ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

С. Г. МИХЛИН

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *Г. П. Акилов* Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 7/VIII 1950 г. Формат бумаги 84×108 см. 1/32. 6,875 бум. л. 21,935 печ. л. 23,22 уч.-изд. л. 40 496 тип. зн. в печ. л. Тираж 5000 экз. Цена 13 р. 95 к., переплет 2 р. Т-04589. Заказ № 1064.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В математической физике прямыми методами называют методы приближенного решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, сводящие эти задачи к системам алгебраических уравнений. [1]

Прямые методы широко используются в практике инженерных расчетов; с их помощью решено и решается большое количество практически важных задач. Не менее значительна роль прямых методов и в теоретических исследованиях. Проблемы существования решений основных задач математической физики с наибольшей полнотой удается разрешить именно посредством прямых методов; достаточно указать, например, известную работу Л. А. Люстерника [1], в которой задача Дирихле для уравнения Лапласа решена при наиболее общих возможных допущениях относительно границы области, ряд важных работ С. Л. Соболева и многие другие.

Обширная литература по прямым методам математической физики разбросана по различным журналам; суммирующих работ очень немного. Здесь можно назвать главу VII т. II известной монографии Д. Гильберта и Р. Куранта [2], в которой метод минимизирующих последовательностей (обобщающий известный метод Ритца) применен к доказательству существования решения основных краевых задач и задач о собственных значениях для уравнения эллиптического типа второго порядка. Вариационным методам в теории упругости посвящена весьма интересная монография Л. С. Лейбензона [1],

---

[1] Такое определение дает, например, С. Л. Соболев в своем курсе [4]. (Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещенному в конце книги.)

в которой затрагивается большое число приближенных методов. Подробнее освещен в монографической литературе метод сеток; он изложен с разных точек зрения и с разной степенью подробности в книгах Ф. Блейха и Е. Мелана [1], Г. Маркуса [1], Д. Ю. Панова [1, 2], П. М. Варвака [1] и др. Ряд сведений о прямых методах содержится в превосходной монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1].

В настоящей книге мы излагаем четыре прямых метода, которые мы считаем наиболее важными: энергетический метод и связанный с ним метод Ритца, метод Галеркина, метод наименьших квадратов и метод конечных разностей. Основной вопрос, который мы пытались разрешить, был вопрос о качестве сходимости приближенных решений к точному. Такой вопрос неизбежно встает каждый раз, когда приближенно определяется не число, а функция одной или нескольких переменных. Если задача состоит в определении некоторого числа a, и мы находим его приближенное значение a_n, то для оценки приближения достаточно оценить разность $|a_n - a|$. Лучшим приближенным методом мы будем считать тот, который при той же затрате труда дает наименьшую величину $|a_n - a|$. Значительно сложнее обстоит дело, если искомым элементом является функция. Пусть, например, $f_n(x)$ есть приближенное значение $f(x)$. Разность $|f_n(x) - f(x)|$ в различных точках имеет различные значения, поэтому оценивать величиной $|f_n(x) - f(x)|$ степень приближения невозможно. В таких случаях в качестве меры погрешности приходится выбирать некоторое число, определенным образом зависящее от функции $|f(x) - f_n(x)|$. Проще всего за меру погрешности взять величину $\rho_n = \max|f(x) - f_n(x)|$; если эта величина стремится к нулю при $n \to \infty$, то приближенное решение *равномерно* стремится к точному. Можно за меру погрешности выбрать величину

$$\delta_n = \left\{\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(a и b — пределы изменения x); если $\delta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, то $f_n(x)$ *в среднем сходится* к $f(x)$. Сходимость в среднем представляет собой „худший“ тип сходимости, нежели равномерная: из равномерной сходимости вытекает сходимость в среднем, тогда как обратное предложение неверно. Во многих случаях важно, чтобы производные приближенного решения были близки в том или ином смысле к соответствующим производным точного решения; тогда за меру погрешности можно взять какую-либо из величин

$$\rho_n^{(m)} = \max|f(x) - f_n(x)| + \sum_{k=1}^{m} \max|f^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x)|$$

или

$$\delta_n^{(m)} = \left\{ \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\,dx + \sum_{k=1}^{m} \int_a^b |f^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}};$$

стремление к нулю $\rho_n^{(m)}$ при $n \to \infty$ означает, что приближенное решение равномерно, вместе со своими производными до порядка m включительно, стремится к точному; точно так же, если $\delta_n^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то приближенное решение сходится к точному, вместе с производными до порядка m, в среднем. Можно в качестве меры погрешности выбирать и иные величины; каждая из них приводит к своему представлению о сходимости приближенного решения к точному.

Строя приближенное решение задачи, важно знать, насколько оно близко к точному. Из сказанного выше ясно, что этот вопрос имеет еще один существенный аспект: *в каком смысле* (равномерно, в среднем и т. д.) приближенное решение близко к точному.

На этот вопрос мы и старались ответить в нашей книге применительно к каждой рассмотренной нами задаче. Нужно сказать, что, вопреки довольно распространенному убеждению, вопрос о сходимости и ее характере имеет не только умозрительный интерес: этот вопрос играет важную роль при практическом использовании приближенных решений. Так, если известно, что приближенное решение сходится к точному равномерно, то можно, вычисляя $f_n(x)$, найти с любой степенью точности значения $f(x)$; однако, нельзя с уверенностью пользоваться функцией $f_n(x)$ для приближенного вычисления производных. Далее, если $f_n(x) \to f(x)$ в среднем, то можно с уверенностью пользоваться приближенным решением $f_n(x)$ для вычисления средних значений $f(x)$ по любому промежутку, но нельзя с уверенностью вычислять значение $f(x)$ в отдельной точке, заменяя его значением $f_n(x)$.

Методы Ритца, Галеркина и наименьших квадратов дают приближенные решения, которые (обычно вместе с некоторыми производными) сходятся к точным решениям в среднем. Это привело к необходимости изложить в краткой и по возможности доступной форме основы теории гильбертова пространства, теории, без элементов которой сколько-нибудь отчетливое понимание существа прямых методов, на наш взгляд, невозможно. Я вполне отдаю себе отчет в том, что изучение этой теории может представить известную трудность, вызванную новизной представлений; мне кажется, однако, что труд, затраченный читателем на изучение основ теории гильбертова пространства, окупится в полной мере. Указанным вопросам посвящена глава I. В главах II, III, IV изложены энергетический метод и метод Ритца. В главе II устанавливаются вариационные задачи, к которым можно свести ряд важных задач математической физики; в главе III устанавливается для большинства этих задач сходимость метода Ритца и рассматриваются, значительно менее подробно, еще некоторые методы (Л. В. Канторовича, Е. Трефтца и другие) решения упомянутых вариационных задач.

В главе IV подробно рассмотрен ряд примеров на применение метода Ритца. Примеры эти связаны с обычно встречающимися задачами математической физики; подбирая примеры, я совершенно не заботился о том, чтобы обеспечить в них особенно хорошую сходимость процесса, с целью сделать эти примеры более эффектными. Я полагаю, что важно знать как сильные, так и слабые стороны изучаемого метода; односторонний подбор примеров с этой точки зрения кажется мне нецелесообразным.

Параграфы глав II—IV, в которых исследуются конкретные задачи математической физики, можно читать независимо один от другого.

Остальные три главы посвящены другим прямым методам: в главе V изложен метод Галеркина, в главе VI — метод наименьших квадратов и, наконец, в главе VII — конечно-разностные методы.

Метод Галеркина широко распространен, что вполне объясняется высокими достоинствами этого метода: простотой и универсальностью. Однако в связи с методом Галеркина неоднократно возникали споры, вызванные непониманием сущности этого метода. Так, появилась статья, в которой сходимость метода Галеркина подвергалась сомнению на том основании, что в некоторой задаче второе приближение, построенное по методу Галеркина, оказалось хуже первого. В другой статье утверждается, что при использовании метода Галеркина можно не удовлетворять заранее естественным краевым условиям. Я постарался, насколько это было в моих силах, точно установить область применимости метода Галеркина и его основные особенности. Ряд параграфов главы V посвящен теории вполне-непрерывных операторов, без которой обоснование метода Галеркина невозможно, по крайней мере в настоящее время.

Метод наименьших квадратов мало распространен, однако он имеет ряд достоинств. Этот метод более универсален, чем метод Галеркина и, тем более, энергетический метод. При известных условиях метод наименьших квадратов дает приближенные решения, которые сходятся, вместе с нужными производными, не в среднем, а равномерно. Мне кажется, что использование этого метода в более широких размерах, чем это делается в настоящее время, было бы весьма желательно.

В конце глав III, V и VI помещены, под литерами А, Б и В, особые параграфы, в которых перечислены важнейшие результаты, касающиеся рассматриваемого метода, и даны краткие указания о приемах его практического использования.

Из конечно-разностных методов я по отношению к методу сеток, хорошо изложенному в ряде доступных книг, ограничиваюсь только указаниями литературы; подробнее я останавливаюсь на так называемом «методе прямых», который при всей его теоретической незаконченности во многих случаях имеет несомненные преимущества перед методом сеток.

Кроме вопроса о характере сходимости, исключительно важную роль играет вопрос о быстроте сходимости приближенных решений, иначе говоря, об оценке погрешности приближенного решения. К сожалению, в этом первостепенной важности для прямых методов пункте сделано не так много и, по моему мнению, далеко не достаточно для целей практики; по этой причине я в предлагаемой книге почти не затрагиваю проблемы оценки погрешности, однако в каждом примере я стараюсь выяснить «внутреннюю» сходимость приближений, т. е. насколько каждое последующее приближение близко к предшествующему.

За всякие указания недостатков моей книги я буду благодарен ее читателям.

Все вычисления в примерах весьма тщательно и с большим знанием дела выполнены К. Е. Черниным и В. С. Владимировым. Считаю своим приятным долгом выразить К. Е. Чернину и В. С. Владимирову свою искреннюю благодарность.

Акад. В. И. Смирнов прочел рукопись моей книги и сделал ряд замечаний, имевших для меня весьма существенное значение. Я приношу свою глубокую признательность акад. В. И. Смирнову за эти указания и за интерес, проявленный им к моей работе. Рядом важных замечаний я обязан также О. А. Ладыженской, прочитавшей первые три главы моей рукописи, и редактору издательства Г. П. Акилову; я искренне благодарен им за это.

С. Михлин

Май 1950 г.
Ленинград

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Настоящая глава является вспомогательной. Цель ее — дать некоторые элементарные представления о теории функциональных гильбертовых пространств, необходимые для отчетливого понимания сущности и границ применения прямых методов математической физики. Мы начинаем главу с краткого изложения понятия интеграла Лебега и его основных свойств. Аппарат интеграла Лебега вряд ли может быть полезен при производстве непосредственных вычислений; существенную роль играет этот аппарат в вопросах теоретических, благодаря своеобразной „универсальности" интеграла Лебега. Дело заключается в том, что интеграл Лебега существует практически для всякой ограниченной функции, тогда как обычный риманов интеграл существует только при довольно жестких, иногда трудно проверяемых, условиях, наложенных на разрывы функции. Далее, условия интегрируемости по Лебегу неограниченной функции установить гораздо легче, чем условия интегрируемости по Риману. Таким образом, использование интеграла Лебега практически освобождает нас от необходимости доказывать интегрируемость рассматриваемых функций, и это весьма существенно упрощает исследование. В § 2 мы детально исследуем чрезвычайно важное понятие сходимости в среднем; §§ 3—7 посвящены элементам теории гильбертовых пространств; при этом, имея в виду ближайшие приложения, мы ограничиваемся только так называемыми функциональными гильбертовыми пространствами. Другой тип гильбертова пространства будет указан в главе V.

В главе I мы не всегда будем доказывать наши утверждения. Достаточно полное и подробное изложение теории гильбертовых пространств можно найти, например, в курсе В. И. Смирнова [1], в статьях А. И. Плеснера [1] и А. И. Плеснера и В. А. Рохлина [1]. Теория интегралов Лебега дана в курсах В. И. Смирнова [1] и Ш. Валле-Пуссена [1]. Некоторые сведения об интегралах Лебега содержатся в курсе С. Л. Соболева [4].

§ 1. Понятие об интеграле Лебега

Построение интеграла Лебега опирается на понятие *меры точечного множества*. Для определенности будем рассматривать множества точек, расположенные на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Если множество точек заполняет некоторый интервал $\alpha < x < \beta$, лежащий внутри отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, то за меру такого множества принимается просто его длина $\beta - \alpha$. Рассмотрим теперь множество, заполняющее конечную или счетную[1] совокупность непересекающихся интервалов. Такое множество называют открытым, а множество, остающееся после удаления открытого множества из отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, называется замкнутым. Естественно определить меру открытого множества, как сумму длин составляющих его интервалов, а меру замкнутого множества, как разность между длиной отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ и мерой удаленного открытого множества. Переходя к общему определению меры, условимся говорить, что множество A покрывает множество B, если все точки B принадлежат A (короче говоря, если B есть часть A). Будем называть внешней мерой множества A точную нижнюю границу (нижнюю грань) мер покрывающих его открытых множеств, а его внутренней мерой — точную верхнюю границу (верхнюю грань) мер замкнутых множеств, покрываемых множеством A. Можно

---

[1] Бесконечное множество называется *счетным*, если все его элементы можно занумеровать с помощью целых положительных чисел. Примерами счетных множеств могут служить: само множество целых положительных чисел, любая его бесконечная часть (например, множество четных чисел, множество квадратов целых чисел и др.), множество целых положительных и отрицательных чисел. Можно доказать, что множество всех рациональных чисел также счетное. Примерами несчетных множеств могут служить множества точек, заполняющих отрезок, плоскую или пространственную область.

доказать (интуитивно это очевидно), что внутренняя мера множества не превосходит его внешней меры. Далее, множество называется измеримым, если его внутренняя и внешняя меры совпадают. Общая величина внутренней и внешней мер измеримого множества называется его *лебеговой мерой*. Меру множества A мы будем обозначать символом μA.

Измеримость — значительно более распространенное свойство множеств, чем это может казаться на первый взгляд. Все до сих пор эффективно построенные множества измеримы. Существование неизмеримых множеств удалось пока доказать, только опираясь на так называемый принцип выбора, который не дает возможности эффективно построить множество. В последующем, говоря о точечном множестве, мы всегда будем предполагать его измеримым.

Мера множества обладает рядом свойств, присущих длине, обобщением понятия которой является понятие меры. Так, если два множества не пересекаются (т. е. не имеют общих точек), то мера суммы множеств [1] равна сумме мер слагаемых; мера суммы двух пересекающихся множеств равна сумме их мер минус мера их общей части, и т. д.

Понятие меры естественным образом распространяется на точечные множества, расположенные на плоскости или в трехмерном пространстве. Здесь понятие меры естественно обобщает понятие площади или объема. Нетрудно также распространить понятие меры и на точечные множества в многомерных пространствах.

Существуют множества с мерой, равной нулю. Это, очевидно, те множества, которые можно покрыть открытыми множествами сколь угодно малой меры. Таковы, как нетрудно показать, конечные и счетные множества точек. Существуют и несчетные множества меры нуль. Принято говорить, что некоторое свойство имеет место *почти везде*, если оно может не иметь места лишь на множестве меры нуль.

Обратимся теперь к понятию интеграла. Напомним, что по определению, восходящему к Коши и Риману, определен-

[1] *Суммой* двух множеств называется третье множество, в которое входят все элементы как первого, так и второго множества; если некоторый элемент принадлежит обоим слагаемым множествам, то в сумму он входит только один раз.

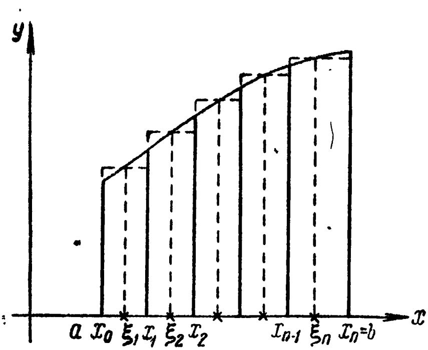
ный интеграл рассматривается, как предел интегральных сумм (значения символов даны на черт. 1)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{1}$$

где λ — наибольшая из длин промежутков (x_{k-1}, x_k). Если выбрать достаточно мелкое деление основного отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ и отбросить справа в (1) знак предела, то получится приближенное равенство

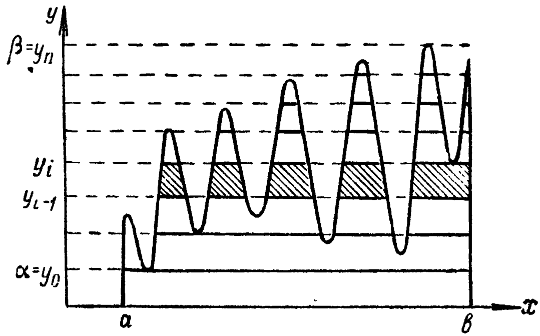
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{2}$$

которому геометрически соответствует следующее: площадь узкой полоски, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, отрезком (x_{k-1}, x_k) оси абсцисс и двумя ординатами, проведенными в точках x_{k-1} и x_k, заменяется площадью прямоугольника, основание которого есть отрезок (x_{k-1}, x_k), а высота — ордината кривой, проведенная в произвольно выбранной точке ξ_k указанного отрезка. Ошибка приближенного равенства (2) невелика, если ордината кривой $y = f(x)$ меняется не слишком быстро; при этом тот или иной выбор точек ξ_k существенно на величине ошибки не отражается.



Черт. 1.

Формула (2) делается, однако, ненадежной, если функция $f(x)$ — быстро-колеблющаяся (черт. 2), хотя бы она и оставалась непрерывной. Очевидно, мы получим совершенно различные результаты, в зависимости от того, будем ли мы брать в качестве ξ_k точку с наибольшей, наименьшей или некоторой промежуточной ординатой. В этом случае целесообразнее вычислять площадь иначе. На оси ординат откладываем наименьшее и наибольшее значения функции.[1] Пусть это будут точки α и β. Отрезок $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ оси ординат разобьем на малые участки, вставляя точки деления $y_0 = \alpha, y_1, y_2, \ldots y_n = \beta$. Через точки деления проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Интересующая нас площадь окажется разбитой на фигуры, напоминающие прямоугольники с малыми высотами; эти „прямоугольники" располагаются в горизонтальных полосах между прямыми $y = y_{i-1}$ и $y = y_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Под-



Черт. 2.

считаем сумму площадей „прямоугольников", заключенных в такой полосе, причем за основания „прямоугольников" примем, например, стороны их, лежащие на верхней стороне полосы ($y = y_i$). Указанная сумма площадей приближенно равна произведению высоты $y_i - y_{i-1}$ на сумму длин оснований. В каждой точке основания, очевидно, ордината $f(x) \geqslant y_i$. Таким образом, сумму оснований „прямоугольников" можно охарактеризовать как множество значений x, в которых $f(x) \geqslant y_i$, а сумму длин оснований — как меру этого множества[2]. Обозначим указанную меру через μ_i. Тогда площадь части фигуры, заключенной в полосе $y_{i-1} < y \leqslant y_i$ (на черт. 2 эта часть заштрихована), приближенно равна $\mu_i (y_i - y_{i-1})$, а площадь

[1] Точнее говоря, нижнюю и верхнюю грани значений функции.

[2] Само собой разумеется, мы предполагаем измеримость этого множества при любом значении y_i.

всей фигуры приближенно равна $\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1})$. Будем уменьшать промежутки (y_{i-1}, y_i) так, чтобы длина наибольшего из них стремилась к нулю. Если при этом последняя сумма стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *лебеговым интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Обобщая это построение на случай функций, не обязательно непрерывных, мы приходим к следующему определению лебегова интеграла:

Интегралом Лебега ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ называется предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \{\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1})\}; \quad \lambda = \max (y_i - y_{i-1}),$$

где μ_i — мера множества значений x, для которых $f(x) \geqslant y_i$, а $\alpha = y_0$ и $\beta = y_n$ *— числа, между которыми заключены все значения $f(x)$.*

Совершенно аналогично определяется интеграл Лебега от функции двух и большего числа независимых переменных.

Можно доказать, что лебегов интеграл от ограниченной функции всегда существует. Мы предполагаем, конечно, что при любом значении постоянной A множество значений x, для которых $f(x) \geqslant A$, измеримо, — в противном случае определение интеграла Лебега теряет смысл. Для всех функций, которые до сих пор могли быть построены эффективно, указанные множества измеримы. Если существует определенный интеграл функции $f(x)$ в обычном (римановом) смысле, то, как можно доказать, он совпадает с лебеговым интегралом. Поэтому нет нужды в особом символе для обозначения лебегова интеграла, и мы будем пользоваться обычными символами

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy,$$

и т. д.

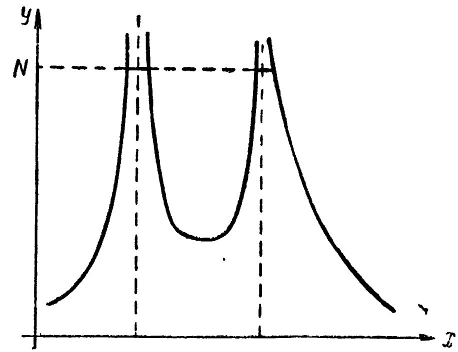
Дадим теперь определение лебегова интеграла от неограниченной функции. Допустим сперва, что функция $f(x)$ — неотрицательная. Обозначим через N произвольное положительное число и введем новую функцию $f_N(x)$, полагая (см. черт. 3)

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Функция $f_N(x)$ ограничена, так как, очевидно, $0 \leqslant f_N(x) \leqslant N$, поэтому ее лебегов интеграл

$$\int_a^b f_N(x)\,dx \qquad (3)$$

существует. С возрастанием N этот интеграл возрастает (или в крайнем случае не убывает) и потому стремится, при безграничном возрастании N, к определенному, конечному или бесконечному, пределу. *Если существует конечный предел интеграла* (3) *при* $N \to \infty$, *то этот предел называется лебеговым интегралом неограниченной неотрицательной функции* $f(x)$. Таким образом, по определению, если $f(x) \geqslant 0$ и неограничена, то



Черт. 3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x).$$

Неограниченная неотрицательная функция, для которой существует интеграл Лебега в пределах от a до b, называется *суммируемой* на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Аналогично определяется функция, суммируемая в m-мерной ($m \geqslant 2$) области.

Пусть теперь $f(x)$ может иметь какой угодно знак. Ее можно представить как разность двух неотрицательных функций. Действительно, если положить

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\{|f(x)| + f(x)\}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\{|f(x)| - f(x)\},$$

то $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) \geqslant 0$ и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. *Мы будем считать $f(x)$ суммируемой тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суммируема, и в этом случае положим по определению*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ суммируема, то суммируема также и функция $|f(x)| = f_1(x) + f_2(x)$. Таким образом, интеграл Лебега всегда абсолютно-сходящийся.

Если функция $f(x)$ — комплексная, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, то мы полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + i\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

По определению, интеграл слева существует тогда и только тогда, когда существуют оба интеграла справа. Интеграл Лебега от комплексной функции также абсолютно-сходящийся.

Основные свойства интеграла Римана остаются в силе и для интеграла Лебега. Отметим также три свойства, характерные для интеграла Лебега и играющие важную роль во всем последующем. Доказательства их читатель найдет в цитированных в начале параграфа курсах.

1. Значение интеграла Лебега не изменится, если изменить значение подинтегральной функции на множестве меры нуль. Более того, лебегов интеграл сохраняет смысл, если на множестве меры нуль значения функции остаются неопределенными. Как следствие, отсюда вытекает, что лебегов интеграл равен нулю, если подинтегральная функция почти везде равна нулю.

2. Если интеграл от неотрицательной функции равен нулю, то эта функция равна нулю почти везде.

3. Если $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ — суммируема, то $f(x)$ также суммируема. [1]

---

[1] Приведем доказательство этого утверждения. Построим, как указано выше, функцию $|f(x)|_N$. Будучи ограниченной, она

В дальнейшем мы будем называть суммируемой всякую функцию, ограниченную или неограниченную, интеграл Лебега которой существует.

Иногда мы будем пользоваться понятием *абсолютно-непрерывной функции.* Ограничиваясь случаем одной независимой переменной, назовем функцию $f(x)$ абсолютно-непрерывной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если на этом отрезке она может быть представлена в виде

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(x)$ — суммируемая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция. Можно доказать, что в этом случае $f(x)$ почти везде имеет производную, равную $\varphi(x)$, так что для абсолютно-непрерывной функции верна обычная формула

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Заметим, что непрерывная функция может иметь почти везде производную и не быть абсолютно-непрерывной, даже если производная суммируема.

§ 2. Сходимость в среднем

Рассмотрим семейство функций, принимающих, вообще говоря, комплексные значения, определенных почти везде в некоторой конечной области Ω m-мерного эвклидова пространства и обладающих тем свойством, что их квадраты суммируемы в Ω. Для краткости будем такие функции на-

---

интегрируема, причем

$$\int_a^b |f(x)|_N\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (*)$$

так как, очевидно, $|f(x)|_N \leqslant |f(x)| \leqslant \varphi(x)$. С возрастанием N интеграл в (*) слева монотонно возрастает. Будучи ограниченным в силу того же неравенства (*), этот интеграл имеет конечный предел. Но тогда, по определению, $f(x)$ суммируема.

зывать *квадратично-суммируемыми*. Условимся здесь, как и везде в последующем, считать совпадающими две функции, если они совпадают почти везде в Ω.

Будем говорить, что последовательность квадратично-суммируемых в Ω функций $\varphi_n(P)$[1] *сходится в среднем* к квадратично-суммируемой в Ω функции $\varphi(P)$, если

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 a\Omega = 0. \tag{1}$$

Если $\varphi_n(P)$ равномерно в Ω сходится к $\varphi(P)$, то, как легко видеть, $\varphi_n(P)$ сходится к $\varphi(P)$ также и в среднем. Обратное, вообще говоря, неверно: последовательность, сходящаяся в среднем, может сходиться неравномерно; более того, она может не сходиться ни в одной точке.

Последовательность функций не может сходиться в среднем к двум различным функциям. Докажем это. Пусть $\varphi_n(P)$ сходится в среднем как к функции $\varphi(P)$, так и к функции $\psi(P)$, так что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 \, d\Omega = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(P) - \psi(P)|^2 d\Omega = 0.$$

Оценим интеграл

$$\int_{\Omega} |\varphi(P) - \psi(P)|^2 \, d\Omega.$$

Имеем:

$$|\varphi - \psi|^2 = |(\varphi_n - \varphi) - (\varphi_n - \psi)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\{|\varphi_n - \varphi|^2 + |\varphi_n - \psi|^2\}.\text{[2]}$$

---

[1] Буквой P мы обозначаем произвольную точку области Ω.. Символом $d\Omega$ мы будем обозначать элемент длины, площади или объема, в зависимости от размерности Ω. Интегрирование по Ω мы всегда будем обозначать посредством одного знака интеграла.

[2] Это неравенство есть частный случай неравенства $|a \pm b|^2 \leqslant \leqslant 2\{|a|^2 + |b|^2\}$, которое доказывается следующим образом:

$$a \pm b|^2 \leqslant |a + b|^2 + |a - b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) + (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) =$$
$$= 2(a\bar{a} + b\bar{b}) = 2\{|a|^2 + |b|^2\}.$$

Отсюда

$$\int_\Omega |\varphi(P)-\psi(P)|^2 d\Omega \leqslant 2\int_\Omega |\varphi_n(P)-\varphi(P)|^2 d\Omega + \\ + 2\int_\Omega |\varphi_n(P)-\psi(P)|^2 d\Omega.$$

Полагая здесь $n\to\infty$, получим

$$\int_\Omega |\varphi(P)-\psi(P)|^2 d\Omega \leqslant 0.$$

Так как интеграл слева неотрицателен, то он равен нулю. Но тогда почти везде $\varphi(P)=\psi(P)$, а такие функции мы условились считать тождественными.

Пусть $\varphi_n(P)$ сходится в среднем к $\varphi(P)$. Имеем

$$|\varphi_k(P)-\varphi_n(P)|^2 = |(\varphi_k(P)-\varphi(P))-(\varphi_n(P)-\varphi(P))|^2 \leqslant \\ \leqslant 2|\varphi_k(P)-\varphi(P)|^2 + 2|\varphi_n(P)-\varphi(P)|^2.$$

Интегрируя и полагая затем $k\to\infty$, $n\to\infty$, получим

$$\lim_{k,\,n\to\infty}\int_\Omega |\varphi_k(P)-\varphi_n(P)|^2 d\Omega \leqslant 0,$$

или, так как левая часть неотрицательна,

$$\lim_{k,\,n\to\infty}\int_\Omega |\varphi_k(P)-\varphi_n(P)|^2 d\Omega = 0. \tag{2}$$

Таким образом, условие (2) необходимо для того, чтобы при $n\to\infty$ последовательность $\varphi_n(P)$ сходилась в среднем к некоторой квадратично-суммируемой в Ω функции. Справедлива замечательная теорема, известная под названием *теоремы Риса — Фишера, утверждающая достаточность этого условия*. Приводим ее формулировку.

Теорема 1 (Риса — Фишера). *Если квадратично-суммируемые в Ω функции $\varphi_n(P)$, $n=1, 2\ldots$ удовлетворяют условию (2), то существует квадратично-суммируемая в Ω функция $\varphi(P)$, к которой последовательность $\varphi_n(P)$ сходится в среднем.*

Доказательство этой теоремы можно найти в цитированных в начале главы курсах, а также в книге И. И. Привалова [2].

Замечание. Функции, интегрируемые по Риману, могут стремиться в среднем к функции, по Риману неинтегрируемой. Таким образом, теорема Риса — Фишера оказалась бы неверной, если бы мы рассматривали ее в классе функций, квадратично-интегрируемых в смысле Римана, а не квадратично-суммируемых в смысле Лебега.

Важное свойство последовательностей, сходящихся в среднем, дает следующая

Теорема 2. *Пусть последовательность $\varphi_n(P)$ сходится в среднем к $\varphi(P)$ в ограниченной области Ω. Пусть, далее, ω — часть области Ω, и $f(P)$ — произвольная квадратично-суммируемая в Ω функция. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\omega f(P)\,\varphi_n(P)\,d\Omega=\int_\omega f(P)\,\varphi(P)\,d\Omega, \tag{3}$$

причем сходимость — равномерная относительно выбора области ω.

Доказательство. Оценим разность

$$\left|\int_\omega f(P)\,\varphi_n(P)\,d\Omega-\int_\omega f(P)\,\varphi(P)\,d\Omega\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_\omega |f(P)|\,|\varphi_n(P)-\varphi(P)|\,d\Omega.$$

По неравенству Буняковского, [1] последний интеграл не превосходит величины

$$\left\{\int_\omega |f(P)|^2\,d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\omega |\varphi_n(P)-\varphi(P)|^2\,d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int_\Omega |f(P)|^2\,d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\Omega |\varphi_n(P)-\varphi(P)|^2\,d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

---

[1] Неравенство Буняковского, часто называемое также неравенством Шварца, имеет вид

$$\left|\int_\Omega u(P)\,v(P)\,d\Omega\right|^2\leqslant\int_\Omega |u(P)|^2\,d\Omega\int_\Omega |v(P)|^2\,d\Omega;$$

вывод более общего неравенства будет дан в § 3.

Из равенства (1) следует, что по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0$

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 \, d\Omega < \varepsilon^2.$$

Обозначим для краткости

$$a = \sqrt{\int\limits_{\Omega} |f(P)|^2 \, d\Omega}.$$

Тогда, очевидно, при $n \geqslant n_0\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$

$$\left| \int\limits_{\omega} f(P) \varphi_n(P) \, d\Omega - \int\limits_{\omega} f(P) \varphi(P) \, d\Omega \right| < \varepsilon, \tag{4}$$

что равносильно равенству (3). Равномерная сходимость следует из того, что наименьшее значение n в (4), равное $n_0\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$, не зависит от ω.

Положим

$$f(M) = \frac{1}{\mu\omega},$$

где, как мы условились в § 1, $\mu\omega$ означает меру области ω. Выражение

$$\frac{1}{\mu\omega} \int\limits_{\omega} \psi(P) \, d\Omega$$

представляет собой среднее значение функции $\psi(P)$ по области ω. Теорема 2 при таком выборе $f(P)$ сводится к следующему:

Если некоторая последовательность сходится в среднем, то средние значения членов последовательности сходятся к соответствующему среднему значению предельной функции.

Это предложение играет существенную роль в математической физике. Дело заключается в следующем. Многие физические величины мы привыкли рассматривать как функции точки, однако непосредственно измерить значение такой величины в отдельной точке невозможно: измерение дает только среднее значение величины по некоторой малой области, содержащей данную точку. Так, если мы измеряем температуру на поверхности неравномерно нагретого тела, то такое измерение не может определить температуру в точке поверхности; оно может дать только среднюю величину температуры по некоторому участку поверхности. То же самое происходит при измерении деформации тензометром или при определении напряжений на поверхности тела по действующим на тело внешним силам и в ряде других случаев. Можно утверждать, что измерение вообще дает не значения физических величин в точке, а средние значения этих величин по некоторой малой области, и что для практических потребностей достаточно знать именно средние значения величин. Как мы увидим ниже, прямые методы позволяют приблизиться к искомым величинам в среднем; из нашего предложения следует, что к средним значениям искомых прямые методы позволяют приблизиться с погрешностью сколь угодно малой по абсолютной величине, а этого вполне достаточно для целей практики.

Иногда приходится вводить несколько более общий тип сходимости.

Пусть $\sigma(P)$—некоторая неотрицательная функция. Будем говорить, что $\varphi_n(P)$ сходится, при $n \to \infty$, к $\varphi(P)$ *в среднем с весом* $\sigma(P)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \sigma(P)\,|\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2\, d\Omega = 0. \tag{5}$$

Все сказанное здесь о сходимости в среднем распространяется на сходимость в среднем с весом $\sigma(P)$; нужно только считать равными две функции $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ в том случае, когда

$$\int_{\Omega} \sigma(P)\,|\varphi(P) - \psi(P)|^2\, d\Omega = 0.$$

Если $\sigma(P)$ обращается в нуль только на множестве меры нуль, то последнее равенство возможно только тогда, когда $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ совпадают почти везде.

Будем говорить, что ряд сходится в среднем, если в среднем сходится последовательность его частных сумм. В применении к рядам теорема 2 утверждает, что ряд, сходящийся в среднем, можно, по умножении его на произвольную квадратично-суммируемую функцию, интегрировать почленно по произвольной части области Ω; полученный после интегрирования ряд сходится равномерно относительно области интегрирования.

§ 3. Функциональные гильбертовы пространства

Будем рассматривать множества функций, определенных в конечной области Ω. Особо выделим множества, обладающие тем свойством, что, если такое множество содержит функции $\varphi(P)$ и $\psi(P)$, то оно содержит также и функцию $a\varphi(P)+b\psi(P)$, где a и b — любые (комплексные) постоянные. Такие множества функций мы будем называть *линейными множествами* или *линеалами*, а принадлежащие линеалу функции — его элементами. Простейшими примерами линеалов могут служить множество полиномов или множество непрерывных функций. Множество функций квадратично-суммируемых по Ω также есть линеал: если $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ квадратично-суммируемы, то из неравенства $|a\varphi+b\psi|^2 \leqslant \frac{1}{2}\{|a|^2\cdot|\varphi|^2+ +|b|^2\cdot|\psi|^2\}$ и из свойства 3 лебеговых интегралов (§ 1) вытекает, что функция $a\varphi(P)+b\psi(P)$ также квадратично-суммируема.

Определение. *Линеал называется функциональным гильбертовым пространством, если каждой паре функций* $\varphi(P)$, $\psi(P)$, *принадлежащих линеалу, можно привести в соответствие число* (φ, ψ), *удовлетворяющее следующим аксиомам*:

A. $(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2, \psi)=a_1(\varphi_1, \psi)+a_2(\varphi_2, \psi)$,
где φ_1, φ_2, ψ — *элементы линеала*, a_1 *и* a_2 — *постоянные*.

B. $(\varphi, \psi)=\overline{(\psi, \varphi)}$.[1]

C. $(\varphi, \varphi)\geqslant 0$.

D. Если $(\varphi, \varphi)=0$, то $\varphi(P)\equiv 0$.

Функции, входящие в гильбертово пространство, мы будем называть элементами, иногда точками, этого пространства. Число (φ, ψ) называется *скалярным произведением* элементов φ и ψ.

Выясним некоторые простые свойства скалярного произведения.

[1] Чертой сверху мы обозначаем комплексно-сопряженное число.

Из аксиом А и В следует, что $(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}(\varphi, \psi)$, где λ — комплексное число. Действительно, по аксиоме В $(\varphi, \lambda\psi) = \overline{(\lambda\psi, \varphi)}$. В силу аксиомы А, $\overline{(\lambda\psi, \varphi)} = \overline{\lambda}\ \overline{(\psi, \varphi)}$, что, в силу той же аксиомы В, равно $\overline{\lambda}(\varphi, \psi)$. Окончательно, $(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}\ (\varphi, \psi)$. Теперь ясно, что скалярное произведение, сомножители в котором представляют собой суммы, можно составлять по правилу умножения многочленов, с той, однако, разницей, что численный коэффициент при втором сомножителе должен быть, при вынесении его за знак скалярного произведения, заменен комплексно-сопряженной величиной.

Неотрицательное число $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ называется *нормой* элемента и обозначается символом $\|\varphi\|$, так что

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}; \tag{1}$$

норма разности двух элементов называется *расстоянием* между ними. Мы будем говорить, что формула (1) определяет *метрику* в гильбертовом пространстве. Понятие нормы является обобщением понятия длины вектора в обычном эвклидовом пространстве. Элемент гильбертова пространства, норма которого равна единице, называется нормированным.

Установим следующие свойства нормы:

1. Если λ — комплексное число, и φ — элемент гильбертова пространства, то

$$\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\|. \tag{2}$$

Действительно, $\|\lambda\varphi\|^2 = (\lambda\varphi, \lambda\varphi)$; численные коэффициенты выносятся за знак скалярного произведения, причем второй заменяется комплексно сопряженным, и мы получаем $\|\lambda\varphi\|^2 = |\lambda|^2(\varphi, \varphi) = |\lambda|^2\ \|\varphi\|^2$. Извлекая корень и принимая во внимание, что норма — величина неотрицательная, мы приходим к искомому равенству.

2. Если функция тождественно равна нулю, то ее норма равна нулю.

3. *Для любых элементов φ, ψ гильбертова пространства имеет место неравенство*

$$|(\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \tag{3}$$

Неравенство (3) очевидно, если $(\varphi, \psi) = 0$. Поэтому достаточно привести доказательство для того случая, когда $(\varphi, \psi) \neq 0$.

Пусть θ — комплексное число, которое мы зафиксируем ниже, и λ — произвольное вещественное число. По аксиоме C,

$$(\varphi-\lambda\bar{\theta}\psi,\ \varphi-\lambda\bar{\theta}\psi)\geqslant 0.$$

Раскроем скобки, вынося при этом численные коэффициенты за знак скалярного произведения:

$$(\varphi, \varphi)-\lambda\theta(\varphi, \psi)-\lambda\bar{\theta}(\psi, \varphi)+\lambda^2|\theta|^2(\psi, \psi)\geqslant 0,$$

или, что то же,[1]

$$\|\varphi\|^2-2\lambda\operatorname{Re}[\theta(\varphi, \psi)]+\lambda^2|\theta|^2\|\psi\|^2\geqslant 0.$$

Выражение слева представляет собой квадратный трехчлен относительно λ, неотрицательный при всех вещественных значениях аргумента. Но в таком случае его дискриминант неположителен:

$$\{\operatorname{Re}[\theta(\varphi, \psi)]\}^2-|\theta|^2\|\varphi\|^2\|\psi\|^2\leqslant 0.$$

Отсюда, извлекая корень, находим

$$|\operatorname{Re}[\theta(\varphi, \psi)]|\leqslant|\theta|\cdot\|\varphi\|\cdot\|\psi\|. \qquad (*)$$

В этом неравенстве, верном при любом θ, положим

$$\theta=\frac{|(\varphi, \psi)|}{(\varphi, \psi)}.$$

Это возможно, так как $(\varphi, \psi)\neq 0$, по предположению.

При таком выборе θ имеем $|\theta|=1$. Далее, $\theta(\varphi, \psi)=|(\varphi, \psi)|$ есть величина вещественная (даже положительная) и потому совпадающая со своей вещественной частью: $\operatorname{Re}[\theta(\varphi, \psi)]=\theta(\varphi, \psi)=|(\varphi, \psi)|$. Подставив это в (*), мы придем к неравенству (3).

Частными случаями неравенства (3) является неравенство Коши

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 \qquad (4)$$

и упомянутое в § 2 неравенство Буняковского.

---

[1] Здесь, как и везде в последующем, символы Re и Im обозначают вещественную и мнимую части написанного рядом выражения.

Мы будем называть неравенство (3) *неравенством Коши — Буняковского*; в литературе оно часто называется неравенством Шварца.

4. Для любых элементов φ и ψ гильбертова пространства справедливо *неравенство треугольника*

$$\|\varphi+\psi\| \leqslant \|\varphi\|+\|\psi\|. \tag{5}$$

Имеем

$$\|\varphi+\psi\|^2 \leqslant (\varphi+\psi, \varphi+\psi) = (\varphi, \varphi)+(\varphi, \psi)+(\psi, \varphi)+ \\ +(\psi, \psi) = \|\varphi\|^2+2\operatorname{Re}[(\varphi, \psi)]+\|\psi\|^2.$$

По неравенству Коши — Буняковского $|(\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$. Тем более $|\operatorname{Re}[(\varphi, \psi)]| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$. Отсюда

$$\|\varphi+\psi\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2+2\|\varphi\| \cdot \|\psi\|+\|\psi\|^2,$$

что совпадает с неравенством (5).

Приведем некоторые примеры функциональных гильбертовых пространств.

а) *Пространство* $L_2(\Omega)$. Как было отмечено в начале параграфа, множество функций, определенных почти везде в Ω и квадратично-суммируемых в Ω, есть линеал. Определим на этом линеале скалярное произведение, полагая

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\, d\Omega. \tag{6}$$

Интеграл (6) существует, как это следует из свойства 3 § 1 и из неравенства $|\varphi\bar{\psi}| \leqslant \frac{1}{2}\{|\varphi|^2+|\psi|^2\}$. Выражение (6) очевидно удовлетворяет аксиомам A — C; оно будет удовлетворять также аксиоме D, если, как мы условились в § 2, считать тождественно равными две функции, равные между собой почти везде, и, в частности, не отличать от тождественного нуля функцию, равную нулю почти везде.

Введя скалярное произведение, мы превратили наш линеал в гильбертово пространство; его обычно обозначают символом $L_2(\Omega)$. Если Ω есть отрезок прямой $a \leqslant x \leqslant b$, то пишут $L_2(a, b)$. Норма в $L_2(\Omega)$ определяется равенством

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega |\varphi^2(P)|\, d\Omega. \tag{7}$$

Неравенство (3) переходит здесь в известное неравенство Буняковского

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\,d\Omega\right|^2 \leqslant \int_\Omega |\varphi^2(P)|\,d\Omega \int_\Omega |\psi^2(P)|\,d\Omega.$$

б) Другим важным примером функциональных гильбертовых пространств является пространство $L_2(\Omega; \sigma(P))$. Элементы его суть функции, для которых существует интеграл

$$\int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi^2(P)|\,d\Omega.$$

Здесь $\sigma(P)$ — некоторая, одна и та же для всех элементов пространства, неотрицательная функция. Мы считаем при этом тождественными две функции $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$, если

$$\int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)|^2\,d\Omega = 0.$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega; \sigma(P))$ задается формулой

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sigma(P)\,\varphi(P)\,\overline{\psi(P)}\,d\Omega, \tag{8}$$

а норма, как это вытекает из (8), — формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi^2(P)|\,d\Omega. \tag{9}$$

в) Обозначим через S границу области Ω. Рассмотрим множество функций, которые непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ вместе со всеми своими производными до порядка r включительно.

Нетрудно видеть, что это множество есть линеал. Мы его превратим в гильбертово пространство, если зададим в нем скалярное произведение следующей формулой

$$(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=k} \int_\Omega \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} \times \frac{\partial^k \overline{\psi}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}\,d\Omega. \tag{10}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots x_m$ — декартовы координаты переменной точки из Ω. Это пространство обозначается символом $L_2^{(r)}(\Omega)$; при $r=0$ оно переходит в пространство $L_2(\Omega)$. Как это видно из формулы (10), норма в $L_2^{(r)}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=k} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right|^2 d\Omega. \quad (11)$$

Перечисленные нами пространства а) — в) наиболее часто встречаются в приложениях. Иногда, впрочем, приходится иметь дело с функциональными гильбертовыми пространствами, определяемыми более сложным образом. В качестве примера рассмотрим множество функций, определенных, скажем, в трехмерной области Ω, непрерывных в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ (S — граница области Ω) вместе со своими первыми и вторыми производными. Допустим еще, что на границе S все эти функции равны нулю. Зададим на этом множестве скалярное произведение формулой

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \Delta\varphi \Delta\overline{\psi}\, d\Omega.$$

Аксиомы A — C при этом, очевидно, выполняются. Нетрудно видеть, что аксиома D также выполнена. В самом деле, пусть $(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} |\Delta\varphi|^2 d\Omega = 0$. Тогда $\Delta\varphi \equiv 0$, функция $\varphi(P)$ — гармоническая; будучи равной нулю на S, эта функция тождественно равна нулю в силу теоремы о единственности решения задачи Дирихле.

В некоторых случаях вводятся гильбертовы пространства более общей природы. Пример такого пространства мы дадим в главе V, здесь же мы ограничимся указанием на важное для дальнейшего гильбертово пространство векторных функций, которое мы будем обозначать через $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Его элементы суть векторные функции точки области Ω; если $\boldsymbol{\varphi}(P)$ такой вектор с составляющими по осям координат $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, то мы потребуем, чтобы существовал интеграл

$$\int_{\Omega} \{ |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + |\varphi_z|^2 \}\, d\Omega.$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется формулой

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} (\varphi_x \overline{\psi}_x + \varphi_y \overline{\psi}_y + \varphi_z \overline{\psi}_z)\, d\Omega. \tag{12}$$

Норма элемента φ, очевидно, равна

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} \{ |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + |\varphi_z|^2 \}\, d\Omega. \tag{13}$$

Важнейшую роль в теории гильбертовых пространств играет понятие *линейной зависимости*. Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ гильбертова пространства называются *линейно-зависимыми*, если можно найти постоянные числа $a_1, a_2, \ldots a_n$, не все равные нулю, так, чтобы выполнялось равенство

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n = 0.$$

Указанные элементы называются *линейно-независимыми*, если последнее равенство осуществляется только при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие линейной зависимости в гильбертовом пространстве.

Теорема. *Для того, чтобы элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ гильбертова пространства были линейно-зависимы, необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю определитель*

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1), & (\varphi_1, \varphi_2), \ldots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1), & (\varphi_2, \varphi_2), \ldots & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (\varphi_n, \varphi_1), & (\varphi_n, \varphi_2) \ldots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \tag{14}$$

Определитель (14) называется *определителем Грама* элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$.

Доказательство: 1) Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ — линейно-зависимы. Тогда существуют постоянные a_j, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = 0.$$

Умножая скалярно φ_j на оба члена последнего равенства, мы получим

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k (\varphi_j, \varphi_k) = 0; \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Это равенство можно рассматривать, как систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots \overline{a}_n$; так как эти неизвестные не все равны нулю, то определитель системы, совпадающий с определителем Грама элементов φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_n$, необходимо равен нулю.

2) Пусть определитель (14) равен нулю. Составим систему

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k (\varphi_j, \varphi_k) = 0; \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Эта система имеет решение, в котором не все $\overline{a}_k$ равны нулю. Будем под $\overline{a}_k$ понимать это решение. Внесем $\overline{a}_k$ под знак скалярного произведения и отнесем его ко второму множителю. Обозначая $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k = \varphi$, мы найдем, что $(\varphi_j, \varphi) = 0$, $j = 1, 2, \ldots n$. Последнее равенство умножим на a_j и затем просуммируем по всем j. Мы получим тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j (\varphi_j, \varphi) = 0$, что легко приводится к виду $(\varphi, \varphi) = 0$. По аксиоме D, $\varphi = 0$, или $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k = 0$, т. е., $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ линейно-зависимы.

Замечание. Можно доказать, что определитель Грама может иметь только вещественные неотрицательные значения.

§ 4. Понятие о пределе

Пусть дано гильбертово пространство H, и пусть φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ — последовательность[1] его элементов. Будем

[1] Для обозначения последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ мы часто будем пользоваться символом $\{\varphi_n\}$.

говорить, что эта последовательность сходится, или стремится, к φ, если φ есть элемент H и

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0. \tag{1}$$

Элемент φ называется *пределом* последовательности $\{\varphi_n\}$. Мы будем записывать это обстоятельство, пользуясь обычной символикой

$$\varphi_n \to \varphi, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Поясним наше определение на примерах.

а) В пространстве $L_2(\Omega)$ сходимость $\varphi_n \to \varphi$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 d\Omega = 0,$$

т. е. что $\varphi_n(P)$ сходится к $\varphi(P)$ в среднем.

б) Точно так же сходимость в $L_2(\Omega;\ \sigma(P))$ есть сходимость в среднем с весом $\sigma(P)$.

в) Сходимость в $L_2^{(r)}(\Omega)$, как легко видеть, означает сходимость в среднем функций последовательности и всех их производных, до порядка r включительно, к предельной функции и соответствующим ее производным.

Теорема. *Если* $\varphi_n \to \varphi$ *и* $\psi_n \to \psi$, *то*

$$(\varphi_n, \psi_n) \to (\varphi, \psi).$$

Как легко проверить,

$$(\varphi_n, \psi_n) - (\varphi, \psi) = (\varphi_n - \varphi, \psi_n - \psi) + (\varphi, \psi_n - \psi) + (\varphi_n - \varphi, \psi).$$

Отсюда, по неравенству Коши — Буняковского,

$$|(\varphi_n, \psi_n) - (\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \|\psi_n - \psi\| + \\ + \|\varphi\| \cdot \|\psi_n - \psi\| + \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \|\psi\| \to 0,$$

что доказывает теорему.

Следствие 1. Если $\varphi_n \to \varphi$, то $(\varphi_n, \psi) \to (\varphi, \psi)$.

Следствие 2. Если $\varphi_n \to \varphi$, то $\|\varphi_n\| \to \|\varphi\|$.

Мы получим следствие 1, положив в теореме $\psi_n \equiv \psi$, а следствие 2 — положив $\psi_n = \varphi_n$.

Вернемся к общему понятию сходимости. Пусть в гильбертовом пространстве, которое мы обозначим через H, дана сходящаяся к элементу φ последовательность $\{\varphi_n\}$. По определению, $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$. Это значит, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$. Пусть $k \geqslant n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $n \geqslant n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда

$$\|\varphi_k - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \|\varphi_n - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим норму разности $\|\varphi_k - \varphi_n\|$. По неравенству треугольника,

$$\|\varphi_k - \varphi_n\| = \|(\varphi_k - \varphi) - (\varphi_n - \varphi)\| \leqslant \|\varphi_k - \varphi\| + \\ + \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, в силу произвольности ε, равносильно равенству

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ n \to \infty}} \|\varphi_k - \varphi_n\| = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, если $\varphi_n \to \varphi$, то необходимо выполняется равенство (2). Возникает вопрос: верно ли обратное утверждение, т. е. можно ли утверждать существование предела последовательности $\{\varphi_n\}$, если она удовлетворяет равенству (2). В общем случае ответ на этот вопрос приходится давать отрицательный.

Чтобы выяснить это, рассмотрим такой пример. Рассмотрим линеал, составленный из функций $\varphi(x)$, непрерывных на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Превратим этот линеал в гильбертово пространство, задав скалярное произведение по формуле

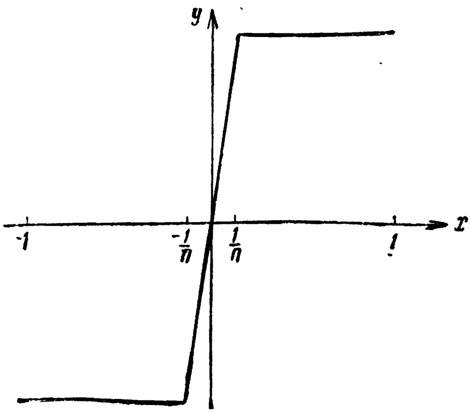
$$(\varphi, \psi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx.$$

Построенное нами пространство, которое мы обозначим через N, не совпадает с $L_2(-1, 1)$, так как элементами последнего могут служить не только непрерывные, но и разрывные функции.

Возьмем последовательность функций

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} -1, & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

График такой функции изображен на черт. 4. Будучи непре-



Черт. 4.

рывными, функции $\varphi_n(x)$ принадлежат N. Простое вычисление показывает, что

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \|\varphi_k-\varphi_n\|^2=\lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \int_{-1}^{1} [\varphi_k(x)-\varphi_n(x)]^2\,dx=0.$$

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ стремится, в обычном смысле этого слова, к разрывной функции, которую мы обозначим через $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

причем стремление к пределу — равномерное в каждом из отрезков $-1 \leqslant x \leqslant -\varepsilon$ и $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, где ε — любое положительное число. Отсюда нетрудно усмотреть, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [\varphi_n(x) - \varphi_0(x)]^2 \, dx = 0,$$

т. е. что в среднем $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$. Функция $\varphi_0(x)$ разрывна, более того, ее нельзя сделать непрерывной, изменяя ее значения только на множестве меры нуль. Так как предел в смысле сходимости в среднем — единственный, то в пространстве N не существует элемента, предельного для $\{\varphi_n(x)\}$, хотя эти последние удовлетворяют условию (2). Напротив, в пространстве $L_2(\Omega)$ равенство (2) влечет за собой существование предельного элемента — это непосредственно следует из теоремы Риса — Фишера (§ 2). В нашем примере этот предельный элемент есть функция $\varphi_0(x)$.

Гильбертово пространство называется полным, если всякая последовательность его элементов, удовлетворяющая условию (2), *имеет предел*, в противном случае оно называется *неполным*. Из сказанного выше следует, что пространство N — неполное, а $L_2(\Omega)$ — полное. Можно доказать также, что пространство $L_2(\Omega;\ \sigma(p))$ — полное.

Неполное гильбертово пространство можно сделать полным, добавив к нему некоторые новые элементы, подобно тому, как множество рациональных чисел дополняется до всей числовой прямой введением иррациональных чисел. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (2), но не имеет предела. Припишем последовательности $\{\varphi_n\}$ в качестве предела новый элемент φ, называемый *предельным* или *идеальным*.

Пусть предельные элементы φ и ψ определяются последовательностями $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ соответственно. Мы примем, что $\varphi = \psi$, если

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - \psi_n\| = 0.$$

Скалярное произведение предельных элементов определим формулой

$$(\varphi, \psi) = \lim_{n \to \infty} (\varphi_n, \psi_n); \tag{3}$$

тогда, очевидно,

$$\|\varphi\| = \lim_{\varphi_n \to \varphi} \|\varphi_n\|; \tag{4}$$

существование обоих пределов нетрудно доказать. Можно доказать, что присоединение к H всех предельных элементов делает H полным пространством. Конкретный характер предельных элементов зависит от пополняемого пространства. Так, пополнение пространства N приводит к $L_2(-1; 1)$; предельными элементами здесь оказываются квадратично-суммируемые на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ разрывные функции. Пополнение пространства $L_2^{(r)}(\Omega)$ связано с понятием обобщенных частных производных; мы не можем здесь останавливаться на этом подробнее.

В дальнейшем, говоря о гильбертовом пространстве, мы будем предполагать его полным, если не будет оговорено противное.

Введем следующее, важное для дальнейшего, понятие. Множество M будем называть *плотным* в гильбертовом пространстве H, если каждый элемент $\varphi \in H$[1] может быть получен как предел последовательности $\varphi_n \in M$. Так, можно доказать, что множество функций, непрерывных в $\overline{\Omega} = \Omega + S$, плотно в $L_2(\Omega)$.

Если пространство H получено пополнением неполного пространства H', то H' плотно в H. Действительно, пусть $\varphi \in H$. Если, кроме того, $\varphi \in H'$, то можно положить $\varphi_n \equiv \varphi$ и, очевидно, $\varphi = \lim \varphi_n$, где $\varphi_n \in H'$. Если же $\varphi \overline{\in} H'$, то φ — предельный элемент, и, по самому определению, существует такая последовательность $\varphi_n \in H'$, что

$$\varphi = \lim \varphi_n.$$

В дальнейшем мы будем называть *фундаментальной* всякую последовательность, удовлетворяющую условию (2). В полном пространстве, следовательно, всякая фундаментальная последовательность сходится.

---

[1] Здесь и в дальнейшем символ $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A; то обстоятельство, что некоторый элемент y не принадлежит множеству A, мы будем выражать символом $y \overline{\in} A$.

§ 5. Ортогональность и ряды Фурье

Два элемента гильбертова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Конечная или бесконечная последовательность попарно ортогональных элементов называется *ортогональной системой*. Если все элементы системы нормированы[1], то система называется *ортонормированной*. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет равенствам

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Элементы ортонормированной системы линейно-независимы; действительно, если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ попарно ортогональны и нормированы, то в их определителе Грама диагональные элементы равны единице, а боковые нулю. Но тогда определитель Грама обращается в единицу. По теореме § 3, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, линейно-независимы.

Если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$, и слагаемые попарно ортогональны, то

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \ldots + \|\varphi_n\|^2. \tag{1}$$

Доказательство этого равенства, обобщающего на гильбертовы пространства теорему Пифагора, очень просто:

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} \varphi_m\right) = \sum_{k, m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m).$$

Если $k = m$, то $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$, и двойная сумма сводится к простой, так что

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_k),$$

что, в силу определения нормы, дает

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2.$$

[1] Т. е. их нормы равны единице; см. § 3.

Примеры. а) Система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — ортонормированная в $L_2(-\pi, \pi)$, так как

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

б) В том же пространстве будет ортогональной система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \qquad (*)$$

Чтобы превратить ее в ортонормированную, достаточно разделить единицу на $\sqrt{2\pi}$, а остальные функции последовательности — на $\sqrt{\pi}$.

в) Пусть Ω — куб в m-мерном пространстве координат $x_1, x_2, \ldots x_m$, определяемый неравенствами $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k=1, 2, \ldots m$. Система $\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_mx_m)}$, где $n_1, n_2, \ldots n_m$ независимо друг от друга пробегают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, является ортонормированной в пространстве $L_2(\Omega)$.

г) Пусть $\alpha_{k,n}$, $n=1, 2, \ldots$ — положительные корни функции Бесселя $J_k(x)$. Система $J_k(\alpha_{k,n}x)$, $n=1, 2, \ldots$ — ортогональная в пространстве $L_2(0, 1, x)$, если $k > -1$.

д) Полиномы Чебышева

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

образуют ортогональную систему в пространстве

$$L_2\left(-1, 1; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

е) Полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

образуют ортогональную систему в $L_2(-1, 1)$. Число таких примеров можно значительно увеличить.

Заметим, что всякую ортогональную систему легко превратить в ортонормированную: достаточно для этого каждый элемент системы разделить на его норму.

Ортогональные системы играют большую роль в ряде вопросов математики. Достаточно заметить, что ряды Фурье суть просто ряды по ортогональной системе (*); напомним еще, что собственные функции интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$\varphi(P)-\lambda\int\limits_{\Omega} K(P, Q)\,\varphi(Q)\,d\Omega_Q=0, \quad K(P, Q)=\overline{K(Q, P)}$$

образуют ортогональную систему.

Пусть H — гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}$ ортонормированная в нем система. Мы будем называть эту систему *полной в H*, если не существует элемента H, кроме тождественного нуля, который был бы ортогонален ко всем элементам системы; в противном случае система называется неполной. Системы примеров а) — е) — полные в соответствующих пространствах. Отбросив в любой из этих систем какие-либо элементы, мы превратим эту систему в неполную. Можно доказать, что в пространствах, рассмотренных в § 3, существуют полные ортонормированные системы.

Если система $\{\varphi_n\}$ — полная, то из равенств

$$(\varphi_n, \omega)=0, \quad n=1, 2, \ldots$$

вытекает, что $\omega=0$. Это непосредственно следует из определения полной системы.

Ортонормированные системы позволяют строить разложения в ряды, аналогичные рядам Фурье. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, и пусть φ — произвольный элемент из H. Поставим задачу: определить коэффициенты α_k так, чтобы норма $\|\varphi-s_n\|$, где $s_n=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_n\varphi_n$, была наименьшей. Имеем

$$\|\varphi-s_n\|^2=(\varphi-s_n, \varphi-s_n)=\Big(\varphi-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, \varphi-\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\varphi_m\Big)=$$

$$=(\varphi, \varphi)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\varphi_k, \varphi)-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k(\varphi, \varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\alpha}_k.$$

Обозначим

$$(\varphi, \varphi_k) = a_k.$$

Числа a_k называются *коэффициентами Фурье* элемента φ по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$; теперь

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{a}_k - \bar{\alpha}_k a_k).$$

Под знаком суммы прибавим и отнимем величину $a_k \bar{a}_k = |a_k|^2$. Мы получим тогда

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{a}_k - \bar{\alpha}_k a_k + a_k \bar{a}_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)(\bar{\alpha}_k - \bar{a}_k) - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2,$$

или, окончательно,

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Очевидно, величина $\|\varphi - s_n\|^2$ примет наименьшее значение при $\alpha_k = a_k$. При этом

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k$$

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2. \tag{2}$$

Левая часть равенства (2) неотрицательна; отсюда немедленно вытекает так называемое *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|\varphi\|^2. \tag{3}$$

Из этого неравенства, в свою очередь, вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2;$$

при этом, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|\varphi\|^2. \tag{4}$$

Последнее неравенство также называют неравенством Бесселя. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)\, \varphi_k,$$

называемый *рядом Фурье*, или *ортогональным рядом*, элемента φ по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$. Докажем прежде всего, что этот ряд сходится, если только пространство H — полное. Оценим величину

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \varphi_k \Big\|^2.$$

Так как φ_k ортогональны и нормированы, то по формуле (1),

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2.$$

В силу сходимости ряда (4), величина справа стремится к нулю при $n \to \infty$, $m \to \infty$; по определению полного пространства, существует предел

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k.$$

Далее, разность $\varphi - s$ ортогональная ко всем φ_k, $k = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$(\varphi - s, \varphi_k) = (\varphi, \varphi_k) - (s, \varphi_k) = a_k - (s, \varphi_k) =$$
$$= a_k - (s_n, \varphi_k) - (s - s_n, \varphi_k).$$

Возьмем $n > k$. Так как система $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная, то, как легко видеть, $(s_n, \varphi_k) = a_k$ и, следовательно,

$$(\varphi - s, \varphi_k) = (s_n - s, \varphi_k).$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$|(\varphi - s, \varphi_k)| \leqslant \|s_n - s\| \cdot \|\varphi_k\| = \|s_n - s\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

и так как $(\varphi - s, \varphi_k)$ не зависит от n, то

$$(\varphi - s, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

что доказывает наше утверждение.

Допустим теперь, что ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ — полная. В этом случае элемент $\varphi - s$, ортогональный ко всем элементам системы, равен нулю и, следовательно,

$$\varphi = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \tag{5}$$

Мы приходим таким образом к следующей теореме.

Теорема 1. *Если пространство — полное, то ряд Фурье любого его элемента по любой полной ортонормированной системе сходится к этому элементу.*

В силу равенства (1),

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Далее, по следствию 2 из теоремы § 4,

$$\|s\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Если ортонормированная система — полная, то $s = \varphi$, и мы получаем так называемое *уравнение замкнутости*

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{6}$$

Выше было установлено, что ряд из квадратов коэффициентов Фурье любого элемента гильбертова пространства — сходящийся. Справедливо и обратное утверждение:

Теорема 2. *Пусть постоянные a_k таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, и пусть $\{\varphi_n\}$ ортонормированная система. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

сходится (в смысле сходимости в рассматриваемом гильбертовом пространстве); постоянные a_k *суть коэффициенты Фурье его суммы, и для этой суммы имеет место уравнение замкнутости.*

Обозначая через s_n n-ую частную сумму ряда (7), имеем

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\varphi_k\Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \underset{m, n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда вытекает сходимость ряда (7). Обозначим его сумму через s. Найдем коэффициенты Фурье элемента s:

$$(s, \varphi_k) = (s_n, \varphi_k) + (s - s_n, \varphi_k).$$

Если $n > k$, то $(s_n, \varphi_k) = a_k$. Далее,

$$|(s - s_n, \varphi_k)| \leqslant \|s - s_n\| \cdot \|\varphi_k\| = \|s - s_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда следует, что $(s, \varphi_k) = a_k$. Наконец,

$$\|s\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|s_n\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Существенную роль в теории ортогональных рядов играет так называемый *процесс ортогонализации*, позволяющий преобразовать любую последовательность линейно-независимых элементов гильбертова пространства в ортонормированную. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — конечная или счетная последовательность элементов гильбертова пространства. Допустим, что при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ линейно-независимы. Мы построим ортонормированную последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots$, такую, что ω_n при любом n линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ и, наоборот, φ_n линейно выражается через $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Из линейной независимости элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ вытекает, что элемент φ_1 отличен от тождественного нуля и потому $\|\varphi_1\| > 0$. Положим

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \omega_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|},$$

тогда элемент ω_1 — нормированный. Допустим теперь, что ортонормированные элементы $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ построены, и положим

$$\psi_n = \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k) \omega_k.$$

Очевидно, элемент ψ_n ортогонален к $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$. Далее, ψ_n отличен от тождественного нуля — в противном случае $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ были бы линейно-зависимы. Теперь достаточно положить

$$\omega_n = \frac{\psi_n}{\| \psi_n \|}.$$

По построению, последовательность $\{\omega_n\}$ — ортонормированная, и ω_n линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. В свою очередь φ_n линейно выражается через $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$:

$$\varphi_n = \| \psi_n \| \omega_n + \sum_{k=1}^{n} (\varphi_n, \omega_k) \omega_k.$$

В заключение параграфа приведем одну лемму, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма. *Элемент, ортогональный ко всем элементам плотного множества, равен нулю.*

Пусть H' — плотное множество, и пусть $(\varphi, \psi) = 0$, если $\psi \in H'$. Возьмем произвольный элемент ω нашего пространства. По определению плотного пространства, $\omega = \lim \psi_n$, где $\psi_n \in H'$. На основании следствия 1 § 4, $(\varphi, \omega) = \lim (\varphi, \psi_n) = 0$, так как $(\varphi, \psi_n) = 0$. Таким образом, φ ортогонально к любому элементу пространства и, в частности, к самому себе. Это дает $(\varphi, \varphi) = 0$. По аксиоме D, $\varphi = 0$.

§ 6. Функционалы и операторы

Будем говорить, что на множестве M, принадлежащем гильбертову пространству H, определен функционал $l\varphi$, если каждому элементу $\varphi \in M$ пространства приведено в соответствие некоторое число $l\varphi$. Простейшим примером функционала является норма элемента. Функционалом является также скалярное произведение (φ, ψ), в котором второй множитель ψ фиксирован.

Функционал называется линейным, если M есть линеал и

$$l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 l\varphi_1 + a_2 l\varphi_2, \tag{1}$$

и ограниченным, если

$$|l\varphi| \leqslant N\|\varphi\|. \qquad (2)$$

Здесь a_1, a_2, N — постоянные, φ_1, φ_2, φ — элементы гильбертова пространства. Скалярное произведение (φ, ψ), где ψ фиксировано, дает пример линейного ограниченного функционала. Его линейность вытекает из аксиомы А § 3, а ограниченность — из неравенства Коши — Буняковского, которое показывает, что можно положить $N = \|\psi\|$. Норма элемента — функционал ограниченный (здесь $N = 1$), но не линейный.

Наименьшее из чисел N, удовлетворяющих неравенству (2), называется *нормой* ограниченного функционала $l\varphi$ и обозначается через $\|l\|$. Таким образом

$$|l\varphi| \leqslant \|l\| \cdot \|\varphi\|, \qquad (3)$$

причем $\|l\|$ нельзя заменить меньшим числом.

Функционал $l\varphi$ называется непрерывным, если

$$\lim_{\varphi \to \psi} l\varphi = l\psi. \qquad (4)$$

Норма элемента есть непрерывный функционал. Это следует из теоремы § 4.

Всякий линейный ограниченный функционал, определенный на всем пространстве, непрерывен. Действительно, пусть $\varphi \to \psi$. Пользуясь линейностью функционала и неравенством (2), найдем

$$|l\varphi - l\psi| = |l(\varphi - \psi)| \leqslant N\|\varphi - \psi\| \underset{\varphi \to \psi}{\to} 0. \qquad (5)$$

Из доказанного, между прочим, вытекает непрерывность скалярного произведения. Можно доказать и обратное утверждение: всякий линейный и непрерывный функционал ограничен.

Теорема 1. *Всякий ограниченный линейный в H функционал имеет вид скалярного произведения*

$$l\varphi = (\varphi, \psi), \qquad (6)$$

где ψ — фиксированный элемент пространства H. Элемент ψ определяется единственным образом.

Доказательство будем проводить, предполагая существование в H полной счетной ортонормированной последовательности. Пусть $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность. Обозначим $a_n = \overline{l\varphi_n}$ и докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ сходится.

Положим

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k.$$

Тогда

$$l\psi_n = l(a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n) = \\ = a_1 l\varphi_1 + \ldots + a_n l\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Так как функционал $l\varphi$ ограничен, то $|l\psi_n| \leqslant \|l\| \cdot \|\psi_n\|$, или

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|l\| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.$$

Сокращая на $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$ и возводя в квадрат, получим

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|l\|^2.$$

Отсюда вытекает сходимость нашего ряда; при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|l\|^2. \tag{7}$$

Ряд

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \lim_{n \to \infty} \psi_n \tag{*}$$

сходится. Пусть теперь φ — произвольный элемент пространства. Разложим его в ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (\varphi, \varphi_k)$$

и пусть $\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, так что $\varphi = \lim_{n \to \infty} \varphi^{(n)}$. Имеем

$$l\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k) \overline{a}_k.$$

Численный множитель $\bar{a}_k$ внесем под знак скалярного произведения и отнесем ко второму множителю. Тогда

$$l\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, a_k\varphi_k) = (\varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k) = (\varphi, \psi_n).$$

Пусть теперь $n \to \infty$. Пользуясь непрерывностью как функционала $l\varphi$, так и скалярного произведения, найдем, что

$$l\varphi = (\varphi, \psi),$$

что и требовалось доказать. Из неравенства Коши — Буняковского

$$|l\varphi| = |(\varphi, \psi)| \leqslant \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$$

следует, что $\|l\| \leqslant \|\psi\|$; с другой стороны, из (7) следует, что $\|\psi\| \leqslant \|l\|$. Сравнивая оба неравенства, заключаем, что

$$\|l\| = \|\psi\|. \tag{8}$$

Докажем теперь, что элемент ψ в формуле (6) определяется единственным образом. Допустим противное, и пусть $l\varphi = (\varphi, \psi')$, где $\psi' \neq \psi$. Вычитая последнее равенство из (6), получим

$$(\varphi, \psi' - \psi) = 0.$$

Таким образом, $\psi' - \psi$ ортогонально к любому элементу пространства. В частности, можно положить $\varphi = \psi' - \psi$. Тогда $(\psi' - \psi, \psi' - \psi) = 0$. По аксиоме D, $\psi' - \psi = 0$, или $\psi' = \psi$.

Иногда приходится рассматривать функционалы, определенные не на всем пространстве, а на некотором линеале, составляющем часть пространства. В этом случае часто возникает задача о расширении функционала, т. е. об определении функционала на более широком множестве. Наиболее существенной в этом направлении является следующая

Теорема 2. *Заданный на плотном линеале линейный ограниченный функционал можно расширить на все пространство, не изменяя при этом нормы функционала.*

Пусть H' — линеал, плотный в гильбертовом пространстве H, и пусть в H' задан ограниченный линейный функционал $l\varphi$. Возьмем элемент $\varphi \in H$. Так как H' плотно в H, то можно найти последовательность $\varphi_n \in H'$ так, что $\varphi = \lim \varphi_n$. Имеем

$$|l\varphi_m - l\varphi_n| = |l(\varphi_m - \varphi_n)| \leqslant \|l\| \cdot \|\varphi_m - \varphi_n\| \xrightarrow[m, n \to \infty]{} 0,$$

так как последовательность $\{\varphi_n\}$ — сходящаяся. В силу критерия Коши существования предела числовой последовательности, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} l\varphi_n.$$

Положив по определению

$$l\varphi = \lim_{n\to\infty} l\varphi_n,$$

мы расширим функционал $l\varphi$ на все пространство H. Нетрудно видеть, что расширенный функционал остается линейным и его норма не меняется. Последнее видно из того, что

$$|l\varphi| = \lim_{n\to\infty} |l\varphi_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|l\| \cdot \|\varphi_n\| = \|l\| \cdot \|\varphi\|.$$

Можно доказать, что указанное в теореме расширение единственно.

Будем говорить, что на некотором множестве D определен *оператор* $A\varphi$, если каждому элементу $\varphi \in D$ приведен в соответствие по некоторому закону один и только один элемент ψ гильбертова пространства. Мы будем писать $\psi = A\varphi$. Множество D называется *областью определения* оператора $A\varphi$, а множество D' всевозможных элементов ψ — *областью значений* того же оператора. Можно сказать, что $A\varphi$ есть функция, которая переводит элемент $\varphi \in D$ в элемент $\psi \in D'$. Область определения оператора $A\varphi$ мы будем иногда обозначать через D_A. Необходимо отметить, что в определение оператора существенно входит его область определения. Два оператора A и B считаются равными, если совпадают их области определения и если для каждого элемента φ, входящего в область их определения, $A\varphi = B\varphi$. Если D_A есть часть D_B, и для каждого элемента $\varphi \in D_A$ имеет место равенство $A\varphi = B\varphi$, то оператор B называется *расширением* оператора A.

Оператор $A\varphi$ называется *линейным*, если его область определения есть линеал, и (a_1, a_2 — постоянные)

$$A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2. \tag{9}$$

Далее, оператор называется *непрерывным*, если

$$\lim_{\varphi\to\psi} A\varphi = A\psi, \tag{10}$$

и *ограниченным*, если

$$\|A\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|, \quad C = \text{const}. \tag{11}$$

Наименьшая из постоянных C, удовлетворяющих неравенству (11), называется *нормой* ограниченного оператора A и обозначается символом $\|A\|$. Очевидно,

$$\|A\varphi\| \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi\|. \tag{12}$$

Линейный ограниченный оператор непрерывен—это доказывается так же, как и для функционалов. Справедливо и обратное утверждение: линейный непрерывный оператор ограничен.

В последующем мы будем рассматривать только линейные операторы; говоря об операторе, мы всегда будем подразумевать, что он линейный.

Приведем несколько примеров.

1) Пусть

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds = B^2 < \infty.$$

Интеграл

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

представляет собой оператор, линейный и ограниченный в $L_2(a, b)$. Его линейность очевидна, а ограниченность вытекает из следующих соображений: по неравенству Буняковского,

$$|K\varphi|^2 \leqslant \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds.$$

Интегрируя последнее неравенство по x в пределах от a до b, получим

$$\|K\varphi\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds,$$

или $\|K\varphi\| \leqslant B\|\varphi\|$. Таким образом, неравенство (11) выполнено со значением $C = B$. Оператор $K\varphi$ называется *оператором Фредгольма*.

2) Рассмотрим пространство $L_2(a, b)$. Линейный оператор

$$A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$$

определен, например, на линеале функций, непрерывных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ вместе со своими первыми производными. Этот оператор неограничен. Чтобы убедиться в этом, положим

$$\varphi(x) = \sin\frac{n\pi x}{b-a}.$$

Тогда

$$\|\varphi\| = \sqrt{\frac{b-a}{2}}; \quad \|A\varphi\| = \left\|\frac{d\varphi}{dx}\right\| = \frac{n\pi}{\sqrt{2(b-a)}} = \frac{n\pi}{b-a}\|\varphi\|;$$

как бы мы ни выбирали постоянную C, неравенство (11) будет нарушено, если n достаточно велико.

3) Оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_m^2}$$

— линейный неограниченный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, где Ω — область m-мерного эвклидова пространства.

Число таких примеров можно без труда увеличить.

Теорема, аналогичная теореме 2 для функционалов, также справедлива, именно

Теорема 3. *Заданный на плотном множестве линейный ограниченный оператор можно расширить на все пространство с сохранением нормы.*

Доказательство этой теоремы почти дословно совпадает с доказательством теоремы 2. Пусть область D_A определения оператора A плотна в H. Если $\varphi \in H$, то $\varphi = \lim \varphi_n$, $\varphi_n \in D_A$. Имеем

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\| = \|A(\varphi_n - \varphi_m)\| \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\| \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0.$$

В силу полноты пространства, существует

$$\lim_{n\to\infty} A\varphi_n.$$

Полагая

$$A\varphi = \lim_{n\to\infty} A\varphi_n,$$

мы расширим оператор на все пространство. Так же, как и в теореме 2, доказывается, что $\|A\|$ остается при этом неизменной, и что такое расширение ограниченного оператора единственно.

Оператор, который переводит каждый элемент пространства в себя самого, называется тождественным. Мы будем обозначать его через E, так что $E\varphi \equiv \varphi$. Оператор, который переводит каждый элемент пространства в нулевой элемент, называется нулевым, или оператором аннулирования. Оба эти оператора — линейные и ограниченные; норма тождественного оператора равна единице, норма нулевого оператора — нулю.

Суммой и произведением операторов A и B называются операторы $A+B$ и AB, определяемые соотношениями

$$(A+B)\varphi = A\varphi + B\varphi, \quad AB\varphi = A(B\varphi).$$

Вообще говоря, $AB \neq BA$; так, например, если

$$A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}; \quad B\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

то

$$AB\varphi = \frac{d}{dx}\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

$$BA\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\frac{d\varphi}{ds}\,ds.$$

Принято обозначать $AA = A^2$, $AA^2 = A^3$ и т. д.; вообще, $A^n = AA^{n-1}$. Очевидно, $A^m A^n = A^{m+n}$.

Пусть операторы A и B ограничены. По неравенству треугольника

$$\|(A+B)\varphi\| \leqslant \|A\varphi\| + \|B\varphi\|,$$

и, в силу ограниченности A и B,

$$\|(A+B)\varphi\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\,\|\varphi\|.$$

Отсюда, по определению нормы оператора,

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{13}$$

Аналогично

$$\|AB\varphi\| = \|A(B\varphi)\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\varphi\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\varphi\|$$

и, следовательно,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{14}$$

Важную роль во всем последующем играет понятие *обратного оператора.*

Пусть D_A есть область определения оператора A, и R — его область значений. По определению, каждому элементу D_A отвечает один, и только один, элемент R. С другой стороны, каждому элементу R отвечает по крайней мере один элемент D_A. Допустим, что каждому элементу R соответствует только один элемент D_A; это соответствие определяет некоторый оператор B, имеющий R своей областью определения и D_A — своей областью значений. Оператор B называется обратным по отношению к A. Очевидно также, что оператор A — обратный по отношению к B. Мы будем писать $B = A^{-1}$; вместо $(A^{-1})^n$ пишут A^{-n}.

Из определения обратного оператора вытекает следующее: если A и B — взаимно-обратные операторы, и $\varphi \in D_A$, то имеет место равенство $BA\varphi = \varphi$; точно так же, если $\psi \in D_B$, то $AB\psi = \psi$. Очевидно, что оператор, обратный линейному, также линейный.

Почти очевидна следующая

Теорема 4. *Для того чтобы оператор A имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$A\varphi = 0 \tag{15}$$

имело единственное решение $\varphi = 0$.

Пусть обратный оператор B существует, и φ_0 — решение уравнения (15). Тогда, во всяком случае, $\varphi_0 \in D_A$; как было указано выше, $BA\varphi_0 = \varphi_0$. Но $BA\varphi_0 = B0 = 0$, и, следовательно, $\varphi_0 = 0$. Допустим теперь, что условие теоремы выполнено. Пусть ψ — произвольный элемент из области значений оператора A. Докажем, что ему соответствует только один элемент из области определения A — этим будет установлено существование оператора A^{-1}. Допустим противное: пусть элементу ψ отвечают два элемента φ_1 и φ_2 из области определения оператора A. Это значит, что $A\varphi_1 = \psi$ и $A\varphi_2 = \psi$.

Но тогда $A(\varphi_1-\varphi_2)=0$; по условию, $\varphi_1-\varphi_2=0$, или $\varphi_1=\varphi_2$, вопреки предположению.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор A^{-1} был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $k>0$, такая, что при всех $\varphi\in D_A$*

$$\|A\varphi\|\geqslant k\|\varphi\|. \tag{16}$$

Пусть обратный оператор $B=A^{-1}$ ограничен. Тогда

$$\|B\psi\|\leqslant\|B\|\cdot\|\psi\|.$$

Положим $\varphi=B\psi$. Тогда $\psi=A\varphi$, и последнее неравенство переходит в неравенство (16), если положить $k=\frac{1}{\|B\|}$. Обратно, пусть справедливо неравенство (16). Пусть φ_1 удовлетворяет уравнению $A\varphi_1=0$. Тогда

$$\|\varphi_1\|\leqslant\frac{1}{k}\|A\varphi_1\|=0,$$

откуда $\varphi_1=0$. По теореме 4, существует обратный оператор $B=A^{-1}$. Положим $A\varphi=\psi$. Тогда $\varphi=B\psi$, и из (16) следует, что

$$\|B\psi\|\leqslant\frac{1}{k}\|\psi\|.$$

Последнее неравенство показывает, что B — ограниченный оператор, и его норма не превосходит $\frac{1}{k}$.

§ 7. Симметричные операторы

Рассмотрим сперва *ограниченный* оператор $A\varphi$. Для простоты допустим, что он определен на всем пространстве — как мы видели (§ 6), этого всегда можно добиться, если только этот оператор первоначально был определен на плотном множестве. Составим скалярное произведение $(A\varphi, \psi)$, где ψ — произвольный элемент пространства. Зафиксируем ψ. Тогда $(A\varphi, \psi)$ делается линейным относительно φ функционалом; он ограничен, так как

$$|(A\varphi, \psi)|\leqslant\|A\varphi\|\cdot\|\psi\|\leqslant\|A\|\cdot\|\psi\|\cdot\|\varphi\|,$$

откуда видно, что норма нашего функционала не больше величины $\|A\| \cdot \|\psi\|$. Но тогда по теореме 1 § 6 $(A\varphi, \psi)$ можно представить в виде скалярного произведения элемента φ на некоторый, единственным образом определяемый, элемент Ψ:

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, \Psi). \tag{1}$$

Равенство (1) приводит в соответствие каждому элементу ψ пространства некоторый, вполне определенный элемент Ψ того же пространства. Тем самым это равенство определяет некоторый оператор $\Psi = A^*\psi$, определенный на всем пространстве и удовлетворяющий равенству

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi). \tag{2}$$

Оператор A^* называется *сопряженным* с оператором A. Очевидно, что сопряженность *ограниченных* операторов есть свойство взаимное, так что A есть оператор, сопряженный с A^*. В последующем мы будем сопряженный оператор обозначать звездочкой.

