механике, составленные на рубеже XVII—XVIII вв., Эйлер отмечал присущий им синтетико-геометрический стиль всего изложения, чрезвычайно затрудняющий чи-

---

[2] Цитируется по русскому переводу.

тателей. В такой именно манере были написаны «Математические начала натуральной философии» Ньютона, благодаря которым наука о движении получила наибольшее развитие, и более поздняя «Форономия» (1716 г.) Я. Германа — единственное тогда сочинение, в котором эта наука была изложена как самостоятельная дисциплина. Эйлер заявлял: «Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом» [3, с. 33]. Тут он ссылается на собственный опыт: познакомившись с обоими упомянутыми трудами Ньютона и Германа, он полагал, что ясно понял решение многих задач, но в действительности оказался не в состоянии решить даже мало отличающиеся от них новые проблемы. Тогда Эйлер стал перерабатывать синтетические доказательства в аналитические и, лучше уяснив суть вопроса, перешел к аналитическому изучению новых задач, что в свою очередь привело его к открытию новых методов, обогащающих как механику, так и сам анализ. «Таким образом и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке как то, что я нашел у других в их работах о движении тел, так и то, что я получил в результате своих размышлений» [3, с. 33—34].

Чрезвычайные выгоды, связанные с применением в динамике анализа вместо геометрических построений, общеизвестны. Следует заметить, что было бы неверно видеть заслугу Эйлера в одном только переводе динамики Ньютона с синтетико-геометрического языка на более простой аналитический. Эйлер создал принципиально новые методы исследования проблем механики, разработал ее новый математический аппарат и с блеском применил его ко множеству новых трудных задач. Он впервые сделал инструментом механики дифференциальную геометрию, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление. Синтетико-геометрический метод требовал, как правило, индивидуальных построений, приспособленных к каждой задаче в отдельности. Метод Эйлера, развитый как им самим, так и другими учеными, был единообразным.

Выход «Механики» Эйлера сразу привлек внимание ученых. Его учитель Иоганн Бернулли с похвалой отозвался о ней в письме к Эйлеру от 6 ноября 1737 г. В том же году появилось подробное изложение книги в издававшейся группой немецких ученых «Bibliothèque germanique» (т. 39), а еще год спустя восторженный отзыв был опубликован в лейпцигских «Nova acta eruditorum».

Через восемь лет после выхода «Механики» Эйлера обогатил эту науку первым точным выражением принципа наименьшего действия.

Этот принцип состоит в том, что для каждой физической системы существует некоторая величина, именуемая действием, которая принимает наименьшее значение при действительно происходящем движении. Идея принципа зародилась в оптике. П. Ферма в 1662 г. вывел закон преломления света исходя из принципа кратчайшего времени. Затем эта идея была воспринята И. Бернулли, а в 1744—1746 гг. ее развил применительно к механике П. Мопертюи. Принцип Мопертюи гласит: «*Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным*» (цит. по: [4, с. 53]). Свой принцип Мопертюи обосновал с метафизических и теологических позиций и пытался найти в нем новые аргументы в пользу существования бога как творца целесообразных законов природы.

Математическое выражение принципа Мопертюи было весьма ограниченным. Эйлер самостоятельно пришел к собственной формулировке принципа наименьшего действия в ходе занятий проблемами вариационного исчисления. Уже в конце 20-х годов XVIII в. он приступил к систематической работе в этой новой области математики, успешно продолжив исследования, начатые тридцатью годами ранее Иоганном и Якобом Бернулли. Результаты, полученные Эйлером на протяжении 15 лет и частью публиковавшиеся в «Записках Петербургской академии», были суммированы в большом трактате «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума», вышедшем в 1744 г. В этой работе содержится первая научная формулировка принципа наименьшего действия. Эйлер был уверен в существовании экстремальных законов, характерных для всех физических явлений. И он, подобно Мопертюи, еще соединял это положение с теологическими и телеологическими соображениями — великий ученый был верующим человеком. «Так как,— писал Эйлер,— все явления природы следуют какому-нибудь закону максимума или минимума, то нет никакого сомнения, что и для кривых линий, которые описывают брошенные тела, если на них действуют какие-нибудь силы, имеет место какое-то свойство максимума или минимума» [5, с. 573].

Публично Эйлер признал первенство Мопертюи в открытии принципа наименьшего действия. На самом деле оба они пришли к своим результатам самостоятельно и одновременно. Но для дальнейшего развития вариационных принципов механики отправным пунктом стал именно принцип Эйлера, применимый к непрерывным движениям и дававший дифференциальные уравнения траекторий, между тем как принцип Мопертюи относится лишь к случаям конечных и мгновенных изменений скорости. Преимущество Эйлера в обосновании и применении принципа признавал сам Мопертюи. На протяжении 1746—1749 гг. Эйлер написал еще несколько работ о фигурах равновесия гибкой нити, в которых принцип наименьшего действия получил применение к задачам, связанным с действием упругих сил. Больше он в этом направлении не работал, и новые результаты в этой области были получены прежде всего Лагранжем.

Эйлер внес большой вклад в развитие небесной механики. Хотя история небесной механики является частью общей истории астрономии, мы коротко остановимся на одном направлении работ Эйлера в этой области, сыгравшем важнейшую роль в утверждении закона всемирного тяготения Ньютона.

Одной из трудностей, которые должна была преодолеть механика Ньютона, была проблема фигуры Земли. Не меньшие трудности возникали при изучении движения планет Солнечной системы и прежде всего Луны. Основанные на законе тяготения расчеты А. К. Клеро и Ж.-Л. Д'Аламбера, произведенные в 1745 г., дали для апогея лунной орбиты период обращения в 18 лет — величину, вдвое превосходившую результаты наблюдений. Это ставило под удар всю систему Ньютона. Многие, в том числе Клеро и Эйлер, склонялись к тому, что необходимо внести поправки в самый закон притяжения. Но в 1749 г. Клеро сообщил Эйлеру, что обнаружил недостаточность метода, применявшегося в прежних вычислениях. Ранее Клеро ограничивался первым приближением решения соответствующих дифференциальных уравнений, и этим-то объяснилось указанное расхождение. Между тем привлечение второго приближения, по утверждению Клеро, дает численный результат, согласный с наблюдением. Этим же Клеро объяснял расхождение с действительностью данных, полученных Эйлером.

Эйлер не был убежден доводами Клеро и для решения вопроса посоветовал Петербургской академии объявить конкурс на тему: «Согласуются или же нет все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с теорией Ньютона? И какова истинная теория этих неравенств, которая позволила бы точно определить местоположение Луны для любого времени?» Конкурс был объявлен в конце 1749 г., Эйлер вошел в состав жюри. Клеро представил на конкурс свое сочинение. Ознакомившись с ним, Эйлер с полным беспристрастием отказался от своей прежней точки зрения. Он оценил труд Клеро, как великолепный, и в 1751 г. премия была присуждена французскому ученому за «Теорию Луны, выведенную из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний».

Но Эйлер не ограничился разбором теории Клеро. Чтобы проверить ее, он дополнительно исследовал вопрос с помощью другого, собственного метода, который изложил в книге «Теория движения Луны, выявляющая все его неравенства», опубликованной в 1753 г.

Так Клеро и Эйлер утвердили теорию тяготения Ньютона[3]. Расчетные приемы Эйлера получили и практическое применение. На основе его формул немецкий астроном И.-Т. Майер составил таблицы видимого движения Луны, которые были вскоре исполь-

[3] Подробнее об этом см. в [6].

зованы в справочниках для мореплавателей для определения долготы в открытом море по угловым расстояниям Луны от Солнца и еще некоторых удобных для наблюдения ярких светил. Такой способ определения долготы корабля применялся на практике более ста лет наряду с изобретенным в 1761 г. Т. Гаррисоном морским хронометром. Тогда же английский парламент выдал большие денежные премии Гаррисону и наследникам скончавшегося Майера; 300 фунтов стерлингов получил Эйлер, формулы которого употреблялись Майером при составлении лунных таблиц.

Не останавливаясь на других работах Эйлера по небесной механике, в частности по движению планет, и на его позднейшей новой теории Луны, заметим еще, что в них содержатся и важные результаты по общей механике, по динамике системы точек. Эти результаты были подытожены вместе с его открытиями по теории движения твердого тела в большом труде, законченном в 1760 г. и опубликованном в 1765 г.

Свой труд по динамике твердого тела «Теория движения твердых тел» [7] Эйлер начинает с большого введения из пяти глав, в котором вновь изложена динамика точки. Это позволяет читателю не обращаться к «Механике», вышедшей почти тридцатью годами раньше. В отличие от прежнего изложения Эйлер приводит уравнения движения точки, пользуясь проектированием на оси неподвижных прямоугольных координат. Следующий за введением «Трактат о движении твердых тел» состоит из 19 глав. В основу его изложения положен принцип Д'Аламбера, высказанный французским математиком в «Трактате о динамике» (1743 г.).

Коротко остановившись на поступательном движении твердого тела и введя понятие центра инерции, Эйлер переходит к рассмотрению вращения вокруг неподвижной оси и вокруг неподвижной точки. Здесь подробно разработан аппарат разнообразных формул для проекций мгновенной угловой скорости, углового ускорения на оси координат, используются так называемые углы Эйлера (впервые введенные им в 1748 г.). Далее изучены свойства момента инерции и вычислены моменты инерции ряда плоских и пространственных фигур. Главные оси определяются с помощью их экстремальных свойств (эллипсоид инерции еще отсутствует). В следующих главах разработана динамика твердого тела. Особый интерес представляет X глава, где рассмотрена задача о вращении твердого тяжелого тела вокруг его неподвижного центра тяжести при отсутствии внешних сил.

В двух следующих главах Эйлер решает задачу для случаев трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т. е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых дело сводится к элементарным интегралам. Мы не будем останавливаться на дальнейшей истории этой основополагающей в теории гироскопа задачи, ставшей предметом изысканий многих ученых. Скажем лишь, что первый шаг вперед сделал вскоре Лагранж, давший решение для случая, когда два главных момента инерции равны, а центр тяжести тела лежит на оси третьего момента (в дифференциальные уравнения входят тогда дополнительные члены, зависящие от координат центра тяжести). Новые глубокие исследования проведены были лишь через сто лет С. В. Ковалевской.

Влияние трудов Эйлера по механике на все последующее развитие этой науки и на ее преподавание было огромным. Как и в области математики, он был здесь, по выражению П. С. Лапласа, «общим учителем всех нас».

Имя Эйлера бессмертно, потому что созданные им научные ценности навсегда вошли в арсенал науки. Оно бессмертно и потому, что Эйлер был великим новатором. Содержанием его беспримерной по напряженности и продуктивности интеллектуальной деятельности были важнейшие математические, механические и физические обобщения, которые всегда будут служить человечеству на пути научного, технического и социального прогресса.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Пекарский П.* История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870. Т. 1.
2. *Крылов А. Н.* Леонард Эйлер. — В кн.: Леонард Эйлер: Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935, с. 1—28.
3. *Euler L.* Mechanica, sive motus scientia analyticae exposita. Petrop. 1736; Opera omnia, ser. 2, vol. 1—2. Lipsiae; Berolini, 1912. (Первые три главы из этой работы имеются в рус. пер. в кн.: Эйлер Л. Основы динамики точки. М.; Л.: ОНТИ, 1938.)
4. Вариационные принципы механики: Сборник классических работ/Ред., послесл. и примеч. Л. С. Полака и Г. А. Соколика. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума. М.; Л.: ОНТИ, 1934.
6. *Идельсон Н. И.* Закон всемирного тяготения и теория движения Луны. — В кн.: Исаак Ньютон. 1643—1727. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943.
7. *Euler L.* Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Petrop. 1765; Opera omnia, ser. 2, vol. 3—4. Lipsiae; Berolini, 1948—1950. (Первые пять глав этой книги в русском переводе вошли в кн.: Эйлер Л. Основы динамики точки. М.; Л.: ОНТИ, 1938.)


УДК 531/534(091)

*Э. Стипанич*

# БОШКОВИЧ И ЭЙНШТЕЙН

Труды Альберта Эйнштейна, этого Ньютона XX столетия и «одной из звезд первой величины на небе человечества» [1], наталкивают на размышления о теории натуральной философии Руджера Иосипа Бошковича (1711—1787).

Что в полном собрании трудов Эйнштейна напоминает нам труды Бошковича, если подходить к ним с точки зрения развития науки и философии? Что у них общего, если рассматривать труды этих ученых с позиций научного и философского познания природы? Почему каждый настоящий исследователь развития науки и философии, изучая теорию Эйнштейна о научном познании природы и ее философские применения, должен привлекать труды Бошковича? Какие научные и философские основания определяют место и роль теории натуральной философии Бошковича в развитии знаний о законах природы, которые увенчались построением теории относительности Эйнштейном и объясняют его стремление создать научно эффективную общую теорию единого физического поля?

Постараемся ответить на поставленные вопросы и выяснить место Бошковича на пути от Ньютона к Эйнштейну. Рассмотрим взгляды Бошковича на пространственно-временные соотношения в свете теории относительности Эйнштейна: некоторые общие идеи, принципы и построения физических теорий Бошковича и Эйнштейна, а также некоторые гносеологические характеристики, относящиеся к их исследованиям. При этом будут использованы работы по данному вопросу автора статьи, а также и хорошо известные результаты научных и философских исследований других авторов.

## I. ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ И ДВИЖЕНИЕ ПО БОШКОВИЧУ И ЭЙНШТЕЙНУ

**1. Пространственно-временные соотношения по Ньютону.** В своем главном научном труде «Математические начала натуральной философии» (Principia mathematica philosophiae naturalis, 1687) Ньютон сформулировал основные понятия о свойствах пространства—времени [2, с. 118—165; 3, с. 633—637; 4, т. I, с. 103—127].

Ньютон подчеркивает, что «абсолютное пространство по природе своей и безотносительно к чему-либо внешнему остается всегда подобным и неподвижным», в то время как «относительное пространство — это любая мера или размер этого пространства, которые определяют наши органы чувств своим положением по отношению к телам и которые обычные люди используют вместо неподвижного пространства».

Абсолютное движение, согласно Ньютону,— это «перенос тела из абсолютного места в абсолютное место», а относительное движение — «перенос из относительного места в относительное». Он подчеркивает, что по положению и удаленности предмета от какого-либо тела, «которое считаем неподвижным, мы определяем положение всех мест, а затем судим о всех движениях, ориентируясь на ранее определенные места, и считаем, что движение происходит от одних до других мест», но «в философских вопросах нужно абстрагироваться от чувств», так как «может слу-

*Р. И. Бошкович*
*(1711—1787)*

читься, что ни одно тело в действительности не находится в покое, по отношению к которому мы определяем место и движение».

Ньютон считает, что «абсолютные покой и движение отличаются от относительных своими свойствами, причинами и действиями» и нельзя определить абсолютный покой исходя из положения окружающих нас тел, и если бы существовали «в далеких краях неподвижные звезды или, может быть, еще дальше, за ними», какое-то тело, которое находилось бы в состоянии абсолютного покоя, то и в этом случае очень тяжело было бы различать абсолютные и относительные движения, поскольку абсолютное пространство, в котором в действительности тела движутся, недоступно нашему восприятию. Между тем «положение не совсем отчаянное», замечает Ньютон, так как «имеются аргументы, проистекающие частично из кажущихся движений, которые отличаются от настоящих движений, а частично — из сил, являющихся причинами настоящих движений и вызывающих их».

Абсолютное время, согласно Ньютону, «само по себе и по своей природе, без отношения к чему-либо извне течет равномерно, и по-другому его можно назвать длительностью», в то время как «относительное время, кажущееся и обычное,— это чувственная и внешняя (точная или неточная) мера продолжительности, полученная с помощью движения и употребляемая вообще вместо абсолютного времени (сюда относятся час, день, месяц и год)».

Для Ньютона время — универсальная независимая переменная величина. Он каждую величину рассматривает в зависимости от времени и называет ее текущей, переменной. По Ньютону, вся Вселенная охвачена единым течением времени, так что можно говорить о событиях, которые одновременно произошли в бесконечном пространстве, т. е. об абсолютном времени, которое течет независимо в целой Вселенной.

Из понятий абсолютного времени и абсолютного пространства следуют две основные предпосылки механики Ньютона: меры расстояния между двумя точками в пространстве и меры времени между двумя событиями не зависят от положения координатной системы, по отношению к которой измеряются расстояние и время.

**2. Сходство релятивистских взглядов Бошковича и Эйнштейна на пространство и время.** Бошкович оригинально и творчески подошел к теории натуральной философии Ньютона. Он относился к ней критически во многих вопросах, особенно когда речь шла о взглядах Ньютона на пространственно-временные соотношения [2, с. 118—165, 404—471; 5]. Бошкович затрагивал проблемы пространства и времени во многих своих трудах. Например, в научных исследованиях «De lumine, II» («О свете, II», 1748) и «De materiae divisibilitatae et principiis corporum» («О делимости материи и принципах построения тел», 1748) он подчеркивает, что пространство — больше предмет метафизики, чем физики. В первом исследовании Бошкович интуитивно подходит к вопросам пространства и времени. В исследовании «De continuitatis lege» («О законе непрерывности», 1754) в § 171, 172 Бошкович впервые кратко излагает свою теорию пространственных соотношений [6].

Бошкович побудил своего родственника и друга, выдающегося в то время латиниста и знатока натуральной философии Декарта и Ньютона, дубровчанина Бенедикта Стая (1714—1801) обработать в форме поэмы натуральную философию Ньютона. Б. Стай, подобно античному римскому поэту-философу Лукрецию, который в поэме «De rerum natura» («О природе вещей») дал поэтическое изображение атомистической теории природы Эпикура, изложил натуральную философию Ньютона в поэме «Philosophiae recentioris a Benedicto Stay in Rom. archigymn. publ. Eloquentiae Profess, versibus traditae libri X» («Десять книг новой философии в стихах, публикуемой Бенедиктом Стаем, профессором ораторского искусства в Римском лицее»), состоящей примерно из 25 000 стихов. Впервые поэма была опубликована в 1755 г., затем в 1760 и 1792 гг. Во всех трех изданиях содержатся многочисленные Примечания Бошковича. Здесь же помещены и отдельные Приложения Бошковича[1], два из которых он включил в свой главный труд «Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium» («Теория натуральной философии, приведенная к единому закону сил, существующих в природе», 1763). В этих Примечаниях и особенно в Приложениях Бошкович, критически относясь к взглядам Ньютона на пространство, время и движение, изложил и развил свои взгляды на эти понятия. Его взгляды имеют большое значение для научного и философского развития идей о движении, пространстве и времени в период от Ньютона к Эйнштейну.

В первом Приложении «De Spatio ac Tempore» («О пространстве и времени») Бошкович формулирует, так сказать, основное положение своей теории натуральной философии, т. е. своей теории о строении материи. Он говорит:

«Я не признаю полностью непрерывную протяженность материи, а считаю, что она состоит из точек, совершенно неделимых и непротяженных, разделенных между собой известными расстояниями и связанных известными силами, которые иногда являются притягательными, а иногда отталкивательными в зависимости от расстояний между точками».

Бошкович тут же замечает, что ему для этой теории *необходимо* рассмотреть вопрос о *пространстве и времени*, чем он далее и занимается, проявляя всю остроту и глубину своего аналитического ума.

Изложим кратко его рассуждения о пространстве и времени в Приложении, о котором идет речь.

Основой всей теории натуральной философии Бошковича является закон сил, по которому эти силы «иногда притягательные, а иногда отталкивательные в зависимости от расстояний между точками» как центрами этих сил. Поэтому он подробно занимается определением понятия «мест» материальных точек и утверждением существования этих «мест», так как они необходимы для определения понятия расстояния между двумя материальными точками.

К материальным точкам как к центрам притягательно-отталкивательных сил Бошкович присоединяет реальные локальные модусы существования (reales modos existendi locales). На этих модусах существования основывается реальное локальное расстояние между двумя материальными точками. Другими словами, упомянутые модусы существования индуцируют это расстояние как определенное локальное отношение между двумя точ-

[1] В нашем изложении используются латинские тексты Приложений и их переводы на сербско-хорватский язык, опубликованные в трудах [7, 8].

ками. Расстояние это всегда конечно, так как для Бошковича (с учетом его положения о том, что не существует актуальной бесконечности) «не существует промежутка, который определен сам по себе и который бесконечно велик или бесконечно мал». В общем случае это расстояние, отличное от нуля. Если оно равно нулю, точки совпадают, и поэтому не может быть непосредственно соседних локальных точек. Локальные модусы существования индуцируют реальную физическую протяженность, которая не является важной характеристикой теории натуральной философии Бошковича.