Теорема 1. *Оператор, сопряженный с ограниченным, также ограничен. Нормы сопряженных операторов равны между собою.*

Из (2) по неравенству Коши — Буняковского следует

$$|(\varphi, A^*\psi)| \leqslant \|A\varphi\| \cdot \|\psi\| \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\|.$$

Положим здесь $\varphi = A^*\psi$. Тогда $(\varphi, A^*\psi) = (A^*\psi, A^*\psi) = \|A^*\psi\|^2$. Сокращая полученное неравенство на $\|A^*\psi\|$, получим

$$\|A^*\psi\| \leqslant \|A\| \cdot \|\psi\|,$$

откуда следует, что $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Меняя роли A и A^*, мы тем же способом докажем, что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Сравнение последних двух неравенств даст $\|A^*\| = \|A\|$.

Несколько сложнее определяется сопряженный оператор в случае, когда данный оператор — неограниченный. *Мы будем везде в последующем рассматривать только такие неограниченные операторы, которые определены на множестве, плотном в H.* Пусть $A\varphi$ — такой оператор. Составим скалярное произведение $(A\varphi, \psi)$, и пусть элемент ψ таков, что это произведение есть ограниченный функционал от φ. Такие элементы существуют, например, $\psi = 0$; их множество обозначим через D^*. Если $\psi \in D^*$, то $(A\varphi, \psi)$ представляет собой ограниченный функционал, который, в силу теоремы 1 § 6, может быть представлен, и притом единственным образом, как скалярное произведение (φ, Ψ). Мы опять приходим к равенству (1), с той разницей, что на этот раз ψ не есть произвольный элемент пространства: необходимо $\psi \in D^*$. Равенство (1) попрежнему определяет оператор $\Psi = A^*\psi$, который мы назовем сопряженным с A; область определения A^* есть D^*.

В случае неограниченных операторов сопряженность перестает быть взаимной; в этом случае можно только утверждать, что $(A^*)^*$ есть расширение оператора A (которое в частном случае может совпасть с A).

Введем теперь важное для всего последующего определение:

Оператор A называется симметричным, если для любых элементов φ и ψ из области определения оператора имеет место тождество

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi). \tag{3}$$

Простым примером симметричного оператора является оператор Фредгольма с симметричным ядром.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор A был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(A\varphi, \varphi)$ было вещественным.*

Необходимость. Пусть оператор A симметричен. Положив в (3) $\psi = \varphi$, мы получим $(A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi)$ или, по аксиоме В § 3, $(A\varphi, \varphi) = \overline{(A\varphi, \varphi)}$. Будучи равной своей сопряженной, величина $(A\varphi, \varphi)$ — вещественная.

Достаточность. Легко проверить тождество

$$4(A\varphi, \psi) = (A(\varphi + \psi), \varphi + \psi) - (A(\varphi - \psi), \varphi - \psi) + \\ + i[(A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi) - (A(\varphi - i\psi), \varphi - i\psi)].$$

По условию теоремы, все скалярные произведения справа — вещественные. Меняя местами φ и ψ, найдем

$$4(A\psi, \varphi) = (A(\psi + \varphi), \psi + \varphi) - (A(\psi - \varphi), \psi - \varphi) + \\ + i[A(\psi + i\varphi), \psi + i\varphi) - (A(\psi - i\varphi), \psi - i\varphi)].$$

Из основных свойств скалярного произведения следует

$$(A(\psi-\varphi),\ \psi-\varphi)=(A(\varphi-\psi),\ \varphi-\psi)$$

$$(A(\psi+i\varphi),\ \psi+i\varphi)=(iA(\varphi-i\psi),\ i(\varphi-i\psi))=$$
$$=(A(\varphi-i\psi),\ \varphi-i\psi)$$

$$(A(\psi-i\varphi),\ \psi-i\varphi)=(-iA(\varphi+i\psi),\ -i(\varphi+i\psi))=$$
$$=(A(\varphi+i\psi),\ \varphi+i\psi).$$

Отсюда легко усмотреть, что $(A\varphi,\psi)=\overline{(A\psi,\ \varphi)}$, или, по аксиоме § 3, $(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A\psi)$, т. е., что оператор A — симметричный.

Оператор, совпадающий со своими сопряженными, называется самосопряженным.

Таким образом, если оператор A — самосопряженный, то: 1) множество D^* элементов, на которых $(A\varphi,\ \psi)$ есть ограниченный функционал от φ, совпадает с областью D_A оператора A; 2) каковы бы ни были элементы φ и ψ из D_A, имеет место тождество (3). Отсюда следует, что всякий самосопряженный оператор симметричен. Обратное, вообще говоря, неверно; можно только утверждать, что оператор, сопряженный с симметричным, является его расширением.

Заметим, что оператор аннулирования и тождественный оператор — оба самосопряженные.

Теорема 3. *Симметричный ограниченный оператор, определенный на всем пространстве, — самосопряженный.*

Если оператор A ограничен и определен на всем пространстве, то сопряженный с ним также определен на всем пространстве. Поэтому области определения операторов A и A^* совпадают и, в силу сказанного выше, симметричный оператор A будет также и самосопряженным.

Поясним наши определения на следующем примере. Будем исходить из пространства $L_2(0, 1)$. Пусть M — линеал функций $\varphi(x)$, абсолютно-непрерывных вместе со своими первыми производными на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, имеющих квадратично-суммируемые на этом отрезке вторые производные и удовлетворяющих краевым условиям

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0. \tag{4}$$

Определим на M оператор $A\varphi$ формулой

$$A\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}. \tag{5}$$

Докажем, что этот оператор — самосопряженный. Выясним структуру множества D^*. Пусть $\psi(x) \in D^*$. Тогда существует такая функция $\Psi(x)$, что, по формуле (1),

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, \Psi),$$

или

$$\int_0^1 \varphi''(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\Psi(x)}\,dx, \quad \Psi(x) = A^*\psi. \tag{6}$$

Положим

$$\int \Psi(x)\,dx = \psi_1(x), \qquad \int \psi_1(x)\,dx = \psi_2(x).$$

Постоянные интегрирования подберем так, чтобы $\psi_2(0) = \psi_2(1) = 0$. Беря дважды по частям второй интеграл в (6), мы получим, учтя условия (4):

$$\int_0^1 \varphi''(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi''(x)\overline{\psi_2(x)}\,dx.$$

Это равенство должно быть тождеством относительно $\varphi(x)$. Отсюда нетрудно заключить, что $\psi_2(x) = \psi(x)$, или

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \Psi(x) = A^*\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}. \tag{7}$$

Равенства (7) показывают, что $\psi(x) \in M$, т. е., что D^* содержится в M; с другой стороны, M содержится в D^*: действительно, если $\psi \in M$, то, интегрируя по частям, мы легко найдем

$$\int_0^1 \varphi''(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi''(x)}\,dx.$$

Отсюда следует, что $M = D^*$, или, так как $M = D_A$, что $D_A = D^*$. Теперь из (7) вытекает, что $A^* = A$, т. е., что оператор A — самосопряженный.

Пусть теперь M' означает линеал функций, подчиненных тем же условиям, что и функции линеала M, и, кроме того, дополнительным условиям

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \tag{8}$$

Пусть, далее, $B\varphi$ означает оператор, определяемый попрежнему формулой (5), но заданный только на линеале M'. Этот оператор симметричный, но не самосопряженный. Действительно, хотя равенство (3) здесь очевидно выполняется, но $D^*, \neq M'$. Чтобы удостовериться в этом, допустим, что $\psi(x) \in D^*$, и рассмотрим выражение

$$(B\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi''(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\Psi(x)}\,dx. \tag{9}$$

Интегрируя дважды по частям и используя условия (4) и (8), мы получим

$$\int_0^1 \varphi(x)\,\overline{\Psi(x)}\,dx = \int_0^1 \varphi''(x)\,\overline{\psi_2(x)}\,dx, \tag{10}$$

где попрежнему

$$\psi_2(x) = \int \psi_1(x)\,dx, \qquad \psi_1(x) = \int \Psi(x)\,dx,$$

но постоянные интегрирования остаются произвольными. Сравнивая (9) и (10), видим, что $\psi_2(x) = \psi(x)$ и $\Psi(x) = \frac{d^2\psi}{dx^2}$. Отсюда следует, что $\psi(x)$ абсолютно-непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет на этом отрезке квадратично-суммируемую вторую производную. Совокупность функций, обладающих указанными свойствами, и образует множество D^*; оно не совпадает с $D_B = M'$, так как функции, входящие в D^*, не подчинены никаким краевым условиям.

В заключение приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 4. *Оператор, обратный самосопряженному, тоже является самосопряженным.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, у В. И. Смирнова [1].

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 8. Самосопряженные краевые задачи математической физики

Линейные краевые задачи математической физики обычно могут быть сформулированы следующим образом:

В m-мерном эвклидовом пространстве[1] задана некоторая область Ω; ее границу обозначим через S.[2] Требуется определить функцию $u(P)$ (через P обозначена точка пространства), определенную и необходимое число раз дифференцируемую внутри Ω, удовлетворяющую в этой области линейному дифференциальному уравнению

$$Lu = f(P), \tag{1}$$

а на границе S — краевым условиям, выражаемым линейными уравнениями

$$\Gamma_j u = g_j(P), \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

В уравнении (1) $f(P)$ — заданная в Ω функция; в уравнении (2) операторы $\Gamma_j u$, вообще говоря, дифференциальные, а функции $g_j(P)$ предполагаются заданными только на S.

Искомая функция $u(P)$ может быть и векторной. В этом случае мы потребуем, чтобы и выражения Lu и $\Gamma_j u$, а также данные функции $f(P)$ и $g_j(P)$ были векторами.

---

[1] Обычно $m = 3$; в так называемых „плоских задачах" число m измерений пространства равно двум и, наконец, $m = 1$ в „линейных задачах" математической физики.

[2] Этих обозначений мы будем придерживаться во всем последующем.

Часто оказывается возможным без большого труда найти функцию, удовлетворяющую либо только уравнению (1), либо только уравнениям (2). Если найденная функция достаточное число раз дифференцируема, то либо уравнение (1), либо уравнения (2) можно сделать однородными. Действительно, если $u_0(P)$ удовлетворяет уравнению (1), так что $Lu_0 = f(P)$, то разность $v = u - u_0$ удовлетворяет однородному уравнению $Lv = 0$ внутри Ω и неоднородным уравнениям $\Gamma_j v = g_j(P) - \Gamma_j u_0$ на S. Точно так же если $u_1(P)$ удовлетворяет уравнениям (2), то разность $w = u - u_1$ удовлетворяет однородным уравнениям $\Gamma_j w = 0$ на S и неоднородному уравнению $Lw = f(P) - Lu_1$ внутри Ω. В главах II—V мы будем поэтому считать, если не оговорено противное, что искомая функция удовлетворяет однородному краевому условию, выражаемому линейными однородными уравнениями

$$\Gamma_j u = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots r. \tag{3}$$

Пусть дифференциальный оператор Lu — четного порядка, и пусть этот порядок будет $2k$. Составим интеграл

$$\int\limits_{\Omega} vLu\, d\Omega$$

и проинтегрируем его k раз по частям. Мы приведем его этим к виду

$$\int\limits_{\Omega} vLu\, d\Omega = \Lambda(u,\ v) + \int\limits_{S} \sum_{j=1}^{k} R_j u \tilde{R}_j v\, dS, \tag{4}$$

где $\Lambda(u,\ v)$ — некоторый распространенный по области Ω интеграл, подинтегральная функция которого содержит производные порядка k обеих функций $u(P)$, $v(P)$, а $R_j u$, $\tilde{R}_j v$ — некоторые линейные дифференциальные операторы, определенные на S. Так, например, если $Lu = \Delta^2 u$, где Δ — оператор Лапласа, то двукратное интегрирование по частям дает

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta^2 u\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \Delta u \Delta v\, d\Omega + \int\limits_{S} \left(v\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS,$$

где ν — внешняя нормаль к S. В этом случае

$$\Lambda(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \, d\Omega, \quad R_1(u) = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}, \quad R_2(u) = -\Delta u,$$

$$\widetilde{R}_1 v = v, \quad \widetilde{R}_2 v = \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Интеграл $\Lambda(u, v)$ возьмем по частям еще k раз так, чтобы исключить под знаком объемного интеграла производные функции u. Мы придем тогда к формуле вида

$$\Lambda(u, v) = \int_\Omega uL'v \, d\Omega - \int_\Omega \sum_{j=1}^{k} R_j' v \widetilde{R}_j' u \, dS, \tag{4$_1$}$$

где $L'v$ — некоторый дифференциальный оператор порядка $2k$. *$L'v$ — называется оператором, сопряженным в смысле Лагранжа с оператором Lu.* В рассмотренном выше примере

$$\Lambda(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_\Omega u \Delta^2 v \, d\Omega - \int_S \left(u \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS,$$

и, следовательно,

$$L'v = \Delta^2 v, \quad R_1' v = \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}, \quad R_2' v = -\Delta v, \quad \widetilde{R}_1' u = u, \quad \widetilde{R}_2' u = \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Складывая (4$_1$) и (4), мы получим соотношение, характеризующее сопряженные в смысле Лагранжа операторы

$$\int_\Omega (vLu - uL'v) \, d\Omega =$$
$$= \int_S \sum_{j=1}^{k} \left\{ R_j u \widetilde{R}_j v - R_j' v \widetilde{R}_j' u \right\} \, dS. \tag{5}$$

Это соотношение, между прочим, показывает, что $vLu - uL'v$ есть расходимость некоторого вектора.

Если $Lu = L'u$, то Lu называется оператором, *самосопряженным в смысле Лагранжа.* Таким будет, например, рассмотренный выше оператор $\Delta^2 u$. Если $Lu = L'u$, то, очевидно, $R_j u = R_j' u$, $\widetilde{R}_j u = \widetilde{R}_j' u$, и соотношение (5) принимает более простой вид

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)\, d\Omega = \int_{S} \sum_{j=1}^{k} \left\{R_j u \tilde{R}_j v - \tilde{R}_j u R_j v\right\} dS. \qquad (6)$$

Пусть уравнение (1) — самосопряженное.[1] Краевые условия (3) мы будем называть самосопряженными, если из равенств $\Gamma_j u = \Gamma_j v = 0$, $j = 1, 2, \ldots r$ будет следовать, что

$$\sum_{j=1}^{k} \left\{R_j u \tilde{R}_j v - \tilde{R}_j u R_j v\right\} = 0.$$

Заметим сразу же, что, как это вытекает из определения, краевые условия, выражаемые уравнениями $R_j u = 0$, $j = 1, 2, \ldots k$ или $\tilde{R}_j u = 0$, $j = 1, 2, \ldots k$, — самосопряженные.

Если и дифференциальное уравнение, и краевые условия — самосопряженные, то соответствующая задача математической физики также называется самосопряженной. Для самосопряженной задачи имеет место тождество

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)\, d\Omega = 0, \qquad (7)$$

верное для всяких функций $u(P)$ и $v(P)$, удовлетворяющих уравнениям (3).

В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор 2-го порядка

$$Lu = p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\frac{du}{dx} + r(x)\, u,$$

где функция $u(x)$ непрерывна и имеет две непрерывные производные на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Коэффициенты p, q, r будем считать непрерывными и столько раз непрерывно-дифференцируемыми, сколько это потребуется для последующих вычислений. В нашем случае область Ω есть отрезок $a \leqslant x \leqslant b$, а ее граница S есть совокупность двух точек $x = a$ и $x = b$. Нетрудно видеть,

---

[1] Т. е. оператор L — самосопряженный в смысле Лагранжа.

что

$$L'u = \frac{d^2}{dx^2}(pu) - \frac{d}{dx}(qu) + ru = p\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2\frac{dp}{dx} - q\right)\frac{du}{dx} + \left(\frac{d^2p}{dx^2} - \frac{dq}{dx} + r\right)u,$$

а соотношение (4) принимает вид

$$\int_a^b (vLu - uL'v)\,dx = [v(pu' + qu) - u\,(pv)']_{x=a}^{x=b}.$$

Оператор Lu будет самосопряженным в смысле Лагранжа, если $p'' - q' + r = r$ и $2p' - q = q$; оба условия сводятся к одному: $p' = q$. Отсюда, самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка с одной независимой переменной имеет вид

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + ru; \tag{8}$$

соотношение (5) сводится к следующему:

$$\int_a^b (vLu - uLv)\,dx = [p\,(vu' - uv')]_{x=a}^{x=b}.$$

Нетрудно видеть, что самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2k$ с одной независимой переменной имеет вид

$$Lu = \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j}{dx^j}\left(p_j(x)\,\frac{d^ju}{dx^j}\right);$$

оператор нечетного порядка не может быть самосопряженным.

Выясним, какие самосопряженные краевые условия могут сопутствовать оператору (8). Допустим, например, что $p(a) \neq 0$, $p(b) \neq 0$. Тогда для самосопряженности краевых условий достаточно, чтобы равенства $v(a)\,u'(a) - u(a)\,v'(a) = 0$, $v(b)\,u'(b) - u(b)\,v'(b) = 0$ выполнялись для всяких функций $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих указанным условиям. Это будет иметь место, если краевые условия имеют вид

$$Au(a) + Bu'(a) = 0; \quad Cu(b) + Du'(b) = 0, \tag{9}$$

где A, B, C, D — постоянные. Условия типа (9) встречаются во многих задачах математической физики, которые приводятся к краевым задачам для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+ru=f(x).$$

Так, задачи, относящиеся к закрепленной на концах струне, приводят к условиям $u(a)=u(b)=0$, задача о продольных колебаниях стержня с одним заделанным и одним свободным концом — к условиям $u(a)=0$, $u'(b)=0$; в задаче о распространении тепла в стержне, на концах которого имеет место излучение в окружающую среду, краевые условия имеют вид

$$u'(a)-hu(a)=0, \quad u(b)+hu'(b)=0.$$

В качестве второго примера рассмотрим оператор Лапласа. Будем рассматривать этот оператор на линеале функций, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядков в замкнутой области $\bar{\Omega}=\Omega+S$. Известная формула Грина

$$\int\limits_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)d\Omega=\int\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)dS$$

(ν — внешняя нормаль к S) показывает, что оператор Δu — самосопряженный в смысле Лагранжа. Самосопряженное краевое условие, содержащее производные не выше первого порядка, имеет вид

$$a\frac{\partial u}{\partial\nu}+bu=0, \tag{10}$$

где a и b — функции точки на S. Действительно, если u и v удовлетворяют условию (10):

$$a\frac{\partial u}{\partial\nu}+bu=0, \quad a\frac{\partial v}{\partial\nu}+bv=0,$$

то, исключая a и b, мы найдем, что $u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$. В частности, самосопряженными будут краевые условия в задачах Дирихле ($u=0$) и Неймана $\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}=0\right)$. Нетрудно видеть, что краевое условие, содержащее производную по направлению, не совпадающему с нормалью, не будет в нашем случае самосопряженным.

Каждой задаче математической физики, определяемой уравнениями (1) и (3), отвечает некоторый оператор A в пространстве $L_2(\Omega)$, или в ином гильбертовом пространстве, естественным образом связанном с задачей. Область определения этого оператора есть линеал функций, достаточное (в соответствии с требованиями задачи) число раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям (3); значение оператора Au на указанном линеале совпадает с Lu. Решить поставленную задачу математической физики значит решить уравнение $Au=f$.

Если задача математической физики — самосопряженная, то соответствующий ей оператор A симметричен[1] — это непосредственно следует из формулы (7). Будет ли этот оператор самосопряженным (в смысле § 7) — этот вопрос в каждом случае требует особого исследования. Как мы увидим ниже, в ряде важных случаев[2] оператор A может быть расширен до самосопряженного.

Ниже мы будем пользоваться следующей упрощенной терминологией: вместо того, чтобы говорить об операторе Au, совпадающем с данным дифференциальным оператором Lu на данном линеале, мы будем просто говорить об операторе Lu, определенном на этом линеале.

§ 9. О минимальном функционале

Оператор Au, определенный на множестве, плотном в гильбертовом пространстве, называется *положительным*, если для любого, отличного от нуля, элемента из области определения оператора справедливо неравенство $(Au, u)>0$; оператор Au называется *положительно-определенным*, если

---

[1] Мы предполагаем при этом, что операторы Lu и $\Gamma_j u$ переводят вещественную функцию в вещественную же, так что $L\bar{v}=\overline{Lv}$, $\Gamma_j\bar{v}=\overline{\Gamma_j v}$. Чтобы доказать наше утверждение, достаточно в формуле (7) заменить v на $\bar{v}$.

[2] Именно, если A — положительно-определенный оператор см. §§ 9 и 19.

для любого элемента из области определения оператора выполняется более сильное неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2,$$

где γ^2 — положительная постоянная. Из теоремы 2 § 7 следует, что всякий положительный оператор симметричен.

Если оператор Au — положительный, то уравнение

$$Au - f = 0 \tag{1}$$

может иметь не более одного решения. Действительно, если уравнение (1) имеет два различных решения u' и u'', то $Au' - f = 0$, $Au'' - f = 0$. Вычитая и полагая $u' - u'' = \tilde{u}$, мы получим $A\tilde{u} = 0$, откуда $(A\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$, что несовместимо с положительностью A.

Теорема 1. *Пусть Au — положительный оператор. Если уравнение* (1) *имеет решение, то это решение дает функционалу*

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) \tag{2}$$

наименьшее значение. Обратно, элемент гильбертова пространства, реализующий минимум функционала (2), *удовлетворяет уравнению* (1).

Заметим прежде всего, что области определения оператора Au и функционала $F(u)$ совпадают. Это непосредственно вытекает из вида выражения (2). Далее, $F(u) = (Au, u) - 2\,\mathrm{Re}\,(u, f)$ и, так как A — положительный оператор, то $F(u)$ принимает только вещественные значения.

Пусть теперь u_0 удовлетворяет уравнению (1):

$$Au_0 - f = 0.$$

Пусть, далее, v произвольный элемент из области D_A определения оператора A. Положим $v - u_0 = \eta$, так что $v = u_0 + \eta$. Имеем

$$F(v) = (A(u_0 + \eta), u_0 + \eta) - (u_0 + \eta, f) - (f, u_0 + \eta).$$

Раскрывая скобки и пользуясь симметричностью A, мы легко найдем, что

$$F(v) = F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (f, Au_0 - \eta) + (A\eta, \eta).$$

Но $Au_0 - f = 0$, поэтому $F(v) = F(u_0) + (A\eta, \eta)$ и, в силу положительности оператора A, $F(v) > F(u_0)$, т. е. функционал $F(u)$ принимает наименьшее значение при $u = u_0$.

Обратно, пусть u_0 реализует минимум функционала $F(u)$. Пусть η — произвольный элемент из D_A. Множество D_A как область определения линейного оператора есть линеал, поэтому $\lambda\eta$, где λ — постоянное число, также входит в D_A; по той же причине также и $u_0 + \lambda\eta \in D_A$. По предположению,

$$F(u_0 + \lambda\eta) \geqslant F(u_0).$$

Будем считать число λ вещественным. Последнее неравенство легко, используя симметричность A, привести к виду

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2(A\eta, \eta) \geqslant 0. \tag{3}$$

Это возможно только тогда, когда

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0. \tag{4}$$

Заменив в (4) η на $i\eta$, получим

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0. \tag{4$_1$}$$

Из (4) и (4_1) следует

$$(Au_0 - f, \eta) = 0. \tag{5}$$

Элемент гильбертова пространства $Au_0 - f$ ортогонален, в силу равенства (5), ко всем элементам плотного множества D_A. По лемме § 5, $Au_0 - f = 0$, т. е. u_0 удовлетворяет уравнению (1).

Как мы увидим ниже, в ряде задач математической физики величина функционала (2) пропорциональна потенциальной энергии рассматриваемого тела. В таких случаях *теорема 1 утверждает справедливость принципа минимума потенциальной энергии.* Та же теорема позволяет в указанных случаях заменить задачу об интегрировании дифференциального уравнения при заданных краевых условиях задачей об отыскании функции, реализующей минимум функционала (2); прямые методы, о которых мы будем говорить ниже, позволяют найти приближенное решение этой последней задачи сравнительно простыми средствами.

Метод решения задач математической физики, который состоит в том, что интегрирование дифференциального уравнения при заданных краевых условиях заменяется отысканием функции, реализующей минимум функционала (2)[1], мы будем, следуя более или менее установившейся традиции, называть *энергетическим методом.*

Рассмотрим *симметричный* оператор A, определенный на некотором линеале, плотном в данном гильбертовом пространстве. Допустим, что этот оператор — вещественный, т. е. что он преобразует вещественную функцию в вещественную же. Так, если A—дифференциальный оператор, то он будет вещественным, если все коэффициенты при неизвестных функциях и их производных как в самом дифференциальном уравнении, так и в сопутствующих краевых условиях вещественные. Если мы хотим убедиться в том, что изучаемый нами оператор — положительный или положительно-определенный, то, по определению, нужно установить справедливость неравенства $(Au, u) > 0$, или, соответственно, $(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2$ для всевозможных u, как вещественных, так и комплексных. Дело упрощается, однако, если наш оператор — вещественный; в этом случае нужное неравенство достаточно установить только для вещественных u. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть вещественный симметричный оператор Au определен на линеале M, плотном в функциональном гильбертовом пространстве H, и пусть M содержит вместе с любой функцией также ее вещественную и мнимую части. Этот оператор будет положительным, соответственно положительно-определенным, если неравенство $(Au, u) > 0$, соответственно $(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2$, будет выполняться на всех вещественных $u \in M$.*

Пусть при любом вещественном $u \in M$ будет $(Au, u) > 0$. Возьмем теперь комплексное $u = u_1 + iu_2$, где u_1 и u_2 уже вещественные. Имеем

$$(Au, u) = (A(u_1 + iu_2), u_1 + iu_2) = (Au_1, u_1) + (Au_2, u_2) + \\ + i[(Au_2, u_1) - (Au_1, u_2)].$$

---

[1] Мы будем эту задачу коротко называть „задачей о минимуме“ функционала (2).

В силу симметричности оператора A, квадратная скобка равна нулю; отсюда

$$(Au, u) = (Au_1, u_1) + (Au_2, u_2) > 0,$$

так как u_1 и u_2 — функции вещественные. Неравенство $(Au, u) > 0$ установлено теперь для любой комплексной функции из M; по определению, оператор A — положительный.

Допустим теперь, что при любом вещественном $u \in M$ будет $(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2$, где γ^2 — положительная постоянная. Беря комплексное $u = u_1 + iu_2$, мы попрежнему получим

$$(Au, u) = (Au_1, u_1) + (Au_2, u_2),$$

откуда следует, что

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2). \tag{6}$$

Далее, по неравенству треугольника,

$$\|u\|^2 \leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|)^2 \leqslant 2(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2),$$

или

$$\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Подставив это в (6), мы получим неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma_1^2 \|u\|^2; \quad \gamma_1^2 = \frac{\gamma^2}{2} > 0,$$

которое показывает, что оператор A — положительно-определенный.

Теоремой 2 мы будем широко пользоваться во всем последующем, так как чаще всего будем иметь дело с вещественными операторами, симметричными, если они соответствуют самосопряженным задачам математической физики (см. конец § 8).

§ 10. Естественные краевые условия

Пусть Lu — вещественный[1] самосопряженный в смысле Лагранжа дифференциальный оператор порядка $2k$, $u(P)$ и $v(P)$ — вещественные функции, достаточное число раз непрерывно-дифференцируемые в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$.

[1] См. конец § 9.

Рассмотрим интеграл[1]

$$\int_\Omega vLu\, d\Omega.$$

Интегрируя по частям, как в § 8, мы получим

$$\int_\Omega vLu\, d\Omega = \Lambda(u, v) + \int_S \sum_{j=1}^{k} R_j u \widetilde{R}_j v\, dS.$$

Будем рассматривать Lu как оператор в пространстве $L_2(\Omega)$. Тогда, так как функции u, v, Lu — вещественные, то

$$\int_\Omega vLu\, d\Omega = (Lu, v)$$

и, следовательно,

$$(Lu, v) = \Lambda(u, v) + \int_S \sum_{j=1}^{k} R_j u \widetilde{R}_j v\, dS. \quad (1)$$

Будем решать уравнение

$$Lu = f \quad (2)$$

при краевых условиях

$$R_j u = 0, \quad j = 1, 2, \ldots r, \quad (3)$$

$$\Gamma_j u = 0, \quad j = r+1, r+2, \ldots k. \quad (4)$$

Допустим, что оператор Lu — положительный на линеале M функций, удовлетворяющих краевым условиям (3) и (4). Тогда, как было показано в § 8, наша задача равносильна задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (Lu, u) - (u, f) - (f, u)$$

на том же линеале M. Заметим, что, предполагая функцию f также вещественной, мы можем представить $F(u)$ в несколько более простой форме

$$F(u) = (Lu, u) - 2(u, f).$$

---

[1] Если u, v — векторные функции, то под произведением vLu следует понимать скалярное произведение векторов v и Lu.

Краевые условия (3) будем называть *естественными*. Из равенств (1) и (3) вытекает, что

$$(Lu,\ v) = \Lambda(u,\ v) + \int\limits_S \sum_{j=r+1}^{k} R_j u \tilde{R}_j v\, dS$$

и

$$F(u) = \Lambda(u,\ u) + \int\limits_S \sum_{j=r+1}^{k} R_j u \tilde{R}_j u\, dS - 2(u,\ f). \qquad (5)$$

Поставим теперь задачу о минимуме функционала (5) на линеале функций, удовлетворяющих только краевым условиям (4). В частности, если $r = k$, условия (4) отсутствуют, и мы не подчиняем $u(P)$ никаким краевым условиям. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть на линеале N функций, $2k$ раз непрерывно-дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих краевым условиям* (4),

$$\Lambda_1(u,\ u) = \Lambda(u,\ u) + \\ + \int\limits_S \sum_{j=r+1}^{k} R_j(u)\, \tilde{R}_j(u)\, dS' > 0, \qquad u \neq 0. \qquad (6)$$

Если существует функция u_0, реализующая минимум функционала (5) *на линеале N, то u_0 удовлетворяет уравнению* (2) *и естественным краевым условиям* (3).[1]

Пусть $\lambda \neq 0$ — произвольное вещественное число и η — произвольная вещественная функция из линеала N. Тогда, по условию теоремы,

$$F(u_0 + \lambda\eta) - F(u_0) = \Lambda_1(u_0 + \lambda\eta,\ u_0 + \lambda\eta) - \\ - \Lambda(u_0,\ u_0) - 2\lambda(\eta,\ f) > 0.$$

Нетрудно видеть, что выражение $\Lambda_1(u_0 + \lambda\eta,\ u_0 + \lambda\eta)$ можно раскрывать по правилу возведения в квадрат двучлена.

---

[1] Аналогичный результат получается, если естественные краевые условия заданы только на части границы S.

В силу указанного, последнее неравенство принимает вид

$$2\lambda\,[\Lambda_1(u_0,\ \eta)-(f,\ \eta)]+\lambda^2\Lambda_1(\eta,\ \eta)>0.$$

В силу неравенства (6) отсюда следует, что

$$\Lambda_1(u_0,\ \eta)-(f,\ \eta)=0. \tag{7}$$

Из (1) и (6) следует далее, что

$$\Lambda_1(u_0,\ \eta)=(Lu_0,\ \eta)-\int\limits_S\sum_{j=1}^{r}R_ju_0\widetilde{R}_j\eta\,dS,$$

и уравнение (7) принимает следующий вид:

$$(Lu_0-f,\ \eta)-\int\limits_S\sum_{j=1}^{r}R_j(u_0)\,\widetilde{R}_j(\eta)\,dS=0. \tag{8}$$

Потребуем, чтобы на S

$$\widetilde{R}_j(\eta)=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{9}$$

Тогда $(Lu_0-f,\ \eta)=0$. Можно доказать, что множество функций η, некоторое число раз непрерывно-дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям (4) и (9), плотно в $L_2(\Omega)$. По лемме § 5, $Lu_0-f=0$, т. е. u_0 удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Теперь равенство (8) сводится к такому:

$$\int\limits_S\sum_{j=1}^{r}R_j(u_0)\,\widetilde{R}_j(\eta)\,dS=0.$$

Беря теперь в качестве η функцию, удовлетворяющую, кроме (4), еще и краевым условиям

$$\widetilde{R}_j\eta=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r,\quad j\neq l,$$

где l равно одному из чисел 1, 2, ... r, и применяя обычные рассуждения, мы найдем, что на S

$$R_lu_0=0,\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Теорема доказана.

Только что доказанная теорема имеет большое практическое значение, так как она позволяет не заботиться об удовлетворении естественным краевым условиям, что, в свою очередь, весьма облегчает подбор координатных функций (см. ниже, главу III).

Следует, однако, заметить, что сходимость прямых методов значительно улучшается, если координатные функции удовлетворяют краевым условиям, поэтому названные функции желательно подбирать так, чтобы краевые условия удовлетворялись хотя бы частично.

Во всем последующем мы будем каждый раз рассматривать заданный дифференциальный оператор как оператор в гильбертовом пространстве. За исключением случаев, которые каждый раз будут оговорены особо, таким пространством у нас будет пространство $L_2(\Omega)$; в частности, если число независимых переменных равно единице, мы будем рассматривать данный нам дифференциальный оператор в пространстве $L_2(a, b)$, где a и b — конечные числа. Относительно Ω мы будем предполагать, если особо не оговорено противное, что это — конечная область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S.[1]

§ 11. Минимальный интеграл в случае обыкновенного дифференциального уравнения

Пусть дано самосопряженное (в смысле Лагранжа) дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\,u = f(x). \qquad (1)$$

Будем искать его интеграл, непрерывный вместе со своей первой производной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющий на концах этого отрезка самосопряженным краевым

---

[1] Поверхность называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа частей, каждая из которых имеет в любой точке определенную касательную плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания. Если область Ω не трехмерная, а плоская, то мы аналогично будем предполагать, что Ω ограничена кусочно-гладкой кривой S.

условиям

$$\left.\begin{aligned} \alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \\ \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где α, β, γ, δ — постоянные.

Относительно данных мы сделаем следующие допущения:

а) на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ $p(x)$, $p'(x)$ и $r(x)$ непрерывны;

б) на том же отрезке $p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$;

в) α, β, γ и δ неотрицательны, причем α и β, а также γ и δ, не обращаются одновременно в нуль.

Докажем, что оператор Lu положителен на линеале функций, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющих условиям (2). С этой целью составим скалярное произведение (функцию $u(x)$ здесь и ниже считаем вещественной, в соответствии с теоремой 2 § 9)

$$(Lu, u) = -\int_a^b u \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) dx + \int_a^b r(x) u^2(x)\, dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям:

$$(Lu, u) = p(a) u'(a) u(a) - p(b) u'(b) u(b) + \\ + \int_a^b \{p(x) u'^2(x) + r(x) u^2(x)\}\, dx. \tag{3}$$

Интеграл в (3) неотрицателен. Во внеинтегральных членах заменим $u'(a)$ и $u'(b)$ выражениями из (2).[1] Мы получим тогда неотрицательную величину

$$\frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b).$$

Теперь ясно, что $(Lu, u) \geqslant 0$, причем $(Lu, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \equiv 0$. Наше утверждение доказано.

Если $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, то соответственно $u(a) = 0$ или $u(b) = 0$, соответствующий внеинтегральный член исчезает, и оператор Lu попрежнему оказывается положительным на упомянутом выше линеале.

---

[1] Мы предполагаем при этом, что $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

В силу теоремы § 9, задача интегрирования уравнения (1) при краевых условиях (2) равносильна задаче о минимуме функционала[1]

$$F(u) = (Au, u) - (f, u) - (u, f) = \\ = \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b) + \\ + \int_a^b \{p(x) u'^2(x) + r(x) u^2(x) - 2f(x) u(x)\} dx. \tag{4}$$

Естественными для оператора Lu будут краевые условия

$$u'(a) = u'(b) = 0;$$

они получаются из (2) при $\beta = \delta = 0$. В этом случае, а также в случае $\alpha = \gamma = 0$, внеинтегральные члены в $F(u)$ исчезают, и этот функционал принимает более простой вид

$$F(u) = \int_a^b \{p(x) u'^2(x) + r(x) u^2(x) - 2f(x) u(x)\} dx. \tag{5}$$

Самосопряженное в смысле Лагранжа обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2k$ имеет вид

$$Lu = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left[p_j(x) \frac{d^j u}{dx^j} \right] = f(x); \tag{6}$$

для простоты изложения мы будем рассматривать это уравнение при простейших краевых условиях:

$$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(k-1)}(a) = \\ = u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(k-1)}(b) = 0. \tag{7}$$

Примем, что коэффициенты $p_j(x)$ неотрицательны, непрерывны и нужное число раз дифференцируемы, причем коэф-

---

[1] Так как функции $f(x)$ и $u(x)$ — вещественные, то

$$(u, f) = (f, u) = \int_a^b f(x) u(x) dx.$$

фициент при старшей производной, $p_k(x)$, может обратиться в нуль только в конечном числе точек. Докажем, что оператор (6) положителен на линеале функций, удовлетворяющих условиям (7). Действительно,

$$(Lu,\ u)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\int_a^b u\,\frac{d^j}{dx^j}\left[p_j(x)\frac{d^ju}{dx^j}\right]dx.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание равенства (7), мы легко найдем, что

$$(Lu,\ u)=\sum_{j=0}^{k}\int_a^b p_j(x)\left(\frac{d^ju}{dx^j}\right)^2dx, \tag{8}$$

что, очевидно, неотрицательно. Остается показать, что из равенства $(Lu,\ u)=0$ следует $u=0$. Действительно, пусть $(Lu,\ u)=0$. Слагаемые в (8) — неотрицательные, поэтому каждое из них обращается в нуль; в частности,

$$\int_a^b p_k(x)\left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^2dx=0.$$

По предположению, $p_k(x)$ может обратиться в нуль только в конечном числе точек; в таком случае из последнего равенства следует, что

$$\frac{d^ku}{dx^k}\equiv 0.$$

Функция $u(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, есть полином степени $k-1$; в силу условий (7), этот полином обращается при $x=a$ в нуль вместе со своими производными до порядка $k-1$ включительно. Отсюда следует, что указанный полином тождественно равен нулю. Тем самым доказана положительность оператора (6). Таким образом, задача интегрирования уравнения (6) при краевых условиях (7) равносильна задаче о минимуме функционала

$$F(u)=(Lu,\ u)-2(f,\ u)=$$
$$=\int_a^b\left\{\sum_{j=0}^{k}p_j(x)\left(\frac{d^ju}{dx^j}\right)^2-2f(x)\,u\right\}dx. \tag{9}$$

§ 12. Основные краевые задачи для уравнений Пуассона и Лапласа

Пусть дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(P), \tag{1}$$

где P — точка некоторой конечной m-мерной (можно считать $m=2$ или $m=3$) области Ω. Поставим для этого уравнения задачу Дирихле: найти интеграл уравнения (1), непрерывный в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющий на границе S этой области краевому условию

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ и в нем рассмотрим линеал M функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) они непрерывны и дважды непрерывно-дифференцируемы в $\bar{\Omega}$; 2) они равны нулю на S. Нетрудно видеть, что на этом линеале оператор $-\Delta u$ будет положительным. Действительно,

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\Delta u\, d\Omega = -\int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega, \tag{3}$$

где ν — внешняя нормаль к S. Поверхностный интеграл пропадает, так как на границе $u=0$. Отсюда

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \geqslant 0. \tag{4}$$

Остается показать, что $u \equiv 0$, если $(-\Delta u, u) = 0$. Но это очевидно: если $(-\Delta u, u) = 0$, то, как это следует из (4), $\operatorname{grad} u \equiv 0$, откуда вытекает, что u — постоянная. Будучи равной нулю на S, эта постоянная равна нулю.

Из сказанного следует, что сформулированная нами задача Дирихле равносильна задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$$

или, если воспользоваться формулой (3),

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \{ (\operatorname{grad} u)^2 - 2uf \} \, d\Omega. \tag{5}$$

К уравнению (1) с краевым условием (2) сводится, как известно, задача о прогибе мембраны, закрепленной по краю, под действием нормальной нагрузки; функция $f(P)$ пропорциональна этой нагрузке. Функционал (5) пропорционален потенциальной энергии изогнутой мембраны (см. Е. Трефтц [1], n°26); мы здесь имеем дело, следовательно, с частным случаем принципа минимума потенциальной энергии.

Сходный результат получится, если вместо (2) поставить краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(P) \, u \,|_S = 0, \tag{6}$$

где $\sigma(P)$ — неотрицательная функция, отличная от тождественного нуля[1]. На этот раз мы должны ввести линеал M_σ функций, удовлетворяющих краевому условию (6) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции линеала M. Нетрудно видеть, что на M_σ оператор $-\Delta u$ также положителен. Действительно, по формуле (3) и краевому условию (6),

$$(-\Delta u, u) = -\int\limits_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS + \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega = \int\limits_S \sigma u^2 \, dS + \\ + \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \geqslant 0;$$

при этом, если $(-\Delta u, u) = 0$, то необходимо

$$\int\limits_S \sigma u^2 \, dS = 0, \quad \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega = 0.$$

Из второго равенства вытекает, что $u = C = \text{const}$. Подставив это в первое равенство, получим

$$C^2 \int\limits_S \sigma dS = 0.$$

---

[1] Задачу об интегрировании уравнения (1) при краевом условии (6) часто называют смешанной задачей теории потенциала.

Функция $\sigma(P)$ — неотрицательная, кроме того, $\sigma(P)$ не равна тождественно нулю. Отсюда следует, что $\int\limits_S \sigma dS > 0$, но тогда необходимо $C = 0$ и $u(P) \equiv 0$. Таким образом на линеале M_σ оператор $-\Delta u$ — положительный. Задачу интегрирования уравнения (1) Пуассона при краевом условии (6) можно заменить задачей о минимуме функционала

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f) = \\ = \int\limits_\Omega \{(\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\} d\Omega + \int\limits_S \sigma u^2 dS \qquad (7)$$

на линеале M_σ.

Особо рассмотрим задачу Неймана для уравнения (1). Пусть ищется интеграл уравнения (1), непрерывный и непрерывно-дифференцируемый в Ω и удовлетворяющий краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0. \qquad (8)$$

Можно, аналогично предыдущему, выделить из $L_2(\Omega)$ линеал M_0, образованный функциями, удовлетворяющими краевому условию (8) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции линеала M. Однако, оператор $-\Delta u$ не будет положительным на этом линеале. Действительно, по формулам (3) и (8),

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega,$$

что представляет собой величину неотрицательную. Но из равенства $(-\Delta u, u) = 0$ не следует, что $u \equiv 0$. В самом деле, функция $u \equiv 1$ очевидно входит в линеал M_0 и $(-\Delta u, u) = 0$.

Чтобы обойти это затруднение, поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что задача Неймана неразрешима при произвольной функции $f(P)$, и нетрудно найти условие, которому эта функция необходимо должна удовлетворять. Проинтегрируем (1) по Ω:

$$-\int\limits_\Omega \Delta u \, d\Omega = \int\limits_\Omega f \, d\Omega.$$

По известной формуле Грина

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int_{S} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS,$$

что равно нулю в силу (8).

Таким образом, для разрешимости задачи Неймана необходимо, чтобы

$$\int_{\Omega} f(P) \, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Далее, если задача Неймана разрешима, то она имеет бесчисленное множество решений, различающихся между собой на постоянную. Эту постоянную выберем так, чтобы решение $u(P)$ удовлетворяло тому же условию, что и данная функция $f(P)$:

$$\int_{\Omega} u(P) \, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Очевидно, такое решение задачи Неймана — единственное.

Из пространства $L_2(\Omega)$ выделим множество функций, удовлетворяющих условию (9). Нетрудно видеть, что это множество есть линеал; введя в нем то же скалярное произведение, что и в $L_2(\Omega)$:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(P) \overline{v(P)} \, d\Omega,$$

мы превратим наш линеал в гильбертово пространство, составляющее часть пространства $L_2(\Omega)$. Это новое пространство обозначим через $\widetilde{L}_2(\Omega)$ и будем его рассматривать, как основное пространство нашей задачи. Элементом пространства $\widetilde{L}_2(\Omega)$ является, в силу формулы (9), функция $f(P)$ — правая часть уравнения (1); в том же пространстве мы ищем и решение задачи. В $\widetilde{L}_2(\Omega)$ выделим линеал $\widetilde{M}_0$ функций, удовлетворяющих краевому условию (8), непрерывных и дважды непрерывно-дифференцируемых в Ω.

Очевидно, функции из линеала $\widetilde{M}_0$ удовлетворяют также равенству (9). Докажем, что оператор $-\Delta u$ — положительный на линеале M_0. Действительно, мы попрежнему найдем

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \geqslant 0;$$

если $(-\Delta u, u) = 0$, то $u = \mathrm{const}$, но постоянная, удовлетворяющая равенству (9), необходимо равна нулю.

Задача Неймана может быть заменена следующей вариационной задачей: в линеале $\widetilde{M}_0$ найти функцию, реализующую минимум функционала

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(f, u),$$

или, в силу краевого условия (8),

$$F(u) = \int_{\Omega} \{ (\operatorname{grad} u)^2 - 2fu \} \, d\Omega. \tag{10}$$

Краевое условие (8) — естественное, поэтому нет нужды ему удовлетворять заранее, отыскивая минимум функционала (10).

Часто приходится решать уравнение Лапласа с сопутствующим ему неоднородным краевым условием. Выясним, какой вид принимает в этих условиях вариационная задача о минимуме функционала. Пусть функция u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

и неоднородному условию задачи Дирихле

$$u|_S = \chi(P). \tag{11}$$

Построим какую-либо функцию $\psi(P)$, удовлетворяющую условию (11); допустим, что $\Delta\psi \in L_2(\Omega)$. Положим теперь $v = u - \psi$. Функция v удовлетворяет краевому условию (2) и уравнению (1), в котором следует положить $f(P) = \Delta\psi$. По доказанному, $v(P)$ реализует минимум функционала (5)

$$f(v) = \int_{\Omega} \{ (\operatorname{grad} v)^2 - 2v\Delta\psi \} \, d\Omega$$

на линеале функций, равных нулю на S и удовлетворяющих указанным выше условиям непрерывности и дифференцируемости. Положим в $F(v)$ $v = u - \psi$. Тогда $u(P)$ принадлежит множеству функций, равных $\chi(P)$ на S и удовлетворяющих тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функция $v(P)$. Выполнив простые преобразования, получим

$$F(u-\psi) = \int_\Omega \{ (\operatorname{grad} u)^2 + (\operatorname{grad} \psi)^2 - 2 \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \psi - \\ - 2u\Delta\psi + 2\psi\Delta\psi \}\, d\Omega. \quad (12)$$

По формуле Грина

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \psi\, d\Omega = -\int_\Omega u\Delta\psi\, d\Omega + \int_\Omega u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} dS = \\ = -\int_\Omega u\Delta\psi\, d\Omega + \int_S \psi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} dS,$$

так как $\psi = u$ на S. Подставив это в (12), получим

$$F(u-\psi) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + C, \quad (13)$$

где

$$C = \int_\Omega \{ (\operatorname{grad} \psi)^2 + 2\psi\Delta\psi \}\, d\Omega - 2\int_S \psi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} dS = \\ = -\int_\Omega (\operatorname{grad} \psi)^2 d\Omega$$

есть известная постоянная. Из формулы (13) ясно, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа равносильно следующей вариационной задаче: найти функцию, реализующую минимум функционала

$$\Phi(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \quad (14)$$

на множестве функций, принимающих на границе S заданные значения (11) и удовлетворяющих сформулированным в начале параграфа условиям непрерывности и дифференцируемости.

Если функция $u(P)$ решает для уравнения Лапласа задачу Неймана с краевым условием

$$\left.\frac{du}{d\nu}\right|_S = \omega(P), \tag{15}$$

то соответствующая вариационная задача сводится к нахождению минимума функционала

$$\Phi_1(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega - 2 \int_S u(P)\,\omega(P)\,dS' \tag{16}$$

на множестве функций, удовлетворяющих указанным выше условиям непрерывности и дифференцируемости; никаким краевым условиям эти функции заранее удовлетворять не должны.

§ 13. Общее уравнение второго порядка эллиптического типа

Сказанное в предшествующем параграфе распространяется, с некоторыми небольшими изменениями, на более общий случай уравнения эллиптического типа. Пусть дано самосопряженное уравнение второго порядка с m независимыми переменными:

$$Lu = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\,u = \\ = f(P); \; A_{jk} = A_{kj}. \tag{1}$$

Относительно его коэффициентов мы предположим, что $C(P)$ — ограниченная, а $A_{jk}(P)$ — непрерывно-дифференцируемая функция независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$ в некоторой конечной замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$. Мы будем считать, что уравнение (1) — эллиптическое в Ω, — для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\xi_j\xi_k$$

была положительно-определенной в любой точке области Ω. Коэффициент $C(P)$ будем считать неотрицательным. Наконец, $f(P)$ будем считать квадратично-суммируемой в Ω.

Мы будем, как и в случае уравнения Пуассона, рассматривать задачу об интегрировании уравнения (1) при самосопряженных краевых условиях одного из трех следующих типов:

$$u\big|_S = 0, \tag{2}$$

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,\ x_k) + \sigma(P)\,u\right]_S = 0,\ \sigma(P) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,\ x_k)\right]_S = 0. \tag{4}$$

В (3) и (4) ν означает внешнюю нормаль к S. Введем в рассмотрение обычное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ и в нем рассмотрим линеалы M, M_σ, M_0, элементы которых суть функции, непрерывные и дважды непрерывно-дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющие соответственно краевому условию (2), (3) или (4). Повторяя рассуждения предшествующего параграфа, мы легко докажем, что оператор Lu — положительный на каждом из линеалов M и M_σ[1]. Далее, на линеале M_0 оператор Lu положителен, если коэффициент $C(P)$ не равен тождественно нулю.

В перечисленных случаях задача об отыскании интеграла уравнения (1) среди функций линеала M, M_σ или M_0 равносильна задаче об отыскании функции из того же линеала, дающей минимум функционалу

$$F(u) = (Lu,\ u) - 2(f,\ u).$$

Легко убедиться, что при краевых условиях (2) или (4)

$$F(u) = \int_\Omega \left\{\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 - 2fu\right\} d\Omega; \tag{5}$$

[1] Функция $\sigma(P)$ предполагается отличной от тождественного нуля.

при этом условию (4), как естественному, можно не удовлетворять заранее. В случае условия (3)

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 - 2fu \right\} d\Omega + \\ + \int_S \sigma(P)\, u^2\, d\Omega. \quad (6)$$

Если $C \equiv 0$, то на линеале M_0 оператор Lu — неположительный. Как и в задаче Неймана для уравнения Пуассона, для существования интеграла уравнения (1) при краевом условии (4) необходимо, чтобы

$$\int_\Omega f(P)\, d\Omega = 0. \quad (7)$$

При этом интеграл, если он существует, содержит произвольное постоянное слагаемое. Его можно подчинить равенству

$$\int_\Omega u(P)\, d\Omega = 0, \quad (8)$$

тогда интеграл будет единственным. Теперь можно ввести пространство $\widetilde{L}_2(\Omega)$ (см. § 12) и в нем рассмотреть линеал $\widetilde{M}_0$, образованный теми из элементов M_0, которые удовлетворяют равенству (7). Оператор Lu будет положительным на линеале $\widetilde{M}_0$ — это доказывается так же, как и в § 12.

Отыскание интеграла уравнения

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P)$$

при условиях (4) и (7) эквивалентно отысканию функции из $\widetilde{M}_0$, реализующей минимум функционала

$$F(u) = (Lu,\ u) - 2(f,\ u),$$

что, в силу (4), равно

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} - 2f(p)\, u(p) \right\} d\Omega.$$

Для последнего функционала краевое условие (4) — естественное, поэтому удовлетворять ему заранее нет необходимости.

§ 14. Принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ — вектор смещений; $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ — составляющие напряжений; $\mathbf{K}(x, y, z)$ — вектор объемных сил. Далее, мы будем обозначать через ε_x относительное удлинение в направлении оси x и через γ_{xy} — сдвиг в плоскости xy; аналогично определяются ε_y, ε_z, γ_{xz}, γ_{yz}. Величины ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} будем называть, хотя это и не совсем точно, составляющими деформаций. Они связаны с вектором смещений $\mathbf{u}$ соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{1}$$

и четырьмя им аналогичными. В упругом теле составляющие напряжений и деформаций связаны уравнениями обобщенного закона Гука

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz},\\
\sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{xz} + a_{36}\gamma_{yz},\\
\tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{xz} + a_{46}\gamma_{yz},\\
\tau_{xz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{xz} + a_{56}\gamma_{yz},\\
\tau_{yz} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{yz}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величины a_{jk} не зависят от деформированного состояния тела и являются механическими характеристиками материала. Они называются *упругими константами* данного материала.

Следует, впрочем, отметить, что a_{jk} будут постоянными только для тела однородного, в общем случае тела неоднородного они будут функциями координат x, y, z.

Величины a_{jk} связаны важным соотношением

$$a_{jk} = a_{kj}, \tag{3}$$

которое вытекает из существования упругого потенциала, т. е. такой функции составляющих деформаций $W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots \gamma_{yz})$, что

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \quad \ldots \quad \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}.$$

Из формул (2) и (3) нетрудно усмотреть, что

$$2W = \varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz}. \tag{4}$$

В последующем мы будем обозначать упругий потенциал через $W(\mathbf{u})$. Заменяя составляющие напряжений по формулам (2), мы найдем, что W — квадратичная форма относительно составляющих деформации. В теории упругости доказывается, что эта форма — положительно-определенная, т. е. что $W \geqslant 0$, причем $W = 0$ тогда и только тогда, когда все составляющие деформации равны нулю [1]. Уравнения (2) справедливы для самого общего случая анизотропной среды. Если упругая среда — изотропная, уравнения (2) сильно упрощаются и сводятся к известным *уравнениям Ляме*:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}, \end{aligned}$$
$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Здесь λ и μ — так называемые упругие константы Ляме.

Известные уравнения равновесия, которые мы запишем в несколько необычной форме,

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) &= X \\ -\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right) &= Y \\ -\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) &= Z \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1] Подробное изложение перечисленных здесь вопросов см., например, А. Ляв [1] или Л. С. Лейбензон [1].

можно рассматривать, как одно векторное уравнение относительно вектора смещений $\mathbf{u}$. Для этого достаточно в левой части уравнений (5), рассматриваемых, как составляющие некоторого вектора, подставить вместо σ_x, $\tau_{xy}, \ldots \tau_{yz}$ их выражения (2) и далее заменить составляющие деформаций по формулам (1). Указанный вектор обозначим через $\mathbf{Au}$, а его составляющие — через $A_x\mathbf{u}$, $A_y\mathbf{u}$, $A_z\mathbf{u}$. Система (5) записывается теперь в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{Au} = \mathbf{K}. \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$ — два вектора упругих смещений, отвечающие объемным силам $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{K}''$. Напомним известные формулы Бетти[1]

$$\int_\Omega \mathbf{u}'\mathbf{Au}''\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathbf{u}',\ \mathbf{u}'')\,d\Omega + \int_S \mathbf{u}'\mathbf{t}''^{(\nu)}\,dS, \tag{7}$$

$$\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{Au}\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)}\,dS, \tag{8}$$

$$\int_\Omega (\mathbf{u}'(\mathbf{Au}'' - \mathbf{u}''\mathbf{Au}')\,d\Omega = \int_S (\mathbf{u}'\mathbf{t}''^{(\nu)} - \mathbf{u}''\mathbf{t}'^{(\nu)})\,dS. \tag{9}$$

Здесь мы пользуемся следующими обозначениями:

1) одним штрихом (соответственно, двумя штрихами) мы обозначаем величины, связанные с вектором $\mathbf{u}'$ (соответственно, с вектором $\mathbf{u}''$);

2) $\mathbf{t}^{(\nu)}$ — вектор напряжений, действующих на поверхность тела;

3) $W(\mathbf{u}',\ \mathbf{u}'') = \frac{1}{2}(\varepsilon'_x\sigma''_x + \varepsilon'_y\sigma''_y + \varepsilon'_z + \gamma'_{xy}\tau''_{xy} + \gamma'_{xz}\tau''_{xz} + \gamma'_{yz}\tau''_{yz})$; как известно, $W(\mathbf{u}',\ \mathbf{u}'') = W(\mathbf{u}'',\ \mathbf{u}')$.

Формула (9) показывает, что оператор $\mathbf{A}$ — самосопряженный в смысле Лагранжа.

Обратимся теперь к проблеме интегрирования уравнений теории упругости. Краевые условия, сопутствующие этим уравнениям, можно[2] сделать однородными — так мы и будем

---

[1] См., например, Е. Трефтц [2].
[2] См. § 8.

их формулировать. Наиболее простые и важные типы краевых условий в теории упругости следующие:

а) Граница S закреплена:

$$\mathbf{u}|_S = 0. \tag{10}$$

б) Граница тела свободна от действия внешних сил:

$$\mathbf{t}^{(\nu)}|_S = 0. \tag{11}$$

в) Граница тела состоит из двух частей, S_1 и S_2, из которых первая закреплена, а вторая свободна от действия внешних сил:

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}|_{S_2} = 0. \tag{12}$$

Задачу в) часто называют смешанной задачей теории упругости.

Мы докажем, что все перечисленные задачи равносильны задаче о минимуме интеграла

$$\int_\Omega \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\mathbf{K}\}\, d\Omega \tag{13}$$

при тех или иных условиях. Это предложение представляет собой известный принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости, так как интеграл (13) равен потенциальной энергии упругого тела, подверженного действию объемной силы $\mathbf{K}$.

Для доказательства введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$, элементы которого суть векторные функции $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ такие, что

$$\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 dx = \int_\Omega \{|u_x|^2 + |u_y|^2 + |u_z|^2\}\, d\Omega < \infty;$$

скалярное произведение в этом пространстве задается равенством

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\, d\Omega = \int_\Omega (u_x\overline{v}_x + u_y\overline{v}_y + u_z\overline{v}_z)\, d\Omega,$$

где $\mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}$ означает обычное скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\overline{\mathbf{v}}$. В этом пространстве выделим линеал M, элементы которого суть векторы $\mathbf{u}$, непрерывные и непрерывно-дифференцируемые в $\bar{\Omega}$, удовлетворяющие неравенству

$$\int_{\Omega} |\mathbf{A}\mathbf{u}|^2 \, d\Omega < \infty$$

и одному из краевых условий (10) или (12). Пусть вектор $\mathbf{u}$ — вещественный.

Составим выражение

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \ \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u} \, d\Omega.$$

Применим к этому интегралу формулу (8) и заметим, что при любом из условий (10) или (12) подинтегральная функция в поверхностном интеграле исчезает. Таким образом,

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \ \mathbf{u}) = 2 \int_{\Omega} W(\mathbf{u}) \, d\Omega \geqslant 0. \tag{14}$$

Далее, если $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \ \mathbf{u}) = 0$, то $W(\mathbf{u}) \equiv 0$, и так как W есть положительно-определенная квадратичная форма относительно составляющих деформаций, то эти последние тождественно равны нулю. Но тогда $\mathbf{u}$ есть вектор малого жесткого смещения тела; если закреплена граница тела (условие (10)), или часть границы (условие (12)), то жесткое смещение невозможно, и $\mathbf{u} \equiv 0$. Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ — положительный на каждом из множеств, определяемых условиями (10) или (12). По теореме § 9, отыскание интеграла уравнения (6) (или, что то же, системы уравнений теории упругости) среди векторов линеала M при одном из условий (10) или (12) равносильно отысканию в том же линеале вектора, дающего минимум функционалу

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \ \mathbf{u}) - 2(\mathbf{K}, \ \mathbf{u}) = 2 \int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{K}\mathbf{u}\} \, d\Omega.$$

Таким образом, принцип минимума потенциальной энергии доказан применительно к задачам а) и в).

Остановимся на задаче б), роль которой в теории упругости такая же, как и роль задачи Неймана в теории гармонических функций. На линеале M_0, который строится так же, как упомянутые выше линеалы M, но с заменой условия (10) или (12) краевым условием (11), оператор **A** не будет положительным. Действительно, формула (14) остается в силе и на этот раз, так что $(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) \geqslant 0$. Однако, $(\mathbf{Au}, \mathbf{u})$ может равняться нулю не только при $\mathbf{u} \equiv 0$ — достаточно взять за $\mathbf{u}$ произвольный вектор малого жесткого смещения. Как и в задаче Неймана, мы сделаем **A** положительным, рассматривая его на более узком линеале, включенном в более узкое пространство.

Задача б) не всегда имеет решение, и нетрудно найти необходимые условия ее разрешимости. Они состоят в том, что совокупность сил, приложенных к упругому телу, должна быть статически эквивалентна нулю. Так как поверхностные силы отсутствуют (условие (11)), то должны быть статически эквивалентны нулю объемные силы:

$$\int_\Omega \mathbf{K}\, d\Omega = 0; \quad \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{K}\, d\Omega = 0. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор переменной точки области Ω, а косой крестик означает векторное умножение векторов. Далее, по условию (11) вектор смещений определяется не единственным образом — два вектора упругих смещений, отвечающие одним и тем же объемным силам и одному и тому же условию (11), могут различаться на произвольный вектор малого жесткого смещения. Этот произвольный вектор можно зафиксировать, например подчинив искомое решение тем же равенствам (15)

$$\int_\Omega \mathbf{u}\, d\Omega = 0; \quad \int_\Omega r \times \mathbf{u}\, d\Omega = 0. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что вектор малых жестких смещений, удовлетворяющий уравнениям (15), равен нулю. Действительно, составляющие $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ вектора малых жестких смещений имеют вид

$$u_x^{(0)} = a + \alpha y - \beta z,$$
$$u_y^{(0)} = b - \alpha x + \gamma z,$$
$$u_z^{(0)} = c + \beta x - \gamma y,$$

где a, b, c, α, β, γ — постоянные. Как известно, если вектор удовлетворяет уравнениям (15) в некоторой системе координат, то он удовлетворяет им и в любой другой системе. Мы примем поэтому за оси координат главные центральные оси инерции. При таком выборе статические моменты равны нулю, и первое уравнение (15) дает сразу $a=b=c=0$

Далее, проектируя второе уравнение (15) на ось x, получим

$$0=\int\limits_{\Omega}(yu_z^{(0)}-zu_y^{(0)})\,d\Omega=\beta I_{xy}-\gamma I_{yy}+\alpha I_{xz}-\gamma I_{zz}.$$

Произведения инерции I_{xy}, I_{xz} равны нулю, и из последнего равенства вытекает, что $\gamma=0$. Точно так же доказывается, что $\alpha=\beta=0$.

Введем теперь гильбертово пространство $\widetilde{\mathbf{L}}_2(\Omega)$, образованное теми векторами из пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнениям (15), и выделим в нем линеал $\widetilde{M}_0$, элементы которого суть векторы упругих смещений, непрерывные и непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющие краевому условию (11) и уравнениям (15). Нетрудно видеть, что на линеале $\widetilde{M}_0$ оператор $\mathbf{A}$ — положительный. Достаточно доказать, что на этот раз из равенства $(\mathbf{Au}, \mathbf{u}=0)$ следует, что $\mathbf{u}=0$. Но, как было уже указано выше, из этого равенства следует, что $\mathbf{u}$ есть вектор малого жесткого смещения и, так как этот вектор удовлетворяет уравнениям (15), то он равен нулю.

Таким образом, принцип минимума потенциальной энергии остается в силе и для задачи б), если считать, что как решение дифференциальных уравнений теории упругости, так и вектор, реализующий минимум функционала (13), удовлетворяют уравнениям (15).

Из формулы (7) следует, что краевое условие (11) — естественное, и ему можно заранее не удовлетворять при отыскании минимума.

Рассуждая, как в конце § 12, можно легко найти форму минимального интеграла и в случае неоднородных краевых условий.

В общем случае смешанной задачи этот интеграл имеет вид

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega - \int_{S_2} \mathbf{ut}^{(\nu)} dS. \tag{16}$$

Здесь $\mathbf{t}^{(\nu)}$ — заданный на части S_2 поверхности S вектор напряжений. В частности, если на всей поверхности заданы смещения, то минимальный интеграл принимает вид

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega,$$

если же на всей поверхности задан вектор напряжений, то интеграл (16) переходит в следующий:

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega - \int_{S} \mathbf{ut}^{(\nu)}\, dS.$$

Краевым условиям следует удовлетворять заранее только на той части поверхности, на которой заданы смещения.

§ 15. Минимальный интеграл в задаче об изгибе пластинки и в плоской задаче теории упругости

Уравнение изгиба упругой пластинки силами, нормальными к ее поверхности, имеет вид [1]

$$\Delta^2 w = f(x, y) = \frac{6(1-\sigma)}{\mu h^3} q(x, y). \tag{1}$$

Здесь w — прогиб пластинки в направлении, нормальном к плоскости ее оснований, μ и σ — модуль сдвига и постоянная Пуассона материала пластинки, h — ее толщина, $q(x, y)$ — интенсивность нормальной нагрузки в точке с координатами (x, y). Как обычно, будем обозначать буквой Ω область, занятую пластинкой, и буквой S — ее контур. Мы ограничимся случаем, когда край пластинки жестко закреплен; соответствующие краевые условия будут (ν — внешняя нормаль к S):

$$w\Big|_S = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_S = 0 \tag{2}$$

[1] См., например, Е. Трефтц [2].

Введем обычное пространство $L_2(\Omega)$ и в нем выделим линеал M функций, четырежды непрерывно-дифференцируемых в $\bar{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющих краевому условию (2). Докажем, что бигармонический оператор Δ^2 — положительный на этом линеале. Действительно,[1]

$$(\Delta^2 w, w) = \int_\Omega w \Delta^2 w \, d\Omega.$$

По формуле Грина

$$\int_\Omega w \Delta^2 w \, d\Omega = \int_S \left(w \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} - \Delta w \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS + \int_\Omega (\Delta w)^2 \, d\Omega.$$

Если $w \in M$, то имеют место условия (2), контурный интеграл пропадает, и

$$(\Delta^2 w, w) = \int_\Omega (\Delta w)^2 \, d\Omega \geqslant 0. \tag{3}$$

Далее, пусть $(\Delta^2 w, w) = 0$, и $w \in M$. Тогда из (3) следует, что $\Delta w = 0$, т. е. w — функция гармоническая; будучи равной нулю на границе (условие (2)), она равна нулю тождественно.

По теореме § 9, задача о равновесии закрепленной по краю пластинки под действием нормальной нагрузки сводится к задаче о минимуме функционала

$$F(w) = \int_\Omega \{ (\Delta w)^2 - 2fw \} \, d\Omega. \tag{4}$$

Функционалу $F(w)$ можно придать форму, более удобную для дальнейшего исследования.

Рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right\} d\Omega.$$

---

[1] $w(x, y)$ считаем вещественной; см. конец § 9.

Проинтегрируем дважды по частям.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} w \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\, d\Omega + \int\limits_{S} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\, dy - \int\limits_{S} w \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy,$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} w \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \int\limits_{S} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\, dx - \int\limits_{S} w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} dy.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} d\Omega = \int\limits_{S} \frac{\partial w}{\partial x}\, d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Пусть теперь w удовлетворяет условиям (2). Тогда, как нетрудно видеть,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_S = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_S = 0.$$

Действительно, имеем (s — длина дуги контура S)

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(\nu y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos(s,\ x) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(s,\ y) =$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial x} \cos(\nu y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(s,\ x).$$

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \nu} \cos(\nu x) - \frac{\partial w}{\partial s} \cos(\nu y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial s} \cos(\nu x) + \frac{\partial w}{\partial \nu} \cos(\nu y), \tag{6}$$

и если $\left. w\right|_S = 0$, $\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0$, то и $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_S = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_S = 0$. В этом случае контурный интеграл в (5) исчезает, и мы получаем

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} d\Omega = 0. \tag{7}$$

Умножая (7) на $2a$, где a — произвольное число, и вычитая из (4), получим

$$F(w)=\int\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-a)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+2a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2fw\right\}d\Omega. \quad (8)$$

Полагая здесь $a=\sigma$, где σ — постоянная Пуассона, мы найдем, что $F(w)$ есть потенциальная энергия нагруженной пластинки. Таким образом, мы пришли к принципу минимума потенциальной энергии для изгиба пластинки.

Если мы найдем минимум потенциальной энергии, т. е. минимум интеграла (8) при $a=\sigma$, без того чтобы подчинять искомую функцию каким-либо краевым условиям, то мы получим решение задачи о прогибе пластинки со свободным краем.[1] Таким образом, условие, что край пластинки свободен, оказывается в этой задаче естественным.

Положим в (8) $a=1$. Это дает

$$F(w)=\int\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2fw\right\}d\Omega. \quad (9)$$

Функция, реализующая минимум интеграла (9) на линеале M, дает решение задачи об изгибе закрепленной пластинки. Заметим, что для численного решения задачи о минимуме несколько проще брать $F(w)$ в форме (4).

К аналогичной вариационной задаче сводится и плоская задача теории упругости при заданных внешних силах в случае, когда область Ω, заполненная упругой средой, — конечная и односвязная. В этом случае, как известно, дело можно свести к интегрированию бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u=0 \quad (10)$$

при краевых условиях

$$u\Big|_S=f_1(s),\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S=f_2(s), \quad (11)$$

[1] См., например, С. П. Тимошенко [2], § 23.

где $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — известные функции. Если $\psi(x, y)$ — произвольная четырежды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (11), то, полагая $u-\psi=w$, мы найдем, что w удовлетворяет краевым условиям (2) и уравнению (1), в котором $f(x, y)=-\Delta^2\psi$. Функцию w можно найти, решая задачу о минимуме функционала (9), если в нем положить $f(x, y)=-\Delta^2\psi$. Положим в (9) $w=u-\psi$. Тогда, как легко видеть,

$$F(w)=\Phi(u)+\Phi(\psi)-2\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)d\Omega+2\int_\Omega u\Delta^2\psi\,d\Omega-2\int_\Omega\psi\Delta\psi\,d\Omega, \qquad (12)$$

где для краткости положено

$$\Phi(u)=\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right\}d\Omega. \qquad (13)$$

Заметим, что в правой части равенства (12) второй и пятый члены суть постоянные. Интеграл в третьем члене возьмем дважды по частям. Из формул (6) и (11) следует, что $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_S$ и $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_S$ известны, поэтому контурные интегралы, возникающие при интегрировании по частям, суть известные постоянные. Учтя это, мы получим

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)d\Omega=\int_\Omega u\Delta^2\psi\,d\Omega+\text{const}.$$

Подставив это в (12), мы найдем, что

$$F(w)=\Phi(u)+\text{const}.$$

Таким образом, плоская задача теории упругости при упомянутых выше условиях сводится к задаче о минимуме функционала $\Phi(u)$ на множестве функций $u(x, y)$, которые вместе со своими нормальными производными принимают заданные значения (11). При отыскании минимума можно $\Phi(u)$

заменить более простым функционалом

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega (\Delta u)^2 \, d\Omega. \tag{14}$$

Действительно, по формуле (5)

$$\Phi_0(u) - \Phi(u) = 2\int_S \frac{\partial u}{\partial x} \, d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

что, в силу краевых условий (10), есть известная постоянная.

§ 16. Спектр оператора. Собственные числа

В математической физике играет важную роль понятие *собственных чисел* оператора, связанное, в свою очередь, с более общим понятием *спектра* оператора. Пусть λ — некоторое, вообще говоря, комплексное число. Рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda u = f, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, определенный на некотором линеале, входящем в данное гильбертово пространство H, а f — данный элемент этого пространства. Мы решим уравнение (1), если найдем оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ (E — тождественный оператор). В зависимости от свойств этого оператора мы следующим образом классифицируем значения λ. Если оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует, определен на плотном множестве и ограничен,[1] то λ называется *регулярной точкой*, а оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ — *резольвентой* оператора A; в противном случае λ называется *точкой спектра* оператора A.

Особо важную роль играют в последующем те точки спектра, в которых $(A - \lambda E)^{-1}$ не существует; они называются *собственными значениями* оператора A, а их совокупность — его *собственным спектром*. Из теоремы 4 § 6 следует, что если λ есть собственное значение, то уравнение

$$A\varphi - \lambda\varphi = 0$$

[1] В этом случае он может быть расширен на все пространство.

имеет нетривиальные решения. Эти решения называются *собственными функциями* или *собственными элементами* оператора A. Число линейно-независимых собственных функций, отвечающих данному собственному числу, называется его *рангом*. Ранг собственного числа может быть и бесконечным.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть M и m суть верхняя и нижняя грани значений скалярного произведения* $(A\varphi, \varphi)$, *при условии* $\|\varphi\| = 1$, *где A — самосопряженный оператор. Спектр оператора A целиком располагается на отрезке* $[m, M]$ *вещественной оси;*[1] *точки m и M необходимо принадлежат спектру.*

Мы не приводим доказательства этой теоремы, так как это выходит далеко за рамки нашей книги. Доказательство это можно найти в цитированных выше работах В. И. Смирнова [1] и А. И. Плеснера [1].

Сделаем несколько замечаний о собственных элементах симметричного оператора. Прежде всего, *собственные числа симметричного оператора — вещественные.* Пусть

$$A\varphi_0 - \lambda\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 \neq 0.$$

Умножив скалярно обе части равенства на φ_0, мы найдем $(A\varphi_0, \varphi_0) - \lambda\|\varphi_0\|^2 = 0$, откуда

$$\lambda_0 = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}. \tag{2}$$

Числитель есть величина вещественная (см. теорему 2 § 7), а знаменатель положителен; отсюда и следует, что величина λ — вещественная. Далее, *собственные элементы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.* Действительно, пусть

$$A\varphi_1 - \lambda_1\varphi_1 = 0, \; A\varphi_2 - \lambda_2\varphi_2 = 0, \; \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Умножим скалярно первое равенство на φ_2 справа, второе — на φ_1 слева и вычтем. Имея в виду, что λ_2 — вещественное, мы получим

$$(A\varphi_1, \varphi_2) - (\varphi_1, A\varphi_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

---

[1] Но не обязательно совпадает с ним.

Но $(A\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, A\varphi_2)$, так как оператор A — симметричный, и так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Если собственные элементы принадлежат одному и тому же характеристическому числу, то их можно сделать ортогональными, пользуясь процессом ортогонализации (§ 5). Таким образом, *всегда можно считать, что множество собственных элементов симметричного оператора образует ортонормированную систему.*

Выше (§ 4) мы приняли допущение, что рассматриваемые нами гильбертовы пространства имеют счетную полную ортонормированную систему. Отсюда следует, что симметричный оператор имеет не более счетного множества собственных значений и ранг каждого из них не более, чем счетный, — в противном случае существовала бы несчетная ортонормированная система.

§ 17. Минимальный интеграл в проблеме собственных значений

И в прикладных, и в теоретических вопросах часто приходится исследовать уравнение вида

$$A\varphi - \lambda\varphi = 0, \tag{1}$$

где λ — численный параметр и A — некоторый линейный оператор; его область определения мы, как всегда, считаем плотной в данном гильбертовом пространстве. Уравнение (1) всегда имеет очевидное решение $\varphi = 0$, называемое *тривиальным*. Обычно задача ставится так: *найти те значения* λ, *при которых уравнение* (1) *имеет нетривиальные решения.* Как было указано в § 16, такие значения λ называются собственными значениями оператора A, [1] а соответствующие нетривиальные решения — его собственными элементами. Собственное число λ_0 выражается через соответствующий ему собственный элемент φ_0 по формуле

$$\lambda_0 = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2} \tag{2}$$

---

[1] А также уравнения $A\varphi - \lambda\varphi = 0$.

(формула (2) § 16). Если оператор — симметричный, то, как было показано в § 16, его собственные числа вещественные.

Проблема собственных значений при известных условиях может быть сведена к некоторой вариационной задаче. Пусть симметричный оператор $A\varphi$ удовлетворяет неравенству

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant k \|\varphi\|^2, \tag{3}$$

где k — некоторое вещественное число, необязательно положительное; такой оператор называется *ограниченным снизу*. В частности, ограничен снизу всякий положительный оператор, так как он удовлетворяет неравенству (3) при $k = 0$.

Если A — ограниченный снизу оператор, то

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geqslant k.$$

Величина $\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$, будучи ограниченной снизу, имеет нижнюю грань d. Очевидно, $d \geqslant k$.

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный снизу симметричный оператор, и пусть d означает нижнюю грань значений функционала*

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}. \tag{4}$$

Если существует элемент $\varphi_0 \neq 0$, такой, что

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d, \tag{5}$$

то d есть наименьшее собственное значение оператора A, а φ_0 — соответствующий ему собственный элемент.

Пусть η — произвольный элемент из области D_A определения оператора A, и t — произвольное вещественное число. Тогда, очевидно, $\varphi_0 + t\eta \in D_A$. Функция вещественной переменной t

$$\psi(t) = \frac{(A(\varphi_0 + t\eta), \varphi_0 + t\eta)}{(\varphi_0 + t\eta, \varphi_0 + t\eta)} = \frac{t^2 (A\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(A\varphi_0, \eta) + (A\varphi_0, \varphi_0)}{t^2 (\eta, \eta) + 2 \operatorname{Re}(\varphi_0, \eta) + (\varphi_0, \varphi_0)}$$

достигает минимума при $t=0$. Но тогда $\psi'(0)=0$. Вычисляя $\psi'(0)$, мы легко придем к уравнению

$$(\varphi_0, \varphi_0)\,\mathrm{Re}\,(A\varphi_0, \eta) - (A\varphi_0, \varphi_0)\,\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \eta) = 0,$$

или, если воспользоваться равенством (5),

$$\mathrm{Re}\,(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0. \tag{6}$$

Заменим в (6) η через $i\eta$. Это даст нам

$$\mathrm{Im}\,(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0.$$

Сравнив это с (6), мы убеждаемся, что $(A\varphi - d\varphi_0, \eta) = 0$. Но это значит, что $A\varphi_0 - d\varphi_0$ ортогонально ко всем элементам плотного множества D_A. По лемме § 5, $A\varphi_0 - d\varphi_0 = 0$. Теперь последнее равенство показывает, что d и φ_0 — собственное число и собственный элемент оператора A.

Что d — наименьшее собственное число, вытекает из формулы (2). Действительно, если λ_1 и φ_1 — какое-либо собственное число и ему соответствующий собственный элемент оператора A, то

$$\lambda_1 = \frac{(A\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \geqslant \min \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = d.$$

Доказанная здесь теорема 1 сводит задачу о нахождении наименьшего собственного числа симметричного ограниченного снизу оператора к следующей вариационной задаче: *найти элемент гильбертова пространства, реализующий минимум функционала*

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

Дадим этой задаче еще одну формулировку, которая часто оказывается более удобной. Положим $\psi = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. Тогда

$$\|\psi\| = 1,$$

и

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = (A\psi, \psi).$$

Заменяя опять букву ψ на φ, мы можем нашу вариационную задачу сформулировать так:

найти минимум функционала

$$(A\varphi, \varphi) \tag{7}$$

при дополнительном условии

$$(\varphi, \varphi) = 1. \tag{8}$$

Укажем теперь способ определения следующих собственных чисел.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ суть n первых собственных чисел симметричного ограниченного снизу оператора A и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ — соответствующие им ортонормированные собственные элементы. Пусть существует элемент $\varphi = \varphi_{n+1} \neq 0$, реализующий минимум функционала*

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{4}$$

при дополнительных условиях

$$(\varphi, \varphi_1) = 0, \quad (\varphi, \varphi_2) = 0, \ \ldots \ (\varphi, \varphi_n) = 0. \tag{9}$$

Тогда φ_{n+1} есть собственный элемент оператора A, соответствующий собственному числу

$$\lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}. \tag{10}$$

Это собственное число — ближайшее, следующее за λ_n.

Пусть ζ — произвольный элемент из области D_A определения оператора A. Положим

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, \varphi_k)\, \varphi_k.$$

Тогда η удовлетворяет условиям (9). Действительно,

$$(\eta, \varphi_m) = (\zeta, \varphi_m) - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots n. \tag{11}$$

По доказанному в § 16, φ_k ортогональны, как собственные элементы симметричного оператора. Далее, по условию теоремы φ_k нормированы. Поэтому

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(\eta, \varphi_m) = (\zeta, \varphi_m) - (\zeta, \varphi_m) = 0.$$

Вместе с η условиям (9) удовлетворяет и произведение $t\eta$, где t — любое число, а также и сумма $\varphi_{n+1} + t\eta$. Будем считать t вещественным. Функция от t

$$\frac{(A(\varphi_{n+1} + t\eta), \varphi_{n+1} + t\eta)}{(\varphi_{n+1} + t\eta, \varphi_{n+1} + t\eta)}$$

достигает минимума при $t = 0$. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, мы найдем, что

$$(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \eta) = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим величину

$$(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \zeta).$$

По формулам (11) и (12)

$$(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \zeta) = (A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \eta) - \\ - \sum_{k=1}^{n} \overline{(\varphi_k, \zeta)} (A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \varphi_k) = \\ = - \sum_{k=1}^{n} \overline{(\varphi_k, \zeta)} (A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \varphi_k).$$

Далее,

$$(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \varphi_k) = (A\varphi_{n+1}, \varphi_k) - \lambda_{n+1}(\varphi_{n+1}, \varphi_k).$$

Нетрудно видеть, что это выражение равно нулю. Действительно, второй член справа исчезает в силу условий (9). Первый же равен

$$(A\varphi_{n+1}, \varphi_k) = (\varphi_{n+1}, A\varphi_k).$$

Но φ_k, как собственный элемент оператора A, удовлетворяет уравнению $A\varphi_k - \lambda_k\varphi_k = 0$. Таким образом $A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, и

$$(A\varphi_{n+1}, \varphi_k) = \lambda_k(\varphi_{n+1}, \varphi_k) = 0.$$

Отсюда следует, что $(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \zeta) = 0$. По лемме § 4, $A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1} = 0$, т. е. λ_{n+1} есть собственное число оператора, а φ_{n+1} — соответствующий собственный элемент. Остается доказать, что λ_{n+1} — наименьшее собственное число, следующее за λ_n. Пусть λ' — собственное число оператора A, большее, чем λ_n, и φ' — соответствующий собственный элемент. Тогда по доказанному в § 16, φ' удовлетворяет условиям (9). Далее, по формуле (2)

$$\lambda' = \frac{(A\varphi', \varphi')}{(\varphi', \varphi')} \geqslant \lambda_{n+1},$$

так как λ_{n+1} есть минимум функционала (4) при условиях (9).

Как и в случае наименьшего собственного числа, нахождение λ_{n+1} может быть сведено к такой вариационной задаче:

найти минимум функционала

$$(A\varphi, \varphi) \tag{7}$$

при дополнительных условиях

$$(\varphi, \varphi) = 1 \tag{8}$$

и

$$(\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_2) = \ldots = (\varphi, \varphi_n) = 0. \tag{9}$$

Следующая теорема является в некотором смысле обратной для теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть спектр ограниченного снизу самосопряженного оператора A содержит только собственные числа. Тогда существует наименьшее собственное число оператора A; соответствующий собственный элемент реализует минимум функционала* (4).

Наименьшее собственное значение существует, так как по теореме 1 § 16 все точки спектра самосопряженного оператора, ограниченного снизу, расположены на луче $\lambda \geqslant k$, где k определяется неравенством (3). Пусть λ_1 означает наибольшее значение величины k, при которой неравенство (3) остается в силе. Тогда, очевидно,

$$\lambda_1 = \inf \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}, \tag{13}$$

где символ inf означает нижнюю грань написанного рядом выражения. По той же теореме 1 § 16, λ_1 — точка спектра оператора A; по условию нашей теоремы, λ_1 — собственное значение. Пусть φ_1 — соответствующий собственный элемент; тогда

$$\lambda_1 = \frac{(A\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}.$$

Последнее равенство показывает, что при $\varphi = \varphi_1$ функционал (4) достигает своего минимума.

Следствие. *Если спектр самосопряженного оператора A содержит только собственные числа и наименьшее из них положительно, то оператор — положительно-определенный.*

Пусть $\lambda_1 > 0$ — наименьшее собственное число оператора A. Из формулы (13) следует, что

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geqslant \lambda_1$$

или $(A\varphi, \varphi) \geqslant \gamma^2 (\varphi, \varphi)$, где $\gamma = \sqrt{\lambda_1} > 0$, т. е. оператор A — положительно-определенный.

В приложениях часто приходится решать проблему собственных значений для уравнения

$$A\varphi - \lambda B\varphi = 0, \tag{14}$$

где A и B — симметричные операторы, причем A — ограниченный снизу, а B — положительно-определенный, и D_A содержится в D_B. Уравнение (1) получается из (14) как частный случай, когда B — тождественный оператор. Если λ_0 и φ_0 удовлетворяют уравнению (14), то мы будем называть λ_0 — собственным числом этого уравнения, а φ_0 — его собственным элементом. Из (14) ясно, что собственное число $\lambda_0 = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(B\varphi_0, \varphi_0)}$ — вещественное.

Для уравнения (14) справедливы следующие теоремы:

Теорема 4. *Собственные элементы φ_k и φ_m уравнения* (14), *соответствующие различным собственным числам, удовлетворяют следующему обобщенному условию ортогональности*

$$(B\varphi_k, \varphi_m) = 0, \quad k \neq m. \tag{15}$$

Здесь мы не предполагаем, что A ограничен снизу.

Теорема 5. *Пусть d есть нижняя грань функционала*

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}. \tag{16}$$

Если существует элемент φ_0, такой, что

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(B\varphi_0, \varphi_0)} = d,$$

то d *есть наименьшее собственное число уравнения* (14), *а* φ_0 — *соответствующий собственный элемент.*

Теорема 6. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *суть следующие в порядке возрастания* n *первых собственных чисел уравнения* (14) *и* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ — *соответствующие им собственные элементы. Пусть существует элемент* φ_{n+1}, *реализующий минимум функционала* (16) *при дополнительных условиях*

$$(B\varphi, \varphi_1) = (B\varphi, \varphi_2) = \ldots = (B\varphi, \varphi_n) = 0. \tag{17}$$

Тогда φ_{n+1} *есть собственный элемент уравнения* (14), *соответствующий собственному числу*

$$\lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(B\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}. \tag{18}$$

Это собственное число — ближайшее, следующее за φ_n.

Мы не приводим доказательств этих теорем — они почти не отличаются от доказательств аналогичных теорем для уравнения (1).

Теорема 5 сводит нахождение наименьшего собственного числа уравнения (14) к следующей вариационной задаче:

найти минимум функционала $(A\varphi, \varphi)$ *при дополнительном условии*

$$(B\varphi, \varphi) = 1. \tag{19}$$

Точно так же отыскание $n+1$-го собственного числа сводится к такой задаче:

найти минимум функционала $(A\varphi, \varphi)$ *при дополнительных условиях* (17) *и* (19).

§ 18. Приложения к основным задачам математической физики

В этом параграфе мы приведем некоторые из функционалов, минимум которых определяет собственные значения важнейших дифференциальных уравнений математической физики; другие примеры будут изучены в соответствующих местах глав III и IV. В конце параграфа мы рассмотрим вопрос о естественных краевых условиях. Мы формулируем только задачу о наименьшем собственном числе; читатель сам легко сформулирует аналогичную задачу для последующих собственных чисел.

а) Обыкновенный дифференциальный оператор. Рассмотрим уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u-\lambda r(x)u=0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(a)=u(b)=0. \tag{2}$$

Относительно коэффициентов уравнения примем, что они непрерывны, а $p(x)$ еще и непрерывно-дифференцируемо;[1] далее, мы примем, что $p(x)$ и $r(x)$ положительны, так что

$$p(x)\geqslant p_0>0,\ r(x)\geqslant r_0>0.$$

О знаке $q(x)$ мы никаких предположений не делаем. Положим теперь

$$Au=-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u;\ Bu=r(x)u;$$

оба оператора рассматриваем в пространстве $L_2(a, b)$ на множестве функций, удовлетворяющих равенствам (2) и дважды непрерывно-дифференцируемых при $a\leqslant x\leqslant b$. Нижеследующие элементарные преобразования

$$(Au, u)=-\int_a^b u\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)dx+\int_a^b qu^2\,dx=$$

$$=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b qu^2\,dx\geqslant -q_0\int_a^b u^2\,dx;$$

$$q_0=\max|q(x)|;$$

$$(Bu, u)=\int_a^b ru^2\,dx\geqslant r_0\int_a^b u^2\,dx$$

[1] Эти требования могут быть ослаблены.

показывают, что A — ограниченный снизу, а B — положительно-определенный оператор. В соответствии с теоремой 5 § 17, отыскание наименьшего собственного числа уравнения (1) при краевых условиях (2) можно заменить отысканием функции, удовлетворяющей тем же условиям (2) и реализующей минимум функционала

$$(Au, u) = \int_a^b \{pu'^2 + qu^2\}\, dx$$

при дополнительном условии

$$(Bu, u) = \int_a^b ru^2 dx = 1.$$

б) Собственные числа оператора Лапласа. Мы будем рассматривать уравнение

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \tag{3}$$

при краевых условиях одного из двух видов: либо

$$u|_S = 0 \tag{4}$$

либо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0, \tag{5}$$

где ν — как обычно, внешняя нормаль к S. В § 12 было показано, что $(-\Delta u, u) \geqslant 0$ на каждом из линеалов, элементы которых удовлетворяют либо условию (4), либо условию (5). Поэтому наименьшее собственное число можно найти из решения вариационной задачи о минимуме функционала

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\Delta u d\Omega = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega, \tag{6}$$

где u, кроме одного из условий (4) или (5), удовлетворяет еще дополнительному условию

$$(u, u) = \int_\Omega u^2\, d\Omega = 1. \tag{7}$$

в) Наименьшая собственная частота колебаний закрепленной по краю пластинки пропорциональна квадратному корню из наименьшего собственного числа уравнения

$$\Delta^2 u - \lambda u = 0, \tag{8}$$

где u удовлетворяет краевым условиям

$$u|_S = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0. \tag{9}$$

Оно определяется из задачи о минимуме функционала

$$(\Delta^2 u, u) = \int\limits_\Omega u\Delta^2 u\, d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega \tag{10}$$

при тех же условиях (9) и дополнительном условии (7).

г) Точно так же наименьшая собственная частота колебаний упругого тела при одном из условий (10)—(12) § 14 пропорциональна корню квадратному из наименьшего собственного числа уравнения [1]

$$A\mathbf{u} - \varkappa\mathbf{u} = (-\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \varkappa\mathbf{u} = 0 \tag{11}$$

при соответствующем краевом условии. Оно может быть получено из задачи о минимуме функционала [2].

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}A\mathbf{u}\,d\Omega = 2\int\limits_\Omega W(\mathbf{u})\,d\Omega \tag{12}$$

при соответствующем краевом условии и дополнительном условии

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}^2 d\Omega = \int\limits_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\Omega = 1. \tag{13}$$

Обратимся теперь к вопросу о естественных краевых условиях. Для простоты ограничимся случаем, когда диффе-

---

[1] Параметр в (11) обозначен через $\varkappa$, чтобы избежать смешения с постоянной Ляме λ.

[2] W — плотность потенциальной энергии; см. § 14.

ренциальное уравнение (оно может быть скалярным или векторным) — второго порядка. Пусть это уравнение имеет вид

$$Lu - \lambda u = 0. \tag{14}$$

Мы допустим, что оператор Lu — самосопряженный в смысле Лагранжа. Далее, пусть интегрирование по частям приводит к формуле

$$\int_{\Omega} vLu\,d\Omega = \Lambda(u, v) + \int_{S} vRu\,dS \tag{15}$$

и пусть собственные числа уравнения (14) ищутся при естественном краевом условии

$$Ru\,|_S = 0. \tag{16}$$

Допустим еще, что функционал $\Lambda(u, u)$ ограничен снизу.[1] По теореме 1 § 17, задача о нахождении наименьшего собственного числа равносильна задаче о минимуме функционала $\Lambda(u, u)$ при условиях $Ru\,|_S = 0$ и $(u, u) = 1$. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Пусть функция u_0, дважды непрерывно-дифференцируемая в $\bar{\Omega} = \Omega + S$, реализует минимум функционала $\frac{\Lambda(u, u)}{(u, u)}$. Тогда u_0 удовлетворяет уравнению* (14) *при*

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{\Lambda(u_0, u_0)}{(u_0, u_0)} \tag{17}$$

и естественному краевому условию (16).

Пусть η дважды непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда

$$\frac{\Lambda(u_0 + t\eta, u_0 + t\eta)}{(u_0 + t\eta, u_0 + t\eta)} \geqslant \frac{\Lambda(u_0, u_0)}{(u_0, u_0)},$$

где t — произвольное вещественное число. Повторяя рассуждения предшествующего параграфа, мы придем к уравнению

$$\Lambda(u_0, \eta)\ (u_0, u_0) - \Lambda(u_0, u_0)\ (u_0, \eta) = 0,$$

[1] Т. е., что $\Lambda(u, u) \geqslant k(u, u)$, $k = \text{const}$.

или, если воспользоваться равенством (17),

$$\Delta(u_0, \eta) - \lambda_0 (u_0, \eta) = 0.$$

По формуле (15)

$$\Delta(u_0, \eta) = \int_\Omega \eta L u_0 d\Omega - \int_S \eta R u_0 dS,$$

и последнее равенство принимает вид

$$\int_\Omega \eta (L u_0 - \lambda u_0) d\Omega - \int_S \eta R u_0 dS = 0. \tag{18}$$

Выбрав η равной нулю на границе S, мы далее обычным способом найдем, что $Lu_0 - \lambda u_0 = 0$. Равенство (18) сводится к более простому

$$\int_S \eta R u_0 dS = 0,$$

из которого, так же как и в § 10, следует, что $Ru_0 = 0$.

Аналогичная теорема верна и для последующих собственных чисел.

Доказанная нами теорема позволяет не заботиться заранее о соблюдении естественных краевых условий. В частности, в задаче о собственных числах оператора Лапласа можно не заботиться о выполнении условия (5), а в задаче о собственных колебаниях упругого тела — о выполнении условия (11) § 14.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПРОБЛЕМ

В главе II мы установили, что задача о решении уравнения

$$Au = f, \tag{1}$$

где A — положительный оператор, эквивалентна задаче об отыскании минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u). \tag{2}$$

Точный смысл этого утверждения таков: пусть оператор A определен на линеале M, плотном в данном гильбертовом пространстве H, и положителен на этом линеале; формула (2) показывает, что на том же линеале M определен и функционал $F(u)$. Пусть теперь существует элемент $u_0 \in M$, удовлетворяющий уравнению (1); тогда $F(u) > F(u_0)$, где u — любой элемент из M. Обратно, если $u_0 \in M$, и для любого $u \in M$ справедливо неравенство $F(u) > F(u_0)$, то u_0 удовлетворяет уравнению (1).

По поводу сказанного необходимо сделать два замечания:

1. Наше утверждение предполагает существование элемента, удовлетворяющего уравнению (1) или реализующего минимум функционала (2), тогда как для нас важно доказать самое существование такого элемента и найти способы, приближенные или точные, его определения. Это уже невозможно сделать, предполагая оператор A только положительным; *в последующем мы будем предполагать его положительно-определенным.*

2. Может случиться, что оператор определен на недостаточно широком линеале. В таком случае задача о минимуме функционала (2) может не иметь решения, которое, однако,

будет существовать, если линеал M, а с ним и оператор, должным образом расширить. Ниже мы покажем, что для положительно-определенного оператора всегда возможно такое расширение линеала M, при котором задача о минимуме функционала $F(u)$ имеет решение, и укажем методы как точного, так и приближенного построения этого решения. Из последних наиболее мощным является известный метод Ритца; наряду с ним будут указаны и другие методы.

§ 19. Общее решение

Пусть оператор A определен на некотором линеале M, плотном в рассматриваемом гильбертовом пространстве H. Допустим далее, что этот оператор положительно-определенный, т. е. существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для всякого $u \in M$ справедливо неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2. \tag{1}$$

В настоящем параграфе мы поставим и решим задачу о минимуме функционала

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u), \tag{2}$$

где f — заданный элемент из H.[1]

Существенным для дальнейшего является введение некоторого нового гильбертова пространства, которое мы построим следующим образом.

На линеале M введем новое скалярное произведение (для отличия от старого мы будем его обозначать квадратными скобками), полагая по определению

$$[u, v] = (Au, v). \tag{3}$$

Докажем, что такое определение законно, т. е., что удовлетворяет аксиомам A — D § 3.

Аксиома A:

$$[a_1u_1 + a_2u_2, v] = (A(a_1u_1 + a_2u_2), v) =$$
$$= a_1(Au_1, v) + a_2(Au_2, v) = a_1[u_1, v] + a_2[u_2, v].$$

---

[1] Насколько нам известно, общее решение этой задачи впервые было получено К. Фридрихсом [1]. Наше решение (см. С. Г. Михлин [2] и [3]) отличается от решения Фридрихса как по форме, так и по способу доказательства.

Аксиома B. Оператор A, будучи положительно-определенным, симметричен; поэтому, если $u \in M$ и $v \in M$, то

$$[u, v] = (Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]},$$

Аксиомы C и D непосредственно следуют из (1): $(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2 \geqslant 0$; если $(Au, u) = 0$, то из (1) необходимо следует, что $\|u\| = 0$ и, следовательно, $u = 0$.

Введя новое скалярное произведение, мы превратили M в гильбертово пространство. Норму в этом пространстве мы будем обозначать через $|\!|\!| u |\!|\!|$, так что

$$|\!|\!| u |\!|\!|^2 = [u, u] = (Au, u), \quad u \in M. \tag{4}$$

При этом, в силу неравенства (1)

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |\!|\!| u |\!|\!|. \tag{5}$$

Наше новое гильбертово пространство может оказаться неполным — в таком случае мы обычным способом дополним его,[1] введя предельные элементы. Это дополненное гильбертово пространство мы будем обозначать через H_0.

Если u есть элемент H_0, то, как это следует из определения этого пространства, либо $u \in M$, либо существует такая последовательность $u_n \in M$, что $|\!|\!| u - u_n |\!|\!| \to 0$. Отсюда следует, что линеал M плотен в H_0.

Теорема 1. *Все элементы пространства H_0 принадлежат также и пространству H.*

Точнее говоря, каждому элементу из H_0 можно привести в соответствие один и только один элемент из H, причем различным элементам из H_0 отвечают различные элементы из H.

Наше утверждение очевидно, если $u \in M$ — достаточно элементу u привести в соответствие тот же элемент. Остается исследовать тот случай, когда u есть предельный элемент H_0. В этом случае, по определению H_0, существует последовательность элементов $u_n \in M$ такая, что $|\!|\!| u - u_n |\!|\!| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. По доказанному в § 3, $|\!|\!| u_n - u_m |\!|\!| \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0$. Из неравенства (5),

[1] См. § 4.

которое пока установлено для элементов линеала M, следует, что $\|u_n - u_m\| \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0$. Это значит, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве H[1] к некоторому его элементу u', так что $\|u' - u_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Отождествив u и u', мы установим первую часть нашего утверждения. Докажем теперь его вторую часть.

Пусть элементам $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ из H_0 отвечает один и тот же элемент из H. Тогда разности $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ отвечает нулевой элемент из H. Докажем, что u — нулевой элемент из H_0. Пусть u есть предел (в смысле сходимости в H_0) последовательности $u_n \in M$, так что $|u_n - u| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Так как элементу u в пространстве H отвечает нулевой элемент, то, по установленному выше закону соответствия, $\|u_n\| \to 0$. Отсюда следует, что $(f, u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, где f любой фиксированный элемент из H. Действительно, по неравенству Коши — Буняковского,

$$|(f, u_n)| \leqslant \|f\| \cdot \|u_n\| \to 0.$$

Возьмем в линеале M произвольный элемент φ и положим $f = A\varphi$. Тогда $(A\varphi, u_n) \to 0$. Но $(A\varphi, u_n) = [\varphi, u_n]$, так как оба элемента φ и u_n входят в M; отсюда $[\varphi, u_n] \to 0$. Переходя здесь к пределу, получим

$$[\varphi, u] = 0.$$

Таким образом, в пространстве H_0 элемент u ортогонален ко всем элементам линеала M, плотного в H_0. По лемме § 4, u есть нулевой элемент из H_0.

Заметим, что неравенство (5) выполняется не только в M, но во всем пространстве H_0. Действительно, пусть u есть элемент H_0, не входящий в M. Тогда существует последовательность $u_n \in M$, такая, что $|u_n - u| \to 0$. Как это следует из доказательства теоремы 1, при этом $\|u_n - u\| \to 0$. Отсюда вытекает, что $|u_n| \to |u|$ и $\|u_n\| \to \|u\|$. Так как

[1] Это пространство мы предполагаем полным.

$u_n \in M$, то для u_n неравенство (5) справедливо:

$$\|u_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|.$$

Теперь задачу о минимуме функционала $F(u)$ решить легко. Прежде всего, $(Au, u) = |u|^2$. Это равенство расширяет функционал (Au, u), который был первоначально определен только на M, на все пространство H_0. Мы будем теперь в $F(u)$ понимать под u любой элемент пространства H_0 и в соответствии с этим заменим (Au, u) через $|u|^2 = [u, u]$. Далее, линейный функционал (u, f) ограничен в H_0. Действительно,

$$|(u, f)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\| \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma} |u|.$$

Теорема 1 § 6 утверждает существование единственного элемента $f' \in H_0$ такого, что при любом $u \in H_0$

$$(u, f) = [u, f']. \tag{6}$$

Теперь $(f, u) = [f', u]$, и

$$F(u) = [u, u] - [u, f'] - [f', u] = [u - f', u - f'] - [f', f']$$

или, короче,

$$F(u) = |u - f'|^2 - |f'|^2. \tag{7}$$

Из формулы (7) сразу следует, что $F(u)$ *достигает минимума при* $u = f'$.

Таким образом, задача о минимуме функционала (2) решена. Упомянутая выше теорема 1 § 6 позволяет дать явное выражение элементу f' в виде ряда. Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная в H_0 последовательность. Упоминаемый в теореме 1 § 6 функционал lu совпадает в нашем случае с (u, f), а элемент ψ — с f'. По формуле (*) § 6,

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где $a_k = \overline{l\varphi_k} = \overline{(\varphi_k, f)} = (f, \varphi_k)$. Окончательно,

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k. \tag{8}$$

Формулой (8) можно пользоваться для того, чтобы фактически определять решение минимальной задачи. Как мы покажем в следующем параграфе, *сущность известного метода Ритца состоит в том, что он позволяет строить отрезок ряда* (8).

Заметим еще, что f' может не входить в M, так что уравнение $Au = f$ может не иметь решения, если оператор A определен только на M. С этим связано то, что мы выше говорили о необходимости расширения этого оператора.

Внимательнее изучим полученное нами решение минимальной задачи. Формула (6) приводит в соответствие каждому элементу f из H некоторый единственный элемент $u = f' \in H_0$, реализующий минимум функционала (2). Тем самым формула (6) определяет оператор $f' = Gf$, область определения которого совпадает с данным гильбертовым пространством H, а область значений есть часть[1] H_0. С помощью оператора Gf формулу (6) можно представить в таком виде:

$$(u, f) = [u, Gf], \quad u \in H_0. \tag{9}$$

Докажем, что оператор G — ограниченный самосопряженный. Прежде всего, этот оператор — линейный. Действительно, если $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$, то

$$(u, f) = \bar{a}_1 (u, f_1) + \bar{a}_2 (u, f_2) = \bar{a}_1 [u, Gf_1] + \bar{a}_2 [u, Gf_2] =$$
$$= [u, a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2].$$

С другой стороны, $(u, f) = [u, Gf]$. Сравнив оба выражения для (u, f), мы найдем, что

$$[u, Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2] = 0; \quad u \in H_0.$$

По лемме § 4, $Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2 = 0$, или

$$G(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2,$$

[1] В частных случаях область значений Gf может совпасть с H_0.

т. е. оператор G — линейный. Далее, по неравенству Коши — Буняковского,

$$|[u, Gf]| = |(u, f)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\|$$

или, если воспользоваться неравенством (5),

$$|[u, Gf]| \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma} |u|.$$

Положим здесь $u = Gf$. Тогда

$$|Gf|^2 \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma} |Gf|,$$

или

$$|Gf| \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma}. \qquad (*)$$

Но, по неравенству (5), $\|Gf\| \leqslant \frac{|Gf|}{\gamma}$. Подставив это в (*), получим

$$\|Gf\| \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma^2},$$

откуда

$$\|G\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2},$$

т. е. оператор G ограничен. Наконец, по формуле (9)

$$(Gf, f) = [Gf, Gf] = |Gf|^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство показывает, что оператор Gf — положительный и потому, как это следует из теоремы 2 § 7, симметричный. По теореме 3 § 7, симметричный ограниченный оператор G — самосопряженный.

Замечание. Будем считать, что $f \in H_0$. Тем самым мы рассматриваем Gf, как оператор, определенный в пространстве H_0. Нетрудно видеть, что при этом он остается ограниченным и самосопряженным. Действительно, заменим в (*) $\|f\|$ большей величиной $\frac{|f|}{\gamma}$. Тогда $|Gf| \leqslant \frac{|f|}{\gamma^2}$, или $|G| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}$. Далее, по формуле (9), $[Gf, f] = \overline{[f, Gf]} = \overline{(f, f)} = (f, f) \geqslant 0$. Отсюда, как и выше, вытекает самосопряженность Gf, на этот раз в пространстве H_0.

Если $Gf = 0$, то формула (9) дает $(u, f) = 0$. Элемент f таким образом, ортогонален в H ко всем элементам H_0 и, в частности, ко всем элементам исходного линеала M, плотного в H. По лемме § 4, $f=0$. Таким образом, уравнение $Gf=0$ имеет единственное решение $f=0$; отсюда, по теореме 4 § 6, существует оператор G^{-1}, обратный оператору G. Будучи обратным по отношению к самосопряженному оператору G, оператор G^{-1} также самосопряженный[1]; очевидно, что его область значений совпадает с H, а область определения составляет некоторую часть H_0.[2] Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Оператор G^{-1} есть расширение оператора A.* Достаточно доказать, что $G^{-1}u$ совпадает с Au на M, т. е., что $G^{-1}u=Au$, если $u\in M$. Пусть u_0 — произвольный элемент из M. Обозначим Au_0 через f. Тогда $Au_0=f$. По теореме § 9, u_0 реализует минимум функционала (2); по доказанному в этом параграфе, $u_0=Gf$. Отсюда $f=G^{-1}u_0$ и, следовательно, $G^{-1}u_0=Au_0$, что доказывает теорему.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Всякий положительно-определенный оператор, определенный на плотном множестве, может быть расширен до самосопряженного.*

В последующем мы каждый раз будем считать, что такое расширение уже выполнено.

§ 20. Метод Ритца и доказательство его сходимости в общем случае

В предыдущем параграфе мы построили точное решение задачи о минимуме функционала

$$F(u)=(Au,\ u)-(u,\ f)-(f,\ u), \tag{1}$$

где A — положительно-определенный оператор. В настоящем параграфе мы укажем способ ее приближенного решения, известный под названием *метода Ритца*.

Обозначим через d минимум функционала $F(u)$. Допустим, что нам удалось построить последовательность $\{u_n\}$ элементов данного гильбертова пространства, обладающую

[1] См. теорему 4 § 7.

[2] В частности, она может и совпадать с H_0.

тем свойством, что

$$\lim F(u_n) = d. \tag{2}$$

Такая последовательность называется *минимизирующей.*

Почти очевидна следующая

Теорема 1. *Если оператор A — положительно-определенный, то всякая минимизирующая последовательность сходится как в метрике H, так и в метрике H_0, к элементу, реализующему минимум функционала $F(u)$.*

Пусть f' реализует минимум $F(u)$. Из формулы (7) § 19 ясно, что

$$d = F(f') = -|f'|^2. \tag{3}$$

Если $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность, то по той же формуле (7) § 19

$$\lim_{n\to\infty} \{|u_n - f'|^2 - |f'|^2\} = -|f'|^2,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - f'|^2 = 0. \tag{4}$$

Но это значит, что u_n стремится к f' в метрике H_0. Далее, по неравенству (5) § 19

$$\|u_n - f'\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n - f'| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. u_n стремится к f' в метрике H.

Метод Ритца представляет собой один из методов построения минимизирующей последовательности. Состоит он в следующем.

Выбираем последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов линеала M (см. § 19), полную в H_0; мы потребуем также, чтобы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ были линейно-независимы при любом n. Элементы φ_k мы будем, следуя Ритцу, называть *координатными.* Построим линейную комбинацию первых n координатных элементов

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

с произвольными численными коэффициентами a_k. Подставив u_n вместо u в (1), мы превратим $F(u)$ в функцию от независимых переменных $a_1, a_2, \ldots a_n$:

$$F(u_n) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j \bar{a}_k (A\varphi_j, \varphi_k) - \sum_{j=1}^{n} a_j(\varphi_j, f) - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j (f, \varphi_j). \quad (5)$$

Выберем коэффициенты a_k так, чтобы функция (5) *приняла минимальное значение.* Как мы сейчас увидим, это требование приведет нас к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными a_k.

Положим $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Тогда $F(u_n)$ будет вещественной функцией от $2n$ независимых вещественных переменных $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n$. Эта функция достигает минимума при тех значениях аргументов, которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \alpha_j} = 0, \quad \frac{\partial F(u_n)}{\partial \beta_j} = 0.$$

Последние уравнения эквивалентны n следующим

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \alpha_j} + i \frac{\partial F(u_n)}{\partial \beta_j} = 0$$

или, что то же,

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \bar{a}_j} = 0. \quad (6)$$

Продифференцировав выражение (5) по $\bar{a}_j$ и приравняв результат нулю, мы получим симметричную систему

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \; j = 1, 2, \ldots n. \quad (7)$$

Система (7) всегда разрешима. Действительно, $(A\varphi_k, \varphi_j) = [\varphi_k, \varphi_j]$. Определитель нашей системы

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1], & [\varphi_2, \varphi_1], & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_1] \\ [\varphi_1, \varphi_2], & [\varphi_2, \varphi_2], & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\varphi_1, \varphi_n], & [\varphi_2, \varphi_n], & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_n] \end{vmatrix}$$

есть определитель Грама элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$; он отличен от нуля, так как указанные элементы линейно-независимы. Отсюда следует, что система (7) всегда разрешима, и, следовательно, метод Ритца позволяет построить функцию u_n. Заметим, что $F(u_n) \geqslant d$, т. е. метод Ритца дает величину минимального функционала с избытком. Докажем теперь, что построенные по методу Ритца функции u_n образуют минимизирующую последовательность. В процессе доказательства мы не будем ссылаться на существование функции, реализующей минимум функционала $F(u)$. Мы будем опираться только на то, что значения $F(u)$ ограничены снизу, так что существует его нижняя грань d. Это позволит нам применять наше доказательство и в других случаях, в частности, в проблеме собственных значений.

Зададим произвольное положительное число ε. По определению нижней грани, существует такое $v \in H_0$, что $d \leqslant F(v) \leqslant d + \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, последовательность $\{\varphi_n\}$ — полная в H_0. Отсюда следует, что можно так подобрать число n и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, чтобы выполнялось неравенство

$$|F(v) - F(v_n)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $v_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$. Отсюда

$$d \leqslant F(v_n) < F(v) + \frac{\varepsilon}{2} < d + \varepsilon.$$

Пусть u_n — функция, построенная по методу Ритца. Тогда $d \leqslant F(u_n) \leqslant F(v_n)$, или

$$d \leqslant F(u_n) < d + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, мы найдем, что

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = d,$$

т. е. что последовательность $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ — минимизирующая.

Обращаясь к функционалу (1), мы на основании теоремы 1 заключаем, что для этого функционала последовательность, построенная по методу Ритца, сходится к функции, реализующей минимум функционала, как в метрике H_0, так и в метрике H.

Замечание. Если система (7) уже построена, и по тем или иным причинам желательно получить менее точное приближение, не содержащее некоторых из координатных функций, то коэффициенты a_k, соответствующие этому менее точному приближению, найдутся из системы, которая получается из системы (7) *усечением*, т. е. вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих отброшенным координатным функциям. Аналогичное замечание справедливо и в проблеме собственных значений (см. § 30).

Выясним теперь связь между точным решением минимальной проблемы, определяемым формулой (8) § 19, и приближенным решением u_n, которое дает метод Ритца. Пусть функции φ_k подвергнуты линейному преобразованию с треугольной матрицей, т. е. преобразованию вида

$$\begin{aligned} &\psi_1 = a_{11}\varphi_1, \\ &\psi_2 = a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\psi_n = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \dots + a_{nn} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

причем все постоянные a_{kk} отличны от нуля. Отыскивая u_n в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\psi_k$$

или в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k,$$

мы придем к одному и тому же результату, так как выражение

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\psi_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=1}^{k} a_{km}\varphi_m = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m \sum_{k=m}^{n} a_{km}b_k$$

есть также линейная комбинация функций φ_k. Имея это в виду, подвергнем последовательность $\{\varphi_n\}$ ортогонализации в метрике H_0. Чтобы не вводить лишних символов, будем обозначать новые элементы, полученные с помощью процесса ортогонализации, попрежнему через φ_k. Теперь

$$(A\varphi_k, \varphi_j) = [\varphi_k, \varphi_j] = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

и система (7) принимает особенно простой вид

$$a_j = (f, \varphi_j), \ j = 1, 2, \ldots n.$$

Теперь

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k, \tag{8}$$

т. е. приближенное решение минимальной проблемы, получаемое по методу Ритца, совпадает с отрезком ряда (8) § 19, представляющего точное решение.

Выше была доказана сходимость метода Ритца, но не было дано никакой оценки быстроты сходимости, или погрешности приближенного решения. Некоторое представление об этой погрешности можно получить следующим образом. Зная u_n, нетрудно вычислить величину $\|f - Au_n\|$, характеризующую степень точности, с которой приближенное решение удовлетворяет уравнению. Далее, погрешность приближенного решения равна

$$f' - u_n = GA(f' - u_n) = G(f - Au_n);$$

отсюда мы находим оценку для нормы погрешности

$$\|f' - u_n\| \leqslant \|G\| \cdot \|f - Au_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|f - Au_n\|. \tag{9}$$

Оценка (9) может оказаться очень грубой, так как, вообще говоря, Au_n не стремится к f.

Другой способ оценки приближенного решения состоит в следующем. Имеем

$$F(u_n) = |u_n - f'|^2 - |f'|^2.$$

Обозначим

$$\min F(u) = -|f'|^2 = d.$$

Тогда

$$|u_n - f'|^2 = F(u_n) - d. \tag{10}$$

Допустим, что в нашем распоряжении есть способ, позволяющий строить числа меньше d и сколь угодно к d близкие. Пусть δ — такое число. Заменим в (10) d через δ. От этого правая часть в (10) увеличится, и мы получим искомую оценку

$$|u_n - f'| < \sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{11}$$

Из неравенства (5) § 19 следует также оценка

$$\|u_n - f'\| < \frac{1}{\gamma}\sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{12}$$

Способы построения чисел, меньших d, для некоторых задач математической физики хорошо разработаны. Таковы метод Трефтца (§ 33) в задаче Дирихле для уравнения Лапласа, метод негармонического остатка (§ 34) для бигармонического уравнения. Некоторые указания общего характера изложены в книге Куранта и Гильберта [1], гл. IV, § 9.

Оценки (11) и (12) требуют вычисления величины $F(u_n)$. Если u_n построено по методу Ритца, то $F(u_n)$ можно вычислять следующим образом. Имеем

$$F(u_n) = \sum_{k, m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k \bar{a}_m - \\ - \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, f) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k (f, \varphi_k). \tag{13}$$

Далее, коэффициенты a_k удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k = (f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots n. \tag{14}$$

Умножая это на $\bar{a}_m$ и суммируя по m, получим

$$\sum_{k, m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k \bar{a}_m = \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m) \bar{a}_m = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \bar{a}_k.$$

Подставив это в (13), мы получим

$$F(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, f) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{(f, \varphi_k)}. \tag{15}$$

Формула (15) удобна тем, что входящие в нее числа a_k и (f, φ_k) заранее вычислены в процессе составления и решения системы (14).

В заключение сделаем замечание относительно выбора координатных элементов. Их последовательность должна быть полной в H_0. Для этого достаточно, чтобы *последовательность* $\{A\varphi_k\}$ *была полной в* H. Действительно, пусть это требование выполнено; докажем, что тогда последовательность $\{\varphi_k\}$ полна в H_0. Пусть сперва v означает произвольный элемент из M. Положим $u = Av$. Так как последовательность $\{A\varphi_k\}$ полна в H, то можно найти такое целое n и такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, что

$$\|u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k\| = \|A(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k)\| \leqslant \varepsilon\gamma,$$

где ε — произвольно-малое положительное число, а γ — постоянная формулы (1) § 19.

Оценим теперь величину $|v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k|$. Положим для краткости $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k = v_n$. Имеем

$$|v - v_n|^2 = [v - v_n, \ v - v_n] = (A(v - v_n), \ (v - v_n) \leqslant$$
$$\leqslant \|A(v - v_n)\| \cdot \|v - v_n\| \leqslant \varepsilon\gamma \|v - v_n\|.$$

По неравенству (5) § 19, $\|v - v_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|v - v_n|$. Подставив это в последнее неравенство, мы легко найдем, что

$$|v - v_n| < \varepsilon.$$

Таким образом последовательность $\{\varphi_n\}$ полна в M в смысле метрики H_0.

Пусть теперь w означает произвольный элемент из H_0. Так как линеал M плотен в H_0, то можно найти такой элемент $v \in M$, что $|v - w| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, найдем n и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ так, чтобы $|v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, по неравенству треугольника, $|w - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k| < \varepsilon$; это означает, что последовательность $\{\varphi_k\}$ полна в H_0.

Несколько слов скажем о задаче с естественными краевыми условиями. В этом случае ставится задача о минимуме не функционала $F(u)$, а связанного с ним функционала $\Delta_1(u, u)$ (см. § 10). Вместо системы (7) мы приходим к сходной с ней системе

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_1(\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j), \; j = 1, 2, \ldots n. \tag{16}$$

Предполагая, что $\Delta_1(u, u) > 0$ при $u \neq 0$, мы легко докажем разрешимость системы (16). С этой целью рассмотрим однородную систему

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_1(\varphi_k, \varphi_j) a_k = 0, \; j = 1, 2, \ldots n. \tag{17}$$

Полагая $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k = u$, мы без труда приведем ее к виду $\Delta(u, \varphi_j) = 0$. Умножая на a_j и суммируя, мы получим $\Delta_1(u, u) = 0$, откуда $u = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k = 0$; так как координатные функции линейно-независимы, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Таким образом, однородная система (17) имеет только тривиальное решение; отсюда следует, что система (16) разрешима.

В главе II мы рассмотрели ряд краевых задач математической физики. Мы установили эквивалентность каждой из них некоторой вариационной задаче, опираясь на положительность соответствующего оператора. Вопросы о существовании решения и о его построении, если оно существует, оставались открытыми. Теоремы § 19 и § 20 позволяют положительно ответить на оба вопроса, если оператор задачи — положительно-определенный. В последующих параграфах мы возвращаемся к задачам, рассмотренным в главе II, и устанавливаем для большинства из них положительную определенность соответствующих операторов. Тем самым для этих задач будет установлено как существование решения, так и сходимость метода Ритца.

§ 21. Метод Ритца в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений

Начнем с простейшего случая. Пусть дано линейное самосопряженное (в смысле Лагранжа) дифференциальное уравнение

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + r(x)u = f(x); \quad f(x) \in L_2(a, b), \tag{1}$$

и требуется проинтегрировать его при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Относительно коэффициентов $p(x)$ и $r(x)$ мы примем, что $p(x)$ строго положительно, так что $p(x) \geqslant p_0 > 0$, а $r(x) \geqslant 0$.

В § 11 было показано, что оператор Lu — положительный на линеале M достаточно гладких функций, удовлетворяющих равенствам (2). Из этого вытекает, что задача интегрирования уравнения (1) при условиях (2) равносильна задаче о минимуме функционала [1]

$$F(u) = (Lu, u) - 2(f, u) =$$
$$= \int_a^b \left\{-u \frac{d}{dx}\left[p \frac{du}{dx}\right] + ru^2 - 2fu\right\} dx$$

при тех же условиях (2).

Докажем теперь, что на линеале M оператор Lu — положительно-определенный. Для этого составим скалярное произведение

$$(Lu, u) = \int_a^b \left\{-u \frac{d}{dx}\left[p \frac{du}{dx}\right] + ru^2\right\} dx.$$

Интегрируя первый член по частям и учтя условия (2), получим

$$(Lu, u) = \int_a^b \{pu'^2 + ru^2\}\, dx. \tag{3}$$

Что оператор Lu при условиях (2) — положительно-определенный, делается очевидным, если $r(x)$ строго положительно: полагая в этом случае $r_0 = \min r(x)$, имеем $r_0 > 0$ и

$$(Lu, u) \geqslant r_0 \int_a^b u^2\, dx = r_0 \|u\|^2. \tag{4}$$

Доказательство несколько сложнее, если $r(x)$ может обратиться в нуль. В этом случае мы поступим следующим образом.

---

[1] Функции $u(x)$ будем считать вещественными.

В формуле (3) справа отбросим неотрицательное второе слагаемое и заменим $p(x)$ его наименьшим значением p_0. Равенство (3) тогда перейдет в неравенство

$$(Lu,\ u) \geqslant p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = p_0 \left\|\frac{du}{dx}\right\|^2. \tag{5}$$

Остается оценить $\left\|\frac{du}{dx}\right\|$.

Так как $u(a) = 0$, то

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt,$$

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Отсюда, по неравенству Буняковского при $a \leqslant x \leqslant b$

$$u^2(x) \leqslant (x-a) \int_a^x (u'(t))^2 dt \leqslant (x-a) \int_a^b (u'(t))^2 dt = (x-a)\ \|u'\|^2.$$

Интегрируя это в пределах от a до b, находим, что

$$\|u\|^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\ \|u'\|^2. \tag{6}$$

Подставив это в (5), мы получим

$$(Lu,\ u) \geqslant \gamma^2\ \|u\|^2; \quad \gamma^2 = \frac{2p_0}{(b-a)^2}.$$

Раз оператор Lu—положительно-определенный на M, задача о минимуме функционала (3) имеет решение, которое может быть построено приближенно по методу Ритца.

Выясним характер сходимости метода Ритца. По теореме 1 § 20, приближенные решения в методе Ритца сходятся в смысле метрики в H_0. Формула (3) показывает, что

$$|u|^2 = \int_a^b \left\{p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + ru^2\right\} dx.$$

В таком случае равенство

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \| u_m - u_n \| = 0,$$

определяющее сходимость в H_0, равносильно следующему:

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \int_a^b \left\{ p\left(\frac{du_m}{dx} - \frac{du_n}{dx}\right)^2 + r\,(u_m - u_n)^2 \right\} dx = 0.$$

Оба слагаемые слева неотрицательны, поэтому каждое из них в отдельности стремится к нулю. В частности,

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \int_a^b p\left(\frac{du_m}{dx} - \frac{du_n}{dx}\right)^2 dx = 0.$$

Наконец, так как $p(x) \geqslant p_0 > 0$, то

$$p_0 \int_a^b \left(\frac{du_m}{dx} - \frac{du_n}{dx}\right)^2 dx \leqslant \int_a^b p(x) \left(\frac{du_m}{dx} - \frac{du_n}{dx}\right)^2 dx \underset{m,\,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда $\| u'_m - u'_n \| \to 0$. Таким образом, из сходимости последовательности $\{u_n\}$ в метрике H_0 вытекает сходимость в среднем последовательности производных $\left\{\frac{du_n}{dx}\right\}$. Докажем, что отсюда, в свою очередь, вытекает равномерная сходимость самих функций $\{u_n\}$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Действительно, по условиям (2) $u_n(a) = 0$, и поэтому

$$u_m(x) - u_n(x) = \int_a^x [u'_m(t) - u'_n(t)]\, dt.$$

Возведя это в квадрат и применяя неравенство Буняковского, получим

$$[u_m(x) - u_n(x)]^2 \leqslant (x-a) \int_a^x [u'_m(t) - u'_n(t)]^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \int_a^b [u'_m(t) - u'_n(t)]^2\, dt,$$

откуда

$$|u_m(x) - u_n(x)| \leqslant \sqrt{b-a}\, \|u'_m - u'_n\|, \tag{7}$$

т. е. последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно, так как правая часть последнего неравенства не зависит от x и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) при естественных краевых условиях

$$u'(a) = u'(b) = 0.$$

Попрежнему дело сводится к отысканию минимума функционала

$$F(u) = \int_a^b \{pu'^2 + ru^2 - 2fu\}\, dx,$$

но на этот раз функция u заранее не подчинена никаким краевым условиям. Если $r(x)$ строго положительно, то, как показывает неравенство (4), оператор Lu — положительно-определенный. В общем случае это утверждение может оказаться неверным.

Обратимся теперь к краевым условиям более общего вида

$$u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \tag{8}$$

где, в соответствии с условиями § 11, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Задача интегрирования уравнения (1) при краевых условиях (8) сводится (см. § 11) к задаче о минимуме функционала

$$F(u) = \alpha p(a)\, u^2(a) + \beta p(b)\, u^2(b) + \\ + \int_a^b \left\{p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + r(x)\, u^2 - 2f(x)\, u\right\} dx. \tag{9}$$

Докажем, что на линеале достаточно гладких функций, удовлетворяющих условиям (8), оператор Lu — положительно-определенный. Имеем

$$(Lu,\ u) = \alpha p(a)\, u^2(a) + \beta p(b)\, u^2(b) + \\ + \int_a^b \left\{p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + r(x)\, u^2\right\} dx.$$

Отбросим справа неотрицательные вторые члены вне интеграла и под знаком интеграла и заменим $p(x)$ его наименьшим значением p_0. Это приведет нас к неравенству

$$(Lu,\ u) \geqslant \alpha p_0 u^2(a) + p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Пусть $\varkappa$ равно наименьшему из чисел αp_0 и p_0. Тогда

$$(Lu,\ u) \geqslant \varkappa (u^2(a) + \|u'\|^2). \tag{10}$$

Далее,

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\, dt.$$

По неравенству треугольника

$$\|u(x)\| \leqslant \|u(a)\| + \left\| \int_a^x u'(t)\, dt \right\|. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что $\|u(a)\| = \sqrt{b-a}\,|u(a)|$. С другой стороны,

$$\left| \int_a^x u'(t)\, dt \right|^2 \leqslant (x-a) \int_a^x u'^2(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (x-a) \int_a^b u'^2(t)\, dt = (x-a)\|u'\|^2.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от a до b, получим

$$\left\| \int_a^x u'(t)\, dt \right\| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|.$$

Пусть c означает наибольшее из чисел $\sqrt{b-a}$ и $\frac{b-a}{\sqrt{2}}$. Из неравенства (11) теперь легко следует, что

$$\|u\| \leqslant c\,(|u(a)| + \|u'\|).$$

Отсюда

$$\|u\|^2 \leqslant 2c^2(u^2(a)+\|u'\|^2).$$

Сравнив это с (10), мы найдем, что

$$(Lu,\ u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2,\quad \gamma^2=\frac{\varkappa}{2c^2}. \tag{12}$$

Теперь теоремы § 19 и § 20 дают, что задача о минимуме функционала (9) при условиях (8) имеет решение, приближение к которому можно строить по методу Ритца.

Можно доказать, что сходимость метода Ритца в этом случае означает равномерную сходимость последовательности приближенных решений и сходимость в среднем их первых производных. Мы предоставляем сделать это читателю.

Переходя к уравнению произвольного четного порядка

$$Lu=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^ku}{dx^k}\right]=f(x), \tag{13}$$

мы ограничимся простейшими краевыми условиями

$$u(a)=u'(a)=\ldots=u^{(m-1)}(a)=u(b)=$$
$$=u'(b)=\ldots=u^{(m-1)}(b)=0. \tag{14}$$

Коэффициенты $p_k(x)$, $k=0, 1, 2, \ldots m-1$ будем считать неотрицательными, $p_m(x)$ — строго положительным; будем также считать, что $f(x)\in L_2(a, b)$. Интегрируя по частям и используя условия (14), мы найдем, что

$$(Lu,\ u)=\sum_{k=0}^{m}\int_a^b p_k(x)\left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^2dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_a^b p_m(x)\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)^2dx \geqslant p_0\|u^{(m)}\|^2, \tag{15}$$

где на этот раз

$$p_0=\min p_m(x).$$

Неравенство (6) справедливо для всякой функции, равной нулю при $x=a$. Функции $u(x)$, $u'(x)$. ... $u^{m-1}(x)$ этому требованию удовлетворяют, и поэтому имеют место неравенства

$$\|u\| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|,$$

$$\|u'\| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u''\|, \quad \ldots \quad \|u^{(m-1)}\| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u^{(m)}\|,$$

откуда легко следует, что $\|u^{(m)}\| \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m \|u\|$. Подставив это в (15), получим

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{p_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m.$$

Последнее неравенство показывает, что при условиях (14) оператор (13) — положительно-определенный; отсюда вытекает, как уже не раз упоминалось, существование решения и сходимость метода Ритца. Выясним характер этой сходимости.

Неравенству (15) можно придать вид

$$|\!|\!| u |\!|\!| \geqslant \sqrt{p_0}\, \|u^{(m)}\|.$$

Пусть $u_n(x)$ — приближения, получаемые по методу Ритца. Тогда, по теореме 1 § 20 $|\!|\!| u_k - u_n |\!|\!| \underset{k,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Из последнего неравенства тогда следует, что $\|u_k^{(m)} - u_n^{(k)}\| \underset{k,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. что m-ые производные от приближенных решений сходятся в среднем. В силу неравенства (7), равномерно сходится последовательность $(m-1)$-ых производных. Но тогда, по известной теореме Вейерштрасса об интегрировании равномерно-сходящихся последовательностей, будут сходиться равномерно как сами приближенные решения, так и их производные до $m-1$-ой включительно.

§ 22. Метод Ритца в основных задачах теории потенциала

В § 12 мы рассмотрели уравнение

$$-\Delta u = f(P) \tag{1}$$

при краевом условии одного из трех типов

$$u \,|_S = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S + \sigma(P)\, u \,|_S = 0, \quad \sigma(P) \geqslant 0, \quad \sigma(P) \not\equiv 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = 0. \tag{4}$$

Было показано, что оператор $-\Delta u$ — положительный на каждом из линеалов, образованных достаточно гладкими функциями, удовлетворяющими одному из условий (2), (3) или (4); в случае задачи Неймана (условие (3)) мы принимаем еще, что $\int\limits_{\Omega} u\,d\Omega = 0$. В настоящем параграфе мы докажем, что оператор $-\Delta u$ — положительно-определенный на каждом из упомянутых линеалов; при этом мы будем считать, что в уравнении (3) $\sigma(P)$ — строго положительная функция, так что ее нижняя грань $\sigma_0 > 0$.

Начнем с задачи Дирихле. В этом случае

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega, \tag{5}$$

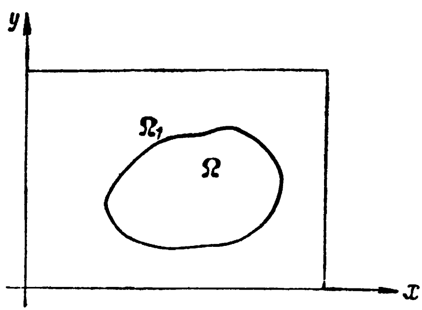
где m — число измерений области Ω. Для простоты вычислений примем, что Ω — плоская область, расположенная в плоскости x, y; переход к любому числу измерений не представит никаких затруднений.

При $m = 2$ формула (5) принимает более простой вид

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega.$$

Напомним еще, что область Ω предполагается конечной.

Заключим Ω внутрь некоторого прямоугольника Ω_1. Оси координат направим по двум его сторонам; стороны прямоугольника обозначим через a и b (черт. 5). Пусть $u(x, y)$ — достаточно гладкая функция, равная нулю на S. Продолжим $u(x, y)$ на весь прямоугольник, полагая ее равной нулю вне Ω; при таком продолжении она будет непрерывной в Ω_1. Возьмем в Ω_1 произвольную точку (x_1, y_1). Имеем,



Черт. 5.

очевидно,

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} dx = u(x_1, y_1) - u(0, y_1) = 0.$$

Но точка $(0, y_1)$ лежит вне Ω, и потому $u(0, y_1) = 0$. Таким образом,

$$u(x_1, y_1) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} dx.$$

Применяя неравенство Буняковского, имеем

$$u^2(x_1, y_1) \leqslant x_1 \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \leqslant a \int_0^a \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx.$$

Проинтегрируем это неравенство в пределах $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant y_1 \leqslant b$

$$\int_{\Omega_1} u^2(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \leqslant a^2 \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \leqslant a^2 \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Интегрирование достаточно производить по Ω, так как $u \equiv 0$ вне Ω. Обозначив еще $a^2 = \frac{1}{\varkappa}$, мы придем к важному неравенству

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \geqslant \varkappa \int_\Omega u^2 d\Omega, \tag{6}$$

известному под названием *неравенства Фридрихса* [2]. Оно во всяком случае справедливо, как мы установили, если функция $u(x, y)$ — достаточно гладкая, равная нулю на S. В общем случае m-мерного пространства неравенство Фридрихса имеет вид

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geqslant \varkappa \int_\Omega u^2 d\Omega, \quad u|_S = 0; \tag{6_1}$$

при $m=1$ оно переходит в неравенство (5) § 21. Теперь из (6) следует

$$(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa} > 0, \tag{7}$$

откуда вытекает, что оператор $-\Delta u$ — положительно-определенный на линеале достаточно гладких функций, равных нулю на S.

Рассмотрим теперь оператор $-\Delta u$ на линеале функций, удовлетворяющих краевому условию (3). Доказательство положительной определенности на этот раз опирается на неравенство, также установленное Фридрихсом:

$$\int\limits_\Omega u^2\, d\Omega \leqslant C \left\{ \int\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega + \int\limits_S u^2\, dS \right\}, \tag{8}$$

где C — положительная постоянная. Чтобы получить это неравенство, поступим следующим образом. Поместим опять Ω в прямоугольник Ω_1 и положим $u = fv$, где f — функция, которую мы выберем ниже. Из легко проверяемого тождества

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] - v^2 f \Delta f + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

мы найдем, отбрасывая первое слагаемое справа,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geqslant -v^2 f \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Проинтегрируем это по Ω; интегралы от второго и третьего членов справа преобразуем по формуле Остроградского:

$$\int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega \geqslant -\int\limits_\Omega v^2 f \Delta f\, d\Omega + \int\limits_S v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS.$$

Отсюда

$$-\int\limits_\Omega v^2 f \Delta f\, d\Omega \leqslant \int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega - \int\limits_S v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS$$

и, тем более,

$$-\int_{\Omega} v^2 f \Delta f \, d\Omega \leqslant \int_{\Omega} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \left|\int_{S} v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS\right|.$$

Возьмем $f = \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$. Тогда $\Delta f = -\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)f$, и нигде в Ω f не обращается в нуль. В последнем неравенстве интеграл слева обращается в

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_{\Omega} u^2 \, d\Omega; \tag{9}$$

второй интеграл справа оценивается так:

$$\left|\int_{S} v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS\right| = \left|\int_{S} u^2 \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \nu} dS\right| \leqslant \int_{S} u^2 \frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| dS.$$

На контуре S величина $\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)$, очевидно, ограничена; пусть на S $\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| \leqslant C' = \text{const}$. Тогда

$$\left|\int_{S} v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS\right| \leqslant C' \int_{S} u^2 dS$$

и неравенство (8) получится из (9), если через C обозначить меньшее из чисел $\pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}$ и $C'\pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-2}$.

Оценим теперь скалярное произведение $(-\Delta u, u)$. Имеем

$$(-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \left\{\left(\frac{\partial u}{dx}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega - \int_{S} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

или, если воспользоваться равенством (3),

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \int_{S} \sigma u^2 \, dS \geqslant \int_{\Omega} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \sigma_0 \int_{S} u^2 dS,$$

где, как уже было указано, σ_0 есть нижняя грань $\sigma(P)$. Положим $\sigma_1 = \min(\sigma_0, 1)$; тогда, очевидно

$$(-\Delta u, u) \geqslant \sigma_1 \left\{ \int\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega + \int\limits_S u^2\, dS \right\}. \quad (10)$$

Сравнив это с (8), мы окончательно получим

$$(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_1}{C}}. \quad (11)$$

Из доказанного, в силу теорем § 19 и § 20, следует, что минимальные проблемы, к которым сводится интегрирование уравнения Пуассона при краевом условии (2) или (3), разрешимы и могут быть приближенно решены по методу Ритца.

Заметим, что для уравнения Пуассона сходимость метода Ритца[1] сводится в задаче Дирихле (условие (2)) к сходимости в среднем по области Ω как самих приближенных решений, так и их первых производных, а в смешанной задаче (условие (3)) к этому присоединяется еще сходимость приближенных решений в среднем по границе S. Это нетрудно усмотреть из формул (5) и (10).

Обратимся теперь к задаче Неймана. Существенную роль в исследовании этой задачи играет известное *неравенство Пуанкаре*

$$\int\limits_\Omega u^2\, d\Omega \leqslant A \int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + B \left(\int\limits_\Omega u\, d\Omega \right)^2, \quad (12)$$

где $A > 0$ и $B > 0$ — постоянные. Мы приведем доказательство этого неравенства для того случая, когда область Ω — прямоугольник; доказательство для областей достаточно общего вида можно найти, например, в книге Куранта и Гильберта [2], гл. VII.

---

[1] Напомним, что метод Ритца дает последовательность, сходящуюся и в H_0 и в H.

Пусть Ω — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Возьмем в Ω две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Имеем, очевидно,

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\,dy.$$

Возведя это в квадрат и используя неравенство Буняковского, мы получим

$$\begin{aligned} &u^2(x_1, y_1) + u^2(x_1, y_2) - 2u(x_1, y_1)\,u(x_2, y_2) \leqslant \\ &\leqslant 2\left\{\left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\,dy\right)^2\right\} \leqslant \\ &\leqslant 2\left\{|x_2 - x_1| \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int\limits_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 2\left\{a \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + b \int\limits_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство проинтегрируем по x_1, y_1, x_2, y_2, предполагая, что каждая точка (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пробегает прямоугольник Ω. Мы получим тогда

$$\begin{aligned} &2ab \int\limits_\Omega u^2\,d\Omega - 2\left(\int\limits_\Omega u\,d\Omega\right)^2 \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 2ab\left\{a^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega + b^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d\Omega\right\}. \end{aligned}$$

Разделив на $2ab$ и положив

$$A = \max(a^2, b^2), \qquad B = \frac{1}{ab},$$

мы придем к неравенству Пуанкаре для прямоугольника. Распространение на случай большего числа измерений не встречает никаких трудностей.

Решая задачу Неймана, мы введем в качестве основного гильбертова пространства задачи множество функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_\Omega u^2\,d\Omega < \infty, \qquad \int_\Omega u\,d\Omega = 0, \tag{13}$$

где Ω — заданная область; скалярное произведение определяется, как обычно: $(u, v) = \int_\Omega u(P)\,\overline{v(P)}\,d\Omega$. Как и в случае задачи Дирихле, интегрирование по частям с учетом равенства (4) приводит к формуле

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega.$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре, которое в силу (13) принимает более простой вид

$$\int_\Omega u^2\,d\Omega \leqslant A \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega.$$

Из этого неравенства теперь непосредственно следует, что

$$(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2; \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

т. е. что в рассматриваемом пространстве оператор $-\Delta u$ — положительно-определенный. Как обычно, отсюда вытекает разрешимость задачи Неймана для уравнения (1), если только $f(P)$ принадлежит нашему пространству, т. е. если

$$\int_\Omega f^2\,d\Omega < \infty, \quad \int_\Omega f\,d\Omega = 0;$$

при этом решение может быть получено как предел приближенных решений, построенных по методу Ритца.

§ 23. Общее уравнение эллиптического типа

Все сказанное в предыдущем параграфе переносится без существенных изменений на общее уравнение эллиптического типа второго порядка. Напомним, что в § 13 мы рассмотрели уравнение

$$Au = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(P)\,u = f(P) \tag{1}$$

при краевом условии одного из трех видов

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sigma u\right]_S = 0, \ \sigma(P) \geqslant 0, \ \sigma(P) \not\equiv 0 \tag{3}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right]_S = 0 \tag{4}$$

и установили, что оператор Lu — положительный на линеале функций, удовлетворяющих одному из условий (2), (3) или (4), а также некоторым дополнительным условиям. Тем самым задача интегрирования уравнения (1) при краевых условиях указанных типов была сведена к задаче о минимуме некоторого функционала. В настоящем параграфе мы выясним, при каких условиях оператор Lu будет положительно-определенным.

Мы усилим требования, наложенные на коэффициенты A_{jk} в § 13, и будем считать, что не только в области Ω, но и в любой точке ее границы S квадратичная форма

$$\sum_{j,k} A_{jk} \xi_j \xi_k \tag{5}$$

— положительно-определенная.

Если коэффициент $C(P)$ имеет положительную нижнюю грань, то Lu будет положительно-определенным при любом из условий (2) — (4). Действительно,

$$(Lu, u) = -\int_\Omega u \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int_\Omega C u^2 \, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \int_S u \sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} dS +$$

$$+ \int_\Omega C u^2 \, d\Omega. \tag{6}$$

Первый интеграл справа, очевидно, неотрицателен. Второй интеграл справа равен нулю при условиях (2) и (4) и

$$\int\limits_S \sigma u^2\, dS$$

при условии (3); в обоих случаях он неотрицателен. Отбросим теперь первые два интеграла справа. Мы получим тогда

$$(Lu, u) \geqslant \int\limits_\Omega Cu^2\, d\Omega.$$

Теперь, обозначая через γ^2 положительную по условию нижнюю грань $C(P)$ и заменяя в последнем неравенстве $C(P)$ через γ^2, мы получим

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2,$$

что и требовалось доказать.

Если нижняя грань $C(P)$ равна нулю, то приведенное выше доказательство отпадает. В этом случае мы докажем положительную определенность оператора Lu без дополнительных предположений только в задаче Дирихле (условие (2)); в смешанной задаче (условие (3)) мы примем дополнительно, что $\sigma(P) \geqslant \sigma_0$, где σ_0 — положительная постоянная, а в задаче Неймана мы примем, что $C(P) \equiv 0$.

В случае, когда $u|_S = 0$, из (6) следует, что

$$(Lu, u) = \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega + \int\limits_\Omega Cu^2\, d\Omega.$$

Отбросим справа неотрицательный второй интеграл. Это даст нам

$$(Lu, u) \geqslant \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega. \tag{7}$$

Пусть $\mu(P)$ есть наименьшее собственное число квадратичной формы (5). Напомним, что $\mu(P)$ есть наименьший корень уравнения m-ой степени

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-\mu & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Его коэффициенты суть непрерывные функции точки P в замкнутой области $\overline{\Omega}$; по известной теореме высшей алгебры, все корни этого уравнения, в частности $\mu(P)$, непрерывны в $\overline{\Omega}$. В некоторой точке $P_0 \in \overline{\Omega}$ $\mu(P)$ достигает минимума. Пусть $\mu(P_0) = \mu_0$. По условию, уравнение (1) — эллиптического типа в любой точке P, в том числе и в P_0. Как известно, это сводится к тому, что $\mu_0 > 0$. Далее, по экстремальному свойству квадратичных форм[1]

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}\xi_j\xi_k \geqslant \mu(P) \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2$$

и тем более

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}\xi_j\xi_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2. \tag{8}$$

Применив это к (7), получим

$$(Lu, u) \geqslant \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right)^2 d\Omega.$$

Наконец, воспользовавшись неравенством Фридрихса (формула (6) § 22), мы придем к нужному нам неравенству

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa\mu_0}.$$

В случае краевого условия (3) мы получим, отбрасывая в (6) третий интеграл справа и преобразуя второй интеграл

[1] Достаточно подробное изложение теории квадратичных форм читатель найдет, например, у В. И. Смирнова [2].

справа с помощью условия (3),

$$(Lu, u) \geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int\limits_{S} \sigma u^2 \, dS.$$

Напомним, что мы считаем $\sigma(P) \geqslant \sigma_0 > 0$.

Последнее неравенство усилим, заменив $\sigma(P)$ через σ_0 и оценив подинтегральную функцию в первом интеграле по неравенству (8):

$$(Lu, u) \geqslant \mu_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + \sigma_0 \int\limits_{S} u^2 \, dS.$$

Пусть α — меньшее из чисел μ_0 и σ_0. Тогда, очевидно,

$$(Lu, u) \geqslant \alpha \left\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + \int\limits_{S} u^2 \, dS \right\}.$$

Теперь неравенство (8) § 22, которое просто обобщается на случай любого m, даст

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha C}.$$

В силу теорем § 19 и § 20, мы можем считать установленной сходимость метода Ритца для минимальных задач, к которым сводятся краевые задачи для уравнения (10) при условиях (2) и (3), если только выполнены упомянутые выше требования относительно коэффициентов A_{jk} и σ. Характер сходимости метода Ритца — тот же, что и в случае уравнения Пуассона, рассмотренного в предшествующем параграфе.

Задача Неймана, при принятом выше предположении, что $C(P) \equiv 0$, состоит в интегрировании уравнения

$$L_0 u = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(P) \tag{9}$$

при краевом условии (4). Нетрудно видеть, что эта задача не всегда имеет решение. Чтобы убедиться в этом, проинтегрируем по Ω обе части (9):

$$-\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega.$$

Применяя к левой части последнего равенства формулу Остроградского, мы найдем

$$-\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega =$$

$$= -\int\limits_{S} \sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dS = 0,$$

что обращается в нуль в силу уравнения (2). Таким образом, если задача Неймана имеет решение, то необходимо

$$\int\limits_{\Omega} f \, d\Omega = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, если решение существует, то оно не единственно: вместе с u решением будет и $u + C$, где C — произвольная постоянная. Мы устраним этот произвол, потребовав, чтобы искомое решение удовлетворяло равенству

$$\int\limits_{\Omega} u \, d\Omega = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь то же гильбертово пространство $\widetilde{L}_2(\Omega)$ (см. § 12), которое мы ввели при решении задачи Неймана для уравнения Пуассона, и докажем, что в этом пространстве оператор L_0u — положительно-определенный на линеале достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию (4). Действительно,

$$(L_0u, u) = -\int\limits_{\Omega} u \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega.$$

Интегрируя по частям и используя условие (4), получаем

$$(L_0u, u) = \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega \geqslant \mu_0 \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega. \quad (11)$$

Общее неравенство Пуанкаре (см. § 22)

$$\int\limits_\Omega u^2\, d\Omega \leqslant A \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + B\left(\int\limits_\Omega u\, d\Omega\right)^2$$

при условии (10) даст

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega > \frac{1}{A} \int\limits_\Omega u^2\, d\Omega = \frac{1}{A} \| u \|^2.$$

Подставив это в (11), получим

$$(L_0u, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{A}}.$$

Раз положительная определенность L_0u установлена, из теорем § 19 и § 20 вытекает разрешимость задачи Неймана, если $f(P)$ удовлетворяет равенству (10), и сходимость метода Ритца для этой задачи.

§ 24. Метод Ритца в применении к задаче об изгибе пластинки

Мы ограничимся здесь случаем закрепленной по краю пластинки. Как было показано в § 15, в этом случае дело сводится к интегрированию бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w = f(x, y) \quad (1)$$

при краевых условиях

$$w\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_S = 0. \quad (2)$$

На линеале функций, достаточно гладких и удовлетворяющих уравнениям (2), оператор $\Delta^2 w$, как было показано, положительный. Нетрудно доказать, что он — положительно-определенный. Действительно, по формуле (3) § 15,

$$(\Delta^2 w, w) = \int_\Omega (\Delta w)^2 \, d\Omega.$$

Умножая обе части равенства (7) § 15 на 2 и складывая, получим

$$(\Delta^2 w, w) = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} d\Omega. \qquad (3)$$

Из (2) следует (см. § 15), что

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_S = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_S = 0.$$

В таком случае к обеим производным можно применить неравенство Фридрихса:

$$\left. \begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\Omega &\geqslant \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right\} d\Omega, \\ \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 d\Omega &\geqslant \frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} d\Omega. \end{aligned} \right\} \qquad (4)$$

Неравенство Фридрихса можно применить и к самой функции w, так как $w|_S = 0$. Отсюда

$$\int_\Omega w^2 \, d\Omega \leqslant \varkappa \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^2 \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\}, \qquad (5)$$

или

$$(\Delta^2 w, w) \geqslant \frac{1}{\varkappa^2} \| w \|^2,$$

что и требовалось доказать. Отсюда вытекает сходимость метода Ритца в применении к функционалу (8) § 15. Установим ее характер. В соответствии с формулой (3), норма в пространстве H_0 определяется равенством

$$| w |^2 = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} d\Omega.$$

Пусть $\{w_n\}$ — последовательность приближенных решений по Ритцу. Так как эта последовательность сходится в H_0, то $\|w_n - w_m\| \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, или

$$\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2\right\} d\Omega \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

Отсюда следует, очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2 d\Omega \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x\, \partial y}\right)^2 d\Omega \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2 d\Omega \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

т. е. последовательности вторых производных от приближенных решений сходятся в среднем. Неравенства (4) и (5) показывают теперь, что последовательности первых производных от w_n, а также сами w_n, сходятся в среднем. Докажем теперь, что *последовательность* $\{w_n\}$ *сходится равномерно*[1] *в замкнутой области* $\overline{\Omega}$.

Для простоты будем считать, что w_n непрерывны и имеют непрерывные первые производные в $\overline{\Omega}$. Этого всегда можно добиться, взяв координатные функции достаточно гладкими. Поместим Ω внутрь прямоугольника Ω_1 (черт. 5) и доопределим w_n в Ω_1, полагая $w_n = 0$ вне Ω. Тогда w_n, $\frac{\partial w_n}{\partial x}$, $\frac{\partial w_n}{\partial y}$ будут непрерывными в Ω_1. Это непосредственно вытекает из равенств (2), которым удовлетворяют приближенные решения w_n. Возьмем в Ω точку (x, y) и вычислим

---

[1] Эта теорема является частным случаем так называемой „теоремы о вложении пространств“ С. Л. Соболева; см. С. Л. Соболев [1, 2] или В. И. Смирнов [1], стр. 562.

интеграл

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta, \qquad u = w_n - w_m.$$

Выполнив интегрирование, мы найдем

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0).$$

Точки $(x, 0)$, $(0, y)$ и $(0, 0)$ лежат на сторонах прямоугольника Ω_1, где $u = 0$, поэтому $u(x, 0) = u(0, y) = u(0, 0) = 0$ и, следовательно,

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta.$$

Отсюда

$$|u(x, y)| = \left| \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta \right| \leqslant \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\, \partial\eta} \right| d\xi\, d\eta,$$

или, так как вне Ω $u \equiv 0$,

$$|u(x, y)| \leqslant \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\, \partial\eta} \right| d\xi\, d\eta.$$

Теперь, по неравенству Буняковского,

$$u^2(x, y) \leqslant V_\Omega \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\, \partial\eta} \right)^2 d\Omega,$$

где через V_Ω обозначена площадь области Ω. Но $u = w_n - w_m$, поэтому

$$|w_n(x, y) - w_m(x, y)| \leqslant \sqrt{V_\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi\, \partial\eta} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial\xi\, \partial\eta} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение правой части этого неравенства стремится к нулю при n, $m \to \infty$ (см. неравенства (5)). На основании теоремы Вейерштрасса, последовательность $\{w_n(x, y)\}$ сходится равномерно в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$.

§ 25. Трехмерные задачи теории упругости. Первая задача.

В § 14 было показано, что оператор **A**, определяемый дифференциальными уравнениями теории упругости (уравнения (2), (5) и (1) § 14), [1] — положительный на каждом из линеалов, элементы которых удовлетворяют одному из условий (10) или (12) § 14, а также (в случаях условий (11) § 14) и некоторым дополнительным условиям. Нам предстоит теперь установить положительную определенность этого оператора. Мы выполним это только для первой и второй задач теории упругости (условия (10) и (11) § 14), следуя в существенном К. Фридрихсу [3].

Условимся в следующих обозначениях. Оси координат будем обозначать x_1, x_2, x_3, составляющие вектора смещений — u_1, u_2, u_3. Дифференцирование по x_k будем обозначать нижним индексом k, поставленным под косой черточкой, так что, например,

$$f_{/k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad u_{l/k} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k}, \quad u_{l/km} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m}.$$

Далее, индексы суммирования будем обозначать греческими буквами; при этом мы не будем писать знака суммы, если индекс суммирования повторяется дважды или если этот индекс написан один раз, но член, содержащий его, возведен в квадрат. Так, например,

$$u_{\alpha/\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{\alpha/\alpha} = \operatorname{div} \mathbf{u}; \quad u_{\alpha/\beta}^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2; \quad u_{/\alpha\alpha} = \Delta u.$$

Положим далее

$$s_{km} = \frac{1}{2}(u_{k/m} + u_{m/k}); \quad r_{km} = \frac{1}{2}(u_{k/m} - u_{m/k}). \tag{1}$$

Очевидно, $s_{kk} = \varepsilon_{x_k}$, $s_{km} = \frac{1}{2}\gamma_{x_k x_m}$; величина r_{km} определяет

[1] Мы будем дальше называть его „оператором теории упругости".

бесконечно-малое вращение элемента упругой среды в плоскости (x_k, x_m). Отметим очевидные тождества

$$s_{km}=s_{mk}, \quad r_{km}=-r_{mk}, \quad s_{km}+r_{km}=u_{k/m}. \tag{2}$$

Обозначим еще

$$\left.\begin{aligned} H(\mathbf{u}) &= \int_\Omega u_\alpha^2\,d\Omega, & D(\mathbf{u}) &= \int_\Omega u_{\alpha/\beta}^2\,d\Omega, \\ S(\mathbf{u}) &= \int_\Omega s_{\alpha\beta}^2\,d\Omega, & R(\mathbf{u}) &= \int_\Omega r_{\alpha\beta}^2\,d\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отметим важное тождество

$$D(\mathbf{u})=R(\mathbf{u})+S(\mathbf{u}). \tag{4}$$

Действительно,

$$u_{k/m}=s_{km}+r_{km}.$$

Возводя в квадрат и суммируя, получим

$$u_{\alpha/\beta}^2=s_{\alpha\beta}^2+r_{\alpha\beta}^2+2s_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta}.$$

Последняя сумма равна нулю, так как

$$s_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}(u_{\alpha/\beta}+u_{\beta/\alpha})(u_{\alpha/\beta}-u_{\beta/\alpha})=\frac{1}{4}(u_{\alpha/\beta}^2-u_{\beta/\alpha}^2),$$

а суммы $u_{\alpha/\beta}^2$ и $u_{\beta/\alpha}^2$ отличаются только обозначением индекса суммирования. Теперь

$$u_{\alpha/\beta}^2=s_{\alpha\beta}^2+r_{\alpha\beta}^2.$$

Интегрируя это равенство по области Ω, мы придем к соотношению (4).

В основных задачах теории упругости существенную роль играет так называемое *неравенство Корна*

$$R(\mathbf{u})\leqslant KS(\mathbf{u}), \quad K=\text{const}. \tag{5}$$

Мы докажем в настоящем параграфе справедливость неравенства при краевом условии

$$\mathbf{u}|_S=0. \tag{6}$$

Как мы потом убедимся, неравенство Корна позволит нам установить положительную определенность оператора теории упругости в упомянутых выше первой и второй задачах; тем самым будут установлены как их разрешимость, так и применимость метода Ритца к их разрешению.

Доказательство неравенства Корна при условии (6) довольно просто. При доказательстве будем предполагать, что вектор $\mathbf{u}$ и его первые и вторые производные непрерывны вплоть до контура, и что поверхность S, ограничивающая область Ω, кусочно-гладкая. Имеем

$$u_{k/m} = s_{km} + r_{km}, \quad u_{m/k} = s_{km} - r_{km}.$$

Перемножив эти равенства и просуммировав по обоим значкам, получим

$$u_{\alpha/\beta}\, u_{\beta/\alpha} = s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2.$$

Далее, очевидно

$$u_{\alpha/\alpha}\, u_{\beta/\beta} = s_{\alpha\alpha}^2.$$

Отсюда

$$s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2 = u_{\alpha/\beta}u_{\beta/\alpha} - u_{\alpha/\alpha}u_{\beta/\beta} = (u_\alpha u_{\beta/\alpha})_{/\beta} - (u_\alpha u_{\beta/\beta})_{/\alpha}.$$

Проинтегрируем это равенство по Ω. Интеграл сперва преобразуем по формуле Остроградского в поверхностный; в силу краевого условия (5), этот последний интеграл равен нулю. Таким образом

$$\int_\Omega (s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2)\, d\Omega = 0$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega r_{\alpha\beta}^2\, d\Omega = \int_\Omega (s_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2)\, d\Omega \leqslant \int_\Omega s_{\alpha\beta}^2\, d\Omega. \tag{7}$$

Последнее неравенство есть неравенство Корна, в котором постоянная $K = 1$.

Рассмотрим плотность энергии деформации $W(\mathbf{u})$. Как мы видели, W есть квадратичная форма, и притом положительно-определенная, от величин ε_{x_k} и $\gamma_{x_k x_m}$. Но тогда очевидно, что W есть положительно-определенная квадратичная форма от величин s_{km}. Обозначим через m_0 наименьшее собственное значение этой квадратичной формы. Тогда, как известно, $m_0 > 0$, $W(\mathbf{u}) \geqslant m_0 s_{\alpha\beta}^2$ и

$$\int_\Omega W(\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant m_0 \int_\Omega s_{\alpha\beta}^2\, d\Omega = m_0 S(\mathbf{u}). \tag{8}$$

Далее, из неравенства Корна следует, что

$$D(\mathbf{u}) < (1+K)\, S(\mathbf{u})$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega W(\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant \frac{m_0}{1+K} D(\mathbf{u}). \tag{9}$$

В условиях первой задачи теории упругости вектор $\mathbf{u}$ обращается в нуль на поверхности S, поэтому для каждой из его составляющих справедливо неравенство Фридрихса (формула (6) § 22)

$$\int_\Omega u_k^2\, d\Omega \leqslant p \int_\Omega u_{k/\beta}^2\, d\Omega, \quad p = \frac{1}{\varkappa} = \text{const}.$$

Заменив значок k на α и суммируя по α, получим

$$H(\mathbf{u}) = \int_\Omega u_\alpha^2\, d\Omega \leqslant p\, D(\mathbf{u}). \tag{10}$$

Введем опять в рассмотрение гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ § 14. Напомним, что его элементы суть векторы $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, заданные в Ω, а скалярное произведение определяется формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3)\, d\Omega = \int_\Omega u_\alpha \bar{v}_\alpha\, d\Omega.$$

Очевидно, что в $\mathbf{L}_2(\Omega)$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_\Omega |u_\alpha^2|\, d\Omega,$$

что совпадает с $H(\mathbf{u})$ в случае вещественного $\mathbf{u}$.

В § 14 установлено, что для перечисленных там задач теории упругости имеет место равенство (формула (14) § 14)

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\int_{\Omega} W(\mathbf{u})\, d\Omega. \tag{11}$$

Это равенство верно, в частности, для первой задачи, т. е. при краевом условии (5). Из формул (9)—(11) вытекает, что

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \gamma^2 H(\mathbf{u}) = \gamma^2 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \gamma^2 = \frac{m_0}{p\,(1+K)}, \tag{12}$$

т. е. что оператор $\mathbf{A}$ — положительно-определенный на линеале векторов $\mathbf{u}$, удовлетворяющих условию (5). Отсюда, как обычно, вытекает, что первая краевая задача теории упругости имеет решение, которое можно построить по методу Ритца.

Заметим, что рассуждения настоящего параграфа сохраняют силу как для изотропной, так и для неизотропной среды самого общего вида.

§ 26. Трехмерные задачи теории упругости. Вторая задача.

Наиболее трудным моментом в решении второй задачи является доказательство неравенства Корна при условиях

$$\int_{\Omega} r_{km}\, d\Omega = 0; \quad k, m = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Мы не будем приводить доказательства ввиду его громоздкости; оно подробно проведено в статьях К. Фридрихса [3, 4]. Считая данным неравенство Корна при условиях (1), обратимся к решению второй задачи теории упругости.

В § 14 мы установили, что оператор теории упругости — положительный на линеале векторов, дважды непрерывно-дифференцируемых и удовлетворяющих дополнительным условиям (равенства (15) § 14)

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \tag{2}$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{u})\, d\Omega = 0. \tag{3}$$

Тому же линеалу должен принадлежать и вектор объемных сил, входящий в правую часть векторного уравнения теории упругости, для того, чтобы наша задача имела решение. Докажем теперь, что на упомянутом линеале оператор теории упругости — положительно-определенный.

Неравенство Пуанкаре (формула (12) § 22) применим к составляющей u_k вектора $\mathbf{u}$. В силу соотношения (2) второй интеграл справа пропадет, и мы получим

$$\int_\Omega u_k^2\, d\Omega \leqslant A \int_\Omega u_{k/\alpha}^2\, d\Omega.$$

Заменим индекс k на β и просуммируем. Это даст нам

$$\int_\Omega u_\beta^2\, d\Omega \leqslant A \int_\Omega u_{\alpha/\beta}^2\, d\Omega$$

или

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant AD(\mathbf{u}). \tag{4}$$

Поместим начало координат в центре тяжести объема Ω. Тогда, как нетрудно видеть, векторы „чистого вращения" $\mathbf{b}^{(km)}$, определяемые соотношениями $b_k^{(km)} = x_m$, $b_m^{(km)} = -x_k$, $b_i^{(km)} = 0$, $i \neq k$, $i \neq m$, а с ними и вектор

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + C'_{\alpha\beta}\, \mathbf{b}^{(\alpha\beta)}, \quad C'_{km} = \mathrm{const}$$

удовлетворяют соотношению (2) и неравенству (4). Коэффициенты C'_{km} подберем так, чтобы вектор $\mathbf{u}^*$ удовлетворял соотношению (1). Тогда, по неравенству Корна

$$R(\mathbf{u}^*) \leqslant KS(\mathbf{u}^*).$$

Так же, как и в § 25, мы найдем отсюда, что

$$D(\mathbf{u}^*) \leqslant \frac{1+K}{m_0} \int_\Omega W(\mathbf{u}^*)\, d\Omega. \tag{5}$$

Но $W(\mathbf{u}^*) = W(\mathbf{u})$, так как смещения $\mathbf{b}^{(km)}$ не сопровождаются деформацией. Из (4) и (5) теперь следует, что

$$\int_\Omega W(\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \|\mathbf{u}^*\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{m_0}{A(1+K)}}. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что соотношение (3) означает ортогональность векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{b}^{(km)}$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{b}^{(km)}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbf{u}^*\|^2 = \|\mathbf{u} + C'_{\alpha\beta}\, \mathbf{b}^{(\alpha\beta)}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|C'_{\alpha\beta}\, \mathbf{b}^{(\alpha\beta)}\|^2 \geqslant \|\mathbf{u}\|^2.$$

Сопоставляя это с (6), находим окончательно

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} W(\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \|\mathbf{u}\|^2,$$

т. е. что оператор теории упругости — положительно-определенный на линеале функций, удовлетворяющих соотношениям (2) и (3). Тем самым доказано, что вторая задача теории упругости имеет решение, которое можно построить по методу Ритца.

Отметим в заключение, что рассуждения и результаты двух последних параграфов без всякого труда переносятся на плоскую задачу теории упругости.

§ 27. Некоторые замечания о решении вариационной проблемы

а) В предшествующих параграфах мы показали, что в ряде важных случаев минимальная задача, к которой сводится та или иная краевая задача математической физики, имеет решение, и это решение можно построить, как предел минимизирующей последовательности. В частности, оно может быть построено, как предел приближенных решений, полученных по методу Ритца.