Ко всем материальным точкам Бошкович присоединяет и реальные временные модусы существования (reales modos existendi temporarios). На них основывается реальный временной промежуток между двумя событиями.

В своих рассуждениях о пространстве и времени Бошкович упорно настаивает на том, что «любая точка имеет реальный модус существования, согласно которому она находится там, где есть, и другой реальный модус, согласно которому она существует тогда, когда существует». Оба эти модуса существования Бошкович всегда рассматривает вместе, т. е. утверждает единство локальной точки и момента времени. Такой подход к пространственно-временно́му определению материальной точки подстрекающе действует на научном пути, ведущем к четырехмерному «миру» Минковского в теории относительности Эйнштейна.

Бошкович различает два пространства. Одно, воображаемое или пустое, представляет собой, в сущности, трехмерную непрерывность геометрических или воображаемых точек. Другое пространство *реальное* и представляет собой прерывистую и конечную совокупность «реальных модусов существования» материальных точек, которые являются точками «пространственного порядка», т. е. множество «действительных локальных точек» (puncta loci realia). Это множество является предпосылкой физического пространства, которое не является, как выражается Бошкович в своем известном исследовании «De materiae divisibilitatae» («О делимости материи»), «чем-то, что реально существует без тела и движения» [2, с. 131]. Таким образом, реальное пространство Бошковича прерывисто, конечно по числу своих элементов и неотделимо от материи.

*Реальное* время, по Бошковичу, — это совокупность «реальных модусов существования» материальных точек «временно́го порядка», т. е. временны́х точек или моментов (momenta temporis), а *воображаемое* или пустое время — одномерная непрерывность воображаемых или пустых моментов.

Пустое пространство, по Бошковичу,— это только возможность существования реальных локальных точек, а пустое время — только возможность существования реальных временных точек или моментов. Другими словами, по Бошковичу, не существует реального пространства и реального времени вне реальных материальных точек, а пустое пространство и пустое время существуют как возможности, которые благодаря присутствию материальных точек превращаются в реальность, т. е. в реальное пространство и реальное время. В глобальном видении Бошковичем пространства «реальные локальные точки» как «реальные модусы существования» материальных точек и как организационные элементы реального пространства «исчезают и появляются» (Modi illi reales singuli et oriuntur, ac pereunt...). Это значит, что точки пустого пространства, если говорить метафорически, загораются, как какие-то сигналы реального пространства, а затем погасают, когда материальные точки изменяют свои «действительные локальные точки», чтобы снова загорелись новые точки пустого пространства, т. е. реальное пространство Бошковича проявляется как некоторое загорание и погасание во тьме пустого пространства.

Аналогично можно сказать и об отношениях реального и пустого времени.

Таким образом, материальные точки — это conditio sine qua non реального пространства и реального времени Бошковича, которые «появляются и исчезают» вместе с этими точками, т. е. с их «реальными модусами существования».

Когда Эйнштейна попросили однажды в нескольких словах изложить сущность своей теории относительности, он среди прочего сказал: «Ранее считалось, что, если бы вся материя исчезла из Вселенной, время и пространство остались бы. По теории относительности время и пространство исчезнут вместе с телами» [4, т. II с. 44] [2].

Из сопоставления этого высказывания Эйнштейна и того, что было сказано ранее о пространстве и времени Бошковичем, полностью вырисовывается большое сходство видения Бошковичем реального пространства и реального времени и существа взглядов Эйнштейна на пространство и время.

Расстояние между двумя любыми материальными точками, по Бошковичу, конечно, так как он не признает актуальную бесконечность, поэтому его реальное пространство помещается в конечной части пустого пространства, т. е. «радиус» его реального пространства конечен. Это выглядит как некоторое предвосхищение идеи о структуре пространства, высказанной в общей теории относительности Эйнштейна, согласно которой «радиус $R$ реального мира», т. е. радиус пространства, «населенного» материей, конечен и определяется из простого соотношения

$$R^2 = 2/\varkappa\rho,$$

где $\rho$ — плотность материи и $2/\varkappa = 1{,}08 \cdot 10^{27}$ [9, с. 126—127; 10, с. 88—96].

Часто предметом наблюдений и анализов Бошковича в связи с пространством и временем является *аналогия* воображае-

---

[2] Здесь и далее некоторые высказывания Эйнштейна даны по книге Б. Г. Кузнецова «Эйнштейн», переведенной на сербскохорватский язык.

мого пространства как трехмерной непрерывности воображаемых (геометрических) точек и воображаемого времени как одномерной непрерывности воображаемых моментов. Он анализирует восемь возможных комбинаций (присоединения) временных моментов к локальным точкам посредством материальных точек [6, с. 109—110]. Семь комбинаций он отбрасывает как неосуществимые (невозможные), чем спасает аналогию пространства и времени, но одна из них (пятая), которая «не только возможна, но и необходима для всех точек материи, т. е. для тех, которые сосуществуют», портит эту аналогию, так как в этой комбинации «многочисленные точки материи соединяют один и тот же момент времени с различными локальными точками».

Аналогия воображаемого пространства и воображаемого времени полностью осуществляется при движении материальной точки, «поскольку все точки положений могут существовать одна за другой на какой угодно линии, конечно в непрерывном движении, а точно так же могут существовать и все моменты непрерывного времени, одни после других при существовании во времени какой-либо вещи», говорит Бошкович. «И все-таки, — подчеркивает он, — в трехмерности пространства и единственности времени точка или момент будут как некоторое начало, чье непрерывное движение дает понятие о возникновении пространства и времени». Создается впечатление, что Бошкович во всех этих наблюдениях и анализах интуитивно блуждал по путям, ведущим к открытию тех скрытых характеристик непрерывности различных размеров, которые только современная теория множеств зафиксировала точными понятиями на основе взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений.

Здесь интересно заметить, что Бошкович, отбрасывая упомянутые комбинации временных моментов с локальными точками, использовал вероятностные (пробабилистические) рассуждения и заключения, которые напоминают современное вероятностное рассмотрение процессов в микромире [6, с. 158; 11; 12, с. 220].

В другом своем Приложении «De Spatio et Tempore, ut a nobis cognoscuntur» («О пространстве и времени, какими мы их осознаем») Бошкович рассматривает вопросы нашего познания пространства и времени.

В самом начале он подчеркивает: «В предыдущем Приложении мы говорили о пространстве и времени, какими они являются сами по себе. Остается в связи с ними затронуть то, что относится к ним, какими мы их осознаем».

Рассмотрим кратко рассуждения Бошковича в этом Приложении.

Прежде всего Бошкович анализирует разные формы принципа относительности, из чего ясно видно, что он смотрит на пространственные соотношения с релятивистских позиций. Он приходит к выводу, что в случаях рассматриваемых форм принципа относительности мы ощущаем не абсолютную перемену в пространственных соотношениях, а всего лишь отличие нового состояния от прежнего, а эта разница, по его мнению, относительна.

Бошкович ставит вопрос: каким образом мы свой вывод об одинаковости двух вещей делаем из их одинаковости с третьей вещью? В ответе Бошковича на этот вопрос содержатся те его релятивистские взгляды на пространство и время, которые в развернутой форме предвосхищают взгляды Эйнштейна на эти понятия и относятся к сжатию длины и расширению интервала времени между двумя событиями в направлении движения.

Суть этого ответа, отличающегося остроумными анализами, состоит в следующем. При всяком конкретном измерении какого-либо расстояния или длины линии, определенной двумя точками, мы пользуемся само собой разумеющимся положением о *неизменности* длины мерки, например палки, и на основании этого положением о том, что *две длины равны между собой, если они равны одной и той же третьей длине.* Это в некотором роде неприкосновенная исходная истина, можно сказать интуитивно осознанная, на которой мы базируем измерения и таким образом приобретаем понятия о пространственных соотношениях, уверенные в том, что мы их абсолютно познали.

Бошкович на основе теории о строении материи, согласно которой тела — это совокупность разрозненных материальных точек, связанных между собой притягательно-отталкивательными силами, зависящими от взаимных расстояний между точками, подвергает критическому анализу традиционные, утвержденные чувственным восприятием и укоренившиеся истины. Так, он предварительно нашел, что расстояние между двумя материальными точками определяют их «реальные модусы существования» или их «реальные локальные точки». Эти модусы (или способы, образы, проявления) существования меняются, когда материальные точки изменяют свое положение, так как изменяются притягательно-отталкивательные силы.

Палка, с помощью которой мы производим измерение, состоит из материальных точек. При ее переносе во время измерений материальные точки, из которых палка составлена, изменяют свои места; тем самым меняются «реальные модусы существования» ее материальных точек, а значит, и расстояния между этими точками. Тогда ясно, что при переносе палки изменяется ее длина. Следовательно, палка, которой мы измеряем, например, длину $AB$, не остается такой же, когда мы измеряем другую длину, например $CD$, хотя мы считаем ее той же самой (используя безоговорочно положение о неизменности длины мерки), так как изменение длины палки не может быть воспринято нашими органами чувств. Из этого дальше следует, что неправилен вывод, который базируется на положении о том, что длина $AB$ будет равна длине $CD$, если палка как мерило по длине совпадает с $AB$ и $CD$, поскольку обе длины (на основании предыдущих рассуждений) не измеряются *той же самой* палкой. Она бы могла считаться той же самой по Бошковичу, если бы состояла из совсем непрерывной и твердой материи. Но, согласно теории Бошковича о строении материи, «нет тела, которое в себе не содержало бы совсем маленькие промежутки и которое было бы полностью стойко к сжатиям и растяжениям, появляющимся, хотя бы и в незначительной мере, во время переноса (тела)».

Мы не можем, следовательно, узнать абсолютные расстояния, так же как и не можем сравнить между собой с помощью общей мерки какие-либо длины; мы можем только оценить их благодаря знаниям, приобретенным с помощью чувственного восприятия, считая «мерами те общие мерки, которые, по мнению рядового человека, не подвергаются никаким изменениям».

В то же время «философы эти изменения должны признать», подчеркивает Бошкович, с очевидной целью указать на необходимость преодоления иллюзии чувственных восприятий и инерции укоренившихся взглядов.

Для того чтобы свою идею об изменении длины мерки, когда она меняет свое положение, сделать еще яснее, Бошкович проводит одно интересное и остроумное сравнение, состоящее в следующем: так же, как мы говорим, что все параллельные между собой прямые имеют *то же самое* направление, хотя эти направления в сущности различны, так и о разных расстояниях, конгруэнтных с одной и той же палкой, говорим, что они имеют одно и то же значение, хотя это, как мы видели, иллюзия.

По Бошковичу, не существует и интервал между двумя моментами времени, поскольку время получается на основе предположения о равномерном движении, которое в сущности, не существует. Поэтому, подчеркивает он, невозможно ни при измерении пространства, ни при измерении времени перенести определенные длины или определенные длительности из «одного места пребывания в другое для того, чтобы сравнение двух из них совершилось с помощью третьей» и «другая длина» или «другая длительность» заменяется тем, что считается одинаковым с первой».

Дальше Бошкович замечает, что обычный человек думает, что для измерения пространства существует *одна и та же мерка*, т. е. абсолютно неизменная, и что почти все остальные философы (что здесь означает все, кроме Бошковича) считают, что эта мерка *одна и та же*, если предположить, что эта мерка совершенно твердая и непрерывная, а мерило времени считают *одинаковым*, хотя оно, в сущности, переменно, но эта его изменчивость недоступна нашему чувственному восприятию. Между тем, акцентирует Бошкович, в его теории в обоих случаях существует совершенно одна и та же *аналогия* пространства и времени и в обоих случаях мерка *одинакова* (в смысле безоговорочно усвоенного положения о неизменности мерки, так как эта изменчивость недоступна для восприятия нашими органами чувств), а никак не одна и та же (в смысле абсолютной неизменности). Таким образом, Бошкович делает ясное различие между «одинаковой» и «одной и той же» меркой.

Бошкович, следовательно, совершенно критически подходит не только к иллюзии обычного рядового человека, когда речь идет об измерении пространства и времени, но и к мышлению «философов», что для его времени в первую очередь значит — к мышлению Ньютона, а именно к предпосылке о том, что интервал времени между двумя событиями и расстояние между двумя точками жесткого тела не зависят от движения инерциальной системы отсчета.

Бошкович, таким образом, и в этом смысле, в сущности, отбросил упомянутые две гипотезы классической механики.

Отверг их и Эйнштейн в своей частной (или специальной) теории относительности [9, 10, 13], когда точно установил относительность понятия одновременности. Эту теорию он построил исходя из двух постулатов, а именно из постоянства скорости распространения света в вакууме как общего закона природы и из принципа относительности, по которому две координатные системы, движущиеся одна по отношению к другой равномерно и прямолинейно, эквивалентны для выражения общих законов механики или физики. Между тем одна формула и конкретное применение хорошо известного положения классической механики о сложении скоростей привели к противоречию между приведенными постулатами, которые, по Эйнштейну, являются фундаментальными результатами опыта. Он с помощью критического анализа физических понятий времени и пространства показал, что положение классической механики о сложении скоростей основывается на гипотезах об абсолютности временного интервала и пространственного расстояния, т. е. на гипотезах об их независимости от состояния движения тела, которое мы считаем условно неподвижным, или инерциальной координатной системы, и что упомянутое противоречие между постоянством скорости распространения света в вакууме и принципом относительности является следствием этих гипотез. Другими словами, противоречие это только кажущееся, так как оно исчезает как только отбросим приведенные гипотезы и примем полученное с помощью математически точных преобразований Лоренца положение о том, что длина $l$, например, палки как пространственного расстояния изменяется в направлении ее равномерного и прямолинейного движения и составляет $l\sqrt{1-v^2/c^2}$, где $v$ — скорость, с которой движется палка или соответствующая координатная система; $c$ — скорость распространения света в вакууме. Точно так же и промежуток времени между двумя событиями изменяется и составляет $\Delta t/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Поскольку $v<c$, то из приведенных выражений ясно видно, что длина $l$ укорачивается (сокращение длины), а временной промежуток $\Delta t$ удлиняется (расширение времени).

Следуя утвержденному принципу относительности пространственного расстояния и временного интервала, Эйнштейн нашел, что скорости складываются по формуле $W=(w+v)/(1+wv/c^2)$, а не по формуле $W=w+v$ из классической механики, где $w$ и $v$ — параллельные скорости и $c$ — скорость распространения света в вакууме.

То, что первая формула больше согласуется с опытом, чем вторая, показывает, как подчеркнул сам Эйнштейн, эксперимент, который более чем за полвека до появления частной теории относительности провел выдающийся физик И. Физо и который имеет доказательную силу решающего опыта в пользу частной теории относительности. После принятия первой из приведенных формул сложения скоростей устраняется упоминавшееся противоречие между постоянством скорости распространения света в вакууме и принципом относительности как фундаментальными результатами опыта.

Поскольку любая скорость $v$ несравнимо меньше скорости распространения света в вакууме $c$, то практически можно считать, что $1—v^2/c^2 \approx 1$ и $wv/c^2 \approx 0$, т. е. что $l$ и $\Delta t$ не зависят от состояния движения инерциальной системы отсчета и что с достаточной точностью можно для сложения скоростей применять вторую из приведенных формул. Однако она недействительна для микромира, где микрочастицы движутся с огромными скоростями и где необходимо принимать во внимание сокращение меры длины и удлинение меры времени. Это значит, что мера $l$ пространственного расстояния между двумя точками или мера $\Delta t$ временно́го промежутка между двумя событиями, по Бошковичу, остаются *равными* самим себе, поскольку изменения обеих мер недоступны для восприятия нашими органами чувств, мы их считаем неизменными, хотя ни одна из них не остается *той же самой,* т. е. независимой от движения инерциальной системы отсчета.

Подчеркнем следующее. Сокращение меры длины и удлинение меры времени в теории относительности Эйнштейна следуют из принципа относительности и постоянства скорости распространения света в вакууме, при этом берется не само по себе движение, а движение по отношению к выбранной инерциальной системе отсчета. Изменение мер длины и времени в теории Бошковича возникает на основе его гипотезы о строении материи благодаря самому движению,

Итак, можно сказать, вырисовывается общее ядро в глобальных релятивистских видениях пространства и времени Бошковичем и Эйнштейном. Но здесь необходимо сразу подчеркнуть, что Эйнштейн благодаря своей гениальности и математическому остроумию свои идеи расширил, углубил и в общей и частной теориях относительности довел до ясных математических формулировок, что имело далеко идущие последствия и дало возможность получить конкретные результаты при изучении многих физических явлений и в раскрытии присущих им закономерностей. Бошкович же, ограниченный условиями своего времени, в основном остался в рамках критических и очень остроумных физико-гносеологических анализов относительности пространственно-временных соотношений. Но хотя Бошкович свои анализы не довел, как Эйнштейн, до каких-либо точных математических формулировок с возможными эффектами и конкретными исследованиями физических явлений, они все же могли вдохновляюще подействовать на исследователей типа Эйнштейна, если были непосредственно им известны.

**3. Релятивистские взгляды Бошковича и Эйнштейна на движение.** Абсолютное и относительное движения часто были предметом размышлений Бошковича и его очень остроумных анализов, критически направленных против взглядов Ньютона на абсолютное и относительное движения.

Релятивистские рассуждения Бошковича о движении нередко были связаны с движением Земли и с вопросом силы инерции. Находим мы их и в его комментариях, которыми он сопровождал упоминавшуюся поэму Стая, а также и в его исследованиях, например «De cometis» («О кометах», 1746 и 1785) и «Dissertatio de maris aestu» («О приливах и отливах», 1747). В этих исследованиях Бошкович использует, помимо галилеевой, и другие формы принципа относительности [2, с. 129—142].

В третьем Приложении «De motu absoluto, an possit a relativo distingui» («Об абсолютном движении и возможно ли его отличить от относительного») Бошкович на основе своих анализов о пространстве и времени и рассуждений в предыдущих двух Приложениях занимается вопросами движения.

Он сразу же утверждает, что из анализа природы пространства и времени, который содержится в предыдущих двух Приложениях, «следует сама собой идея об абсолютном и относительном движениях». По Бошковичу, абсолютное движение, если выражаться понятиями современной теории множеств, — это двухстороннее однозначное отображение непрерывности моментов времени и непрерывности пространственно-линейных точек, в то время как относительное движение — это изменение расстояния или направления или одного и другого. Рассматривая движение двух конкретных точек, Бошкович делает заключение, что абсолютное движение этих точек может быть без их относительного движения, а для их относительного движения необходимо, чтобы хотя бы одна из точек имела абсолютное движение.

Бошкович, как и Ньютон, принимает, в сущности, абсолютное движение, но в отличие от Ньютона он решительно утверждает, что абсолютное движение не может «никогда никаким образом отличаться от относительного» (hinc mihi quidem videtur evidentissimum illud, nos motum absolutum a relativo nulla unquam ratione posse distinguere), опровергая очень обоснованно аргументы Ньютона в пользу возможности различия между абсолютным и относительным движениями. (Опыт с круговым движением ведра, наполненного водой, и опыт с движением двух шаров, связанных нитью с их общим центром тяжести [14, 15].) Поэтому только в этом смысле Бошковича можно считать релятивистом, т. е. когда речь идет о движении, в отличие от полностью последовательных релятивистов, таких, как Э. Мах, А. Пуанкаре и особенно А. Эйнштейн, которые совсем отбрасывают идею об абсолютном движении.

Интересно упомянуть одно хорошо разработанное предложение Бошковича об определении скорости распространения света в разных средах, которое осуществляется с помощью его подзорной трубы с водой и которое, хоть и косвенно, находится в связи с идеей об абсолютном движении, т. е. с идеей существования абсолютной инерциальной системы отсчета.

Среди исследований выдающихся физиков, пытавшихся с помощью распространения света установить движение Земли по отношению к гипотетическому эфиру как к абсолютной инерциальной системе отсчета, самое значительное место занимает опыт Майкельсона — Морли, из которого следовало, что нет никакой разницы между скоростями распространения света в направлении движения Земли и в направлении, перпендикулярном ему. Настоящее физическое объяснение этому «парадоксальному» явлению дала теория относительности Эйнштейна. Этот эксперимент был в некотором роде решающим в пользу теории относительности, хотя был проведен почти за 20 лет до появления этой теории [9, с. 56—59].