Далее, в § 19 было показано, что функция u_0, реализующая минимум функционала

$$(Au, u) - (u, f) - (f, u),$$

удовлетворяет уравнению $Au_0 = f$. Однако, в этом уравнении Au_0 означает не первоначально данный оператор, определенный на множестве функций, достаточное число раз дифференцируемых, а оператор, расширенный так, как это указано в том же § 19. Возникает вопрос: при каких условиях можно утверждать, что u_0 удовлетворяет уравнению $Au_0 = f$ не в расширенном, а в обычном смысле, т. е. при каких условиях u_0 будет непрерывна и достаточное число раз дифференцируема в заданной области Ω и на ее границе так, чтобы удовлетворялись и дифференциальное уравнение, и краевые условия задачи. Оказывается, что u_0 достаточное число раз дифференцируема в Ω, если коэффициенты левой части дифференциального уравнения также достаточное число раз дифференцируемы, а свободный член f непрерывен и кусочно-непрерывно дифференцируем в Ω. Доказательство этого предложения можно найти в работах С. Л. Соболева [1, 3] и в книге Куранта и Гильберта [2], гл. VII. Из сказанного следует, что в задачах, изученных в предшествующих параграфах, построенное нами решение в обычном смысле удовлетворяет заданным дифференциальным уравнениям. Вопрос об удовлетворении краевых условий значительно сложнее. Некоторые сведения об этом имеются в только что цитированной книге Куранта и Гильберта; мы отметим здесь, что краевые условия выполняются в обычном смысле, а не в смысле расширения оператора, если граница S достаточно гладкая, а коэффициенты уравнения и его свободный член достаточное число раз непрерывно-дифференцируемы. Это утверждение обычно доказывают с помощью метода интегральных уравнений. Вообще же говоря, краевые условия удовлетворяются только в некотором обобщенном смысле. Расширение оператора A и сводится к тому, что к рассмотрению допускаются функции, удовлетворяющие краевым условиям не точно, а в только что упомянутом обобщенном смысле.

б) Выше было установлено, что последовательность приближенных решений, построенных по методу Ритца, сходится в метрике H_0. Обычно это означает некоторую сходимость в среднем. Большой интерес представляет вопрос о равномерной сходимости как самих приближенных решений, так и их производных. К сожалению, в этом направлении сделано немного; наиболее значительные результаты получены Л. В. Канторовичем применительно к задаче Дирихле для уравнения Пуассона; они изложены в монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1].

§ 28. Метод минимальных поверхностных интегралов

Метод, о котором мы будем говорить в настоящем параграфе, может быть применен ко многим задачам математической физики. Мы поясним его на двух задачах теории потенциала: на смешанной задаче и задаче Неймана для уравнения Лапласа.

Будем рассматривать конечную плоскую область Ω; границу S этой области будем предполагать состоящей из конечного числа достаточно гладких кривых. Рассмотрим множество Γ гармонических в Ω функций, которые имеют почти везде на S предельные значения, квадратично-суммируемые по S, и которые представимы через свои предельные значения с помощью функции Грина. Таким образом, если P означает внутреннюю точку Ω, Q — точку на S, $u(P)$ — гармоническую функцию, входящую во множество Γ, то

$$u(P) = \int_S u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu} \, dS,$$

где G — функция Грина области Ω и ν — внешняя нормаль к S в точке Q.

Множество Γ можно превратить в гильбертово пространство, если ввести скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_S u(Q) \overline{v(Q)} \, dS. \tag{1}$$

Легко видеть, что аксиомы A — D § 2 при этом выполнены. Полученное гильбертово пространство обозначим через H. В качестве элементов пространства H можно рассматривать, если угодно, не гармонические в Ω функции, а предельные значения этих функций на S; при такой точке зрения пространство H совпадает с $L_2(S)$ — гильбертовым пространством функций, квадратично-суммируемых на S.

В пространстве H рассмотрим оператор

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q) u, \tag{2}$$

где $\sigma(Q)$ — непрерывная положительная на S функция. Нетрудно видеть, что оператор (2) — положительно-определенный. Действительно, исходя из формулы Грина, легко проверить, что Au — симметричный оператор. Полагая функцию $M(Q)$ вещественной, имеем

$$(Au, u) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) + (\sigma u, u).$$

По известной формуле Грина, которая во всяком случае верна для функций достаточно гладких,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \int_\Omega u\Delta u \, d\Omega.$$

Но u — гармоническая функция, поэтому $\Delta u = 0$, и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega \geqslant 0. \tag{3}$$

Далее,

$$(\sigma u, u) = \int_S \sigma(Q) u^2(Q) \, dS \geqslant \sigma_0 \int_S u^2(Q) \, dS = \sigma_0 \|u\|^2,$$

где $\sigma_0 = \min \sigma(Q)$; из наших предположений вытекает, что $\sigma_0 > 0$. Теперь, очевидно,

$$(Au, u) \geqslant \sigma_0 \|u\|^2,$$

т. е. оператор (2) — положительно-определенный. В силу теорем §§ 9, 19, 20, задача о построении гармонической в Ω функции, удовлетворяющей на S условию

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q) u = f(Q), \tag{4}$$

равносильна задаче о минимуме функционала

$$(Au, u) - (u, f) - f(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u, u\right) - 2(u, f);$$

эта последняя задача имеет решение, которое можно построить по методу Ритца. Найдя это решение, мы найдем тем самым значение искомой гармонической функции на S; из уравнения (4) мы тогда найдем на S ее нормальную производную. Наконец, самую неизвестную гармоническую функцию мы определим по известной формуле

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \nu}\right) dS. \tag{5}$$

Можно, впрочем, избежать обращения к этой формуле, если действовать следующим образом. Построим полную в нашем гильбертовом пространстве H последовательность гармонических функций $\{\varphi_n(P)\}$. Следуя методу Ритца, будем искать приближенное решение нашей задачи в виде

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P). \tag{6}$$

Определив постоянные a_k, мы сразу по формуле (6) получим приближенное значение искомой гармонической функции.

Выясним характер сходимости метода Ритца. По теореме § 20, во всяком случае $\|u - u_n\| \to 0$. Далее,

$$u(P) - u_n(P) = \int_S [u(Q) - u_n(Q)] \frac{\partial G}{\partial \nu} dS.$$

Рассмотрим замкнутую область Ω', которая целиком лежит внутри Ω. Если $P \in \Omega'$, а $Q \in S$, то функция $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ остается ограниченной; пусть $\frac{\partial G}{\partial \nu} < C$.[1] Теперь по неравенству Буняковского

$$|u(P) - u_n(P)|^2 \leqslant C^2 \left[\int_S |u(Q) - u_n(Q)|\, dS\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \overline{S} \int_S [u(Q) - u_n(Q)]^2 dS,$$

или

$$u(P) - u_n(P)| \leqslant C\sqrt{\overline{S}}\, \|u - u_n\|; \tag{7}$$

здесь $\overline{S}$ — длина контура S. Было отмечено, что $\|u - u_n\| \to 0$; теперь из неравенства (7) следует, что *приближенные решения стремятся к точному равномерно во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри* Ω. Точно так же можно доказать, что производные любого порядка от приближенных решений равномерно стремятся к соответствующей производной точного решения в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω.

---

[1] Нетрудно убедиться, что $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ положительна, поэтому мы опускаем знак абсолютной величины.

Особо остановимся на задаче Неймана. Будем считать, что контур S — гладкий, с непрерывной кривизной. Обозначим через $\overline{H}$ множество элементов H, ортогональных к единице, так что

$$(u, 1) = \int_S u\,dS = 0, \quad \text{если} \quad u \in \overline{H}. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что $\overline{H}$ есть полное гильбертово пространство, если скалярное произведение в нем определять той же формулой (1).[1] Докажем, что в $\overline{H}$ оператор $A_0 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ — положительно-определенный. Выделим в $\overline{H}$ линеал M функций, непрерывных и непрерывно-дифференцируемых по дуге контура S; этот линеал плотен в $\overline{H}$. Если $u \in M$, то гармоническая в Ω функция, предельные значения которой на S равны u, имеет непрерывную на S нормальную производную. В таком случае указанную гармоническую функцию, которую мы обозначим через $u(x, y)$, можно представить в виде суммы потенциала простого слоя и некоторого постоянного слагаемого. Докажем это. Обозначим $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f(s)$, s — длина дуги S. Как уже было отмечено, $f(s)$ непрерывна, как функция точки S. Будем искать $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(\sigma) \ln r\, d\sigma. \tag{9}$$

Здесь r — расстояние от точки (x, y) до точки контура, которой отвечает длина дуги σ. Продифференцируем выражение (9) по направлению нормали n к точке контура S, которой отвечает длина дуги s, и устремим точку (x, y) к указанной точке контура. Используя известную теорему о нормальной производной потенциала простого слоя, мы получим интегральное уравнение

$$\mu(s) - \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\cos(n, r)}{r} \mu(\sigma)\, d\sigma = -2f(s), \tag{10}$$

---

[1] Принято говорить, что $\overline{H}$ есть *подпространство* гильбертова пространства H.

где на этот раз r есть расстояние между точками контура, которым отвечают длины дуг s и σ. Уравнение (10) хорошо изучено.[1] Ядро $\frac{\cos(n, r)}{r}$ при принятых нами относительно S допущениях непрерывно. Уравнение (10) разрешимо, если $f(s) \in H$, т. е. если $f(s)$ удовлетворяет равенству (8); в нашем случае это требование выполнено, так как $f(s)$ есть нормальная производная гармонической функции $u(x, y)$. Далее, однородное уравнение (10) имеет только одно линейно-независимое нетривиальное решение; если обозначить его через $\mu_0(\sigma)$, то можно нормировать $\mu_0(\sigma)$ так, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu_0(\sigma)\ln r\, d\sigma = 1. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (10) может быть представлено в виде[2]

$$\mu(s) = C\mu_0(s) - 2f(s) + 2\int\limits_S H(s, \sigma) f(\sigma)\, d\sigma, \tag{12}$$

где $H(s, \sigma)$ — непрерывная функция своих аргументов, а C — произвольная постоянная. Подставив это в (9) и используя соотношение (11), мы получим

$$u(x, y) = C + \int\limits_S \mu_1(\sigma)\ln r\, d\sigma, \tag{13}$$

где для краткости положено

$$\mu_1(\sigma) = -2f(s) + 2\int\limits_S H(s, \sigma) f(\sigma)\, d\sigma. \tag{14}$$

Постоянная C определяется из равенства (8), которое дает

$$C = -\frac{1}{\overline{S}}\int\limits_S \mu_1(\sigma)\, d\sigma \int\limits_S \ln r\, ds; \tag{15}$$

через $\overline{S}$ здесь обозначена длина контура S.

---

[1] См., например, И. И. Привалов [2]. Более подробное изложение (для случая трехмерного пространства) можно найти у Н. М. Гюнтера [1]. Если область Ω—многосвязная, уравнение (10) следует несколько изменить; см. С. Г. Михлин [1]. Все последующие рассуждения при этом сохраняют силу.

[2] И. И. Привалов [2].

Решив уравнение (10), мы тем самым нашли оператор $A_0^{-1}f$, обратный оператору A_0. Этот оператор определяется формулами (13) — (15), если в (13) устремить точку (x, y) к точке s контура; указанными формулами $A_0^{-1}f$ определен пока на линеале M непрерывных вдоль S функций.

На линеале M оператор $A_0^{-1}f$ ограничен. Действительно, по формулам (13) и (15),

$$u(s) = \int_S \mu_1(\sigma)\left\{\ln r - \frac{1}{\overline{S}}\int_S \ln r\, ds\right\} d\sigma. \tag{16}$$

Ядро интеграла (16) квадратично-суммируемо по обеим переменным. Обозначим

$$\ln r - \frac{1}{\overline{S}}\int_S \ln r\, ds = K(s, \sigma)$$

$$\int_S \int_S K^2(s, \sigma)\, ds\, d\sigma = B_1^2.$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|u^2(s)| \leqslant \int_S K^2(s, \sigma)\, d\sigma \int_S |\mu_1^2(\sigma)|\, d\sigma = \|\mu_1\|^2 \int_S K^2(s, \sigma)\, d\sigma$$

$$\|u\|^2 = \int_S |u^2(s)|\, ds \leqslant \|\mu_1\|^2 \int_S \int_S K^2(s, \sigma)\, ds\, d\sigma = B_1^2 \|\mu_1\|^2.$$

Таким образом, $\|u\| \leqslant B_1 \|\mu_1\|$. Точно так же, обозначая

$$B_2^2 = \int_S \int_S H^2(s, \sigma)\, ds\, d\sigma,$$

мы найдем, что $\|\mu_1\| \leqslant 2(1+B_2)\|f\|$. Отсюда $\|u\| = \|A_0^{-1}f\| \leqslant$ $\leqslant B\|f\|$, где $B = 2B_1(1+B_2)$; следовательно, оператор A_0^{-1} ограничен на M и $\|A_0^{-1}\| \leqslant B$. Будучи ограниченным на линеале M, плотном в $\overline{H}$, оператор A_0^{-1} может быть расширен на все пространство $\overline{H}$, причем его норма остается неизменной. Указанное расширение может быть выполнено посредством тех же формул (13) — (15), которые сохраняют смысл, если $f(s)$ только квадратично-суммируема. Оператор $A_0^{-1}f$ можно представить в виде

$$A_0^{-1}f=\int_S \widetilde{K}(s, \sigma)f(\sigma)\,d\sigma, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{K}(s, \sigma)=-2K(s, \sigma)+2\int_S K(s, \sigma_1)H(\sigma_1, \sigma)\,d\sigma_1. \tag{18}$$

Формула (18) показывает, что $\widetilde{K}(s, \sigma)$ квадратично-суммируемо по обеим переменным. Отсюда следует, что оператор $A_0^{-1}f$ есть оператор Фредгольма. Пусть сперва функция f непрерывна. Обозначим $A_0^{-1}f=u$. Тогда u есть гармоническая в Ω функция, нормальная производная которой равна $f(s)$. Формулы (13) и (14) показывают, что u непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+S$. В таком случае к функции u применима формула (3), по которой $(A_0u, u)=(u, A_0u)>0$, $u\neq 0$. Полагая здесь $A_0u=f$, $u=A_0^{-1}f$, мы придем к неравенству

$$(A_0^{-1}f, f)>0, \quad f\neq 0.$$

В общем случае, когда $f(s)$ только квадратично-суммируема, построим непрерывные функции $f_n(s)$ так чтобы

$$\|f-f_n\|\to 0.$$

Тогда, полагая $f-f_n=g_n$, имеем

$$(A_0^{-1}f, f)=(A_0^{-1}f_n, f_n)+(A_0^{-1}f_n, g_n)+(A_0^{-1}g_n, f).$$

Первое слагаемое справа — положительное, а два других стремятся к нулю при $n\to\infty$. Переходя к пределу, получим

$$(A_0^{-1}f, f)\geqslant 0. \tag{19}$$

Неравенство (19) показывает, что оператор A_0^{-1} — симметричный и, так как он ограничен, то и самосопряженный. Знак равенства в (19) невозможен — в противном случае из теоремы 1 § 17 следовало бы, что нуль есть собственное число оператора A_0^{-1}. Это значило бы, что существует такое $f_0\in\overline{H}$, что $A_0^{-1}f=0$. Но $A_0^{-1}f$ есть значение на контуре S некоторой гармонической функции u, представимой через функцию Грина; это контурное значение равно нулю, следовательно, $u\equiv 0$, и $A_0 u=\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$; отсюда $f_0=A_0 u=0$, что невозможно. Таким образом,

$$(A_0^{-1}f, f)>0,\ f\neq 0. \tag{20}$$

Как мы видим, уравнение $A_0^{-1}f=0$ имеет единственное решение $f=0$. Отсюда следует, что существует оператор, обратный оператору A_0^{-1}; он, очевидно, является самосопряженным расширением оператора A_0. Мы будем ниже под A_0 понимать этот расширенный оператор. Спектр фредгольмовского самосопряженного оператора A_0^{-1} состоит только из вещественных собственных чисел, сгущающихся к нулю; из (19) видно, что они неотрицательны. Обозначим наибольшее из них через $\frac{1}{\gamma^2}$. Как известно,[1] спектр оператора A_0 состоит также из собственных чисел, которые по величине обратны собственным числам оператора A_0^{-1}. Наименьшее собственное число оператора A_0 в таком случае равно γ^2. По теореме 3 § 17,

$$\frac{(A_0u,\ u)}{(u,\ u)}\geqslant\gamma^2,$$

или

$$(A_0u,\ u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2,$$

т. е. оператор A_0u — положительно-определенный.

Задача Неймана состоит в определении гармонической в Ω функции по краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_S=f(Q).$$

Для разрешимости задачи, как известно, необходимо, чтобы

$$\int\limits_S f(Q)\,dS=(f,\ 1)=0,$$

[1] См., например, В. И. Смирнов [1].

т. е. чтобы $f \in \overline{H}$. Далее, если решение существует, то оно определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Подчиним его требованию, чтобы

$$\int_S u(Q)\,dS = (u, 1) = 0.$$

Тогда искомая функция также принадлежит $\overline{H}$. На основании теоремы § 9 задача Неймана сводится к отысканию минимума функционала (f и u считаем вещественными)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) - 2(u, f) = \int_S u\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - 2f\right) dS$$

в пространстве $\overline{H}$. Теоремы § 19 и § 20 позволяют утверждать, что функция, реализующая минимум этого функционала, существует и может быть построена по методу Ритца. Как и выше, можно показать, что приближенные решения, построенные по этому методу, сходятся к точному равномерно во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω; аналогичное утверждение справедливо и для производных любого порядка.

§ 29. Метод минимальных поверхностных интегралов. Плоская задача Неймана в случае негладкого контура

Метод минимальных поверхностных интегралов дает положительный результат в плоской задаче Неймана, если контур кусочно-гладкий, причем в угловых точках внутренние по отношению к области углы, образованные двумя дугами контура, больше π (но меньше 2π).

Положим $z = x + iy$. Пусть z_0 — угловая точка контура S, и пусть внутренний угол в этой точке равен $\alpha\pi$, $1 < \alpha < 2$. Отобразим область[1] Ω конформно на некоторую область Ω' плоскости t, ограниченную окружностями. Обозначим через t_0 точку[2] S', отвечающую точке z_0 при этом отображении.

---

[1] Область Ω, вообще говоря, многосвязная.
[2] S' — граница области Ω'.

Как известно,

$$t-t_0=(z-z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\,\omega(z), \tag{1}$$

где $\omega(z)$ — непрерывно-дифференцируема на S вблизи z_0 и $\omega(z_0)\neq 0$.

Так как контур S' — гладкий, то, по доказанному в предшествующем параграфе,

$$\int\limits_{S'} u\frac{\partial u}{\partial\nu'}\,dS'\geqslant\gamma^2\int\limits_{S'} u^2\,dS';\quad \int\limits_{S'} u\,dS'=0,$$

где ν' — нормаль к контуру S'. Перейдем в последнем неравенстве на плоскость z. При этом, как известно,

$$\frac{\partial u}{\partial\nu'}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\left|\frac{dz}{dt}\right|;\quad dS'=\left|\frac{dt}{dz}\right|dS$$

и, следовательно,

$$\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS\geqslant\gamma^2\int\limits_S\left|\frac{dt}{dz}\right|u^2\,dS,\quad \int\limits_S u\left|\frac{dt}{dz}\right|dS=0. \tag{2}$$

Как видно из (1), в угловых точках $\frac{dt}{dz}=\infty$; в точках гладкости контура $\frac{dt}{dz}$ отлична от нуля и непрерывна в силу известных свойств конформного отображения. Отсюда следует, что нижняя грань функции $\left|\frac{dt}{dz}\right|$ положительна. Пусть

$$\left|\frac{dt}{dz}\right|\geqslant\delta^2,\quad \delta>0.$$

Тогда из (2) следует, что

$$\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS\geqslant(\gamma\delta)^2\int\limits_S u^2\,dS, \tag{3}$$

если только

$$\int\limits_S u\left|\frac{dt}{dz}\right|dS=0. \tag{4}$$

Положим теперь

$$v=u-C,\quad C=\mathrm{const}$$

и подберем C так, чтобы

$$\int_S v\,dS = 0, \tag{5}$$

т. е. чтобы $v \in \overline{H}$. Для этого, очевидно, надо положить

$$C = \frac{1}{\overline{S}} \int_S u\,dS.$$

Оценим норму v. Так как v ортогональна к постоянной, а $u = v + C$, то в силу равенства (1) § 5, $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|C\|^2$. Отсюда $\|u\| \geqslant \|v\|$.

Обратимся к неравенству (3). Имеем $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ и, следовательно,

$$\int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = \int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS + C \int_S \frac{\partial v}{d\nu}\,dS.$$

Второй интеграл справа равен нулю, по известному свойству гармонических функций. Таким образом

$$\int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = \int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS. \tag{6}$$

Интеграл в правой части (3)

$$\int_S u^2 dS = \|u\|^2 \geqslant \|v\|^2. \tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в (3), получим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}, v\right) \geqslant \|v\|^2. \tag{8}$$

Неравенство (8) показывает, что и в рассматриваемом случае оператор $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ — положительно-определенный в $\overline{H}$. Аналогично тому, что было сказано в § 27, задача Неймана с краевым условием $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_S = f(s)$ в рассматриваемом случае равносильна задаче о минимуме функционала

$$\int_S \left\{ v\frac{\partial v}{\partial \nu} - 2f(s)v \right\} dS; \quad \int_S v\, dS = 0.$$

Эта же задача может быть решена по методу Ритца.

§ 30. Метод Ритца в проблеме собственных значений

Пусть оператор Au — сомосопряженный, ограниченный снизу. Положим [1]

$$d = \inf \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{1}$$

По теореме 1 § 17 d есть наименьшее собственное число оператора A, если существует элемент u_0 такой, что

$$d = \frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)}.$$

Если допустить, что такой элемент существует, то определение наименьшего собственного числа оператора A сводится к определению нижней грани величин (1), или, что то же, к определению нижней грани величины

$$(Au, u) \tag{2}$$

при дополнительном условии

$$(u, u) = 1. \tag{3}$$

Покажем, что эту задачу можно решить по методу Ритца. Возьмем последовательность элементов $\{\varphi_n\}$, входящих в область определения оператора A, и допустим, что эта последовательность обладает следующими свойствами: 1) она полна в H, 2) каков бы ни был элемент u из области определения оператора A, можно найти такое натуральное число n и такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, чтобы $(A(u - u^*), u - u^*) < \varepsilon$, где

$$u^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

и ε — произвольное положительное число. Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

[1] Символ $\inf x$ означает нижнюю грань величины x.

где a_k — постоянные коэффициенты. Выберем эти коэффициенты так, чтобы u_n удовлетворяло соотношению (3) и чтобы величина (Au_n, u_n) была минимальной. Дело сводится к тому, чтобы найти минимум функции n переменных (вообще говоря, комплексных)

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k, m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k \bar{a}_m, \tag{4}$$

связанных уравнением

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k \bar{a}_m = 1. \tag{5}$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию $\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda (u_n, u_n)$, где λ — неопределенный пока численный множитель, и приравняем нулю ее частные производные по α_m и по β_m, где α_m и β_m означают вещественную и мнимую части коэффициента a_m. Повторяя рассуждения § 20, мы придем к системе уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{a}_m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots n,$$

или, в раскрытом виде,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)] = 0, \tag{6}$$

$$m = 1, 2, \ldots n.$$

Система (6) — линейная однородная относительно неизвестных a_k, которые не могут одновременно обратиться в нуль — в противном случае было бы нарушено уравнение (5). Отсюда следует, что определитель системы (6) должен обратиться в нуль; это дает нам уравнение для λ:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (\varphi_1, \varphi_1); & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (\varphi_2, \varphi_1), & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (\varphi_1, \varphi_2); & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (\varphi_2, \varphi_2), & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (\varphi_n, \varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (\varphi_1, \varphi_n); & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (\varphi_2, \varphi_n), & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Если последовательность $\{\varphi_n\}$ ортонормирована в H, то уравнение (7) упрощается и принимает вид

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda; & (A\varphi_2,\varphi_1); \ldots & (A\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2); & (A\varphi_2,\varphi_2)-\lambda; \ldots & (A\varphi_n,\varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\varphi_1,\varphi_n); & (A\varphi_2,\varphi_n); \ldots & (A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Далее, если решается задача с естественными краевыми условиями, то уравнение (7) заменяется следующим

$$\begin{vmatrix} \Delta_1(\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(\varphi_1,\varphi_1); & \Delta_1(\varphi_2,\varphi_1)-\lambda(\varphi_2,\varphi_1); & \ldots & \Delta_1(\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(\varphi_n,\varphi_1) \\ \Delta_1(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(\varphi_1,\varphi_2); & \Delta_1(\varphi_2,\varphi_2)-\lambda(\varphi_2,\varphi_2); & \ldots & \Delta_1(\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(\varphi_n,\varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_1(\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(\varphi_1,\varphi_n), & \Delta_1(\varphi_2,\varphi_n)-\lambda(\varphi_2,\varphi_n); & \ldots & \Delta_1(\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

где Δ_1 — функционал, определенный в § 10.

Мы будем считать, что при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ линейно-независимы; тогда уравнение (7) будет точно n-ой степени, так как коэффициент при $(-1)^n\lambda^n$ есть определитель Грама элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Отсюда следует, что уравнение (7) имеет ровно n корней. Пусть λ_0 — какой-либо из этих корней. Подставив его в систему (6), мы сделаем ее определитель равным нулю, и эта система будет иметь нетривиальные решения. Пусть $a_k^{(0)}$, $k=1, 2, \ldots n$ — такое решение. Тогда $\mu a_k^{(0)}$, где μ — произвольный численный множитель, также удовлетворяет системе (6). Подставив $\mu a_k^{(0)}$ в (5), мы найдем значение μ. Заменив теперь обозначение $\mu a_k^{(0)}$ на $a_k^{(0)}$, мы можем в последующем под $a_k^{(0)}$ понимать то решение (6), которое удовлетворяет уравнению (5). Подставив в (6) $\lambda=\lambda_0$ и $a_k=a_k^{(0)}$, мы получим тождество, которое запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(A\varphi_k,\varphi_m)=\lambda_0 \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(\varphi_k,\varphi_m), \quad m=1, 2, \ldots n.$$

Умножим его на $\overline{a}_m^{(0)}$ и просуммируем по всем m. Мы получим тогда

$$\sum_{k, m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^{(0)} \overline{a}_m^{(0)} = \lambda_0 \sum_{k, m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^{(0)} \overline{a}_m^{(0)}.$$

В силу уравнения (5), правая часть последнего равенства равна λ_0; левая его часть равна $(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)})$, где

$$u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{k} a_k^{(0)} \varphi_k.$$

Таким образом

$$\lambda_0 = (Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}). \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что *уравнение* (7) *имеет только вещественные корни, если оператор A — самосопряженный.* Далее, один из элементов $u_n^{(0)}$ реализует минимум величины (4). Формула (10) показывает теперь, что *этот минимум равен наименьшему из корней уравнения* (7).

С возрастанием n указанный минимум, который мы ниже будем обозначать через $\lambda_n^{(0)}$, не возрастает; в то же время он не меньше величины d. Отсюда следует, что при $n \to \infty$ величина $\lambda_n^{(0)}$ стремится к пределу, который больше или равен d. Докажем, что этот предел равен d; этим будет оправдано применение метода Ритца в проблеме собственных значений.

Рассмотрим сперва случай $d > 0$. В этом случае оператор A — положительно-определенный.

Введем в рассмотрение (см. § 19) гильбертово пространство H_0, полагая

$$[u, v] = (Au, v); \quad \| u \|^2 = (Au, u).$$

Свойство 2 последовательности $\{\varphi_n\}$ *означает, что она полна в* H_0.

По определению нижней грани, при любом $\varepsilon > 0$ существует элемент u' такой, что $(u', u') = 1$ и

$$d \leqslant (Au', u') < d + \varepsilon,$$

или, что то же,

$$\sqrt{d} \leqslant |u'| < \sqrt{d+\varepsilon}.$$

Последовательность $\{\varphi_n\}$ — полная в H_0, поэтому можно найти элемент u_N' вида

$$u_N' = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_k, \quad b_k = \text{const}$$

так, что $|u' - u_N'| < \sqrt{\varepsilon}$.

Отсюда

$$|u_N'| \leqslant |u'| + \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}$$

или

$$(Au_N', u_N') < (\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon})^2.$$

Из (1) следует, что $\|u_N' - u'\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{d}} |u_N' - u'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$. Отсюда $\|u_N'\| \geqslant \|u'\| - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$ и, следовательно,

$$d \leqslant \frac{(Au_N' u_N')}{(u_N', u_N')} = \frac{|u_N'|^2}{\|u_N'\|^2} < \frac{(\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon})^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}\right)^2} = d + \eta,$$

где η стремится к нулю вместе с ε. Далее, $\lambda_N^{(0)}$ есть минимум выражения вида

$$\frac{(Au_N, u_N)}{(u_N, u_N)}; \quad u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k,$$

поэтому, в частности,

$$d \leqslant \lambda_N^{(0)} \leqslant \frac{(Au_N', u_N')}{(u_N', u_N')} < d + \eta.$$

Если $n \geqslant N$, то $\lambda_n^{(0)} \leqslant \lambda_N^{(0)}$, и, следовательно, $d \leqslant \lambda_n^{(0)} < d + \eta$. Последнее неравенство показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{(0)} = d. \tag{11}$$

Пусть теперь $d \leqslant 0$. Положим

$$A_1 u = Au + (1 - d)\, u.$$

Оператор $A_1 u$ — положительно-определенный, так как

$$(A_1 u, u) = (Au, u) + (1 - d)(u, u) \geqslant (u, u).$$

Очевидно также, что

$$\inf \frac{(A_1 u, u)}{(u, u)} = 1.$$

Далее, если $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ и $(u_n, u_n) = 1$, то

$$\min (A_1 u_n, u_n) = \min [(Au_n, u_n) + (1 - d)(u_n, u_n)] = \\ = \lambda_n^{(0)} + 1 - d.$$

Из формулы (11) непосредственно следует, что

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n^{(0)} - d + 1) = 1,$$

т. е. что

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{(0)} = d.$$

Чтобы получить приближенное значение второго собственного числа, будем искать минимум скалярного произведения (4) при дополнительных условиях

$$(u_n, u_n) = 1 \tag{5}$$

и

$$(u_n^{(0)}, u_n) = \sum_{k, m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} \overline{a}_m = 0, \tag{12}$$

где $u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$ есть приближенное значение первой нормированной собственной функции оператора A. По методу Лагранжа составляем выражение

$$(Au_n, u_n) - \lambda (u_n, u_n) - 2\mu (u_n, u_n^{(0)})$$

и приравниваем нулю его частные производные по α_k и β_k $(\alpha_k + i\beta_k = a_k)$. Это приводит нас к системе

$$\sum_{k=1}^{n} \{a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)] - \mu (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)}\} = 0. \tag{13}$$

Обе части уравнения (13) умножим на $\overline{a}_m^{(0)}$ и просуммируем по m:

$$\sum_{k, m=1}^{n} a_k \overline{a}_m^{(0)} [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] -$$

$$- \mu \sum_{k, m=1}^{n} a_k^{(0)} \overline{a}_m^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = 0. \qquad (14)$$

Вторая сумма, как нетрудно видеть, равна $(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}) = 1$. В первой сумме заменим индекс m на k и обратно и будем суммировать сперва по k, затем по m. Мы приведем тогда первую сумму к виду

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k^{(0)} [(A\varphi_m, \varphi_k) - \lambda(\varphi_m, \varphi_k)]. \qquad (15)$$

Величина, сопряженная с внутренней суммой, равна

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} [(\varphi_k, A\varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)]$$

или, так как оператор A — самосопряженный,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)].$$

В силу уравнений (6), которым удовлетворяют числа $a_k^{(0)}$ при $\lambda = \lambda_n^{(0)}$, последнее выражение равно

$$(\lambda_n^{(0)} - \lambda) \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k, \varphi_m\right) =$$

$$= (\lambda_n^{(0)} - \lambda)(u_n^{(0)}, \varphi_m) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda) \overline{(\varphi_m, u_n^{(0)})}.$$

Выражение (15) принимает вид

$$(\lambda_n^{(0)} - \lambda) \sum_{m=1}^{n} a_m (\varphi_m, u_n^{(0)}) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda)(u_n, u_n^{(0)}),$$

что равно нулю в силу (12). Теперь из (14) следует, что

$\mu = 0$, и система (13) совпадает с системой (6). Отсюда, как и выше, заключаем, что искомый минимум равен λ, которое является корнем уравнения (7). Нетрудно видеть, что на этот раз нужно взять второй по величине корень указанного уравнения.

Аналогично можно строить приближенные значения следующих собственных чисел; все они суть корни уравнения (7).

Предшествующие рассуждения относились к собственным числам уравнения

$$Au - \lambda u = 0,$$

но они почти не изменяются, если перейти к собственным числам уравнения

$$Au - \lambda Bu = 0,$$

где оператор B — положительно-определенный. Напомним только, что наименьшее собственное число этого уравнения совпадает с величиной

$$\min \frac{(Au, u)}{(Bu, u)},$$

если этот минимум достигается; нетрудно также видеть, что уравнения (6) и (7) должны быть заменены следующими:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (B\varphi_k, \varphi_m)\right] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots n; \qquad (6_1)$$

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1); & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1); & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2); & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2); & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n); & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n); & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \qquad (7_1)$$

В проблеме собственных значений метод Ритца позволяет строить минимум d отношения (1); будет ли d собственным числом или нет, из метода Ритца никак не вытекает. Из теоремы 1 § 16 следует, что d есть точка спектра оператора. Не вдаваясь в подробности, мы ограничимся следующими указаниями.

Если в какой-либо конкретной задаче мы хотим установить, что d — минимум отношения (1) — есть собственное значение оператора A, то это можно пытаться делать двумя способами. Первый из них состоит в том, что уравнение $Au - \lambda u = 0$ сводят к равносильному ему интегральному уравнению типа Фредгольма с параметром λ. Как известно, спектр уравнения Фредгольма состоит только из собственных чисел. Но тогда спектр равносильного ему уравнения $Au - \lambda u = 0$ тоже содержит только собственные числа; число d, будучи точкой спектра этого уравнения, необходимо является его собственным числом. К интегральному уравнению типа Фредгольма можно свести ряд важнейших задач математической физики, связанных с проблемой собственных значений. Перечислим некоторые из них.

1) Уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [q(x) - \lambda r(x)]\,u = 0 \tag{16}$$

при краевом условии вида

$$u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \tag{17}$$

где $p(x)$ и $r(x)$ — непрерывные, строго положительные функции от x в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, сводится к интегральному уравнению

$$u(x) - \lambda\int_a^b r(\xi)\,G(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = 0, \tag{18}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина оператора $-\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right] + qu$, отвечающая краевым условиям (17).

2) Пусть в уравнении (16) $p(x)$ непрерывна и положительна при $a < x \leqslant b$, но $p(a) = 0$, причем выполняется неравенство

$$\frac{p(x)}{x-a} \geqslant A = 0, \quad A = \mathrm{const}.$$

Имеет смысл задача о собственных числах уравнения (16) при следующих краевых условиях:

$$u(x) \text{ ограничена при } x \to a; \quad u'(b) + \beta u'(b) = 0. \tag{17_1}$$

Можно построить функцию Грина оператора $-\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]+qu$, отвечающую условиям (17_1); при $x=a$ или $\xi=a$ она не будет непрерывной, но можно доказать, что она будет квадратично-суммируемой, так что теория Фредгольма для уравнения (18) остается в силе.

Отсюда следует, что при условиях (17) спектр уравнения (16) состоит только из собственных чисел.

3) Аналогичные результаты получаются, если $p(x)>0$ при $a<x<b$ и $p(a)=p(b)=0$, но $p(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{p(x)}{(x-a)(b-x)}\geqslant A, \quad A=\mathrm{const};$$

условия (16) заменяются требованием ограниченности $u(x)$ при $x\to a$ и $x\to b$.

4) Уравнение

$$-\Delta u-\lambda u=0$$

при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_S=0$$

сводится к интегральному уравнению

$$u(P)-\lambda\int\limits_\Omega G(P,Q)\,u(Q)\,d\Omega=0, \tag{19}$$

где Ω — область, ограниченная поверхностью S; P и Q — точки области Ω и $G(P, Q)$ — соответствующая функция Грина. Если область Ω — трехмерная, то легко доказать, что $0\leqslant G(P,Q)\leqslant\frac{1}{4\pi r}$, где r — расстояние между P и Q. Действительно, $G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-g\right)$, где g — гармоническая в Ω функция, которая на S равна $\frac{1}{r}$ и, следовательно, положительна; отсюда $G<\frac{1}{4\pi r}$. Эта оценка показывает, что функцию $G(P,Q)$ можно рассматривать, как „ядро со слабой особенностью“, [1] для которого справедлива теория Фред-

[1] См., например, С. Г. Михлин [1].

гольма и, в частности, теорема о том, что спектр уравнения (18) состоит только из собственных чисел.

Если область Ω — плоская, то[1] $0 \leqslant G(P, Q) < a|\ln r| + b$, где a и b — некоторые постоянные. В этом случае ядро уравнения (18) квадратично-суммируемо, и для него справедлива теория Фредгольма.

5) Аналогичные результаты могут быть получены для общего уравнения второго порядка эллиптического типа при самосопряженных краевых условиях, рассмотренных в § 13 и в предположении, что граница S — достаточно гладкая.

6) Задача о собственных числах уравнений теории упругости сведена к уравнению типа Фредгольма в статье Г. Вейля [1], который также рассматривал случай гладкой границы.

Второй путь для установления того факта, что d есть собственное число оператора A, основан на теореме 1 § 17 и в существенном сводится к следующему.

Пусть u_n — минимизирующая последовательность нашей задачи, т. е., пусть

$$(Au_n, u_n) \to d, \quad (u_n, u_n) = 1.$$

Если удастся выделить из $\{u_n\}$ частичную последовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся (в смысле метрики данного гильбертова пространства) к некоторой предельной функции u_0, то $(u_0, u_0) = 1$, и можно доказать, что $(Au_0, u_0) = d$. По теореме 1 § 17, u_0 есть собственная функция оператора A, соответствующая собственному числу d.

В применении к уравнениям второго порядка эллиптического типа этот метод подробно разработан в книге Куранта — Гильберта [2]; в задачах теории упругости его использовал К. Фридрихс [3]. Существенным преимуществом указанного метода перед методом интегральных уравнений является то, что он применим и в случае негладкой границы.

§ 31. Метод Л. В. Канторовича

Л. В. Канторович предложил метод решения минимальных задач, существенно отличный от метода Ритца. Этот метод подробно изложен в монографии Л. В. Канторовича

---

[1] См. В. И. Смирнов [3].

и В. И. Крылова [1]; здесь мы ограничимся некоторыми пояснениями.

Для простоты допустим, что область Ω — плоская и имеет вид, изображенный на черт. 6, и что требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$Lu = f \tag{1}$$

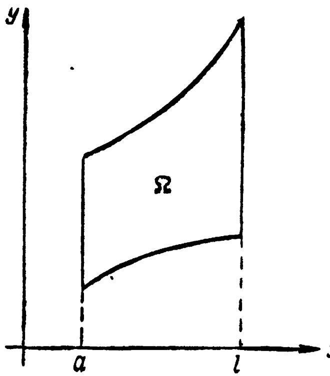
при условии $u|_S = 0$. Введем соответствующее гильбертово пространство и допустим, что в этом пространстве оператор Lu положительно-определенный на линеале функций, удовлетворяющих указанным краевым условиям. Тогда наша задача сводится к задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (Lu, u) - (u, f) - (f, u).$$

Положим теперь

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x, y) f_k(x),$$

где $\chi_k(x, y)$ — известные функции, равные нулю на S, кроме, может быть, прямых $x = a$ и $x = b$. Функции одной переменной $f_k(x)$ определим из требования, чтобы функционал $F(u_n)$ имел минимальное значение. Обычными для вариационного исчисления методами мы получаем для $f_k(x)$ систему дифференциальных уравнений; к ним добавляются краевые условия при $x = a$ и $x = b$, вытекающие из краевых условий задачи



Черт. 6.

$$f_k(a) = f_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Как мы видим, сущность метода Л. В. Канторовича состоит в том, что он сводит (приближенно) интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 32. Метод Куранта

Р. Курант [1] предложил метод построения минимизирующей последовательности, которая, при известных условиях, сходится не только в среднем, но и равномерно вместе с последовательностями производных до некоторого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = f \tag{1}$$

и требуется найти его интеграл, определенный в некоторой конечной области Ω m-мерного пространства $(x_1, x_2 \dots x_m)$ и удовлетворяющий на границе S этого объема некоторым однородным краевым условиям. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\Omega)$. Допустим, что оператор Lu — положительно-определенный на линеале достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям нашей задачи. Тогда, как мы уже знаем, уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее[1] заданным краевым условиям; это решение реализует минимум функционала

$$F(u) = (Lu, u) - (u, f) - (f, u).$$

Допустим теперь, что f имеет непрерывные производные по $x_1, x_2, \dots x_m$ до порядка $k-1$ включительно и, по крайней мере, квадратично-суммируемые производные порядка k. Составим функционал

$$\Phi(u) = F(u) + \sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=j} \left\| \frac{\partial^j (Lu-f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\|^2. \tag{2}$$

Очевидно, $\Phi(u) \geqslant F(u)$. Далее, функция u, реализующая минимум $F(u)$, реализует также минимум $\Phi(u)$, так как эта функция делает наименьшим в (2) как первое слагаемое, так и второе, которое она обращает в нуль. Отсюда следует, что решение нашей краевой задачи можно найти, отыскивая решение задачи о минимуме $\Phi(u)$. Построим для этого функционала минимизирующую последовательность $\{u_n\}$, на-

---

[1] Может быть, в обобщенном смысле; см. § 27.

пример по методу Ритца. Тогда, очевидно,

$$\left\| \frac{\partial^j (Lu_n - f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \ j = 1, 2, \dots k; \tag{3}$$

соотношения (3) позволяют сделать дополнительные заключения о сходимости минимальной последовательности.

Рассмотрим для примера уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f$$

на плоскости при краевом условии $u|_S = 0$. Положим в (2) $k = 0$. Тогда

$$\Phi(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f) + \|\Delta u - f\|^2 =$$
$$= \int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf + (\Delta u - f)^2 \right\} d\Omega.$$

Построим минимизирующую последовательность u_n. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_\Omega (\Delta u_n - f)^2 \, d\Omega \to 0. \tag{4}$$

По формуле Грина,

$$u_n(x, y) - u(x, y) = \int\limits_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u_n - f) \, d\Omega,$$

отсюда по неравенству Буняковского

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leqslant \sqrt{\int\limits_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta} \times$$
$$\times \sqrt{\int\limits_\Omega (\Delta u_n - f)^2 \, d\Omega}. \tag{5}$$

Функция G имеет оценку (см. § 30)

$$0 \leqslant G \leqslant a |\ln r| + b;$$

отсюда легко усмотреть, что первый множитель справа в (5) ограничен:

$$\sqrt{\int\limits_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta} < C, \ C = \text{const}.$$

Теперь из (5) следует, что $u_n(x, y) \to u(x, y)$ *равномерно* в $\overline{\Omega} = \Omega + S$.

Введение добавочных слагаемых в $\Phi(u)$ усложняет вычисления по методу Ритца; это усложнение, однако, может быть оправдано, если по смыслу задачи желательно получить равномерно-сходящуюся последовательность.

К. Н. Шевченко [1] применил метод Куранта к трехмерной статической задаче теории упругости. Пользуясь методом Куранта, К. Н. Шевченко [2] рассмотрел также задачу о колебании пластинки в ее плоскости.

§ 33. Метод Трефтца

Как было указано в § 20, метод Ритца дает величину минимального функционала с избытком. Было бы желательно иметь также метод построения приближенного решения, дающего указанную величину с недостатком. Е. Трефтц [1] предложил метод, который в некоторых случаях позволяет построить последовательность функций, дающих приближение к искомому минимуму функционала снизу. Идея метода Трефтца состоит в следующем. В то время, как в методе Ритца приближенное решение ищется в классе функций, точно удовлетворяющих краевым условиям, но не дифференциальному уравнению, в методе Трефтца приближенное решение точно удовлетворяет дифференциальному уравнению, но, вообще говоря, не удовлетворяет поставленным краевым условиям. Сам Трефтц изложил свой метод [1] применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Хотя метод Трефтца можно применить к значительно более обширному классу задач, мы ограничимся здесь задачей Дирихле, как наиболее интересной.

Пусть требуется найти гармоническую в области Ω функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u|_S = f(P), \tag{1}$$

где $f(P)$ — функция, которую мы для простоты предположим непрерывной на границе S. Искомую функцию можно опре-

---

[1] Без доказательства сходимости.

делить (см. § 12), как функцию, минимизирующую интеграл

$$\Lambda(u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{2}$$

по сравнению с любой другой функцией, удовлетворяющей условию (1). Метод Трефтца состоит в следующем.

Допустим, что нам дана последовательность линейно-независимых гармонических в Ω функций φ_n, полная в следующем смысле: какова бы ни была гармоническая в Ω функция φ, квадратично-суммируемая в Ω вместе со своими первыми производными, можно по заданному числу $\varepsilon > 0$ найти натуральное число n и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ такие, что

$$\Lambda\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \int_{\Omega} \left\{\operatorname{grad}\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\}^2 d\Omega < \varepsilon.$$

Будем искать приближенное решение нашей задачи в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

где n — произвольно выбранное число; коэффициенты a_k найдем из условия

$$\Lambda(u - u_n) = \min, \tag{3}$$

где u — искомое решение задачи. Приравнивая нулю производные $\frac{\partial \Lambda(u - u_n)}{\partial a_k}$, мы легко придем к системе уравнений

$$\Lambda(u_n - u, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4}$$

где мы для краткости обозначали

$$\Lambda(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\Omega.$$

На первый взгляд может показаться, что система (4), кроме коэффициентов a_k, зависит еще от неизвестной функции u. На самом деле это не так. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой Грина, по которой

$$\Lambda(u_n - u, \varphi_k) = -\int_\Omega (u_n - u)\,\Delta\varphi_k\,d\Omega + \int_S (u_n - u)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS,$$

где ν — внешняя нормаль к S. Но $\Delta\varphi_k = 0$, поэтому первый интеграл исчезает, и мы приходим к системе

$$\int_S (u_n - u)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{5}$$

Значение искомой функции u на S известно и равно f. Заменяя u через f и u_n через $\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$, мы получаем окончательно следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_S \varphi_j \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS = \int_S f\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Исследуем ближе систему (6). Непосредственно видно, что u_n не изменится, если u изменить на постоянную, так как это не изменит функционала (3). Далее, если u_n есть приближенное решение, полученное по методу Трефтца, то $u_n + \mathrm{const}$ будет таким же решением. Имея это в виду, будем считать, что средние значения гармонических функций u и φ_k, взятые по границе S, равны нулю. Это равносильно вычитанию некоторой постоянной из каждой такой функции. Теперь нетрудно доказать разрешимость системы (6). Допуская противное, мы найдем, что однородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \int_S \varphi_j \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{7}$$

имеет нетривиальное решение. Положим $\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)}\varphi_j = v$. Тогда (7) принимает вид

$$\int_S v\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,dS = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Умножая на $a_k^{(0)}$ и суммируя, получим

$$\int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS = 0.$$

Отсюда следует, что $v = \text{const}$; так как среднее значение $v|_S$ равно нулю, то $v = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)}\varphi_j = 0$. Теперь из линейной независимости функций φ_j следует, что $a_j^{(0)} = 0$, вопреки предположению.

Раз система (6) разрешима, приближенное решение u_n может быть построено при любом n. Докажем теперь, что

$$\Lambda(u_n) \leqslant \Lambda(u). \tag{8}$$

Положим $u - u_n = w_n$. Тогда

$$\Lambda(u) = \Lambda(u_n + w_n) = \Lambda(u_n) + 2\Lambda(u_n, w_n) + \Lambda(w_n).$$

Но

$$\Lambda(u_n, w_n) = \Lambda(u_n, u - u_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Lambda(\varphi_k, u - u_n) = 0$$

в силу уравнений (3). Теперь

$$\Lambda(u_n) = \Lambda(u_n) + \Lambda(w_n),$$

откуда непосредственно вытекает неравенство (8).

В заключение исследуем вопрос о сходимости метода Трефтца. Ограничимся случаем плоской области Ω, и будем считать, что ее граница S — гладкая с непрерывной кривизной. В § 28 было показано, что оператор $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — положительно-определенный в пространстве $\overline{H}$. Напомним, что $\overline{H}$ состоит из гармонических в Ω функций, представимых посредством функции Грина через свои предельные значения, которые считаются квадратично-суммируемыми и удовлетворяют равенству

$$\int_S u\,dS = 0.$$

Раз $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — оператор положительно-определенный, то существует такая положительная постоянная γ, для которой верно неравенство [1]

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS \geqslant \gamma^2 \int_S v^2 dS, \quad v \in \overline{H}. \tag{9}$$

Так как средние значения $u|_S$ и $\varphi_k|_S$ равны нулю, эти функции суть элементы $\overline{H}$. По предположению о полноте последовательности $\{\varphi_k\}$ можно по данному $\varepsilon > 0$ найти натуральное число N и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$ так, чтобы

$$\Lambda (u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k) < \varepsilon.$$

Тем более $\Lambda (u_N - u) < \varepsilon$, где u_N — приближенное решение, построенное по методу Трефтца. При $n \geqslant N$, $\Lambda (u - u_n) \leqslant \leqslant \Lambda (u - u_N) < \varepsilon$. Функция $u - u_n$ — гармоническая, и по известной формуле Грина

$$\Lambda (u - u_n) = \int_S (u - u_n) \frac{\partial (u - u_n)}{\partial \nu} dS'.$$

В силу неравенства (9),

$$\int_S (u - u_n)^2 dS < \frac{\varepsilon}{\gamma^2}. \tag{10}$$

Пусть $G(P, Q)$ — функция Грина области Ω. Тогда

$$u(P) - u_n(P) = \int_S (u(Q) - u_n(Q)) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu} dS. \tag{11}$$

Допустим, что P меняется в некоторой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω. Тогда, как известно, функция $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu}$ ограничена, так как и все ее производные, по координатам точки P. Применяя к (11) неравенство Буняков-

[1] Мы пишем это неравенство, предполагая функцию v вещественной.

ского и используя оценку (10), мы найдем, что $u - u_n \to 0$ *равномерно в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри* Ω.

Дифференцируя (11), мы тем же путем убедимся, что производные любого порядка от u_n равномерно сходятся к соответствующим производным от u в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω. [1]

В заключение заметим, что при составлении системы (6) нет нужды фактически приводить к нулю средние значения функций u и φ_k. Действительно, если заменить u на $u + c$ и φ_k на $\varphi_k + c_k$, где c и c_k — постоянные, то коэффициенты и свободные члены в (6) примут следующий вид:

$$\int\limits_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS + c_j \int\limits_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS;$$

$$\int\limits_S f \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS + c \int\limits_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS.$$

Но

$$\int\limits_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0,$$

так как функция φ_k — гармоническая. Отсюда видно, что изменение u и φ_k на постоянные не меняет системы (6).

Известным недостатком метода Трефтца является трудность фактического построения полной системы гармонических функций. Если область Ω — плоская односвязная с достаточно гладкой границей, то полной будет система гармонических полиномов; если Ω — многосвязная, то полную систему образуют некоторые гармонические рациональные функции (см. ниже § 63). В трехмерной области такую систему указать гораздо труднее; в частности не доказано, что гармонические полиномы образуют полную систему в области, ограниченной, например, эллипсоидом.

---

[1] Напомним, что мы считаем среднее значение как u, так и u_n равным нулю; без этого сходимость $u_n \to u$, вообще говоря, не имеет места. Утверждение о сходимости производных справедливо независимо от того, равны или неравны нулю упомянутые средние значения.

§ 34. Бигармоническое уравнение. Метод негармонического остатка

Как было установлено в § 15, интегрирование бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f \tag{1}$$

при краевых условиях

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{2}$$

равносильно задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (\Delta^2 u, \ u) - 2(u, f) = \int_\Omega \{(\Delta u)^2 - 2fu\} \, d\Omega \tag{3}$$

при тех же условиях (2). В § 24 мы установили разрешимость этой задачи и применимость к ней метода Ритца.

В настоящем параграфе мы дадим новый метод решения бигармонической задачи. Метод этот применим вообще в тех случаях, когда данный дифференциальный оператор есть квадрат некоторого другого самосопряженного в смысле Лагранжа дифференциального оператора. В применении к бигармоническому уравнению этот метод подробно разработан З. Х. Рафальсоном [1]; по этому методу можно строить числа, меньшие искомого минимума функционала (3) и сколь угодно близкие к указанному минимуму.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{u}(P)$ — *любая функция, непрерывная в* Ω *вместе со своими первыми и вторыми производными и которая удовлетворяет краевым условиям* (2) *на границе* S *области* Ω. *Пусть далее,* $q(P)$ — *любая функция, удовлетворяющая в* Ω *уравнению*

$$\Delta q = f \tag{4}$$

непрерывная и непрерывно-дифференцируемая в $\bar{\Omega} = \Omega + S$.[1] *Тогда*

$$F(\tilde{u}) \geqslant -\int_\Omega q^2 \, d\Omega.$$

[1] Мы допускаем, что такая функция существует.

Доказательство очень просто. Имеем

$$\int_\Omega f\tilde{u}\,d\Omega = \int_\Omega \tilde{u}\Delta q\,d\Omega = \int_\Omega q\Delta\tilde{u}\,d\Omega + \int_S \left(\tilde{u}\frac{\partial q}{\partial \nu} - q\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS = \\ = \int_\Omega q\Delta\tilde{u}\,d\Omega,$$

в силу условий (2). Теперь

$$F(\tilde{u}) + \int_\Omega q^2\,d\Omega = \int_\Omega \{(\Delta\tilde{u})^2 - 2\tilde{u}f + q^2\}\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \{(\Delta\tilde{u})^2 - 2q\Delta\tilde{u} + q^2\}\,d\Omega = \int_\Omega (\Delta\tilde{u} - q)^2\,d\Omega \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Если принять $\tilde{u} = u$, где u — решение бигармонического уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), то, по доказанному,

$$F(u) \geqslant -\int_\Omega q^2\,d\Omega. \tag{5}$$

Обычно найти какое-либо решение уравнения (4) не представляет затруднений, и тогда интеграл

$$-\int_\Omega q^2\,d\Omega = -\|q\|^2$$

даст нам нижнюю границу для минимума функционала (5). Дальнейшее сводится к тому, чтобы эту границу уточнить. Это делается таким образом. Возьмем последовательность функций $\{\varphi_k(P)\}$, *гармонических* в Ω, непрерывных и непрерывно-дифференцируемых в $\overline{\Omega}$. Мы будем считать их ортонормированными в Ω, так что

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_\Omega \varphi_k(P)\,\varphi_m(P)\,d\Omega = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Этого всегда можно добиться, применив к взятой последовательности процесс ортогонализации. Положим теперь

$$q_n(P) = q(P) - \sum_{k=1}^{n} (q, \varphi_k)\varphi_k(P).$$

Функция $q_n(P)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и в качестве нижней границы для величины $F(u)$ мы получаем теперь величину $-\|q_n\|^2$, которая, как легко видеть, равна

$$-\|q_n\|^2 = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (q, \varphi_k)^2 \tag{6}$$

и, следовательно, больше чем $-\|q\|^2$. Допустим теперь, что последовательность $\{\varphi_k(P)\}$ полна на множестве функций, гармонических и квадратично-суммируемых в Ω. Тогда можно доказать, что ($u(P)$ — интеграл уравнения (1), удовлетворяющий условиям (2))

$$F(u) = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)^2 \tag{7}$$

и

$$u(P) = \int_{\Omega} \left\{q(Q) - \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)\varphi_k(Q)\right\} K(r)\, d\Omega, \tag{8}$$

где через $K(r)$ мы обозначили так называемое особое решение уравнения Лапласа, равное $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ на плоскости и $-\frac{1}{4\pi r}$ в трехмерном пространстве; r, как обычно, обозначает расстояние между точками P и Q.

Сохранив в ряде (7) конечное число членов, мы получим приближенное решение, которое сообщает функционалу (3) значение, меньшее его минимума при условиях (2).

Функция

$$q(P) - \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)\varphi_k(P)$$

называется *негармоническим остатком* функции $q(P)$.

Как показывает формула (8), для того, чтобы решить уравнение (1) при краевых условиях (2), достаточно найти негармонический остаток функции $q(P)$, что в свою очередь сводится к вычислению коэффициентов Фурье функции $q(P)$ по полной ортонормированной системе гармонических в Ω функций.

А. СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = f(P), \tag{1}$$

которое надлежит проинтегрировать в некоторой конечной области Ω при краевых условиях вида

$$\Gamma_j u|_S = 0, \quad j = 1, 2, \ldots k, \tag{2}$$

где S — граница области Ω.

Будем считать, что как уравнение (1), так и краевые условия (2) — самосопряженные в смысле Лагранжа; кроме того, для простоты будем операторы Lu и $\Gamma_j u$ считать вещественными.

Тогда:

а) если оператор Lu — положительный, т. е., если при любой функции $u(P)$, достаточное число раз непрерывно-дифференцируемой в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющей условиям (2), имеет место неравенство

$$(Lu, u) = \int\limits_{\Omega} uLu\, d\Omega > 0, \quad u \not\equiv 0,$$

то задача интегрирования уравнения (1) при краевых условиях (2) равносильна задаче о минимуме интеграла

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \{uLu - 2uf\}\, d\Omega \tag{3}$$

при тех же краевых условиях;

б) если среди краевых условий встречаются естественные, то в процессе решения задачи о минимуме интеграла (3) можно заранее этим условиям не удовлетворять.

2. Пусть при краевых условиях (2) оператор Lu — положительно-определенный, т. е. пусть существует такая положительная постоянная γ, что неравенство

$$\int_{\Omega} uLu\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_{\Omega} u^2\, d\Omega \tag{4}$$

выполняется всякий раз, когда функция u достаточное число раз непрерывно-дифференцируема в замкнутой области и удовлетворяет условиям (2). Тогда задача о минимуме интеграла (3) имеет решение, которое может быть построено по методу Ритца.

3. В §§ 21—26 главы III доказано, что в ряде основных задач математической физики неравенство (4) выполняется. Таковы задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона, а также для более общего уравнения эллиптического типа, если оно удовлетворяет условиям § 23, задачи о равновесии, под действием заданных объемных сил, упругого тела с закрепленной или свободной границей, задача о равновесии защемленной по краю пластинки, подверженной действию нормального давления, и многие другие.

4. Первым шагом в построении приближенного решения по методу Ритца является выбор последовательности координатных функций

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P), \ldots \varphi_n(P) \ldots \tag{5}$$

Эти функции должны выбираться с соблюдением следующих требований:

а) они удовлетворяют всем краевым условиям (2), кроме, может быть, естественных;

б) любые n координатных функций линейно-независимы;

в) последовательность координатных функций должна быть полной в H_0; чтобы убедиться в выполнении требования в), достаточно проверить следующее: обозначим $\psi_k = L\varphi_k$, тогда последовательность функций

$$\psi_1(P),\ \psi_2(P), \ldots \psi_n(P) \ldots$$

должна быть полной в смысле среднего квадратичного приближения, т. е., каковы бы ни были, скажем, непрерывная функция $u(P)$ и число $\varepsilon > 0$, можно найти такие постоянные n, α_1, α_2, ... α_n, что

$$\int_{\Omega} \left[u(P) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(P)\right]^2 d\Omega < \varepsilon.$$

Если это условие выполнено, то последовательность координатных функций обладает нужной полнотой.

Пренебрежение любым из перечисленных требований может привести к грубым ошибкам.

5. Когда координатные функции выбраны, приближенное решение строится в виде

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P), \tag{6}$$

где коэффициенты a_k подлежат определению.

6. Величины a_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = \int_{\Omega} f(P) \varphi_i(P) d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots n, \tag{7}$$

где численные коэффициенты A_{ik} могут быть вычисляемы двумя различными способами.

Первый способ состоит в следующем.

Пусть $u(P)$ и $v(P)$ — функции, удовлетворяющие краевым условиям (2).

Проинтегрируем k раз по частям интеграл

$$\int_{\Omega} uLv\, d\Omega$$

(k — половина порядка уравнения (1)). Допустим, что u и v удовлетворяют условиям (2), и что в силу этих условий все интегралы по границе S исчезают.

Мы придем тогда к формуле вида

$$\int_{\Omega} uLv\, d\Omega = \int_{\Omega} \lambda(u, v)\, d\Omega,$$

где $\lambda(u, v)$ — однородное выражение первой степени относительно u и ее производных до порядка k включительно. Коль скоро $\lambda(u, v)$ определено, коэффициенты A_{ik} могут быть вычислены по формуле

$$A_{ik}=\int_{\Omega}\lambda(\varphi_i,\ \varphi_k)\,d\Omega. \tag{8}$$

К этому способу необходимо прибегать, если координатные функции не удовлетворяют некоторым из естественных краевых условий.

Второй способ, более простой по форме, а иногда и по вычислениям, применим только тогда, когда координатные функции удовлетворяют всем без исключения краевым условиям.

В этом случае коэффициенты A_{ik} можно вычислять по формуле

$$A_{ik}=\int_{\Omega}\varphi_i L\varphi_k\,d\Omega. \tag{9}$$

7. Важно отметить, что система (7) — симметричная, т. е.

$$A_{ik}=A_{ki},$$

и ее определитель отличен от нуля, так что эта система всегда разрешима.

Практические методы решения систем такого вида хорошо разработаны.

8. Наименьшее собственное число уравнения

$$Lu-\lambda u=0 \tag{10}$$

при тех же краевых условиях (2) можно приближенно найти как наименьший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda B_{11}, & A_{12}-\lambda B_{12}, & \ldots & A_{1n}-\lambda B_{1n} \\ A_{21}-\lambda B_{21}, & A_{22}-\lambda B_{22}, & \ldots & A_{2n}-\lambda B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}-\lambda B_{n1}, & A_{n2}-\lambda B_{n2}, & \ldots & A_{nn}-\lambda B_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Здесь A_{ik} имеют прежние значения, а

$$B_{ik}=\int_{\Omega}\varphi_i(P)\,\varphi_k(P)\,d\Omega. \tag{12}$$

На этот раз нет необходимости считать оператор Lu положительно-определенным; достаточно, чтобы он был ограничен снизу, т. е. чтобы существовала постоянная C, положительная, отрицательная или равная нулю, такая, что

$$\int_{\Omega} uLu\,d\Omega \geqslant C \int_{\Omega} u^2\,d\Omega.$$

Следующие по величине корни уравнения (11) дают, хотя и с меньшей точностью, приближенные значения следующих собственных чисел уравнения (10).

ГЛАВА IV

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

§ 35. Определение собственных частот поперечных сейш

Сейшами называются периодические изменения уровня водоема, вызванные возмущением, сообщенным всей массе жидкости этого водоема.[1] В настоящем параграфе мы рассмотрим поперечные сейши, возникающие в длинных каналах.

Направим ось x по оси канала. В любом сечении с абсциссой x амплитуда $u(x)$ и частота σ сейш определяются уравнением.[1]

$$\frac{d}{dx}\left[S(x)\frac{du}{dx}\right]+\frac{\sigma^2}{g}b(x)u=0, \tag{1}$$

где $S(x)$ — площадь сечения канала с абсциссой x, $b(x)$ — ширина этого сечения на поверхности, g — ускорение силы тяжести.

Если канал на обоих концах закрыт стенками, то уравнению (1) сопутствуют естественные краевые условия

$$u'(0)=u'(a)=0. \tag{2}$$

Здесь a — длина канала; начало координат помещаем в одном из концов канала.

---

[1] См. Л. Н. Сретенский [1], § 70.

По доказанному в § 30, наименьшая частота сейш σ_1 определяется равенством

$$\frac{\sigma_1^2}{g} = \lambda_1 = \min \frac{\int\limits_0^a S(x)\,[u'(x)]^2\,dx}{\int\limits_0^a b(x)\,u^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

В качестве примера рассмотрим канал постоянной ширины $b(x) = b_0$, площадь сечения которого изменяется по закону $S(x) = S_0\left(1 + q \sin \frac{m\pi x}{a}\right)$, где S_0, m, q — постоянные, причем $q < 1$. Для определенности вычислений примем $q = \frac{1}{2}$, $m = 1$, так что

$$S(x) = S_0\left(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{a}\right).$$

В интеграле (3) заменим x через ax и $u(ax)$ через $u(x)$. Мы получим тогда

$$\frac{\sigma_1^2}{g} = \frac{S_0}{a^2 b}\,\mu_1, \tag{4}$$

где

$$\mu_1 = \min \frac{\int\limits_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right)[u'(x)]^2\,dx}{\int\limits_0^1 u^2(x)\,dx}. \tag{5}$$

Как было выяснено в § 30, μ_1 можно искать как минимум интеграла

$$\mu_1 = \min \int\limits_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right)[u'(x)]^2\,dx \tag{6}$$

при условии

$$\int\limits_0^1 u^2(x)\,dx = 1. \tag{7}$$

Применим к нашей задаче метод Ритца. В качестве координатных функций возьмем

$$\varphi_k(x) = \cos k\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Как известно, система функций (8), дополненная единицей, полна в пространстве $H = L_2(0, 1)$. Докажем, что система (8) полна в H_0 (§ 19). Норма в H_0 определяется формулой

$$|u|^2 = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right) |u'(x)|^2 \, dx.$$

Заменяя под интегралом $\sin \pi x$ его наибольшим и наименьшим значениями, мы получим неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\,\|u'\| \leqslant |u| \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|u'\|, \tag{9}$$

которое показывает, что H_0 состоит из функций, производные которых квадратично-суммируемы на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Известно, что система функций $\sin k\pi x$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ полна в $L_2(0, 1)$. Поэтому, если $u \in H_0$, и, следовательно, $u' \in L_2(0, 1)$, то можно подобрать целое число n и коэффициенты α_k, $k = 1, 2, \ldots n$ так, чтобы $\left\| u' - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin k\pi x \right\| < \varepsilon \sqrt{\frac{2}{3}}$, где ε — произвольное положительное число. Полагая $\beta_k = -\frac{\alpha_k}{k\pi}$ и пользуясь соотношением (9), мы из последнего неравенства получим новое неравенство

$$\left| u - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cos k\pi x \right| < \varepsilon,$$

из которого следует, что система (8) полна в H_0. Этим оправдано использование функций (8) как координатных.

Функция u, реализующая минимум отношения (5), удовлетворяет естественным краевым условиям $u'(0) = u'(1) = 0$; этим же условиям удовлетворяют и функции (8). Это не необходимо для применения метода Ритца, но улучшает сходимость процесса. Для последующих вычислений существенно также, что функции (8) ортогональны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Итак, полагаем

$$u \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\pi x.$$

В соответствии с § 30, коэффициенты a_k определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(L\varphi_k,\ \varphi_m) - \mu(\varphi_k,\ \varphi_m)\right] = 0, \quad m = 1,\ 2, \ldots n, \tag{10}$$

где

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right)\frac{du}{dx}\right],$$

и параметр μ следует подбирать так, чтобы определитель системы (10) равнялся нулю; наименьшее из таких значений μ и даст искомое μ_1.

Мы уже отметили, что функции (8) ортогональны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, поэтому $(\varphi_k,\ \varphi_m) = 0$, $k \neq m$; кроме того,

$$(\varphi_m,\ \varphi_m) = \int_0^1 \cos^2 m\pi x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$(L\varphi_k,\ \varphi_m) = -\int_0^1 \varphi_m(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right)\varphi_k'(x)\right]dx$$

или, если проинтегрировать по частям,

$$(L\varphi_k,\ \varphi_m) = km\pi^2 \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\sin \pi x\right)\sin k\pi x \sin m\pi x\, dx =$$

$$= \frac{km\pi^2}{2}\left\{\delta_{km} + \frac{1}{2\pi}\left[1 - (-1)^{k+m-1}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{(k+m)^2 - 1} - \frac{1}{(k-m)^2 - 1}\right)\right\}. \tag{11}$$

Здесь δ_{km} означает величину, равную нулю при $k \neq m$ и единице при $k = m$. Если $k - m = \pm 1$, то один из знаменателей второго члена в (11) обращается в нуль. При этом обращается в нуль и числитель $1-(-1)^{k+m-1}$, и весь второй член следует положить равным нулю. Таким образом, второй член в (10) отличен от нуля только тогда, когда k и m — одинаковой четности. При этом выражение (11) упрощается:

$$(L\varphi_k, \varphi_m)=\frac{km\pi^2}{2}\left[\delta_{km}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(k+m)^2-1}-\frac{1}{(k-m)^2-1}\right)\right]. \qquad (11_1)$$

Удобнее записать формулу (11_1) для следующих отдельных случаев:

$$(A\varphi_m, \varphi_m)=\frac{m^2\pi^2}{2}\left[1+\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{4m^2-1}\right)\right], \qquad (12)$$

$$(A\varphi_k, \varphi_m)=\frac{km\pi}{2}\left[\frac{1}{(k+m)^2-1}-\frac{1}{(k-m)^2-1}\right], \quad k\neq m, \ k \text{ и } m \text{ —}$$

одинаковой четности.

Благодаря тому, что $(L\varphi_k, \varphi_m)=0$, если k и m — неодинаковой четности, система (10) распадается на две, из которых одна содержит только a_k с нечетными, а другая — только с четными индексами. Уравнение для определения μ получается, если определитель системы (10) приравнять нулю. В нашем случае это уравнение распадается на два, которые можно получить, приравнивая нулю определители упомянутых двух систем. Возьмем n четным, $n=2s$, тогда уравнения для μ имеют вид:

$$\begin{vmatrix} (L\varphi_1, \varphi_1)-\frac{\mu}{2}; & (L\varphi_1, \varphi_3), & \ldots & (L\varphi_1, \varphi_{2s-1}) \\ (L\varphi_3, \varphi_1); & (L\varphi_3, \varphi_3)-\frac{\mu}{2}, & \ldots & (L\varphi_3, \varphi_{2s-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (L\varphi_{2s-1}, \varphi_1); & (L\varphi_{2s-1}, \varphi_3), & \ldots & (L\varphi_{2s-1}, \varphi_{2s-1})-\frac{\mu}{2} \end{vmatrix}=0. \qquad (13)$$

$$\begin{vmatrix} (L\varphi_2, \varphi_2)-\frac{\mu}{2}; & (L\varphi_2, \varphi_4), & \ldots & (L\varphi_2, \varphi_{2s}) \\ (L\varphi_4, \varphi_2); & (L\varphi_4, \varphi_4)-\frac{\mu}{2}, & \ldots & (L\varphi_4, \varphi_{2s}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (L\varphi_{2s}, \varphi_2); & (L\varphi_{2s}, \varphi_4); & \ldots & (L\varphi_{2s}, \varphi_{2s})-\frac{\mu}{2} \end{vmatrix}=0. \qquad (14)$$

Вычисления показывают, что корни уравнения (14) больше соответствующих корней уравнения (13), поэтому для нахождения приближенного значения μ_1 достаточно решить уравнение (13).

При $s=1$ уравнение (13) принимает вид

$$14{,}0584-\mu=0,$$

откуда мы легко получаем первое приближение для μ_1:

$$\mu_1^{(1)}=14{,}0584.$$

При $s=2$ мы получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 14{,}0584-\mu, & -2{,}51327 \\ -2{,}51327, & 117{,}909-\mu \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\mu^2-131{,}967\mu+1651{,}29=0,$$

меньший корень которого даст второе приближение для μ_1:

$$\mu_1^{(2)}=13{,}9976.$$

При $s=3$ μ_1 определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} 14{,}0584-\mu; & -2{,}51327; & -0{,}598399 \\ -2{,}51327; & 117{,}909-\mu; & -8{,}97598 \\ -0{,}598399; & -8{,}97598; & 326{,}073-\mu \end{vmatrix}=0,$$

которое по раскрытии определителя принимает вид

$$\mu^3-458{,}040\mu^2+44601{,}3\mu-537239=0.$$

Известно, что наименьший корень этого уравнения не превосходит $\mu_1^{(2)}$, и можно ожидать, что он мало отличается от $\mu_1^{(2)}$. Будем поэтому решать последнее уравнение по методу Ньютона, взяв за начальное значение $\mu=13{,}99$. Это даст нам

$$\mu_1^{(3)}=13{,}9955.$$

Дальнейших вычислений мы не делали, так как третье приближение уже достаточно хорошо совпадает со вторым. Приближенное значение второго собственного числа можно найти в нашем случае, как наименьший корень уравнения (14).

Аналогично предыдущему получим:

При $s=1$

$$52{,}8825-\mu=0,$$

$$\mu_2^{(1)}=52{,}8825.$$

При $s=2$

$$\begin{vmatrix} 52{,}8825-\mu; & -7{,}65950 \\ -7{,}65950; & 208{,}977-\mu \end{vmatrix}=0,$$

$$\mu^2-261{,}860\mu+10992{,}6=0$$

$$\mu_2^{(2)}=52{,}5076.$$

При $s=3$

$$\begin{vmatrix} 52{,}8825-\mu; & -7{,}65950; & -1{,}91488 \\ -7{,}65950; & 208{,}997-\mu; & -24{,}3711 \\ -1{,}91488; & -24{,}3711; & 469{,}194-\mu \end{vmatrix}=0,$$

$$\mu^3-731{,}054\mu^2+133258\mu-512476\cdot 10=0,$$

$$\mu_2^{(3)}=52{,}4842.$$

Последнее уравнение мы решали по методу Ньютона, взяв за начальное значение $\mu=52{,}50$. Сходимость для второго корня оказывается несколько худшей, чем для первого, тем не менее и здесь относительное изменение при переходе от второго приближения к третьему составляет около $0{,}04\%$.

§ 36. Собственные колебания стержня переменного сечения

Уравнение свободных колебаний стержня переменного сечения имеет вид:

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+\rho S(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0. \qquad (1)$$

Здесь, как обычно, ось x направлена по оси стержня, $z(x, t)$ — поперечные смещения его точек, $I(x)$ и $S(x)$ — момент инерции и площадь поперечного сечения с абсциссой x, E и ρ — модуль Юнга и отнесенная к единице длины плотность материала стержня. Допустим для определенности, что один конец стержня закреплен, а другой — свободен. Обозначим через L длину стержня и поместим начало координат в его закрепленном конце. Тогда краевые условия нашей задачи запишутся так:

$$z\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\Big|_{x=L} = 0. \tag{3}$$

Как обычно, ищем решение в виде

$$z(x, t) = u(x)\sin(\sqrt{\lambda}t + \alpha), \quad \alpha = \text{const}. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) и краевые условия (2) и (3) переходят в следующие

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] - \rho\lambda S(x)\,u = 0; \tag{5}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0; \tag{6}$$

$$u''(L) = 0, \quad u'''(L) = 0. \tag{7}$$

По доказанному в § 30, наименьшее собственное значение λ_1 нашей задачи равно минимуму интеграла

$$\int_0^L Eu\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]dx = E\int_0^L I(x)\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]^2 dx \tag{8}$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (6) и (7) и дополнительному условию

$$\int_0^L \rho S(x)\,u^2(x)\,dx = 1. \tag{9}$$

Отыскивая минимум интеграла (8) по методу Ритца, возьмем в качестве координатных собственные функции оператора $\frac{d^4u}{dx^4}$ при краевых условиях (6) и (7). Эти функции образуют полную ортонормированную систему. Как известно, [1]

[1] См. В. Н. Фаддеева [1, 2].

указанные функции имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2m-1}(\xi) &= \frac{\sin \alpha_k \xi}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} + \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \xi}{\operatorname{ch} \frac{\alpha_k}{2}}, \quad k = 2m-1, \\ \varphi_{2m}(\xi) &= \frac{\cos \alpha_k \xi}{\cos \frac{\alpha_k}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k \xi}{\operatorname{sh} \frac{\alpha_k}{2}}, \quad k = 2m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где α_k — корни уравнения [1]

$$\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha = 1;$$

в формулах (10) за основной принят отрезок $-\frac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$, причем условия (6) относятся к концу $\xi = -\frac{1}{2}$, а условия (7) — к концу $\xi = +\frac{1}{2}$. Чтобы использовать функции (10) в нашей задаче, нужно, очевидно, положить

$$\xi = \frac{2x - L}{2L}. \tag{11}$$

Полагая приближенно

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \quad \psi_k(x) = \varphi_k\left(\frac{2x-L}{2L}\right),$$

мы получим, в соответствии со сказанным в § 30, следующее уравнение для определения λ:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11}; & A_{12} - \lambda B_{12}, & \ldots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ A_{21} - \lambda B_{21}; & A_{22} - \lambda B_{22}; & \ldots & A_{2n} - \lambda B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1}; & A_{n2} - \lambda B_{n2}; & \ldots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{ik} &= \int_0^L I(x) \psi_i''(x) \psi_k''(x)\, dx, \\ B_{ik} &= \int_0^L \rho S(x) \psi_i(x) \psi_k(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

---

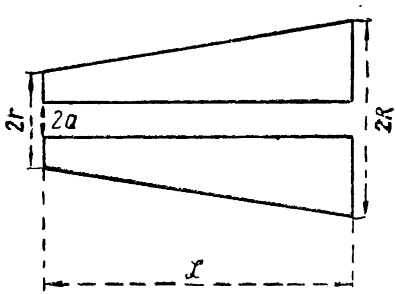
[1] Значения α_k приведены, например, в статье В. Н. Фадеевой [1], таблица 7.

Для примера рассмотрим однородную трубу в виде полого-усеченного конуса; осевое сечение этой трубы показано на черт. 7. В этом случае

$$I(x)=\frac{\pi}{4}(y^4-a^4), \quad S(x)=\pi(y^2-a^2),$$

где

$$y=R-\frac{R-r}{L}(x-L)=R-\left(\xi+\frac{1}{2}\right)(R-r).$$



Черт. 7.

Если в (13) сделать замену $\xi=\frac{2x-L}{2L}$, то коэффициенты A_{ik} и B_{ik} принимают вид:

$$A_{ik}=\frac{\tau E}{4L^3}\left\{\left[\frac{1}{16}(R+r)^4-a^4\right]I_{ik}^{(0)}-\frac{1}{2}(R+r)(R-r)I_{ik}^{(1)}+\right.$$
$$+\frac{3}{2}(R+r)^2(R-r)^2I_{ik}^{(2)}-2(R+r)(R-r)^3I_{ik}^{(3)}+$$
$$\left.+(R-r)^4I_{ik}^{(4)}\right\}; \quad (14)$$

$$B_{ik}=\pi\rho L\left\{\left[\frac{(R+r)^2}{4}-a^2\right]\widetilde{I}_{ik}^{(0)}-\frac{1}{8}(R^2-r^2)\widetilde{I}_{ik}^{(1)}+\right.$$
$$\left.+(R-r)^2\widetilde{I}_{ik}^{(2)}\right\}. \quad (15)$$

Здесь $I_{ik}^{(0)}, \ldots, \tilde{I}_{ik}^{(2)}$ — интегралы, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} I_{ik}^{(n)} &= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^n \varphi_i''(\xi)\,\varphi_k''(\xi)\,d\xi, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4; \\ \tilde{I}_{ik}^{(n)} &= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^n \varphi_i(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi, \quad n=0,\ 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При различных соотношениях между i и k мы получаем следующие группы формул.

I. $i=k$ — нечетное.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \quad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_k}{2};$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} + \alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2};$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2} - 4\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} + 4\right);$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} + \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2} - 6\right).$$

II. $i=k$ — четное.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \quad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} - \alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2} + 4\alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + 4\right),$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} - \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2} + 6\right).$$

III. $i \neq k$, i — нечетное. k — нечетное.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \quad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{(3\alpha_i^2+\alpha_k^2)}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)} = \frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2} - \right.$$

$$-\frac{2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} + (\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right] -$$

$$\left. -\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)} = \frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{12(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} - (\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}\right]\right\}.$$

IV. $i \neq k$, i — четное, k — четное.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \quad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\alpha_k^2+3\alpha_i^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{\alpha_i^2+3\alpha_k^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)}=\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}-\right.$$
$$-\frac{2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}+(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right]-$$
$$\left.-\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)}=\frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\right.$$
$$-\frac{3}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right]-$$
$$\left.-\frac{12(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\}.$$

V. i — нечетное, k — четное.

$$I_{ik}^{(0)}=0,\quad I_{ik}^{(1)}=-\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)}=\frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)}=-\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\right.$$
$$-\frac{2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}-(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right]+$$
$$\left.+\frac{4(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)}=\frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}+\frac{3}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right]+\frac{12(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\right\}.$$

VI.

$$\tilde{I}_{kk}^{(0)}=1,\quad \tilde{I}_{ik}^{(0)}=0,\quad i\neq k.$$

$$\tilde{I}_{ik}^{(1)}=-\frac{I_{ik}^{(1)}}{\alpha_i^2\alpha_k^2};\quad \tilde{I}_{ik}^{(2)}=\frac{I_{ik}^{(2)}}{\alpha_i^2\alpha_k^2}.$$

Для численных расчетов примем следующие размеры трубы:

$$L=1000\ мм,$$
$$R=400\ мм,$$
$$r=200\ мм,$$
$$a=100\ мм.$$

Полагая в приближенном выражении

$$u\approx\sum_{k=1}^{n}a_ku_k,$$

$n=1, 2, 3$, мы получим для определения λ следующие уравнения:

1) $0{,}8526-0{,}1917\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}=0,$

2) $$\begin{vmatrix} 0{,}8526-0{,}1917\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & -1{,}5341+0{,}0632\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ -1{,}5341+0{,}0632\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & 39{,}4262-0{,}3526\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E} \end{vmatrix}=0,$$

3) $$\begin{vmatrix} 0{,}8526-0{,}1917\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & -1{,}5341+0{,}0632\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & 1{,}1077+0{,}0037\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ -1{,}5341+0{,}0632\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & 39{,}4262-0{,}3526\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & -26{,}614+0{,}0865\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ 1{,}1077+0{,}0037\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & -26{,}614+0{,}0865\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E}; & 156{,}59-0{,}3168\cdot10^9\lambda\frac{\rho}{E} \end{vmatrix}=0,$$

наименьшие корни которых суть

$$\lambda_1^{(1)} = 0{,}4446 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\rho}; \quad \lambda_1^{(2)} = 0{,}4226 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\rho};$$
$$\lambda_1^{(3)} = 0{,}4171 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\rho}.$$

Как видно, последовательные значения λ_1 довольно быстро приближаются друг к другу: относительная погрешность при переходе от $\lambda_1^{(1)}$ к $\lambda_1^{(2)}$ составляет около 5%, а при переходе от $\lambda_1^{(2)}$ к $\lambda_1^{(3)}$ — около $1{,}3\%$. Для второго собственного числа уравнения 2) и 3) дают приближенные значения

$$\lambda_2^{(2)} = 11{,}628 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\rho}, \quad \lambda_2^{(3)} = 11{,}074 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\rho};$$

относительная погрешность при переходе от $\lambda_2^{(2)}$ к $\lambda_2^{(3)}$ приблизительно равна 5%.

§ 37. Кручение стержня прямоугольного сечения

Мы останавливаемся на этой простейшей задаче потому, что для нее известно сравнительно простое точное решение, с которым удобно сравнивать наши приближенные. Сводится эта задача, как известно, к интегрированию уравнения Пуассона

$$-\Delta\psi = 2G\theta$$

(G — модуль сдвига, θ — угол закручивания) в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ при краевых условиях

$$\psi(0, y) = \psi(x, 0) = \psi(a, y) = \psi(x, b) = 0.$$

Для упрощения вычислений положим $\psi = 2G\theta u$, тогда

$$-\Delta u = 1, \tag{1}$$
$$u(0, y) = u(x, 0) = u(a, y) = u(x, b) = 0. \tag{2}$$

Воспользуемся методом Ритца. В качестве координатных функций возьмем тригонометрические функции, удовлетворяющие краевым условиям (2)

$$\varphi_{km}(x, y) = \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Они образуют полную систему в H_0; действительно, $\Delta\varphi_{km}$ только постоянным множителем отличается от φ_{km}, последовательность которых полна в $L_2(\Omega)$; в силу замечания в конце § 20, последовательность $\{\varphi_{km}(x, y)\}$ полна в H_0.

Приближенное решение возьмем в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k, m=1}^{n} a_{km} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Уравнения метода Ритца (см. § 20)

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) = (f, \varphi_m)$$

в нашем случае следует записать так:

$$\sum_{k, m=1}^{n} a_{km}(-\Delta\varphi_{km}, \varphi_{rs}) = (1, \varphi_{rs}); \quad r, s = 1, 2, \ldots n. \tag{4}$$

Для дальнейших вычислений существенно то, что $\varphi_{km}(x, y)$ суть собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника. Действительно,

$$\Delta\varphi_{km} = -\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\varphi_{km}.$$

Отсюда, между прочим, вытекает ортогональность функций $\varphi_{km}(x, y)$ по области прямоугольника; впрочем, это и непосредственно очевидно. Имея это в виду, легко преобразовать систему (4) к виду

$$a_{rs}\pi^2\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)\|\varphi_{rs}\|^2 = (1, \varphi_{rs}).$$

Далее,

$$\|\varphi_{rs}\|^2 = \int_0^a \sin^2\frac{r\pi x}{a}\,dx \int_0^b \sin^2\frac{s\pi y}{b}\,dy = \frac{ab}{4};$$

$$(1, \varphi_{rs}) = \int_0^a \sin\frac{r\pi x}{a}\,dx \int_0^b \sin\frac{s\pi y}{b}\,dy =$$

$$= \frac{ab}{\pi^2 rs}[1-(-1)^r][1-(-1)^s].$$

Отсюда следует, что $a_{rs}=0$, если хотя бы одно из чисел r, s — четное; если же r и s оба нечетные, то

$$a_{rs}=\frac{16a^2b^2}{\pi^4 rs\,(b^2r^2+a^2s^2)}.$$

Приближенное решение нашей задачи имеет вид

$$u_n=\sum_{k,\,m=1,3\ldots n}\frac{16a^2b^2}{\pi^4 km\,(b^2k^2+a^2m^2)}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \qquad (5)$$

Предельный переход не представляет никаких затруднений и дает точное решение в виде

$$u(x,\,y)=\sum_{k,\,m=1,3\ldots}^{\infty}\frac{16a^2b^2}{\pi^4 km\,(b^2k^2+a^2m^2)}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \qquad (6)$$

Ряд (6) сходится равномерно, так же как и ряды первых производных. Рассмотрим, например, ряд из производных по x. Пусть, для определенности, $a<b$. Указанный ряд, как нетрудно видеть, мажорируется рядом

$$\frac{16b^2}{\pi^3 a}\sum_{k,\,m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,(k^2+m^2)}=\frac{16b^2}{\pi^3 a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+m^2}. \qquad (7)$$

Построив график уравнения $y=\dfrac{1}{x^2+m^2}$, мы легко найдем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+m^2}<\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+m^2}=\frac{\pi}{2m}.$$

Теперь

$$\frac{16b^2}{\pi^3 a}\sum_{k,\,m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,(k^2+m^2)}<\frac{8b^2}{\pi^2 a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{4b^2}{3a}.$$

Таким образом, ряд (7) сходится. По известной теореме Вейерштрасса, сходится равномерно и абсолютно ряд производных ряда (6).

Чтобы отчетливее уяснить себе характер сходимости метода Ритца, составим приближенные решения u_1, u_3, u_6, ограничиваясь в ряде (6) соответственно одним, тремя или шестью членами:

$$u_1(x, y) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

$$u_3(x, y) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3(9a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{3(a^2+9b^2)} \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\right\},$$

$$u_6(x, y) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \right.$$
$$+ \frac{1}{3(9a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{3(a^2+9b^2)} \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} +$$
$$+ \frac{1}{5(25a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{5\pi y}{b} + \frac{1}{81(a^2+b^2)} \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} +$$
$$\left. + \frac{1}{5(a^2+25b^2)} \sin\frac{5\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\right\}.$$

С помощью этих приближенных решений вычислим две основные механические характеристики задачи кручения — крутящий момент и максимальное касательное напряжение — и сравним полученные приближенные решения с известными точными. Как известно, крутящий момент M определяется формулой

$$M = 2\int_0^a\int_0^b \psi\, dx\, dy = 4G\theta \int_0^a\int_0^b u\, dx\, dy.$$

Обозначая приближенные значения M через M_1, M_3, M_6 имеем

$$M_1 = \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6(a^2+b^2)},$$

$$M_3 = \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{1}{(a^2+b^2)} + \frac{1}{9(9a^2+b^2)} + \frac{1}{9(a^2+9b^2)}\right],$$

$$M_6 = \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{730}{729(a^2+b^2)} + \frac{1}{9(9a^2+b^2)} + \frac{1}{9(a^2+9b^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{25(25a^2+b^2)} + \frac{1}{25(a^2+25b^2)}\right].$$

Точную величину крутящего момента можно представить в виде [1]

$$M = a^3 bG\theta k_1\left(\frac{b}{a}\right). \tag{8}$$

Соответственно этому мы представим наши приближенные формулы в виде

$$M_i = a^3 bG\theta k_{1,i}\left(\frac{b}{a}\right),$$

где $\left(\gamma = \frac{b}{a}\right)$

$$k_{1,1}(\gamma) = \frac{256}{\pi^6}\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$k_{1,3}(\gamma) = \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{1}{9(9+\gamma^2)} + \frac{1}{9(1+9\gamma^2)}\right],$$

$$k_{1,6}(\gamma) = \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{1}{9(9+\gamma^2)} + \frac{1}{9(1+9\gamma^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{25(25+\gamma^2)} + \frac{1}{25(1+25\gamma^2)}\right].$$

Нижеследующая таблица 1 позволяет сравнить величины $k_{1,i}(\gamma)$ с точным значением $k_1(\gamma)$.

Таблица 1

γ	k_1	$k_{1,1}$	$k_{1,3}$	$k_{1,6}$
1	0,1406	0,133	0,139	0,1401
2	0,229	0,213	0,225	0,228
3	0,263	0,240	0,258	0,261
4	0,281	0,251	0,273	0,278
5	0,291	0,256	0,281	0,287
∞	0,333	0,266	0,299	0,311

Наибольшее касательное напряжение в прямоугольнике сечения достигается, как известно, на середине длинной стороны.

---

[1] См. С. П. Тимошенко [1], § 78; отсюда же мы заимствуем все последующие данные о точном решении нашей задачи. Формула (8) по виду несколько отлична от формулы С. П. Тимошенко, у которого стороны прямоугольника обозначены через $2a$ и $2b$.

Пусть $b > a$. Наибольшее касательное напряжение τ можно представить в форме

$$\tau = G\theta a k\left(\frac{b}{a}\right).$$

Вычислим по нашим приближенным формулам приближенные же значения τ_1, τ_2, τ_6 величины τ. Мы получим тогда

$$\tau_i = G\theta a k^{(i)}(\gamma), \quad \gamma = \frac{b}{a},$$

где

$$k^{(1)}(\gamma) = \frac{32}{\pi^3}\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$k^{(3)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2}\right],$$

$$k^{(6)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(\gamma^2+25)} + \frac{1}{1+25\gamma^2}\right].$$

В таблице 2 приведены значения k и $k^{(i)}$ для некоторых значений γ.

Таблица 2

γ	k	$k^{(1)}$	$k^{(3)}$	$k^{(6)}$
1	0,675	0,516	0,585	0,613
2	0,930	0,826	0,831	0,870
3	0,985	0,929	0,870	0,931
4	0,997	0,971	0,865	0,954
5	0,999	0,992	0,854	0,961
∞	1,000	1,032	0,803	1,012

Таблицы 1 и 2 показывают, что приближенные решения довольно хорошо дают значения крутящего момента и значительно хуже (особенно это относится к $u_3(x, y)$) — значение максимального касательного напряжения. Это объясняется тем, что точность вычисления момента M зависит от быстроты *сходимости ряда* (6) *в среднем*, а точность

вычисления τ — от быстроты *равномерной сходимости ряда производных*. Нетрудно видеть, что ряд (6) довольно быстро сходится в среднем, тогда как равномерная сходимость производных ряда (6) — весьма медленная.

В качестве координатных функций можно взять и полиномы. В этом случае удобнее поместить начало координат в центре прямоугольника и обозначить длины его сторон через $2a$ и $2b$.

Из соображений симметрии ясно, что тогда функция $u(x, y)$ — четная как относительно x, так и относительно y. Полиномы, обладающие этим свойством и равные нулю на контуре прямоугольника, т. е. на прямых $x = \pm a$, $y = \pm b$, имеют вид

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + \ldots).$$

Ограничимся тремя членами и положим приближенно

$$u \approx u_3 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2). \qquad (9)$$

Произведя необходимые вычисления, мы найдем систему уравнений Ритца для неизвестных a_1, a_2, a_3:

$$\frac{128}{45}a^3b^3(a^2 + b^2)a_1 + \frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5}\right)a_2 + \frac{128}{45}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{7}\right)a_3 = \frac{16a^3b^3}{9},$$

$$\frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5}\right)a_1 + \frac{128}{45 \cdot 7}a^5b^5\left(\frac{11}{5}b^2 + \frac{1}{3}a^2\right)a_2 + \frac{128}{45 \cdot 35}a^5b^5(a^2 + b^2)a_3 = \frac{16a^5b^3}{45},$$

$$\frac{128}{45}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{7}\right)a_1 + \frac{128}{45 \cdot 35}a^5b^5(a^2 + b^2)a_2 + \frac{128}{45 \cdot 7}\left(\frac{11}{5}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right)a_3 = \frac{16a^3b^5}{45},$$

решая которую получим

$$a_1 = \frac{35(9a^4 + 130a^2b^2 + 9b^4)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)};$$

$$a_2 = \frac{105(9a^2 + b^2)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)};$$

$$a_3 = \frac{105(a^2 + 9b^2)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)}.$$

Если сохранить только один коэффициент a_1, положив тем самым

$$u \approx u_1 = a_1 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2), \tag{10}$$

то мы легко найдем

$$a_1 = \frac{5}{8(a^2+b^2)}.$$

Приведем для сравнения значения $k_{1,1}(\gamma)$, $k_{1,3}(\gamma)$, $k^{(1)}(\gamma)$ и $k^{(3)}(\gamma)$, вычисленные по приближенным решениям (9) и (10). Мы сохраняем обозначения таблиц 1 и 2.

Таблица 3

γ	k_1	$k_{1,1}$	$k_{1,3}$
1	0,1406	0,139	0,1404
2	0,229	0,222	0,228
3	0,263	0,250	0,263
4	0,281	0,261	0,279
5	0,291	0,267	0,290
∞	0,333	0,278	0,311

Таблица 4

γ	k_1	$k^{(1)}$	$k^{(3)}$
1	0,675	0,625	0,703
2	0,930	1,000	0,951
3	0,985	1,125	0,982
4	0,997	1,176	0,969
5	0,999	1,202	0,951
∞	1,000	1,250	0,875

Сравнение с таблицами 1 и 2 показывает, что при одном и том же номере приближения алгебраические полиномы дают лучшее приближение по сравнению с тригонометрическими для момента и худшее — для наибольшего касательного напряжения. Мы не можем, впрочем, утверждать, что это обстоятельство имеет место и для приближений с более высокими номерами.

Нашу задачу можно решать и по методу Трефтца. Для этого мы предварительно сведем ее к задаче Дирихле для уравнения Лапласа, положив, например, $u = v - \frac{x^2}{2}$. Тогда $\Delta v = 0$, $v|_s = \frac{x^2}{2}$. Если в качестве функций, гармонических в прямоугольнике, взять функции

$$\cos\frac{n\pi x}{a}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

то в пределе мы получим, с точностью до постоянного слагаемого, обычное решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения. Это решение приведено, в частности, в курсе С. П. Тимошенко [1].

§ 38. Равновесие мембраны, имеющей форму прямоугольного треугольника, закрепленного по катетам

Пусть мембрана, имеющая форму прямоугольного треугольника, находится под действием натяжения T и нормальной нагрузки, вообще говоря, переменной, p. Допустим, что мембрана закреплена по катетам, а гипотенуза остается свободной. Прогиб мембраны u удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta u = \frac{p}{T} \tag{1}$$

и краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \text{ на катетах,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ на гипотенузе.} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Смешанных условий типа (2) мы не рассматривали в главе III. Покажем здесь, что при условиях (2) оператор $-\Delta u$ положительно-определенный и, следовательно, к нашей задаче применимы теоремы § 19 и § 20 и, в частности, метод Ритца. Основным гильбертовым пространством в нашей задаче будет служить пространство $L_2(\Omega)$, где Ω — область треугольника, занятого мембраной.

По формуле Грина

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u \Delta u \, d\Omega = \\ = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Интеграл по S исчезает в силу условий (2), и мы получаем

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega. \tag{3}$$

Докажем теперь, что функция $u(x, y)$, достататочно гладкая в $\overline{\Omega}$ и обращающаяся в нуль хотя бы на одном из катетов, удовлетворяет неравенству Фридрихса (формула (6), § 22). Направим оси координат x и y по катетам и допустим, что $u(x, 0) = 0$. Уравнение гипотенузы в выбранной системе координат пусть будет $y = kx + b$. Пусть (x, y) — произвольная точка внутри Ω. Имеем

$$\int_0^y \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta = u(x, y) - u(x, 0)$$

или, так как $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta.$$

Отсюда, по неравенству Буняковского,

$$u^2(x, y) \leqslant y \int_0^y \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leqslant b \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta.$$

Последнее неравенство умножим на $dx\,dy$ и проинтегрируем по Ω. Это даст нам

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leqslant b \int_0^a dx \int_0^{b-kx} dy \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta;$$

через a обозначена длина катета, расположенного по оси x. Внутренние интегралы переставим:

$$\int_0^{b-kx} dy \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta = \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \int_0^{b-kx} dy =$$

$$= (b - kx) \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leqslant b \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right)^2 dy.$$

Теперь

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leqslant b^2 \int_0^a dx \int_0^{b-kx} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy = b^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant b^2 \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega,$$

что и требовалось доказать. Из доказанного следует положительная определенность оператора $-\Delta u$ в условиях нашей задачи.

Переходя к вычислениям, мы допустим для простоты, что треугольник равнобедренный, и катеты его имеют длину, равную единице. Нагрузку примем равномерно распределенной; обозначим $\frac{p}{T}=q$. Искомая функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\Delta u=q$$

и краевым условиям:

$$u=0 \quad \text{на прямых} \quad x=0, \quad y=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \quad \text{при} \quad x+y-1=0. \tag{5}$$

Краевое условие (5) — естественное, и ему необязательно удовлетворять заранее при использовании метода Ритца. В качестве координатных функций мы возьмем тригонометрические полиномы. Они должны удовлетворять условиям (4); кроме того, из соображений симметрии ясно, что они не должны меняться при перестановке x и y. Этим требованиям удовлетворяют функции

$$\sin m\pi x \sin n\pi y+\sin n\pi x \sin m\pi y; \quad m, n=1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Ограничимся в вычислениях первыми четырьмя из функций (6) и положим

$$\varphi_1=2\sin\pi x\sin\pi y, \quad \varphi_2=\sin 2\pi x\sin\pi y+\sin\pi x\sin 2\pi y,$$

$$\varphi_3=\sin 3\pi x\sin\pi y+\sin\pi x\sin 3\pi y, \quad \varphi_4=2\sin 2\pi x\sin 2\pi y;$$

$$u\approx u_4=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3+a_4\varphi_4. \tag{7}$$

Коэффициенты a_k определяются из условия, что величина

$$F(u_4)=\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_4}{\partial y}\right)^2-2qu_4\right\}d\Omega$$

имеет минимум. Это дает нам систему

$$\sum_{k=1}^{4}A_{mk}a_k=b_m, \quad m=1, 2, 3, 4, \tag{8}$$

где

$$b_m = q \int\limits_\Omega \varphi_m \, d\Omega$$

и

$$A_{mk} = \int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega,$$

или, в силу того, что $\varphi_m(y, x) = \varphi_m(x, y)$,

$$A_{mk} = 2 \int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} d\Omega = 2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} d\Omega.$$

Произведя необходимые вычисления, мы найдем, что система (8) имеет вид

$$\begin{aligned}
\pi^2 a_1 + 5\frac{31}{41} a_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= \frac{4q}{\pi^2}, \\
5\frac{31}{41} a_1 + \frac{5}{4}\pi^2 a_2 + 7\frac{11}{35} a_3 + 13\frac{1}{315} a_4 &= \frac{8q}{3\pi^2}, \\
7\frac{11}{35} a_2 + \frac{5}{2}\pi^2 a_3 \qquad\qquad\qquad &= \frac{4q}{\pi^2}, \\
13\frac{1}{315} a_2 \qquad\qquad\qquad + 4\pi^2 a_4 &= 0,
\end{aligned}$$

или, если разделить все уравнения системы на π^2,

$$\begin{aligned}
a_1 + 0{,}57640\, a_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0{,}041064\, q \\
0{,}57640\, a_1 + 1{,}25000\, a_2 + 0{,}74109\, a_3 + 1{,}31750\, a_4 &= 0{,}027376\, q \\
0{,}74109\, a_2 + 2{,}50000\, a_3 \qquad\qquad\qquad &= 0{,}013688\, q \\
1{,}31750\, a_2 \qquad\qquad + 4{,}00000\, a_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Наиболее грубое приближение мы получим, сохранив только первое уравнение и в нем только неизвестную a_1. Это даст нам

$$a_1^{(1)} = 0{,}041064\, q;$$

цифрой сверху мы обозначаем номер приближения. Сохраняя два первых уравнения с неизвестными a_1 и a_2, мы получим систему

$$a_1 + 0{,}57640\,a_2 = 0{,}041064\,q,$$
$$0{,}57640\,a_1 + 1{,}25000\,a_2 = 0{,}027376\,q,$$

откуда мы найдем коэффициенты второго приближения:

$$a_1^{(2)} = 0{,}038736\,q, \quad a_2^{(2)} = 0{,}004039\,q.$$

Система третьего приближения

$$\begin{aligned} a_1 + 0{,}57640\,a_2 \qquad\qquad\qquad &= 0{,}041064\,q,\\ 0{,}57640\,a_1 + 1{,}25000\,a_2 + 0{,}74109\,a_3 &= 0{,}027376\,q,\\ 0{,}74109\,a_2 + 2{,}50000\,a_3 &= 0{,}013688\,q \end{aligned}$$

дает

$$a_1^{(3)} = 0{,}04135\,q, \ a_2^{(3)} = -0{,}000503\,q, \ a_3^{(3)} = 0{,}005624\,q.$$

Наконец, решая исходную систему, имеем

$$a_1^{(4)} = 0{,}041829\,q, \quad a_2^{(4)} = -0{,}001328\,q,$$
$$a_3^{(4)} = 0{,}005869\,q, \quad a_4^{(4)} = 0{,}000437\,q.$$

Сравнение показывает неудовлетворительность первых двух приближений; третье и четвертое весьма близки между собой и, повидимому, близки к искомому решению.

В качестве координатных функций, удовлетворяющих условиям (4) и симметричных относительно прямой $y = x$, можно взять также полиномы $(xy)^k(x^m + y^m)$, $k = 1, 2, 3 \ldots$, $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$. Если положить

$$u \approx u_4 = a_1xy + a_2xy\,(x+y) + a_3x^2y^2 + a_4xy\,(x^2+y^2),$$

то для коэффициентов a_k мы получим следующую систему

$$\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{30}a_3 + \frac{1}{10}a_4 = \frac{q}{24}$$
$$\frac{1}{6}a_1 + \frac{8}{45}a_2 + \frac{4}{105}a_3 + \frac{23}{210}a_4 = \frac{q}{30}$$
$$\frac{1}{30}a_1 + \frac{4}{105}a_2 + \frac{1}{105}a_3 + \frac{19}{840}a_4 = \frac{q}{180}$$
$$\frac{1}{10}a_1 + \frac{23}{210}a_2 + \frac{19}{840}a_3 + \frac{1}{14}a_4 = \frac{q}{60}\,.$$

При вычислении коэффициентов этой системы полезна формула

$$\int\limits_{\Omega} x^r y^s \, d\Omega = \int\limits_0^1 x^r \, dx \int\limits_0^{1-x} y^s \, dy = \int\limits_0^1 \frac{x^r (1-x)^s}{s+1} \, dx =$$

$$= \frac{1}{s+1} \mathrm{B}(r+1, s+2) = \frac{1}{s+1} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+s+3)} = \frac{r!s!}{(r+s+2)!};$$

B и Γ — эйлеровы интегралы первого и второго рода.

Решая усеченные системы, получим (множитель q опускаем)

$a_1^{(1)} = 0,25,$

$a_1^{(2)} = 1, \ a_2^{(2)} = -0,75,$

$a_1^{(3)} = 1,2222, \ a_2^{(3)} = -1,16667, \ a_3^{(3)} = 0,97222,$

$a_1^{(4)} = 1,46154, \ a_2^{(4)} = -1,75000, \ a_3^{(4)} = 1,61538, \ a_4^{(4)} = 0,35897;$

цифра сверху попрежнему указывает номер приближения. Сходимость на этот раз оказалась значительно хуже, чем тогда, когда за координатные функции были приняты тригонометрические полиномы. Однако в этом нельзя усматривать проявление какого-либо общего закона; в § 37 мы видели, что алгебраические полиномы дают (по крайней мере при малых номерах приближений) лучшую сходимость в среднем, чем тригонометрические.

§ 39. Расчет критической частоты волновода

Определение критической частоты магнитной волны в волноводе сводится к вычислению наименьшего собственного числа, неравного нулю, уравнения

$$-\Delta u - \lambda u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda u = 0 \tag{1}$$

при краевом условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0, \tag{2}$$

где S — контур поперечного сечения волновода. [1] Это сечение

[1] См., например, де-Бройль [1].

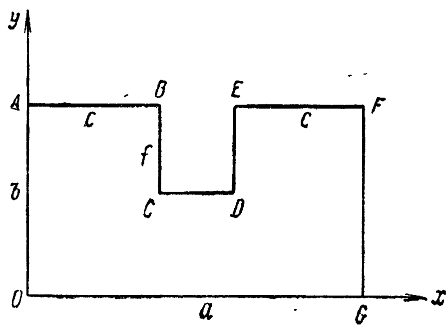
мы, как обычно, обозначим через Ω. Как было установлено в § 18 и в § 30, указанное собственное число совпадает с минимумом функционала

$$F(u)=\int\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}d\Omega \tag{3}$$

при дополнительном условии

$$\|u\|^2=\int\limits_{\Omega}u^2\,d\Omega=1. \tag{4}$$

Мы произведем расчет для П — волновода;[1] форма и обозначения размеров его сечения указаны на черт. 8. Минимум $F(u)$ будем приближенно определять по методу Ритца.



Черт. 8.

Координатные функции не должны обязательно удовлетворять краевому условию (2); однако, имея в виду получить возможно лучшую сходимость, мы подберем эти функции так, чтобы условия (2) удовлетворялись хотя бы частично, и положим (случай $k=m=0$ исключаем)

$$\varphi_{km}=\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}, \quad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

[1] Термин взят нами из статьи Л. Н. Дерюгина [1].

Очевидно, функции (5) удовлетворяют краевым условиям на сторонах OA, AB, EF, FG и OG контура.

Вычисления проведем, ограничившись функциями

$$\varphi_1 = \cos\frac{\pi x}{a}, \quad \varphi_2 = \cos\frac{\pi y}{b}, \quad \varphi_3 = \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},$$

$$\varphi_4 = \cos\frac{2\pi x}{a}, \quad \varphi_5 = \cos\frac{2\pi y}{b}. \quad (5)$$

Мы полагаем, следовательно,

$$u = u_5 = \sum_{k=1}^{5} a_k\varphi_k = a_1\cos\frac{\pi x}{a} + a_2\cos\frac{\pi y}{b} +$$

$$+ a_3\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} + a_4\cos\frac{2\pi x}{a} + a_5\cos\frac{2\pi y}{b}$$

и ищем минимум $F(u_5)$ при дополнительном условии $\|u\|^2=1$. Применяя метод, указанный в § 30, мы придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} F(\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(\varphi_1, \varphi_1); & F(\varphi_2, \varphi_1)-\lambda(\varphi_2, \varphi_1); & \ldots & F(\varphi_5, \varphi_1)-\lambda(\varphi_5, \varphi_1) \\ F(\varphi_1, \varphi_2)-\lambda(\varphi_1, \varphi_2); & F(\varphi_2, \varphi_2)-\lambda(\varphi_2, \varphi_2); & \ldots & F(\varphi_5, \varphi_2)-\lambda(\varphi_5, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F(\varphi_1, \varphi_5)-\lambda(\varphi_1, \varphi_5); & F(\varphi_2, \varphi_5)-\lambda(\varphi_2, \varphi_5); & \ldots & F(\varphi_5, \varphi_5)-\lambda(\varphi_5, \varphi_5) \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Вычислим элементы определителя (6). Обозначим через Ω_1 и ω прямоугольники $OAFG$ и $BCDE$, так что $\Omega = \Omega_1 - \omega$. Тогда

$$F(\varphi_k, \varphi_m) = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega - \int_{\omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega.$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ \rho_k, & k=m,\end{cases}$$

где мы ввели обозначения $\sigma=\dfrac{b}{a}$ и

$$\rho_1=\frac{\pi^2\sigma}{2};\quad \rho_2=\frac{\pi^2}{2\sigma};\quad \rho_3=\frac{\pi^2}{4}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right);\quad \rho_4=2\pi^2\sigma;\quad \rho_5=\frac{2\pi^2}{\sigma}.$$

Точно так же

$$(\varphi_k,\ \varphi_m)=\int\limits_{\Omega_1}\varphi_k\varphi_m\,d\Omega-\int\limits_{\omega}\varphi_k\,\varphi_m\,d\Omega$$

и

$$\int\limits_{\Omega_1}\varphi_k\,\varphi_m\,d\Omega=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ \rho_k', & k=m,\end{cases}$$

где

$$\rho_1'=\rho_2'=\frac{ab}{2};\quad \rho_3'=\frac{ab}{4};\quad \rho_4'=\rho_5'=\frac{ab}{2}.$$

Обозначим

$$\Phi_{km}=\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega;\quad \psi_{km}=\int\limits_{\omega}\varphi_k\,\varphi_m\,d\Omega.$$

Произведя необходимые вычисления, мы получим значения Φ_{km} и ψ_{km}. Очевидно, $F(\varphi_k,\ \varphi_m)=-\Phi_{km}$, $k\neq m$ и $F(\varphi_k,\ \varphi_k)=\rho_k-\Phi_{kk}$. Точно так же $(\varphi_k,\ \varphi_m)=-\psi_{km}$, $k\neq m$ и $(\varphi_k,\ \varphi_k)=\rho_k'-\psi_{kk}$. Имея это в виду, легко вычислить значения $F(\varphi_k,\ \varphi_m)$ и $(\varphi_k,\ \varphi_m)$. Они приведены в таблицах 1 и 2. При этом мы пользуемся обозначениями

$$\frac{b}{a}=\sigma,\quad \frac{c}{a}=\gamma,\quad 1-2\gamma=\delta,\quad \frac{f}{a}=\theta,\quad \frac{f}{b}=\frac{\theta}{\sigma}=\vartheta.$$

Имея эти таблицы, нетрудно составить уравнение (6), которое решается обычными методами.

Таблица 1. Значения $F(\varphi_k, \varphi_m)$

	1	2	3	4	5
1	$-\frac{\pi}{2}\theta(\pi\delta+\sin 2\pi\gamma)+\frac{\pi^2\sigma}{2}$	0	$\frac{\sigma}{2}(\pi\delta+\sin 2\pi\gamma)\times\sin\pi\vartheta$	0	0
2	0	$-\frac{\pi\delta}{4\sigma}(2\pi\vartheta-\sin 2\pi\vartheta)+\frac{\pi^2}{2\sigma}$	0	0	$\frac{\pi\delta}{\sigma}\left(\sin\pi\vartheta-\frac{\sin 3\pi\vartheta}{3}\right)$
3	$\frac{\sigma}{2}(\pi\delta+\sin 2\pi\gamma)\sin\pi\vartheta$	0	$-\frac{\sigma}{8}(\pi\delta+\sin 2\pi\gamma)\times(2\pi\vartheta+\sin 2\pi\vartheta)-\frac{1}{8\sigma}(\pi\delta-\sin 2\pi\gamma)\times(2\pi\vartheta-\sin 2\pi\vartheta)+\frac{\pi^2}{4}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)$	0	0
4	0	0	0	$2\pi^2\sigma-\pi\theta(2\pi\delta+\sin 4\pi\gamma)$	0
5	0	$\frac{\pi\delta}{\sigma}\left(\sin\pi\vartheta-\frac{\sin 3\pi\vartheta}{3}\right)$	0	0	$\frac{2\pi^2}{\sigma}-\frac{\pi\sigma}{2\sigma}(4\pi\vartheta-\sin 4\pi\vartheta)$

Таблица 2. Значения $\frac{1}{ab}(\varphi_k, \varphi_m)$

1	2	3	4	5
$\frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{2\pi}(\pi\vartheta - \sin 2\pi\vartheta)$	0	$\frac{\sin \pi\vartheta}{2\pi^2}(\pi\delta - \sin 2\pi\gamma)$	0	0
0	$\frac{1}{2} - \frac{\delta}{4\pi}(2\pi\vartheta + \sin 2\pi\vartheta)$	0	$-\frac{1}{\pi^2}\sin \pi\vartheta \sin 2\pi\gamma$	$\frac{\delta}{2\pi}\left(\sin \pi\vartheta + \frac{\sin 3\pi\vartheta}{3}\right)$
$\frac{\sin \pi\vartheta}{2\pi^2}(\pi\delta - \sin 2\pi\gamma)$	0	$\frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi^2}(\pi\delta - \sin 2\pi\gamma) \times (2\pi\vartheta + \sin 2\pi\vartheta)$	0	0
0	$-\frac{1}{\pi^2}(\sin 2\pi\gamma \sin \pi\vartheta)$	0	$\frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4\pi}(2\pi\delta - \sin 4\pi\gamma)$	$\frac{1}{2\pi^2}\sin 2\pi\gamma \sin 2\pi\vartheta$
0	$\frac{\delta}{2\pi}\left(\sin \pi\vartheta + \frac{\sin 3\pi\vartheta}{3}\right)$	0	$\frac{1}{2\pi^2}\sin 2\pi\gamma \sin 2\pi\vartheta$	$\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8\pi}(4\pi\vartheta + \sin 4\pi\vartheta)$

Для численного расчета положим

$$a = b = 1, \quad c = \frac{1}{4}, \quad f = \frac{1}{2},$$

так что

$$\sigma = 1, \quad \gamma = \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad \vartheta = \theta = \frac{1}{2}.$$

Вычислив при указанных значениях элементы таблиц 1 и 2, мы найдем, что в рассматриваемом частном случае уравнение (6) принимает вид (см. стр. 236). Сохраняя в определителе Δ только некоторые первые строки и столбцы, мы получим диагональный минор определителя Δ; приравнивая его нулю, мы найдем более грубые приближения к искомым собственным частотам. Наиболее грубое приближение мы получим, приравняв нулю минор первого порядка

$$2{,}9157036 - 0{,}4545774\,\lambda = 0;$$

это уравнение даст нам приближенное значение первого корня

$$\lambda_1^{(1)} = 6{,}4140961.$$

Если приравнять нулю минор второго порядка, то получим уравнение

$$(2{,}9157036 - 0{,}4545774\,\lambda)\,(3{,}7011017 - 3{,}750000\,\lambda) = 0,$$

которое дает приближенные значения первых двух корней:

$$\lambda_1^{(2)} = 6{,}4140961, \quad \lambda_2^{(2)} = 9{,}8696045.$$

Приравнивая нулю миноры 3-го и 4-го порядка и, наконец, самый определитель Δ, мы придем к следующим приближениям для λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1^{(3)} = \lambda_1^{(4)} = \lambda_1^{(5)} = 5{,}2853016,$$

$$\lambda_2^{(3)} = \lambda_2^{(2)} = 9{,}8696045; \quad \lambda_2^{(4)} = \lambda_2^{(5)} = 9{,}6421267.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2{,}9157036 - 0{,}4545774\lambda; & 0 & 1{,}2853982 - 0{,}0289167\lambda; & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}7011017 - 0{,}3750000\lambda; & 0 & 0{,}1013212\lambda; & 2{,}0943951 - 0{,}0530516\lambda \\ 1{,}2853982 - 0{,}0289167\lambda; & 0 & 3{,}7011017 - 0{,}2272887\lambda; & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1013212\lambda; & 0 & 14{,}804407 - 0{,}375000\lambda; & 0 \\ 0 & 2{,}0943951 - 0{,}0530516\lambda; & 0 & 0 & 14{,}804407 - 0{,}375000\lambda \end{vmatrix} = 0$$

§ 40. Собственные колебания уровня бассейна

Амплитуды и частоты собственных колебаний уровня бассейна определяются уравнением[1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\lambda u=0;\quad \lambda=\frac{\sigma^2}{g} \tag{1}$$

и краевым условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S=0. \tag{2}$$

Здесь $u(x, y)$ — амплитуда, а σ — частота собственных колебаний; g — ускорение силы тяжести, S — контур в плоскости xy, на который проектируется контур поверхности бассейна; область, ограниченную контуром S, мы, как обычно, обозначим буквой Ω. Очевидно, на область Ω проектируется поверхность бассейна. Наконец, $h=h(x, y)$ — глубина бассейна в точке (x, y).

Наименьшее собственное число уравнения (1) при краевом условии (2) равно нулю; соответствующая собственная функция равна постоянной. По доказанному в § 30, наименьшее отличное от нуля собственное значение λ_1 равно минимуму функционала

$$F(u)=\int\limits_\Omega h\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}d\Omega \tag{3}$$

при дополнительных условиях

$$\int\limits_\Omega u\,d\Omega=0,\quad \int\limits_\Omega u^2\,d\Omega=1. \tag{4}$$

Рассмотрим для примера случай, когда поверхность бассейна проектируется на эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{5}$$

[1] См., например, Л. Н. Сретенский [1].

а глубина h определяется формулой

$$h = h_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + h_1, \tag{6}$$

где h_0 и h_1 — неотрицательные постоянные.

В качестве координатных функций возьмем полиномы. Будем, для определенности, искать собственные функции, симметричные относительно осей эллипса (5), тогда достаточно ограничиться полиномами, содержащими x и y только в четных степенях. Положим

$$\varphi_1 = x^2 - c_1, \quad \varphi_2 = y^2 - c_2, \quad \varphi_3 = x^4 - c_3,$$
$$\varphi_4 = x^2y^2 - c_4, \quad \varphi_5 = y^4 - c_5; \quad \varphi_6 = x^6 - c_6, \quad \varphi_7 = x^4y^2 - c_7,$$
$$\varphi_8 = x^2y^4 - c_8, \quad \varphi_9 = y^6 - c_9.$$

Постоянные c_k подберем так, чтобы φ_k удовлетворяли первому из условий (4), т. е. чтобы

$$\int_\Omega \varphi_k \, d\Omega = 0.$$

Отсюда, например,

$$c_1 = \frac{1}{\pi ab}\int_\Omega x^2 \, d\Omega.$$

Для вычисления этого интеграла положим

$$x = a\rho\cos\theta, \quad y = b\rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Тогда $d\Omega = ab\rho\, d\rho\, d\theta$, и

$$c_1 = \frac{a^2}{\pi}\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}.$$

Аналогично определяются остальные постоянные. Окончательно

$$\varphi_1 = x^2 - \frac{a^2}{4}, \quad \varphi_2 = y^2 - \frac{b^2}{4}, \quad \varphi_3 = x^4 - \frac{a^4}{8}, \quad \varphi_4 = x^2y^2 - \frac{a^2b^2}{24},$$
$$\varphi_5 = y^4 - \frac{b^2}{8}, \quad \varphi_6 = x^6 - \frac{5a^6}{64}, \quad \varphi_7 = x^4y^2 - \frac{a^4b^2}{64}, \tag{7}$$
$$\varphi_8 = x^2y^4 - \frac{a^2b^4}{64}, \quad \varphi_9 = y^6 - \frac{5b^4}{64}.$$

Уравнение для приближенного определения λ имеет вид

$$\begin{vmatrix} F(\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(\varphi_1, \varphi_1); & F(\varphi_2, \varphi_1)-\lambda(\varphi_2, \varphi_1); & \ldots & F(\varphi_9, \varphi_1)-\lambda(\varphi_9, \varphi_1) \\ F(\varphi_1, \varphi_2)-\lambda(\varphi_1, \varphi_2); & F(\varphi_2, \varphi_2)-\lambda(\varphi_2, \varphi_2); & \ldots & F(\varphi_9, \varphi_2)-\lambda(\varphi_9, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F(\varphi_1, \varphi_9)-\lambda(\varphi_1, \varphi_9); & F(\varphi_2, \varphi_9)-\lambda(\varphi_2, \varphi_9); & \ldots & F(\varphi_9, \varphi_9)-\lambda(\varphi_9, \varphi_9) \end{vmatrix} = 0; \quad (8)$$

чтобы составить определитель (8) целесообразно предварительно вычислить элементы матриц $\|F(\varphi_k, \varphi_m)\|_{k, m=1}^{k, m=9}$ и $\|(\varphi_k, \varphi_m)\|_{k, m=1}^{k, m=9}$. Для этого оказываются полезными следующие формулы:

$$\int\limits_\Omega x^{2m} y^{2n}\, d\Omega = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(m+n+1)!}\, a^{2m+1} b^{2n+1},$$

$$\int\limits_\Omega \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) x^{2m} y^{2n}\, d\Omega = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(m+n+2)!}\, a^{2m+1} b^{2n+1},$$

где m и n — целые числа и Γ — эйлеров интеграл второго рода.

При вычислении (φ_m, φ_k) надо также обратить внимание на следующее обстоятельство.

Если мы обозначим $\psi_1 = x^2$, $\psi_2 = y^2$ и т. д., так что $\varphi_k = \psi_k - c_k$, то

$$c_k = \frac{(\psi_k, 1)}{\pi ab} = \frac{(1, \psi_k)}{\pi ab}.$$

Отсюда

$$(\varphi_k, \varphi_m) = (\psi_k, \psi_m) - c_k(1, \psi_k) - c_k(\psi_k, 1) + c_k c_m (1, 1).$$

Но

$$(1, 1) = \int\limits_\Omega d\Omega = \pi ab,$$

и из последнего равенства следует, что

$$(\varphi_k, \varphi_m) = (\psi_k, \psi_m) - \pi ab\, c_k c_m.$$

Значения (φ_k, φ_m) даны в таблице 1.

Таблица 1. Значения

	1	2	3	4
1	$\frac{\pi}{16}a^5b$	$-\frac{\pi}{48}a^3b^3$	$\frac{3\pi}{64}a^7b$	$\frac{\pi}{192}a^5b^3$
2	$-\frac{\pi}{48}a^3b$	$\frac{\pi}{16}ab^5$	$-\frac{\pi}{64}a^5b^3$	$\frac{\pi}{192}a^3b^5$
3	$\frac{3\pi}{64}a^7b$	$-\frac{\pi}{64}a^5b^3$	$\frac{5\pi}{128}a^9b$	$\frac{\pi}{384}a^7b^3$
4	$\frac{\pi}{192}a^5b^3$	$\frac{\pi}{192}a^3b^5$	$\frac{\pi}{384}a^7b^3$	$\frac{17\pi}{5760}a^5b^5$
5	$-\frac{\pi}{64}a^3b^5$	$\frac{3\pi}{64}ab^7$	$-\frac{7\pi}{640}a^5b^5$	$\frac{\pi}{384}a^3b^7$
6	$\frac{9\pi}{256}a^9b$	$-\frac{3\pi}{256}a^7b^3$	$\frac{\pi}{32}a^{11}b$	$\frac{\pi}{768}a^9b^3$
7	$\frac{\pi}{256}a^7b^3$	$\frac{\pi}{1280}a^5b^5$	$\frac{\pi}{384}a^9b^3$	$\frac{\pi}{768}a^7b^5$
8	$\frac{\pi}{1280}a^5b^5$	$\frac{\pi}{256}a^3b^7$	0	$\frac{\pi}{768}a^5b^7$
9	$-\frac{3\pi}{256}a^3b^7$	$\frac{9\pi}{256}ab^9$	$-\frac{\pi}{128}a^5b^7$	$\frac{\pi}{768}a^3b^9$

(φ_k, φ_m)

5	6	7	8	9
$-\frac{\pi}{64}a^3b^5$	$\frac{9\pi}{256}a^9b$	$\frac{\pi}{256}a^7b^3$	$\frac{\pi}{1280}a^5b^5$	$-\frac{3\pi}{256}a^3b^7$
$\frac{3\pi}{64}ab^7$	$-\frac{3\pi}{256}a^7b^3$	$\frac{\pi}{1280}a^5b^5$	$\frac{\pi}{256}a^3b^7$	$\frac{9\pi}{256}ab^9$
$-\frac{7\pi}{640}a^5b^5$	$\frac{\pi}{32}a^{11}b$	$\frac{\pi}{384}a^9b^3$	0	$-\frac{\pi}{128}a^5b^7$
$\frac{\pi}{384}a^3b^7$	$\frac{\pi}{768}a^9b^3$	$\frac{\pi}{768}a^7b^5$	$\frac{\pi}{768}a^5b^7$	$\frac{\pi}{768}a^3b^9$
$\frac{5\pi}{128}ab^9$	$-\frac{\pi}{128}a^7b^5$	0	$\frac{\pi}{384}a^3b^9$	$\frac{\pi}{32}ab^{11}$
$-\frac{\pi}{128}a^7b^5$	$\frac{107\pi}{4096}a^{13}b$	$\frac{7\pi}{4096}a^{11}b^3$	$-\frac{\pi}{4096}a^9b^5$	$-\frac{155\pi}{28\,672}a^7b^7$
0	$\frac{7\pi}{4096}a^{11}b^3$	$\frac{3\pi}{4096}a^9b^5$	$\frac{13\pi}{28\,672}a^7b^7$	$-\frac{\pi}{4096}a^5b^9$
$\frac{\pi}{384}a^3b^9$	$-\frac{\pi}{4096}a^9b^5$	$\frac{13\pi}{28\,672}a^7b^7$	$\frac{3\pi}{4096}a^5b^9$	$\frac{7\pi}{4096}a^3b^{11}$
$\frac{\pi}{32}ab^{11}$	$-\frac{155\pi}{28\,672}a^7b^7$	$-\frac{\pi}{4096}a^5b^9$	$\frac{7\pi}{4096}a^3b^{11}$	$\frac{107\pi}{4096}ab^{13}$

Таблица 2. Значения

	1	2	3	4
1	$\frac{\pi}{3}a^3b$	0	$\frac{\pi}{4}a^5b$	$\frac{\pi}{24}a^3b^3$
2	0	$\frac{\pi}{3}ab^3$	0	$\frac{\pi}{24}a^3b^3$
3	$\frac{\pi}{4}a^5b$	0	$\frac{\pi}{4}a^7b$	$\frac{\pi}{40}a^5b^3$
4	$\frac{\pi}{24}a^3b^3$	$\frac{\pi}{24}a^3b^3$	$\frac{\pi}{40}a^5b^3$	$\frac{\pi}{80}a^3b^3(a^2+b^2)$
5	0	$\frac{\pi}{4}ab^5$	0	$\frac{\pi}{40}a^3b^5$
6	$\frac{3\pi}{16}a^7b$	0	$\frac{7\pi}{32}a^9b$	$\frac{\pi}{64}a^7b^3$
7	$\frac{\pi}{40}a^5b^3$	$\frac{\pi}{80}a^5b^3$	$\frac{\pi}{48}a^7b^3$	$\frac{\pi}{32}a^5b^3\left(\frac{a^2}{6}+\frac{b^2}{5}\right)$
8	$\frac{\pi}{80}a^3b^5$	$\frac{\pi}{40}a^3b^5$	$\frac{\pi}{160}a^5b^5$	$\frac{\pi}{32}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{6}\right)$
9	0	$\frac{3\pi}{16}ab^7$	0	$\frac{\pi}{64}a^3b^7$

$\frac{1}{h_0}F(\varphi_k, \varphi_m)$

5	6	7	8	9
0	$\frac{3\pi}{16}a^7b$	$\frac{\pi}{40}a^5b^3$	$\frac{\pi}{80}a^3b^5$	0
$\frac{\pi}{4}ab^5$	0	$\frac{\pi}{80}a^5b^3$	$\frac{\pi}{40}a^3b^5$	$\frac{3\pi}{16}ab^7$
0	$\frac{7\pi}{32}a^9b$	$\frac{\pi}{48}a^7b^3$	$\frac{\pi}{160}a^5b^5$	0
$\frac{\pi}{40}a^3b^5$	$\frac{\pi}{64}a^7b^3$	$\frac{\pi}{32}a^5b^3\left(\frac{a^2}{6}+\frac{b^2}{5}\right)$	$\frac{\pi}{32}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{6}\right)$	$\frac{\pi}{64}a^3b^7$
$\frac{\pi}{4}ab^7$	0	$\frac{\pi}{160}a^5b^5$	$\frac{\pi}{48}a^3b^7$	$\frac{7\pi}{32}ab^9$
0	$\frac{27\pi}{128}a^{11}b$	$\frac{\pi}{64}a^9b^3$	$\frac{3\pi}{896}a^7b^5$	0
$\frac{\pi}{160}a^5b^5$	$\frac{\pi}{64}a^9b^3$	$\frac{\pi}{32}a^7b^3\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{7}\right)$	$\frac{\pi}{448}a^5b^5(a^2+b^2)$	$\frac{3\pi}{896}a^5b^7$
$\frac{\pi}{48}a^3b^7$	$\frac{3\pi}{896}a^7b^5$	$\frac{\pi}{448}a^5b^5(a^2+b^2)$	$\frac{\pi}{32}a^3b^7\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{12}\right)$	$\frac{\pi}{64}a^3b^9$
$\frac{7\pi}{32}ab^9$	0	$\frac{3\pi}{896}a^5b^7$	$\frac{\pi}{64}a^3b^9$	$\frac{27\pi}{128}ab^{11}$

$$\begin{vmatrix}
\frac{4}{3}-\frac{\mu}{4}, & \frac{\mu}{12}, & 1-\frac{3\mu}{16}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu}{24}, & \frac{\mu}{16}, & 3-\frac{9\mu}{16}, & \frac{2}{5}-\frac{\mu}{16}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu}{80}, & \frac{3\mu}{16} \\
\frac{\mu\gamma^2}{12}, & \frac{4}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{4}, & \frac{\mu\gamma^2}{16}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & 1-\frac{3\mu\gamma^2}{16}, & \frac{3\mu\gamma^2}{16}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{80}, & \frac{2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{16}, & 3-\frac{9\mu\gamma^2}{16} \\
1-\frac{3\mu}{16}, & \frac{\mu}{16}, & 1-\frac{5\mu}{32}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu}{48}, & \frac{7\mu}{160}, & \frac{7}{2}-\frac{\mu}{2}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu}{24}, & \frac{1}{10}, & \frac{\mu}{8} \\
\frac{\gamma^2}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{\gamma^2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{48}, & \frac{1+\gamma^2}{5}-\frac{17\mu\gamma^2}{360}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{48}, & \frac{\gamma^2}{2}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{6}+\frac{\gamma^2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{5}+\frac{\gamma^2}{6}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{2}-\frac{\mu\gamma^2}{24} \\
\frac{\mu\gamma^2}{16}, & 1-\frac{3\mu\gamma^2}{16}, & \frac{7\mu\gamma^2}{160}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{48}, & 1-\frac{5\mu\gamma^2}{32}, & \frac{\mu\gamma^2}{8}, & \frac{1}{10}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{7}{2}-\frac{\mu\gamma^2}{2} \\
3-\frac{9\mu}{16}, & \frac{3\mu}{16}, & \frac{7}{2}-\frac{\mu}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{\mu}{24}, & \frac{\mu}{8}, & \frac{27}{2}-\frac{107\mu}{64}, & 1-\frac{7\mu}{64}, & \frac{3}{14}+\frac{\mu}{64}, & \frac{155\mu}{448} \\
\frac{2\gamma^2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{16}, & \frac{1}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{80}, & \frac{\gamma^2}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{6}+\frac{\gamma^2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{10}, & \gamma^2-\frac{7\mu\gamma^2}{64}, & \frac{1}{6}+\frac{2\gamma^2}{7}-\frac{3\mu\gamma^2}{64}, & \frac{1+\gamma^2}{7}-\frac{13\mu\gamma^2}{448}, & \frac{3}{14}+\frac{\mu\gamma^2}{64} \\
\frac{\gamma^2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{80}, & \frac{2}{5}-\frac{\mu\gamma^2}{16}, & \frac{\gamma^2}{10}, & \frac{1}{5}+\frac{\gamma^2}{6}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{1}{3}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{3\gamma^2}{14}+\frac{\mu\gamma^2}{64}, & \frac{1+\gamma^2}{7}-\frac{13\mu\gamma^2}{448}, & \frac{2}{7}+\frac{\gamma^2}{6}-\frac{3\mu\gamma^2}{64}, & 1-\frac{7\mu\gamma^2}{64} \\
\frac{3}{16}\mu\gamma^2, & 3-\frac{9\mu\gamma^2}{16}, & \frac{\mu\gamma^2}{8}, & \frac{1}{2}-\frac{\mu\gamma^2}{24}, & \frac{7}{2}-\frac{\mu\gamma^2}{2}, & \frac{155\mu\gamma^2}{448}, & \frac{3}{14}+\frac{\mu\gamma^2}{64}, & \frac{1-7\mu\gamma^2}{64}, & \frac{27}{2}-\frac{107\mu\gamma^2}{64}
\end{vmatrix}=0. \quad (9)$$

Переходя к величинам $F(\varphi_k, \varphi_m)$, мы рассмотрим сперва элементарный случай $h_1 = 0$. Соответствующие значения $F(\varphi_k, \varphi_m)$ даны в таблице 2. Уравнение (8), после некоторых простых преобразований и введения обозначений

$$\frac{a^2\lambda}{h_0} = \mu, \qquad \frac{b}{a} = \gamma,$$

приводится к виду (9) (стр. 244).

Уравнение (9) распадается на два. Чтобы убедиться в этом, выполним над определителем в левой части уравнения (9) следующие преобразования:

1) третий столбец умножим на $^4/_3$ и вычтем из него первый столбец;

2) четвертый столбец умножим на 4 и вычтем из него сумму столбцов первого и второго;

3) пятый столбец умножим на $^4/_3$ и вычтем из него второй столбец;

4) шестой столбец умножим на $^4/_3$ и вычтем из него первый столбец;

5) второй столбец умножим на $^1/_2$ и сложим с первым; результат вычтем из седьмого столбца, предварительно умноженного на $^{10}/_3$;

6) первый столбец умножим на $^1/_2$ и сложим со вторым; сумму вычтем из восьмого столбца, предварительно умножив его на $^{10}/_3$;

7) девятый столбец умножим на $^4/_9$ и вычтем из него второй столбец.

В результате указанных преобразований все элементы первых двух строк определителя (9), расположенные правее второго столбца, обратятся в нуль. По теореме Лапласа об умножении определителей, левая часть уравнения (9) равна произведению определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} - \frac{\mu}{4}, & \frac{\mu}{12} \\ \frac{\mu\gamma^2}{12}, & \frac{4}{3} - \frac{\mu\gamma^2}{12} \end{vmatrix}$$

и его минора седьмого порядка в преобразованном, как указано выше, определителе (9).

Таблица 3. Значения

	1	2	3	4
1	a^3b	0	a^5b	$\frac{1}{6}a^3b^3$
2	0	ab^3	0	$\frac{1}{6}a^3b^3$
3	a^5b	0	$\frac{5}{4}a^7b$	$\frac{1}{8}a^5b^3$
4	$\frac{1}{6}a^3b^3$	$\frac{1}{6}a^3b^3$	$\frac{1}{8}a^5b^3$	$\frac{1}{16}a^3b^5\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$
5	0	ab^5	0	$\frac{1}{8}a^3b^5$
6	$\frac{15}{16}a^7b$	0	$\frac{21}{16}a^9b$	$\frac{3}{32}a^7b^3$
7	$\frac{1}{8}a^5b^3$	$\frac{1}{16}a^5b^3$	$\frac{1}{8}a^7b^3$	$\frac{1}{16}a^5b^5\left(\frac{3}{5}+\frac{a^2}{2b^2}\right)$
8	$\frac{1}{16}a^3b^5$	$\frac{1}{8}a^3b^5$	$\frac{3}{80}a^5b^5$	$\frac{1}{16}a^5b^5\left(\frac{3}{5}+\frac{a^2}{2b^2}\right)$
9	0	$\frac{15}{16}ab^7$	0	$\frac{3}{32}a^3b^7$

$\frac{1}{\pi h_1}\,\Phi(\varphi_k,\,\varphi_m)$

5	6	7	8	9
0	$\frac{15}{16}a^7b$	$\frac{1}{8}a^5b^3$	$\frac{1}{16}a^3b^5$	0
ab^5	0	$\frac{1}{16}a^5b^3$	$\frac{1}{8}a^3b^5$	$\frac{15}{16}ab^7$
0	$\frac{21}{16}a^9b$	$\frac{1}{8}a^7b^3$	$\frac{3}{80}a^5b^5$	0
$\frac{1}{8}a^3b^5$	$\frac{3}{32}a^7b^3$	$\frac{1}{16}a^5b^5\left(\frac{3}{5}+\frac{a^2}{2b^2}\right)$	$\frac{1}{16}a^5b^5\left(\frac{3}{5}+\frac{a^2}{2b^2}\right)$	$\frac{3}{32}a^3b^7$
$\frac{5}{4}ab^7$	0	$\frac{3}{80}a^5b^5$	$\frac{1}{8}a^3b^7$	$\frac{21}{16}ab^9$
0	$\frac{189}{128}a^{11}b$	$\frac{7}{64}a^9b^3$	$\frac{3}{128}a^7b^5$	0
$\frac{3}{80}a^5b^5$	$\frac{7}{64}a^9b^3$	$\frac{a^7b^5}{32}\left(1+\frac{7}{12}\frac{a^2}{b^2}\right)$	$\frac{a^5b^7}{64}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$	$\frac{3}{128}a^5b^7$
$\frac{1}{8}a^3b^7$	$\frac{3}{128}a^7b^5$	$\frac{a^5b^7}{64}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$	$\frac{a^3b^9}{32}\left(\frac{7}{12}+\frac{a^2}{b^2}\right)$	$\frac{7}{64}a^3b^9$
$\frac{21}{16}ab^9$	0	$\frac{3}{128}a^5b^7$	$\frac{7}{64}a^3b^9$	$\frac{189}{128}ab^{11}$

Соответственно этому, уравнение (9) также распадается на два уравнения, второй и седьмой степени. Это обстоятельство связано с тем, что при $h_1 = 0$ наша задача решается в конечном виде в полиномах.[1]

Переходя к общему случаю $h_1 \neq 0$, заметим, что нам достаточно вычислить наново значения $F(\varphi_k, \varphi_m)$. Обозначим их через $F_1(\varphi_k, \varphi_m)$. Тогда

$$F_1(\varphi_k, \varphi_m) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[h_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + h_1\right]\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega =$$

$$= F(\varphi_k, \varphi_m) + h_1\Phi(\varphi_k, \varphi_m),$$

где

$$\Phi(\varphi_k, \varphi_m) = h_1\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega.$$

Значения

$$\frac{1}{\pi h_1}\Phi(\varphi_k, \varphi_m)$$

приведены в таблице 3. Уравнение (8) принимает вид (10) (см. на вклейке); как и выше, мы положили здесь

$$\frac{a^2\lambda}{h_0} = \mu, \quad \frac{b}{a} = \gamma$$

и, кроме того,

$$\frac{h_1}{h_0} = h.$$

Для определенности последующих вычислений положим

$$h = \frac{h_1}{h_0} = 1.$$

Уравнение (10) сравнительно просто решается при $\gamma = 1$, т. е. когда эллипс вырождается в круг. Уравнение (10) имеет в этом случае следующий вид (см. стр. 249).

---

[1] См. Л. Н. Сретенский [1].

$$\begin{vmatrix}
\left(h+\frac{1}{3}\right)-\frac{\mu}{16}, & \frac{\mu\gamma^2}{48}, & h+\frac{1}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{1}{6}\gamma^2\left(h+\frac{1}{4}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{192}, & \frac{\mu\gamma^4}{64}, & \frac{15}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{9\mu}{256}, & \frac{\gamma^2}{8}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{256}, & \frac{\gamma^4}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{1280}, & \frac{3}{256}\mu\sigma^4 \\
\frac{\mu\gamma^2}{48}, & \gamma^2\left(h+\frac{1}{3}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{16}, & \frac{\mu\gamma^2}{64}, & \frac{1}{6}\gamma^2\left(h+\frac{1}{4}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{192}, & \left(h+\frac{1}{4}\right)\gamma^4-\frac{3\mu\gamma^6}{64}, & \frac{3\mu\gamma^2}{256}, & \frac{\gamma^2}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{1280}, & \frac{\gamma^4}{8}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^6}{256}, & \frac{15\gamma^6}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{9\mu\gamma^8}{256} \\
h+\frac{1}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{\mu\gamma^2}{64}, & \frac{5}{4}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{5\mu}{128}, & \frac{1}{8}\gamma^2\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{384}, & \frac{7\mu\gamma^6}{640}, & \frac{21}{16}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu}{32}, & \frac{\gamma^2}{8}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{384}, & \frac{3\gamma^4}{80}\left(h+\frac{1}{6}\right), & \frac{\mu\gamma^6}{128} \\
\frac{\gamma^2}{6}\left(h+\frac{1}{4}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{192}, & \frac{1}{6}\gamma^2\left(h+\frac{1}{4}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{192}, & \frac{1}{8}\gamma^2\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{384}, & \frac{\gamma^4}{16}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{17\mu\gamma^2}{5760}, & \frac{\gamma^4}{8}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^6}{384}, & \frac{3\gamma^2}{32}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{768}, & \frac{\gamma^2}{16}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{768}, & \frac{\gamma^4}{16}\left(\frac{3}{5}+\frac{\gamma^2}{2}\right)\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^6}{768}, & \frac{3\gamma^6}{32}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^8}{768} \\
\frac{\mu\gamma^2}{64}, & \gamma^4\left(h+\frac{1}{4}\right)-\frac{3\mu\gamma^6}{64}, & \frac{74}{640}\gamma^4, & \frac{1}{8}\gamma^4\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^6}{384}, & \frac{5\gamma^6}{4}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{5\mu\gamma^8}{128}, & \frac{\mu\gamma^4}{128}, & \frac{3\gamma^4}{80}\left(h+\frac{1}{6}\right), & \frac{\gamma^6}{8}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^8}{384}, & \frac{21\gamma^8}{16}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^{10}}{32} \\
\frac{15}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{9\mu}{256}, & \frac{3}{256}\mu\gamma^2, & \frac{21}{16}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu}{32}, & \frac{3\gamma^2}{32}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{768}, & \frac{\mu\gamma^4}{128}, & \frac{189}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{107\mu}{4096}, & \frac{7\gamma^2}{64}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{7\mu\gamma^2}{4096}, & \frac{3\gamma^4}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)+\frac{\mu\gamma^4}{4096}, & \frac{155\mu\gamma^6}{28672} \\
\frac{\gamma^2}{8}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{256}, & \frac{\gamma^2}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{1280}, & \frac{1}{8}\gamma^2\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{384}, & \frac{\gamma^4}{16}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{768}, & \frac{3\gamma^4}{80}\left(h+\frac{1}{6}\right), & \frac{7\sigma^2}{64}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{7\mu\sigma^2}{4096}, & \frac{\gamma^4}{32}\left(1+\frac{7}{12\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{3\mu\gamma^4}{4096}, & \frac{\gamma^6}{64}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{13\mu\gamma^6}{28672}, & \frac{3\gamma^6}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)+\frac{\mu\gamma^8}{4096} \\
\frac{\gamma^4}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^4}{1280}, & \frac{\gamma^4}{8}\left(h+\frac{1}{5}\right)-\frac{\mu\gamma^6}{256}, & \frac{3}{80}\left(h+\frac{1}{6}\right)\gamma^4, & \frac{\gamma^4}{16}\left(\frac{3}{5}+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^2}{768}, & \frac{\gamma^6}{8}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^8}{384}, & \frac{3\gamma^4}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)+\frac{\mu\gamma^4}{4096}, & \frac{\gamma^6}{64}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{13\mu\gamma^6}{28672}, & \frac{\gamma^8}{32}\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{3\mu\gamma^8}{4096}, & \frac{7\gamma^8}{64}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{7\mu\gamma^{10}}{4096} \\
\frac{3}{256}\mu\gamma^6, & \frac{15}{16}\left(h+\frac{1}{5}\right)\gamma^6-\frac{9\mu\gamma^8}{256}, & \frac{\mu\gamma^6}{128}, & \frac{3\gamma^6}{32}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^8}{768}, & \frac{21\gamma^8}{16}\left(h+\frac{1}{6}\right)-\frac{\mu\gamma^{10}}{320}, & \frac{155\mu\gamma^6}{28672}, & \frac{3\gamma^6}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)+\frac{\mu\gamma^8}{4096}, & \frac{7\gamma^8}{64}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{7\mu\gamma^{10}}{4096}, & \frac{189\gamma^{10}}{128}\left(h+\frac{1}{7}\right)-\frac{107\mu\gamma^{12}}{4096}
\end{vmatrix}=0. \quad (10)$$

$$
\begin{vmatrix}
\frac{4}{3}-\frac{\mu}{16}, & \frac{\mu}{48}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{3\mu}{256} \\
\frac{\mu}{48}, & \frac{3}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{3\mu}{256}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & \frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256} \\
\frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{3}{2}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7\mu}{640}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7}{160}, & \frac{\mu}{128} \\
\frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{3}{20}-\frac{17\mu}{5760}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768} \\
\frac{\mu}{64}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{7\mu}{640}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{3}{2}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{7}{160}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32} \\
\frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256}, & \frac{3\mu}{256}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{27}{16}-\frac{107\mu}{4096}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{155\mu}{28\,672} \\
\frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{160}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096}, & \frac{19}{336}-\frac{3\mu}{4096}, & \frac{1}{28}-\frac{13\mu}{28\,672}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096} \\
\frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & \frac{7}{160}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{1}{28}-\frac{13\mu}{28\,672}, & \frac{19}{336}-\frac{3\mu}{4096}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096} \\
\frac{3\mu}{256}, & \frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32}, & \frac{155\mu}{28\,672}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096}, & \frac{27}{16}-\frac{107\mu}{4096}
\end{vmatrix} = 0. \quad (11)
$$

$$
\begin{vmatrix}
\frac{4}{3}-\frac{\mu}{12}, & \frac{\mu}{48}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{\mu}{164}, & \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{3\mu}{256} \\
-\frac{4}{3}+\frac{\mu}{12}, & \frac{4}{3}-\frac{\mu}{16}, & -\frac{5}{4}+\frac{\mu}{16}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & -\frac{9}{8}+\frac{3\mu}{64}, & -\frac{3}{40}+\frac{\mu}{320}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & \frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256} \\
\frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{20}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7\mu}{640}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7}{160}, & \frac{\mu}{128} \\
0, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & 0, & \frac{3}{20}-\frac{7\mu}{5760}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & 0, & 0, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768} \\
-\frac{5}{4}+\frac{\mu}{16}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & -\frac{3}{2}+\frac{\mu}{20}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{3}{2}-\frac{5\mu}{128}, & -\frac{49}{32}+\frac{5\mu}{128}, & -\frac{49}{480}+\frac{\mu}{384}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32} \\
\frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{3\mu}{256}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{27}{16}-\frac{113\mu}{3584}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{155\mu}{28\,672} \\
\frac{3}{40}-\frac{\mu}{320}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{160}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512}, & \frac{1}{48}-\frac{\mu}{3584}, & \frac{1}{28}-\frac{13\mu}{28\,672}, & \frac{3}{112}+\frac{\mu}{4096} \\
-\frac{3}{40}+\frac{\mu}{320}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{256}, & -\frac{49}{480}+\frac{\mu}{384}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{48}-\frac{\mu}{384}, & -\frac{11}{112}+\frac{\mu}{512}, & -\frac{1}{48}+\frac{\mu}{3584}, & \frac{19}{336}-\frac{3\mu}{4096}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096} \\
-\frac{9}{8}+\frac{3\mu}{64}, & \frac{9}{8}-\frac{9\mu}{256}, & -\frac{49}{32}+\frac{5\mu}{128}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{49}{32}-\frac{\mu}{32}, & -\frac{27}{16}+\frac{113\mu}{3584}, & -\frac{11}{112}+\frac{\mu}{512}, & \frac{1}{8}-\frac{7\mu}{4096}, & \frac{27}{16}-\frac{107\mu}{4096}
\end{vmatrix} = 0. \quad (12)
$$

$$
\begin{vmatrix}
\frac{4}{3}-\frac{\mu}{12}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320}, & \frac{\mu}{48}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{3\mu}{256} \\
\frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{20}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{4}{3}-\frac{\mu}{24}, & \frac{5}{12}-\frac{\mu}{96}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{32}, & \frac{9}{40}-\frac{3\mu}{640}, & \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{128} \\
\frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{27}{16}-\frac{113\mu}{3584}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512}, & \frac{\mu}{64}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{7\mu}{640}, & \frac{7}{100}, & \frac{\mu}{128} \\
\frac{3}{40}-\frac{\mu}{320}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512}, & \frac{1}{48}-\frac{\mu}{3584}, & \frac{5}{24}-\frac{\mu}{192}, & \frac{3}{20}-\frac{17\mu}{5760}, & \frac{3}{20}-\frac{\mu}{384}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{32}, & \frac{3}{10}-\frac{\mu}{192}, & \frac{3}{2}-\frac{9}{40}\mu, & \frac{91}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{3\mu}{128} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\mu}{256}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{3}{16}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{155\mu}{28\,672} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{160}, & \frac{1}{28}-\frac{13\mu}{28\,672}, & \frac{3}{16}+\frac{\mu}{4096} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{40}-\frac{3\mu}{640}, & \frac{77}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{91}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{31}{336}-\frac{17\mu}{14\,336}, & \frac{5}{16}-\frac{3\mu}{2048} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{128}, & \frac{7}{32}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{3\mu}{128}, & \frac{5}{16}-\frac{3\mu}{2048}, & \frac{27}{16}-\frac{297\mu}{14\,336}
\end{vmatrix}=0. \quad (13)
$$

Если над определителем (11) выполнить некоторые элементарные преобразования, то он распадется в произведение двух определителей. Эти преобразования мы выполним в следующем порядке: вычтем второй столбец из первого, пятый из третьего, девятый из шестого и, наконец, восьмой из седьмого. В результате этих преобразований уравнение (11) перейдет в следующее (см. стр. 250):

В определителе (12) прибавим первую строку ко второй, третью — к пятой, шестую — к девятой и седьмую — к восьмой. В полученном после того определителе передвинем третью строку на второе место, шестую — на третье и седьмую — на четвертое, сохраняя относительное расположение остальных строк. Ту же перестановку выполним и над столбцами. В результате мы придем к уравнению (13) (см. стр. 251):

По теореме Лапласа об умножении определителей, определитель (13) равен произведению двух своих миноров, один из которых — четвертого порядка — занимает левую верхнюю клетку, а второй — пятого порядка — занимает правую нижнюю клетку в схеме (13). В силу этого уравнение (13) распадается на два:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\frac{\mu}{12}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320} \\ \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{20}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384} \\ \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{27}{16}-\frac{113\mu}{3584}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512} \\ \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512}, & \frac{1}{48}-\frac{\mu}{3584} \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{4}-\frac{\mu}{32}, & \frac{3}{10}-\frac{\mu}{192}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{40}, & \frac{91}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{3\mu}{128} \\ \frac{3\mu}{256}, & \frac{7}{64}-\frac{\mu}{768}, & \frac{\mu}{128}, & \frac{3}{16}+\frac{\mu}{4096}, & \frac{155\mu}{28\,672} \\ \frac{3}{40}-\frac{\mu}{1280}, & \frac{77}{960}-\frac{\mu}{768}, & \frac{7}{160}, & \frac{1}{28}-\frac{13\mu}{28\,672}, & \frac{3}{16}+\frac{\mu}{4096} \\ \frac{9}{40}-\frac{3\mu}{640}, & \frac{77}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{91}{480}-\frac{\mu}{384}, & \frac{31}{336}-\frac{17\mu}{14\,336}, & \frac{5}{16}-\frac{3\mu}{2048} \\ \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{128}, & \frac{7}{32}-\frac{\mu}{384}, & \frac{49}{32}-\frac{3\mu}{128}, & \frac{5}{16}-\frac{3\mu}{2048}, & \frac{27}{16}-\frac{297\mu}{14\,336} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Наименьший из корней уравнений (14) и (15) определяет наименьшее собственное число нашей задачи.

Уравнение (14) допускает дальнейшее упрощение. Именно, последний столбец определителя (14) умножим на 15 и вычтем из третьего столбца. В полученном таким образом определителе четвертую строку прибавим к третьей. Уравнение (14) преобразуется тогда в такое:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\frac{\mu}{12}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & 0, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320} \\ \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{20}, & 0, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384} \\ \frac{9}{8}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{49}{32}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{3}{14}-\frac{\mu}{448}, & \frac{11}{112}-\frac{\mu}{512} \\ \frac{6}{5}-\frac{\mu}{20}, & \frac{49}{30}-\frac{\mu}{24}, & 0, & \frac{5}{42}-\frac{\mu}{448} \end{vmatrix} = 0,$$

которое распадается на два:

$$\frac{3}{14}-\frac{\mu}{448}=0, \tag{16}$$

корень которого $\mu=96$, и

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\frac{\mu}{12}, & \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{3}{40}-\frac{\mu}{320} \\ \frac{5}{4}-\frac{\mu}{16}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{20}, & \frac{49}{480}-\frac{\mu}{384} \\ \frac{6}{5}-\frac{\mu}{20}, & \frac{49}{30}-\frac{\mu}{24}, & \frac{5}{42}-\frac{\mu}{448} \end{vmatrix} = 0,$$

или, если раскрыть определитель и разделить на коэффициент при μ^3,

$$\mu^3-488\mu^2+35\,216\mu-394\,240=0. \tag{17}$$

Наименьший корень этого уравнения можно оценить так: пусть его корни будут $\mu_1<\mu_2<\mu_3$. Нам известно, что все они положительны. По известной теореме алгебры

$$\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3=35\,216, \quad \mu_1\mu_2\mu_3=394\,240.$$

Отсюда

$$\mu_1=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2}>\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3}=\frac{394\,240}{35\,216}>10.$$

Теперь можно вычислять μ_1 по методу Ньютона, беря за начальное его значение $\mu=10$; выгоднее, однако, было начальное $\mu=14$. Это дает $\mu_1=13{,}736$. Теперь нетрудно найти остальные корни уравнения; они значительно больше μ_1. Можно также доказать, что корни уравнения (15) больше μ_1. Таким образом, наименьший корень уравнения (11) приближенно равен 13,736.

Если бы мы ограничились первыми пятью функциями φ_k (формула 7),[1] то мы пришли бы к уравнению пятой степени.

Это уравнение можно получить, приравняв нулю выделенный в (11) диагональный минор пятого порядка. Элементарными преобразованиями (мы на этом не будем останавливаться) можно свести указанное уравнение к двум уравнениям — второй и третьей степени. Решив их, мы найдем, в частности, наименьший корень названного уравнения пятой степени. Этот корень равен 13,741, что очень близко к найденному выше $\mu_1=13{;}736$. Близость обоих приближенных значений, повидимому, указывает на хорошую сходимость процесса.

Если эллипс не вырождается в круг, так что $\gamma=\frac{b}{a}\neq 1$, то упрощение определителя с помощью элементарных преобразований больше не удается. Мы применим к уравнению (10) другой прием, полезный, если порядок уравнения достаточно высок. Чтобы избежать сложных вычислений, мы ограничимся первыми пятью функциями φ_k; уравнение (10) заменится уравнением пятой степени, которое мы получим, приравняв нулю первый диагональный минор пятого порядка определителя (10). Для определенности вычислений положим $h=1$, $\gamma=\frac{b}{a}=2$. Тогда упомянутое уравнение будет

[1] Это означало бы, что мы приближенно заменяем соответствующую собственную функцию полиномом четвертой степени.

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\frac{\mu}{16}, & \frac{\mu}{12}, & \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{5}{6}-\frac{\mu}{48}, & \frac{\mu}{4} \\ \frac{\mu}{12}, & \frac{16}{3}-\mu, & \frac{\mu}{16}, & \frac{5}{6}-\frac{\mu}{12}, & 20-3\mu \\ \frac{5}{4}-\frac{3\mu}{64}, & \frac{\mu}{16}, & \frac{3}{2}-\frac{5\mu}{128}, & \frac{3}{5}-\frac{\mu}{96}, & \frac{7\mu}{40} \\ \frac{5}{6}-\frac{\mu}{48}, & \frac{5}{6}-\frac{\mu}{12}, & \frac{3}{5}-\frac{\mu}{96}, & \frac{3}{2}-\frac{17\mu}{360}, & \frac{12}{5}-\frac{\mu}{6} \\ \frac{\mu}{4}, & 20-3\mu, & \frac{7\mu}{40}, & \frac{12}{5}-\frac{\mu}{6}, & 96-10\mu \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$A = \|a_{ik}\|_{i,\,k=1}^{i,\,k=5} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{5}{6} & 20 \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} & \frac{12}{5} \\ 0 & 20 & 0 & \frac{12}{5} & 96 \end{Vmatrix}$$

$$B = \|b_{ik}\|_{i,\,k=1}^{i,\,k=5} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{64} & \frac{1}{48} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & 1 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{12} & 3 \\ \frac{3}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{128} & \frac{1}{96} & -\frac{7}{40} \\ \frac{1}{48} & +\frac{1}{12} & \frac{1}{96} & \frac{17}{360} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & 3 & -\frac{7}{40} & \frac{1}{6} & 10 \end{Vmatrix}$$

Тогда уравнение (18) можно записать так:

$$|A-\lambda B| = 0, \quad (19)$$

здесь мы символом $|C|$ обозначаем определитель матрицы C. Преобразуем уравнение (19) так, чтобы вместо матрицы A в него вошла единичная матрица. Напишем квадратичную форму, отвечающую матрице A:

$$\sum_{i,\,k=1}^{5} a_{ik}x_i x_k = \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{5}{2}x_1x_3 + \frac{5}{3}x_1x_4 + \frac{16}{3}x_2^2 + \frac{5}{3}x_2x_4 + 40x_2x_5 + \frac{3}{2}x_3^2 + \frac{6}{5}x_3x_4 + \frac{3}{2}x_4^2 + \frac{24}{5}x_4x_5 + 96x_5^2.$$

Обычным способом приведем ее к сумме квадратов; для этого, как легко видеть, достаточно выполнить подстановку

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x_1 + \frac{15}{16}x_3 + \frac{5}{8}x_4\right),\\
y_2 &= \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x_2 + \frac{5}{32}x_4 + \frac{15}{4}x_5\right),\\
y_3 &= \frac{\sqrt{21}}{8}\left(x_3 + \frac{58}{105}x_4\right),\\
y_4 &= \sqrt{\frac{8387}{11200}}\left(x_4 - \frac{8120}{8387}x_5\right),\\
y_5 &= \sqrt{\frac{170240}{8387}}\,x_5.
\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда

$$\sum_{i,\,k=1}^{5} a_{ik}x_i x_k = \sum_{i=1}^{5} y_i^2.$$

Систему (20) решим относительно $x_1, x_2, \ldots x_5$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}8660254\,y_1 - 1{,}6366342\,y_3 - 1{,}3206801\,y_4 - 0{,}2455918\,y_5\\
x_2 &= 0{,}4330127\,y_2 - 0{,}1805617\,y_4 - 0{,}8659229\,y_5\\
x_3 &= 1{,}7457431\,y_3 + 0{,}6383288\,y_4 + 0{,}1187027\,y_5\\
x_4 &= 1{,}1555951\,y_4 + 0{,}2148928\,y_5\\
x_5 &= 0{,}2219589\,y_5.
\end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим через S матрицу подстановки (21)

$$S = \begin{Vmatrix} 0,8660254 & 0 & -1,6366342 & -1,3206801 & -0,2455918 \\ 0 & 0,4330127 & 0 & -0,1805617 & -0,8659229 \\ 0 & 0 & 1,7457431 & 0,6383288 & 0,1187027 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1555951 & 0,2148928 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2219589 \end{Vmatrix}$$

Тогда уравнение (19) равносильно следующему:

$$|E - \mu S'BS| = 0, \qquad (22)$$

где S' — матрица, транспонированная по отношению к S. Положим теперь

$$\mu = \frac{1}{\varkappa};$$

уравнение (22) переходит в уравнение

$$|S'BS - \varkappa E| = 0. \qquad (23)$$

Наша цель состоит в определении *наименьшего* корня уравнения (19); для этого достаточно найти *наибольший* корень уравнения (23), что можно выполнить посредством метода итераций. Имеем

$$S'BS = \begin{Vmatrix} 0,046875 & -0,031250 & -0,017717 & -0,011690 & 0,009840 \\ -0,031250 & 0,187500 & 0,011811 & -0,006106 & -0,073219 \\ -0,017717 & 0,011811 & 0,018602 & 0,001736 & -0,000019 \\ -0,011690 & -0,006106 & 0,001736 & 0,033222 & -0,011077 \\ 0,009840 & -0,073219 & -0,000019 & -0,011077 & 0,071709 \end{Vmatrix}$$

За начальный вектор выбираем вектор $(1,1,1,1,1)$. В результате шести итераций мы получим

$$\mu_1 = 4,35500.$$

§ 41. Изгиб прямоугольной пластинки, заделанной по краю

Задача состоит в интегрировании бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \qquad (1)$$

где q — интенсивность нагрузки и D — жесткость пластинки, при краевых условиях

$$w\Big|_S = 0, \quad \frac{dw}{d\nu}\Big|_S = 0. \qquad (2)$$

Длины сторон пластинки обозначим через $2a$ и $2b$. Оси координат направим параллельно сторонам пластинки, начало координат поместим в ее центре.

Как показано в § 15, наша задача сводится к задаче о минимуме функционала

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} \left\{(\Delta w)^2 - \frac{2q}{D} w\right\} dy \tag{3}$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Эта же последняя задача, как мы установили в § 24, может быть решена по методу Ритца. Для простоты вычислений допустим, что нагрузка распределена равномерно, так что $q = \text{const}$.

В качестве координатных функций можно взять полиномы вида

$$(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4 + \ldots); \tag{4}$$

мы опускаем нечетные степени x и y, так как $w(x, y)$, очевидно, симметрична относительно координатных осей.

В выражении (4) ограничимся тремя членами; обозначая

$$\varphi_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \quad \varphi_2 = x^2 \varphi_1, \quad \varphi_2 = y^2 \varphi_1,$$

мы будем иметь

$$w \approx w_3 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3.$$

Уравнения метода Ритца в нашем случае имеют вид

$$\sum_{k=1}^{3} (\Delta\varphi_k, \Delta\varphi_m)\, a_k = \frac{q}{D} (1, \varphi_m), \quad m = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Произведя необходимые вычисления, мы преобразуем систему (5) к виду:

$$\begin{gathered}
\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{4}{7}\right) a_1 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{11\gamma^4}\right) b^2 a_2 + \\
+ \left(\frac{1}{7} + \frac{\gamma^4}{11}\right) a^2 a_3 = \frac{7}{128 a^2 b^2} \frac{q}{D} \\
\left(\frac{\gamma^2}{7} + \frac{1}{11\gamma^2}\right) a_1 + \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{143\gamma^4} + \frac{4}{77\gamma^2}\right) b^2 a_2 + \\
+ \frac{1}{77} (1 + \gamma^4)\, a^2 a_3 = \frac{1}{128 a^2 b^2} \frac{q}{D}
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\left(\frac{1}{7\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{11}\right)a_1+\frac{1}{77}\left(1+\frac{1}{\gamma^4}\right)b^2a_2+ \\ +\left(\frac{3}{7}+\frac{3\gamma^4}{143}+\frac{4\gamma^2}{77}\right)a^2a_3=\frac{1}{128a^2b^2}\,\frac{q}{D}. \tag{6}$$

Здесь $\gamma=\frac{b}{a}$; уравнения системы (6) получены из (5) путем сокращения некоторых общих множителей слева и справа.

Если пластинка квадратная, то $\gamma=1$, и уравнения (6) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} &\frac{18}{7}a_1+\frac{18}{77}a^2a_2+\frac{18}{77}a^2a_3=\frac{7}{128a^4}\,\frac{q}{D};\\ &\frac{18}{77}a_1+\frac{502}{1001}a^2a_2+\frac{2}{77}a^2a_3=\frac{1}{128a^4}\,\frac{q}{D};\\ &\frac{18}{77}a_1+\frac{2}{77}a^2a_2+\frac{502}{1001}a^2a_3=\frac{1}{128a^4}\,\frac{q}{D}. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая эту систему, мы получим

$$w\approx w_3=\frac{q}{Da^4}(x^2-a^2)^2(y^2-a^2)^2\left(0{,}02067+0{,}0038\frac{x^2+y^2}{a^2}\right).$$

Для прогиба в центре пластинки мы получаем

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0{,}02067\,\frac{qa^4}{D}. \tag{8}$$

В курсе А. Лява ([1], стр. 517) приведено полученное на основе более точного решения значение

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0{,}162\frac{qa^4}{8D}=0{,}02025\,\frac{qa^4}{D}. \tag{9}$$

Как мы видим, формула (8) дает по сравнению с более точной формулой (9) ошибку порядка 2%.