Основательно изучив предложение Бошковича и соответствующие эксперименты, которые предшествовали опыту Майкельсона — Морли, известный югославский физик Станко Хондл (1873—1968) пришел к выводу, что «опыты с подзорной трубой Бошковича являются, по крайней мере как предложение, самыми старыми в ряде опытов, завершившихся опытами Майкельсона», и что «ни один обзор исторического развития новых идей о пространстве и времени и их эмпирического основания не сможет обойтись без имени Бошковича» [16].

Ньютон считал, что эффект центробежного ускорения при вращательных движениях доказывает существование абсолютного и относительного движений (два его упомянутых опыта). «Это, признаю, было бы верным, если бы телам была свойственна сила инерции или индифферентность по отношению к движению...» (Id quidem verum erit, si in corporibus admittatur vis inertiae, sive indifferentia ad motum, et quietem...), — замечает Бошкович и, оспаривая возможность различия абсолютного и относительного движений, подвергает критике идею Ньютона об абсолютной силе инерции (это бы значило, что по отношению к «абсолютному пространству» и «абсолютному времени» правомерно утверждение, что тело, на которое не действует никакая сила, останется в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения; без этого «покоя» и «равномерное прямолинейное движение» не имело бы подлинного смысла). Существование этой силы, по Бошковичу, ничем нельзя доказать — ни à priori, ни à posteriori; его можно только усвоить как подходящую гипотезу, чтобы с ее помощью объяснить явления движения.

В связи с этим имеют значение релятивистские рассуждения Бошковича в особом Приложении «De vi inertiae» («О силе инерции»). Поскольку абсолютный покой и абсолютное движение вообще невозможно осознать, Бошкович делает заключение, что «мы никаким опытом, никаким наблюдением никогда не замечаем, что может быть какое-либо движение, о котором можно сказать, что оно абсолютно прямолинейно и равномерно...»

Бошкович выдвигает свое понятие «относительной» силы инерции в противовес понятию «абсолютной» силы инерции у Ньютона. В связи с этим очень интересна мысль Бошковича о «звездном пространстве» [2, 15].

Заметим, что имеет смысл говорить об известном идейном и методологическом сходстве между образом мышления Бошковича в построении «звездного пространства» и определении понятия «относительной» силы инерции в этом пространстве и образом мышления Эйнштейна при обобщении принципа относительности в общей теории относительности. А именно, и Бошкович и Эйнштейн аналогичным образом, с гносеологической точки зрения, т. е. с точки зрения общенаучной логики, критически подходят к понятию равномерного и прямолинейного движения.

«Какая это такая привилегия дана равномерности и прямолинейности, что если тело их оставит, это будет означать перемену, а не будет означать перемену, если оно оставит другие состояния?» — спрашивает Бошкович и подчеркивает «предрассудки нашего человеческого ума» о так называемой большей простоте прямой линии по сравнению с кривой. Он утверждает, что нет никакой «метафизической нужды» для введения принципа инерции, так же как и не очевидно, «почему инерция в каком-либо состоянии (тела. — *Э. С.*) через некоторое время должна была бы неизбежно повлечь за собой инерцию во все дальнейшее время, которое следует». И дальше спрашивает, почему равномерное и прямолинейное движение «должно само по себе длиться, если оно однажды началось, или почему тело должно перейти к такому движению, как только перестанут действовать внешние силы, а не ранее» возникло и продлилось какое-либо другое, какое-нибудь криволинейное [2, с. 137—138].

Встав на критическую позицию по отношению к «привилегии» инерциальных координатных систем при трактовке общих законов физики, Эйнштейн в своем подходе к обобщению теории относительности говорит: «Ни один логически мыслящий человек не может удовлетвориться таким состоянием вещей. Он спросит, как это возможно, что известные тела или системы отсчета (или их состояния движения) отличаются от других тел или систем отсчета (или их состояний движения)? Какова причина этой привилегии?» [9, с. 79—80].

Таким образом, очевидно научное и гносеологическое сходство между приведенными критическими подходами Бошковича и Эйнштейна.

О взглядах Бошковича на пространство, время и движение писали многие выдающиеся югославские и иностранные авторы: историки наук, философы, физики и математики. Выдающийся французский историк наук, особенно истории теории относительности, Августин Сесма подчеркнул в своем научном труде «Genése des théories de la relativité» («Генезис теории относительности»), что Бошкович в отношении наших познаний физического мира — «подлинный предшественник и, может быть, первый по дате автор того релятивизма, который снова появится у Маха перед тем как у Эйнштейна доживет до своего расцвета в одной совершенно последовательной теории» [17, с. 5—6].

Среди югославских авторов наряду с теми, которых мы уже цитировали в этой работе, упомянем еще и известных нам следующих: Франю Марковича [18], Косту Стояновича [19], Лаву Чермеля [20, 21], Драгишу Ивановича [22] и Джорджа Николича [23, 24].

Душан Неделькович в своей докторской диссертации «La philosophie naturelle et relativiste de R. J. Boškovich» («Натуральная и релятивистская философия Р. И. Бошковича». Париж, 1922) внес значительный вклад в философское изучение релятивистских взглядов Бошковича на пространство, время и движение. В 1955 г. — в год пятидесятилетия теории относительности Эйнштейна — опубликован вместе с латинским текстом трудов Бошковича и перевод Недельковича на сербскохорватский язык основных текстов Бошковича, относящихся к теории относительности.

## II. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ У БОШКОВИЧА И ЭЙНШТЕЙНА

Проведем суммарный обзор общих принципов и законов природы, с которыми Бошкович и Эйнштейн как исследователи и философы природы встречаются и используют в своих стараниях построить общую и единую теорию о множестве различных явлений природы, непосредственно или опосредованно доступных для восприятия нашими органами чувств. Выделим то, что является общим в конечных целях их исследований и что в соответствии с этим похоже в построениях их теорий с общеметодологической и с философской точек зрения, точнее, с точки зрения онтологического и гносеологического значения.

**1. Теория Бошковича о едином законе сил и теория Эйнштейна о едином физическом поле.** Бошковича и Эйнштейна занимали явления, происходившие в микромире, которые косвенно или непосредственно доступны нашим чувственным восприятиям. Каждый из них свойственным ему образом, который определялся силой и глубиной общих и отдельных особенностей природы явлений, общими и особыми условиями времени, когда жили ученые, а именно состоянием научных знаний о микромире и состоянием соответствующих теоретико-математических и экспериментальных возможностей для достижения, утверждения и дальнейшего развития этих знаний, а также степенью общего развития общества, дал ответы на вопросы, которые возникали при изучении упомянутых явлений.

Так, Бошкович оригинально строил свою теорию о структуре материи на основе своих многолетних исследований в области физико-математических наук, своих глубоких и тонких размышлений о важных проблемах строения материи и силах, которые действуют между первичными элементами материи, своего активного и творческого участия в научно-природоведческих и философских дискуссиях, которые в середине XVIII в. очень интенсивно проводились в научных центрах Европы сторонниками натуральной философии Декарта, Ньютона и Лейбница. Эту свою теорию о строении материи Бошкович цельно и систематически изложил в своем главном труде под названием «Теория натуральной философии, приведенная к единому закону сил, существующих в природе», опубликованном впервые на латинском языке в Вене в 1758 г., а в переводе на сербскохорватский язык — в Загребе в 1974 г.

Главный труд Бошковича появляется, таким образом, на том этапе развития механики или физики, который характеризует уже ясный триумф галилеевых и ньютоновых физических концепций. Эти концепции Бошкович очень высоко ценил и уважал, борясь за то, чтобы они нашли свое место в науке и преподавании в его время, но одновременно он относился к ним критически. Правоту такого отношения Бошковича подтвердило дальнейшее равитие физики, на которое основное влияние оказали труды Эйнштейна.

Конец прошлого и первые десятилетия нашего столетия — это время, которое в развитии физики обычно оценивается как переходный этап от «классической» к «современной» физике. Для этого этапа труды Эйнштейна были решающими. Он очень богат необыкновенно плодотворными и новыми познаниями, достигнутыми с помощью очень тонких экспериментов и теоретических исследований электромагнитных, световых и других явлений, которые привели к открытию радиоактивных излучений и различных микрочастиц, к более глубокому и точному анализу строения вещества и закономерностей в процессах внутри микромира, к преобразованиям Лоренца, к моделям атома Томсона, Резерфорда и Бора, к кванту энергии Планка и к фотону Эйнштейна. Все это открыло широкие и непредвиденные перспективы для развития квантовой физики и вообще современной физики микро- и ультрамикромира.

Упомянутые исследования, во многих из которых Эйнштейн творчески участвовал, нашли свое синтетическое отражение в гениальных теориях относительности Эйнштейна и в его стремлении сконструировать теорию единого физического поля, которая бы была в теоретическом и экспериментальном смысле эффективна при объяснении очень большого числа различных явлений, открытых в микро- и ультрамикромире. Так появились многочисленные труды Эйнштейна, дискуссии и статьи, среди которых и работа «Zur Elektrodynamik bewegter Körper» [25] («Об электродинамике движущихся тел»), опубликованная в 1905 г., в которой Эйнштейн изложил свою частную теорию относительности, а затем в 1916 г. работа «Die Grundlagen der allgemeinen Relativitatstheorie» [26] («Основы общей теории относительности»), в которой изложена общая теория относительности. Многие работы Эйнштейна, опубликованные в 40-х и 50-х годах этого столетия, относятся к его теории единого физического поля; среди них выделяется работа «A generalization of the relativistic theory of gravitation» [27] («О релятивистском обобщении теории гравитации»), опубликованная в 1945 г.

Усваивая достижения физики, идя впереди своего времени и участвуя всей силой и глубиной своего гения в создании современной физики микро- и ультрамикромира, но всегда критически настроенный, Эйнштейн в своих работах, особенно в упомянутых, тяготел к конечной цели — к единому научному синтезу в виде теории единого физического поля.

Можем, следовательно, сказать, что Бошкович со своей теорией единого закона сил и Эйнштейн со своей теорией единого физического поля подошли к тому, чтобы создать общие теории, которые бы давали практические и теоретические возможности для открытия глубоких тайн физических явлений. В этом состоит, можно сказать, их основная общая характеристика как исследователей и теоретиков физических явлений и как мыслителей вообще, которые стараются найти общие законы природы.

**2. Принцип относительности у Бошковича и Эйнштейна.** И Бошкович, и Эйнштейн в своих релятивистских исследованиях пространственно-временных отношений используют принцип относительности Галилея как универсальный принцип природы, по которому координатные системы, которые движутся по отношению друг к другу равномерно и прямолинейно, эквивалентны для формулирования общих законов механики и физики. Этот принцип — один из постулатов частной теории относительности Эйнштейна. Эйнштейн его математически и физически обосновал и обобщил в общей теории относительности так: «Все системы гауссовых координат в принципе эквивалентны для формулирования общих законов природы». Кроме того, по Эйнштейну, «предположение о жестком теле отсчета не приносит пользы в общей теории относительности... поэтому используются нежесткие тела отсчета, которые не только движутся произвольным образом, но в продолжении своего движения подвергаются тоже произвольным переменам в своей форме» [9, с. 108—111; 10, с. 49—96]. Очевидно, что благодаря этому принцип относительности Эйнштейна получил больший ранг универсальности, чем принцип Галилея.

Бошкович в своих релятивистских исследованиях движения использовал некоторые отличные от галилеевых и охваченные обобщенным принципом Эйнштейна формы принципа относительности: поворот всех направлений на одинаковый угол при одинаковых расстояниях, уменьшение всех расстояний, так, что все углы останутся теми же самыми, взаимные размеры этих расстояний останутся неизменными, а силы из-за перемены расстояний не изменяются; сжатие или расширение всей Вселенной до каких угодно размеров, при этом шкала сил сжимается или расширяется [2, с. 128—165; 14; 15; 17, с. 21—24, 50—56]. Во всех этих случаях, утверждает Бошкович, мы бы не ощутили абсолютной перемены в пространственных расстояниях, а только различие в новом и предшествующем состояниях, а оно относительно.

Принцип относительности в поисках Бошковичем и Эйнштейном закономерностей природных явлений имеет, таким образом, ранг универсального принципа природы. Он является одной из основных исходных точек в этих поисках. У Эйнштейна он получил облик фундаментального и точного физико-математического постулата со всеми последствиями в создании и применении частной и общей теорий относительности. У Бошковича в рамках широких интуитивных релятивистских исследований движения этот принцип остался в форме скорее интуитивно научно-гносеологического постулата, без физико-математической эффективности и общности, как у Эйнштейна, но с неоспоримым предвосхищением современных релятивистских идей, которые потом встречаются у Пуанкаре, а позже у Эйнштейна.

**3. Понятие физического поля и четырехмерного пространства — времени.** В общей теории относительности Эйнштейн позаимствовал идею физического поля у выдающихся физиков XIX столетия, таких, как М. Фарадей, Г. Герц, Дж. Максвелл, заметив благодаря своей гениальной физической и математической интуиции, что полем как физико-математической идеей выражается физико-геометрическая реальность пространства, не зависящая от движения наблюдателя [13, с. 97—147]. Идея поля получила характер очень универсальной идеи в попытках Эйнштейна создать единую теорию физического поля, в которой бы взаимодействия микрочастиц, так же как и само их существование, проистекали из единого закона природы.

Однако из истории физики известно, что теория Бошковича о действии притягательно-отталкивательных сил повлияла на процесс образования и эволюцию физического понятия поля. Она вдохновила на это понятие Фарадея, у которого его позаимствовал и развил дальше Максвелл. Кроме того, посредством моделей атома Дж. Томсона и Н. Бора мысль Бошковича о первичных элементах материи и их взаимодействиях, приспособленная к новым познаниям о строении материи и развитая дальше, вошла в современную физику [2, с. 465—469; 28—38].

В непосредственной связи с этими последними работами, а также с влиянием теории натуральной философии Бошковича вообще на процесс развития современной физики были высказаны определенные суждения двумя ведущими физиками нашего времени, лауреатами Нобелевской премии В. Гейзенбергом и Н. Бором на Международном симпозиуме в Дубровнике в 1958 г., посвященном двухсотлетию «Теории натуральной философии» — главному труду Бошковича. (Эйнштейн с ними тесно сотрудничал.) Гейзенберг подчеркнул, что теория Бошковича «содержит множество идей, которые только в современной физике за последние пятьдесят лет дошли до полного своего выражения и которые показывают, насколько были верны философские положения, которыми Бошкович руководствовался в своей науке о природе...» И дальше: «Если выразить современным языком главный философский тезис Бошковича, то наверное можно сказать, что Бошкович считал, что в законе сил, действующих между элементарными частицами, находится ключ для понимания строения материи. Такие взгляды Бошковича, — делает заключение Гейзенберг, — исключительно близки нашим сегодняшним представлениям» [39, с. 29—30]. А Н. Бор, среди прочего, заявил, что «идеи Бошковича оказали большое влияние на труды следующих поколений физиков, его взгляды на общую механику вдохновили Лапласа и, может быть, менее непосредственно Фарадея и Максвелла» [40, с. 27—28].

Присоединяя к каждому событию, кроме трех пространственных координат $x$, $y$, $z$, и временную координату $t$, Г. Минковский, учитель и друг Эйнштейна, основал теорию, объединяющую пространство и время в четырехмерное пространство. Пространство и время рассматриваются неотделимо друг от друга. Эйнштейн, создавая свою теорию относительности, использовал пространство Минковского и в нем риманово понятие кривизны, считая, что присутствие больших масс материи в пространственных областях определяет кривизну тех областей, не отделяя, таким образом, материю от пространства и связывая ее с помощью понятия поля с геометрией [10].

В своих релятивистских исследованиях пространства и времени Бошкович постоянно подчеркивал, что пространственные координаты точки он всегда рассматривал в единстве с ее временно́й координатой. Отсюда ясно, что приведенное пространственно-временно́е определение Бошковичем материальной точки, как мы уже это раньше подчеркнули, вдохновляюще действует на пути, ведущем к четырехмерному «миру» Минковского в теории относительности Эйнштейна.

Таким образом, идея физического поля и идея четырехмерного пространства — времени — две важные и фундаментальные идеи в теории относительности Эйнштейна — могут быть генетически связаны с соответствующими основными идеями в теории натуральной философии Бошковича.

**4. Уверенность в гармонии Вселенной как общенаучный или гносеологический постулат у Бошковича и Эйнштейна.** Эйнштейн, так же как Ньютон и Кеплер, которых он выше всех ценил и которые его вдохновили в его глобальных видениях мира, был уверен, что Вселенной владеет *гармония* как что-то объективно существующее независимо от наших знаний, как выражение порядка, правильности и определенности во Вселенной. С этой уверенностью как с некоторым видом, можно сказать, общенаучного или гносеологического постулата подходил он к изучению явлений природы, которые наблюдал и которые пленили его исследовательское воображение.

Этот постулат наложил печать на все его теоретические научные построения и задуманные им научные эксперименты, на базе которых он создал свою общую релятивистскую теорию о пространственно-временных соотношениях и на базе которых основал свои попытки создать научно эффективную теорию единого физического поля.

В книге «Эволюция физики», которую Эйнштейн написал вместе со своим сотрудником Леопольдом Инфельдом и которая была опубликована в 1938 г., Эйнштейн говорит: «Без уверенности, что реальность можно охватить с помощью теоретических конструкций, без уверенности во внутренней гармонии нашего мира не могло бы быть никакой науки. Это есть и всегда будет основным мотивом любого научного творчества. Во всех наших усилиях, во всякой драматической борьбе между старыми и новыми взглядами мы видим извечную тягу за знанием, *непоколебимую веру в гармонию нашей вселенной*...» [4, т. II, с. 110].

Исследовательская страсть Эйнштейна всегда была гениально направлена к одной и той же цели, а именно к тому, чтобы в лабиринте обнаруженных и наблюдаемых фактов распутать и найти пути, которые надежно ведут к открытию объективно существующих закономерностей в природных явлениях, т. е. к объективной гармонии, как к чему-то, что *свойственно* природе, без предположения Ньютона о том, что есть существо, которое вдохнуло эту гармонию в природу.

*Принцип непрерывности* Бошковича, согласно которому никакое количество при своем изменении в течение времени не может перейти от одного своего значения к другому без того, чтобы не пройти через все свои промежуточные значения, находится в непосредственной связи с *теорией гармонии* Лейбница как объективно существующей во Вселенной. От него Бошкович позаимствовал принцип непрерывности и разработал его дальше. Этот принцип был для Бошковича основной исходной точкой и постоянным указательным знаком на его пути к построению единого закона сил притяжения — отталкивания, которые действуют между точками материи, как общего закона природы и в связи с этим — к созданию его общей теории о строении материи.

Простота и аналогия в природе (simplicitas et analogia naturae) как виды проявления гармонии, которая господствует в ней, также были общими указательными знаками для Бошковича на его пути к построению системы натуральной философии [6, с. 3—11, 96—97; 41]. Можно сказать, что Бошкович, вдохновленный Лейбницем и Ньютоном, уверенный в гармонии мира, использовал принцип непрерывности как принцип всеобщей связи явлений в природе, т. е. как универсальный принцип природы, а затем как и общий методологический принцип. Он последовательно искал проявления этого принципа и извлекал их как рациональные истины, с одной стороны, строго дедуктивно, а с другой — сравнивая их с опытными фактами и обнаруженными явлениями, для того чтобы их как таковые встроить в свою общую систему натуральной философии, т. е. в свою теорию сил и строения материи.

Таким образом, уверенность Бошковича и Эйнштейна в гармонии Вселенной, во всеобщей связи явлений в природе и в объективной закономерности этой связи имела характер общенаучного или гносеологического принципа и как таковая определенным образом отразилась в их поисках общего закона природы и в их построениях соответствующих теорий.

**5. Общенаучная или гносеологическая характеристика теорий физических явлений у Бошковича и Эйнштейна.** Своей научной и философской, физико-математической и гносеологически-онтологической критикой наших знаний о пространственно-временны́х соотношениях, которые приобретаются благодаря восприятиям нашими органами чувств и размышлениям и которые, начавшись от Ньютона, укоренились и стали научной традицией, Эйнштейн сумел разрушить, так сказать, миф об абсолютности таких познаний. На новой базе он смог построить более адекватные понятия о пространственно-временны́х соотношениях с конкретными последствиями для научных и философских истолкований физических явлений в природе и для извлечения практических результатов из этих истолкований.

Эйнштейн, таким образом, с одной стороны, преодолел иллюзии чувственных восприятий и инерцию укоренившихся и бытовавших столетиями взглядов, а с другой — смело и революционно, силой своего гения создал новые понятия о пространственно-временны́х соотношениях как детерминантах в исследованиях закономерностей в физических явлениях.

Бошкович подчеркивал необходимость критической проверки данных, полученных с помощью органов чувств, и необходимость разграничения иллюзорного и реального. «Многие вещи, — говорит Бошкович, — выглядят очень неясными тем, кто не вошел глубже в происхождение своих идей и не умеет из того, что узнал с помощью органов чувств, размышлением создать что-то другое, соответствующее настоящему разуму и настоящей природе вещей», и «то, что не поддается восприятию нашими органами чувств, обычно считается не существующим», а это «главный источник общих предрассудков» [42, § 11, 20; Наши комментарии на с. 100, 104].

Отбросив все такие предрассудки, Бошкович благодаря остроте своего ума и смелости своего духа преодолел иллюзии чувственных восприятий и укоренившиеся взгляды о непрерывной протяженности материи. Интуиция позволила ему построить теорию о дискретной структуре материи. Так он вошел в проблематику микромира, которую только современная физика постепенно, ясно и обстоятельно решает на основе очень тонких и точных опытов в единстве с соответствующими теориями, освобожденными от возможных обманов восприятий посредством органов чувств.

Заметим, что Бошкович очень часто касается гносеологических проблем, затрагивающих отношения чувственных перцепций и рационального понимания, а также входит и в более широкие проблемы отношения индуктивных и рациональных познаний, что характерно и значительно, когда речь идет о вопросах понимания отношений между пространством и временем, где необходимы исключительно глубокий критический подход и остроумие для того, чтобы преодолеть иллюзии чувственных восприятий и инерцию укоренившихся взглядов. Таким критицизмом и остроумием отличается теория относительности Эйнштейна.

Ф. Ницше сказал, что теория Бошковича о строении материи наряду с теорией гелиоцентрической системы Коперника представляет «величайший триумф над чувственными восприятиями, который до сих пор достигнут на Земле» [43, с. 240; 44, с. 235]. То же самое сейчас, но в еще большей мере можно сказать о теории относительности Эйнштейна. В этом наблюдается значительное родство между великим умом Бошковича и исполинским умом Эйнштейна.

После того как Бошкович содержательно и кратко, как будто действуя по современным методологии и логике, изложил задачу индукции как эмпирического исследовательского метода в естественных науках и привел в связи с этим многочисленные примеры, подтверждающие или опровергающие его принцип непрерывности [42, § 134—138; Наши комментарии на с. 146—147; 45], он, акцентируя критическое противопоставление познаниям, основанным на чувственных восприятиях, подчеркнул, что свою теорию о строении вещества построил путем размышлений, но в то же время предупредил, что он ее не выдумал «по своей воле, как какую-нибудь гипотезу». Поэтому он отрицает всякую мысль о том, что она является какой-нибудь «произвольной гипотезой», так как подтверждена положительными доказательствами и следует из «необходимого и спонтанного сплетения выводов» [42, § 2], вытекающих из самых простых принципов природы, проверенных примерами из опыта.

Подобным же образом и Эйнштейн подчеркивал, что выводы из его теории относительности возникают не из произвольно усвоенных гипотез, а из общих принципов как фундаментальных результатов опыта, имея в виду при этом принцип относительности и принцип постоянства скорости распространения света в вакууме.

Теорию относительности характеризует то же, что Эйнштейн сказал о физике вообще: в физике «нет понятий, чье применение априори было бы необходимым или оправданным», понятие «завоевывает свое право на существование только на основе своей ясной и единственной связи с явлениями, а значит, и с физическими опытами» [4, т. I, с. 172]. Свою гносеологически-онтологическую позицию Эйнштейн выразил следующими словами: «уверенность в существовании внешнего мира независимо от субъекта, который его осознает, лежит в основе всей науки о природе», и «информация, полученная об этом мире с помощью органов чувств, может быть принята только путем размышлений», при этом мы всегда должны быть «готовы заменить приобретенные представления... для того, чтобы замеченные факты обосновать логически самым совершенным образом» [4, т. II, с. 209].

Таким образом, Бошкович и Эйнштейн, каждый по-своему, подчеркивают необходимость согласованности теории с опытом и необходимость внутренней логической связанности теории, что и характеризует их теории не только как гипотетически-дедуктивные, но и как эмпирически-индуктивные. И в этом, по крайней мере глобально, отражается гносеологическое сходство их замыслов и подходов к изучению физических явлений.

Бошкович и Эйнштейн хотели одинаково углубить принципы и исследовать подробности при изучении физических явлений, так как считали, что анализ принципов им служит для того, чтобы развить специальные исследования, и, наоборот, что специальные исследования могут углубить и подтвердить эти анализы, исправить их или опровергнуть. Обладая большим умом, каждый из них, согласно своему времени и своим собственным возможностям, глубоко и прозорливо ощущал все трудности познания и дилеммы, которые возникают, когда делаются попытки найти правильный путь в лабиринте физических явлений. Особенно это ощутил Эйнштейн, всей силой и глубиной своего гения, как один из величайших исследователей в современной физике. Но эти дилеммы, как бы они не выглядели нерешаемыми для них в данное время, не отводили их как мыслителей на неверные пути скептицизма и агностицизма.

Поэтому Эйнштейн, мучимый сомнениями и отсутствием успехов в построении теории единого физического поля, веря в безграничность человеческих познаний и в оптимистические перспективы модификации упомянутой теории на основе все более глубоких математических, физико-теоретических и эмпирических исследований микро- и ультрамикромира, сказал, что «тяга к истине ценнее и дороже, чем надежное владение истиной» [4, т. II, с. 142]. В то время как Бошкович, предчувствуя возможность великих открытий в микромире, свою теорию натуральной философии закончит словами: «Считаю, что и в дальнейшем будет очень тяжело познать внутреннее строение отдельных тел, но я не решился бы утверждать, что это совсем невозможно» (...peculiarium corporum textum olim cognosci, difficillimum quidem esse, arbitror, prorsus, impossibile, affirmare non ausim) [8].

Открытия современной физики в области микро- и ультрамикромира постоянно подтверждают, что Бошкович со своей теорией натуральной философии [2, с. 165, 247, 404—477; 31; 41; 46—50] шел впереди своего времени на пути, который вел от динамического синтеза универсума Ньютона до теории относительности Эйнштейна и до попыток Эйнштейна осуществить динамический синтез микромира с помощью теории единого физического поля.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Langevin Paul.* L'Oeuvre d'Einstein et l'astronomie. P., 1931.
2. *Marković Ž.* Rudje Bošković. Zagreb: JAZU, 1968. T. 1.
3. *Geymonat L.* Storia del pensiero filosofico e scientifico. Milano: Garzanti, 1970. T. 2.
4. *Kuznjecov B. G.* Ajnštajn: 2 t. Subotica — Beograd: Minerva, 1975. Пер. с рус. ориг. на серб.-хорв. яз.
5. *Stipanić E.* Bošković i Njutn. — Dijalektika, Beograd, 1977, № 3.
6. *Stipanić E.* Naučni i istorijski komentar Boškovićeve rasprave «O zakonu kontinuiteta»/Пер. с лат. Д. Невенич-Грабовац; Предисл., коммент. и науч. ред. Э. Стипанича. Beograd: Mat. inst., 1975.
7. *Bošković R.* O prostoru, vremenu i relativnosti. Beograd: Kultura, 1955. Лат. текст (с. 15—27) и пер. на серб.-хорв. яз. (с. 33—64); Предисл., выбор текстов и пер. д-ра Д. Недельковича.
8. *Bošković R.* Theorija prirodne filozofije/Ред. и послесловие В. Филиповича; Пер. с лат. Я. Стипишича; Науч. ред. пер. Ж. Дадича. Zagreb: Sveučilišna naklada Liber, 1974, s. 264—276.
9. *Einstein A.* La théorie de la relativité restreinte et générale. Collection «Discours de la méthode». P.: Gauthier-Villars, 1976.
10. *Einstein A.* Quatre conférences sur la théorie de la relativité. Collection «Discours de la méthode». P.: Gauthier-Villars, 1972.
11. *Stipanić E.* Les notions de probabilité dans quelques réflexions de Bošković dans sa théorie de la philosophie naturelle. — Communication à la 22 conférence d'histoire des mathématiques (26.II—4.III 1978). Oberwolfach: Math. Forschungsinstitut, 1978.
12. *Stipanić E.* Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe in einigen Bošković's Betrachtungen in seiner Theorie der Naturphilosophie. — In: Intern. Math. Kongr., Helsinki, 1978: Abstrs.
13. *Einstein A.* Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité. Collection «Discours de la méthode». P.: Gauthier-Villars, 1972.
14. *Varićak V.* Matematički rad Boškovićev Dio I, Princip relativnosti. Apsolutno i Relativno kretanje. Prvi prigovor Boškovićev Newtonu. Drugi prigovor Boškovićev Newtonu, Rad, knj. 181. Zagreb: JAZU, 1910.
15. *Hondl S.* Stay i Bošković o apsolutnom gibanju. — Glasnik mat.-fiz. i astron., Zagreb, 1950. Ser. II, T. 5, № 1, s. 21—32.
16. *Hondl S.* Boškovićev dalekozor s vodom. — Almanah Bošković, Zagreb, 1952, s. 187—227; 1953, s. 81—91.

17. *Bošković R.* O prostoru, vremenu i relativnosti/Предисл., выбор текстов и пер. Д. Недельковича. Beograd: Kultura, 1955.
18. *Marković F.* Filozofijski rad Rudjera Josipa Boškovića, Rad, knj. 87, 88, 90. Zagreb: JAZU, 1887—1888.
19. *Stojanović K.* Radovi Rudjera Josipa Boškovića na polju pesničkom, filozofskom i egzaktnim naukama.— Prosvetni glasnik, Beograd, 1903, s. 66.
20. *Čermelj L.* Roger Joseph Boscovich als Relativist.— Arch. Geschichte Math., Naturwiss. und Techn., 1929, Bd. 2, H. 4, S. 424—444.
21. *Čermelj L.* Bošković und die Relativitaet der Tragheit. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković (1958). Beograd etc., 1959, s. 105—109.
22. *Ivanović Dragiša M.* Bošković's conception of space and time relativity.— In: Actes symp. intern. R. J. Bošković (1961). Beograd etc., 1962, s. 125—131.
23. *Nikolić D.* Sur certaines idées cosmologiques de Rudjer Bošković. — In: Atti del Convegno internazionale celebrativo del 250 anniversario della nascita R. J. Boscovich... (Milano — Merate, 1962). Milano, 1963, p. 271—273.
24. *Nikolić D.* Rudjer Bošković, preteča modernih fizičkih teorija. — Almanah Bošković, Zagreb, 1953, s. 92—111.
25. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik bewegter Körper. — Ann. Phys., 1905, t. 17.
26. *Einstein A.* Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. — Ann. Phys., 1916, t. 26.
27. *Einstein A.* A Generalization of the relativistic theory of gravitation. — Ann. Phys., 1945, t. 46.
28. *Hondl S.* Faraday o Boškovićevoj atomistici. — Nastavni vjesnik. Zagreb, 1932, knj. 40, sv. 9—10.
29. *Ristić S.* Der Kausalitätsbegriff im abendländischen Denken und Boscovichs punktuelle dynamische Atomistik. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959, s. 43—52.
30. *Rubinowicz A.* Über Felder, die durch das Boscovich'sche Elementargesetz definiert werden. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958, Beograd etc., 1958, s. 67—70.
31. *Supek I.* Roger Boscovich and modern physics. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959, s. 71—75.
32. *Peterlin A.* Some kinetic phenomena in solid state physics and their connection with Boscovich's ideas of point sources of interaction. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959, s. 77—83.
33. *Angelitch T. P.* Über die Grundlagen der Boscovich'schen Mechanik. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959, s. 85—91.
34. *Whyte Lancelot Law.* Boscovich's atomism and the particles of 1961.— In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962, s. 85—88.
35. *Sambursky S.* Stoic continuum theory and Boskovich's concept of force.— In: Actes symp. intern., 1961. Beograd etc., 1962, s. 103—105.
36. *Costabel P.* Le rôle du continu dans la genèse de la pensée de R. Bošković en mécanique.— In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961, Beograd etc., 1962, s. 107—114.
37. *Flamm L.* Die Entwicklung der Maxwellschen Elektrodynamik und R. J. Bošković. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962, s. 137—141.
38. *Angelitch T. P.* Über das Kraftgesetz von Boscovich.— In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962, s. 151—156.
39. *Heisenberg W.* Rudjer Bošković. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959.
40. *Bohr N.* Rudjer Bošković. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959.
41. *Stipanić E.* Sur la loi de la continuité de R. Bošković.— Dijalektika, Beograd, 1976, N 3, p. 3—16.
42. *Bošković R.* O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile. Beograd: Mat. inst., 1975.
43. *Pavićević V.* Nietzsche über R J. Boscovich. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962.
44. *Fleckenstein J. O.* Nietzsches berühmtes Boscovichzitat. — In: Actes symp. intern. R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962.

45. *Nedeljković D.* Rudjer Bošković o indukciji. — Glas CCLV, Beograd: Odeljenja društvenih nauka SANU, 1962, knj. 11, s. 65—81.
46. *Stipanić E.* Monumentum aere perenius. — Dijalektika, Beograd, 1971, № 3.
47. *Stipanić E.* Monumentalno delo prirodne filozofije. — Dijalektika, Beograd, 1975, № 1/2.
48. Actes du symposium international R. J. Bošković, 1958. Beograd etc., 1959.
49. Actes du symposium international R. J. Bošković, 1961. Beograd etc., 1962.
50. Atti del Convegno internazionale celebrativo 250 anniversario della nascita di R. G. Boscovich e del 200 anniversario della fondazione dell'Osservatorio di Brera (Milano — Merate, 1962). Milano, 1963.

УДК 531/534 (091)

*Г. Е. Горелик*

# ЭРЕНФЕСТ И ПРОБЛЕМА РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

**1. «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?»** Статья П. Эренфеста с таким названием, появившаяся в 1917 г. [1], стоит в стороне от других его работ, и, возможно, поэтому ей до сих пор не уделяли должного внимания историки науки. Поэтому начнем с краткого изложения этой работы.

Введение к статье состоит всего из нескольких фраз, в которых Эренфест подчеркивает необычность вопроса, вынесенного в заголовок статьи, и уточняет его: «„Почему у нашего пространства именно три измерения?“ или, другими словами, „Какие особенности отличают геометрию и физику в $R_3$ от геометрии и физики в других пространствах $R_n$?“ Будучи поставленными таким образом, эти вопросы, возможно, не имеют никакого смысла. Наверно, они подвержены оправданной критике. Ибо действительно ли пространство „существует“? Является ли оно трехмерным? И затем сам вопрос „почему“! Что имеется в виду под физикой в $R_4$ или $R_7$? Я не буду пытаться найти лучшую форму для этих вопросов. Возможно, другие преуспеют в указании некоторых более сингулярных свойств $R_3$, и тогда станет ясным, каковы „правильные“ вопросы, для которых наши рассмотрения являются подходящими ответами».

Последняя фраза говорит о том, что сам Эренфест не только не считал вопрос исчерпанным, но даже и не считал его вполне удовлетворительным образом поставленным. И действительно, с современной точки зрения вопрос «Почему пространство имеет три измерения?» можно понимать двояко.

Во-первых, можно пытаться объяснить трехмерность пространства исходя из более глубоких свойств материального мира в рамках новой фундаментальной теории, несравнимой с существующими физическими теориями, поскольку в них трехмерность пространства берется в качестве исходного предположения, постулата. Этот путь, в высшей степени спекулятивный с сегодняшней точки зрения, логически и с точки зрения истории физики представляется вполне возможным. Действительно, ответом, например, на вопрос «Почему излучение атомом характеризуется дискретными частотами?» стало построение фундаментальной теории (квантовой механики), объяснившей, исходя из одних и тех же основных принципов, не только характер атомных спектров, но и множество других явлений.

Второй смысл, который можно вложить в вопрос «Почему пространство имеет три измерения?», уже не связан непосредственно с такими грандиозными замыслами. Вопрос можно уточнить так: «Почему физики уверены в том, что пространство имеет три измерения?» или «Какие основания определяют уверенность физиков в трехмерности пространства?». Этот вопрос может показаться тривиальным по отношению к миру макроскопических явлений. Но этот же вопрос теряет всякую тривиальность, если учесть, что диапазон явлений, изучаемых физикой XX в., вышел далеко за пределы макроскопических масштабов и что изучение явлений, например, в физике элементарных частиц и в космологии возможно только косвенными методами. Поэтому вопрос о размерности пространства в этих областях вполне оправдан и нетривиален. При этом не следует думать, что размерность пространства — это только одно из многих свойств, экстраполяция которых на существенно новые явления требует обоснования; размерность — по существу наиболее общее *количественно* выражаемое свойство пространства — времени.

Работа Эренфеста соответствует как раз второму смыслу вопроса о размерности пространства, и в этой работе трехмерность была обоснована в диапазоне физических явлений от атомных до астрономических масштабов следующим образом.

Эренфест рассматривает «физику» в $n$-мерном евклидовом пространстве $E^n$ (вопрос о смысле физики в $E^n$ рассматривается в п. 2). Закон взаимодействия с точечным центром он выводит аналогично трехмерному случаю из уравнения Пуассона в $E^n$ для потенциала, определяющего это взаимодействие; движение подчиняет «ньютоновским» законам динамики; описание волновых процессов связывает с уравнением Д'Аламбера. Эренфест рассматривает такие следствия этих законов: замкнутость и устойчивость орбит в поле гравитирующего центра («планетная система»), «боровский» спектр атома водорода, особенности волновых процессов и некоторые другие [2].

Наиболее примечательны по простоте и значимости первые два. Остановимся на них подробнее. Как показал Эренфест: а) только в пространстве $E^3$ возможно как устойчивое финитное (причем всегда с замкнутыми траекториями), так и инфинитное движения; б) в пространстве $E^2$ возможно только финитное движение, а замкнуты лишь круговые орбиты; в) в пространстве $E^n$ с $n>3$ финитное движение соответствует лишь круговым траекториям и всегда неустойчиво, т. е. сколь угодно малое возмущение приводит либо к падению на центр, либо к удалению на бесконечность.

Действительно, из уравнения Лапласа в сферически-симметричном случае в $E^n$ следуют выражения для потенциальной энергии (в обозначениях Эренфеста)

$$V_n(r) = -\varkappa Mm/(n-2)\,r^{n-2}; \qquad n \neq 2; \tag{1}$$

$$V_2(r) = \varkappa Mm \ln r,$$

где константы $M$ и $m$ соответствуют массам (зарядам) источника поля и пробной частицы, а $\varkappa$ — константа взаимодействия.

Уравнения движения (второй закон Ньютона) $m\ddot{x}_i = -\partial V/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, в случае центрального поля сил приводят к двум сохраняющимся величинам — энергии и моменту импульса. Поскольку движение в центральном поле в $E^n$ всегда плоское, законы сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах принимают вид

$$m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)/2 + V(r) = \varepsilon = \mathrm{const},$$

$$mr^2\dot{\varphi} = \theta = \mathrm{const}.$$

Из (1), (2) следует

$$\dot{r} = r^{-1}(Ar^2 + Br^{4-n} - C^2)^{1/2}, \qquad n \neq 2,$$

$$\dot{r} = r^{-1}(Ar^2 - br^2 \ln r - C^2)^{1/2}, \qquad n = 2, \tag{3}$$

где $A = 2\varepsilon/m$, $B = 2\varkappa M/(n-2)$, $b = 2\varkappa M$, $C^2 = \theta^2/m^2$.

Анализ уравнений (3), сводящийся по существу к анализу области положительности подкоренных выражений, без труда приводит к указанным выше выводам.