Если в приближенном выражении w ограничиться одним членом и положить

$$w\approx w_1=a_1\varphi_1=a_1(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2,$$

то вместо системы (6) мы получим одно уравнение

$$\left(\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{4}{7}\right)a_1=\frac{7}{128a^2b^2}\frac{q}{D},$$

откуда

$$a_1=\frac{49}{128(7a^4+7b^4+4a^2b^2)}\frac{q}{D}, \tag{10}$$

что дает для прогиба в центре пластинки значение

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{49a^4b^4}{128(7a^4+7b^4+4a^2b^2)}\frac{q}{D}. \tag{11}$$

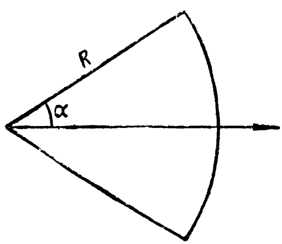
В случае квадрата $(a=b)$ мы получаем

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0{,}02127\frac{qa^4}{D}. \tag{12}$$

Формулы (10)—(13) получены Л. С. Лейбензоном ([3], стр. 119).

§ 42. Изгиб пластинки в форме кругового сектора

Мы примем, что края пластинки жестко закреплены. Прогиб $w(\rho, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению



Черт. 9.

$$\Delta^2\omega=\frac{q}{D} \tag{1}$$

и краевым условиям

$$w\Big|_S=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_S=0.$$

Здесь D — жесткость пластинки, q — сила, действующая на единицу поверхности пластинки. Как установлено в § 24, наша задача сводится к отысканию минимума интеграла

$$\int\limits_{\Omega}\left\{(\Delta w)^2-2\frac{q}{D}w\right\}d\Omega \tag{3}$$

при краевых условиях (2). Принимая обозначения черт. 9, мы можем в качестве координатных выбрать функции вида

$$(R-\rho)^2\rho^{k+2}\sin^2\frac{\vartheta\pi}{\alpha}\begin{cases}\sin\dfrac{m\vartheta\pi}{\alpha}\\ \cos\dfrac{m\vartheta\pi}{\alpha}\end{cases}\quad k, m=0, 1, 2, \ldots$$

Если нагрузка симметрична относительно среднего радиуса пластинки (например, если нагрузка равномерная), то можно ограничиться функциями вида

$$(R-\rho)^2\rho^{k+2}\sin^2\frac{\vartheta\pi}{\alpha}\cos\frac{m\vartheta\pi}{\alpha},\quad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

если же нагрузка антисимметрична относительно среднего радиуса, то достаточно взять координатные функции вида

$$(R-\rho)^2\rho^{k+2}\sin^2\frac{\vartheta\pi}{\alpha}\sin\frac{m\vartheta\pi}{\alpha},\quad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

В общем случае следует q разбить на сумму симметричной и антисимметричной частей и для каждой из них решать задачу отдельно.

Для определенности вычислений мы будем рассматривать случай, когда пластинка подвержена равномерному давлению q. Для вычисления ограничимся значениями k, $m=0$, 1, так что

$$w\approx(R-\rho)^2\rho^2\sin^2\frac{\vartheta\pi}{\alpha}\left(a_1+a_1\cos\frac{\vartheta\pi}{\alpha}+a_2\rho+a_3\rho\cos\frac{\vartheta\pi}{\alpha}\right),$$

обычным способом мы получим систему уравнений для неизвестных a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\left(21+\frac{8\pi^4}{\alpha^4}\right)\frac{\alpha R^6}{60}a_0+\left(\frac{13}{56}+\frac{1}{105}\frac{\pi^2}{\alpha^2}+\frac{4}{105}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)\alpha R^7a_2=\frac{q}{D}\frac{\alpha R^6}{60}$$

$$\left(14+41\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)\frac{\alpha R^6}{240}a_1+\frac{\alpha R^7}{672}\left(26+\frac{4\pi^2}{\alpha^2}+\frac{164}{5}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)a_3=0$$

$$\left(\frac{13}{56}+\frac{1}{105}\frac{\pi^2}{\alpha^2}+\frac{4}{105}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)\alpha R^7a_0+$$
$$+\frac{\alpha R^8}{2}\left(\frac{227}{560}+\frac{1}{42}\frac{\pi^2}{\alpha^2}+\frac{1}{35}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)a_2=\frac{q}{D}\frac{\alpha R^7}{105}$$

$$\frac{\alpha R^7}{672}\left(26+\frac{4\pi^2}{\alpha^2}+\frac{164}{5}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)a_1+$$
$$+\frac{\alpha R^3}{8}\left(\frac{227}{840}+\frac{5}{84}\frac{\pi^2}{\alpha^2}+\frac{41}{280}\frac{\pi^4}{\alpha^4}\right)a_3=0.$$

Второе и четвертое уравнения дают $a_1 = a_3 = 0$; из первого и третьего уравнений определяются a_0 и a_2. Не представляет значительного труда получение более точных решений; для этого достаточно взять больше членов в приближенном выражении w.

§ 43. Колебания упругой прямоугольной пластинки в ее плоскости

Для определенности рассмотрим пластинку, край которой свободен от действия внешних сил. Уравнения свободных колебаний упругой пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)-\omega^2\rho u_x=0;\\ &-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)-\omega^2\rho u_y=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность упругой среды, λ и μ — ее коэффициенты Ляме, ω — частота свободных колебаний. В соответствии со сказанным в § 30, наименьшая собственная частота определяется из соотношения

$$\rho w_1^2 = \min \frac{2E(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}. \tag{2}$$

Через $E(\mathbf{u})$ обозначен интеграл энергии упругой деформации, равный

$$2E(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega}\left\{(\lambda+2\mu)\,\theta^2 - 4\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \right. \\ \left. + \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right\}d\Omega, \tag{3}$$

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

и

$$H(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\,d\Omega. \tag{4}$$

Краевое условие нашей задачи — естественное, поэтому при отыскании минимума (2) можно не подчинять $\mathbf{u}$ никаким краевым условиям, однако $\mathbf{u}$ следует подчинить условиям, исключающим жесткое смещение пластинки:

$$\int\limits_{\Omega} u_x d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega} u_y d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega} (xu_y - yu_x)\, d\Omega = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим для определенности случай прямоугольной пластинки. Обозначения длин сторон и расположение координатных осей возьмем как в § 41. В качестве координатных выберем функции

$$\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Положим, ограничиваясь значениями $k+m \leqslant 2$,

$$u_x \approx a_1\cos\frac{\pi x}{a} + a_2\cos\frac{2\pi x}{a} + a_3\cos\frac{\pi y}{b} + a_4\cos\frac{2\pi y}{b} + \\ + a_5\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},$$

$$u_y = b_1\cos\frac{\pi x}{a} + b_2\cos\frac{2\pi x}{a} + b_3\cos\frac{\pi y}{b} + b_4\cos\frac{2\pi y}{b} + \\ + b_5\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \qquad (6)$$

В силу третьего равенства (5), коэффициенты a_k и b_k связаны соотношением

$$ab_1 = a_3 b; \qquad (7)$$

первые два равенства (5) выполняются автоматически, так как выражения (6) не содержат свободных членов.

Формулы (6) удобно трактовать следующим образом. Введем девять векторов φ_k, $k = 1, 2, \ldots 9$, полагая

$$\varphi_1 = \left(\cos\frac{\pi x}{a}, 0\right), \quad \varphi_2 = \left(\cos\frac{\pi y}{b}, \frac{b}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_3 = \left(\cos\frac{2\pi x}{a}, 0\right), \quad \varphi_4 = \left(0, \cos\frac{2\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_5 = \left(0, \cos\frac{\pi y}{b}\right), \quad \varphi_6 = \left(\cos\frac{2\pi y}{b}, 0\right),$$

$$\varphi_7 = \left(0, \cos\frac{2\pi y}{b}\right), \quad \varphi_8 = \left(\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, 0\right),$$

$$\varphi_9 = \left(0, \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right).$$

Формулы (6) и (7) показывают, что искомый вектор $\mathfrak{u}$ приближенно выражается линейной комбинацией векторов $\varphi_1, \ldots \varphi_9$.

Обозначим $\frac{ab\rho\omega^2}{\mu} = \varkappa$. Для определения $\varkappa$ воспользуемся уравнением (7) § 30. В нашем случае, после того, как

$$
\left|\begin{array}{ccccccccc}
\frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \begin{array}{l}\pi^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b^3}{a^3}+\right.\\ \left.+\frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right)-\varkappa\frac{a+b}{a}\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32\sigma}{3(1-2\sigma)} \\
0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & \begin{array}{l}\frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}+\right.\\ \left.+\frac{a}{b}\right]-\frac{\varkappa}{2}\end{array} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{32\sigma}{1-2\sigma} & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \begin{array}{l}\frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}+\right.\\ \left.+\frac{b}{a}\right]-\varkappa\end{array}
\end{array}\right| = 0. \quad (8)
$$

каждая строка определителя поделена на $\mu/2$, оно принимает вид (8) (σ — коэффициент Пуассона).

Заметим, что уравнение (8) можно упростить, так как второй столбец определителя (8) содержит только один отличный от нуля элемент; уравнение (8) распадается на два, из которых первое получится, если приравнять нулю указанный элемент, а второе — если приравнять нулю минор этого элемента. Первое уравнение имеет корень

$$\varkappa = \frac{a\pi^2}{a+b}\left(\frac{a}{b} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right). \tag{9}$$

Чтобы решить второе уравнение, зададимся какими-либо численными значениями σ и $\frac{b}{a}$. Пусть, например, $\sigma = \frac{1}{3}$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Тогда указанное уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{64}{3} \\ 0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32\pi^2-\varkappa & \frac{64}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{8} & 0 & 0 & \frac{128}{8} & 4\pi^2-\varkappa & 0 \\ 0 & \frac{128}{3} & 0 & 0 & \frac{64}{3} & 0 & 0 & \frac{17\pi^2}{\varkappa}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Отметим, что при $\sigma = \frac{1}{3}$ и $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ величина (9) равна $\varkappa_0 = 19{,}315273$. Чтобы проследить за сходимостью процесса, будем находить приближенные значения наименьшего корня $\varkappa_1$, приравнивая нулю диагональные миноры определителя (10). Приравнивая нулю миноры первых трех порядков, мы получим значения $\varkappa_1$, равные 19,739209 и 78,956835. Сравнивая это с $\varkappa_0$, мы получаем в качестве приближенного значения наименьшего корня уравнения (8) величину 19,315273, Приравняем теперь нулю минор четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa \end{vmatrix}=0.$$

Наименьший корень этого уравнения равен 15,692682. Так как это число меньше, чем $\varkappa_0$, то его и следует считать более точным приближенным значением величины $\frac{ab\rho\omega_1^2}{\mu}$, где через ω_1 обозначена наименьшая собственная частота колебаний пластинки. Приравнивая нулю миноры более высоких порядков, мы каждый раз будем получать наименьший корень 15,692682. Таким образом, в пределах принятой нами точности

$$\frac{ab\rho\omega_1^2}{\mu}=15{,}692682.$$

§ 44. Радиальные собственные колебания упругого цилиндра

Наименьшая частота ω_1 собственных колебаний упругого тела, поверхность которого свободна от напряжений, определяется соотношением

$$\gamma\omega_1^2=\min\frac{2E(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}, \tag{1}$$

где γ — плотность среды, $E(\mathbf{u})$ — потенциальная энергия деформации:

$$2E(\mathbf{u})=\int_\Omega \{\lambda\theta^2+\mu\,[2\,(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+\\ +\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2]\}\,d\Omega, \tag{2}$$

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

и

$$H(\mathbf{u})=\int_\Omega (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,d\Omega=\|\mathbf{u}\|^2. \tag{3}$$

В интегралах (2) и (3) Ω означает объем, заполненный упругой средой, $\mathbf{u}$ — вектор смещений, ε_x, ε_y, ε_z — удлинения и γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} — сдвиги, отвечающие этому вектору. Наконец, λ и μ — постоянные Ляме. Условие отсутствия напряжений на границе тела — естественное, поэтому нет необходимости подчинять $\mathbf{u}$ каким-либо краевым условиям; однако $\mathbf{u}$ следует подчинить соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{u}\, d\Omega = 0 \quad \int\limits_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{u})\, d\Omega = 0, \tag{4}$$

выражающим отсутствие жестких смещений.

Рассмотрим случай, когда упругая среда заполняет круговой цилиндр радиуса R и высоты h, и допустим, что колебания — радиальные, так что $\mathbf{u}$ имеет в цилиндрических осях ρ, ϑ, z только две составляющие u_ρ и u_z, которые не зависят от полярного угла ϑ. В формулы (2) и (3) введем вместо декартовых координат x, y, z цилиндрические ρ, ϑ, z. Тогда мы получим

$$2E(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} \{\lambda(\varepsilon_\rho + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z)^2 + \mu\,[2(\varepsilon_\rho^2 + \varepsilon_\vartheta^2 + \varepsilon_z^2) + \\ + \gamma_{\rho\vartheta}^2 + \gamma_{\vartheta z}^2 + \gamma_{\rho z}^2\}\, d\Omega. \tag{5}$$

$$H(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} (u_\rho^2 + u_\vartheta^2 + u_z^2)\, d\Omega. \tag{6}$$

Напомним формулы, выражающие составляющие деформации в цилиндрических координатах:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\gamma_{\rho\vartheta} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{\rho}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z},$$

$$\gamma_{\vartheta z} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}.$$

В условиях нашей задачи $u_\vartheta = 0$, $\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} = \dfrac{\partial u_z}{\partial \vartheta} = 0$, и мы получаем несколько более простые формулы

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\rho\vartheta} = \gamma_{\vartheta z} = 0.$$

В соответствии с этим упрощаются и формулы (5) и (6), которые, если еще выполнить интегрирование по ϑ, принимают вид

$$2E(\mathbf{u}) = 2\pi\, 2E_1(\mathbf{u}), \quad H(\mathbf{u}) = 2\pi\, H_1(\mathbf{u})$$

где

$$E_1(\mathbf{u}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h \Big\{\lambda\Big(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)^2 + \\ + \mu\Big[2\Big(\Big(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\Big)^2 + \frac{u_\rho^2}{\rho^2} + \Big(\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)^2\Big) + \\ + \Big(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\Big)^2\Big]\Big\}\, dz, \tag{7}$$

$$H_1(\mathbf{u}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h (u_\rho^2 + u_z^2)\, dz. \tag{8}$$

При этом

$$\gamma\omega_1^2 = \min \frac{2E_1(\mathbf{u})}{H_1(\mathbf{u})}. \tag{9}$$

Отыскивая минимум отношения (9) по методу Ритца, возьмем приближенные значения u_ρ и u_z в виде

$$u_\rho = \rho\,(a_0 + a_1 z + a_2\rho^2 + a_3 z^2), \\ u_z = b_0 + b_1 z + b_2\rho^2 + b_3 z^2. \tag{10}$$

Множитель ρ введен в u_ρ потому, что, как это ясно из соображений симметрии, $u_\rho = 0$ при $\rho = 0$.

Коэффициенты в (10) не произвольны, а связаны соотношениями (4), которые дают

$$a_0 = -3\Big(\frac{a_1 h}{6} + \frac{a_2 R^2}{5} + \frac{a_3 h^2}{9}\Big), \\ b_0 = -\Big(\frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 R^2}{2} + \frac{b_3 h^2}{3}\Big), \\ a_1 = \frac{6}{h^2}\Big(\frac{b_2 R^2}{5} - \frac{a_3 h^3}{6}\Big). \tag{11}$$

Соотношения (11) позволяют исключить коэффициенты a_0, b_0, a_1; это дает нам

$$u_\rho = a_2\Big(\rho^3 - \frac{3R^2}{5}\rho\Big) + a_3\Big(\frac{h^2}{6}\rho - hz\rho + z^2\rho\Big) + \\ + b_2\Big(\frac{6R^2}{5h^2} z\rho - \frac{3R^2}{5h}\rho\Big), \\ u_z = b_1\Big(z - \frac{h}{2}\Big) + b_2\Big(\rho^2 - \frac{R^2}{2}\Big) + b_3\Big(z^2 - \frac{h^2}{3}\Big). \tag{12}$$

Введем в рассмотрение векторы смещений

$$\varphi_1=\left(0;z-\frac{h}{2}\right),\quad \varphi_2=\left(\rho^3-\frac{3R^2}{5}\rho,\,0\right),$$
$$\varphi_3=\left(\frac{6R^2}{5h^2}\rho z-\frac{3R^2}{5h}\rho;\,\rho^2-\frac{R^2}{2}\right), \tag{13}$$
$$\varphi_4=\left(\frac{h^2}{6}\rho-hz\rho+z^2\rho;\,0\right),\quad \varphi_5=\left(0,\,z^2-\frac{h^2}{3}\right);$$

в формулах (13) на первых местах справа записаны составляющие по оси ρ, на вторых — составляющие по оси z. С помощью векторов $\varphi_1, \ldots \varphi_5$ можно формулы (12) записать в более удобном виде

$$\mathbf{u}=b_1\varphi_1+a_2\varphi_2+b_2\varphi_3+a_3\varphi_4+b_3\varphi_5. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$2E_1(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^h\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\times\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}+\frac{v_\rho}{\rho}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\mu\left[2\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}+\frac{u_\rho v_\rho}{\rho^2}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\right]\right\}dz,$$
$$H_1(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^h(u_\rho v_\rho+u_z v_z)\,dz.$$

Тогда, в соответствии со сказанным в § 30, уравнение для определения $\gamma\omega_1^2=\varkappa$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2E_1(\varphi_1,\varphi_1)-\varkappa H_1(\varphi_1,\varphi_1); & 2E_1(\varphi_1,\varphi_2)-\varkappa H_1(\varphi_1,\varphi_2); & \ldots & 2E_1(\varphi_1,\varphi_5)-\varkappa H_1(\varphi_1,\varphi_5)\\ 2E_1(\varphi_2,\varphi_1)-\varkappa H_1(\varphi_2,\varphi_1); & 2E_1(\varphi_2,\varphi_2)-\varkappa H_1(\varphi_2,\varphi_2); & \ldots & 2E_1(\varphi_2,\varphi_5)-\varkappa H_1(\varphi_2,\varphi_5)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2E_1(\varphi_5,\varphi_1)-\varkappa H_1(\varphi_5,\varphi_1); & 2E_1(\varphi_5,\varphi_2)-\varkappa H_1(\varphi_5,\varphi_2); & \ldots & 2E_1(\varphi_5,\varphi_5)-\varkappa H_1(\varphi_5,\varphi_5)\end{vmatrix}=0.$$

Если выполнить все необходимые вычисления, то это уравнение принимает вид (15) (стр. 270).

$$\begin{vmatrix}
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h}{2}-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h}{5}\lambda, & 0, & 0, & \frac{R^2h^2(\lambda+2\mu)}{2}-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa \\
\frac{2R^4h}{5}\lambda, & \frac{R^6h}{75}(74\lambda+124\mu)-\frac{3R^8h}{200}\varkappa, & 0, & 0, & \frac{2R^4h^2}{5}\lambda \\
0, & 0, & \begin{matrix}\frac{6}{25}(\lambda+\mu)\frac{R^6}{h}+\frac{\mu R^4}{4}\times \\ \times\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2- \\ -\left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa,\end{matrix} & 0, & \frac{R^4h}{5}\lambda \\
0, & 0, & 0, & \frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90}+\frac{\mu R^4h^3}{12}-\frac{R^4h^5}{720}\varkappa, & 0 \\
\frac{1}{2}R^2h^2(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h^2}{5}\lambda & \frac{R^4h}{5}\lambda & 0, & \frac{2R^2h^3}{3}(\lambda+2\mu)-\frac{2R^2h^5}{45}\varkappa
\end{vmatrix}=0. \quad (15)$$

Уравнение (15) распадается на два, так как четвертый столбец содержит только один член, отличный от нуля. Одно из этих уравнений есть

$$\frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90}+\frac{\mu R^4h^3}{12}-\frac{R^4h^5}{720}\varkappa=0, \tag{16}$$

второе же имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix}
\frac{R^2h}{2}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h}{5}\lambda, & 0 & R^2h^2(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa \\
\frac{2R^4h\lambda}{5}, & \frac{R^6h(74\lambda+124\mu)}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa, & 0 & \frac{2R^4h^2}{5}\lambda \\
0, & 0, & \frac{6(\lambda+\mu)R^6}{25h}+\frac{\mu R^4}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2-\left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa, & \frac{R^4h\lambda}{5} \\
\frac{R^2h^2}{2}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa & \frac{2R^4h^2\lambda}{5}, & \frac{R^4h}{5}, & \frac{2R^2h^3(\lambda+2\mu)}{3}-\frac{2R^2h^5}{45}\varkappa
\end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

В определителе (17) умножим первый столбец на h и вычтем из четвертого. Тогда первые два элемента четвертого столбца обратятся в нуль; по теореме Лапласа, определитель в (17) распадется на произведение двух определителей, а уравнение (17) соответственно сведется к двум квадратным уравнениям

$$\begin{vmatrix}
\frac{R^2h(\lambda+2\mu)}{2}-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h\lambda}{5} \\
\frac{2R^4h\lambda}{5}, & \frac{R^6h(74\lambda+124\mu)}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa
\end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

и

$$\begin{vmatrix}
\frac{6}{25h}(\lambda+\mu)R^6+\frac{\mu R^4}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2-\left(\frac{3R^8}{100h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa, & \frac{R^4h\lambda}{5} \\
\frac{R^4h\lambda}{5}, & \frac{R^2h^3}{6}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^5}{360}\varkappa
\end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

Наименьший из корней уравнений (16), (18) и (19) дает (приближенно) значение $\varkappa_1 = \gamma\omega_1^2$, где, как мы условились выше, ω_1 означает наименьшую частоту собственных колебаний цилиндра.

Положим, например, $\sigma = \frac{1}{3}$ или, что то же, $\lambda = 2\mu$, $h = 4$, $R = 2$ и положим еще $\varkappa/\mu = \nu$. Решая уравнения (16), (18) и (19) при указанных значениях, мы найдем, что наименьший корень $\nu_1 = 2{,}722808$ и, следовательно,

$$\omega_1 \approx 0{,}1650051 \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}.$$

Если мы будем приравнивать нулю диагональные миноры определителя (15), то мы получим следующие, более грубые, приближения (цифра сверху означает номер приближения):

$$\nu_1^{(1)} = 3,\ \nu_1^{(2)} = \nu_1^{(3)} = \nu_1^{(4)} = \nu_1^{(5)} = 2{,}722808.$$

§ 45. Кручение полого цилиндра

Рассмотрим стержень, сечение которого имеет форму круга с вырезанным из него концентрическим квадратом (черт. 10). Как известно, задачу кручения стержня можно свести к нахождению гармонической в области сечения функции $\varphi(x, y)$, которая на контуре сечения удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = y\cos(\nu, x) - x\cos(\nu, y).$$

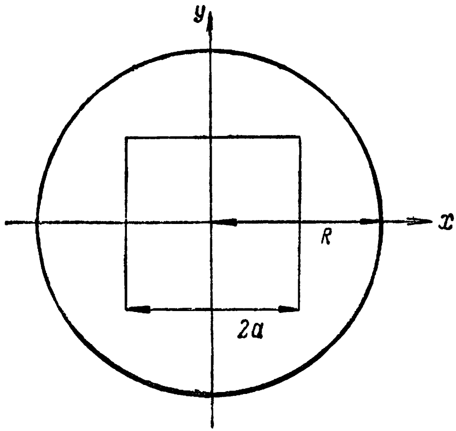
В нашем случае это условие принимает следующий вид:

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ на внешней окружности} \tag{1}$$

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \begin{cases} -y, & x = a \\ -x, & y = a \\ y, & x = -a \\ x, & y = -a \end{cases} \tag{2}$$

В угловых точках контура сечения внутренние углы больше π; как было установлено в § 29, к нашей задаче применим метод минимальных поверхностных интегралов.

Как известно, искомая функция кручения есть вещественная часть аналитической функции голоморфной в области



Черт. 10.

сечения. Такую аналитическую функцию можно, при известных условиях, аппроксимировать функциями вида (см. Волш [1])

$$\sum_{K=-N}^{N} a_k z^k, \quad x = x + yi,$$

поэтому за координатные функции нашей задачи можно взять функции

$$\operatorname{Re}(z^k), \quad \operatorname{Im}(z^k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Значению $k = 0$ отвечает постоянная, которую мы опустили, так как, в соответствии с методом минимальных поверхностных интегралов, искомая функция должна быть ортогональна к единице. Для упрощения записи примем в последующем $R = 1$.

Из условий (1) и (2) ясно, что $\varphi(x, y)$ не меняется при замене x на y и обратно. Очевидно также, что $\varphi(x, y)$ антисимметрична относительно начала координат. Это позволяет нам сохранить из (3) только функции

$$\operatorname{Im}(z^{2k}), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Далее, из функций (4) легко составить комбинации, удовлетворяющие уравнению (1); это будут функции

$$\varphi_k(x, y) = c_k \operatorname{Im}(z^{2k} - z^{-2k}), \ \kappa = 1,\ 2,\ 3 \ldots c_k = \text{const.} \tag{5}$$

Проще всего удостовериться в этом, введя полярные координаты ρ и ϑ. Тогда $z = \rho e^{i\vartheta}$ и

$$\varphi_k = c_k(\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \sin 2k\vartheta.$$

На окружности $\rho = 1$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} = 0.$$

Положим теперь

$$\varphi \approx a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3.$$

Заметим, что в общих уравнениях метода Ритца, которые в нашей задаче имеют вид

$$\sum_{k=1}^{3} a_k \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}\, dS = \int_S f\varphi_m dS, \tag{6}$$

достаточно интегрировать только по периметру квадрата $EFKL$ (черт. 10), так как f и $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}$ исчезают на окружности $\rho = 1$. Далее, мы полагаем в (6)

$$\varphi_1 = xy\left(1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z^2 - z^{-2}),$$

$$\varphi_2 = xy\,(x^2 - y^2)\left(1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{Im}(z^4 - z^{-4}),$$

$$\varphi_3 = xy\,(6x^4 - 20x^2y^2 + 6x^4)\left(1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^6} = \operatorname{Im}(z^6 - z^{-6}).\right.$$

Коэффициенты уравнений (6) выражаются через интегралы

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{2}{a^{2m-1}} \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \frac{2}{a^{2m-1}} I_m.$$

Эти последние вычисляются по хорошо известной рекурентной формуле

$$I_m = \frac{1}{2^m(m-1)} + \frac{2m-3}{2m-2} I_{m-1}.$$

Система уравнений для неизвестных коэффициентов имеет вид

$$\left(-\pi + 4 - \frac{8a^4}{3} + \frac{1}{2a^4} + \frac{3\pi}{16a^4}\right) a_1 + \\ + \left(\frac{64}{7} a^8 + 752a^4 - 240\pi a^4 - \frac{1}{5a^4} + \frac{11}{20a^8} + \frac{21\pi}{128a^8}\right) a_3 = \\ = \pi - 2 - \frac{8a^4}{3}, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{64}{7} a^8 + 752a^4 - 240\pi a^4 - \frac{1}{5a^4} + \frac{11}{20a^8} + \frac{21\pi}{128a^8}\right) a_1 + \\ + \left(\frac{37376}{231} a^{12} + \frac{208}{5} - 12\pi + \frac{13013}{3080a^{12}} + \frac{693\pi}{512a^{12}}\right) a_3 = \\ = \frac{64}{7} a^8 - \frac{1}{5a^4},$$

$$a_2 = 0.$$

Пусть, например, $a = \frac{1}{2}$. Тогда система (7) имеет вид

$$18{,}116518 a_1 + 269{,}45871 a_3 = 0{,}97492588$$

$$269{,}45871 a_1 + 34726{,}530 a_3 = -3{,}1642852.$$

Отсюда

$$a_1 = 0{,}0623674, \quad a_3 = -0{,}000575057$$

и, следовательно,

$$\varphi \approx 0{,}0623674 xy \left(1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right) - \\ - 0{,}000575057 (6x^4 - 20x^2y^2 + 6y^4)\left(1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^6}\right).$$

ГЛАВА V

МЕТОД ГАЛЕРКИНА

§ 46. Основы метода

В 1915 г. в статье [1] Б. Г. Галеркин опубликовал свой метод приближенного решения задач математической физики. Сущность этого метода такова. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = f, \tag{1}$$

которое требуется проинтегрировать в области Ω при краевых условиях вида

$$\Gamma_j u = 0, \ j = 1, 2, \ldots r$$

на границе S поверхности Ω.

Если бы уравнение и краевые условия были самосопряженными, а соответствующий оператор — положительно-определенным, можно было бы заменить нашу задачу вариационной и к этой последней применить метод Ритца. В общем же случае Б. Г. Галеркин предложил поступать так: выбирается полная[1] последовательность координатных функций $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющих краевым условиям. Приближенное решение ищется в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{2}$$

где a_k — постоянные; они определяются следующим образом: выражение (2) подставляется вместо u в (1), обе части уравнения умножаются на φ_j, где j есть одно из чисел $1, 2, \ldots n$,

[1] Этот термин нуждается в уточнении; см. ниже § 52.

и интегрируются по области Ω. Приравняв полученные результаты, мы придем к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{\Omega} \varphi_j L\varphi_k \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \varphi_j f \, d\Omega; \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{3}$$

Решив систему (3), мы по формуле (2) найдем приближенное решение нашей задачи.

Мы дадим методу Галеркина более общую формулировку, которая позволит применить его к более широкому классу задач и в то же время упростит его исследование. Эта более общая формулировка такова.

Пусть линейный оператор A определен на линеале M, плотном в некотором гильбертовом пространстве H. Относительно этого пространства мы примем, что оно имеет счетную полную ортонормированную систему[1] Допустим, что требуется решить уравнение

$$Au - f = 0, \tag{4}$$

где u — искомый и f — данный элемент пространства H. Выбираем последовательность элементов $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in M$, полную[2] в H; эти элементы мы будем далее называть координатными. Приближенное решение уравнения (4) мы строим в виде линейной комбинации координатных элементов с постоянными коэффициентами

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k; \tag{2}$$

коэффициенты a_k определяем из условия, чтобы после замены u через u_n левая часть уравнения (4) была ортогональна к элементам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Это приводит нас к следующей системе линейных уравнений с неизвестными a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{5}$$

---

[1] Напомним, что этим свойством обладают все рассмотренные в предшествующих главах гильбертовы пространства.

[2] Условия, налагаемые на последовательность $\{\varphi_n\}$, будут уточнены в § 52.

Система (5) по виду тождественна с системой (7) § 20, к которой приводит метод Ритца. Отсюда нетрудно заключить, что методы Галеркина и Ритца совпадают, если оператор A — положительно-определенный. В общем же случае метод Ритца неприменим, тогда как метод Галеркина сохраняет силу.

Метод Галеркина получил чрезвычайно широкое распространение и был применен к целому ряду различных задач. Подробная библиография по вопросу о применениях метода приведена в обзорной статье Я. И. Перельмана [1]. Заметим, что в этой статье содержится неточное утверждение, что при использовании метода Галеркина можно не удовлетворять заранее естественным („динамическим", по терминологии Я. И. Перельмана) краевым условиям.

Вопрос о сходимости метода Галеркина оставался долгое время неясным. Появились даже работы, в которых сходимость эта вообще подвергалась сомнению. Однако эти работы основаны большей частью на недоразумении. Так, например, возражения Ю. В. Репмана [1] сводятся к тому, что метод Галеркина может не привести к решению задачи, если координатные функции удовлетворяют лишним краевым условиям. Но из этого соображения вытекает не расходимость метода Галеркина, а только то, что последовательность координатных функций должна обладать (в некотором смысле, который необходимо уточнить) полнотой; этой полноты заведомо не будет, если координатные функции удовлетворяют лишним краевым условиям.

Впервые сходимость метода Галеркина в одной частной задаче была доказана Г. И. Петровым [1]. Существенным моментом в работе Г. И. Петрова было установление связи между методом Галеркина и теорией бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Развивая идею Г. И. Петрова, М. В. Келдыш [1] установил сходимость метода Галеркина для двух частных типов оператора A. Аналогичные результаты получил Л. В. Канторович [1]. Автором этой книги было получено доказательство сходимости [1] для довольно широкого класса операторов, содержащего, как весьма частные случаи, типы операторов, изученных М. В. Келдышем.

---

[1] См. С. Г. Михлин [2, 3].

Исследование метода Галеркина требует обобщения понятия о гильбертовом пространстве и введения некоторых новых понятий. Этому мы посвятим §§ 47—51.

§ 47. Гильбертово пространство последовательностей

В § 3 (глава 1) мы ввели понятие о гильбертовом пространстве, элементы которого суть функции. Такое пространство было названо нами функциональным. Потребности анализа и, в частности, математической физики заставляют, однако, рассматривать и более общие гильбертовы пространства, с элементами произвольной природы. Не останавливаясь на общем определении, мы рассмотрим подробно важное для обоснования метода Галеркина *гильбертово пространство последовательностей*, обычно обозначаемое через l_2. Оно строится следующим образом.

Введем в рассмотрение числовые последовательности, обладающие тем свойством, что квадраты модулей членов каждой такой последовательности образуют сходящийся ряд. Множество этих последовательностей обозначим через M. Таким образом, если

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$$

есть элемент множества M, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

сходится. Числа x_k мы будем называть *координатами* элемента x. Определим в M сложение элементов и умножение элемента на число следующим образом: если

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$$

и

$$y = (y_1, y_2, \dots y_n, \dots)$$

суть элементы M, и λ — некоторое число, то положим

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots).$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda x_k|^2=|\lambda|^2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$$

очевидно сходится, так что $\lambda x \in M$. Нетрудно, далее, видеть, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^2$$

также сходится. Действительно, $|x_k+y_k|^2 \leqslant 2\{|x_k|^2+|y_k|^2\}$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}2\{|x_k|^2+|y_k|^2\}$$

сходится, так как x и y суть элементы M; в силу последнего неравенства, сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^2.$$

Таким образом, если x и y суть элементы множества M, то $x+y$ и λx также суть элементы M. Заметим, что последовательность $(0, 0, \ldots 0, \ldots)$ играет в M роль нуля; будучи прибавлена к любому элементу из M, она этого элемента не меняет. Мы будем обозначать последовательность $(0, 0, \ldots, 0 \ldots)$ символом 0 и называть нулевой последовательностью или просто нулем.

Определим в M скалярное произведение, полагая

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k. \tag{1}$$

Ряд (1) сходится, как это вытекает из неравенства $|x_k\bar{y}_k| \leqslant \frac{1}{2}\{|x_k|^2+|y_k|^2\}$; таким образом, скалярное произведение (1) определено для любой пары элементов линеала M, и легко проверить, что оно удовлетворяет аксиомам A—D § 3. Введя скалярное произведение, мы тем самым превратим M в гильбертово пространство; это и есть пространство l_2.

Заметим, что норма в l_2 определяется формулой

$$\|x\|^2=(x, x)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2. \tag{2}$$

Докажем, что пространство l_2 — полное.[1] Пусть дана последовательность элементов l_2

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots\ x_k^{(n)},\ \ldots)$$

и пусть

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\| = 0. \tag{3}$$

По формуле (2),

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 = 0. \tag{4}$$

Предельное равенство означает следующее: по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \geqslant N(\varepsilon)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2. \tag{5}$$

Мы усилим неравенство (5), взяв слева вместо суммы ряда только одно слагаемое. При $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \geqslant N(\varepsilon)$, мы найдем, что $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что последовательность $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, … $x_k^{(n)}$, … имеет предел, который мы обозначим через x_k:

$$x_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)}.$$

Вернемся к неравенству (5). Мы усилим его, сохранив слева только первые p слагаемых, где p — любое целое число:

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Пусть $m \to \infty$, тогда $x_k^{(m)} \to x_k$. Сумма слева содержит только конечное число слагаемых, поэтому в ней можно перейти к пределу. Это дает нам

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

---

[1] Определение полноты см. § 4.

Полагая теперь $p \to \infty$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leqslant \varepsilon^2. \tag{6}$$

Из неравенства (6) вытекает ряд следствий. Прежде всего, это неравенство показывает, что последовательность $x - x^{(n)}$, где

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots),$$

принадлежит l_2. Но тогда $x = x^{(n)} + (x - x^{(n)})$, как сумма двух элементов из l_2, есть также элемент из l_2. Теперь мы вправе записать (6) в виде $\|x - x^{(n)}\| \leqslant \varepsilon$. По определению предела, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$. Таким образом, всякая последовательность, удовлетворяющая соотношению (3), сходится в l_2 к некоторому пределу; это и означит полноту l_2.

В пространстве l_2 существует полная счетная ортонормированная система. За такую систему можно принять, например, систему элементов

$$e_n = (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots), \tag{7}$$

где единица занимает n-ое место. Действительно, из определения скалярного произведения в l_2 непосредственно вытекает, что

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Далее, если $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ есть элемент l_2, то, как легко проверить, $x_k = (x, e_k)$, так что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \tag{8}$$

есть ряд Фурье элемента x относительно ортонормированной системы $\{e_n\}$. Наконец, сумма ряда (8) равна x. Чтобы это доказать, положим

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$$

и оценим разность $x - x^{(n)}$. Имеем

$$x - x^{(n)} = (0, 0, \ldots 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Отсюда

$$\|x - x^{(n)}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

что и требовалось доказать.

Важность пространства l_2 определяется его тесной связью с другими гильбертовыми пространствами. Пусть H — любое гильбертово пространство[1] и $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система его элементов. Пусть, далее, u — любой элемент из H. Разложим его в ортогональный ряд

$$u \doteq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \tag{9}$$

Из уравнения замкнутости

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

вытекает, что *последовательность*

$$a = (a_1, a_2, \dots a_k, \dots)$$

коэффициентов Фурье любого элемента из H принадлежит l_2, при этом

$$\|u\|^2 = \|a\|^2; \tag{10}$$

в последнем равенстве $\|a\|$ вычисляется как норма элемента из l_2 по формуле (2). С другой стороны, если $a = (a_1, a_2, \dots a_k, \dots)$ есть произвольная последовательность из l_2, то по теореме 2 § 5 ряд (9) определяет элемент из H, причем имеет место равенство (10). Таким образом, если задана полная ортонормированная система в H, то разложением в ряд Фурье (9) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами пространств H и l_2, причем соответствующие элементы имеют одинаковые нормы. Можно доказать и более общее утверждение: если элементам u, v из H соответствуют в указанном выше смысле элементы $a = (a_1, a_2, \dots a_k, \dots)$ и $b = (b_1, b_2, \dots b_k, \dots)$ пространства l_2, то

$$(u, v) = (a, b). \tag{11}$$

[1] Как обычно, мы допускаем, что в H есть полная счетная ортонормированная система.

Для доказательства заметим, что элементам $u+v$ и $u+iv$ пространства H отвечают в качестве последовательностей коэффициентов Фурье элементы $a+b$, $a+ib$ пространства l_2. По формуле (10) имеем

$$(u+v,\ u+v)=(a+b,\ a+b);$$
$$(u+iv,\ u+iv)=(a+ib,\ a+ib).$$

Раскрывая скобки и замечая, что по той же формуле (10) $(u,\ u)=(a,\ a)$, $(v,\ v)=(b,\ b)$, получим

$$(u,\ v)+(v,\ u)=(a,\ b)+(b,\ a); \tag{12_1}$$

$$-i(u,\ v)+i(v,\ u)=-i(a,\ b)+i(b,\ a). \tag{12_2}$$

Разделив (12_2) на i, вычтя из (12_1) и разделив полученное равенство на 2, мы придем к формуле (11).

В заключение сделаем некоторые замечания об ограниченных операторах в пространстве l_2. Пусть линейный ограниченный оператор A переводит элемент $x\in l_2$ в элемент y того же пространства, так что $y=Ax$. По формуле (8)

$$y_k=(Ax,\ e_k).$$

Так как оператор A ограничен, то он непрерывен (см. § 6), а потому $Ax=A\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_me_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}x_mAe_m$. Теперь, в силу непрерывности скалярного произведения,

$$y_k=\sum_{m=1}^{\infty}x_m(Ae_m,\ e_k).$$

Обозначая

$$(Ae_m,\ e_k)=a_{km}, \tag{13}$$

получим

$$y_k=\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}x_m,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{14}$$

Уравнения (14) полностью определяют оператор A. С другой стороны, уравнения (14) полностью определяются матрицей коэффициентов $\|a_{km}\|_{k,m=1}^{k,m=\infty}$. Отсюда следует, что всякий ограниченный в l_2 оператор определяется некоторой бесконечной матрицей. Обратное утверждение, конечно, неверно: не всякая бесконечная матрица определяет ограниченный оператор в l_2.

§ 48. Вполне-непрерывные операторы

Оператор A называется *вырожденным*, если он может быть представлен в виде

$$Au = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k, \tag{1}$$

где число n — конечное, а φ_k и ψ_k — данные элементы рассматриваемого гильбертова пространства. Оператор A называется *вполне-непрерывным*, [1] если он может быть представлен в виде

$$Au = A'_\varepsilon u + A''_\varepsilon u, \tag{2}$$

где A'_ε — вырожденный оператор, а норма оператора A''_ε может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Ниже мы укажем некоторые важные типы вполне-непрерывных операторов; здесь мы пока отметим некоторые их основные свойства;

а) *Всякий вырожденный оператор вполне-непрерывен.* Действительно, вырожденный оператор можно представить в форме (2) — достаточно положить $A''_\varepsilon = 0$.

б) *Вполне-непрерывный оператор ограничен.*

Пусть $A'_\varepsilon u = \sum\limits_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k$ и пусть $\|A''_\varepsilon\| < \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Тогда

$$\|Au\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |(u, \psi_k)| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon \|u\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k\| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon \right\} \|u\|.$$

---

[1] Обычно принимается другое определение вполне-непрерывного оператора, эквивалентное данному (см. ниже теорему 1).

Отсюда видно, что оператор A ограничен, и

$$\|A\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k\| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon.$$

в) *Оператор, сопряженный с вполне-непрерывным, также вполне-непрерывен.* Действительно, если

$$Au = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \varphi_k + A''_\varepsilon u,$$

и $\|A''_\varepsilon\| < \varepsilon$, то, очевидно,

$$A^* u = \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k) \psi_k + (A''_\varepsilon)^* u.$$

По теореме 1 § 7, $\|(A''_\varepsilon)^*\| < \varepsilon$; по определению, оператор A^* вполне-непрерывен.

г) *Сумма конечного числа вполне-непрерывных операторов вполне-непрерывна.* Доказательство очевидно.

д) *Произведение двух операторов, из которых один — вполне-непрерывный, а другой — ограниченный — вполне-непрерывно.* Пусть A — вполне-непрерывный, а B — ограниченный оператор. Докажем, что операторы AB и BA вполне-непрерывны. Зададим произвольное положительное число ε и представим Au в виде

$$Au = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \varphi_k + A'' u, \quad \|A''\| < \frac{\varepsilon}{\|B\|}.$$

Тогда

$$ABu = \sum_{k=1}^{n} (Bu, \psi_k) \varphi_k + A'' Bu = \sum_{k=1}^{n} (u, B^* \psi_k) \varphi_k + A'' Bu;$$

$$\|A'' B\| \leqslant \|A''\| \cdot \|B\| < \varepsilon;$$

$$BAu = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) B\varphi_k + BA'' u; \quad \|BA''\| \leqslant \|B\| \cdot \|A''\| < \varepsilon.$$

Последние формулы показывают, что AB и BA представимы в виде (2), так как $B^* \psi_k$ и $B\varphi_k$ суть определенные элементы пространства. Отсюда следует, что AB и BA вполне-непрерывны. Из доказанного вытекает, в частности, что произведение вполне-непрерывных операторов само вполне-непрерывно.

Важным примером вполне-непрерывного в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора является интегральный оператор

$$Ku = \int\limits_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q, \tag{3}$$

ядро которого $K(P, Q)$ подчинено условию

$$B^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K^2(P, Q)|\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty. \tag{4}$$

Такой оператор называется *оператором Фредгольма*. Доказательство вполне-непрерывности оператора Фредгольма можно найти, например, в моей книге [1].

Рассмотрим еще один пример. Пусть в пространстве последовательностей l_2 задан оператор $y = Ax$ посредством уравнений

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n \tag{5}$$

и пусть двойной ряд

$$\sum_{k,\, n=1}^{\infty} |a_{kn}|^2 \tag{6}$$

сходится. Докажем, что в этом случае оператор A — вполне-непрерывный. В силу сходимости ряда (6) можно выбрать N настолько большим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|^2 < \varepsilon^2, \tag{7}$$

где ε — произвольно малое положительное число. Положим

$$y'_k = \sum_{n=1}^{N} a_{kn} x_n, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$y''_k = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{kn} x_n, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) определяют два оператора, которые мы обозначим через $y' = A'x$ и $y'' = A''x$, так что

$$Ax = A'x + A''x. \tag{10}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kn}|^2$ сходится — это непосредственно вытекает из сходимости ряда (6). Поэтому последовательность

$$\xi_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{kn}, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} e_k$$ [1]

входит в l_2. Система уравнений (12) равносильна уравнению

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{kn} x_n e_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{k=1}^{N} a_{kn} e_k = \sum_{n=1}^{N} x_n \xi_n.$$

Но $x_n = (x, e_n)$, и поэтому

$$y' = A'x = \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) \xi_n. \tag{11}$$

Формула (11) показывает, что оператор $A'x$ — вырожденный.

Обратимся теперь к оператору $A''x$. К ряду (9) применим неравенство Коши (см. § 3):

$$|y_k''|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2,$$

или, что то же,

$$|y_k''|^2 \leqslant \|x\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|^2. \tag{12}$$

Суммируя это неравенство по k, получим

$$\|y''\|^2 \leqslant \|x\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|^2,$$

или, в силу неравенства (7),

$$\|A''x\| < \varepsilon \|x\|. \tag{13}$$

Отсюда $\|A''x\| < \varepsilon$. По формуле (10) оператор A представлен суммой вырожденного и оператора со сколь угодно малой нормой, следовательно, оператор A — вполне-непрерывный.

Важное свойство вполне-непрерывного оператора, [2] которое мы широко используем во всем последующем, дается следующей теоремой.

---

[1] e_k — последовательность, у которой на k-ом месте стоит единица, а на остальных — нули; см. § 47, формула (7).

[2] Это свойство часто принимается за определение вполне-непрерывного оператора.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор T был вполне-непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы из всякого ограниченного бесконечного множества элементов пространства можно было выделить такую последовательность $\{u_n\}$, чтобы последовательность $\{Tu_n\}$ сходилась к некоторому пределу.*

Необходимость. Пусть сперва оператор T — вырожденный,

$$Tu = \sum_{k=1}^{N} (u, \psi_k)\varphi_k. \tag{14}$$

Пусть дано ограниченное множество M элементов u, так что $\| u \| \leqslant C$, $C = \text{const}$. Тогда $|(u, \psi_k)| \leqslant \| u \| \cdot \| \psi_k \| \leqslant C \| \psi_k \|$, и множество чисел (u, ψ_k) также ограничено. По известной теореме Вейерштрасса о существовании предельной точки у ограниченного числового множества, из множества M можно выделить последовательность, которую мы обозначим $\{u_{n1}\}$, так, чтобы существовал предел

$$\lim (u_{n1}, \psi_1) = a_1.$$

Из этой последовательности, по той же теореме Вейерштрасса, можно выделить вторую последовательность $\{u_{n2}\}$ так, чтобы существовал предел

$$\lim (u_{n2}, \psi_2) = a_2.$$

Так как $\{u_{n2}\}$ есть часть $\{u_{n1}\}$, то одновременно

$$\lim (u_{n_2}, \psi_1) = a_1.$$

Из $\{u_{n2}\}$ выделим третью последовательность $\{u_{n3}\}$ и т. д. В конечном счете мы получим последовательность $\{u_{nN}\}$, для которой существуют пределы

$$\lim (u_{nN}, \psi_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots N. \tag{15}$$

Теперь ясно, что Tu_{nN} имеет предел, равный $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$.

Обратимся к общему случаю. Оператор T разобьем на сумму $T_1 = T'_N + T''_N$, где $\| T''_N \| < \frac{1}{N}$, а оператор T'_N — вырожденный. Тогда

$$\| T - T'_N \| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{16}$$

Пусть дано ограниченное множество M, так что $\| u \| < C$, если $u \in M$. По только что доказанному, из M можно выделить такую последовательность — назовем ее попрежнему $\{u_{n1}\}$, — что $\{T'_1 u_{n1}\}$ сходится. Последовательность $\{u_{n1}\}$, как часть ограниченного множества, сама ограничена; из нее можно выделить частичную последовательность, которую мы обозначим $\{u_{n2}\}$, такую, что $\{T'_2 u_{n2}\}$ сходится к некоторому пределу. При этом, очевидно, $\{T'_1 u_{n2}\}$ также стремится к пределу — к тому же самому, что и $\{T'_1 u_{n1}\}$. Из $\{u_{n2}\}$ выделим частичную последовательность $\{u_{n3}\}$ так, чтобы $\{T'_3 u_{n3}\}$ стремилось к некоторому пределу, и т. д.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность последовательностей, каждая из которых содержится в предыдущей:

$$\left.\begin{array}{l} u_{11},\ u_{21},\ u_{31},\ \ldots\ u_{n1},\ \ldots \\ u_{12},\ u_{22},\ u_{32},\ \ldots\ u_{n2},\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{1n},\ u_{2n},\ u_{3n},\ \ldots\ u_{nn},\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{17}$$

причем последовательность $\{T'_N u_{nk}\}$ сходится при $n \to \infty$, если только $N \leqslant k$. Выделим из (17) „диагональную" последовательность

$$u_{11},\ u_{22},\ u_{33},\ \ldots\ u_{nn},\ \ldots \tag{18}$$

Все ее элементы, кроме конечного их числа, принадлежат любой из последовательностей (17), поэтому при любом N последовательность $\{T'_N u_{nn}\}$ сходится. Докажем теперь, что последовательность $\{Tu_{nn}\}$ сходится. Имеем

$$\| Tu_{nn} - Tu_{mm} \| \leqslant \| Tu_{nn} - T^N u_{nn} \| + \| T_N u_{nn} - T^N u_{mm} \| + \\ + \| T_N u_{mm} - Tu_{mm} \|.$$

Так как $\| u_{nn} \| \leqslant C$, $\| u_{mm} \| \leqslant C$, то

$$\| Tu_{nn} - Tu_{mm} \| \leqslant 2C \| T - T_N \| + \| T_N (u_{nn} - u_{mm}) \|.$$

При N достаточно большом, в силу (16), $\| T - T_N \| < \frac{\varepsilon}{4C}$, где ε — произвольное положительное число; зафиксировав N, выберем n_0 так, чтобы при $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ было $\| T_N (u_{nn} - u_{mm}) \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Это возможно, так как последовательность $\{T_N u_{nn}\}$ сходится при $n \to \infty$. Теперь $\| Tu_{nn} - Tu_{mm} \| < \varepsilon$, если $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$. Отсюда следует, что последовательность $\{Tu_{nn}\}$ — сходящаяся.

Достаточность. Пусть оператор Tu таков, что из множества M_T элементов $\{Tu\}$ можно выделить сходящуюся последовательность, если только множество M элементов u ограничено. Оператор T — ограниченный. В противном случае некоторая ограниченная последовательность переводилась бы оператором Tu в последовательность элементов, нормы которых бесконечно возрастают. Из такой последовательности выделить сходящуюся часть, очевидно, невозможно.

В качестве M возьмем множество элементов u, нормы которых равны единице: $\| u \| = 1$, $u \in M$. Докажем прежде всего следующее: *если дано число $\varepsilon > 0$, то из множества M_T можно выделить конечное число элементов $v_1, v_2, \ldots v_r$, обладающих тем свойством, что любой элемент из M_T отстоит от некоторого элемента v_j на расстояние, меньшее ε.* Доказательство очень просто: возьмем в M_T произвольный элемент и обозначим его через v_1. Если все элементы из M_T отстоят от v_1 на расстояние, меньшее ε, то построение закончено, и $r = 1$; в противном случае возьмем в качестве v_2 произвольный элемент из M_T, такой, что $\| v_2 - v_1 \| \geqslant \varepsilon$. За v_3 примем любой элемент из M_T, для которого $\| v_3 - v_1 \| \geqslant \varepsilon$, $\| v_3 - v_2 \| \geqslant \varepsilon$, и т. д. Этот процесс необходимо оборвется — в противном случае мы бы выделили из M_T бесконечную последовательность $\{v_n\}$ такую, что $\| v_n - v_m \| \geqslant \varepsilon$, каковы бы ни были m и n. Ясно, что ни сама $\{v_n\}$, ни любая ее частичная последовательность не будет сходящейся, что противоречит условию. Если процесс оборвался на элементе v_r, то любой из элементов множества M_T отстоит от какого-либо из элементов $v_1, v_2, \ldots v_r$ на расстояние, меньшее ε. Иначе говоря, если $\| u \| = 1$, то можно подобрать элемент v_k, такой, что

$$\| Tu - v_k \| < \varepsilon. \tag{19}$$

Среди элементов v_k есть некоторое число s, $s \leqslant r$ линейно-независимых; перенумеруем v_k так, чтобы линейно-независимыми были $v_1, v_2, \ldots v_s$. Для каждого v_k можно подобрать такие постоянные a_{jk}, что

$$v_k = \sum_{j=1}^{s} a_{jk} v_j, \quad k = 1, 2, \ldots r.$$

Тем самым для каждого элемента u, $\| u \| = 1$, можно подобрать такие постоянные a_{jk}, что

$$\| Tu - \sum_{j=1}^{s} a_{jk} v_j \| < \varepsilon.$$

Подвергнем $v_1, v_2, \ldots v_s$ процессу ортогонализации (см. § 5). Мы получим тогда систему s ортонормированных элементов, которые мы обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ и через которые линейно выражаются $v_1, v_2, \ldots v_s$. Сумма $\sum\limits_{j=1}^{s} a_{jk} v_j$ перейдет в сумму вида $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j \varphi_j$, где b_j — постоянные; при этом

$$\| Tu - \sum_{j=1}^{s} b_j\varphi_j \| < \varepsilon, \quad \| u \| = 1.$$

Поставим теперь задачу: найти постоянные C_j, обращающие в минимум выражение $\| Tu - \sum_{j=1}^{s} C_j\varphi_j \|$. Как известно (см. § 5), решение этой задачи дается формулой

$$C_j = (Tu, \varphi_j) = (u, T^*\varphi_j).$$

По определению коэффициентов C_j,

$$\| Tu - \sum_{j=1}^{s} C_j\varphi_j \| \leqslant \| Tu - \sum_{j=1}^{s} b_j\varphi_j \| < \varepsilon, \quad \| u \| = 1. \tag{20}$$

Положим

$$T'u = \sum_{j=1}^{s} C_j\varphi_j = \sum_{j=1}^{s} (u, T^*\varphi_j)\, \varphi_j,$$

$$T''u = Tu - T'u.$$

Оператор $T'u$, очевидно, вырожденный. Докажем, что $\| T'' \| < \varepsilon$ Действительно, по равенству (20), $\| T''u \| < \varepsilon$, если $\| u \| = 1$. Пусть u — произвольный элемент гильбертова пространства. Положим $v = \frac{u}{\| u \|}$. Тогда $\| v \| = 1$ и $\| T''v \| < \varepsilon$. Но

$$T''v = T''\left(\frac{u}{\| u \|}\right) = \frac{1}{\| u \|} T''u$$

и

$$\| T''v \| = \frac{\| T''u \|}{\| u \|}.$$

Отсюда $\| T''u \| < \varepsilon \| u \|$, т. е. $\| T'' \| < \varepsilon$.

Теперь $Tu = T'u + T''u$, где оператор T' — вырожденный, а T'' — сколь угодно малый по норме. Теорема доказана.

§ 49. Интегральный оператор со слабой особенностью

Так мы называем интегральный оператор

$$Ku = \int_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q,$$

ядро которого удовлетворяет неравенству

$$| K(P, Q) | < \frac{A}{r^\alpha}, \tag{1}$$

где r — расстояние между P и Q, A и α — постоянные, причем $0 < \alpha < m$, где m — размерность области Ω.

Известно, [1] что произведение двух таких операторов есть также оператор со слабой особенностью, и что все степени оператора со слабой особенностью, начиная с некоторой, суть операторы типа Фредгольма.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы: [2]

Теорема. *Интегральный оператор со слабой особенностью вполне-непрерывен в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство распадается на три части.

а) Лемма 1. *Если оператор A^*A вполне непрерывен, то A также вполне непрерывен.*

Пусть M — ограниченное множество. Выделим из него такую последовательность $\{u_n\}$, чтобы существовал предел

$$\lim_{n\to\infty} A^*Au_n.$$

Докажем, что тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Au_n.$$

Имеем

$$\|Au_n - Au_m\|^2 = \|A(u_n - u_m)\|^2 = (A(u_n - u_m), A(u_n - u_m)) = \\ = (u_n - u_m, \ A^*A(u_n - u_m)).$$

По неравенству Буняковского

$$\|Au_n - Au_m\|^2 \leqslant \|u_n - u_m\| \cdot \|A^*Au_n - A^*Au_m\|.$$

Пусть на множестве M $\|u_n\| < C$. Тогда $\|u_n - u_m\| \leqslant \|u_n\| + \|u_m\| < 2C$, и, следовательно,

$$\|Au_n - Au_m\| < \sqrt{2C}\sqrt{\|A^*Au_n - A^*Au_m\|} \underset{n,\, m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{Au_n\}$ — фундаментальная (см. § 4) и потому имеет предел. Таким образом, из каждого ограниченного множества можно выделить после-

---

[1] См., например, С. Г. Михлин [1] или С. Л. Соболев [4].

[2] Эта теорема не будет использована в последующем. Мы приводим ее здесь, так как она устанавливает вполне-непрерывность важного типа операторов, часто встречающихся в анализе.

довательность $\{u_n\}$, для которой существует $\lim\{Au_n\}$. Это значит, что оператор A — вполне-непрерывный.

б) Лемма 2. *Интегральный оператор со слабой особенностью — ограничен в* $L_2(\Omega)$.

Пусть

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha},$$

где $0 < \alpha < m$, и $|A(P, Q)| \leqslant C = \text{const}$. Оператор

$$Ku = \int_\Omega K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q \tag{2}$$

будем сперва рассматривать на множестве функций из $L_2(\Omega)$, непрерывных в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$. Если $u(P)$ такая функция, то интеграл (2) — абсолютно- и равномерно-сходящийся и представляет собой функцию, непрерывную в $\overline{\Omega}$. Оценим этот интеграл. Имеем

$$|Ku| \leqslant C \left| \int_\Omega \frac{u(Q)}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{r^{\alpha/2}}\, d\Omega_Q \right|.$$

К последнему интегралу применим неравенство Буняковского:

$$|Ku|^2 \leqslant C^2 \int_\Omega \frac{|u^2(Q)|}{r^\alpha}\, d\Omega_Q \int_\Omega \frac{d\Omega_Q}{r^\alpha}.$$

Второй интеграл справа сходится равномерно и потому ограничен; пусть

$$\int_\Omega \frac{d\Omega_Q}{r^\alpha} \leqslant C_1,$$

тогда

$$|Ku|^2 \leqslant C^2 C_1 \int_\Omega \frac{|u^2(Q)|}{r^\alpha}\, d\Omega_Q.$$

Интегрируя это неравенство по Ω, получим

$$\|Ku\|^2 \leqslant C^2 C_1 \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u^2(Q)|}{r^\alpha}\, d\Omega_P\, d\Omega_Q =$$

$$= C^2 C_1 \int_\Omega |u^2(Q)|\, d\Omega_Q \int_\Omega \frac{d\Omega_P}{r^\alpha} \leqslant C^2 C_1^2 \|u\|^2$$

или

$$\|Ku\|^2 \leqslant C^2 C_1^2 \|u\|^2.$$

Отсюда следует, что на множестве функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$, оператор Ku ограничен, и его норма

$$\|K\| \leqslant CC_1, \tag{3}$$

По теореме 3 § 6, оператор Ku можно расширить на все $L_2(\Omega)$ с сохранением нормы.

В последующем, говоря об операторе со слабой особенностью, мы будем понимать под этим только что указанное расширение.

в) Сопряженный с Ku оператор

$$K^*u = \int_\Omega \overline{K(Q,\ P)}\, u(Q)\, d\Omega_Q$$

есть также интегральный оператор со слабой особенностью. Таким же будет и самосопряженный оператор $T = K^*K$, а следовательно, и операторы T^2, T^4, $T^8 \ldots$. Как было указано в начале параграфа, при n достаточно большом оператор T^{2^n} будет фредгольмовским и, следовательно, вполне-непрерывным. По лемме 1 будет вполне-непрерывным и $T^{2^{n-1}}$, а следовательно, и $T^{2^{n-2}}, \ldots T^2$, T. Наконец, из вполне-непрерывности $T = K^*K$ вытекает, по той же лемме 1, что K вполне-непрерывен.

§ 50. Уравнения, содержащие вполне-непрерывный оператор

Рассмотрим уравнение

$$u - \lambda Tu = f, \tag{1}$$

где u — искомый, а f — данный элемент некоторого гильбертова пространства H, T — вполне-непрерывный в этом пространстве оператор и λ — численный параметр. Чтобы решить это уравнение, поступим следующим образом. Будем считать, что λ может принять любое фиксированное значение, по модулю не превосходящее некоторого постоянного R: $|\lambda| \leqslant R$.

По формуле (2) § 48 положим $T = T' + T''$, где оператор T' — вырожденный, а относительно оператора T'' потребуем, чтобы

$$\|T''\| \leqslant \frac{1}{2R}.$$

Тогда

$$\|u - \lambda T'' u\| \geqslant \|u\| - |\lambda| \|T'' u\| \geqslant \frac{1}{2} \|u\|; \tag{2}$$

из теоремы § 6 вытекает, что *оператор* $(E - \lambda T'')^{-1}$ *существует и ограничен*. Нетрудно установить его вид, именно, непосредственная проверка показывает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k (E - \lambda T'') u = (E - \lambda T'') \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (T'')^k u = u$$

и, следовательно,

$$(E - \lambda T'')^{-1} u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n (T'')^n u.$$

Из этой формулы следует, в частности, что оператор $(E - \lambda T'')^{-1} u$ определен на всем пространстве.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$u - \lambda T'' u - \lambda T' u = f.$$

Применив к его обеим частям оператор $(E - \lambda T'')^{-1}$, мы преобразуем это уравнение в ему эквивалентное

$$u - \lambda (E - \lambda T'')^{-1} T' u = F_\lambda; \quad F_\lambda = (E - \lambda T'')^{-1} f. \tag{3}$$

Далее пусть

$$T' u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \varphi_k;$$

элементы φ_k, так же как и элементы ψ_k, можно считать линейно-независимыми. Теперь

$$(1 - \lambda T'')^{-1} T' u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \omega_{\lambda, k}; \quad \omega_{\lambda, k} = (E - \lambda T'')^{-1} \varphi_k. \tag{4}$$

Элементы $\omega_{\lambda, k}$ линейно-независимы. Действительно, пусть постоянные α_k таковы, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = 0$. Тогда

$$(E - \lambda T'') \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (E - \lambda T'') \omega_{\lambda, k} = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0.$$

Так как φ_k линейно-независимы, то $\alpha_k = 0$, что и требовалось доказать.

Обозначим

$$C_k = (u, \psi_k). \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_{\lambda, k} = F_\lambda \tag{6}$$

и дело сводится к определению постоянных C_k.

Пользуясь формулой (4), приведем уравнение (3) к виду

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \omega_{k, \lambda} = F_\lambda.$$

Заменяя здесь u его выражением из (6) и пользуясь линейной независимостью $\omega_{k, \lambda}$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_k

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(\lambda) C_k = b_m(\lambda); \quad m = 1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

эквивалентную уравнению (1). Здесь положено

$$a_{mk}(\lambda) = (\omega_{\lambda, k}, \psi_m); \quad b_m(\lambda) = (F_\lambda, \psi_m). \tag{8}$$

Очевидно, коэффициенты a_{mk}, а следовательно, и определитель

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11}, & -\lambda a_{12}, & \ldots, & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21}, & 1 - \lambda a_{22}, & \ldots, & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1}, & -\lambda a_{n2}, & \ldots, & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

суть функции от λ, голоморфные в круге $|\lambda| \leqslant R$ комплексной λ-плоскости.[1] Отсюда следует, что в круге $|\lambda| \leqslant R$ определитель $D_R(\lambda)$может иметь только конечное число корней.

Если $D^R(\lambda) = 0$, то однородная система, получаемая из (7) заменой правых частей нулями, имеет нетривиальное решение, т. е. такое решение, в котором, не все C_m равны нулю. Тогда, очевидно, однородное уравнение

$$u - \lambda T u = 0$$

имеет нетривиальное решение, и рассматриваемое λ есть величина, обратная собственному числу оператора T. Такие λ называются также характеристическими числами. Если же $D_R(\lambda) \neq 0$, то система (7), а с ней и уравнение (1), имеет единственное решение, так что существует оператор $(E - \lambda T)^{-1}$. Мы будем обозначать его через Γ_λ. Значения λ, для которых Γ_λ существует, мы будем называть *правильными*.

Для уравнения (1), содержащего вполне-непрерывный оператор, сохраняет силу так называемая *альтернатива Фредгольма*: либо неоднородное уравнение разрешимо, и притом единственным образом, при любом свободном члене f, и тогда соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение $u = 0$, либо неоднородное уравнение разрешимо не при любом свободном члене, и тогда соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения. Первая часть альтернативы имеет место, если λ — правильное, вторая, если λ — характеристическое.

Как мы видим, в круге любого радиуса $|\lambda| \leqslant R$ содержится только конечное число характеристических чисел уравнения (1); отсюда следует, что этих чисел, самое большее, счетное множество на всей комплексной λ-плоскости. Все остальные значения λ — правильные.

Если оператор Γ_λ *существует, то он ограничен.* Докажем это. Решив систему (7) и подставив ее решение в (6), мы найдем после простых преобразований

$$u = \Gamma_\lambda f = (E - \lambda T'')^{-1} f + \\ + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k,\, m=1}^{n} \Delta_{km}(\lambda)\, \omega_{\lambda,\, m}\left(f, ((E - \lambda T'')^{-1})^* \psi_k\right), \qquad (10)$$

---

[1] При этом $D_R(\lambda) \not\equiv 0$, так как, очевидно, $D_R(0) = 1$.

где $\Delta_{km}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении k-ой строки и m-го столбца в определителе $D_R(\lambda)$. Из неравенства (2) следует (см. теорему 5 § 6), что $\|(E-\lambda T'')^{-1}\| \leqslant 2$. Теперь формула (10) дает

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leqslant 2\|f\| + \\ + \sum_{k,\, m=1}^{n} \left| \frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)} \right| \cdot \|\omega_{\lambda,\, m}\| \, |(f, ((E-\lambda T'')^{-1})^* \, \psi_k)|.$$

Но по неравенству Буняковского,

$$(|f, ((E-\lambda T'')^{-1})^* \psi_k)| \leqslant \|f\| \cdot \|((E-\lambda T'')^{-1})^* \psi_k\| = \\ = \|f\| \cdot \|(E-\lambda T'')^{-1} \psi_k\| \leqslant 2\|f\| \cdot \|\psi_k\|,$$

отсюда

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leqslant 2\left\{1 + \sum_{k,\, m=1}^{n} \left| \frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)} \right| \cdot \|\omega_{\lambda,\, m}\| \cdot \|\psi_k\| \right\} \|f\|,$$

и, следовательно,

$$\|\Gamma_\lambda\| \leqslant 2\left\{1 + \sum_{k,\, m=1}^{n} \left| \frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)} \right| \cdot \|\omega_{\lambda,\, m}\| \cdot \|\psi_k\| \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\{T_n\}$ — вполне-непрерывные операторы в некотором гильбертовом пространстве H, которые стремятся к вполне-непрерывному оператору T, в том смысле, что*

$$\|T - T_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{11}$$

Пусть, далее, f_n — элементы того же пространства, стремящиеся к некоторому элементу f. Если λ — правильное значение уравнения

$$u - \lambda T u = f, \tag{12}$$

то при достаточно большом n это же λ будет правильным и для уравнения

$$u_n - \lambda T_n u_n = f_n. \tag{13}$$

при этом решение уравнения (13) *стремится, при* $n \to \infty$, *к решению уравнения* (12).

Рассмотрим уравнение

$$v - \lambda T_n v = g, \tag{14}$$

где g — произвольный элемент из $\varkappa$. Уравнение (14) запишем в виде

$$v - \lambda T v - \lambda (T_n - T) v = g. \tag{15}$$

По условию теоремы, существует оператор Γ_λ; применив его к обеим частям (15), получим

$$v - \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T) v = \Gamma_\lambda f. \tag{16}$$

Имеем, далее,

$$\|\lambda \Gamma_\lambda (T_n - T)\| \leqslant |\lambda| \cdot \|\Gamma_\lambda\| \cdot \|T_n - T\|, \tag{17}$$

что по условию теоремы будет сколь угодно малым при n достаточно большом. Пусть n настолько велико, что $\|\lambda\Gamma_\lambda (T_n - T)\| < \frac{1}{2}$. Тогда $\|(E - \lambda\Gamma_\lambda (T_n - T)) v\| > \frac{1}{2} \|v\|$; по теореме 5 § 6 существует оператор $[E - \lambda\Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1}$, и его норма меньше 2. Теперь из (16) находим решение уравнения (14):

$$v = [E - \lambda\Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1} \Gamma_\lambda g.$$

Отсюда видно, что при указанных n существует оператор

$$\Gamma_{n\lambda} = (E - \lambda T_n)^{-1} = [E - \lambda\Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1} \Gamma_\lambda; \tag{18}$$

этим доказано, что рассматриваемое значение λ — правильное для уравнения (13).

Чтобы установить вторую часть теоремы, докажем сперва, что $\|\Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Для краткости обозначим

$$\lambda\Gamma_\lambda (T_n - T) = B_n;$$

из (17) видно, что $\|B_n\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Теперь, по формулам (18) и (8),

$$\Gamma_{n\lambda} u = \sum_{k=0}^{\infty} B_n^k \Gamma_\lambda u,$$

откуда

$$\Gamma_{n\lambda}u - \Gamma_\lambda u = \sum_{k=1}^{\infty} B_n^k \Gamma_\lambda u$$

и

$$\|\Gamma_{n\lambda} - \Gamma\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|B_n\|^k \cdot \|\Gamma_\lambda\| = \frac{\|B_n\| \cdot \|\Gamma_\lambda\|}{1 - \|B_n\|} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \qquad (19)$$

Теперь легко доказать вторую часть теоремы. Имеем

$$u_n - u = \Gamma_{n\lambda} f_n - \Gamma_\lambda f = (\Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda) f_n + \Gamma_\lambda (f_n - f).$$

Отсюда

$$\|u_n - u\| \leqslant \|\Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda\| \cdot \|f_n\| + \|\Gamma_\lambda\| \cdot \|f_n - f\|.$$

Так как $\|f_n\| \to \|f\|$, то $\|f_n\|$ ограничена; в силу (19) первое слагаемое стремится к нулю. Стремление к нулю второго слагаемого очевидно. Окончательно, $\|u_n - u\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\|T_n - T\| \to 0$, где T и T_n — *вполне-непрерывные операторы, то характеристические числа уравнения* $u - \lambda Tu = 0$ *получаются предельным переходом, при* $n \to \infty$, *из характеристических чисел уравнения* $u_n - \lambda T_n u_n = 0$.

Доказательство основано на простом замечании, что при достаточно малом изменении оператора T сколь угодно мало изменяются элементы определителя $D_R(\lambda)$, а следовательно, и самый определитель. Пусть λ_0 — какой-либо корень $D_R(\lambda)$, лежащий в круге $|\lambda| \leqslant R$, и пусть p — его кратность. Окружим λ_0 кругом достаточно малого радиуса ρ. Тогда внутри и на окружности этого круга других корней $D_R(\lambda)$, кроме λ_0, не будет. В частности на окружности $|\lambda - \lambda_0| = \rho$ определитель $D_R(\lambda)$ отличен от нуля. Обозначим

$$q = \min_{|\lambda - \lambda_0| = \rho} |D_R(\lambda)|; \quad q > 0.$$

Выберем теперь N столь большим, чтобы при $n \geqslant N$ на окружности $|\lambda - \lambda_0| = \rho$ было

$$|D_R(\lambda) - D_R^{(n)}(\lambda)| < q,$$

где $D_R^{(n)}(\lambda)$ — определитель (9), соответствующий оператору T_n. По теореме Руше,[1] $D_R^{(n)}(\lambda)$ имеет в круге $|\lambda-\lambda_0|<\rho$ ровно p корней. Обозначим их $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots \lambda_{np}$. Очевидно,

$$|\lambda_{nj}-\lambda_0|<\rho, \; j=1, \; 2, \ldots p, \; n \geqslant N.$$

Так как ρ можно выбрать сколь угодно малым, то последнее неравенство равносильно утверждению, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nj}=\lambda_0, \; j=1, \; 2, \ldots p.$$

§ 51. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений

Решение уравнения

$$u-\lambda Tu=f, \tag{1}$$

где T — ограниченный линейный оператор, определенный в некотором гильбертовом пространстве H, можно свести к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$x_k-\lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_{km}x_m=f_m, \quad m=1, \; 2, \ldots \tag{2}$$

Действительно, возьмем систему $\{\varphi_m\}$, ортонормированную и полную в H. Разложим u и f в ортогональные ряды

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\varphi_k; \; f=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k; \; x_k=(u, \; \varphi_k), \; b_k=(f, \; \varphi_k).$$

Далее, разложение Tu в ортогональный ряд имеет вид

$$Tu=\sum_{k=1}^{\infty}(Tu, \; \varphi_k)\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sum_{m=1}^{\infty} x_m(T\varphi_m, \varphi_k).$$

Подставив это в (1) и приравняв коэффициенты при φ_k слева и справа, мы придем к системе (2), если введем обозначение

$$(T\varphi_m, \varphi_k)=a_{km}. \tag{3}$$

---

[1] См., например, В. И. Смирнов [2] или И. И. Привалов [1].

Система (2) и уравнение (1) эквивалентны в том смысле, что каждому решению уравнения (1) отвечает последовательность $x=(x_1, x_2, \ldots x_m \ldots)$, входящая в l_2, координаты которой удовлетворяют системе (2) и наоборот, если $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ удовлетворяют системе (2), и последовательность $x=(x_1, x_2 \ldots x_m \ldots)$ входит в l_2, то этой последовательности соответствует решение уравнения (1).

Ниже, рассматривая систему вида (2), мы будем считать, что как искомая последовательность $x=(x_1, x_2, \ldots x_m \ldots)$, так и данная последовательность $b=(b_1, b_2, \ldots b_m \ldots)$ входят в l_2.

Вводя в рассмотрение последовательности коэффициентов Фурье элементов пространства H, мы тем самым приводим во взаимно-однозначное соответствие элементы пространств H и l_2. Как было указано в § 47, при таком соответствии сохраняются неизменными скалярное произведение и норма. В таком случае, если оператор T в уравнении (1) вполне-непрерывен в H, то оператор A, определяемый в l_2 матрицей $\|a_{km}\|_{k, m=1}^{k, m=\infty}$, также вполне-непрерывен. Это следует из того, что при указанном выше соответствии вырожденному оператору соответствует вырожденный, а малому по норме — столь же малый по норме.

Система n уравнений с n неизвестными

$$x_k - \lambda \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_m = b_m, \quad m = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

называется *усеченной* по отношению к бесконечной системе (2). Для дальнейшего весьма существенна следующая теорема:

Теорема. *Пусть оператор A, определяемый матрицей $\|a_{km}\|_{k, m=1}^{k, m=\infty}$, будет вполне-непрерывным в l_2. Если значение λ — правильное для системы (2), то при достаточно большом n усеченные системы имеют единственное решение, причем последовательность*

$$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)$$

где $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)})$ есть решение системы (4), *сходится, в смысле сходимости в l_2, к последовательности*

$(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, *удовлетворяющей системе* (2). *Характеристические числа системы* (2) *получаются предельным переходом при* $n \to \infty$, *из соответствующих характеристических чисел системы* (2).

Обозначим через Ax оператор, определяемый матрицей $\|a_{km}\|_{k, m=1}^{k, m=\infty}$, через $A_n x$ — вырожденный оператор

$$A_n x = \sum_{m=1}^{n} (Ax, e_m)\, e_m, \tag{5}$$

где e_m — последовательности, определяемые формулой (7) § 47, и, наконец, через $b^{(n)}$ — последовательность

$$b^{(n)} = (b_1, b_2, \ldots b_n, 0, 0, \ldots) = \sum_{m=1}^{n} b_m e_m.$$

Докажем, что $\|A_n - A\| \to 0$. Так как система $\{e_n\}$ — ортонормированная и полная в l_2, то Ax можно разложить в ряд

$$Ax = \sum_{m=1}^{\infty} (Ax, e_m)\, e_m.$$

Отсюда

$$Ax - A_n x = \sum_{m=n+1}^{\infty} (Ax, e_m)\, e_m. \tag{6}$$

Разобьем Ax на сумму $Ax = A'x + A''x$, где $A'x$ — вырожденный оператор вида

$$A'x = \sum_{k=1}^{n} (x, \xi^{(k)})\, \eta^{(k)}$$

($\xi^{(k)}$ и $\eta^{(k)}$ — некоторые элементы пространства l_2), а $A''x$ — оператор, с нормой, меньшей, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ (ε — произвольное положительное число). Подставив это в (6), найдем

$$\|Ax - A_n x\| \leqslant \Big\| \sum_{m=n+1}^{\infty} (A'x, e_m)\, e_m \Big\| + \\ + \Big\| \sum_{m=n+1}^{\infty} (A''x, e_m)\, e_m \Big\|. \tag{7}$$

Далее, в силу ортонормированности e_m, второй член в (7) имеет следующую оценку:

$$\Big\|\sum_{m=n+1}^{\infty}(A''x,\ e_m)\,e_m\Big\| = \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty}|(A''x,\ e_m)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \|A''x\| < \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|. \qquad (8)$$

Оценим первый член в (7):

$$\Big\|\sum_{m=n+1}^{\infty}(A'x,\ e_m)\,e_m\Big\| = \Big\|\sum_{m=n+1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{N}((x,\ \xi^{(k)})\,\eta^{(k)},\ e_m)\,e_m\Big\| =$$
$$= \Big\|\sum_{k=1}^{N}(x,\ \xi^{(k)})\sum_{m=n+1}^{\infty}(\eta^{(k)},\ e_m)\,e_m\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N}|(x,\ \xi^{(k)})|\,\Big\|\sum_{m=n+1}^{\infty}(\eta^{(k)},\ e_m)\,e_m\Big\| =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}|(x,\ \xi^{(k)})|\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty}|(\eta^{(k)},\ e_m)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|\sum_{k=1}^{N}\|\xi^{(k)}\|\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty}|(\eta^{(k)},\ e_m)|^2}.$$

При n достаточно большом коэффициент при $\|x\|$ можно сделать сколь угодно малым. Пусть при $n \geqslant n_0$

$$\Big\|\sum_{m=n+1}^{\infty}(A'x,\ e_m)\,e_m\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|. \qquad (9)$$

Подставив (8) и (9) в (7), получим

$$\|Ax - A_n x\| < \varepsilon\,\|x\|,\quad n \geqslant n_0$$

или, что то же,

$$\|A - A_n\| < \varepsilon,\quad n \geqslant n_0,$$

откуда следует, что $\|A - A_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x^{(n)} - \lambda A_n x^{(n)} = b^{(n)}. \qquad (10)$$

К этому уравнению применимы теоремы 1 и 2 § 50; чтобы доказать нашу теорему, нам достаточно показать, что уравнение (10) эквивалентно системе (4). Уравнению (10) можно придать вид

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \{\lambda (Ax^{(n)}, e_k) + b_k\} e_k. \tag{11}$$

Отсюда видно, что все координаты $x^{(n)}$, начиная с $n+1$-ой, равны нулю. Обозначая выражение в фигурных скобках (11) через $x_k^{(n)}$, имеем

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)} e_k.$$

Подставим это в (11). Приравняв коэффициенты при одинаковых e_k, мы получим систему уравнений для определения неизвестных $x_k^{(n)}$

$$x_k^{(n)} - \lambda \sum_{m=1}^{n} x_m^{(n)} (Ae_m, e_k) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{12}$$

Но $(Ae_m, e_k) = a_{km}$ (формула (13) § 47), и система (12) совпадает с усеченной системой (4). Тем самым наша теорема доказана.

§ 52. Достаточный признак сходимости метода Галеркина

Мы будем изучать сходимость метода Галеркина, предполагая, что оператор Au (уравнение (4) § 46) имеет вид

$$Au = A_0 u + Ku, \tag{1}$$

где $A_0 u$ — положительно-определенный самосопряженный оператор, область определения которого, D_{A_0}, плотна в заданном гильбертовом пространстве H. Относительно оператора K мы предположим, что его область определения содержит область D_{A_0}, так что выражение Ku имеет смысл каждый раз, когда имеет смысл выражение $A_0 u$. Дальнейшие ограничения на оператор K будут наложены ниже.