Свойствами электрического поля, подчиняющегося уравнению Лапласа в $E^n$ (1), определяются также особенности спектра «водорода» в этом пространстве. Спектр был получен Эренфестом с помощью квантования Бора следующим образом. При круговом движении электрона с зарядом $-e$ и массой $m$ вокруг неподвижного протона с зарядом $e$ выполняется соотношение $mr\dot{\varphi}^2 = e^2/r^{n-1}$. Условие квантования Бора дает для стационарных орбит $mr^2\dot{\varphi} = k\hbar$, где $k$ — целое число, $\hbar = h/2\pi$, $h$ — постоянная Планка. Для орбиты с номером $k$ энергия

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1 k^{\frac{-2(n-2)}{4-n}}, \qquad \varepsilon_1 = \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{\frac{n-2}{4-n}} e^{\frac{4}{4-n}} \frac{n-4}{2(n-2)}, \qquad n > 2.$$

Излучаемые частоты определяются из условия $\nu_{lk} = (\varepsilon_l - \varepsilon_k)/h$.

При $n = 4$ имеет место сингулярный («в особенности замечательный по отношению к теории квантов», как пишет Эренфест) случай: $mr^2\dot{\varphi} = em^{1/2}$; это значит, что момент импульса может иметь только одно определенное значение и «коэффициент притяжения должен быть связан с $h$, если квантовое условие (только при одном значении $k$) выполняется». Действительно, условие квантования приводит к жесткой связи $em^{1/2}=k\hbar$.

При $n>4$ частоты переходов $\nu_{lk}=\nu_0(l^\alpha-k^\alpha)$ и радиусы орбит $r_k\sim k^{2/(4-n)}$, где $\alpha=2(n-2)/(n-4)>0$, т. е. получаются «серии в спектре, которые при постоянном $k$ содержат линии в ультрафиолете, все более и более далекие друг от друга». Не менее важно то, что при $n>4$ электрон должен переходить на все более далекие орбиты (соответствующие меньшей энергии), т. е. атом самопроизвольно ионизуется. Эренфест не рассматривает случай $n=2$, когда энергетический спектр $\varepsilon_l-\varepsilon_k=e^2\ln(l/k)$, $r_k\sim k$ (не зависящий от $\hbar$) полностью дискретен, т. е. атом вообще не может быть ионизован.

Результаты эренфестовского анализа свойств $n$-мерного «атома» позволяют сделать вывод, что трехмерность пространства в атомных явлениях вполне обоснованна, поскольку отличие от трехмерности привело бы, как показал Эренфест, к радикальному отличию спектра от наблюдаемого. Здесь важно подчеркнуть, что если бы обнаружилось, что спектр атома точнее согласуется с наблюдаемым при размерности, не равной трем, то это дало бы основание предположить другую размерность пространства в атомных масштабах. (Решение задачи о спектре $n$-мерного атома на основе уравнения Шредингера также приводит к «сверхнестабильности» атома при $n>3$ и к «сверхстабильности» при $n<3$ [3, 4]).

Через три года после статьи [1] Эренфест публикует сокращенный примерно на треть вариант этой статьи [5], добавив в заключение несколько замечаний. В качестве повода для этой публикации он упоминает замечание Г. Вейля о четырехмерности пространства — времени. Вейль в связи со своим вариантом единой теории поля, в которой вектор-потенциал электромагнитного поля получил геометрическую интерпретацию, указал на выделенность четырехмерности пространства—времени, связанную с тем, что только в четырехмерном мире действие для электромагнитного поля с максвелловским лагранжианом конформно-инвариантно. А конформная инвариантность в теории Вейля обобщала обычную ковариантость общей теории относительности.

По сравнению со статьей 1917 г. в статье 1920 г. Эренфест уже не ставит целью выделение особых свойств трехмерной геометрии (впрочем, в статье 1917 г. было указано только одно подобное свойство — равенство количеств независимых вращений и трансляций), а ограничивается физикой. В нескольких местах работы Эренфест отсылает за подробностями к статье 1917 г. В трех заключительных замечаниях Эренфест в основном подчеркивает, что размерность пространства проявляется практически во всей физике. С трехмерностью связана, например, четверка в законе Стефана—Больцмана, тройка в законе Вина и вторая степень в формуле Бальмера. Заканчивает он статью вопросом, явно имеющим отношение к геометрии, — вопросом о выделенности использования именно квадратичных метрических форм.

Отложив до п. 4 обсуждение роли и места этих работ Эренфеста в истории физики, рассмотрим их содержание с более общей точки зрения.

**2. Что такое физика в *n*-мерном пространстве?** Что на самом деле составляет содержание работ Эренфеста? Автор глазами физика посмотрел на совокупность «пространств» $E^n$, отличающихся одним параметром — размерностью. Конечно, эта совокупность не исчерпывала все возможные геометрические структуры, с бо́льшим или меньшим правом носящие название «пространство» и претендующие на роль математических моделей, описывающих свойства реального физического пространства. Достаточно указать на римановы пространства (не говоря уж об общих метрических и топологических пространствах). Однако совокупность $E^n$ выгодно выделялась тем, что для каждого пространства из этой совокупности можно было естественным образом предложить совершенно определенную физику, по крайней мере ее фундаментальную часть. Действительно, уравнения, служащие для выражения основных физических законов, легко допускают обобщение с $E^3$ на $E^n$. Для этого достаточно в соответствующих суммах число слагаемых заменить с 3 на $n$ (например, в выражении для радиуса-вектора и т. д.). Форму же фундаментальных уравнений естественно оставить прежней: уравнение Лапласа, волновое уравнение, законы Ньютона, квантовый постулат Бора, уравнение Шредингера и т. д.

В обычной сейчас — вариационной — форме задания фундаментальных физических законов такое обобщение осуществляется еще проще. Выбор лагранжиана с помощью вариационного принципа приводит, как известно, к вполне определенным уравнениям поля. Например, лагранжиан для скалярного поля $\Phi$ в виде $L=\Phi_{,k}\Phi^{,k}$, $k=0, 1, \ldots, n$, приводит к уравнению Лапласа и, следовательно, в задаче для точечного центра — к следующему закону изменения поля: $\Phi\sim r^{2-n}$ (при $n=2$ потенциал $\Phi\sim \ln r$). Размерность пространства учитывается в выражении для лагранжиана только в виде условия на множество значений, которые может принимать индекс $k$. В $(3+1)$-мерном случае $k=0, 1, 2, 3$. Таким образом, приведенное выражение для лагранжиана позволяет получить соответствующую часть физики (физику скалярного безмассового поля) в пространстве любой размерности, точнее говоря, в евклидовом (а при общековариантном понимании квадрата градиента — и в римановом) пространстве любой размерности.

По существу так и поступил Эренфест, беря за основу уравнение Пуассона или Д'Аламбера, математически эквивалентное указанному лагранжиану (с естественным обобщением на другие поля). В этом пункте на первый взгляд возможно возражение, что такая процедура — это простая экстраполяция и что с тем же успехом можно представить лагранжиан в виде, например, $\tilde{L}=(\Phi_{,k}\Phi^{,k})^{N-3}$ ($N$ — размерность пространства—времени). Он принимает обычную форму в случае четырехмерного пространства—времени.

В ответ на это (такого ответа, впрочем, нет у Эренфеста) следует заметить, что Эренфест не просто придумывал какую-то физику в каком-то пространстве — такая физика, действительно, могла бы быть совершенно произвольной. Он ставил проблему иначе, выясняя, на чем основана уверенность физиков в том, что реальное физическое пространство трехмерно, т. е. что все множество известных физике явлений (в том числе явлений, далеко выходящих за пределы макроскопического опыта, в котором трехмерность очевидна) наилучшим образом описывается с помощью модели пространства $E^3$. А раз речь идет о совокупности известных явлений, то возможность выбора лагранжиана сильно ограничена. Такими ограничениями являются, в частности, свойства физических явлений, не требующие для своей формулировки определенного значения размерности пространства. Так, например, принцип суперпозиции с необходимостью свидетельствует о линейности уравнений (и, стало быть, о квадратичности лагранжиана). А тот факт, что для задания движения системы достаточно знать только начальные положение и скорость (это относится не только к механике, но и к теории поля), означает, что дифференциальные уравнения, описывающие данную систему, должны быть второго порядка, т. е. в лагранжиан должны входить производные не выше первого порядка (а вторые — только линейно). Эти ограничения приводят как раз к обычному лагранжиану.

Правда, по поводу этих ограничений можно было бы сказать, что они не могут быть полным и абсолютно строгим доказательством вида лагранжиана, так как связаны с определенным диапазоном явлений, ограниченным, в частности, по характерным пространственно-временным масштабам. Но ограниченность эмпирического базиса в данный момент — обычная ситуация для науки. Важно, однако, то, что в эту обычную ситуацию с помощью работы Эренфеста оказалось вовлеченным фундаментальное понятие размерности пространства, до этого находившееся в состоянии априорности. В статье Эренфеста нет анализа гносеологического статуса понятия размерности, нет никаких общих замечаний об этом понятии. Однако если бы физик захотел ответить на вопрос, что физически означает трехмерность реального пространства, то он должен был бы начать с анализа, подобного эренфестовскому.

Следует отметить, что не Эренфест первым поставил вопрос о размерности пространства как физическую проблему. Это сделал А. Пуанкаре в работе 1912 г. «Почему пространство имеет три измерения» [6]: «Можно было бы... встать на точку зрения физики и задать вопрос: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например, двух или четырех измерений? Законы физики выражаются дифференциальными уравнениями, в этих уравнениях фигурируют три координаты материальных точек. Разве не возможно выразить эти законы другими уравнениями, где фигурировали бы в этом случае другие материальные точки, имеющие четыре координаты?»

Однако подходы Эренфеста и Пуанкаре к вопросу «физика и размерность» существенно различны. У Пуанкаре — стремление реализовать свою конвенционалистскую установку, показать физическую равноправность пространств любой размерности и «только удобство» трехмерного пространства. В результате — поверхностный и физически несостоятельный анализ закона всемирного тяготения в предположении отличной от трех размерности пространства (см. об этом в [7]). Исходный и неизменный факт для Пуанкаре — обратная пропорциональность квадрату расстояния в законе тяготения, и переход к пространству другой размерности лишь заменяет выражение расстояния между точками через координаты. Он не видит, что закон $F \sim r^{-2}$ в $E^n$ при $n \neq 3$ несовместим со всей остальной физикой (даже только гравитационной): с принципом суперпозиции, с эквивалентностью полей сферического распределения масс и материальной точки с массой, равной полной массе распределения и находящейся в центре распределения, и т. д.

Пуанкаре не учитывал, что физика не может дополнить любую геометрию так, чтобы их комбинация была правильной теорией. Его замечание о том, что на опыте проверяется только сумма «физика+геометрия», правильно, и, следовательно, некоторый конвенциональный элемент в физике существует (с точки зрения материалистической гносеологии этот элемент входит в «разность» между абсолютной и относительной истинами). Однако сравнение позиций и результатов Эренфеста и Пуанкаре наглядно демонстрирует, что полного конвенционализма на самом деле нет. Еще проще это можно было видеть, если бы Пуанкаре рассмотрел не четырех-, а двух- или одномерное пространство как допустимую модель реальности. Какая физика «в сумме» с одномерной геометрией была бы равна «сумме» обычной физики с трехмерной геометрией?

Анализ Эренфеста не основывается на такой предвзятой позиции. И если бы Эренфест обнаружил, что спектр водорода в пространстве другой размерности точнее согласуется с экспериментальными данными, чем трехмерный спектр, то это могло бы дать ему основание предположить другую размерность пространства в атомных масштабах. Конечно, такое предположение потребовало бы в первую очередь ответить на вопрос: как согласовать эту «другую» размерность в атомных масштабах с несомненной трехмерностью пространства в макроскопических масштабах? Исследование Эренфеста не затрагивает этот вопрос, что эквивалентно неявному предположению: и без конкретной реализации такого согласования рассмотрение определенных, «внутренних», свойств физических систем (подобных спектру атома и устойчивости планетной системы) в предположении отличия размерности от трех не лишено смысла. Но полная обоснованность подобного рода исследований предполагает точное представление о том, как реальный наблюдатель мог бы получать информацию о физических явлениях, характеризуемых размерностью пространства, отличной от трех.

Историческое значение работы Эренфеста состоит в том, что, поставив вопрос о смысле трехмерности и соотнеся ее с конкретными физическими явлениями, Эренфест тем самым установил границы, в которых трехмерность имеет реальное физическое обоснование и вне которых она оказывалась всего лишь предположением. В анализе Эренфеста эти границы сверху определялись масштабами Солнечной системы, а снизу — атомными масштабами. Вне этих границ вопрос оставался открытым. Таким образом, размерность пространства с помощью работы Эренфеста получила возможность стать физическим понятием.

Вместе с тем следует отметить, что работа Эренфеста безусловно опередила свое время — до сих пор в физике практически не ощущалась жесткость рамок абсолютной трехмерности. Однако если перед физикой действительно встанет вопрос об эмпирическом статусе факта трехмерности пространства, тогда необходимо будет вспомнить, что впервые путь к установлению такого эмпирического статуса, путь к расшифровке, переводу понятия трехмерности пространства на язык физики увидел Эренфест.

**3. Предпосылки работы Эренфеста.** Не случайно, конечно, что в историко-физических исследованиях до сих пор обходится вниманием статья Эренфеста о трехмерности пространства. На первый взгляд кажется, что к работе 1917 г. относятся слова Эренфеста из его письма 1913 г., адресованного А. Ф. Иоффе: «...в отличие от тебя, Ритца, Эйнштейна и даже Дебая, у меня нет главных и солидных идейных направлений; нет „собственной проблемы“, а так, только „забавные задачки“...» [8, с. 120]. В этих словах неоднократно выражавшаяся Эренфестом неудовлетворенность недостаточной фундаментальностью своих исследований [9, с. 158]. Однако работа 1917 г. все же не случайна; она не случайна как для общего состояния физики того времени, так и в индивидуальном творчестве Эренфеста.

То, что работа Эренфеста по самой постановке проблемы значительно опередила свое время, вовсе не означает, что она была изолирована от современного ей состояния физики.

Одной из важнейших черт развития физико-математических наук к началу XX в. стало разрушение господствовавших представлений о евклидовом трехмерном пространстве как единственно возможном математическом описании свойств реального физического пространства. Проявлением этих прежних представлений была априоризация геометрических понятий и отождествление физического пространства с его математической моделью — евклидовым трехмерным пространством. Однако в связи с созданием неевклидовых геометрий математика XIX в. пришла к пониманию того, что евклидова геометрия — лишь одна из логически возможных геометрических систем. Это величайшее достижение математиков становилось известным и в физике в результате популяризации как самими математиками, так и физиками, чувствительными к проблеме эмпирического обоснования понятийного аппарата физики [10].

Такая атмосфера, такое ощущение необходимости выбрать и физически обосновать выбор геометрического описания, несомненно, облегчили путь Эйнштейна к созданию специальной и в особенности общей теории относительности, хотя, конечно, создание этих теорий было бы совершенно немыслимо без собственно физических причин. Одним из исходных пунктов для Эйнштейна стал как раз анализ эмпирического, физического статуса ньютоновских пространственных и временных понятий.

В свою очередь революционные изменения в представлениях о пространстве и времени, связанные с теорией относительности, уже через небольшое время привели к чрезвычайно большой готовности физического «общественного мнения» к новым, еще более глубоким изменениям пространственно-временных представлений. Эта готовность была большей, чем, например, сейчас. Достаточно вспомнить необычайную активность в этом направлении: теория Вейля, геометрически объединяющая гравитацию и электромагнетизм, пятимерная теория, поиски геометризованной единой теории поля.

В этом «геометрическом брожении умов» не оставалась незатронутой и размерность пространства. Кроме пятимерного направления, можно отметить, например, такое замечание Планка (в его ответе на вступительную академическую речь А. Эйнштейна 2.VII 1914 г.): «Мы больше всего видим в этом обстоятельстве [вторая степень в законе силы. — *Г. Г.*] естественное следствие трехмерности нашего пространства, которую мы принимаем как факт, и, будучи разумными физиками, не беспокоимся уже о том, почему пространство не обладает четырьмя или еще большим количеством измерений» [11, с. 668]. Можно не согласиться с Планком, что всякий разумный физик должен воспринимать трехмерность как факт, не пытаясь проанализировать, какие основания заставляют физиков считать пространство трехмерным и не существует ли границ у области обоснованности этого утверждения. Однако более существенно, что размерность пространства оказалась незабытой даже таким, не склонным к радикальным новшествам физиком, как Планк.

Таким образом, направленность работы Эренфеста можно считать в известном смысле даже характерной для физики того времени.

Работа Эренфеста была не случайна и в его собственном творчестве. Она вполне соответствовала его направленности в теоретической физике; кроме того, в научной биографии Эренфеста можно указать такие эпизоды, которые делают более понятным его обращение к вопросу о размерности пространства.

Понятие размерности пространства еще более фундаментально, чем представления о метрической структуре пространства—времени. Действительно, основной результат теории относительности состоял в установлении именно метрической структуры; при этом факт (3+1)-мерности пространства — времени принимался в качестве исходного, не подлежащего анализу. Фундаментальность поднятой Эренфестом проблемы вполне соответствовала его устремлениям, которые, однако, скорее можно обнаружить в его письмах, чем в немногословных, четких, лишенных чаще всего «метафизических» замечаний работах, предназначенных «для других». Впрочем, одно замечание такого рода все же можно указать, и оно оказывается связанным некоторым образом с вопросом о размерности пространства.

В 1911 г. в работе «Магнитон» Эренфест очень ясно выражает свой «вкус», называя истинной физикой внесение порядка в хаос явлений с помощью фундаментальных, «освещающих» идей. В том же реферате Эренфест критически отозвался о встречающихся в курсах физики попытках дать полное определение физики как науки. Он сомневался, что подобное определение вообще может быть полезным из-за непрерывного изменения области явлений, исследуемой физикой. В связи с этим с критикой выступил О. Д. Хвольсон и, отдав должное самой статье («превосходная статья», «образец ясного и общедоступного изложения сложного современного вопроса»), раздраженно заметил, что определения физики, о которых говорит Эренфест, вообще никогда не существовали.

Ответная статья Эренфеста «Возможно ли определить понятие „физика“?» уже целиком посвящена этому вопросу. Из этой статьи можно узнать, во-первых, что магнитные явления интересны Эренфесту только, поскольку они связаны с фундаментальными физическими закономерностями, а не в прикладном, инженерном аспекте. Во-вторых, Эренфест приводит несколько определений физики такого типа, о котором он говорил в реферате. Очень любопытно одно из них, взятое Эренфестом из «Физического словаря» Полиана (Avignon, 1761 г.) [12, с. 187]: «Физика. Эта наука имеет предметом тело в его естественном состоянии, т. е. субстанцию длинную, широкую и глубокую. Рассматривать, может ли Всемогущий отнять у тела его длину, ширину и глубину, значит желать остановить развитие физики. Мы верим, что Он это может; однако мы, как физики, воздержимся заниматься таким вопросом. Тело, лишенное своих трех измерений и сохранившее только требование протяженности, было бы скорее объектом метафизики, нежели физики». В этом определении трехмерность считается самым важным признаком реальности. Не категоричность ли этого утверждения, может быть подсознательно, привела к тому, что Эренфест задумался над вопросом размерности пространства?

Но, может быть, кто-нибудь повлиял более реально на появление статьи о трехмерности пространства? Сам Эренфест в своей статье ничего не пишет ни о причинах, которые побудили его заняться этим исследованием, ни о своих предшественниках или работах, идейно повлиявших на него. Работы, на которые ссылается Эренфест (Бертрана о замкнутости орбиты в $E^3$ в зависимости от вида центрального потенциала; Либмана о неевклидовой геометрии; Лоренца о колебании мембраны; Рэлея и Адамара о математическом анализе волнового уравнения), явно всего лишь использованы им, но вряд ли могли привести к самой постановке проблемы.

Истории науки известна предшествующая Эренфесту попытка связать трехмерность пространства с физикой. Это замечание Канта: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния» [13, с. 71]. Эта фраза относится к «докритическому» периоду творчества Канта, когда он находился под влиянием взглядов Лейбница.

В обоснование такой связи размерности пространства и закона силы Кант приводит следующую цепь рассуждений: пространство есть упорядоченность, порядок в совокупности тел, пространство — отношение тел. Однако эти отношения проявляются в силах, действующих между телами. А силы (гравитационные — единственно фундаментальные силы, известные в то время) изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому 2 в законе силы и 3 — размерность пространства — должны быть связаны (хотя Кант и не говорит о конкретной форме такой связи).

Интересно отметить, что в этом рассуждении Канта плодотворным оказалось восходящее к Лейбницу представление об относительной природе пространства (пространство — отношение тел). Подобное рассуждение было бы невозможным для «жесткого» сторонника ньютоновского абсолютного (не зависящего от взаимодействия тел) пространства.

Замечание Канта, впрочем, окутано довольно густым метафизическим туманом. Например, Кант утверждает: «...вполне возможно, чтобы некоторая вещь действительно существовала, но тем не менее нигде во всем мире не находилась»; и поэтому можно говорить о существовании «созданных богом» пространств другой размерности и с другими законами силы. Представление же об этих пространствах человеку недоступно иначе, чем в метафизическом смысле, поскольку «наша душа тоже получает впечатление извне по закону обратной пропорциональности квадрату расстояний». Таким образом, замечание Канта направлено на объяснение трехмерности пространства из постулированного закона силы.

По-видимому, это замечание Канта никак прямо не подействовало на Эренфеста. Кроме того, что в работе Эренфеста нет указаний на такое влияние, следует отметить довольно безразличное отношение Эренфеста к классической философии вообще. Ни в его переписке, ни в статьях (даже не специально научных) почти не встречаются имена философов или какие-нибудь ссылки на их работы.

Исключение составляет Мах, и следует отметить, что в книгах Маха (которые внимательно читал Эренфест [14]) в связи с критическим анализом основных физических представлений активно популяризировались достижения математиков в области неевклидовой и многомерной геометрий (см. об этом в [10, гл. 11]). Вопрос о размерности пространства не был центральным в работах Маха, но все же у него появился, в частности, вопрос «Почему пространство трехмерно?». Мах даже предполагал, что в атомной физике вполне возможно обращение к многомерным пространствам. Однако рассматривать работу Эренфеста как конкретный (отрицательный) ответ на это предположение прямых оснований нет. Следует отметить, что общая философская позиция Маха не вызывала сочувствия Эренфеста, писавшего как-то Иоффе: «Особенно заинтересовала меня критика идеалистической философии (которую, с моей точки зрения, олицетворяет Мах)» [8, с. 87].

Поиски более непосредственного повода для размышлений Эренфеста над вопросом о размерности физического пространства приводят к топологии, точнее говоря, к одному из создателей современной топологии.

Вот письмо Эренфеста к Иоффе от 4 ноября 1912 г. Всего за несколько недель до этого Эренфест переехал из России в Голландию по приглашению Лоренца для того, чтобы занять его кафедру в Лейденском университете [9, с. 57]. Первые недели Эренфеста в Голландии были заняты, кроме устройства на новом месте, официальными визитами и знакомствами со многими голландскими учеными. Среди других: «Пятница — визит с выражением благодарности Ван-дер-Ваальсу (попечитель университета!) — старенький человек (далеко за 70), и, кажется, более ничего. Потом Ваальс-младший — около 40—45 лет. Гм ... да. С ним помчался к *Брауэру*, приват-доценту математики в Амстердаме — сейчас единственному математику в Голландии, — довольно молод — Геттинген—аксиоматика, теория функций, теория множеств... В общем, это человек, с которым мне надо *основательно* познакомиться. Все, включая и Лоренца, говорят с особой весомостью о его выдающейся одаренности» [8, с. 98] (перевод уточнен по оригиналу [14, л. 268]).

Здесь речь идет о Л. Брауэре, одном из выдающихся математиков XX в. Брауэр — один из создателей топологии, автор основополагающих работ, связанных с топологическим понятием размерности, причем годами его наибольшей активности в этом направлении были как раз 1911—1913 гг.! В 1911 г. Брауэр доказал топологическую неэквивалентность $E^n$ с разными $n$. В 1913 г. он воплотил в корректное математическое определение принадлежащую Пуанкаре идею индуктивного топологического определения размерности. И вот как раз в период между этими двумя замечательными результатами Брауэра в топологической теории размерности с ним знакомится Эренфест. Можно предположить, что предметом их беседы была, в частности, занимавшая тогда Брауэра проблема размерности пространства, возможно, и другие близкие к этой проблеме (и больше связанные с физикой) идеи Пуанкаре, наверняка известные Брауэру. Это предположение еще более правдоподобно, если Эренфесту удалось осуществить намерение «*основательно*» познакомиться с Брауэром. А учитывая общительность Эренфеста, его «жадность» к новому, трудно сомневаться в реализации этого намерения.

Таким образом, импульс для размышлений Эренфеста над понятием размерности пространства мог прийти от топологии с помощью Л. Брауэра.

Но пять лет — не слишком ли большой интервал между начальным импульсом и публикацией работы? Ответом на этот вопрос может быть запись, которую Эренфест сделал в 1912 г. в записной книжке [9, с. 44]. Зафиксированные в этой записи особенности методологии научного творчества Эренфеста делают вполне объяснимым пятилетний интервал. Столько времени могло понадобиться для эволюции от «туманной неясности» до четко поставленной проблемы.

**4. Мера «жесткости» математической модели пространства — времени. Значение работ о размерности физического пространства.** Утверждение о трехмерности пространства тривиально в том смысле, что уже Аристотель с помощью понятийного аппарата современной ему науки осознавал факт трехмерности пространства и выразил его соответствующим образом [15, с. 265—266]. А практически это фундаментальное свойство пространства было «известно» уже далеким предкам человека.

Тысячелетия, отделявшие двадцатый век от времени Аристотеля, отнюдь не сделали факт трехмерности менее известным и ясным. В этом смысле доказательство трехмерности пространства излишне. Однако следует отметить, что трехмерность очевидна лишь на основании макроскопического опыта.

Уже отмечалось, что работа Эренфеста значительно опередила свое время. Однако вместе с тем есть основание считать ее вполне своевременной. Действительно, начало XX в. отмечено появлением двух теорий, связанных с проникновением в области существенно немакроскопических явлений: квантовая теория — в микромир, теория относительности — в мегамир. Выход за пределы области изученных явлений, как правило, начинается с экстраполяции известных закономерностей и свойств на новые явления. Эта экстраполяция, конечно, вполне естественна и даже неизбежна, однако сам факт такой экстраполяции чаще всего не осознается вначале. Это приводит к парадоксам, в результате решения которых иногда и возникают новые понятия, новое знание вообще. Хрестоматийный пример такой ситуации — экстраполяция законов классической электродинамики на движение электронов в атоме. В результате — парадокс неизлучения, который был преодолен только с помощью созданного понятийного аппарата квантовой механики и установления границ применимости классической электродинамики.

Смысл работы Эренфеста состоит в указании на необходимость «перепроверить» факт трехмерности пространства при расширении области исследуемых явлений. Атомные и астрономические явления выходят за пределы макроопыта, и результат исследования Эренфеста — подтверждение факта трехмерности пространства в этих явлениях. Могло бы оказаться, что предположение о другой размерности приводило бы только к количественным изменениям, и тогда пришлось бы сравнивать более тщательно различные случаи. Однако Эренфест установил, что различия в рассматриваемых случаях качественные, и это облегчило выбор между моделями пространства различных размерностей.

Речь по существу идет о мере жесткости математической модели пространства — времени, используемой в физике. Принятие модели трехмерного евклидова пространства ньютоновской физикой — результат макроопыта. Эта трехмерность практически без изменения перекочевала в $(3+1)$-мерную псевдоевклидову модель пространства в специальной теории относительности (СТО) и в квантовой теории и $(3+1)$-мерную псевдориманову модель в общей теории относительности (ОТО). Естественно возникает вопрос, не станет ли предположение о трехмерности (или, вообще, определенной размерности) при достаточном «удалении» от области макроскопических явлений слишком жестким для физики.

Не рассматривая подробно возможные ответы на этот вопрос, отметим, что некоторые симптомы такой излишней жесткости, возможно, ощущаются. Попытки сделать более гибким пространственно-временное описание возникают от конкретных проблемных ситуаций. При этом не следует думать, что все такие проблемы возникли в последнее время. Одна из них была осознана еще в начале XX в. при сочетании классической электродинамики и СТО. Это проблема «собственной энергии электрона», или, на языке теории поля, проблема ультрафиолетовых расходимостей. Другие проблемы возникли совсем недавно в связи с описанием сильных взаимодействий при высоких энергиях, с «удержанием» кварков и т. п. Хотя по отношению к проблемам космологии (или физики в мегамасштабах) нет такого потока экспериментальных сведений, как в физике элементарных частиц, но и здесь «главная» проблема космологии — проблема начального состояния Вселенной — вызывает сомнения в абсолютном характере свойства $(3+1)$-мерности и попытки реализовать эти сомнения в конкретных моделях [16].

Интересно сравнить отношение физиков к трехмерности как фундаментальному свойству пространства, проявляющемуся, как показал Эренфест, в фундаментальных физических законах, с отношением к законам сохранения — одному из наиболее эффективных инструментов теоретической физики. Размерность в некотором смысле фундаментальнее законов сохранения. В последних явно «заложена» определенная структура пространства — времени, в частности его симметрия и размерность. Известно, что у физиков не раз возникали предположения о нарушении закона сохранения энергии — импульса (например, у Бора), не говоря о менее фундаментальных законах сохранения, нарушение которых (при определенных условиях) уже включено в теорию, например несохранение четности. В отличие от этого трехмерность пространства остается до сих пор по существу почти «нетронутой».

В физике, правда, существует уже довольно давно направление, связываемое с идеями «дискретного пространства» и «фундаментальной длины» [17]. В работах этого направления пытаются найти такое пространственно-временное описание реальности, которое не предполагало бы заранее непрерывную структуру пространства — времени (точнее говоря, локальную структуру $E^4$). Такая цель, вообще говоря, не эквивалентна отказу от абсолютности числа измерений как единого параметра, характерного для всех физических явлений, и включению понятия размерности пространства в совокупность физических понятий, физических величин с определенной областью применимости, возможностью изменения. Обычно неявно предполагается, что моделью, альтернативной локально евклидовой $(3+1)$-мерной модели пространства, является «полностью дискретная», «точечная», «нульмерная», или, на более физическом языке, полностью квантованная (например, в смысле Снайдера) модель пространства. Однако не исключено, что по мере углубления в микромир размерность пространства будет «отступать» постепенно и что для некоторых физических ситуаций приемлемой окажется $(2+1)$-мерная или $(1+1)$-мерная модель пространства — времени [18]. Такое изменение (уменьшение) размерности пространства при переходе к микромасштабам могло бы стать конкретной формой реализации идеи фундаментальной длины и дискретного пространства.

Однако главная трудность остается той же — отсутствие математической модели пространства — времени, с одной стороны, обладающей достаточной «гибкостью», чтобы описать возможные изменения (неизвестные заранее) свойств пространства вне области изученных физических явлений, и, с другой стороны, достаточно конкретно, конструктивно заданной, чтобы в рамки этой модели можно было включить обширный материал современной физики.

Именно с этой трудностью связано то, что Эренфест не мог рассмотреть все возможные $n$-мерные пространства, а рассмотрел лишь наиболее простые евклидовы пространства. Тем более он не мог рассмотреть математическую модель пространства — времени, в которой размерность зависела бы от масштабов явлений. Однако все это нисколько не уменьшает значения исследования Эренфеста, после которого физики получили возможность смотреть на размерность пространства как на физическое понятие.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ehrenfest P.* In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? — Proc. Amsterdam. Acad., 1917, vol. 20, p. 200—209.
2. *Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.* Четырехмерность пространства и времени. М.; Л.: Наука, 1966. 190 с.
3. *Tangherlini F. R.* Schwarzschild field in *n* dimensions and the dimensionality of space problem. — Nuovo cim., 1963, vol. 27, p. 636—650.
4. *Gurevich L., Mostepanenko V.* On the existence of atoms in *n*-dimensional space. — Phys. Lett., 1971, vol. 35A, p. 201—202.
5. *Ehrenfest P.* Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? — Ann. Phys., 1920, Bd. 61, S. 440—446.
6. *Poincaré H.* Pourquoi l'espace a trois dimensions? — Rev. métaphys. et morale, 1912, t. 20, p. 483—504. — Пер. на рус. яз. В кн.: Пуанкаре А. Последние мысли. Пг., 1923, с. 32—53.
7. *Горелик Г. Е.* Взаимодействие физики и математики при формировании современных представлений о размерности пространства: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИИЕиТ АН СССР, 1979.
8. Эренфест—Иоффе. Научная переписка. Л.: Наука, 1973. 308 с.
9. *Френкель В. Я.* Пауль Эренфест. М.: Атомиздат, 1977. 192 с.
10. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976. Гл. 11.
11. *Планк М.* Избранные труды. М.: Наука, 1975. 788 с.
12. *Эренфест П.* Относительность, кванты, статистика. М.: Наука, 1972. 359 с.
13. *Кант И.* Сочинения. М.: Мысль, 1963. Т. 1. 543 с.
14. ЛОААН СССР, ф. 910, оп. 3, № 530.
15. *Аристотель.* Соч. М.: Мысль, 1981, т. 3, с. 263—378.
16. *Горелик Г. Е.* Проблемы размерности пространства и космология. — В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1982, вып. 27, с. 60—71.
17. *Киржниц Д. А.* Проблема фундаментальной длины. — Природа, 1973, № 1, с. 38—46.
18. *Горелик Г. Е.* Размерность пространства в физике и топологии. — В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1979, вып. 21, с. 47—57.

УДК 531/534(091)

# НАУЧНАЯ, НАУЧНО-ОРГАНИЗАЦИОННАЯ, ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ И ОБЩЕСТВЕННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ АКАДЕМИКА АЛЕКСАНДРА ЮЛЬЕВИЧА ИШЛИНСКОГО

## К 70-летию со дня рождения

6 августа 1983 г. исполняется 70 лет со дня рождения академика Александра Юльевича Ишлинского — крупного специалиста в области общей механики и теории гироскопов, теории упругости и пластичности, сопротивления материалов, теории автономного управления и инерциальных систем, прикладной математики и механики.

В школьные годы А. Ю. Ишлинский увлекался математикой, физикой, химией, электротехникой, занимался фотографией и особено радиотехникой, собирал приемники, изготовлял источники питания к ним, мотал катушки самоиндукции, обмотки трансформаторов. Уже в 1926 г. в газете «Новости радио» была опубликована заметка Александра Юльевича об одном предложенном им переключателе.

После окончания неполной средней школы А. Ю. Ишлинский поступил на Электромеханические курсы им. Л. Б. Красина, впоследствии преобразованные в Московский электромеханический техникум им. Л. Б. Красина. Большое влияние на формирование интересов А. Ю. Ишлинского оказали блестящие педагоги М. Ф. Берг (математик), П. Н. Степаненко (механик) и ученый с энциклопедическими знаниями Я. И. Секерж-Зенькович. С осени 1930 г. А. Ю. Ишлинский заведует кабинетом черчения в этом техникуме. Одновременно, заменяя отсутствующих педагогов, преподает физику, сопротивление материалов и теоретическую механику. Он самостоятельно изучает предметы первого курса механико-математического факультета МГУ, что дало ему возможность в 1931 г. поступить в МГУ сразу на второй курс. Занимаясь в университете, Александр Юльевич продолжал преподавать в техникуме еще ряд лет, и с тех пор его педагогическая деятельность практически не прерывается.

А. Ю. Ишлинскому посчастливилось слушать лекции в университете таких выдающихся ученых и педагогов, как П. С. Александров, Б. В. Булгаков, Н. Н. Бухгольц, В. В. Голубев, И. И. Жегалкин, М. А. Лаврентьев, Л. С. Лейбензон, А. П. Минаков, А. И. Маркушевич, А. И. Некрасов, И. Г. Пет-

*А. Ю. Ишлинский*

ровский, С. Л. Соболев, Н. А. Слезкин, Л. Н. Сретенский, М. М. Филоненко-Бородич. Программа механического отделения факультета предусматривала большую производственную практику с целью ознакомления с общим машиностроением и конструированием. А. Ю. Ишлинский бывал на практике на авиационных заводах и дважды в существовавшем тогда конструкторском бюро «Дирижаблестрой», руководимом в то время известным полярным исследователем У. Нобиле.

В университете А. Ю. Ишлинский много занимался общественной работой, находил время для спорта и даже играл на скрипке в студенческом оркестре. Будучи на старших курсах, он читал лекции и давал консультации по математике и механике инженерам Института нового лубяного сырья, куда его привлек И. В. Крагельский, ныне видный ученый, специалист в области трения и износа.

Дипломная работа Александра Юльевича «Задача об эластике» была написана под руководством М. М. Филоненко-Бородича — большого знатока теории упругости и сопротивления материалов.

С 1935 г., обучаясь в аспирантуре организованного тогда Института механики МГУ, А. Ю. Ишлинский преподавал сопротивление материалов и теоретическую механику в МГУ, Автомобильно-дорожном институте, МВТУ им. Н. Э. Баумана, а затем в МЭИ и других учебных заведениях. Во время пребывания в аспирантуре большое влияние на А. Ю. Ишлинского оказали Л. С. Лейбензон, А. И. Некрасов, С. Л. Соболев, Г. Е. Проктор. Кандидатскую диссертацию «Трение качения» А. Ю. Ишлинский защитил в 1938 г. После окончания аспирантуры А. Ю. Ишлинский был оставлен в университете доцентом кафедры теории упругости. Здесь он читал ряд оригинальных курсов. В этот же период в Педагогическом институте им. К. Либкнехта, в Военно-инженерной академии им. В. В. Куйбышева он читал лекции по теоретической механике, в Московском энергетическом институте — по сопротивлению материалов, а аспирантам ЦАГИ — лекции по аналитической механике.

В 1940 г. А. Ю. Ишлинский вступил в ряды КПСС.

Научные интересы А. Ю. Ишлинского в предвоенные годы охватывали в основном вопросы теории пластичности и несовершенной упругости. Разносторонняя педагогическая деятельность А. Ю. Ишлинского расширила его научную тематику. В Артиллерийской академии им. Ф. Э. Дзержинского он читал курс лекций по аналитической механике, куда согласно программе входила теория гироскопов. Именно в этот период А. Ю. Ишлинский заинтересовался гироскопическими устройствами, и с 1940 г. начинается его работа в судостроении. Знакомство с академиком А. Н. Крыловым и выдающимся инженером Н. Н. Остряковым имело важное значение в развитии исследовательского дара А. Ю. Ишлинского, обогатило его многими инженерными знаниями в области точного приборостроения. А. Ю. Ишлинский вплотную занялся изучением вопросов точной механики и электромеханики и особенно гироскопической техники. Однако одновременно он по-прежнему уделяет большое внимание задачам вязкопластических и не вполне упругих тел. Этой теме была посвящена докторская диссертация А. Ю. Ишлинского, которую он успешно защитил в 1943 г. Вскоре после защиты диссертации он избирается профессором кафедры теории упругости МГУ.

В 1945 г. А. Ю. Ишлинский был приглашен Н. Г. Четаевым в Институт механики АН СССР, где он работал около года еще до войны. Здесь им выполнен ряд интересных исследований по теории пластичности, общей механике.

В 1947 г. А. Ю. Ишлинский был приглашен в Киев в Институт математики АН УССР. В 1948 г. его избирают академиком АН УССР и директором Института математики этой академии. Переехав в Киев, Александр Юльевич не прерывал своей деятельности в Москве и в приборостроительной промышленности, систематически приезжал для научных консультаций, ведения семинаров, руководства аспирантами.

За время руководства А. Ю. Ишлинским Институтом математики АН УССР значительное развитие в этом институте получили исследования по математической физике, вычислительной математике, по механике и ее приложениям в народном хозяйстве. Здесь им был создан отдел общей механики, первыми сотрудниками которого стали его ученики — выпускники Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко. Под его руководством они выполнили ряд актуальных исследований по динамике твердого и деформированного тела, теории гироскопа и систем инерциальной навигации.

Осенью 1949 г. А. Ю. Ишлинский был избран профессором Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко по кафедре механики сплошной среды. Здесь он читал ряд курсов по теории упругости и ее контактным задачам, по теории пластичности, по истории механики. Его лекции отличались предельной ясностью, четкостью, лаконичностью изложения; в них было немало методических находок.

В 1955 г. А. Ю. Ишлинский был переведен в Москву и вплоть до 1965 г. работал научным руководителем одного из приборостроительных отраслевых институтов. Вместе с тем он часто приезжал в Киев для оказания научной помощи ученым и инженерам и на общественных началах в течение многих лет руководил отделом общей механики в Институте математики АН УССР. Научная связь А. Ю. Ишлинского с его киевскими коллегами и учениками не прерывается по сей день.