Аналогично тому, как это было сделано в § 19, введем гильбертово пространство H_0, в котором скалярное произведение равно

$$[u, v] = (A_0 u, v). \tag{2}$$

В соответствии с методом Галеркина, выберем последовательность координатных элементов $\{\varphi_n\}$. *Мы потребуем, чтобы эта последовательность входила в областъ определения оператора A_0 и была полна в H_0.*

Система (5) § 46 в нашем случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \{(A_0 \varphi_k, \varphi_m) + (K\varphi_k, \varphi_m)\} a_k = (f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots n. \tag{3}$$

Ортонормируем $\{\varphi_n\}$ в пространстве H_0. Как было отмечено в § 20, это не изменит приближенного решения u_n. Система (3) при этом несколько упростится. Прежде всего,

$$(A_0 \varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Далее,

$$(K\varphi_k, \varphi_m) = (A_0 GK\varphi_k, \varphi_m) = [T\varphi_k, \varphi_m],$$

где $G = A_0^{-1}$ и $T = GK$. Наконец,

$$(f, \varphi_m) = (A_0 Gf, \varphi_m) = [f', \varphi_m], \quad f' = Gf.$$

Введя для краткости обозначения

$$\gamma_{mk} = [T\varphi_k, \varphi_m], \quad b_m = [f', \varphi_m],$$

мы приведем систему (3) к виду

$$a_k + \sum_{m=1}^{n} \gamma_{km} a_m = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{4}$$

Система (4) является усеченной по отношению к бесконечной системе

$$a_k + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{km} a_m = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Для сходимости метода Галеркина в H_0 достаточно, чтобы система (5) имела в l_2 (гильбертовом пространстве последовательностей) единственное решение, которое является пределом решений усеченных систем.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Метод Галеркина для уравнения* (1) § 1 *сходится в* H_0, *если выполнены следующие условия:*

I. *Уравнение* $Au = f$ *имеет не более одного решения.*

II. *Оператор* $T = GK$ *может быть расширен до вполне-непрерывного в* H_0.

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения

$$A_0 u + Ku = f \tag{6}$$

оператор G, мы получим уравнение, эквивалентное (6),

$$u + Tu = f', \tag{7}$$

к которому применима альтернатива Фредгольма. Оно разрешимо, и притом единственным образом — в противном случае $f = 0$ отвечало бы u, отличное от нуля, что невозможно в силу условия 1. Отсюда следует, что уравнение (6) также разрешимо.

Далее, $f' = Gf$ очевидно принадлежит H_0. Но тогда и решение уравнения (7), как это следует из теории вполне-непрерывных операторов, принадлежит тому же пространству. Будучи элементом пространства H_0, u разлагается в ряд по полной ортонормированной в H_0 системе $\{\varphi_n\}$. Это означает, что бесконечная система (5) имеет решение, и притом единственное, из l_2. Наконец, матрица $\|\gamma_{km}\|_{k, m = 1}^{k, m = \infty}$ определяет вполне-непрерывное преобразование в l_2. По теореме § 51, решение системы (5) является пределом, в смысле сходимости в l_2, решений усеченных систем.

Теорема 2. *Если оператор K ограничен в H, а $G = A_0^{-1}$ вполне-непрерывен в H, то оператор $T = GK$ вполне-непрерывен в H_0.*

Доказательство. Оператор T вполне-непрерывен в H, как произведение операторов ограниченного и вполне-непрерывного Пусть теперь дано множество M, ограниченное в H_0: $|u| < C$, если $u \in M$. По неравенству (5) § 19 $\|u\| < \frac{C}{\gamma}$; так как T вполне-непрерывен в H, то из M можно выбрать последовательность $\{u_n\}$ так, чтобы $\| Tu_m - Tu_n \| \xrightarrow[m, n \to \infty]{} 0$.

Оценим $|Tu_n - Tu_m|$. По формуле (4) § 19

$$|Tu_n - Tu_m|^2 = (A_0 T(u_n - u_m),\ T(u_n - u_m)) = \\ = (K(u_n - u_m),\ T(u_n - u_m)).$$

По неравенству Буняковского

$$|Tu_n - Tu_m|^2 \leqslant \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|T(u_n - u_m)\| = \\ = \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|Tu_n - Tu_m\|.$$

Далее,

$$\|K(u_n - u_m)\| \leqslant \|K\| \cdot \|u_n - u_m\| \leqslant \|K\|(\|u_n + uu_m\|) < \frac{2C\|K\|}{\gamma}$$

и, окончательно,

$$|Tu_n - Tu_m|^2 < \frac{2C\|K\|}{\gamma} \|Tu_n - Tu_m\| \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

По теореме § 48, оператор T вполне-непрерывен в H_0.

Полагая $K = E$ (E — тождественный оператор), мы получаем

Следствие. *Если оператор $G = A_0^{-1}$ вполне непрерывен в H, то он вполне-непрерывен и в H_0.*

Из теоремы 2 вытекает значительно более узкий, но более простой признак сходимости метода Галеркина, который мы сформулируем так:

Теорема 3. *Метод Галеркина сходится, если:*

I. *Уравнение $Au = f$ имеет не более одного решения.*

II. *Оператор $G = A_0^{-1}$ вполне-непрерывен, а оператор K — ограничен в H.*

Замечание. Из теоремы 1 непосредственно вытекает применимость метода Галеркина к уравнениям вида $u - \lambda Tu = f$, где T — вполне-непрерывный оператор H, в частности, к интегральным уравнениям типа Фредгольма.

Пусть выполнено условие II теоремы 1. Рассмотрим однородное уравнение

$$A_0 u - \lambda Ku = 0. \tag{8}$$

Ему соответствует однородная бесконечная система

$$a_k - \lambda \sum_{m-1}^{\infty} \gamma_{km} a_m = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Характеристические числа уравнения (8) и системы (9) совпадают. Отыскивая их по методу Галеркина, мы придем к усеченной системе

$$a_k - \lambda \sum_{m=1}^{n} \gamma_{km} a_m = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{10}$$

По теореме 2 § 51, характеристические числа системы (9) суть пределы соответствующих характеристических чисел системы (10). Отсюда вытекает

Теорема 4. *Если оператор $T = GK$ — вполне-непрерывный в H_0, то метод Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных значений приводит к сходящемуся процессу.*

Замечание. В своей работе [1] М. В. Келдыш утверждает, что собственные элементы уравнения (8) могут быть построены как пределы „приближенных" собственных элементов, получаемых по методу Галеркина. Это утверждение, как показал Н. И. Польский [1], неверно: может случиться, что к некоторым собственным элементам уравнения (8) невозможно приблизиться, применяя метод Галеркина.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример, который мы заимствуем из упомянутой диссертации Н. И. Польского [1]. Рассмотрим пространство $L_2(0,1)$; положим в (8) $A_0 = E$ и

$$Ku = \int_0^1 K(x, t)\, u(t)\, dt = \int_0^1 \{a_1(x)\, b_1(t) + a_2(x) b_2(t)\}\, u(t)\, dt,$$

где $(0 < q < 1)$;

$$a_1(x) = \sin \pi x,$$

$$b_1(x) = 2 \sin \pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} + \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x,$$

$$a_2(x) = 2 \sin 2\pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} - \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x,$$

$$b_2(x) = \sin 2\pi x.$$

Условия теоремы 4, очевидно, выполнены; при этом $H_0 \equiv H$.

Используя легко проверяемые соотношения

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = 1, \quad (a_1, b_2) = (a_2, b_1) = 0,$$

мы найдем, что уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, u(t)\, dt = 0 \tag{*}$$

имеет единственное собственное число $\lambda = 1$, которому отвечают две линейно-независимые собственные функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$. Будем теперь решать уравнение (*) по методу Галеркина, полагая $u_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi{=}_k(x)$; $\varphi_k(x) \sqrt{2}\sin k\pi x$. Пусть $\lambda^{(n)}$ — соответствующее приближенное собственное число, получаемое по методу Галеркина. Нетрудно убедиться, что u_n и $\lambda^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$u_n(x) - \lambda^{(n)} \int_0^1 [a_1^{(n)}(x)\, b_1(t) + a_2^{(n)}(x)\, b_2(t)]\, u_n(t)\, dt = 0, \tag{**}$$

где

$$a_1^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\,(a_1, \varphi_k) = a_1(x),$$

$$a_2^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\,(a_2, \varphi_k) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a_2(x).$$

Легко проверить, что уравнение (**) имеет единственное собственное число $\lambda^{(n)} = 1$, которому соответствует только одна собственная функция $a_1^{(n)}(x) = a_1(x)$. Таким образом, в нашем примере метод Галеркина не дает возможности приблизиться к собственной функции $a_2(x)$ уравнения (*).

Как показал Н. И. Польский, все собственные элементы уравнения (8) могут быть получены как пределы „приближенных“ собственных элементов, если резольвента оператора $A_0^{-1}K$ имеет только простые полюсы. Это, в частности, имеет место, если $K = E$, т. е. в условиях метода Ритца.

§ 53. Обыкновенное несамосопряженное дифференциальное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$(-1)^m u^{(2m)} - \lambda Ku = f(x), \tag{1}$$

где Ku — линейный дифференциальный оператор порядка $2m-1$, и будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее на концах отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ краевым условиям

$$\begin{gathered} u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(m-1)}(a) = 0 \\ u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(m-1)}(b) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Будем считать, что поставленная нами задача имеет единственное решение. Докажем, что метод Галеркина приводит в этой задаче к сходящемуся процессу.

Рассмотрим множество M функций $u(x)$, непрерывных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ вместе со своими производными до порядка $2m$ включительно и удовлетворяющих краевым условиям нашей задачи.

Множество M всюду плотно в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ функций, квадратично-суммируемых на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Оператор $A_0 u = (-1)^m u^{(2m)}$ — положительно-определенный на линеале M. Это было доказано в § 21. Отсюда, в силу результатов § 19, следует, что A_0 может быть расширен до самосопряженного; в последующем мы предполагаем, что это расширение выполнено.

Как известно, оператор $A_0^{-1} = G$ имеет вид

$$Gf = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина нашей задачи. Напомним, что эта функция непрерывна везде вместе со своими производными до порядка $2m-1$ включительно в квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$, а ее производные порядка $2m$ разрывны только на диагонали $x = \xi$, где они терпят конечный скачок. Введем в рассмотрение пространство H_0, в котором на этот раз

$$[u, v] = \int_a^b (-1)^m u^{(2m)} \bar{v}\, dx,$$

или, если проинтегрировать по частям m раз и воспользоваться условиями (2),

$$[u, v] = \int_a^b u^{(m)} \overline{v^{(m)}}\, dx$$

и, следовательно,

$$\| u \|^2 = \int_a^b | u^{(m)} |^2 dx. \tag{3}$$

Можно доказать, что пространство H_0 состоит из функций $u(x)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) интеграл (3) конечен; 2) u, $u^1, \ldots u^{(m-1)}$ абсолютно-непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; 3) $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2).

Рассмотрим теперь оператор Ku. Допустим, что коэффициенты оператора K дифференцируемы достаточное число раз. Положим $GKu = v(x)$. Очевидно, v удовлетворяет краевым условиям (2). Далее, интегрируя по частям с тем, чтобы исключить производные от u порядка выше m, и пользуясь опять условиями (2), мы приведем выражение v к виду

$$v(x) = \int_a^b G_1(x, \xi)\, u^{(m)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_a^b G(x, \xi)\, [p_{m-1}(\xi)\, u^{(m-1)}(\xi) + \ldots + p_0(\xi)\, u(\xi)]\, d\xi, \tag{4}$$

где ядро $G_1(x, \xi)$ имеет m непрерывных производных.

Дифференцируя (4) m раз по x, имеем

$$u^{(m)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^m G_1(x, \xi)}{\partial x^m}\, u^{(m)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial^m G(x, \xi)}{\partial x^m}\, [p_{m-1}(\xi)\, u^{(m-1)}(\xi) + \ldots + p_0(\xi)\, u(\xi)]\, d\xi. \tag{5}$$

В интеграле (5) выразим u, $u', \ldots u^{(m-1)}$ через $u^{(m)}$ по известной формуле

$$u^{(i)}(\xi) = \frac{1}{(m - j - 1)!} \int_a^\xi (\xi - \eta)^{m-j-1}\, u^{(m)}(\eta)\, d\eta, \tag{6}$$

верной, если u удовлетворяет первым m из условий (2). Подставив (6) в выражение (5) и меняя порядок интегрирования, мы найдем, что $v^{(m)}(x)$ имеет вид

$$v^{(m)}(x)=\int_a^b N(x,\xi)\,u^{(m)}(\xi)\,d\xi,$$

где $N(x,\xi)$ — непрерывная функция. Интеграл (7) есть оператор Фредгольма над функцией $u^{(m)}$; как было указано в § 48, этот интеграл есть вполне-непрерывный оператор над $u^{(m)}$, рассматриваемой, как элемент пространства $L_2(a,b)$. Пусть теперь дано ограниченное в H_0 множество функций $u(x)$. Это значит, что

$$|u|^2=\int_a^b |u^{(m)}(x)|^2\,dx<C;\quad C=\text{const}.$$

По теореме § 48, можно выбрать из этого множества такую последовательность $\{u_n(x)\}$, что $\|v_n^{(m)}-v_k^{(m)}\|^2=$

$$=\int_a^b |v_n^{(m)}(x)-v_k^{(m)}(x)|^2\,dx\underset{n,k\to\infty}{\longrightarrow}0.$$ Но тогда из (3) следует,

что $\|v_n-v_k\|\underset{n,k\to\infty}{\longrightarrow}0$. Отсюда ясно, что оператор в правой части (4) — вполне-непрерывный в H_0.

На основании теоремы 1 § 52, метод Галеркина дает последовательность, сходящуюся в H_0. Если обозначить через u_n приближенные решения, получаемые по методу Галеркина, а через u — точное решение задачи, то при $k<m$ $u_n^{(k)}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u^{(k)}(x)$ равномерно, а $u_n^{(m)}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u^{(m)}(x)$ в среднем.

Теорема 4 § 52 позволяет утверждать сходимость метода Галеркина и в задаче о собственных числах однородной задачи (1).

Указанные в этом параграфе результаты были получены значительно более сложным способом М. В. Келдышем [1].

§ 54. О стесненном кручении тонкостенных замкнутых односвязных профилей

Под стесненным кручением понимают такое кручение, когда на концах или в некоторых поперечных сечениях стержня существуют какие-либо препятствия, мешающие свободному искривлению стержня. В этом случае кручение будет сопровождаться появлением осевых нормальных усилий.

В настоящем параграфе мы даем способ расчета напряжений при стесненном кручении замкнутых тонкостенных профилей, исходя из безмоментной теории оболочек. Это приведет нас к некоторой краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка; к решению указанной задачи мы применим метод Галеркина.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку произвольной формы и постоянной толщины δ. Точки серединной поверхности оболочки будем задавать координатами x и s, из которых x есть длина отрезка образующей серединной поверхности, а s — длина дуги линии, ортогональной к образующим.

В координатах x и s уравнения безмоментной теории для цилиндрических оболочек имеют следующий вид[1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial s}+q_x=0,\\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial s}+q_s=0,\\ T_2=rq_\nu.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь r — радиус кривизны направляющей; q_x, q_s, q_ν — составляющие внешней поверхностной нагрузки по направлениям x, s и ν;[2] T_1 и T_2 — нормальные усилия, действующие в направлениях x и s, T_{12} — касательное усилие; усилия связаны со смещениями в серединной поверхности u_x и u_s

---

[1] См., например, В. В. Новожилов [1] или С. П. Тимошенко [2], § 80, где эти уравнения даны для круговой цилиндрической оболочки.

[2] ν — нормаль к серединной поверхности.

и нормальным смещением u_ν уравнениями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{1}{E\delta}(T_1-\sigma T_2)\\
&\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{u_\nu}{r}=\frac{1}{E\delta}(T_2-\sigma T_1)\\
&\frac{\partial u_x}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial x}=\frac{2(1+\sigma)}{E\delta}T_{12},
\end{aligned}\tag{2}$$

где E — модуль Юнга и σ — число Пуассона материала оболочки. Левые части уравнений (2) и (4) суть составляющие деформации в плоскости (x, s).

Рассмотрим задачу о кручении тонкостенного стержня с замкнутым гладким контуром сечения. Длину стержня обозначим через l, начало координат поместим на контуре одного из оснований стержня. Так как поверхностная нагрузка отсутствует, то $g_x=g_s=g_\nu=0$, и уравнения (1) дают выражения усилий через две функции $T_{12}^0(s)$ и $T_1^{(0)}(s)$, зависящие только от s:

$$T_2=0;\quad T_{12}=T_{12}^{(0)}(s);\quad T_1=-x\frac{dT_{12}^{(0)}}{ds}+T_1^{(0)}(s). \tag{3}$$

Подставив это в (2), мы найдем составляющие смещений:

$$\begin{aligned}
&u_x=u_0(s)+\frac{x}{E\delta}T_1^{(0)}-\frac{x^2}{2E\delta}+\frac{dT_{12}^{(0)}}{ds};\\
&u_s=v_0(s)+x\left[\frac{2(1+\sigma)}{E\delta}T_{12}^{(0)}-\frac{du_0}{ds}\right]-\frac{x^2}{2E\delta}\frac{dT_1^{(0)}}{ds}+\frac{x^3}{6E\delta}\frac{d^2T_{12}^{(0)}}{ds^2};\\
&u_n=-r\left\{\frac{dv_0}{ds}+\frac{\sigma}{E\delta}T_1^{(0)}+\right.\\
&\qquad+x\left[\frac{2(1+\sigma)}{E\delta}\frac{dT_{12}^{(0)}}{ds}-\frac{d^2u_0}{ds^2}-\frac{\sigma}{E\delta}\frac{dT_{12}^{(0)}}{ds}\right]-\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{x^2}{2E\delta}\frac{d^2T_1^{(0)}}{ds^2}+\frac{x^3}{6E\delta}\frac{d^3T_{12}^{(0)}}{ds^3}\right\};
\end{aligned}\tag{4}$$

здесь $u_0(s)$ и $v_0(s)$ — произвольные функции от s.

Четыре произвольные функции от s: $T_1^{(0)}(s)$, $T_{12}^{(0)}(s)$, $u_0(s)$, $v_0(s)$ мы определим, исходя из краевых условий задачи. Пусть, например, оба основания стержня закреплены так, что их точки не могут смещаться в направлении оси x; тогда

$$u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=0} = 0. \tag{5}$$

Первая из формул (4) дает теперь

$$u_0(s) = 0, \quad T_1^{(0)}(s) = \frac{l}{2}\frac{dT_{12}^{(0)}}{ds}. \tag{6}$$

Обозначим через ϑ угол поворота сечения, отстоящего от нижнего основания на расстояние x. Можно считать, что при $x=0$, $\vartheta=0$; пусть еще при $x=l$, $\vartheta=\vartheta_0$. Заметим, что значение ϑ_0 заранее неизвестно; оно должно быть определено из условия, что крутящий момент равен заданной величине M. Как известно, $\vartheta = -\frac{du_y}{ds}+\frac{u_z}{r}$; в силу уравнений (4)

$$\vartheta = \frac{\partial}{\partial s}\left\{r\frac{\partial}{\partial s}-\left[\frac{x^2}{E\delta}\left(\frac{l}{2}-\frac{x}{3}\right)\frac{d^2T_{12}^{(0)}}{ds^2}+\frac{2x(\sigma+2)+\sigma l}{2E\delta}T_{12}^{(0)}+v_0\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{r}\left\{-\frac{x^2}{2E\delta}\left(\frac{l}{2}-\frac{x}{3}\right)\frac{d^2T_{12}^{(0)}}{ds^2}+\frac{2(1+\sigma)x}{E\delta}T_{12}^{(0)}+v_0\right\}.$$

Полагая здесь $x=0$ и $x=l$, мы получим два уравнения

$$\frac{d}{ds}\left\{r\frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma l}{2E\delta}T_{12}^{(0)}+v_0\right]\right\}+\frac{v_0}{r}=0$$
$$\frac{d}{ds}\left\{r\frac{d}{ds}\left[-\frac{l^3}{12E\delta}\frac{d^2T_{12}^{(0)}}{ds^2}+\frac{l(3\sigma+4)}{2E\delta}T_{12}^{(0)}+v_0\right]\right\}+ \tag{7}$$
$$+\frac{1}{r}\left[-\frac{l^3}{12E\delta}\frac{d^2T_{12}^{(0)}}{ds^2}+\frac{2l(1+\sigma)}{E\delta}T_{12}^{(0)}+v_0\right]=\vartheta_0.$$

Исключая отсюда v_0, мы получим дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $T_{12}^{(0)}(s)$, которую мы в дальнейшем будем обозначать для простоты через $\tau(s)$:

$$\frac{d}{ds}\left\{r\frac{d}{ds}\left[\frac{d^2\tau}{ds^2}-\frac{12(2+\sigma)}{l^2}\tau\right]\right\}+\frac{1}{r}\left[\frac{d^2\tau}{ds^2}-\frac{24(1+\sigma)}{l^2}\tau\right]=a; \tag{8}$$

$$a = -\frac{12E\delta}{l^3}\vartheta_0. \tag{9}$$

Уравнению (8) должны сопутствовать некоторые краевые условия; их роль играет требование *периодичности* $\tau(s)$: при обходе вокруг направляющей стержня $\tau(s)$ должна возвращаться к исходному значению. Найдя отсюда $\tau(s)$, мы из (6) и (7) найдем v_0 и $T_1^{(0)}(s)$. Определив затем обычным способом ϑ_0, мы решим нашу задачу до конца. Дело сводится, таким образом, к интегрированию уравнения (8). В некоторых случаях его возможно проинтегрировать в замкнутой форме. Так будет, например, в случае стержня круглого сечения: тогда $r = \text{const}$, и коэффициенты уравнения (8) будут постоянными. Другой такой случай представляет гипотеза $\sigma = 0$; она может представлять некоторый интерес для получения качественного, хотя бы грубого, результата. Если $\sigma = 0$, то полагая

$$\xi = \frac{d^2\tau}{ds^2} - \frac{24}{l^2}\tau, \tag{10}$$

получим

$$\frac{d}{ds}\left(r\frac{d\xi}{ds}\right) + \frac{1}{r\xi} = a. \tag{11}$$

Введем вместо s новую переменную φ по формуле

$$ds = r\,d\varphi; \tag{12}$$

φ есть угол между нормалью к срединной поверхности в рассматриваемой точке и некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через одну из образующих стержня и пересекающей направляющую $x = 0$ в начале отсчета дуг s. В новой переменной уравнение (11) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = ar,$$

и просто интегрируется. Подставив найденное отсюда в (10), мы найдем τ из уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Постоянные интегрирования определяются из упомянутого выше условия периодичности.

Обратимся к общему случаю. Введя переменную φ по формуле (12), мы преобразуем уравнение (8) в следующее:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{d^2\tau}{ds^2} - \frac{12(2+\sigma)}{l^2}\tau\right) + \frac{d^2\tau}{ds^2} - \frac{24(1+\sigma)}{l^2}\tau = ar,$$

или

$$A\tau = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right) - \frac{1}{r^3}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d^3\tau}{d\varphi^3} - \frac{12(2+\sigma)}{l^3}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2} + \\ + \frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{d\tau}{d\varphi}\right) - \frac{24(1+\sigma)}{l^2}\tau = ar. \qquad (13)$$

Выясним сопутствующие ему краевые условия. Как было выяснено выше, $\tau(\varphi)$ должна быть периодической функцией от φ.[1] Радиус кривизны направляющей, которую мы считаем замкнутой линией с непрерывной и непрерывно-дифференцируемой кривизной, периодичен, так же как и его производные, так что коэффициенты и свободный член уравнения (13) — все периодические. В таком случае, как известно, периодичность решения будет обеспечена, если оно будет удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \tau\,(0) &= \tau\,(2\pi), \\ \tau'\,(0) &= \tau'\,(2\pi), \\ \tau''\,(0) &= \tau''\,(2\pi), \\ \tau'''(0) &= \tau'''(2\pi), \end{aligned} \qquad (14)$$

где штрих означает дифференцирование по φ.

Мы пришли, таким образом, к краевой задаче: проинтегрировать уравнение (13) при условиях (14). Займемся исследованием этой задачи.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L^2(0, \pi)$ и в нем рассмотрим линеал M функций, периодических и четырежды дифференцируемых. Докажем, что на линеале M оператор

$$A_0\tau = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right) + \tau \qquad (15)$$

— положительно-определенный. Действительно,

$$(A_0\tau, \tau) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right) + \tau\right]\bar{\tau}d\tau = \\ = \int_0^{2\pi}\bar{\tau}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right)d\tau + \int_0^{2\pi}|\tau|^2 d\varphi.$$

[1] С периодом 2π; этого мы в последующем оговаривать не станем.

Первый интеграл возьмем дважды по частям и воспользуемся условиями периодичности (14). Мы получим тогда

$$(A_0\tau, \tau)=\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\left|\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right|^2 d\varphi+\int_0^{2\pi} |\tau|^2 d\varphi \geqslant \int_0^{2\pi} |\tau|^2 d\varphi,$$

или

$$(A_0\tau, \tau) \geqslant \|\tau\|^2.$$

Оператор $Gf=A_0^{-1} f$ имеет вид

$$Gf=\int_1^{2\pi} G(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi,$$

где $G(\varphi, \psi)$ — функция Грина оператора (15), удовлетворяющая краевым условиям (14). Обозначая $K\tau=A\tau-A_0\tau$ и повторяя рассуждения предшествующего параграфа, мы убедимся в том, что условие II теоремы 1 § 52 выполнено. Что условие I также выполняется, можно установить с помощью таких рассуждений. Уравнение (13) при краевых условиях (14) равносильно уравнению

$$\tau+GK\tau=aG(\tau), \tag{16}$$

которое можно получить, применив к обеим частям уравнения (13) оператор G. Положим в (16) $a=0$. Тогда ϑ_0, и, следовательно, крутящий момент $M=0$. Если бы однородное уравнение $\tau+GK\tau=0$ имело нетривиальное решение, то это означало бы, что в стержне, свободном от действия внешних сил, возникают неравные нулю напряжения. Это противоречит закону сохранения энергии. Тем самым установлено, что к нашей задаче применим метод Галеркина. В качестве координатных здесь особенно удобно взять функции

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi, \ldots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi \ldots$$

Если контур сечения имеет ось симметрии, то, выбрав ее за начало отсчета углов, мы убедимся, что функция $\tau(\varphi)$ — четная, и тогда достаточно взять в качестве координатных функций $\cos n\varphi$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Если контур имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то четная функция $\tau(\varphi)$ имеет период π, и можно ограничиться функциями $\cos 2n\varphi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

Для примера рассмотрим стержень, сечение которого имеет форму эллипса с полуосями a и b, $a > b$. Радиус кривизны эллипса определяется через угол φ формулой

$$r = \frac{p}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}, \tag{17}$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ — параметр эллипса и ε — его эксцентриситет. Угол φ отсчитывается от малой оси эллипса. Приближенное решение построим, взяв четыре координатные функции, так что

$$\tau = a_0 + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + a_3 \cos 6\varphi. \tag{18}$$

Для определенности положим

$$\sigma = 0,3; \quad \sigma^2 = 0,75, \quad \frac{p}{l} = \frac{1}{8}.$$

Метод Галеркина приводит к следующей системе

$$\begin{aligned}
0,975\, a_0 - 0,4791\, a_1 + 0,5272\, a_2 - 0,1178\, a_3 &= 6,1686\, ap^3 \\
1,9163\, a_1 - 0,0264\, a_2 \qquad\qquad &= -0,9861\, ap^3 \\
-1,4241\, a_1 + 6,4424\, a_2 \qquad\qquad &= -0,0811\, ap^3 \\
0,5272\, a_1 - 4,7910\, a_2 + 13,9638\, a_3 &= -0,0122\, ap^3.
\end{aligned}$$

Решая эту систему и учитывая, что

$$ap^3 = 12 \left(\frac{p}{l}\right)^3 E\delta\vartheta_0 = 0,0234\, E\delta\vartheta_0,$$

мы найдем

$$\tau = (0,1439 - 0,021 \cos 2\varphi - 0,0030 \cos 4\varphi - 0,0006 \cos 6\varphi) E\delta\vartheta_0.$$

Если решить усеченные системы, то получится следующая таблица приближенных значений $\frac{a_k}{E\delta\vartheta_0}$; по горизонтали написаны номера коэффициентов, а по вертикали — номера приближений.

	0	1	2	3
1	0,1483			
2	0,1421	−0,0120		
3	0,1435	−0,0122	−0,0027	
4	0,1439	−0,0121	−0,0030	−0,0006

Как видно из этой таблицы, сходимость приближений — довольно быстрая.

§ 55. Задача Дирихле для уравнения эллиптического типа второго порядка

Мы будем искать интеграл уравнения

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f,\quad A_{ik}=A_{ki},\qquad (1)$$

удовлетворяющий самосопряженным краевым условиям[1] на границе S некоторой конечной области Ω. Сделаем следующие допущения: 1) многообразие S — m — 1-мерное и кусочно-гладкое; 2) коэффициенты A_{ik} суть функции координат, непрерывные и непрерывно-дифференцируемые в замкнутой области $\bar{\Omega}=\Omega+S$, а B_i и C ограничены и измеримы в указанной области; 3) квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\xi_i\xi_k\qquad (2)$$

— положительно-определенная во всех точках замкнутой области Ω; 4) свободный член f квадратично-суммируем в Ω; 5) поставленная нами задача имеет не более одного решения.

В этом параграфе мы рассмотрим простейшее краевое условие

$$u|_S=0.\qquad (3)$$

Краевые условия других типов будут изучены в § 56.

Положим

$$A_0u=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k},\quad Ku=\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu.$$

---

[1] Мы здесь имеем в виду условия, самосопряженные по отношению к оператору

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Основным пространством H у нас является гильбертово пространсто $L_2(\Omega)$ функций, квадратично-суммируемых в Ω. За линеал M можно принять множество функций, первые и вторые производные которых непрерывны в $\bar{\Omega}$ и которые удовлетворяют на S краевому условию (3). Как было установлено в § 23, оператор $A_0 u$ — положительно-определенный на линеале M, так что

$$(A_0 u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

Введем теперь пространство H_0, полагая

$$[u,v] = (A_0 u, v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} d\Omega$$

и соответствующим образом расширив оператор A_0. Как известно,[1] спектр оператора A_0 состоит только из положительных собственных чисел, имеющих единственную точку сгущения на бесконечности. Отсюда следует, что оператор $A_0^{-1} = G$ — вполне-непрерывный[2] в основном пространстве $L_2(\Omega)$. Докажем, что оператор $T = GK$ — вполне-непрерывный в H_0. Пусть дано множество функций, ограниченное в H_0: $|u| < N$. Это значит, что

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega < N^2. \tag{5}$$

Обозначим через μ_0 минимум, при всевозможных $P \in \bar{\Omega}$, наименьшего собственного числа квадратичной формы (2). Из (5) следует:

$$\sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega < \frac{N^2}{\mu_0}.$$

Кроме того, в силу неравенства (5) § 19,

$$\|u\| < \frac{N}{\gamma}.$$

---

[1] Курант и Гильберт [1], гл. VII.

[2] См., например, В. И. Смирнов [1] или А. И. Плеснер [1].

Теперь

$$\|Ku\| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{Max}\left\{\sum_{i=1}^{m} B_i^2\right\} + \|u\| \operatorname{Max}|C(P)| \leqslant C_1 N,$$

$$C_1 = \mathrm{const}. \qquad (6)$$

Так как T вполне-непрерывен в $H = L_2(\Omega)$, а множество функций Ku, как мы видим, в H ограничено, то можно выбрать такую последовательность $\{u_n\}$, что существует предел (в пространстве H)

$$\lim_{n\to\infty} GKu_n = \lim_{n\to\infty} Tu_n.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k,n\to\infty} \|Tu_n - Tu_k\| = 0. \qquad (7)$$

Оценим $|\!|\!| Tu_n - Tu_k |\!|\!|$. Имеем, по формуле (4) § 19,

$$|\!|\!| Tu_n - Tu_k |\!|\!|^2 = (AT(u_n - u_k),$$
$$T(u_n - u_k) = (Ku_n - Ku_k, \quad Tu_n - Tu_k),$$

и далее, по неравенству Коши — Буняковского,

$$|\!|\!| Tu_n - Tu_k |\!|\!|^2 \leqslant \|Ku_n - Ku_k\| \cdot \|Tu_n - Tu_k\| \leqslant$$
$$\leqslant 2C_1 N \|Tu_n - Tu_k\|.$$

В силу неравенства (7)

$$\lim_{k,n\to\infty} |\!|\!| Tu_n - Tu_k |\!|\!| = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, если множество функций ограничено в H_0, то из него можно выделить такую последовательность $\{u_n\}$, что выполняется равенство (8), означающее, что существует предел (в пространстве H_0)

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n.$$

Тем самым доказано, что оператор T — вполне-непрерывный в H_0, и, следовательно, метод Галеркина сходится в нашей задаче. Точно так же доказывается его сходимость и в задаче о собственных значениях.

Задачу настоящего параграфа исследовал М. В. Келдыш [1], который пришел к тому же результату значительно более сложным путем и при дополнительном предположении, что граница области — достаточно гладкая.

Замечание. В § 51 мы установили, что в общем случае $\|u_n - u\| \to 0$, где u_n — приближенное решение, получаемое по методу Галеркина. В настоящем случае это означает, что первые производные от u_n сходятся в среднем к соответствующим производным от u.

§ 56. Задача Неймана и смешанная задача для уравнения эллиптического типа второго порядка

Задачей Неймана мы называем задачу об интегрировании уравнения (1) § 55 при краевом условии

$$\sum_{i=1}^{m} \cos(\nu x_i) \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль к S. Мы допустим, что эта задача имеет единственное решение. [1] На этот раз мы положим

$$\left.\begin{aligned} A_0 u &= -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + u, \\ Ku &= \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + [C(P) - 1]\, u. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Оператор $A_0 u$ — положительно-определенный на линеале функций, первые и вторые производные которых непрерывны в $\bar{\Omega}$ и которые удовлетворяют условию (1). Действительно, интегрируя по частям и используя условие (1), мы получим

$$(A_0 u, u) = \int_\Omega A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int_\Omega u^2 d\Omega \geqslant \int_\Omega u^2 d\Omega = \|u\|^2.$$

---

[1] Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $C(P) \not\equiv 0$.

Дальнейшие рассуждения протекают так же, как и в § 55, и приводят к тем же заключениям о сходимости метода Галеркина. Именно, можно утверждать, что приближенные решения задачи Неймана для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f,$$

построенные по методу Галеркина, в среднем сходятся, вместе со своими первыми производными, к точному решению этой задачи и его соответствующим производным. Далее, собственные числа задачи Неймана для этого же уравнения могут быть получены как пределы „приближенных собственных чисел", получаемых по методу Галеркина.

Обратимся к смешанной краевой задаче для уравнения эллиптического типа второго порядка. Рассмотрим уравнение (1) § 55 при краевом условии

$$\sum_{i=1}^{m}\cos(\nu x_i)\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sigma(P)\,u=0, \tag{3}$$

где $\sigma(P)$ — ограниченная функция переменной точки границы S, которую мы на этот раз будем считать достаточно гладкой.

Обозначим через A_1u оператор

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Будем его рассматривать на линеале функций, первые производные которых непрерывны в $\overline{\Omega}$, а вторые квадратично-суммируемы в Ω и которые удовлетворяют краевому условию (3). Докажем, что на этом линеале оператор A_1u ограничен снизу, т. е. что существует постоянная k, для которой имеет место неравенство [1]

$$(A_1u,\,u)\geqslant k\,\|u\|^2. \tag{4}$$

[1] Постоянная k может быть и отрицательной.

Имеем

$$(A_1 u, u) = -\int_\Omega u \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega - \int_S u \sum_{i=1}^{m} \cos(\nu x_i) \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} dS,$$

или, если воспользоваться условием (3),

$$(A_1 u, u) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int_S \sigma u^2 dS. \tag{5}$$

Пусть μ_0 имеет то же значение, что и в § 23, а именно, μ_0 пусть будет обозначать минимум, при всевозможных положениях точки $P \in \overline{\Omega}$, квадратичной формы

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \xi_i \xi_k$$

при условии $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 = 1$. Так как уравнение (1) § 55 — эллиптическое, то $\mu_0 > 0$. Далее, пусть σ_0 обозначает верхнюю грань функции $|\sigma(P)|$.

Из (5) следует:

$$(A_1 u, u) \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \sigma_0 \int_S u^2 dS.$$

Построим функции $a_i(P)$, непрерывные в $\overline{\Omega}$ и совпадающие на S с $\cos(\nu, x_i)$. Допуская, что поверхность S — достаточно гладкая, можно добиться того, чтобы первые производные от $a_i(P)$ также были непрерывны в $\overline{\Omega}$. Имеем теперь

$$\int_S u^2 dS = \int_S u^2 \sum_{i=1}^{m} \cos^2(\nu, x_i)\, dS = \int_S \sum_{i=1}^{m} u^2 a_i \cos(\nu x_i)\, dS =$$

$$= \int_\Omega u^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} d\Omega + 2 \int_S \sum_{i=1}^{m} a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega. \tag{6}$$

Первый интеграл в (6) меньше, чем

$$C' \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \qquad C' = \max \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right|.$$

Второй оценим следующим образом. Обозначим через C_1 наибольший из максимумов функций a_i и через ε произвольное положительное число. Тогда [1]

$$\left| 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \right| < 2C_1 \int_{\Omega} \frac{|u|}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4C_1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega + 4C_1 m \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

Отсюда

$$(A_1 u, u) \geqslant (\mu_0 - 4C_1 m \sigma_0 \varepsilon^2) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega + k \int_{\Omega} u^2 d\Omega,$$

где

$$k = -\sigma_0 \left(C' + \frac{4C_1}{\varepsilon^2} \right).$$

Выберем ε так, чтобы $\mu_0 - 4C_1 \sigma_0 \varepsilon^2 > 0$. Отбросив справа в последнем неравенстве неотрицательное первое слагаемое, мы придем к неравенству (4).

Оператор A_0 определим следующим образом

$$A_0 u = A_1 u, \quad k > 0$$

$$A_0 u = A_1 u + (1 - k) u, \quad k \leqslant 0$$

где k — постоянная, входящая в неравенство (4). При таком выборе оператор $A_0 u$, очевидно, положительно-определенный. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в § 55, и приводят к тем же результатам.

В частном случае, когда $m = 1$, мы приходим к задаче интегрирования обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка при краевых условиях вида

$$u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0$$

(α, β — некоторые постоянные).

---

[1] Мы пользуемся здесь неравенством

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k \right)^2 \leqslant m \sum_{k=1}^{m} a_k^2, \quad a_k \geqslant 0,$$

которое получается из неравенства Коши (4) § 3 при $b_k = 1$.

Этот случай послужил предметом специального исследования в работе М. В. Келдыша [1].

§ 57. Задача об устойчивости и равновесии закрепленной по краю пластинки

Пусть пластинка находится под действием поперечной нагрузки $Df(x, y)$ и напряжений $\sigma_x = \frac{D}{h} C(x, y)$, $\tau_{xy} = \frac{D}{h} B(x, y)$, $\sigma_y = \frac{D}{h} A(x, y)$, где h — толщина пластинки и D — ее жесткость. Если прогиб w пластинки мал, то можно приближенно считать, что w удовлетворяет известному уравнению

$$\Delta^2 w - A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} - C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{1}$$

Если края пластинки жестко заделаны, то уравнению (1) сопутствуют краевые условия на контуре S пластинки

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \tag{2}$$

где ν — нормаль к S.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\Delta^2 w - \lambda\left(A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{3}$$

При краевых условиях (2) его характеристические числа λ_n определяют устойчивость пластинки. Докажем сходимость метода Галеркина для задачи о характеристических числах уравнения (3). Положим

$$A_0 w = \Delta^2 w, \quad Kw = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

и введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, квадратично-суммируемых в области Ω пластинки, и линеал M функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно и удовлетворяющих условиям (2). Оператор A_0 — положительно-определенный на линеале M — это было установлено в § 24. Введем теперь пространство H_0 со скалярным произведением $[u, v] = (A_0 u, v)$ и расширим соответственно оператор A_0. Повторяя рассуждения § 55, мы докажем, что оператор $GK = A_0^{-1}K$ — вполне-непрерывный в H_0.

Если $\lambda = 1$ не есть характеристическое число уравнения (3), то задача о равновесии заделанной по краю пластинки, определяемая уравнением (1) и краевыми условиями (2), имеет единственное решение. Из сказанного в этом параграфе следует сходимость метода Галеркина применительно к этой задаче.

§ 58. Устойчивость эллиптической пластинки

Рассмотрим эллиптическую пластинку с полуосями a и b $(a > b)$, край которой закреплен. Допустим, что пластинка подвержена действию равномерного давления $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\lambda D}{h}$, $\tau_{xy} = 0$. Найдем наименьшую величину нагрузки, при которой пластинка потеряет устойчивость.

Уравнение (3) § 57 в нашем случае принимает вид

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w = 0. \tag{1}$$

Задача состоит в нахождении наименьшего собственного значения уравнения (1) при краевых условиях

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \tag{2}$$

Применяя к нашей задаче метод Галеркина, мы в качестве координатных возьмем функции [1]

$$x^m y^n \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Ограничиваясь значениями $m + n \leqslant 2$, получим

$$w \approx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2). \tag{4}$$

Подставим это в левую часть (1), умножим на функцию (3), в которой m и n придадим те же значения $m + n \leqslant 2$, проинтегрируем по области эллипса и результат приравняем нулю. Мы получим систему линейных уравнений относительно $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Приравняв нулю ее определитель, мы придем к уравнению (5) (стр. 331), наименьший корень которого приближенно определяет критическую нагрузку. В уравнении (5) положено

$$\frac{a}{b} = \gamma, \quad \lambda a^2 = \varkappa.$$

---

[1] Оси координат, как обычно, направляем по осям симметрии пластинки.

$$\begin{vmatrix}
\frac{8}{\gamma}(3+2\gamma^2+3\gamma^4)-\frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{15}\varkappa & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^3\right)-\frac{1}{158}\varkappa \\
0 & 2\gamma+\frac{5}{\gamma}+\gamma^3-\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{\gamma}+5\gamma+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3}+\frac{1}{\gamma}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 \\
\gamma\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{5}\varkappa & 0 & 0 & \frac{27}{10\gamma}+\frac{3\gamma^2}{10}+\frac{11\gamma}{15}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & 0 & \frac{1}{10\gamma}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\gamma^3}{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\gamma^2}+5\gamma^2+6-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)\varkappa & 0 \\
\frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{10\gamma^3}+\frac{1}{3\gamma}+\frac{\gamma}{10} & 0 & \frac{27\gamma}{10}+\frac{3}{10\gamma^3}+\frac{11}{15\gamma}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa
\end{vmatrix}=0. \quad (5)$$

Второй, третий и пятый столбцы определителя (5) содержат только по одному элементу, отличному от нуля. Вследствие этого уравнение (5) распадается на следующие четыре:

$$2\gamma+\frac{5}{\gamma}+\gamma^3-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}\right)\varkappa=0; \tag{6}$$

$$\frac{2}{\gamma}+5\gamma+\frac{1}{\gamma^3}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3}+\frac{1}{\gamma}\right)\varkappa=0; \tag{7}$$

$$5\left(\frac{1}{\gamma^2}+\gamma^2\right)+6-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)\varkappa=0; \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{\gamma}(3+2\gamma^2+3\gamma^4)-\frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}-2\gamma+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{15}\varkappa & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right)-\frac{1}{15\gamma}\varkappa \\ \gamma\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{5}\varkappa & \frac{27}{10\gamma}+\frac{3\gamma^2}{10}+\frac{11\gamma}{15}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & \frac{1}{10\gamma}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\gamma^3}{10} \\ \frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & \frac{1}{10\gamma^3}+\frac{1}{3\gamma}+\frac{\gamma}{10} & \frac{27\gamma}{10}+\frac{3}{10\gamma^3}+\frac{11}{15\gamma}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Если $\varkappa_1$ = наименьший из корней уравнений (6)—(9), то приближенная величина критической нагрузки равна $\frac{D\varkappa_1}{a^2h}$.

Возьмем для примера $\gamma=2$. Корни уравнений (6), (7) и (8) равны соответственно 78; 102,69; 121,8. Уравнение (9) при $\gamma=2$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} 472-10\varkappa & \frac{59}{3}-\frac{4}{15}\varkappa & \frac{59}{3}-\frac{1}{15}\varkappa \\ 59-\frac{4}{5}\varkappa & \frac{313}{30}-\frac{7}{60}\varkappa & \frac{91}{30} \\ \frac{59}{4}-\frac{1}{20}\varkappa & \frac{91}{120} & \frac{1393}{120}-\frac{13}{240}\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

или, если раскрыть определитель и разделить на коэффициент при $\varkappa^3$,

$$\varkappa^3-343{,}5707\varkappa^2+32028{,}293\varkappa-806705{,}6=0.$$

Это уравнение решаем по способу Ньютона, беря за первое приближение меньший корень диагонального минора первого порядка $\varkappa' = 47{,}2$. Второе приближение, даваемое методом Ньютона, будет $\varkappa'' = 42{,}06696$, третье приближение $\varkappa''' = 42{,}06681$. Таким образом, с достаточно высокой степенью точности можно считать $\varkappa_1 = 42{,}067$.

§ 59. Применение весовой функции

Идею, которую мы хотим развить в настоящем параграфе, мы поясним сперва на простейшем примере. Рассмотрим задачу об интегрировании уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \tag{1}$$

при каком-либо самосопряженном краевом условии, при котором $-\Delta$ будет положительно-определенным оператором. Эту задачу можно решить по методу Ритца; если u_n есть приближенное решение, полученное по этому методу, а u — точное решение, то $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $u_n \to u$ в среднем. При этом может оказаться, и часто оказывается, что в некоторых точках значения u и u_n, а также значения соответствующих производных могут резко различаться. Так будет, например, если u_n — полином невысокой степени, а функция u может иметь особенность в некоторой точке области или ее границы. Таким образом, метод Ритца плохо приспособлен для выявления особенностей искомой функции. Этот недостаток можно пытаться исправить следующим образом. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность координатных функций. Построим функцию $\sigma(P)$, непрерывную и непрерывно-дифференцируемую по координатам в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$, строго положительную, так что

$$0 < \alpha \leqslant \sigma(P) \leqslant \beta,$$

где α и β — некоторые постоянные. Далее, выберем эту функцию так, чтобы она была велика в окрестности тех точек, где можно ожидать особенностей искомой функции, и мала в остальных точках области Ω. Теперь вместо обычных уравнений метода Ритца

$$\sum_{k=1}^{n} (-\Delta\varphi_k, \varphi_m)\, a_k = (f, \varphi_m); \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

будем определять коэффициенты приближенного решения из системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(-\sigma\Delta\varphi_k, \varphi_m)\, a_k = (\sigma f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

Систему (2) можно получить так: умножим уравнение (1) на $\sigma(P)$; приближенное решение полученного уравнения

$$-\sigma\Delta u = \sigma f \quad (3)$$

возьмем в обычном виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$$

и коэффициенты a_k найдем по методу Галеркина. Нетрудно доказать сходимость метода Галеркина в этом случае. Действительно, уравнению (3) можно придать вид

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sigma f, \quad (4)$$

где m — число измерений области Ω, и сходимость метода Галеркина для системы (2) вытекает из сказанного в §§ 55 и 56. Как было доказано в § 52, $\| u - u_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Допустим, например, что мы решаем уравнение (1) при условии $u|_S = 0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$. Тогда, как легко видеть,

$$\| u \|^2 = \int_{\Omega} \sigma(P) \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega.$$

Таким образом, при n достаточно большом, должно быть

$$\int_{\Omega} \sigma(P) \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega < \varepsilon, \quad (5)$$

где ε — произвольно-малое положительное число, и можно ожидать, что в силу неравенства (5) разности $\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ будут малы там, где $\sigma(P)$ велико, т. е. в окрестности предполагаемых особенностей искомой функции.

В случае бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f$$

система, аналогичная (2), имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} (\sigma\Delta^2\varphi_k, \varphi_m)\, a_k = (\sigma f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Если u — точное решение, а u_n — приближенное, полученное из системы (6)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k,$$

то

$$\int_\Omega \sigma(P)\,|\Delta u - \Delta u_n|^2\, d\Omega \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Само собой разумеется, изложенный здесь прием применим к любому дифференциальному уравнению рассмотренных выше типов, при тех краевых условиях, при которых имеет место сходимость метода Ритца или Галеркина.

Б. СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = f(P) \tag{1}$$

и требуется проинтегрировать его в некоторой области Ω при краевых условиях

$$\Gamma_j u|_S = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где S — граница Ω. По методу Галеркина приближенное решение этой задачи строится следующим образом (для простоты предполагаем все данные вещественными):

а) выбирается последовательность координатных функций

$$\varphi_1(P), \quad \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots, \tag{3}$$

удовлетворяющих *всем без исключения* краевым условиям (2);

б) приближенное решение ищется в форме

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P); \tag{4}$$

в) постоянные a_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk} a_k = \int_{\Omega} f(P)\,\varphi_j(P)\,d\Omega, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где

$$A_{jk} = \int_{\Omega} \varphi_j(P)\,L(\varphi_k)\,d\Omega. \tag{6}$$

2. Последовательность координатных функций должна обладать необходимой полнотой; этот вопрос подробно выяснен в § 52. Пренебрежение полнотой системы координатных функций ведет к грубым ошибкам.

3. В §§ 53—58 указаны основные типы задач математической физики, к которым безусловно применим метод Галеркина.

4. Введя весовую функцию $\sigma(P)$, можно заменить систему (5) следующей:

$$\sum_{k=1}^{n} A'_{jk} a_k = \int_{\Omega} \sigma(P)\,f(P)\,\varphi_j(P)\,d\Omega, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где на этот раз

$$A'_{jk} = \int_{\Omega} \sigma(P)\,\varphi_j(P)\,L(\varphi_k)\,d\Omega. \tag{8}$$

Введение весовой функции полезно, если желательно иметь более точное представление о поведении решения в некоторой малой части области Ω — в этом случае нужно выбирать $\sigma(P)$ так, чтобы она была велика в указанной части и сравнительно мала в остальной ее части.

5. В задачах, перечисленных в §§ 53—58, метод Галеркина применим и для приближенного вычисления собственных чисел. Для приближенного вычисления собственных функций метод Галеркина недостаточно надежен.

ГЛАВА VI

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 60. Основы метода

Пусть A — линейный оператор, определенный на некотором линеале D_A, плотном в данном гильбертовом пространстве H, и пусть требуется решить уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где f — данный элемент из H. Для этого может быть использован *метод наименьших квадратов*, который состоит в следующем: выбираем последовательность линейно-независимых координатных элементов $\{\varphi_n\}$; приближенное решение уравнения (1) строим в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{2}$$

где a_k — постоянные, которые определяются из требования, чтобы величина

$$\| Au_n - f \|^2 \tag{3}$$

приняла минимальное значение.

В ряде работ Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов применяли метод наименьших квадратов к приближенному решению дифференциальных и интегральных уравнений. Укажем, например, статью Н. М. Крылова [1]; подробную библиографию можно найти в книге М. Кравчука [1], который также использует этот метод, рассматриваемый им, как частный случай общего „метода моментов". В монографии Л. С. Лейбензона [3] приведены решения некоторых конкретных задач теории упругости по методу наименьших квадратов, который Л. С. Лейбензон называет „методом Трефтца". В настоящей главе мы излагаем преимущественно результаты, полученные автором этой книги.[1] Только в § 61 и 73 мы используем некоторые работы Н. М. Крылова и его учеников.

Условимся о терминологии: последовательность $\{\varphi_n\}$ будем называть A-полной, если выполнено следующее условие: каковы бы ни были $u \in D_A$ и число $\varepsilon > 0$, можно найти натуральное число n и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что

$$\|Au - Au_n\| < \varepsilon,$$

где

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k.$$

Заметим, что A-полнота вытекает из обычной, если оператор A — ограниченный. Действительно, если система $\{\varphi_n\}$ — полная, а оператор A — ограниченный, то можно подобрать $n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы $\|u - u_n\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, и тогда

$$\|Au - Au_n\| = \|A(u - u_n)\| \leqslant \|A\| \cdot \|u - u_n\| < \varepsilon.$$

Условие (3) приводит к системе линейных уравнений для неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Установим вид этой системы. Имеем

$$\|Au_n - f\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k - f, \sum_{m=1}^{n} a_m A\varphi_m - f\right) =$$

$$= \sum_{k,\, m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\varphi_k A\varphi_m) - \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k f) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k (f, A\varphi_k) + (f, f). \qquad (4)$$

Положим $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Значения α_k и β_k, дающие минимум величины $\|Au_n - f\|^2$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \|Au_n - f\|^2}{\partial \alpha_m} = 0, \quad \frac{\partial \|Au_n - f\|^2}{\partial \beta_m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

---

[1] См. С. Г. Михлин [5, 6].

или, что то же, уравнениям

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\|Au_n-f\|^2}{\partial\alpha_m}+i\frac{\partial\|Au_n-f\|^2}{\partial\beta_m}\right\}=\frac{\partial\|Au_n-f\|^2}{\partial\bar{a}_m}=0.$$

Продифференцировав (4) по $\bar{a}_m$, мы получим интересующую нас систему

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, A\varphi_m) = (f, A\varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Отметим, что система (5) — симметричная. Определитель системы (6) есть определитель Грама элементов $A\varphi_1$, $A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$.

Допустим, что уравнение (1) может иметь не более одного решения, иначе говоря, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение $u = 0$. Тогда $A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$ линейно-независимы;[1] по теореме § 3, определитель системы (5) отличен от нуля, и указанная система разрешима единственным образом. Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Если однородное уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение,*[2] *то приближенные решения по методу наименьших квадратов могут быть построены при любом n и они определяются единственным образом.*

Достаточные условия сходимости приближенных решений, получаемых по методу наименьших квадратов, даются следующей леммой.

---

[1] В противном случае можно было бы найти постоянные c_1, $c_2 \ldots c_n$, неравные одновременно нулю, так что

$$c_1A\varphi_1 + c_2A\varphi_2 + \ldots + c_nA\varphi_n = A\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\Big) = 0.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k = 0,$$

вопреки первоначальному предположению о линейной независимости координатных элементов.

[2] Иначе говоря, если существует обратный оператор A^{-1}.

Лемма 2. *Метод наименьших квадратов дает последовательность приближенных решений, сходящуюся к точному решению, если выполнены следующие условия:*

А. *Последовательность координатных элементов — A-полная.*

В. *Уравнение* (1) *разрешимо.*

С. *Существует такая постоянная K, что для любого $u \in D_A$.*

$$\|u\| \leqslant K\|Au\|. \tag{6}$$

Условие С обеспечивает существование (и ограниченность) обратного оператора A^{-1}. По лемме 1, последовательность приближенных решений $\{u_n\}$ может быть построена. Обозначим через u решение уравнения (1), которое существует в силу условия В. Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ — A-полная (условие А), то можно по данному $\varepsilon > 0$ найти такие n_0, α_1, α_2, ..., α_{n_0}, что

$$\|Au - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k A\varphi_k\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Последнее неравенство остается справедливым, если $\sum\limits_{k=1}^{n_0} \alpha_k\varphi_k$ заменить через u_n, определяемые из (5), так как тогда левая часть этого неравенства достигает минимума. С увеличением n_0 этот минимум не возрастает, так что при $n \geqslant n_0$

$$\|Au - Au_n\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Теперь из условия С следует, что $\|u - u_n\| < \varepsilon$, если $n \geqslant n_0$, т. е. что $u_n \to u$.

Допустим, что условия леммы 2 выполнены, и пусть u_n — приближенное решение уравнения $Au = f$. Неравенство (6) дает простую оценку погрешности $u_n - u$, именно,

$$\|u_n - u\| \leqslant K\|A(u_n - u)\| = K\|Au_n - Au\|,$$

или

$$\|u_n - u\| \leqslant K\|Au_n - f\|. \tag{7}$$

Если u_n найдено по методу наименьших квадратов, то $Au_n \to f$ при $n \to \infty$, и формула (7) позволяет судить на самом деле о погрешности приближенного решения.

Между методом наименьших квадратов и энергетическим методом существует тесная связь, которую мы постараемся установить.

К обеим частям уравнения (1) применим оператор A^*, сопряженный с A. Докажем, что *полученное таким способом уравнение*

$$A^*Au = A^*f \tag{8}$$

эквивалентно уравнению (1), *если последнее разрешимо.*[1] Пусть u' удовлетворяет уравнению (1). Оно, очевидно, удовлетворяет и уравнению (8), так что

$$A^*Au' = A^*f. \tag{9}$$

Пусть тому же уравнению (8) удовлетворяет еще некоторый элемент u'', так что справедливо тождество

$$A^*Au'' = A^*f. \tag{10}$$

Докажем, что u'' удовлетворяет уравнению (1). Этим будет установлена справедливость нашего утверждения. Обозначим $u'' - u' = v$. Вычитая (9) из (10), мы найдем, что $A^*Av = 0$. Умножим это скалярно на v:

$$0 = (A^*Av,\ v) = (Av,\ Av) = \|Av\|^2.$$

Отсюда $Av = A(u'' - u') = 0$, или $Au'' = Au' = f$, что и требовалось доказать.

Нетрудно далее видеть, что *при выполнении условия* C *леммы* 2 *оператор* A^*Au *— положительно-определенный.* Действительно,

$$(A^*Au,\ u) = (Au,\ Au) = \|Au\|^2 \geqslant \frac{1}{K^2}\|u\|^2.$$

Примем, что область определения оператора A^*A плотна в H. Допустим, что выполнены условия B и C леммы 2. Так как уравнение (1) разрешимо (условие B), то, по доказанному, оно эквивалентно уравнению (8), и можно искать решение этого последнего. В силу условия C оператор A^*A — положительно-определенный; по теореме 1 § 9 отыскание решения уравнения (8) эквивалентно задаче о минимуме функционала

[1] См. С. Г. Михлин [9]. Мы предполагаем, конечно, что f принадлежит области определения оператора A^*.

$\Phi(u) = (A^*Au, u) - (u, A^*f) - (A^*f, u)$. Но, очевидно,

$$\Phi(u) = (Au, Au) - (Au, f) - (f, Au) = \\ = (Au - f, Au - f) - (f, f),$$

или

$$\Phi(u) = \|Au - f\|^2 - \|f\|^2.$$

Функционалы $\Phi(u)$ и $\|Au - f\|^2$ различаются на постоянное слагаемое, и задачи о минимуме обоих функционалов эквивалентны. Таким образом, *в условиях леммы* 2 *применение метода наименьших квадратов к уравнению* (1) *равносильно применению энергетического метода к уравнению* (8).

Обратно, пусть оператор A — положительно-определенный

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma > 0.$$

К уравнению (1) можно применять энергетический метод, заменяя решение этого уравнения отысканием минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u).$$

Построим положительно-определенный оператор B, квадрат которого равен A, $B^2 = A$.[1] Оператор B^{-1} существует и ограничен. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$Bu = B^{-1}f, \tag{11}$$

получаемому из (1) применением к обеим его частям оператора B^{-1}. Далее,

$$F(u) = (B^2u, u) - (u, BB^{-1}f) - (BB^{-1}f, u) = \\ = (Bu, Bu) - (Bu, B^{-1}f) - (B^{-1}f, Bu) = \\ = (Bu - B^{-1}f, Bu - B^{-1}f) - (B^{-1}f, B^{-1}f),$$

или

$$F(u) = \|Bu - B^{-1}f\|^2 - \|B^{-1}f\|^2.$$

Функционалы $F(u)$ и $\|Bu - B^{-1}f\|^2$ различаются только на постоянное слагаемое, и задачи о минимуме этих функциона-

---

[1] Построение этого оператора неэлементарно и требует применения спектральной теории операторов. См. В. И. Смирнов [1]; А. И. Плеснер и В. А. Рохлин [1].

лов эквивалентны. Отсюда следует, что в *случае положительно-определенного оператора A применение энергетического метода к уравнению* (1) *равносильно применению метода наименьших квадратов к уравнению* (11).

Если оператор A — положительно-определенный, и u_n — приближенное решение уравнения $Au = f$, построенное по методу Ритца, то $\|Bu_n - B^{-1}f\| \to 0$, где $B^2 = A$. Это немедленно вытекает из только что доказанной эквивалентности двух методов и из хода доказательства леммы 2. Напомним еще раз, что соотношение $\|Au_n - f\| \to 0$, вообще говоря, не имеет места, если u_n построено по методу Ритца.

Допустим еще раз, что оператор Au — положительно-определенный. Напомним (§ 19), что решение уравнения (1) в этом случае эквивалентно задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u).$$

Если ввести гильбертово пространство H_0 (см. § 19) со скалярным произведением

$$[u, v] = (Au, v),$$

то, как мы видели,

$$F(u) = |u - f'|^2 - |f'|^2,$$

где f' — решение уравнения (1). Пусть теперь u_n — решение, построенное по методу наименьших квадратов. Нетрудно видеть, что *последовательность* $\{u_n\}$ *сходится к* f' *также и в метрике* H_0.[1] Действительно,

$$|u_n - f'|^2 = (Au_n - Af', u_n - f') = (Au_n - f, u_n - f').$$

По неравенству Коши — Буняковского,

$$|u_n - f|^2 \leqslant \|Au_n - f\| \, \|u_n - f'\|.$$

Далее, по неравенству (6)

$$\|u_n - f'\| \leqslant K\|Au_n - Af'\| = K\|Au_n - f\|,$$

и, следовательно,

$$|u_n - f'|^2 \leqslant K\|Au_n - f\|^2, \tag{12}$$

откуда следует, что

$$|u_n - f|^2 \to 0.$$

---

[1] Иначе говоря, последовательность $\{u_n\}$ — минимизирующая для функционала $F(u)$.

Формула (12) позволяет, очевидно, оценить погрешность приближенного решения, полученного по методу наименьших квадратов. Величина $\|Au_n - f\|^2$ может быть вычислена следующим образом: имеем

$$\|Au_n - f\|^2 = (Au_n - f,\ Au_n - f) =$$
$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k - f,\ \sum_{m=1}^{n} a_m A\varphi_m - f\Big) = \sum_{k,\, m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\varphi_k, A\varphi_m) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k,\ f) - \sum_{m=1}^{n} \bar{a}_m (f,\ A\varphi_m) + (f,\ f). \qquad (13)$$

Коэффициенты a_k удовлетворяют системе (5)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k,\ A\varphi_m) = (f,\ A\varphi_m).$$

Умножая на $\bar{a}_m$ и суммируя по m, получим

$$\sum_{k,\, m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\varphi_k,\ A\varphi_m) = \sum_{m=1}^{n} \bar{a}_m (f,\ A\varphi_m).$$

Подставив это в (13), мы получим

$$\|Au_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k,\ f) =$$
$$= \|f\|^2 - \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k,\ f\Big) = \|f\|^2 - (Au_n,\ f). \qquad (14)$$

Погрешность приближенного решения, построенного по методу наименьших квадратов, оценивается неравенствами[1]

$$\|u_n - f'\|^2 \leqslant K^2 \{\|f\|^2 - (Au_n,\ f)\} \qquad (15)$$

$$|u_n - f'|^2 \leqslant K \{\|f\|^2 - (Au_n,\ f)\}. \qquad (16)$$

Необходимо заметить, что в метрике пространства H_0 метод наименьших квадратов сходится медленнее, чем метод

---

[1] Напомним, что f' означает решение уравнения (1). Формула (16) имеет место только для положительно-определенного оператора A.

Ритца. Действительно, будем исходить из одних и тех же координатных элементов $\{\varphi_n\}$. Пусть

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k,$$

где коэффициенты a_k определены по методу наименьших квадратов, а коэффициенты b_k — по методу Ритца. Тогда, по самому определению метода Ритца

$$F(u_n) \geqslant F(v_n)$$

или

$$\| u_n - f' \| \geqslant \| v_n - f' \|.$$

Последнее неравенство и показывает более медленную сходимость последовательности $\{u_n\}$ по сравнению с последовательностью $\{v_n\}$. Преимущество метода наименьших квадратов состоит, однако, в том, что последовательность $\{u_n\}$ может сходиться равномерно (иногда вместе с некоторыми производными) в таких случаях, когда о последовательности $\{v_n\}$ этого утверждать нельзя.

§ 61. Применение метода в работах Н. М. Крылова и его школы

Как мы уже указывали в § 60, большое число работ Н. М. Крылова и его школы посвящено применению метода наименьших квадратов к дифференциальным и интегральным уравнениям. Относящиеся сюда вопросы подробно изложены в монографии М. Кравчука [1], к которой мы и отсылаем читателя; там же приведен обширный список работ школы Н. М. Крылова по методу наименьших квадратов и по так называемому „методу моментов“. В настоящем параграфе мы покажем на примере уравнения Пуассона особенности применения метода наименьших квадратов в работах упомянутой школы.

Итак, пусть требуется проинтегрировать уравнение Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

в области Ω при краевом условии

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Границу S предполагаем достаточно гладкой.

Выберем последовательность координатных функций $\{\varphi_n(x, y)\}$, достаточное число раз непрерывно-дифференцируемых в $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющих условию (2). Как обычно, приближенное решение ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

и определяем коэффициенты a_k из условия[1]

$$\int_\Omega [\Delta u_n - f]^2 \, d\Omega = \min.$$

Как и в общем случае (см. § 60), легко доказать, что

$$\|\Delta u_n - f\|^2 = \int_\Omega [\Delta u_n - f]^2 \, d\Omega \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим через $G(x, y; \xi, \eta)$ функцию Грина нашей задачи. Тогда, так как $u|_S = u_n|_S = 0$, то

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u - \Delta u_n)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(f - \Delta u_n)\, d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

К последнему интегралу применим неравенство Буняковского:

$$[u(x, y) - u_n(x, y)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_\Omega [f - \Delta u_n]^2 \, d\Omega. \tag{4}$$

---

[1] Все данные функции предполагаем вещественными.

функция $G(x, y; \xi, \eta)$ только логарифмически бесконечна, поэтому первый интеграл ограничен; второй интеграл стремится к нулю, и неравенство (4) показывает, что $u_n(x, y) \to u(x, y)$ *равномерно* в $\overline{\Omega}$. Из рассуждений конца предшествующего параграфа следует, что $\frac{\partial u_n}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y} \to \frac{\partial u}{\partial y}$ в среднем[1] по области Ω. Эти результаты показывают, что метод наименьших квадратов дает в рассматриваемом случае лучшую сходимость, чем метод Ритца, хотя сходимость в среднем производных и несколько медленнее.

В последующем, применяя метод наименьших квадратов к задачам математической физики, мы будем, в отличие от Н. М. Крылова и его последователей, выбирать координатные функции так, чтобы они удовлетворяли не краевым условиям, а дифференциальному уравнению задачи, которое мы будем предполагать однородным. Это, как мы увидим ниже, значительно улучшит сходимость метода.

§ 62. Приложение к интегральным уравнениям

Метод наименьших квадратов оказывается полезным в применении к некоторым классам линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Пусть A — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть известно, что существует ограниченный обратный оператор A^{-1}. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где u — искомый, а f — данный элемент пространства. Следуя методу наименьших квадратов, возьмем полную в H последовательность линейно-независимых элементов $\{\varphi_n\}$ и будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k.$$

---

[1] Это можно установить непосредственно из формулы (3), пользуясь теоремой § 49 об ограниченности интегрального оператора со слабой особенностью.

Проверим выполнение условий А — С леммы 2 § 60. Условие А вытекает из того, что последовательность $\{\varphi_n\}$ — полная в H, а оператор A — ограниченный; условия В и С вытекают из ограниченности оператора A^{-1}. На основании леммы 2 § 60, $u_n \to u$, где u есть решение уравнения (1).

Пусть теперь оператор A не имеет обратного, но существует ограниченный регуляризирующий оператор M, т. е. такой, что $MA = E + T$, где E — единичный, а T — вполне-непрерывный оператор. В этом случае для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы f было ортогонально ко всем решениям однородного сопряженного уравнения[1] $A^*u = 0$. Далее, если обозначить через H_1^* линеал элементов из H, ортогональных ко всем решениям уравнения $A^*u = 0$, а через H_1 линеал элементов,[2] ортогональных ко всем решениям уравнения $Au = 0$, и рассматривать оператор A только в H_1, то обратный оператор A^{-1} существует и ограничен[1] в H_1^*. Наш метод приближенного решения может быть использован и в этом случае, если однородное уравнение $Au = 0$ имеет только конечное число линейно-независимых решений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ... $u^{(r)}$ и эти решения известны. Предполагая, что $f \in H_1^*$, мы будем искать приближенное решение в H_1; для этого достаточно представить его в виде (2), но коэффициенты подчинить уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (\varphi_k, u^{(j)}) = 0, \ j = 1, \ 2, \ \ldots r.$$

С помощью этих уравнений можно исключить некоторые из коэффициентов a_k; остальные определяем из условия $\|Au_n - f\|^2 = \min$, что приведет нас к системе вида (5) § 60.

Изложенный здесь метод приближенного решения применим, очевидно, к интегральным уравнениям типа Фредгольма,[3] ядра которых удовлетворяют условию:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K^2(P, Q)| \, d\Omega_P \, d\Omega_Q,$$

[1] См. С. Г. Михлин [4].

[2] Нетрудно убедиться, что H_1 и H_1^* суть полные (в смысле § 4) гильбертовы пространства.

[3] Метод наименьших квадратов применял к уравнениям типа Фредгольма М. Кравчук; см., например, М. Кравчук [2].

а также и сингулярным интегральным уравнениям (содержащим главное значение интеграла), если интеграл распространен по гладкой замкнутой кривой. Действительно, такой сингулярный оператор ограничен в гильбертовом пространстве функций с суммируемым квадратом и имеет ограниченный регуляризирующий оператор.[1]

В применении к интегральным уравнениям можно в некоторых случаях так изменить метод, чтобы сходимость была равномерной.

Пусть дано уравнение Фредгольма:

$$Au = u(P) - \int_\Omega K(P,\ Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q = f(P), \tag{2}$$

где $P(x_1,\ x_2,\ \dots x_m)$ и $Q(s_1,\ s_2,\ \dots s_m)$ — точки m-мерной области Ω. Пусть $f(P)$ дифференцируема $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ раз по всем координатам $x_1,\ x_2,\ \dots x_m$ и пусть структура уравнения такова, что решение $u(P)$ также $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ раз дифференцируемо и, наконец, оператор в левой части (2) переводит достаточное число раз дифференцируемую функцию в дифференцируемую $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ раз. В качестве $\varphi_k(P)$ возьмем последовательность функций достаточное число раз дифференцируемых, например, полиномов, положим попрежнему $u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P)$, но коэффициенты a_k будем определять из условия[2]

$$\|Au_n - f\|^2 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \sum_{j_1+\dots+j_m=k} \left\| \frac{\partial^k (Au_n - f)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right\|^2 = \min. \tag{3}$$

---

[1] Доказательство этих предложений можно найти в статье С. Г. Михлина [4].

[2] Норму определяем обычным способом: $\|u\|^2 = \int_\Omega |u(P)|^2 d\Omega$.

Допуская, что решение уравнения (2) существует, мы легко найдем отсюда, что

$$\|Au_n - f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \left\|\frac{\partial^k (Au_n - f)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots \left[\frac{m}{2}\right] + 1.$$

По известной теореме С. Л. Соболева [1, 2] о вложении пространства $Au_n \to f$ равномерно в Ω.

Допустим еще, что

$$\int_\Omega |K^2(P, Q)|\, d\Omega_Q < C^2, \quad C = \text{const}.$$

Обозначим $Au_n = f_n$. Тогда

$$u(P) - u_n(P) = \int_\Omega K(P, Q)[u(Q) - u_n(Q)]\, d_Q\Omega + \\ + f(P) - f_n(P),$$

откуда, в силу неравенства Буняковского,

$$|u(P) - u_n(P)| < C\|u - u_n\| + |f(P) - f_n(P)|.$$

По доказанному выше (см. § 60), из $\|Au_n - f\| \to 0$ следует, что $\|u - u_n\| \to 0$, и из последнего неравенства видно, что $u_n(P) \to u(P)$ равномерно в Ω. Введя в левую часть (3) производные более высоких порядков, можно добиться, в известных условиях, и равномерной сходимости производных.

§ 63. Вспомогательные предложения теории аналитических функций

Здесь и ниже мы ограничиваемся для простоты случаем конечной односвязной области плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Распространение результатов на случай области многосвязной или бесконечной не встречает существенных препятствий, но выкладки при этом усложняются.

Как и во всем предшествующем, мы будем рассматриваемую область обозначать через Ω, ее границу — через S;

замкнутую область $\Omega + S$ попрежнему будем обозначать $\overline{\Omega}$. Начало координат всегда будем помещать внутри Ω. Кривую S всегда будем считать достаточно гладкой.

Существенную роль в дальнейшем играет следующая теорема Волша [1].

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти такой полином $\varphi(z)$, что в $\overline{\Omega}$ выполняется неравенство*

$$|f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Отметим два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Если $f(z)$ голоморфна в Ω и вместе со своими производными до порядка r включительно непрерывна в $\overline{\Omega}$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти полином $\varphi(z)$, удовлетворяющий в $\overline{\Omega}$ неравенствам*

$$\begin{gathered} |f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \quad |f'(z) - \varphi'(z)| < \varepsilon, \ldots \\ |f^{(r)}(z) - \varphi^{(r)}(z)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{2}$$

По теореме Волша пожно построить полином $\varphi(z)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f^{(r)}(z) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{A};$$

постоянную A мы определим ниже. Найдём полином $f^*(z)$ из условий (z_0 — некоторая фиксированная точка внутри Ω): $f^{*(r)}(z) = \varphi(z)$, $f^{*(j)}(z_0) = f^{(j)}(z_0)$, $j = 0, 1, 2, \ldots r - 1$. Интегрируя, находим:

$$|f^{(r-1)}(z) - f^{*(r-1)}(z)| = \left| \int_{z_0}^{z} [f^{(r)}(z) - \varphi(z)]\, dz \right| < \frac{\varepsilon d}{A},$$

где d есть максимум кратчайших расстояний между z_0 и точками S по путям, лежащим в $\overline{\Omega}$. Аналогично

$$|f^{(r-2)}(z) - f^{*(r-2)}(z)| < \frac{\varepsilon d^2}{A}, \ldots |f(z) - f^*(z)| < \frac{\varepsilon d^r}{A}.$$

Достаточно взять $A = 1$, если $d \leqslant 1$ и $A = d^r$, если $d > 1$, и неравенства (2) доказаны.

Следствие 2. *В условиях следствия 1 можно по данному числу* $\varepsilon > 0$ *построить такой полином* $\varphi(z)$, *что*

$$\sum_{j=0}^{r} \int_S |f^{(j)}(z) - \varphi^{(j)}(z)|^2 ds < \varepsilon^2, \qquad ds = |dz|.$$

Доказательство очевидно.

Нам придется ниже рассматривать пространства $L_2^{(r)}(S)$, элементы которых суть функции, определенные на кривой S; рассматриваемые как функции дуги на S, они абсолютно-непрерывны вместе со своими производными по дуге до порядка $r-1$ включительно, а их производные порядка r квадратично-суммируемы вдоль S. Скалярное произведение в $L_2^{(r)}(S)$ определяется формулой

$$(\varphi, \psi)_r = \sum_{j=0}^{r} \int_S \varphi^{(j)}(z) \overline{\psi^{(j)}(z)}\, ds;$$

отсюда вытекает формула для нормы в $L_2^{(r)}(S)$:

$$\|\varphi\|_r^2 = \sum_{j=0}^{r} \int_S |\varphi^{(j)}(z)|^2 ds.$$

Важную роль в последующем играет следующая

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in L_2(S)$, *и* z — *точка кривой* S. *Интеграл*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

взятый в смысле его главного значения по Коши, представляет собой оператор, ограниченный в $L_2(S)$.

Из леммы 1 вытекает существование постоянной K, зависящей только от кривой S, для которой справедливо неравенство $\|\psi\| \leqslant K \|\varphi\|$.

Доказательство леммы 1 можно найти в моей статье [4].

В дальнейшем мы будем говорить, что некоторая последовательность сходится равномерно внутри Ω, если эта последовательность равномерно сходится во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω.

Теорема 2. *Если функции $f_n(z)$ голоморфны в Ω и представимы формулой Коши, и если $\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то эти функции равномерно стремятся к нулю внутри Ω.*

Имеем

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Пусть z лежит в замкнутой области $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Обозначим через d, $d > 0$, наименьшее расстояние между границами областей $\overline{\Omega}'$ и Ω и через l — длину кривой S. Тогда

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi d}\int_S |f_n(\zeta)| \cdot |d\zeta|,$$

или, применяя к последнему интегралу неравенство Буняковского,

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2\pi d}\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 $f_n(z) \to 0$ во всякой внутренней точке Ω.*

Теорема 3. *Если $f_n(z)$ голоморфны в Ω, $f_n^{(r)}(z)$ представима формулой Коши и $\|f_n\|_r \to 0$, то функции $f_n(z)$ вместе с их производными до порядка $r-1$ включительно стремятся к нулю равномерно в $\overline{\Omega}$.*

Для простоты ограничимся случаем $r = 1$. Общий случай рассматривается аналогично. Прежде всего заметим, что $\|f_n'(z)\| \to 0$, если $\|f_n\|_1 \to 0$. Далее, интегрируя формулу Коши для производной, получим

$$f_n(z) - f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_S f_n'(\zeta)\ln\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

где z_0 — точка внутри Ω. Теперь, по неравенству Буняковского,

$$|f_n(z) - f_n(z_0)|^2 \leqslant \frac{\|f_n'\|^2}{4\pi^2}\int_S \left|\ln\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\right|^2 \cdot |d\zeta|.$$

Если z лежит в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то последний интеграл ограничен, и $f_n(z) - f_n(z_0) \to 0$ равномерно в $\overline{\Omega}$.

Но $f_n(z_0) \to 0$ (следствие из теоремы 2), и наша теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *голоморфна в* Ω *и непрерывна в* $\overline{\Omega}$, *и пусть* $v(0, 0) = 0$. *Тогда существует постоянная* K, *зависящая только от области* Ω, *такая, что*

$$\|f\| \leqslant K\|u\|. \tag{3}$$

Конформно отобразим Ω на область единичного круга плоскости t; пусть $t = \chi(z)$ — функция, реализующая это преобразование. Введем обозначения

$$t = re^{i\vartheta}; \quad u(x, y) = U(r, \vartheta); \quad f(z) = F(t);$$

обозначим еще через γ окружность $|t| = 1$. Внутри γ $F(t)$ разлагается в ряд Тейлора

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Обозначим еще $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Конформное преобразование выполним так, чтобы точка $z = 0$ перешла в точку $t = 0$. Тогда $\operatorname{Im}(a_0) = 0$. Простой подсчет дает

$$\int_\gamma U^2(1, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2;$$

$$\int_\gamma |F^2(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Отсюда

$$\int_\gamma |F^2(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant 2 \int_\gamma U^2(1, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{4}$$

Возвращаясь к переменной z, получим

$$\int_S |f^2(z)| \cdot |\chi'(z)|\, ds \leqslant 2 \int_\gamma u^2 |\chi'(z)|\, ds.$$

Так как кривая S — гладкая, то $\chi'(z)$ ограничена по модулю сверху и снизу. Пусть $A \leqslant |\chi'(z)| \leqslant B$, тогда из (4) следует

$$\|f\| \leqslant K\|u\|, \quad K = \sqrt{\frac{2B}{A}}.$$

При соответствующих дополнительных условиях, наложенных на $v(0,0)$, нетрудно получить также оценку

$$\|f\|_r \leqslant K_r \|u\|_r. \tag{5}$$

В заключение укажем, что аппроксимация аналитической функции полиномами не единственно возможная. Пример аппроксимации функциями иного вида будет дан в § 65.

§ 64. Задачи Дирихле и Неймана

Рассмотрим задачу Дирихле для односвязной конечной области Ω. Искомую гармоническую функцию обозначим через $u(x, y)$, ее значение на границе S области — через $u(\zeta)$, голоморфную в Ω функцию, вещественная часть которой совпадает с $u(x, y)$, — через $f(z)$. Функция $f(z)$ определена с точностью до чисто-мнимого слагаемого, которое мы нормируем условием

$$\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0. \tag{1}$$

Следуя методу наименьших квадратов, будем искать приближенное решение задачи Дирихле в виде

$$f_n(z) = u_n + iv_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \tag{2}$$

Чтобы удовлетворить условию (1), потребуем, чтобы

$$\operatorname{Im}(a_0) = 0. \tag{3}$$

Теперь коэффициенты в выражении $f_n(z)$ определим из условия

$$\|u - u_n\|^2 = \min. \tag{4}$$

Исследуем сходимость приближенного решения к точному. Условие A леммы 2 (§ 60) есть простое следствие теоремы Волша. Далее, условие B вытекает из существования решения задачи Дирихле. Условие C также очевидно выполняется, так как в нашем случае $Au \equiv u$. В силу леммы 2 § 60, $\|u - u_n\| \to 0$.

Докажем теперь, что $f_n(z) \to f(z)$ *равномерно внутри* Ω. Действительно, из оценки (3) § 63 следует, что $\|f_n(z) - f(z)\| \to 0$, а из теоремы 2 § 63 — что $f_n(z) - f(z) \to 0$ равномерно внутри Ω [1].

[1] Этот результат, при некоторых дополнительных ограничениях, содержится у М. Пиконе [1], который рассматривал только случай односвязной области.

Замечания. 1. Последние рассуждения остаются, очевидно, в силе, если вместо (2) взять функцию вида:

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k(z),$$

если только $\{\omega_k(z)\}$ есть полная система голоморфных в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

2. Можно изменить процесс так, чтобы равномерная сходимость имела место в $\overline{\Omega}$. Для этого достаточно подчинить функцию $f_n(z)$ условию

$$\|u-u_n\|_1=\min. \tag{4$_1$}$$

Вычисление коэффициентов при этом несколько усложняется.

3. Если потребовать обращения в минимум величины $\|u-u_n\|_r$ то в $\overline{\Omega}$ будет иметь место равномерная сходимость производных $f_n^{(j)}(z)$, $j=1, 2,\ldots, r-1$ к соответствующей производной $f^{(j)}(z)$.

С целью иллюстрации метода рассмотрим задачу Дирихле для круга. Радиус круга положим равным единице, начало координат поместим в центре круга. Заданную на S функцию $u(\zeta)$ разложим в ряд Фурье:

$$u(\zeta)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta),\ \zeta=e^{i\theta}.$$

Фукцию $f_n(z)$ будем искать в виде полинома; это равносильно тому, что мы полагаем $\omega_k(z)=z^k=r^ke^{ik\theta}$.

Полагая

$$f_n(z)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-ib_k)z^k,\ \operatorname{Im}(a_0)=0,$$

мы найдём:

$$a_0=A_0,\quad a_k=A_k,\quad b_k=B_k.$$

Это дает нам в качестве функции $f_n(z)$ n-й отрезок степенного ряда функции $f(z)$.

Задача Неймана состоит в отыскании голоморфной в Ω функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_s = \psi(s). \tag{5}$$

функция $f(z)$ определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого; мы нормируем его условием

$$f(0) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Если условие* (6) *выполнено, то существует постоянная K, зависящая только от области Ω, такая, что в замкнутой области $\overline{\Omega}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant K \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|. \tag{7}$$

Мы допускаем, что $f(z)$ и $f'(z)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$.