Большую роль в развитии отечественной механики сыграли семинары, в руководстве которых принимал участие А. Ю. Ишлинский. Еще до войны он вел семинар в МГУ вместе с Б. В. Булгаковым и Н. Г. Четаевым по прикладной механике, а с А. Л. Лаврентьевым (отцом М. А. Лаврентьева) — по сложным задачам динамики. В промышленности он много лет руководил семинаром по гироскопии и инерциальной навигации. Аналогичный семинар ведется в настоящее время в Институте проблем механики АН СССР А. Ю. Ишлинским вместе с Д. М. Климовым и Е. А. Девяниным. В Московском университете он долгое время вел семинар по теории упругости и пластичности вместе с А. А. Ильюшиным и М. М. Филоненко-Бородичем, а в Киеве — два городских семинара: по теории автоматического управления и вместе с Г. Н. Савиным — по механике. В настоящее время А. Ю. Ишлинский руководит семинаром по теории упругости и пластичности в Институте проблем механики АН СССР и семинаром по прикладной механике в Институте механики МГУ. Кроме того, работает общеинститутский семинар по механике в Институте проблем механики АН СССР под общим руководством А. Ю. Ишлинского и В. Б. Либровича.

В 1960 г. за выдающиеся научные достижения в области механики и автоматики Академия наук СССР избирает А. Ю. Ишлинского своим действительным членом.

С 1958 г. А. Ю. Ишлинский — член Президиума (с 1963 по 1982 г.— заместитель председателя) Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике. Он возглавляет Научный совет по проблеме «Общая механика» и Научный совет по трению и смазкам при Отделении механики и процессов управления АН СССР.

В 1964 г. А. Ю. Ишлинский избран директором нового научного учреждения — Института проблем механики АН СССР, в организации которого он сыграл основную роль. Под его руководством институт проводит широкие научные исследования в различных областях механики, оказывает большую помощь народному хозяйству нашей страны.

В 1965 г. А. Ю. Ишлинский назначается председателем Научно-методического совета по теоретической механике при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР. На протяжении многих лет он принимает участие в работе Высшей аттестационной комиссии. С 1944 г. является членом экспертной комиссии по машиностроению, с 1956 — членом пленума ВАКа.

В течение многих лет он состоит членом Комитета по Ленинским и Государственным премиям при Совете Министров СССР.

А. Ю. Ишлинский ведет большую редакционную работу, будучи ответственным редактором собраний сочинений ряда выдающихся ученых нашей страны, сборников, монографий. Он ответственный редактор журнала «Известия АН СССР. Механика твердого тела» и председатель редколлегии международного журнала «Успехи механики».

А. Ю. Ишлинский активно участвует в работе международных научных организаций, где занимает ряд ответственных постов. С 1968 по 1975 г. он был заместителем председателя Исполнительного совета Всемирной федерации научных работников; в 1970 г. избран вице-президентом Исполкома Всемирной федерации инженерных организаций (ВФИО).

С 1970 г. А. Ю. Ишлинский является председателем Всесоюзного совета научно-технических обществ СССР (ВСНТО). На этом посту он ведет большую работу по мобилизации научно-технических обществ на выполнение важнейших задач ускорения научно-технического прогресса и совершенствования научно-технического уровня производства. Он почетный член научно-технического общества машиностроительной промышленности, Всесоюзного общества «Знание» и научно-технического общества Чехословакии, вице-президент Федерации научно-технических обществ социалистических стран. С 1971 г. А. Ю. Ишлинский — член коллегии Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике.

В 1976 г. А. Ю. Ишлинский избран иностранным членом Инженерной академии Мексики, в 1977 г. его избирают иностранным членом академии наук ЧССР и ПНР. А. Ю. Ишлинский является почетным членом Международной федерации по теории машин и механизмов (IFTMM), членом Ассамблеи Международного союза по прикладной и теоретической механике (IUTAM). В 1981 г. он избран почетным академиком Международной академии истории наук.

А. Ю. Ишлинский был делегатом XXV и XXVI съездов КПСС. Он является членом ВЦСПС, а с 1982 г.— членом Президиума ВЦСПС. А. Ю. Ишлинский — депутат Верховного Совета СССР девятого и десятого созывов.

Круг научных интересов А. Ю. Ишлинского широк и многообразен. Трудно найти область механики, в которой он не добился бы существенных результатов, имеющих принципиальное и прикладное значение. Теория упругости, пластичности и грунтовых масс, сопротивление материалов, теория трения, теория автоматического управления, теория гироскопов и, наконец, ряд работ, относящихся к математике, математической физике, сельскохозяйственной технике, истории науки и научной публицистике. Остановимся кратко на некоторых результатах А. Ю. Ишлинского в упомянутых выше областях.

Значительное место в его исследованиях занимает цикл работ, посвященных механике не вполне упругих тел. В частности, А. Ю. Ишлинский дал иным путем, чем Прагер, математическое описание последействия и релаксации при помощи дифференциального соотношения, обобщающего соотношения Максвелла и Томсона. Он предложил для выяснения качественной стороны картины деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел последовательность постепенно усложняющихся моделей, состоящих из сочетания упругих, вязких и идеально пластических элементов, значительно обобщая при этом концепции Максвелла. Полученное им линейное дифференциальное соотношение между напряжением и деформацией не вполне упругого тела позволило исследовать ряд принципиальных вопросов механики наследственных сред без привлечения сложных интегральных соотношений Больцмана—Вольтерра. Исследование продольных колебаний однородного стержня постоянного сечения из не вполне упругого материала привело к открытию так называемого освобождения основного тона колебаний и интересному факту возможности появления апериодических движений для нескольких форм движения стержня. Соотношения наследственной упругости, установленные А. Ю. Ишлинским, нашли широкое применение в решении ряда других задач механики.

Цикл работ А. Ю. Ишлинского посвящен изучению вопросов прочности. Им предложена оригинальная теория прочности формоизменения, объединяющая идеи Губера — Мизеса и Сен-Венана. Развитие идей, положенных в основу этой теории, привело в дальнейшем А. Ю. Ишлинского к новому обоснованию так называемой полной пластичности и построению уравнений пространственного деформирования тел за пределом упругости.

Наряду с расчетами на прочность в технике существенную роль играют расчеты на разрушение тел или иных материалов, необходимых для успешного осуществления технологического процесса. Многочисленные теории прочности, используемые при исследовании упругих систем, непригодны при расчете не вполне упругих систем, где важное значение имеют время действия силы и скорость, с которой тела деформируются. А. Ю. Ишлинский изучил условия разрушения простейших не вполне упругих тел в статических и динамических условиях, ввел свою гипотезу разрушения. Пользуясь этой гипотезой, он теоретически исследовал различные частные случаи разрушения тела: постоянной нагрузкой, внезапно вызванной деформацией, равномерным деформированием, динамической нагрузкой. Исследования А. Ю. Ишлинского были одними из первых в области так называемой длительной прочности, которая интенсивно развивается в настоящее время. К работам этого цикла относится рассмотрение трудной задачи об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду. Рассматриваемая задача, как показал А. Ю. Ишлинский, сводится к решению задачи теплопроводности со своеобразными существенно нелинейными граничными условиями на наперед неизвестной подвижной границе областей стержня после удара — вязкой около преграды и жесткой около конца стержня. Эффективное приближенное решение этой задачи было дано А. Ю. Ишлинским совместно с Г. И. Баренблаттом методами пограничного слоя, а численное решение — совместно с Г. П. Слепцовой.

Следует отметить также рассмотренную А. Ю. Ишлинским в динамической постановке задачу о косьбе злаков. Им были выяснены также причины разрушения хрупких тел, связанных с другими деформируемыми элементами. Разработанная А. Ю. Ишлинским методика решения задач подобного рода была использована им при решении интересной биомеханической задачи о растрескивании коры деревьев, поставленной А. В. Думанским. Следует отметить, что эту методику можно использовать и в ряде других случаев при решении многих технологических проблем.

Решение осесимметрической задачи пластичности имеет важное значение для построения теории испытания материалов на твердость. Одной из наиболее употребляемых технологических проб является так называемая проба Бринелля — определение чисел «твердости» материала по размерам отпечатка от давления какого-либо штампа, например стального шарика, на плоскую границу материала. А. Ю. Ишлинский, решая задачу о пробе Бринелля, нашел простые соотношения между пределом текучести и числом твердости по Бринеллю как для плоского, так и для сферического штампа. Разработанная им теория пробы Бринелля представляет собой решение пространственной задачи пластичности. Обоснованию уравнений этой классической задачи, а также уравнений пространственной деформации вязкопластических тел посвящен ряд других исследований автора, завершившихся созданием общей теории пластичности с линейным упрочнением.

А. Ю. Ишлинским решены трудные задачи об устойчивости вязкопластических течений цилиндра и круглой пластины. Практическое значение имеют также его исследования в области прокатки и волочения. Отметим также решение А. Ю. Ишлинским в точной постановке задачи об остаточных напряжениях и деформациях в закрученном цилиндре конечной длины. В сущности, это была первая пространственная задача подобного рода.

Широко известны исследования А. Ю. Ишлинского по механике грунтов. В частности, ему принадлежит оригинальная идея представления грунта в виде среды, плотность которой изменяется скачком, когда давление достигает некоторой характерной для данного грунта величины, а в остальном эта среда ведет себя как идеальная жидкость. В результате при изучении динамики грунта (например, при взрыве) учитывается основное свойство грунта — необратимое изменение плотности — и значительно упрощается исследование в математическом отношении. Эта модель оказалась эффективной для описания распространения взрывных волн в начальной стадии, когда сжимающие напряжения достаточно велики по сравнению с пределом упругости, и нашла экспериментальное подтверждение.

А. Ю. Ишлинским впервые сформулированы уравнения движения песка как сплошной среды и приведены интересные примеры динамического расширения полости в песке при взрыве.

Большой цикл работ А. Ю. Ишлинского посвящен изучению динамики механических систем при учете трения. В них рассматриваются различные подходы к изучению перекатывания тел, определению сил и моментов трения качения, в частности с учетом несовершенной упругости грунта. Последнее составило предмет кандидатской диссертации А. Ю. Ишлинского, посвященной качению абсолютно жесткого катка по релаксирующему и по упруговязкому грунтам.

Оригинальна также модель грунта, построенная А. Ю. Ишлинским при изучении проходимости колесных и гусеничных машин по целине и грунтовым дорогам. При этом исследуется качение по грунту жестких и пневматических колес, разрабатывается теория образования колеи, объясняется процесс укатывания дороги и влияние скорости движения на перекатывание. Исследована и более сложная задача о движении по грунту колеса с пневматической шиной, о деформации которой автор вводит упрощающие предположения. Установлено условие прохода пневматика по предварительно укатанной дороге без образования колеи и определены (в случае невыполнения этого условия) возрастание глубины колеи после прохода колеса и предельная глубина колеи.

В связи с задачей о качении колес по грунту и исследованиями свойств грунта производится расчет погружения стержня в грунт под действием ударной нагрузки, формулируются законы деформирования грунта, устанавливающие зависимости между давлением на грунт, его осадкой и скоростью изменения осадки.

При исследовании релаксационных механических колебаний (скачки при трении) А. Ю. Ишлинский использует идею И. В. Крагельского об учете зависимости силы трогания с места от продолжительности неподвижного контакта тел. Этим объясняется возникновение прерывистых скачкообразных движений скользящих друг по другу тел. Были исследованы условия возникновения и устойчивости прерывистого движения таких тел, что имеет существенное значение для недостаточно жестких кинематических цепей и расчета тормозов.

Представляет интерес обобщение А. Ю. Ишлинским эйлеровой теории трения в ременной передаче применительно к захвату хлопкового волокна вращающимся шпинделем хлопкоуборочной машины.

В области теории упругости и сопротивления материалов А. Ю. Ишлинскому принадлежит ряд классических результатов. Прежде всего это создание совместно с академиком М. А. Лаврентьевым новой теории динамической устойчивости, которая возникла вследствие анализа многочисленных экспериментов, проводившихся в Киеве. Совершенно неожиданно оказалось, что при действии внезапно возникающих нагрузок процесс потери устойчивости стержней, пластин и оболочек происходит по линии образования высших форм искривления исходного геометрического состояния, неустойчивых при обычном статическом нагружении. Такой формой является, например, продольный гофр, образующийся при внезапном обжатии цилиндрической оболочки. В работе приведено строгое обоснование этого явления, по-новому освещена работа сжатых конструкций при действии сил малой продолжительности. В дальнейшем в этом направлении появился ряд конкретных исследований у нас и за рубежом.

Принципиальное значение для развития теории устойчивости упругих систем имеет работа «Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости», перекликающаяся с одной из ранних работ Л. С. Лейбензона. В сущности, еще со времен Эйлера величины критических нагрузок упругих систем определялись методами сопротивления материалов или теории пластин и оболочек. В этой работе задача Эйлера о продольном изгибе решается посредством уравнений математической теории упругости с удовлетворением граничных условий на деформирующейся поверхности стержня. В результате точность формулы Эйлера подтверждается до долей процента. Подобные исследования имеют принципиальное значение, так как долгое время считалось невозможным рассмотрение вопросов устойчивости упругих систем методами линейной теории упругости. Следует отметить работу этого цикла, в которой речь идет об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. В ней обращено внимание на тот факт, что аналог принципа Сен-Венана не всегда приложим к исследованию устойчивости тел типа пластин, вытянутых в одном каком-либо направлении.

Исследование колебаний упругих канатов переменной длины сильно затруднялось необходимостью решения дифференциального уравнения в частных производных при сложных граничных условиях. А. Ю. Ишлинским составлено интегродифференциальное соотношение, эквивалентное исходным уравнениям, и указан метод типа метода Галеркина для приближенного решения возникающей задачи. В результате им было получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее выделению основного тона колеблющейся струны. Посредством такого метода и его видоизменений киевские механики решили ряд практически важных задач, относящихся к расчету подъемных канатов, использующихся в глубоких шахтах.

А. Ю. Ишлинский внес ясность в рассмотрение перемещений упругой полуплоскости, принципиальных вопросов теории трещин, играющей важную роль в современной теории разрушения. Полезны для практики его исследования перекосов корпусов приборов и деформации кардановых подвесов.

Основополагающие результаты принадлежат А. Ю. Ишлинскому в области теории гироскопов, сложных гироскопических систем, систем инерциальной навигации. Изучением этих интереснейших приборов и устройств он начал заниматься с 1940 г. и успешно продолжает эти исследования в настоящее время.

Известно, какую большую роль в развитии отечественной гироскопии сыграли замечательные труды А. Н. Крылова и Б. В. Булгакова. Работы А. Ю. Ишлинского посвящены их дальнейшему существенному развитию. В первых работах А. Ю. Ишлинского по теории гироскопических систем рассматриваются вопросы геометрии и кинематики систем стабилизации. В них, в частности, решен ряд задач о совместной работе связанных между собой при помощи следящих систем двух кардановых или бикардановых подвесов, расположенных на движущемся объекте; исследован вопрос об относительном вращении в азимуте двух стабилизированных площадок, возникающем при качке объекта в случае неидентичности ориентации соответствующих осей кардановых подвесов; изучены ошибки горизонтальной стабилизации при совместной работе кардановых подвесов разных систем. К этому же циклу относятся работы, посвященные вопросам ориентации объектов, управляемых гироскопами, в частности решение задачи об определении ориентации объекта после его запуска с наклонного основания при наличии углов рассогласования с гироскопами, управляющими ориентацией. Для решения перечисленных задач А. Ю. Ишлинский использовал аналитический метод исследования геометрии и кинематики кардановых подвесов, что в значительной мере позволило ему рассмотреть важный вопрос об ошибках воспроизведения необходимых углов при совместно работающих кардановых подвесах. До этих работ А. Ю. Ишлинского пользовались громоздкими формулами сферической тригонометрии, редко приводящими к цели.

А. Ю. Ишлинским доказана важная теорема о так называемом накоплении телесного угла при конических движениях одноосного гироскопического стабилизатора, что нашло широкое применение в технике; разработана теория гироскопической вертикали с аэродинамическим подвесом и электромагнитной коррекцией; создана теория гироскопического креновыравнивателя, общая теория гироскопической рамы — основного элемента многих гироскопических приборов (таких, как компасы, гиростабилизаторы) — и решены другие разнообразные вопросы прикладной теории гироскопа; в частности рассмотрены сложные нелинейные задачи теории гироскопов, в их числе вероятностные.

А. Ю. Ишлинскому принадлежат первые работы, посвященные влиянию упругости элементов гироскопических конструкций на точность гироприборов. Им дано важное для практики теоретическое объяснение причин ухода свободных гироскопов с упругим подвесом при наличии вибраций оснований, на которых они установлены, изучено влияние упругой податливости элементов гироскопических устройств на их точность и устойчивость при наличии следящих систем и двигателей стабилизации.

При практическом использовании приборов важное значение имеет вопрос об установлении влияния на их показания движения несущих их объектов с ускорениями, например при маневрировании. Этому вопросу посвящены работы А. Ю. Ишлинского, содержащие теорию физического и математического маятников, пространственного гироскопического компаса, двухгироскопической вертикали, гиромаятника. А. Ю. Ишлинский ставит своей задачей показать, что при определенном подборе параметров исследуемых систем, а также начальных условий движения их девиации зависят только от текущей величины скорости точки подвеса и не зависят от закона ее движения по земной сфере. Вопрос о возможности построения приборов, обладающих подобными свойствами, рассматривался многими авторами, начиная с М. Шулера. Однако строгого их решения до работ А. Ю. Ишлинского дано не было, так как в уравнениях движения исследуемых приборов учитывались не все силы инерции, определяемые движением системы относительно вращающейся Земли. Внесению ясности в этот вопрос в значительной мере способствовало рассмотрение движения не относительно вращающейся Земли, а относительно некоторой невращающейся сферы $S$, концентрической с Землей и не участвующей в ее вращении. Выяснением точных условий «невозмущаемости» не исчерпывается содержание рассмотренных работ. Важной заслугой А. Ю. Ишлинского является четкий анализ «игры сил» в кардановом подвесе гироскопа, а также в гироскопической раме с учетом всех сил, действующих на соответствующую механическую систему.

А. Ю. Ишлинский большое внимание уделяет методическим вопросам. Наряду с применением второго метода Лагранжа он при выводе уравнений движения широко использует теорему об изменении кинетического момента системы. Последовательное применение этой теоремы ко всей системе в целом и к ее отдельным составным частям дало ему возможность во многих случаях упростить выкладки и изучить взаимодействие отдельных элементов изучаемых устройств. Предложенная методика составления уравнений сложных гироскопических систем завершена А. Ю. Ишлинским при создании теории трехосного гиростабилизатора. Эта работа приобрела широкую известность и используется в настоящее время многими исследователями.

Большой вклад внес А. Ю. Ишлинский в развитие теории автономного управления подвижными объектами. В 1956 г. им впервые четко доказана возможность строгого решения основной задачи автономного определения местоположения движущегося по земной сфере объекта с помощью гироскопов, ньютонометров (измерителей ускорения) и интегрирующих устройств. Он детально исследовал одну из таких систем, основным элементом которой является трехосный гиростабилизатор с коррекцией от двух ньютонометров, расположенных на его стабилизированной платформе. Для такой системы им получены строгие условия «невозмущаемости». А. Ю. Ишлинский предложил еще одну оригинальную схему инерциальной навигации с использованием пространственного гироскопического компаса и гироазимута и получил для нее также условия «невозмущаемости».

В 1976 г. вышла в свет фундаментальная монография А. Ю. Ишлинского «Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация», в которой подытожены многолетние исследования автора в области геометрии кардановых подвесов, ориентации и стабилизации подвижных объектов, теории гироскопов и сложных гироскопических систем, а также систем инерциальной навигации. В нее, в частности, вошли в значительно переработанном и расширенном виде главы из более ранних книг А. Ю. Ишлинского «Механика специальных гироскопических систем» (1952) и «Механика гироскопических систем» (1963). Монография стала в настоящее время настольной книгой студентов, научных работников и инженеров, занимающихся вопросами гироскопической техники и изучением систем инерциальной навигации.

Несколько ранее, в 1968 г., опубликована монография А. Ю. Ишлинского «Инерциальное управление баллистическими ракетами» (второе издание). В ней изложены математические основы некоторых возможных вариантов инерциального управления полетом баллистических ракет без использования какой-либо внешней информации (например, радиосигналов, излучения звезд и др.). Основное содержание книги состоит в формировании функции текущих показаний чувствительных элементов, достижение которой заданного значения вызывает команду на выключение двигателя. Значительное место в монографии уделено вопросам инерциального управления движением ракеты в боковом направлении.

А. Ю. Ишлинским рассмотрен важный в теории систем инерциальной навигации вопрос об устойчивости решений уравнений инерциальной навигации по отношению к начальным данным. При решении этого вопроса он использовал одну из теорем о сложении конечных вращений, предложенную А. И. Лурье, а также вместе с О. Ф. Бойчуком и В. А. Стороженко — второй метод Ляпунова.

А. Ю. Ишлинскому принадлежит также представление гироскопического стабилизатора в виде электромеханической системы с обратной связью. Многие свойства гиростабилизатора, обнаруженные вначале экспериментально, стали на этой модели очевидными и поддающимися простому расчету методами автоматического регулирования.

Важное место в творчестве А. Ю. Ишлинского занимают работы по общей механике. Помимо работ по гироскопии, сюда относятся исследования по проблемам нелинейной механики, теории устойчивости, динамике относительного движения, теории колебаний, механике ракет и другим вопросам. Так, при решении конкретной задачи о движении гироскопического прибора — креновыравнивателя — А. Ю. Ишлинский дал обоснование теории скользящих режимов динамических систем.

Ряд работ А. Ю. Ишлинского посвящен изучению колебаний механических и электромеханических систем. Им, в частности, указано видоизменение и развитие методов нелинейной механики Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Во многих практически важных случаях прием А. Ю. Ишлинского позволяет описать переходные процессы сложных систем посредством простых дифференциальных уравнений, в частности второго порядка, и сделать при этом достаточно точные заключения об их устойчивости.

В Киеве в АН УССР под научным руководством и при участии А. Ю. Ишлинского проводились важные для практических целей исследования движения на струнном подвесе твердых тел и тел с полостями, наполненными жидкостью. Начало этим исследованиям положено М. А. Лаврентьевым и С. В. Малашенко. В 50-х годах были выявлены и нашли теоретическое обоснование формы динамического равновесия осесимметричного тела, при существовании которых ось симметрии тела отклонялась от вертикали. Был получен ряд результатов, подтвержденных экспериментально, о влиянии жидкости на устойчивость вертикального движения осесимметричного тела. В частности, А. Ю. Ишлинский рассмотрел задачу С. Л. Соболева об устойчивости движения волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, целиком заполненными идеальной несжимаемой жидкостью. Движение заполняющей жидкости изучалось в системе координат, связанной с телом волчка. Решение этой сложной задачи значительно упростилось, а результаты стали более обозримыми. При решении задачи об устойчивости движения подвешенного на струне осесимметричного тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, были обнаружены две зоны значений угловых скоростей, при наличии которых против ожидания исследуемая механическая система теряет устойчивость.

В 1975 г. исследования динамики твердых тел, подвешенных на струнном подвесе, были продолжены в Киеве при участии А. Ю. Ишлинского его учениками в связи с разработкой нового метода динамической балансировки быстровращающихся твердых тел. В связи с теоретическим обоснованием этого метода за период 1977—1980 гг. А. Ю. Ишлинский совместно с С. В. Малашенко, В. А. Стороженко, М. Е. Темченко и П. Г. Шишкиным опубликовал ряд работ, в которых, в частности, определены и исследованы стационарные движения однородного осесимметричного продолговатого твердого тела, подвешенного на струне, в предположении, что точка подвеса тела к струне не лежит на оси его динамической симметрии.

Возможность практического применения струнного подвеса заключается в том, что при больших угловых скоростях вращения существуют формы динамического равновесия, при которых главная центральная ось инерции тела практически совпадает с неподвижной вертикалью даже в случае, когда точка крепления тела к струне не лежит на главной центральной оси инерции тела и струна описывает конус с вершиной в точке крепления ее к вращающему двигателю. Таким образом, при достаточно большом значении угловой скорости происходит процесс самобалансирования вращающегося тела. На использовании этой особенности и основана предложенная С. В. Малашенко идея метода динамической балансировки быстровращающихся твердых тел.

Среди работ рассматриваемого цикла отметим также выявление такого стационарного движения подвешенного на струне осесимметричного твердого тела, при котором центр масс тела, точка крепления его со струной и точка крепления струны к двигателю не лежат в одной плоскости. Факт существования такого движения на первый взгляд кажется парадоксальным, но он был строго доказан как теоретически, так и экспериментально.

О многообразии научных интересов А. Ю. Ишлинского свидетельствует и ряд его работ, относящихся к математике, математической физике, гидромеханике, истории науки. Так, он решает задачу о фокусировке заряженных частиц (электронов) в магнитном поле, определяет коэффициент взаимоиндукции двух достаточно удаленных друг от друга замкнутых витков или проволочных рамок, устанавливает при этом изящную формулу преобразования двойного криволинейного интеграла в двойной поверхностный, приводит доказательство единственности решения уравнения упруговязкой нити, дает строгое математическое обоснование предложенной А. М. Сенковым и П. Ф. Фильчаковым методики электромоделирования русловых потоков с помощью электропроводящей бумаги переменного удельного сопротивления.

В круг интересов А. Ю. Ишлинского входит и история механики. Еще в начале 50-х годов он читал курс лекций по истории механики в Киевском государственном университете им. Т. Г. Шевченко. Эти лекции (к сожалению, не опубликованы) были интересны как по форме, так и по содержанию. Они не были систематическим изложением истории механики, а скорее составляли очерки о жизни и научной деятельности отдельных ученых, которые много сделали для развития отечественной науки. С некоторыми из них А. Ю. Ишлинский был знаком лично: с С. А. Чаплыгиным, А. Н. Крыловым, Б. В. Галеркиным, А. И. Некрасовым, Л. С. Лейбензоном, В. В. Голубевым. О научной деятельности других — А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, И. В. Мещерского, Г. В. Колосова, К. Э. Циолковского — знал от их непосредственных учеников и последователей, с которыми А. Ю. Ишлинский был хорошо знаком. В большинстве случаев он излагал научные результаты того или иного ученого в своей интерпретации и делал это в простой и доходчивой форме. Так, например, А. Ю. Ишлинский привел свою геометрическую интерпретацию метода Галеркина, широко известного и используемого в настоящее время в механике сплошных сред. Эта интерпретация была так наглядна и убедительна, что и поныне многие из его бывших студентов, ставших преподавателями вузов, приводят ее на своих лекциях.

К 300-летнему юбилею воссоединения Украины с Россией А. Ю. Ишлинский написал ряд работ о русско-украинских научных связях в области математики и механики. В этих работах он с большой убедительностью показал, что дружба и братская взаимопомощь русских и украинских ученых прослеживаются на всех этапах развития отечественной математики и механики.

А. Ю. Ишлинскому принадлежат две статьи о выдающемся отечественном математике и механике А. М. Ляпунове. В одной из них, написанной в соавторстве с И. Б. Погребысским, глубоко проанализирован вклад А. М. Ляпунова в динамику твердого тела.

В 1964 г. наша страна вместе со всеми странами мира отмечала 400-летие со дня рождения Галилео Галилея — одного из великих гениев всех времен и народов, имя которого чтит человечество наряду с именами Архимеда и Ньютона. А. Ю. Ишлинский в статьях и докладах дал глубокий научный анализ его творчества, показал величие Галилея в мировой науке, указал также и на два интересных обстоятельства, которые ранее никем не были замечены. Суть первого из них состоит в следующем. В механике известно, что если какая-либо система координат перемещается поступательно и ее начало движется равномерно и прямолинейно, то в этой системе уравнения механики Ньютона имеют тот же вид, что и в абсолютной системе координат. Подобные системы координат, если к ним присовокупить «местные» часы, А. Эйнштейн назвал галилеевыми системами отсчета. То, что относительно таких систем координат явления механики происходят так же, как и в абсолютной системе, называют галилеевым принципом относительности. Этот термин особенно часто используется в физике. Все законы механики и их следствия при изучении движения по отношению к произвольно выбранной галилеевой системе имеют идентичный вид. Галилеевы системы иногда называют также инерциальными. Однако наименование инерциальной системы координат «галилеевой» скорее служит цели дополнительного увековечения имени Галилея, чем отражает тот факт, что эта система была им предложена в таком виде, как мы ее теперь понимаем. Так, в своих знаменитых «Беседах» Галилей считает, что внутри корабля, движущегося равномерно в одном и том же направлении, все механические явления (например, падение тел) неотличимы от аналогичных явлений, происходящих внутри неподвижного корабля, пришвартованного к пирсу. Но ведь Галилею сферическая форма Земли и факт ее вращения были хорошо известны. Таким образом, Галилей за инерциальную систему координат (в нашем понимании этого слова) принимал систему, равномерно обращающуюся по дуге окружности на поверхности земного шара. Как следствие, стрельба из пушки под одним и тем же углом к горизонту на восток и на запад по Галилею должна была бы приводить к одной и той же дальности полета ядра, а падающие тела не должны были отклоняться к востоку от вертикали.

Вторую досадную погрешность Галилей допустил в расчетах при решении следующей задачи. Пусть тело находится на высокой горе Земли, лишенной атмосферы. Что произойдет с ним, если бросить его горизонтально? Упадет ли оно на Землю, если считать ее сферой? Галилей пришел к выводу, что какая бы ни была начальная скорость тела, оно всегда упадет на Землю, даже если не учитывать сопротивления воздуха. Теперь нам известно, что при начальной скорости тела около 8000 м/сек оно превратится в искусственный спутник Земли, а при начальной скорости, превышающей 11 000 м/с, тело вообще, преодолев силу земного тяготения, уйдет в космическое пространство. Возникает вопрос, почему же не открыл космическую скорость великий Галилей? Оказывается, он допустил лишь малозначительную арифметическую погрешность при подсчете отношений бесконечно малых величин. Таким образом, Галилей был близок к открытию первой космической скорости. Во всяком случае, он был первым, кто уже четыре столетия тому назад поставил этот вопрос.

Большой вклад в изучение наследия выдающегося отечественного ученого и инженера В. Г. Шухова внес А. Ю. Ишлинский. Он написал очерк о жизни и научном творчестве ученого, является редактором избранных трудов Шухова.

С большим знанием дела и теплотой написаны А. Ю. Ишлинским очерки о деятельности М. А. Лаврентьева в Академии наук УССР, о творческом пути М. В. Келдыша, С. П. Королева, М. М. Филоненко-Бородича, В. С. Кулебакина, И. Г. Петровского, И. И. Метелицына, И. В. Мещерского и других ученых.

А. Ю. Ишлинский — автор ряда обзорных статей и докладов по истории механики. Так, например, в 1950 г. была опубликована его статья «Пластичность» в книге «Механика в СССР за тридцать лет. 1917—1947», в 1968 г.— «Механика гироскопических и навигационных систем» (совместно с Е. А. Девяниным и Д. М. Климовым) в книге «Механика в СССР за 50 лет», в

1972 г. — «Теория гироскопических и инерциальных систем» (совместно с И. Д. Блюминым) в книге «История механики с конца XVIII века до середины XX века».

Для «Детской энциклопедии» А. Ю. Ишлинский (вместе с М. Е. Темченко) написал увлекательную статью «Волчок», в которой дана без использования высшей математики достаточно строгая теория волчка, объяснено возникновение псевдорегулярной и регулярной прецессий, гироскопического момента, многих гироскопических явлений и их приложений в технике.

В 1973 г. вышла в свет статья А. Ю. Ишлинского «Основные понятия и принципы классической механики — объединяющий центр естественных наук XVIII—XIX вв.», в которой с большой ясностью изложена концепция теоретического естествознания XVIII—XIX вв., отмечена роль механики в материалистическом понимании природы.

Большое значение имеют работы А. Ю. Ишлинского и выступления в печати, посвященные проблемам механики, ее значению для развития современной науки. Такие его работы, как «Механика в наши дни» («Правда», 1964), «Механика» (статья в сборнике «Октябрь и научный прогресс». М.: АПН, 1967, кн. 1), «О некоторых проблемах механики» (в сборнике «Наука и человечество». М.: Знание, 1968), а также статья «Ленинская теория познания и классическая механика» («Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1970, № 2), во многом способствовали пропаганде значения современной механики для развития науки в целом и ее приложений к практике.

В 1981 г. вышла в свет книга А. Ю. Ишлинского «Механика относительного движения и силы инерции», адресованная широкому кругу читателей. В ней автор на основании многолетнего опыта изложил установившиеся у него взгляды на основы классической механики и одной из трудных ее глав — механики относительного движения. А. Ю. Ишлинский дал строгое разграничение сил физических (ньютоновых), создающих ускорение относительно «абсолютной» системы координат (невращающейся, с началом в центре масс Солнечной системы), от даламберовых сил инерции и этих последних от сил инерции эйлеровых (переносных и кориолисовых), существенно обусловленных выбором подвижной системы координат. На многих примерах в книге продемонстрированы приемы составления уравнений движения и анализа решений задач динамики относительного движения.

В канун празднования нашей страной шестидесятилетнего юбилея Великой Октябрьской Социалистической революции А. Ю. Ишлинским написана большая статья «Механика накануне шестидесятилетия Октября и ее практическое значение» (в сборнике «Октябрь и наука». М.: Наука, 1977), в которой проанализированы огромные успехи и задачи механики в деле развития народного хозяйства нашей страны.

На V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, состоявшемся в 1981 г. в г. Алма-Ате, А. Ю. Ишлинским сделан доклад (см.: ПММ, 1982) о достижениях советской механики и проблемах, стоящих перед ней в настоящее время.

Много энергии и сил уделяет А. Ю. Ишлинский редакционной деятельности. Он является одним из инициаторов издания на Украине Полного собрания трудов великого отечественного математика и механика М. В. Остроградского и одним из редакторов второго тома, а также одним из редакторов третьего тома, вышедшего на Украине фундаментального труда «История отечественной математики». А. Ю. Ишлинский редактировал Избранные труды Галилея в двух томах, Собрание сочинений А. М. Ляпунова; он член редколлегии и один из авторов фундаментального труда «Механика в СССР за 50 лет».

С 1971 г. в нашей стране в апреле ежегодно проводятся «Гагаринские чтения», на которых заслушиваются доклады, в которых содержатся результаты исследований ученых и инженеров нашей страны по освоению космического пространства, созданию новых видов космических аппаратов, технологии их изготовления и многие другие вопросы. Под бессменным руководством А. Ю. Ишлинского эти чтения приобретают все более широкую популярность в нашей стране.

А. Ю. Ишлинский внес большой вклад в дело подготовки инженерных и педагогических кадров нашей страны; он является одним из организаторов советской науки, в частности новых научных учреждений. Научные исследования А. Ю. Ишлинского, непосредственное участие в работе семинаров ряда научно-исследовательских институтов и промышленных организаций во многом способствовали научному росту творческих коллективов. Ученики и последователи А. Ю. Ишлинского работают во многих высших учебных заведениях и научно-исследовательских институтах нашей страны, в разных отраслях промышленности, решают актуальные задачи науки и техники.

Советское правительство высоко оценило заслуги А. Ю. Ишлинского перед Родиной. Ему присвоено высокое звание Героя Социалистического Труда. Он лауреат Ленинской премии, награжден двумя орденами Ленина, орденом Октябрьской революции, двумя орденами Трудового Красного Знамени, другими орденами и медалями нашей страны. А. Ю. Ишлинский награжден также орденами и медалями ряда иностранных государств, в частности болгарским орденом Кирилла и Мефодия первой степени, медалью французского общества инженеров-механиков, золотой медалью Академии наук ЧССР и др.

Свое семидесятилетие Александр Юльевич Ишлинский встречает в расцвете творческих сил, таланта. Пожелаем ему многих лет служения на благо нашей Великой Родины.

*А. Т. Григорьян, М. Е. Темченко*

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ *



* Составлен В. А. Никифоровским.

# СОДЕРЖАНИЕ

## МЕХАНИКА И ФИЗИКА



## ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО



ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МЕХАНИКИ

*Утверждено к печати Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР*

Редакторы издательства *Л. Е. Кононенко, Ю. Г. Тихомирова*
Художник *Н.П. Фролов.* Художественный редактор *Т. П. Поленова*
Технические редакторы *В. Д. Прилепская, Л. И. Куприянова*
Корректоры *Т. С. Козлова, Н. А. Несмеева*

ИБ № 27051

Сдано в набор 10.02.83. Подписано к печати 14.04.83. Т-02800. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бамага для глубокой печати. Гарнитура литературная новая. Печать высокая.
Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 20,5. Усл. кр. отт. 18,0. Тираж 1650 экз.
Тип. зак. 4459. Цена 3 р. 30 к.

Издательство «Наука». 117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

УДК 531/534(091)

Григорьян А. Т., Михайлов Г. К. **Вклад последних двадцати пяти лет в развитие истории механики.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дан анализ исследований по истории механики за последние двадцать пять лет.

Ил. 2. Библиогр. 144 назв.

УДК 531/534(091)

Кульвецас Л. Л. **К истории определения понятия скорости.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Статья посвящена анализу понятия скорости с XVII в. до наших дней.

Библиогр. 74 назв.

УДК 531/534(091)

Лишевский В. П. **К истории исследований по механике нити в России в XIX в.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дан обзор исследований отечественных ученых по механике нити в XIX в.

Библиогр. 13 назв.

УДК 531/534(091)

Сурков Ю. П. **Развитие теории интегральных инвариантов.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Прослеживается история возникновения и развития теории интегральных инвариантов, начиная с работ А. Пуанкаре.

Библиогр. 39 назв.

УДК 531/534(091)

Мозалевская Г. В., Хохлов А. И. **Современное состояние задачи построения точных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Приводится обзор исследований отечественных ученых в области построения точных решений задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе.

Ил. 2. Библиогр. 27 назв.

УДК 531/534(091)

Левинова И. С., Рожанская М. М. **У истоков механики машин.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дана предыстория механики машин.

Ил. 13. Библиогр. 10 назв.

УДК 531/534(091)

Боголюбов А. Н. **Становление динамики машин.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Исследуются основные вехи в становлении динамики машин.

Библиогр. 17 назв.

УДК 531/534(091)

Леднева Л. Д. **Становление кинематики изменяемых систем.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Излагается история кинематики изменяемых систем, начиная с работ М. Шаля, А. Груара и кончая работами П. О. Сомова.

Библиогр. 19 назв.

УДК 531/534(091)

Ковалев Б. Д. **Формирование эйлеровой гидродинамики.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Рассмотрены предпосылки и процесс формирования динамики идеальной жидкости.

Библиогр. 35 назв.

УДК 531/534(091)

Тюлина И. А. **О гидравлических исследованиях Эйлера.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Излагаются исследования Эйлера по гидравлике с привлечением современных представлений и понятий.
Ил. 9. Библиогр. 10 назв.

УДК 531/534(091)

Мотылевская Р. Е. **Работы П. А. Шиффа по теории упругости.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Рассматриваются малоизвестные работы отечественного ученого П. А. Шиффа по теории упругости.
Библиогр. 3 назв.

УДК 531/534(091)

Григорьян А. Т. **Разработка теоретических основ авиации в работах Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Статья посвящена анализу исследований Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина в области аэродинамики.

УДК 531/534(091)

Меркулова Н. М. **Развитие аэродинамики в СССР (1917—1932).**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дана оценка вклада советских ученых в аэродинамику.
Библиогр. 25 назв.

УДК 531/534(091)

Визгин Вл. П. **Галилеевский принцип относительности.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дан краткий обзор развития представлений о принципе относительности в классической физике и механике.
Библиогр. 23 назв.

УДК 531/534(091)

Григорьян А. Т. **Леонард Эйлер.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дано краткое описание жизни и работ Л. Эйлера в области механики.
Библиогр. 7 назв.

УДК 531/534(091)

Стипанич Э. **Бошкович и Эйнштейн.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Приводится сравнительный анализ пространственно-временных представлений Р. И. Бошковича и А. Эйнштейна.
Ил. 1. Библиогр. 50 назв.

УДК 531/534(091)

Горелик Г. Е. **Эренфест и проблема размерности пространства.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Приводится исследование П. Эренфестом трехмерности пространства и его проявления в фундаментальных законах механики и физики.
Библиогр. 18 назв.

УДК 531/534(091)

Григорьян А. Т., Темченко М. Е. **Научная, научно-организационная, педагогическая и общественная деятельность академика Александра Юльевича Ишлинского. К 70-летию со дня рождения.**— В кн.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

Дан анализ работ академика А Ю. Ишлинского по различным проблемам механики.
Ил. 1