Отобразим Ω конформно на единичный круг с помощью функции $t = \chi(z)$; $\chi(0) = 0$. Обозначим, как и в § 63,

$$t = re^{i\vartheta}, \quad f(z) = F(t), \quad u(x, y) = U(r, \vartheta).$$

Имеем $F(0) = f(0) = 0$, поэтому

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \qquad a_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

$$U(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2,$$

$$|F(t)|^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2.$$

Отсюда

$$|F(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta.$$

Возвращаясь к переменной z и замечая, что в силу конформности преобразования

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{1}{|\chi'(z)|}, \qquad d\vartheta=|\chi'(z)|\,ds,$$

мы получим

$$|f(z)|^2\leqslant\frac{\pi}{6}\int\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\frac{ds}{|\chi'(z)|}.$$

Наконец, $|\chi'(z)|\geqslant A>0$, $A=\mathrm{const}$, так как кривая S — гладкая. Отсюда

$$|f(z)|\leqslant K\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|, \quad K=\sqrt{\frac{\pi}{6A}}.$$

В соответствии с методом наименьших квадратов, приближенное решение задачи Неймана можно искать в виде

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n}a_kz^k.$$

Вместо рациональных дробей могут быть взяты, как было указано выше, линейные комбинации из членов любой полной в Ω последовательности голоморфных в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

Коэффициенты выражения $f_n(z)$ определяются из условия

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}-\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right\|^2=\min. \tag{8}$$

Оно дает систему линейных уравнений, допускающую только единственное решение. Действительно, это вытекает из того, что условие леммы 1 § 60 в задаче Неймана выполнено, что в свою очередь следует из теоремы 1.

Докажем теперь, что $f_n(z)\to f(z)$ *равномерно в* $\overline{\Omega}$. По следствию 2 § 63 можно найти полином $\varphi_{n_0}(z)$ так, чтобы $\|f'(z)-\varphi'_{n_0}(z)\|<\varepsilon$. Далее

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}-\frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu}\right\|=\|\operatorname{Re}\{[f'(z)-\varphi'_{n_0}(z)]e^{-i(\nu,x)}\}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|f'(z)-\varphi'_{n_0}(z)\|<\varepsilon.$$

В силу (8), тем более имеем

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}-\frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu}\right\|<\varepsilon,$$

если u_{n_0} найдено по методу наименьших квадратов. Когда $n > n_0$, то очевидно

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \to 0.$$

Теперь из (7) вытекает равномерная сходимость $f_n(z)$ к $f(z)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Все выводы настоящего параграфа остаются в силе, если вместо $L_2(S)$ ввести пространство $L_2(p;\ S)$, при условии, что весовая функция $p(\sigma)$ ограничена сверху и снизу положительными числами:

$$0 < \alpha \leqslant p(\sigma) \leqslant \beta < \infty.$$

§ 65. Задача Дирихле для эллипса

Пусть требуется определить функцию $u(x, y)$, гармоническую внутри эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, по краевому условию ($S$ — контур эллипса):

$$u|_S = u(\sigma). \tag{1}$$

Как и выше, будем считать $u(x, y)$ вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$:

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\,\{f(z)\}, \quad z = x + iy. \tag{2}$$

В качестве координатных выбираем функции ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$) $\varphi_0(z) = 1$,

$$\varphi_k(z) = (z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k, \quad k > 1. \tag{3}$$

Система $\{\varphi_k\}$, как известно, полна на линеале функций, голоморфных внутри эллипса и непрерывных вплоть до контура. Приближенные решения будем искать в виде

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z), \quad \mathrm{Im}\,(a_0) = 0. \tag{4}$$

Обозначая длину дуги эллипса через $d\sigma$, имеем

$$d\sigma = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

В качестве основного гильбертова пространства нашей задачи введем пространство $L_2(p;\ S)$, где

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}};$$

очевидно, в $L_2(p;\ S)$ скалярное произведение функций φ и ψ равно

$$(\varphi,\ \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\, \overline{\psi(\sigma)}\, dt. \tag{5}$$

В соответствии с методом наименьших квадратов, будем определять коэффициенты a_k из условия

$$\left\| \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) - u(\sigma) \right\|^2 = \min. \tag{6}$$

На контуре эллипса $z = a \cos t + ib \sin t$ и, следовательно, $z^2 - c^2 = (b \cos t + ia \sin t)^2$. Отсюда

$$\varphi_k(z) = (a+b)^k e^{ikt} + (a-b)^k e^{-ikt}, \quad k > 0.$$

Обозначим $a_k = \alpha_k - i\beta_k$. Тогда на эллипсе

$$\operatorname{Re}\{a_k \varphi_k(z)\} = [(a+b)^k + (a-b)^k]\, \alpha_k \cos kt + \\ + [(a+b)^k - (a-b)^k]\, \beta_k \sin kt, \quad k > 0. \tag{7}$$

Теперь из (6) видно, что коэффициенты в (7) суть коэффициенты Фурье функции $u(\sigma)$; отсюда

$$\alpha_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma)\, dt,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi[(a+b)^k + (a-b)]^k} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \cos kt\, dt, \tag{8}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi[(a+b)^k - (a-b)^k]} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \sin kt\, dt.$$

Коэффициенты a_0, a_k, β_k, как это видно из (8), не зависят от номера n, поэтому в (4) легко осуществляется предельный переход при $n \to \infty$, что дает точное решение задачи

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k \right];$$

коэффициенты a_k определяются по формулам (8).

§ 66. Случай кусочно-гладкого контура. Задача Дирихле

Пусть контур S, ограничивающий область Ω — кусочно-гладкий; обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ его угловые точки и через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots \pi\alpha_r$ — внутренние углы в соответствующих точках. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(p; S)$, где весовая функция

$$p(\sigma) = \prod_{k=1}^{r} |\zeta - \zeta_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1}. \tag{1}$$

Скалярное произведение и норма в $L_2(p; S)$ определяются формулами

$$(\varphi, \psi)_S = \int_S p(\sigma)\, \varphi(\zeta)\, \overline{\psi(\zeta)}\, d\sigma; \qquad \|\varphi\|_S^2 = \int_S p(\sigma)\, |\varphi^2(\zeta)|\, d\sigma. \tag{2}$$

Лемма. *Множество полиномов плотно, в смысле метрики* (2), *в классе голоморфных в* Ω *и представимых формулой Коши функций, предельные значения вещественных частей которых принадлежат пространству* $L_2(p; S)$.

Как и выше, при доказательстве будем считать Ω конечной односвязной.

Конформно отобразим Ω на единичный круг; пусть $t = \chi(z)$ — преобразующая функция. Как известно,

$$\chi'(z) = \varkappa(z) \prod_{k=1}^{r} (z - \zeta_k)^{\frac{1}{\alpha_k} - 1}, \tag{3}$$

где $\varkappa(z)$ ограничена по модулю в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ положительными числами сверху и снизу

$$0 < A \leqslant \varkappa(z) \leqslant B < \infty. \tag{4}$$

Окружность $|t|=1$ обозначим через γ. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\gamma)$, в котором

$$(\varphi, \psi)_\gamma = \int_\gamma \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,d\vartheta, \quad \|\varphi\|_\gamma^2 = \int_\gamma |\varphi^2(t)|\,d\vartheta, \quad t = e^{i\vartheta}. \tag{5}$$

Пусть $u \in L_2(p; S)$. Тогда

$$\|u\|_\gamma^2 = \int_\gamma |u|^2\,d\vartheta = \int_S |u^2|\,p(\sigma)\,|\varkappa(z)|\,d\sigma \leqslant B\|u\|_S^2 < \infty. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $u \in L_2(\gamma)$; полагая $t = e^{i\vartheta}$, мы найдем, что u разлагается в ряд Фурье, сходящийся в среднем:

$$u = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos k\vartheta - \beta_k \sin k\vartheta).$$

Обозначим $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ и положим, считая функцию u вещественной

$$F(t) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad F_n(t) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k,$$
$$\beta_0 = \mathrm{const}.$$

Функция $F(t)$ представима формулой Коши, и ее вещественная часть совпадает с u на окружности γ. Легко видеть, что

$$\|F - F_n\|_\gamma^2 = 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{7}$$

и, следовательно, при n достаточно большом, $\|F - F_n\| < \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Положим теперь $F(t) = f(z)$, $F_n(t) = f_n(z)$. Формула (7) тогда переходит в следующую

$$\int_S |f(z) - f_n(z)|^2 p(\sigma)\,|\varkappa(z)|\,d\sigma = 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 < \varepsilon^2,$$

откуда легко вытекает

$$\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$$

По теореме Волша непрерывную в $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и голоморфную в Ω функцию $f_n(z)$ можно аппроксимировать полиномом $f^*(z)$ равномерно и, тем более, в смысле метрики $L_2(p; S)$. Но

$$\|f-f^*\|_S \leqslant \|f-f_n\|_S + \|f_1-f^*\|_S < \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} + \|f_n-f^*\|_S$$

и так как оба слагаемые справа произвольно малы, то и $\|f-f^*\|$ произвольно мала, что доказывает лемму.

Перейдем теперь к задаче Дирихле. Нетрудно видеть, что оценка (3) § 63 сохраняет силу в $L_2(p; S)$. Действительно, она верна в $L_2(\gamma)$. Таким образом, если $f(z) = u + iv$ голоморфна в Ω и $\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0$, то по неравенству (3) § 63

$$\|f\|_\gamma < K\|u\|_\gamma,$$

или

$$\int_\gamma |f(z)|^2 d\vartheta \leqslant K \int_\gamma u^2 d\vartheta.$$

Но $d\vartheta = p(\sigma)|\varkappa(z)|d\sigma$; подставив это в последнее неравенство и используя (4), мы получим

$$\|f\|_S \geqslant K'\|u\|_S; \quad K' = K\sqrt{\frac{B}{A}}, \tag{8}$$

что совпадает с той же оценкой (3) § 63. Решая задачу Дирихле, мы будем требовать, чтобы выражение

$$\|u - \operatorname{Re}\{f^*(z)\}\|_S^2 = \min,$$

где $f^*(z)$ — полином. Лемма настоящего параграфа позволяет утверждать, что условие А. § 60 выполнено; условие В вытекает из теоремы существования задачи Дирихле, а условие С — из неравенства (8). Таким образом, сходимость метода наименьших квадратов в метрике $L_2(p; S)$ установлена.

§ 67. Смешанная задача теории потенциала

Мы будем здесь рассматривать следующую задачу: найти непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ гармоническую функцию $u(x, y)$, если на одних частях контура S заданы значения самой функции $u(x, y)$, а на других — значения ее нормальной производной.

Ограничимся случаем, когда область Ω — конечная односвязная. Контур S, как всегда, считаем достаточно гладким. Пусть точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1} = \alpha_1$ разбивают S на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{2m}$, так что дуга γ_k имеет начало и конец в точках α_k и α_{k+1}. Обозначим

$$\sum \gamma_{2k-1} = \lambda_1; \quad \sum \gamma_{2k} = \lambda_2.$$

Пусть, далее, на λ_1 даны значения $u(x, y) = \varphi(\sigma)$, а на λ_2 значения $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(\sigma)$. Обозначим еще

$$R(\sigma) = \sqrt{\prod_{k=1}^{m} |\zeta - \alpha_k|}.$$

Теорема 1. *Если* $\varphi(\sigma) \equiv 0$, *то существует постоянная* K, *не зависящая от функции* $u(x, y)$, *такая, что справедливо неравенство*

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma < K \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma. \tag{1}$$

Отобразим Ω конформно на полуплоскость с помощью функции $z = \chi(t)$, $t = \xi + i\eta$. Отображение выполним так, чтобы точка $t = \infty$ отвечала некоторой точке внутри λ_1. Точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ перейдут при этом в некоторые точки $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ действительной оси ξ. Обозначим через Γ_k, Δ_1, Δ_2 образы $\gamma_k, \lambda_1, \lambda_2$. Пусть, далее, $u(x, y) = U(\xi, \eta)$. Сопряженную с $U(\xi, \eta)$ функцию обозначим через $V(\xi, \eta)$. Краевые условия для $U(\xi, \eta)$, очевидно, таковы:

$$\text{на } \Delta_1 \quad U(\xi, \eta) = 0; \tag{2}$$

$$\text{на } \Delta_2 \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \nu} |\chi'(\xi)|. \tag{3}$$

Из уравнений Коши — Римана следует, что на Γ_{2k}

$$V = -\int_{a_{2k}}^{\xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi + C_k = \psi^*(\xi) + C_k; \tag{4}$$

постоянные C_k должны быть подчинены условию непрерывности функции $U(\xi, \eta)$. Одна из постоянных C_k может быть зафиксирована произвольно, так как $V(\xi, \eta)$ определяется с точностью до произвольной постоянной. Мы зафиксируем эту последнюю, потребовав, чтобы в общей формуле Шварца для полуплоскости [1]

$$U + iV = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi, 0)}{\xi - t}\, d\xi + iC$$

было $C = 0$. Тем самым произвол в выборе C_k полностью устраняется.

Краевые условия (2) и (4) позволяют найти значение $U(\xi, 0)$ на Λ_2, именно,[2] на Λ_2

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{R_1(\xi)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_2} R_1(\xi') B(\xi') \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + Q_{m-1}(\xi) \right\}. \qquad (5)$$

Здесь $R_1(\xi) = \sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2m} |\xi - a_k|}$; $Q_{m-1}(\xi)$ — полином степени $m - 1$:

$$Q_{m-1}(\xi) = q_0 \xi^{m-1} + q_1 \xi^{m-2} + \ldots + q_{m-1}$$

и, наконец,

$$B(\xi) = -\varphi^*(\xi) - C_k.$$

Формула (5) содержит $2m$ постоянных C_k и q_k. Докажем, что при подходящем их выборе $U(\xi, \eta)$ будет непрерывной в точках a_k. Для непрерывности $U(\xi, \eta)$ достаточно, чтобы при $\xi = a_k$ выражение в скобках в формуле (5) обратилось в нуль. Это дает нам систему уравнений с $2m$ неизвестными:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_2} \frac{R_1(\xi')}{\xi' - a_k} B(\xi')\, d\xi' + Q_{m-1}(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots 2m. \qquad (6)$$

Система (6) имеет единственное решение — это вытекает из единственности решения смешанной задачи. Решив систему (6),

---

[1] См., например, С. Г. Михлин [1], § 67, формула (2).
[2] Там же, формула (10).

мы, очевидно, получим решение в виде:

$$
\begin{aligned}
C_k &= \int\limits_{\Lambda_2} \frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')} \varphi^*(\xi')\, d\xi', \\
q_k &= \int\limits_{\Lambda_2} \frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')} \varphi^*(\xi')\, d\xi',
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\mu_k(\xi')$ и $\nu_k(\xi')$ — непрерывные на Λ_2 функции. Определим на Λ_2 непрерывные функции $\tilde{\mu}_k(\xi)$ и $\tilde{\nu}_k(\xi)$, полагая на Γ_{2s}

$$
\tilde{\mu}_k(\xi) = \int\limits_{\xi}^{a_{2s}+1} \frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')} d\xi'; \quad \tilde{\nu}_k(\xi) = \int\limits_{\xi}^{a_{2s}+1} \frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')} d\xi'.
$$

Интегрируя (7) по частям и замечая, что $\varphi^*(a_{2s}) = \tilde{\mu}_k(a_{2s+1}) = \tilde{\nu}_k(a_{2s+1}) = 0$, имеем:

$$
C_k = \int\limits_{\Lambda_2} \tilde{\mu}_k(\xi) \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi, \quad q_k = \int\limits_{\Lambda_2} \tilde{\nu}_k(\xi) \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi.
$$

Подставив это в (5) и меняя порядок интегрирования в получающихся при этом двойных интегралах, мы легко приведем указанную формулу к виду:

$$
\text{на } \Lambda_2 \quad U(\xi, 0) = \frac{1}{R_1(\xi)} \int\limits_{\Lambda_2} M(\xi, \xi') \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi, \tag{8}
$$

где $M(\xi, \xi')$ такова, что интеграл

$$
\int\limits_{\Lambda_2} M^2(\xi, \xi')\, d\xi'
$$

ограничен. Последнее вытекает из того, что функции $\tilde{\mu}_k(\xi)$, $\tilde{\nu}_k(\xi)$ удовлетворяют условию Липшитца с показателем $\frac{1}{2}$, а тогда $M(\xi, \xi')$ удовлетворяет тому же условию внутри Λ_2 и, самое большее, логарифмически бесконечна в точках a_k. [1]

[1] См., например, Н. И. Мусхелишвили [1].

Применим к (8) неравенство Буняковского:

$$\text{на } \Delta_2 \; U^2(\xi, 0) \leqslant \frac{1}{R_1^2(\xi)} \int_{\Delta_2} M^2(\xi, \xi')\, d\xi' \int_{\Delta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi' <$$

$$< \frac{C'}{R_1^2(\xi)} \int_{\Delta_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi'; \quad C' = \text{const}. \tag{9}$$

Вернемся к плоскости $z = x + iy$. На Δ_2 преобразующая функция $z = \chi(t)$ остается конечной; тогда, как нетрудно видеть, $\chi'(t)$ и $1/\chi'(t)$ ограничены на Δ_2. Но тогда отношения $R_1(\xi)/R(\sigma)$ и $R(\sigma)/R_1(\xi)$ также ограничены, и мы легко найдем из (9), что на λ_2

$$R(\sigma)\, u^2(\sigma) < \frac{K''}{R(\sigma)} \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma, \qquad K'' = \text{const}. \tag{10}$$

Наконец, интегрируя (10) по λ_2 и полагая

$$K = K'' \int_{\lambda_2} \frac{d\sigma}{R(\sigma)},$$

мы придем к неравенству (1).

Теорема 2. *Каковы бы ни были заданные на λ_1 и λ_2 значения u и $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, существует такая постоянная K_1, что*

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \left\{ \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + \int_{\lambda_1} \left[u^2(\sigma) + \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2\right] d\sigma \right\} \tag{11}$$

Построим непрерывную на S функцию $u_1(\sigma)$, совпадающую на λ_1 с $u(\sigma)$; на λ_2 мы ее доопределим, подчинив только двум требованиям

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant k \int_{\lambda_1} u^2(\sigma)\, d\sigma, \\ &\int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma \leqslant k \int_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma, \quad k = \text{const}. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее, построим гармоническую в Ω функцию $u_1(x, y)$, принимающую на S значение $u_1(\sigma)$, и положим $u = u_1 + u_2$. Функция u_2 удовлетворяет условию теоремы 1; по неравенству (1)

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\, u_2^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant K \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant 2K \int_{\lambda_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2\right] d\sigma. \qquad (13)$$

Оценим последний интеграл в (13). Конформно отобразим Ω на круг с помощью функции $z = \omega(t)$, $t = \rho e^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, и пусть $u_1(x, y) = U_1(\rho, \vartheta) = \mathrm{Re}\,\{F(t)\}$. Разложим $F(t)$ в степенной ряд:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\vartheta}.$$

Тогда

$$U_1(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(a_n e^{in\vartheta} + \bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right).$$

Отсюда

$$\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n e^{in\vartheta} + \bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right)$$

$$\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial \vartheta}\right|_{\rho=1} = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n e^{in\vartheta} - \bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right)$$

и, следовательно, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_{\Gamma} \left[\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial \rho}\right|_{\rho=1}\right]^2 d\vartheta = \int_{\Gamma} \left[\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial \vartheta}\right|_{\rho=1}\right]^2 d\vartheta.$$

или, возвращаясь к старым переменным:

$$\int_{S} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 |\omega'(\tau)|\, d\sigma = \int_{S} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 |\omega'(\tau)|\, d\sigma.$$

Пусть $A = \min |\omega'(t)|$, $B = \max |\omega'(t)|$. Очевидно, $0 < A \leqslant B < \infty$, так как контур S — гладкий. Тогда из последнего равенства следует:

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leqslant \frac{B}{A} \int\limits_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Тем более

$$\int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leqslant \frac{B}{A} \left\{ \int\limits_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma + \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma \right\}$$

и, в силу определения $u_1(\sigma)$ и неравенств (12),

$$\int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leqslant \frac{B(1+k)}{A} \int\limits_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Подставив это в (13), получим:

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u_2^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant 2K \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + K' \int\limits_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma,$$

$$K' = \frac{2BK(1+k)}{A}. \tag{14}$$

Теперь нетрудно доказать неравенство (11). Имеем:

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma = \int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, [u_1(\sigma) + u_2(\sigma)]^2\, d\sigma \leqslant 2R^* \int\limits_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\, d\sigma + {}$$
$$+ 2 \int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u_2^2(\sigma)\, d\sigma,$$

где $R^* = \max R(\sigma)$. Воспользуемся неравенствами (12) и (14) и положим $K_1 = \max(2kR^*,\ 4K,\ 2K')$; мы получим тогда:

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant K_1 \left\{ \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + \int\limits_{\lambda_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + u^2(\sigma)\right] d\sigma \right\}.$$

Займемся теперь решением смешанной задачи теории потенциала. Пусть $v(x, y)$ — функция, сопряженная с искомой $u(x, y)$, равная нулю в начале координат, и $f(z) = u + iv$.

Будем искать приближенное решение в виде:

$$f_n(z) = u_n + iv_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \operatorname{Im}(a_0) = 0.$$

Коэффициенты многочлена $f_n(z)$ определим из условия

$$\int_{\lambda_1} \left[(u - u_n)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_n}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma + \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma = \min. \quad (15)$$

Условия (15) приводят к системе линейных уравнений с неизвестными a_k; докажем ее разрешимость. Рассмотрим гильбертово пространство, элементы которого суть гармонические в Ω функции, представимые через функцию Грина, а скалярное произведение определяется формулой

$$(u, v) = \int_{\lambda_1} \left(u\bar{v} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_{\lambda_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Такое определение законно. Действительно, проверки требует только аксиома D (§ 3). Но, если $(u, u) = 0$, то $u \equiv 0$ на λ_1 и $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ на λ_2. По теореме единственности решения смешанной задачи теории потенциала, $u \equiv 0$.

Теперь минимальное условие (15) принимает вид $\| u - u_n \|^2 = \min$; так как u_n есть линейный агрегат линейно-независимых функций $1, \operatorname{Re}(z^k), \operatorname{Im}(z^k)$, то по доказанному в § 60 линейная система, к которой приводит условие (15), разрешима единственным образом.

Докажем теперь, что $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ *равномерно внутри* Ω. Прежде всего, опираясь на следствие 2 из теоремы 1 § 63, мы, как и в предшествующем параграфе, докажем, что каждый из интегралов в (15) стремится к нулю, но тогда стремится к нулю, в силу неравенства (11), и интеграл

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,(u - u_n)^2\, d\sigma.$$

Теперь

$$\int_S R(\sigma)\,(u - u_n)^2\, d\sigma \leqslant R^* \int_{\lambda_1} (u - u_n)^2\, d\sigma + \int_{\lambda_2} R(\sigma)\,(u - u_n)^2\, d\sigma \longrightarrow 0.$$

Далее,

$$f(z)-f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S (u-u_n)\,T(z;\zeta)\,d\sigma=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \sqrt{R(\sigma)}\,(u-u_n)\frac{T(z;\zeta)}{\sqrt{R(\sigma)}}\,d\sigma,$$

где $T(z;\zeta)$ — ядро Шварца[1] области Ω. По неравенству Буняковского,

$$|f(z)-f_n(z)|^2\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_S\frac{T^2(z;\zeta)}{R(\sigma)}\,d\sigma\int\limits_S R(\sigma)\,(u-u_n)^2\,d\sigma. \qquad (16)$$

Если $z\in\overline{\Omega}'$, где $\overline{\Omega}'$ — замкнутая область, лежащая внутри Ω, то $T(z;\zeta)$ непрерывно, первый интеграл в (16) ограничен и, так как второй интеграл стремится к нулю, то $f_n(z)\longrightarrow f(z)$ равномерно в Ω.

§ 68. Плоская задача теории упругости

Мы ограничимся случаем заданных смещений; случай заданных напряжений не представляет никаких существенных отличий. Попрежнему мы здесь ограничимся рассмотрением односвязной конечной области.

Как известно,[2] наша задача сводится к отысканию двух голоморфных в рассматриваемой области Ω функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, связанных на контуре S области Ω соотношением

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=g(\zeta). \qquad (1)$$

Здесь $\varkappa=3-4\sigma$, где σ — постоянная Пуассона, $g(\zeta)$ — заданная непрерывная на S функция. Решение краевой задачи, таким образом сформулированной, существует,[2] причем можно еще потребовать, чтобы $\varphi(0)=0$. Можно доказать,[3] что контурные значения $\varphi(z)$ выражаются через $g(z)$ формулой

---

[1] Определение и свойства ядра Шварца см. С. Г. Михлин [1].
[2] См. Н. И. Мусхелишвили [1].
[3] С. Г. Михлин [8]. Доказательство, данное в этой статье, может быть упрощено.

вида

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\varkappa}g(z)+\frac{1}{2\pi i\varkappa}\int\limits_S\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+$$

$$+\int\limits_S\{K_1(z,\zeta)g(\zeta)+K_2(z;\zeta)\overline{g(\zeta)}\}\,d\zeta, \qquad (2)$$

где K_1 и K_2 — непрерывные функции точек z и ζ на кривой S. В силу леммы 1 § 63, отсюда легко следует оценка

$$\|\varphi\|\leqslant C\|g\|, \quad C=\text{const}. \qquad (3)$$

Далее, заменим в (1) все члены комплексно-сопряженными, умножим на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z\in\Omega$$

и проинтегрируем по S. Это даст нам

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

или, если взять по частям второй интеграл,

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\varphi(\zeta)\,d\left(\frac{\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right)+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Если z меняется в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, целиком лежащей внутри Ω, то, применяя к последней формуле неравенство Буняковского, мы легко найдем

$$|\psi(z)|\leqslant C'\|g\|, \quad C'=\text{const}. \qquad (4)$$

Приближенные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в виде полиномов

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k z^k,$$

$$\psi_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k z^k, \qquad (5)$$

коэффициенты которых найдем из условия

$$\|g_n-g\|^2=\|\varkappa\varphi_n(z)-z\overline{\varphi_n'(z)}-\overline{\psi_n(z)}-g\|^2=\min. \qquad (6)$$

Как обычно, это условие приведет нас к некоторой системе линейных алгебраических уравнений. Докажем, что эта система разрешима единственным образом.

Изменим обозначения полиномов $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ и будем писать

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+ia_{2k})z^k,$$

$$\psi_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_{2k+2n+1}+ia_{2k+2n+2})z^k,$$

где на этот раз через a_j обозначены величины вещественные. Введем далее обозначения

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{(2k-1)}(z)&=z^k\\ \varphi_{(2k)}(z)&=iz^k\end{aligned}\right\}\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

$$\varphi_{(m)}(z)=0,\quad m>2n;$$

$$\psi_{(m)}(z)=0,\quad 1\leqslant m\leqslant 2n,$$

$$\psi_{(2k+2n+1)}(z)=z^k,\quad 0\leqslant k\leqslant n,$$

$$\psi_{(2k+2n+2)}(z)=iz^k,\quad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+2}a_k\varphi_{(k)}(z),$$

$$\psi_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+2}a_k\psi_{(k)}(z),$$

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+2}a_kg_{(k)}(z),$$

где $g_{(k)}(z)=\varkappa\varphi_{(k)}(z)-\overline{z\varphi'_{(k)}(z)}-\overline{\psi_{(k)}(z)}$.

Тождество

$$\sum_{k=1}^{4n+2}b_kg_{(k)}(\zeta)\equiv 0,\quad \zeta\in S,$$

где b_k — вещественные числа, возможно лишь, если все эти числа равны нулю.

Действительно, если

$$\sum_{k=1}^{4n+2} b_k g_{(k)}(\zeta) \equiv 0,$$

то одновременно, по теореме о единственности решения задачи теории упругости,

$$\sum_{k=1}^{4n+2} b_k \varphi_{(k)}(z) \equiv 0, \quad \sum_{k=1}^{4n+2} b_k \psi_{(k)}(z) \equiv 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} + ib_{2k}) z^k \equiv 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (b_{2n+2k+1} + ib_{2k+2n+2}) z^k \equiv 0,$$

откуда следует, что все b_j равны нулю.

Условие (6) теперь принимает вид

$$\left\| \sum_{k=1}^{4n+2} a_k g_{(k)} - g \right\|^2 = \min,$$

или, так как числа a_k — вещественные,

$$\sum_{j,\,k=1}^{4n+2} a_j a_k (g_{(j)}, g_{(k)}) - 2 \sum_{k=1}^{4n+2} a_k \operatorname{Re}(g, g_{(k)}) + (g, g) = \min.$$

Дифференцируя это по a_j и приравнивая нулю результат, мы получим систему линейных уравнений с неизвестными a_k:

$$\sum_{k=1}^{4n+2} a_k \operatorname{Re}(g_{(k)}, g_{(j)}) = \operatorname{Re}(g, g_{(j)}), \tag{7}$$

$$j = 1, 2, \ldots 4n+2,$$

Докажем, что система (7) разрешима, для чего рассмотрим однородную систему

$$\sum_{k=1}^{4n+2} b_k \operatorname{Re}(g_{(k)}, g_{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2 \ldots 4n+2. \tag{8}$$

Полагая

$$\tilde{g}(\zeta) = \sum_{k=1}^{4n+2} b_{(k)} g_{(k)}(\zeta),$$

можно ее записать в виде

$$\operatorname{Re}(\tilde{g}, g_{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots 4n+2.$$

Умножая на b_j и складывая, получим, учитывая, что b_j — вещественные:

$$\operatorname{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = 0.$$

Но $\operatorname{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = \operatorname{Re}\|\tilde{g}\|^2 = \|\tilde{g}\|^2$. Отсюда $\tilde{g} = 0$ и, по доказанному выше, $b_k = 0$, $k = 1,2 \dots 4n - 2m$. Система (8) имеет, таким образом, только тривиальное решение. Отсюда следует, что неоднородная система (7) всегда разрешима.

Исследуем сходимость приближенного решения к точному. Если данная функция $g(\zeta)$ достаточно гладкая,[1] то $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ будут непрерывны в Ω. Опираясь на следствия из теоремы Волша и на теорему существования и единственности нашей задачи, мы легко найдем, что $\|g_n - g\| \to 0$. На основании неравенства (3), $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$; в силу теоремы 2 § 63, $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$ равномерно внутри Ω. Наконец, из (4) следует, что равномерно внутри Ω $\psi_n(z) \to \psi(z)$.

Равномерная сходимость будет иметь место в $\bar{\Omega}$, если потребовать, чтобы минимальное значение приняла величина $\|g_n - g\|^2$.

Результаты настоящего параграфа без затруднений переносятся на случай неизотропной среды.

§ 69. Периодическая задача теории упругости

Рассмотрим односвязную область Ω плоскости $z = x + jy$, ограниченную кривой $y = y(x)$, где $y(x)$ — периодическая, непрерывная и достаточное число раз дифференцируемая функция от x. Период $y(x)$ обозначим через L. Пусть к контуру области Ω приложены внешние силы, которые также изменяются периодически, с тем же периодом L. Как нами было установлено,[2] функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть

---

[1] Достаточно, чтобы $g'(\zeta)$ удовлетворяло условию Липшитца с положительным показателем.

[2] С. Г. Михлин [1], § 55.

представлены в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \beta z$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi'(z) + \bar{\beta}\varkappa z. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — периодические, с периодом L, функции, $\varkappa = 3 - 4\sigma$ (σ — коэффициент Пуассона) в условиях плоской деформации и $\varkappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$ в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Наконец,

$$\beta = \frac{i(X+iY)}{(1+\varkappa)L}, \qquad (2)$$

где X и Y суть составляющие по осям x и y главного вектора внешних сил, приложенных к дуге контура, отвечающей периоду, [1] со стороны положительной нормали.

Подставляя (1) и (2) в краевое условие плоской задачи теории упругости

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i\int_{\zeta_0}^{\zeta} (X_\nu + iY_\nu)\, d\sigma, \quad d\sigma = |d\zeta|,$$

где ζ — точка дуги C, X_ν и Y_ν — составляющие напряжений, действующих на эту дугу, мы приведем это условие к виду

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta), \qquad (3)$$

где $f(\zeta)$ — некоторая заданная непрерывная и периодическая функция точки ζ.

Преобразование

$$e^{\frac{2\pi i}{L}z} = t \qquad (4)$$

переводит полосу $0 \leqslant x \leqslant L$ в плоскость t, разрезанную вдоль положительной действительной полуоси, а дугу C — в некоторый замкнутый контур Γ. Будем считать, что упругая среда заполняет область над кривой $y = y(x)$, — тогда часть полосы $0 \leqslant x \leqslant L$, заполненная упругой средой, перейдет в область Σ', расположенную внутри Γ и разрезанную вдоль положительной действительной оси. Функции $\Phi(t) =$

---

[1] Эту дугу мы будем обозначать через C.

$=\varphi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ и $\Psi(t)=\psi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ голоморфны в Σ'. Будучи периодическими относительно z, эти функции принимают одинаковые значения в геометрически совпадающих точках разреза и, следовательно, непрерывно продолжимы через разрез. Но тогда, как известно, эти функции аналитически продолжимы через разрез и голоморфны во всей области Σ, заключенной внутри Γ. Задача сводится к определению голоморфных в Σ функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, удовлетворяющих на Γ краевому условию

$$\Phi(\tau)-2\tau\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)}+\overline{\Psi(\tau)}=F(\tau);$$
$$F(\tau)=f\left(\frac{L}{2\pi i}\ln\tau\right). \tag{5}$$

Мы придем к уравнению (5), если положим в (3)

$$\zeta=\frac{L}{2\pi i}\ln\tau.$$

Мы применим к нашей задаче прием, аналогичный тому, которым воспользовался Д. И. Шерман, [1] давая свой вывод уравнений Лауричелла. Будем искать $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ в виде

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma,\qquad \Phi'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega'(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma.$$

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-t}\,d\sigma+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\sigma\ln|\sigma|}{\sigma-t}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где σ означает комплексную координату точки на Γ и $\omega(\sigma)$ — неизвестная функция точки σ.

Составим теперь выражение

$$\Phi(t)-2\bar{t}\ln|t|\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)},$$

где t — точка внутри Γ:

$$\Phi(t)-2\bar{t}\ln|t|\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma+$$
$$+\frac{\bar{t}\ln|t|}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\bar\sigma-\bar t}\,d\bar\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega(\sigma)}{\bar\sigma-\bar t}\,d\bar\sigma-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar\sigma\ln|\sigma|}{\bar\sigma-\bar t}\,\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar\sigma.$$

---

[1] Д. И. Шерман [1], см. также С. Г. Михлин [1], § 56.

Допустим теперь, что $t \to \tau$, где τ — точка контура Γ. Используя известную теорему о пределе интеграла типа Коши, получим

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau}\ln(\tau)\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} =$$
$$= \omega(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \omega(\sigma)\,d\ln\frac{\sigma-\tau}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma| - \bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\overline{\omega(\sigma)}.$$

В силу уравнения (3), полученное выражение равно $F(\tau)$. Теперь в первом интеграле положим $\sigma - \tau = re^{i\vartheta}$, а второй интеграл возьмем по частям. Мы получим тогда интегральное уравнение, эквивалентное системе двух уравнений, типа Фредгольма с непрерывным ядром:[1]

$$\omega(\tau) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \omega(\sigma)\,d\vartheta +$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\omega(\sigma)}\,\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma| - \bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\bar{\sigma} = F(\tau). \quad (7)$$

Докажем, что уравнение (7) разрешимо, какова бы ни была функция $F(\tau)$. С этой целью рассмотрим однородное уравнение

$$\omega_0(\tau) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \omega_0(\sigma)\,d\vartheta +$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\omega_0(\sigma)}\,\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma| - \bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\bar{\sigma} = 0, \quad (8)$$

и допустим, что оно имеет некоторое решение $\omega_0(\sigma)$. Положим

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_0(\sigma)}{\sigma - t}\,d\sigma,$$

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega_0(\sigma)}}{\sigma - t}\,d\sigma + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma|}{\sigma - t}\,\omega_0'(\sigma)\,d\sigma. \quad (9)$$

[1] Мы получим эту систему, отделив в (7) действительные и мнимые части и приняв за неизвестные $\mathrm{Re}\{\omega(\tau)\}$ и $\mathrm{Im}\{\omega(\tau)\}$.

Эти функции решают однородную задачу теории упругости, поэтому, если мы положим

$$\varphi_0(z) = \Phi\left(e^{\frac{2\pi i}{L}z}\right), \quad \psi_0(z) = \Psi\left(e^{\frac{2\pi i}{L}z}\right),$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi_0'(z),$$

то необходимо

$$\varphi_0(z) = iaz + b, \quad \psi(z) = -\bar{b}$$

и, следовательно, $\psi_0(z) = -iaz - \bar{b}$, где a и b постоянные. Так как $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ периодичны, то $a = 0$ и потому

$$\varphi_0(z) = b, \quad \psi_0(z) = -\bar{b}.$$

Подставив это в (9), мы получим тождества:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega_0(\sigma) - b}{\sigma - t}\,d\sigma = 0,\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma\ln|\sigma|\,\omega_0'(\sigma) + \bar{b}}{\sigma - t}\,d\sigma = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

верные, если t лежит внутри Γ. Отсюда следует, что функции $\delta(t)$ и $\varepsilon(t)$, определенные на Γ равенствами

$$\begin{aligned} i\delta(\sigma) &= \omega_0(\sigma) - b,\\ i\varepsilon(\sigma) &= \overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma\ln|\sigma|\,\omega_0'(\sigma) + \bar{b},\end{aligned} \tag{11}$$

голоморфны вне Γ и равны нулю при $t = \infty$. Исключая из (11) $\omega_0(\sigma)$, получим

$$\delta(\sigma) - 2\bar{\sigma}\ln|\sigma|\,\overline{\delta'(\sigma)} + \overline{\varepsilon(\sigma)} - 2bi = 0. \tag{12}$$

Область плоскости t, лежащая вне Γ, отвечает на плоскости z части полосы $0 \leqslant x \leqslant L$, лежащей под C. Уравнение (12) показывает, что $\delta(t)$ и $\varepsilon(t) + 2\bar{b}i$ решают периодическую задачу теории упругости при отсутствии внешних сил для области, лежащей под кривой $y = y(x)$. Но тогда

$$\delta(t) = b', \quad \varepsilon(t) + 2\bar{b}i = -\bar{b}'.$$

Так как $\delta(\infty)=0$, то $b'=0$ и, следовательно, $\delta(\sigma)\equiv 0$. Далее, $\varepsilon(\infty)=0$ и, поэтому $b=0$; теперь из (11) следует $\omega_0(\sigma)\equiv 0$. Интегральное однородное уравнение (8) имеет единственное решение $\omega_0(\sigma)\equiv 0$. Отсюда следует, что уравнение (7) имеет решение, и притом единственное, какова бы ни была его правая часть.

Отделив в (7) вещественные и мнимые части и приняв за неизвестные функции $\omega_1(\tau)=\operatorname{Re}\{\omega(\tau)\}$ и $\omega_2(\tau)=\operatorname{Im}\{\omega(\tau)\}$, мы получим систему фредгольмовых уравнений вида

$$\begin{gathered}\omega_1(\tau)+\int_\Gamma \{K_{11}(\tau,\sigma)\,\omega_1(\sigma)+K_{12}(\tau,\sigma)\,\omega_2(\sigma)\}\,ds_\sigma=F_1(\tau),\\ \omega_2(\tau)+\int_\Gamma \{K_{21}(\tau,\sigma)\,\omega_1(\sigma)+K_{22}(\tau,\sigma)\,\omega_2(\sigma)\}\,ds_\sigma=F_2(\tau), \qquad (13)\\ ds_\sigma=|d\sigma|,\end{gathered}$$

где ядра $K_{mn}(\tau,\sigma)$ непрерывны и где обозначено

$$F_1(\tau)=\operatorname{Re}\{F(\tau)\},\quad F_2(\tau)=\operatorname{Im}\{F(\tau)\}.$$

Как мы доказали, система (13) разрешима единственным образом. Разрешающие ядра этой системы, которые мы обозначим через $R_{mn}(\tau,\sigma)$, непрерывны в силу непрерывности ядер $K_{mn}(\tau,\sigma)$. Решение системы (13) имеет вид

$$\begin{gathered}\omega_1(\tau)=F_1(\tau)+\int_\Gamma \{R_{11}(\tau,\sigma)\,F_1(\sigma)+R_{12}(\tau,\sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma,\\ \omega_2(\tau)=F_2(\tau)+\int_\Gamma \{R_{21}(\tau,\sigma)\,F_1(\sigma)+R_{22}(\tau,\sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma.\end{gathered}$$

Второе выражение умножим на i и прибавим к первому. Обозначая $R_{11}+iR_{21}=R_1$, $R_{12}+iR_{22}=R_2$, будем иметь

$$\omega(\tau)=F(\tau)+\int_\Gamma \{R_1(\tau,\sigma)\,F_1(\sigma)+R_2(\tau,\sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma. \qquad (14)$$

В качестве основного пространства нашей задачи введем гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$. [1] Ядра R_1 и R_2, будучи

[1] С тем же успехом можно ввести пространство $L_2(p;\,\Gamma)$ с любым весом p, ограниченным сверху и снизу положительными числами. Мы этим воспользуемся в § 70.

непрерывными, ограничены. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} |R_k(\tau, \sigma)|^2 ds_\sigma ds_\tau < B^2, \quad k = 1, 2,$$

где B — некоторая постоянная. Из формулы (14) следует, что $\|\omega\| \leqslant \|F\| + B(\|F_1\| + \|F_2\|)$. Далее,

$$\|F\|^2 = \int\limits_{\Gamma} |F(\tau)|^2 ds_\tau = \int\limits_{\Gamma} \{F_1^2(\tau) + F_2^2(\tau)\} ds_\tau = \|F_1\|^2 + \|F_2\|^2.$$

Отсюда $\|F_1\| \leqslant \|F\|$, $\|F_2\| \leqslant \|F\|$. Это дает нам

$$\|\omega\| \leqslant B_1 \|F\|, \quad B_1 = 1 + 2B. \tag{15}$$

Из второй формулы (6) следует, что во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω, имеют место оценки вида[1]

$$|\Phi(t)| \leqslant D_1 \|\omega\|,$$
$$|\Psi(t)| \leqslant D_1 \|\omega\|, \quad D_1, D_2 = \text{const}.$$

или, если воспользоваться оценкой (15),

$$|\Phi(t)| \leqslant D \|F\|,$$
$$|\Psi(t)| \leqslant D' \|F\|. \tag{16}$$

Далее, на основании той же формулы (15) и леммы 1 § 63

$$\|\Phi\| \leqslant D_0 \|F\|, \quad D_0 = \text{const}. \tag{17}$$

Сделаем теперь следующее замечание. Из краевого условия (5) $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются не вполне однозначно, — можно заменить $\Phi(t)$ через $\Phi(t) + A$, а $\Psi(t)$ — через $\Psi(t) - \overline{A}$, где A — произвольная постоянная. При нашем способе решения этот произвол устранен благодаря специальному представлению функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ по формулам (6), и именно для функций, определяемых этими формулами, установлены оценки (16) и (17). Докажем теперь, что указанные оценки

---

[1] Чтобы получить оценку для $|\Psi(t)|$, следует сперва второй интеграл в выражении $\Psi(t)$ взять по частям.

сохраняют силу (разумеется, при измененных значениях постоянных D, D' и D_0), если нормировать $\Phi(t)$ так, чтобы $\Phi(0)=0$. Действительно, чтобы добиться такой нормировки, достаточно из функции $\Phi(t)$, определяемой формулой (6), вычесть постоянную

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma.$$

К функции $\Psi(t)$ необходимо прибавить

$$\bar{A}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}}\,d\bar{\sigma}.$$

Обозначая новые функции через $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$, имеем

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma=\Phi(t)-A,$$

$$\Psi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-t}\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\sigma\ln(\sigma)}{\sigma-t}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}}\,d\bar{\sigma}=\Psi(t)+\bar{A}.$$

Теперь

$$\|\Phi_1(t)|\leqslant\|\Phi(t)\|+\|A\|\leqslant D_0\|F\|+\|A\|.$$

Далее,

$$\|A\|^2=\int_\Gamma |A|^2 ds_\sigma=|A|^2 l, \tag{18}$$

где l — длина контура Г. С другой стороны,

$$|A|^2\leqslant\frac{1}{(2\pi)^2}\left\{\int_\Gamma \frac{|\omega(\sigma)|}{|\sigma|}\,ds_\sigma\right\}^2\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \frac{ds_\sigma}{|\sigma|^2}\int_\Gamma |\omega|(\sigma)|^2 ds_\sigma.$$

Обозначим через δ кратчайшее расстояние от начала координат до Г. Тогда $\frac{1}{\omega(\sigma)}\leqslant\frac{1}{\delta}$, и

$$|A|^2\leqslant\frac{l}{4\pi^2\delta^2}\|\omega\|^2.$$

Подставив это в (18) и воспользовавшись оценкой (15), мы получим $\|A\| \leqslant \frac{B_1 l}{2\pi\delta} \|F\|$. Отсюда

$$\|\Phi_1\| \leqslant C_0 \|F\|, \quad C_0 = D_0 + \frac{B_1 l}{2\pi\delta}.$$

Таким образом, $\Phi_1(t)$ имеет оценку типа (17). Точно так же доказывается, что $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ имеют оценку типа (16).

Оценки (16) и (17) позволяют обосновать применение метода наименьших квадратов к нашей задаче. Положим приближенно

$$\Phi(t) \approx \Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k, \quad \Psi(t) \approx \Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k;$$

обозначим

$$F_n(\tau) = \Phi_n(\tau) - 2\bar{\tau} \ln|\tau| \overline{\Phi_n'(\tau)} + \overline{\Psi_n(\tau)}$$

и определим коэффициенты a_k и b_k из условия

$$\|F - F_n\|^2 = \min. \tag{19}$$

Повторяя рассуждения § 68, мы найдем, что $\|F - F_n\| \to 0$. Отсюда, на основании оценок (16) и (17) вытекает, что $\|\Phi - \Phi_n\| \to 0$ и что $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$, $\Psi_n(t) \to \Psi(t)$ равномерно во всякой области, целиком лежащей внутри Γ.

§ 70. Напряжения в упругой области, ограниченной синусоидой

Для иллюстрации метода рассмотрим случай, когда упругая среда заполняет область, расположенную над синусоидой $y = \sin x$.

Для упрощения вычислений допустим, что к границе области приложены только нормальные усилия, которые изменяются периодически по закону

$$Y_\nu = -\frac{q \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad q = \text{const}. \tag{1}$$

Тогда

$$f(s) = i \int (X_\nu + iY_\nu)\, ds = q \sin x. \tag{2}$$

Преобразование

$$t = e^{iz} \tag{3}$$

переводит дугу синусоиды $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ в контур Γ, уравнение которого (здесь x играет роль параметра)

$$\tau = e^{i(x + i\sin x)} = e^{-\sin x}(\cos x + i\sin x). \tag{4}$$

Уравнение (5) § 69 в нашем случае принимает вид

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau}\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = -q\ln(\tau). \tag{5}$$

Контур Γ симметричен относительно мнимой оси, поэтому если точка τ лежит на Γ, то на Γ лежит и точка $-\bar{\tau}$. Заменим в (5) τ на $-\bar{\tau}$ и в полученном равенстве заменим все члены сопряженными:

$$\overline{\Phi(-\bar{\tau})} + 2\bar{\tau}\ln|\tau|\Phi'(-\bar{\tau}) + \Psi(-\bar{\tau}) = -p\ln|\tau|. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что, наряду с функциями $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, нашу задачу решают также функции $\overline{\Phi(-\bar{t})}$ и $\overline{\Psi(-\bar{t})}$. Но функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются единственным образом, если только выполнено условие нормировки, например, вида $\Phi(0) = 0$. Отсюда следует, что

$$\overline{\Phi(-\bar{t})} = \Phi(t), \quad \overline{\Psi(-\bar{t})} = \Psi(t). \tag{7}$$

Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ разложены в ряды по полиномам

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}z^k, \quad \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{nk}z^k,$$

то в силу (7) можно считать, что

$$a_{nk} = (-1)^k\bar{a}_{nk}, \quad b_{nk} = (-1)^k\bar{b}_{nk}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что коэффициенты при чётных степенях t — вещественные, а при нечетных — чисто-минимые. Приближенные значения $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ будем искать в виде полинома второй степени. В силу сказанного выше, их можно искать в виде

$$\Phi(t) \approx \Phi_2(t) = ia_1t + a_2t^2,$$
$$\Psi(t) \approx \Psi_2(t) = a_3 + ia_4t + a_5t^2,$$

где коэффициенты a_1, a_2,.. a_5 — вещественные. Условие (19) § 69 принимает вид

$$\|ia_1\tau + a_2\tau^2 - 2\bar{\tau}\ln|\tau|(-ia_1 + 2a_2\bar{\tau}) + a_3 - ia_4\bar{\tau} + a_5\bar{\tau}^2 + \\ + q\ln|\tau|\,\|^2 = \min. \quad (9)$$

Если ввести обозначения

$$\varphi_1(\tau) = i(\tau + 2\bar{\tau}\ln|\tau|), \quad \varphi_2|\tau| = \tau^2 - 4\bar{\tau}^2\ln|\tau|, \\ \varphi_3|\tau| = 1, \quad \varphi_4|\tau| = -i\bar{\tau}, \quad \varphi_5|\tau| = \bar{\tau}^2, \quad (10)$$

то условие (9) принимает более простой вид

$$\|\sum_{k=1}^{5} a_k\varphi_k + q\ln|\tau|\|^2 = \min. \quad (11)$$

Отсюда, учитывая, что коэффициенты a_k — вещественные, мы придем к системе

$$\sum_{k=1}^{5} a_k \operatorname{Re}\{(\varphi_k, \varphi_j)\} = -q\operatorname{Re}\{(\ln|\tau|, \varphi_j)\}, j = 1, 2, \ldots 5. \quad (12)$$

Введем пространство $L_2(p, \Gamma)$ с весом

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Тогда вычисление интегралов, входящих в коэффициенты системы (12), может быть довольно просто выполнено с помощью известной формулы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta = i^m J_m(z),$$

верной при m целом. Здесь J_m — функция Бесселя первого рода и индекса m. Заменив здесь z на in, мы приведем эту формулу к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-n\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta = i^m J_m(in).$$

Вычислим, например, величину (φ_1, φ_1), которая является коэффициентом при a_1 в первом уравнении системы (12).

Имеем

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int\limits_{\Gamma} (\tau + 2\bar{\tau} \ln|\tau|)\,(\bar{\tau} + 2\tau \ln|\tau|\,\frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \{\,|\tau|^2 + 4|\tau|^2 \ln^2|\tau| + 2(\tau^2 + \bar{\tau}^2)\ln|\tau|\,\}\,\frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

Введем в качестве переменной интегрирования x по формуле $\tau = e^{i(x + i\sin x)}$. Тогда

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int\limits_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(1 + 4\sin^2 x - 4\sin x\cos 2x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(3 + 2\sin x - 2\cos 2x - 2\sin 3x)\,dx.$$

Сделаем подстановку $x = \frac{\pi}{2} + y$; в силу периодичности подинтегральной функции можно принять за пределы интегрирования $-\pi$ и π:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-3\cos y}(3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\,dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} e^{-3\cos y}(3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\,dy =$$

$$= 2\pi\,(3J_0(3i) + 2iJ_1(3i) - 2J_2(3i) - 2iJ_3(3i).$$

По таблицам Янке и Эмде ([1], стр, 342) находим $(\varphi_1, \varphi_1) = 2\pi\,(3.4,8808 - 2.3,9534 + 2.2,2452 - 2.0,9598) = 18,6128\pi$. Точно так же

$$(\varphi_1, \varphi_2) = i\int\limits_{\Gamma} (\tau + 2\bar{\tau}\ln|\tau|)\,(\bar{\tau}^2 - 4\tau^2 \ln|\tau|)\,\frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-4\sin x}\{\,ie^{-ix} - (2ie^{-3ix} - 4ie^{3ix})\sin x - 8ie^{ix}\sin^2 x\}\,dx.$$

Отделяем вещественные части:

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^{2\pi} e^{-4\sin x}\{\sin x - 6\sin 3x \sin x + 8\sin^3 x\}\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-4\sin x}(7\sin x - 3\cos 2x + 3\cos 4x - 2\sin 3x\}\,dx,$$

что после подстановки $x = \frac{\pi}{2} + y$ дает

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) =$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{-4\cos y}(7\cos y + 3\cos 2y + 2\cos 3y + 3\cos 4y)\,dy =$$

$$= 2\pi(-7.9{,}7595 + 3.6{,}4222 - 2.3{,}3373 + 3.1{,}4163) =$$

$$= -102{,}9512\,\pi.$$

Аналогично определяются и остальные коэффициенты.

Система (12) имеет следующий вид

$$18{,}6128\,a_1 - 102{,}9512\,a_2 - 2{,}7558\,a_3 -$$
$$- 11{,}3232\,a_4 + 28{,}7736\,a_5 = 2{,}0160\,q$$

$$-102{,}9512\,a_1 + 670{,}4942\,a_2 + 15{,}1624\,a_3 +$$
$$+ 64{,}2218\,a_4 - 184{,}4684\,a_5 = -14{,}4806\,q$$

$$-2{,}7558a_1 + 15{,}1624a_2 + 2{,}5322a_3 +$$
$$+ 3{,}1812\,a_4 - 4{,}4904a_5 = -1{,}1304\,q$$

$$-11{,}3232\,a_1 + 64{,}2218\,a_2 + 3{,}1812\,a_3 +$$
$$+ 9{,}7616\,a_4 - 19{,}5190\,a_5 = -2{,}9685\,q$$

$$28{,}7736\,a_1 - 184{,}4684a_2 - 4{,}4904\,a_3 -$$
$$- 19{,}5190\,a_4 + 54{,}4798\,a_5 = 4{,}9132\,q$$

Результаты вычислений даны в таблице (множитель q опущен); в строках 1—4 таблицы приведены значения коэффициентов, полученные из усеченных систем.

	1	2	3	4	5	6
1	0,10831					1,1834
2	—0,073944	—0,032951				1,0737
3	—0,13385	—0,033264	—0,39292			0,7458
4	—0,38868	—0,023206	0,044360	—0,61675		0,0687
5	—0,39046	—0,02542	0,04861	—0,62429	—0,00933	0,0685

В столбце 6 приведены значения величины (11), отвечающие построенным приближениям. Отметим, что

$$\| \ln | \tau | \|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x e^{-\sin x} dx = 1,4018\pi = 4,4039.$$

Отсюда видно, что пятое приближение удовлетворяет в среднем краевым условиям с погрешностью, равной

$$\sqrt{\frac{0,0685}{4,4039}} = 12,5\%.$$

Близость четвертого и пятого приближений, поэтому, не свидетельствует о том, что эти приближения очень близки к пределу; эта близость показывает лишь, что член t^2 входит в точное значение $\Psi(t)$ с малым коэффициентом, или, может быть, не входит вовсе.

§ 71. Применение метода наименьших квадратов к проблеме собственных значений

Рассмотрим самосопряженный оператор Au, относительно которого известно, что его спектр состоит только из собственных чисел. Пусть эти числа, занумерованные в каком-либо порядке, будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ Если число μ — вещественное, то, очевидно, оператор $Bu = Au - \mu u$ также самосопряженный, и его спектр состоит из собственных чисел $\lambda_1 - \mu, \lambda_2 - \mu, \ldots, \lambda_n - \mu, \ldots$ Докажем, что собственные числа оператора $B^2 u = (A - \mu E)^2 u$ (E — тождественный оператор) суть $(\lambda_1 - \mu)^2, (\lambda_2 - \mu)^2, \ldots (\lambda_n - \mu)^2, \ldots$ Действительно, пусть φ_n — собственный элемент оператора B, отвечающий числу $\lambda_n - \mu$:

$$B\varphi_n = (\lambda_n - \mu)\varphi_n.$$

Беря от обеих частей этого равенства оператор B, получим

$$B^2\varphi_n = (\lambda_n - \mu) B\varphi_n = (\lambda_n - \mu)^2\varphi_n.$$

Отсюда следует, что $(\lambda_n - \mu)^2$ есть собственное число оператора B^2. С другой стороны, пусть λ' — собственное число оператора B^2 и φ' — соответствующий собственный элемент

$$B^2\varphi' - \lambda'\varphi' = 0.$$

Это можно представить в виде

$$(B+\sqrt{\lambda'}E)(B-\sqrt{\lambda'}E)\,\varphi'=0.$$

Обозначим $(B-\sqrt{\lambda'}E)\,\varphi'=\omega$. Может случиться, что $\omega=0$, тогда $\sqrt{\lambda'}$ есть собственное число оператора B. Если же $\omega\neq 0$, то, во всяком случае, $(B+\sqrt{\lambda'}E)\,\omega=0$, откуда следует, что $-\sqrt{\lambda'}$ есть собственное число того же оператора B. Таким образом, либо $+\sqrt{\lambda'}$, либо $-\sqrt{\lambda'}$ находится среди чисел $\lambda_1-\mu$, $\lambda_2-\mu,\ldots$ $\lambda_n-\mu,\ldots$; в обоих случаях λ' находится среди чисел $(\lambda_1-\mu)^2$, $(\lambda_2-\mu)^2\ldots$ $(\lambda_n-\mu)^2\ldots$.

Если спектр самосопряженного оператора B состоит только из собственных чисел, то спектр оператора B^2 также состоит только из собственных чисел. [1] Из сказанного выше вытекает, что наименьшее собственное число оператора B^2 равно наименьшей из величин $(\lambda_n-\mu)^2$. Пусть это будет $(\lambda_j-\mu)^2$. По теореме 1 § 30,

$$(\lambda_j-\mu)^2=\min\,(B^2u,\ u) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$(u,\ u)=1. \tag{2}$$

Но оператор B — самосопряженный, поэтому

$$(B^2u,\ u)=(Bu,\ Bu)=\|Bu\|^2=\|Au-\mu u\|^2 \tag{3}$$

и мы приходим к следующей теореме.

---

[1] Это можно доказать так: спектр оператора B состоит только из собственных чисел $\nu_k=\lambda_k-\mu$. Как было доказано выше, собственные числа оператора B^2 суть числа ν_k^2. Докажем, что все остальные значения параметра — правильные для оператора B^2. Пусть $\lambda\neq\nu_k^2$. Чтобы установить, что значение λ — правильное, достаточно показать, что оператор $(B-\lambda E)^{-1}$ существует, так как в нашем случае этот оператор не существует во всех точках спектра. Так как $\sqrt{\lambda}\neq\pm\nu_k$, то значения $+\sqrt{\lambda}$ и $-\sqrt{\lambda}$ — правильные для оператора B. Это значит, что существуют операторы $(B-\sqrt{\lambda}E)^{-1}$ и $(B+\sqrt{\lambda}E)^{-1}$. Далее,

$$(B^2-\lambda E)(B-\sqrt{\lambda}E)^{-1}(B+\sqrt{\lambda}E)^{-1}=E,$$

$$(B-\sqrt{\lambda}E)^{-1}(B+\sqrt{\lambda}E)^{-1}(B^2-\lambda E)=E.$$

Эти равенства показывают, что оператор $(B^2-\lambda E)^{-1}$ существует, именно, он равен произведению $(B-\sqrt{\lambda}E)^{-1}(B+\sqrt{\lambda}E)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор, спектр которого состоит только из собственных чисел, и пусть μ — произвольное вещественное число. Тогда минимум выражения*

$$\|Au-\mu u\|^2 \tag{4}$$

при дополнительном условии $(u, u)=1$ равен $(\lambda_j-\mu)^2$, где λ_j — собственное число оператора A, ближайшее к μ.

Нетрудно установить, что минимум выражения (4) достигается при $u=\varphi_j$, где φ_j — нормированный собственный элемент оператора A, отвечающий собственному числу λ_j.

Теорема 1 позволяет дать способ уточненного определения любого собственного числа λ_j оператора A, если известно приближенное значение λ_j, более близкое к λ_j, чем к любому соседнему собственному числу. Пусть μ — указанное приближенное значение. Чтобы определить значение λ_j, достаточно найти $\delta^2=\min\|Au-\mu u\|^2$, $\|u\|=1$. Тогда $\lambda_j=\mu\pm\delta$; знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли μ приближенным значением с недостатком или с избытком. Для приближенного вычисления величины δ можно воспользоваться обычным приемом. Выберем последовательность элементов $\{\psi_n\}$, принадлежащих области определения оператора A. Мы потребуем, чтобы любые n элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ были линейно-независимы, и чтобы последовательность $\{\psi_n\}$ обладала как полнотой в данном гильбертовом пространстве, так и A-полнотой (см. § 59). Положим приближенно

$$u\approx u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k$$

и определим постоянные a_k из условий

$$\|u\|^2=\sum_{k,\,m=1}^{n}a_k\bar{a}_m(\psi_k, \psi_m)=1 \tag{5}$$

$$\|Au-\mu u\|^2=\sum_{k,\,m=1}^{n}a_k\bar{a}_m(A\psi_k-\mu\psi_k, A\psi_m-\mu\psi_m)=\min. \tag{6}$$

Обычным способом мы приходим к системе линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(\alpha_{km}-\varkappa\beta_{km})=0, \quad m=1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

где введены обозначения

$$\alpha_{km} = (A\psi_k - \mu\psi_k, \quad A\psi_m - \mu\psi_m),$$
$$\beta_{km} = (\psi_k, \psi_m)$$

и через $\varkappa$ обозначен множитель Лагранжа. Исключая из системы (7) неизвестные a_k, мы получим уравнение для определения множителя $\varkappa$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varkappa\beta_{11}, & \alpha_{12} - \varkappa\beta_{12}, & \ldots \alpha_{1n} - \varkappa\beta_{1n} \\ \alpha_{21} - \varkappa\beta_{21}, & \alpha_{22} - \varkappa\beta_{22}, & \ldots \alpha_{2n} - \varkappa\beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} - \varkappa\beta_{n1}, & \alpha_{n2} - \varkappa\beta_{n2}, & \ldots \alpha_{nn} - \varkappa\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Систему $\{\psi_j\}$ можно ортонормировать, тогда

$$\beta_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m, \end{cases}$$

и уравнение (8) принимает более простой вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varkappa, & \alpha_{12}, & \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \varkappa, & \ldots \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots \alpha_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0. \tag{8$_1$}$$

Оператор Au — самосопряженный, а число μ — вещественное. Отсюда следует, что $\alpha_{km} = \bar{\alpha}_{mk}$, т. е. матрица $\|\alpha_{mk}\|_{k, m=1}^{k, m=n}$ — эрмитова. Из этого, в свою очередь, следует, что все корни уравнения (8_1) или, что то же, уравнения (8) — вещественные. Подставив какой-либо корень этого уравнения в (7), мы сделаем определитель этой системы равным нулю; значения неизвестных определятся тогда с точностью до произвольного множителя, который определится из уравнения (5).

Уравнение (7) умножим на a_m и просуммируем по всем m. Используя (6) и (7), мы получим

$$\varkappa = \|Au_n - \mu u_n\|^2.$$

Отсюда видно, что $\min \|Au_n - \mu u_n\|^2$ равен наименьшему из корней уравнения (8). Тем самым отпадает надобность в определении постоянных a_k; уточненное значение собственного числа λ_j мы найдем по формуле

$$\lambda_j \approx \lambda_j^{(n)} = \mu \pm \sqrt{\varkappa^{(n)}},$$

где $\varkappa^{(n)}$ означает наименьший из корней уравнения (8); знак плюс или минус, как и выше, выбирается в зависимости от того, будет ли μ приближенным значением с недостатком или с избытком.

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_j^{(n)} = \lambda_j.$$

Теорема 1 настоящего параграфа доказана в статье Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1] применительно к двум случаям, когда A есть либо симметричный оператор Фредгольма, либо обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка, самосопряженный в смысле Лагранжа и определенный на множестве функций, исчезающих на концах заданного промежутка. В этой работе авторы приводят также некоторые оценки разности $|\lambda_j - \lambda_j^{(n)}|$ в зависимости от n.

§ 72. Пример

Для иллюстрации метода рассмотрим задачу о собственных числах уравнения

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \tag{1}$$

при краевых условиях

$$u(0) = 0; \quad u'(1) + u(1) = 0. \tag{2}$$

Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x, \quad \nu = \sqrt{\lambda}.$$

Краевые условия (2) дают $C_1 = 0$ и

$$\nu + \operatorname{tg} \nu = 0, \tag{3}$$

соответствующая собственная функция есть $C_2 \sin \nu x$; постоянную C_2 можно определить, например, так чтобы указанная функция была нормирована.

Корни уравнения (3) можно найти графически, как точки пересечения прямой $y=-x$ и тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$; квадраты этих корней дадут нам собственные числа задачи. Мы попытаемся здесь определить наименьшее собственное число, пользуясь методом наименьших квадратов. Нетрудно видеть, что собственные числа нашей задачи положительны. Это можно установить, доказав, что уравнение (3) не имеет комплексных корней; проще, однако, поступить так: умножим (1) на $\overline{u(x)}$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы:

$$-\int_0^1 u''(x)\overline{u(x)}\,dx=\lambda\int_0^1 |u(x)|^2 dx. \tag{4}$$

Интеграл слева возьмем по частям:

$$-\int_0^1 u''(x)\overline{u(x)}\,dx=-u'(x)\overline{u(x)}\Big|_0^1+\int_0^1 |u'(x)|^2 dx.$$

В силу краевых условий (2), внеинтегральный член равен $-u'(1)u(1)=|u(1)|^2$. Теперь из (4) следует

$$\lambda=\frac{|u(1)|^2+\int_0^1 |u'(x)|^2 dx}{\int_0^1 |u^2(x)|\,dx}\geqslant 0.$$

Как легко проверить, $\lambda=0$ не есть собственное значение нашей задачи, поэтому $\lambda>0$.

Положим $\mu=0$. Ближайшее к нулю собственное число есть наименьшее число λ_1. По теореме 1 § 71,

$$\lambda_1^2=\min\int_0^1 [u''(x)]^2 dx \tag{5}$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx=1.$$

В качестве координатных функций возьмем полиномы, удовлетворяющие краевым условиям (2). Так как нам известно, что собственная функция — нечетная, то достаточно ограничиться полиномами нечетной степени. Нетрудно проверить, что полиномы

$$\psi_n(x) = x^n - \frac{n+1}{n+3} x^{n+2}, \quad n = 1,\ 3,\ 5\ \ldots$$

удовлетворяют условиям (2). Ограничиваясь тремя членами, положим

$$u \approx a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + a_3\psi_3.$$

Уравнение (8) § 71 принимает вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \frac{71}{420}\varkappa, & 2 - \frac{19}{270}\varkappa, & \frac{3}{2} - \frac{211}{5544}\varkappa \\ 2 - \frac{19}{270}\varkappa, & \frac{340}{63} - \frac{273}{2079}\varkappa, & \frac{39}{7} - \frac{107}{5148}\varkappa \\ \frac{3}{2} - \frac{211}{5544}\varkappa, & \frac{39}{7} - \frac{107}{5148}\varkappa, & \frac{2263}{308} - \frac{149}{11440}\varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

или, по раскрытии определителя,

$$-0{,}25547 \cdot 10^{-6}\varkappa^3 + 0{,}193776 \cdot 10^{-2}\varkappa^2 - 1{,}0794647\varkappa + \\ + 17{,}731598 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения $\varkappa_1 = 16{,}940326$, откуда по формуле (9) § 71

$$\lambda_1 = \sqrt{\varkappa_1} = 4{,}11586.$$

Значение $\nu_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2{,}02876$ удовлетворяет уравнению (3) с точностью до единицы последнего знака.

В. СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Здесь мы сформулируем метод наименьших квадратов в форме, несколько менее общей, чем в основном тексте, но достаточно удобной для большинства приложений.

2. Пусть ставится задача об отыскании одной или нескольких функций от некоторого числа независимых переменных, и пусть эти функции, которые мы обозначим через

u_1, u_2, ... u_m, удовлетворяют двум системам линейных уравнений: однородной

$$K_j(u_1,\ u_2,\ \ldots u_m) = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots m \tag{1}$$

и неоднородной

$$G_j(u_1,\ u_2,\ \ldots u_m) = b_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots m. \tag{2}$$

Будем трактовать совокупности $(u_1, u_2, \ldots u_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots b_m)$ как элементы u и b некоторого гильбертова пространства H. Тогда совокупности операторов K_j и G_j можно трактовать как операторы K и G в том же пространстве.

3. Как выбирать пространство H, остается в значительной мере произвольным; этим произволом можно воспользоваться для того, чтобы упростить вычисления или получить более точные результаты.

4. Метод наименьших квадратов состоит в следующем:

а) строим последовательность $\{\varphi^{(k)}\} = \{(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots, \varphi_m^{(k)})\}$, $k = 1, 2, \ldots$ функций, удовлетворяющих однородной системе (1);

б) приближенное решение задачи строим в виде

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi^{(k)},$$

или, подробнее,

$$u_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_j^{(k)},$$

где a_k — постоянные. Эти постоянные определяем из условия

$$\| Gu^{(n)} - b \|^2 = \min,$$

или, что то же, из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk} a_k = (b,\ G\varphi^{(j)}),$$

где

$$A_{jk} = (G\varphi^{(k)},\ G\varphi^{(j)}).$$

5. Конкретизация метода для некоторых частных случаев.

а) Пусть ищется функция u, удовлетворяющая неоднородному дифференциальному уравнению

$$Lu = f(P) \tag{3}$$

в некоторой области Ω и однородному краевому условию

$$\Gamma u = 0 \tag{4}$$

на границе S этой области. В этом случае $m = 1$; отождествим Γ с K и L с G. Функции $\varphi^{(k)}$ должны удовлетворять краевому условию (4)

$$\Gamma\varphi^{(k)} = 0;$$

в качестве H можно выбрать, например, пространство $L_2(\Omega)$, в котором скалярное произведение и норма таковы:

$$(u, v) = \int_\Omega u(P)\overline{U(P)}\, d\Omega; \quad \|u\|^2 = \int_\Omega |u(P)|^2 d\Omega.$$

Коэффициенты a_k определяются в этом случае из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_\Omega L\varphi^{(k)} \cdot \overline{L\varphi^{(j)}}\, d\Omega = \int_\Omega f(P)\, \overline{L\varphi^{(j)}}\, d\Omega; \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

б) Если функция u удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$Lu = 0 \tag{5}$$

и неоднородному краевому условию

$$\Gamma u = b, \tag{6}$$

то мы отождествим L с K, а Γ — с G. В этом случае $\varphi^{(k)}$ суть интегралы дифференциального уравнения (5); в качестве H можно взять пространство $L_2(S)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S u\bar{v}\, dS$$

и нормой

$$\|u\|^2 = \int_S |u|^2 dS.$$

Коэффициенты a_k теперь определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_S \Gamma\varphi^{(k)} \cdot \overline{\Gamma\varphi^{(j)}}\, dS = \int_S b\overline{\Gamma\varphi^{(j)}}\, dS; \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

6. Сходимость метода имеет место, если выполнены следующие условия:

а) поставленная задача имеет решение, принадлежащее выбранному пространству H;

б) последовательность $\{\varphi^{(k)}\}$ полна в следующем смысле: если $u=(u_1, u_2, \ldots u_m)$ — произвольное решение однородной системы (1), то по заданному числу $\varepsilon>0$ можно найти числа n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\| Gu - G(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi^{(k)}) \| < \varepsilon;$$

в) любые n элементов $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots \varphi^{(n)}$ линейно-независимы;

г) существует такая постоянная $C>0$, что

$$\|u\| \leqslant C \| G(u) \|,$$

если только u удовлетворяет однородной системе (1).

Пренебрежение любым из перечисленных условий, особенно условием б), может повести к грубым ошибкам.

7. Ряд задач, к которым применим метод наименьших квадратов, подробно проанализирован в §§ 61—72.

ГЛАВА VII

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

§ 73. Метод сеток

Идея, лежащая в основе всех конечно-разностных методов, очень проста. Как известно, производная любого порядка может быть получена как предел отношения соответствующей „конечной разности" функции к произведениям подходящих степеней приращений независимых переменных. Так, например,

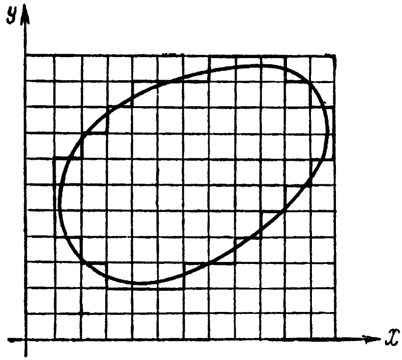
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y, z, \ldots) - u(x, y, z, \ldots)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y, z, \ldots) - 2u(x, y, z, \ldots) + u(x-h, y, z, \ldots)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lim_{h,\, k \to 0} \frac{u(x+h, y+k, z, \ldots) - u(x+h, y, z, \ldots) - u(x, y+k, z, \ldots) + u(x, y, z, \ldots)}{hk}$$

и т. д. Отсюда следует, что при малых приращениях независимых переменных производные близки к соответствующим отношениям. Заменяя производные по всем или по некоторым переменным отношением разностей, мы резко упрощаем структуру данного дифференциального уравнения.

Из конечно-разностных методов наибольшее применение получил метод сеток. Мы поясним его на одном из простейших примеров — на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости. Пусть требуется найти гармоническую в области Ω функцию, принимающую на контуре S заданные значения. Построим на плоскости (x,y) квадратную сетку, проведя прямые, параллельные осям x и y и отстоящие друг от друга на равном расстоянии h (черт. 11). Из сторон квадратов сетки построим контур S_h, по возможности хорошо аппроксимирующий данный контур S. Контур S_h ограничивает некоторую область Ω_h, близкую к Ω.



Черт. 11.

Будем искать значения неизвестной гармонической функции не во всей области Ω, а только в узлах[1] Ω_h. Точно так же будем считать функцию заданной не на S, а в узлах S_h; для этого мы перенесем данные значения функции u с S на S_h, полагая, например, что в любом узле P контура S_h функция принимает то же значение, что и в точке контура P', ближайшей к P. В точках Ω_h заменим частные производные отношениями разностей. Так, если $P(x, y) \in \Omega_h$, то полагаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + (x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}$$

Уравнение Лапласа в точке P заменяется следующим алгебраическим уравнением

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + \\ + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0. \quad (1)$$

Таких уравнений столько, сколько точек в Ω_h. Уравнение (1) — однородное, если все точки сетки, соседние с P, входят в Ω_h, и неоднородное, если некоторые из соседних с P точек

[1] Узлами называются вершины сетки.

принадлежат S_h. Таким образом, по методу сеток уравнение Лапласа заменяется системой весьма большого числа линейных алгебраических уравнений.

Вместо квадратной сетки можно воспользоваться прямоугольной, беря „шаг" сетки различным в направлении различных осей. Можно воспользоваться сетками многоугольными или даже криволинейными. Само собой разумеется, метод сеток можно применять к решению дифференциальных уравнений любого порядка с любым числом независимых переменных и неизвестных функций. Тип уравнения также не играет особой роли — метод сеток успешно применяется к решению уравнений как эллиптического, так и гиперболического и параболического типов.

Метод сеток породил огромную литературу, в которой подробно исследованы многие и теоретические вопросы и вопросы приложений метода сеток. Мы не будем поэтому касаться их в нашей книге и ограничимся только кратким перечнем наиболее важных работ и необходимыми литературными ссылками. Трудно сказать, когда метод сеток был применен впервые. Во всяком случае, известный метод Эйлера приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях по существу является разновидностью метода сеток. Однако широкого развития метод достиг в XX веке. Широкому распространению метода содействовала его простота и универсальность: на трудности вычислений мало отражается тот или иной вид границы области или краевых условий; мало сказываются также свойства коэффициентов уравнения. В инженерной практике метод сеток широко применяется для расчета упругих систем; упомянем в связи с этим книгу Г. Маркуса [1] и, особенно, недавно вышедшую монографию П. М. Варвака [1], в которых содержится ряд интересных приложений метода сеток к задачам теории упругости; в монографии П. М. Варвака приведена обширная библиография. Заслуживает быть отмеченной также книга Ф. Блейха и Е. Мелана [1]. Обширный материал по теории использования метода сеток приведен в справочнике Д. Ю. Панова [2]. Некоторые сведения о методе можно найти также в статье Д. Ю. Панова [3]. Весьма обстоятельно метод сеток для эллиптических уравнений изложен в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1].

В последние два десятилетия метод сеток был широко использован для решения ряда трудных теоретических проблем. Начало этому течению положил в 1926 г. Л. А. Люстерник своей замечательной статьей [1], в которой он, пользуясь методом сеток, дал решение задачи Дирихле на плоскости при чрезвычайно общих предположениях о природе контура. Попутно Л. А. Люстерник устанавливает равномерную сходимость приближений, получаемых по методу сеток, к точному решению.[1] Отметим еще статью того же автора [3], в которой дается прием улучшения сходимости сеток. Случай общего эллиптического уравнения с m переменными рассмотрен по методу сеток в работе И. Г. Петровского [1]. В работе Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [1] метод сеток применяется как к эллиптическим, так и к гиперболическим линейным уравнениям. Метод, примененный в этой работе, без труда переносится и на случай многих измерений. Можно отметить также работу Ш. Е. Микеладзе [1], в которой автор дает некоторые оценки погрешности метода сеток. Из последних работ заслуживает быть отмеченной работа О. А. Ладыженской [1], в которой с помощью метода сеток дано решение задачи Коши для гиперболической (линейной или квазилинейной) системы наиболее общего вида.

Выше было указано, что метод сеток приводит[2] к алгебраическим системам с очень большим числом (до многих сотен) уравнений с таким же числом неизвестных. Очевидно, метод может претендовать на практическую пригодность, если будет дан достаточно простой способ решения таких систем. Для системы уравнений, которые получаются по методу сеток из уравнения Лапласа, можно построить простой сходящийся итерационный процесс. Изложение относящихся сюда вопросов читатель найдет, например, в статье Д. Ю. Панова [3]. В цитированной выше статье Ш. Е. Микеладзе [1] сходящийся итерационный процесс построен для уравнений более общего вида. Наконец, весьма интересный прием для случая уравнений Лапласа и Пуассона указан в статье

[1] Статья Л. А. Люстерника [1] была перепечатана, в новой редакции и в переводе на русский язык, в журнале „Успехи Матем. Наук"; см. Л. А. Люстерник [2].

[2] По крайней мере, в случае дифференциального уравнения эллиптического типа.

С. А. Гершгорина [1], который предложил использовать особого типа электрические сетки, автоматически дающие решение упомянутой выше системы. Метод С. А. Гершгорина может быть использован как в плоской, так и в пространственной задаче.

§ 74. Основы „метода прямых"

Метод прямых, которому мы посвятим §§ 74—78, находится в таком же примерно отношении к методу сеток, как метод Л. В. Канторовича (§ 31) — к методу Ритца. Мы выясним основные идеи этого метода на примере уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Пусть требуется найти интеграл уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,\ y) \qquad (1)$$

в некоторой области Ω. Для определенности допустим, что уравнение (1) — эллиптическое, и область Ω — конечная. На границе S этой области должно быть задано некоторое краевое условие. Относительно контура S примем, хотя это и необязательно, что каждая прямая, параллельная оси x, пересекает его не более, чем в двух точках.

Проведем прямые, параллельные оси x, и пусть расстояние между двумя соседними прямыми постоянно и равно h. Пусть при этом область Ω пересекают прямые

$$y=y_0+kh=y_k;\quad k=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n-1,\ n. \qquad (2)$$

В уравнении (1) положим $y=y_k$ и заменим производные по y соответствующими разностными отношениями. Можно, например, положить

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k}=\frac{1}{h}\,[u(x,\ y_{k+1})-u(x,\ y_k)],$$

или, если ввести обозначение $u(x,\ y_k)=u_k(x)$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k}=\frac{1}{h}\,[u_{k+1}(x)-u_k(x)]. \qquad (3)$$

Аналогично можно положить

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=y_k}=\frac{1}{h}\left[u'_{k+1}(x)-u'_k(x)\right],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_k}=\frac{1}{h}\left[u_{k+2}(x)-2u_{k+1}(x)+u_k(x)\right].$$

Подставив это в уравнение (1), в котором уже положено $y=y_k$, мы получим систему n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с $n+2$ неизвестными $u_0(x)$, $u_1(x)$ ... $u_n(x)$, $u_{n+1}(x)$.

Если область Ω имеет вид, изображенный на черт. 12 (см. стр. 407), то недостающие два уравнения могут быть получены из краевых условий на прямолинейных отрезках AB и CD; в общем случае этот вопрос до конца не исследован; некоторые соображения по этому поводу будут приведены в § 77. Что касается краевых условий для функций $u_k(x)$, то они естественным образом могут быть получены из краевых условий для функции $u(x, y)$.

Аналогично можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений линейное уравнение более высокого порядка, а также уравнение неэллиптического типа. Нетрудно распространить метод прямых и на случай многих измерений.

Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, если исходить из прямоугольной (не квадратной) сетки и предположить, что в направлении оси x шаг сетки стремится к нулю. Вопрос о сходимости метода прямых почти не исследован.[1] Более обстоятельно разработан вопрос о таком способе замены производных разностными отношениями, при котором погрешность была бы по возможности меньше, а также вопрос о практически наиболее удобном (в тех или иных случаях) приеме решения тех дифференциальных уравнений, к которым приводит метод прямых. Этим вопросам посвящены работы М. Г. Слободянского [1,2] и В. Н. Фаддеевой [3]. В последующих параграфах будут

[1] Доказательство М. Г. Слободянского [2], данное им для случая уравнения Лапласа, содержит ошибку. Сходимость метода прямых для уравнения теплопроводности установлена в работе Роте, изложенной в книге В. И. Смирнова [2].

изложены основные результаты, полученные указанными авторами.

Заметим, что применение метода прямых целесообразно, если коэффициенты данного уравнения постоянны или зависят только от y, так как в этих случаях мы приходим к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Если же коэффициенты данного уравнения зависят от x, то метод прямых приводит к системе линейных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой, вообще говоря, представляет большие трудности. В этом случае целесообразнее воспользоваться методом сеток.

§ 75. Дифференциальные уравнения метода прямых для уравнений Лапласа и Пуассона[1]

Рассмотрим функцию $u(y)$, имеющую на некотором интервале достаточно большое число производных.

Выразим вторую разность $\Delta^2 u = u(y+2h) - 2u(y+h) + u(y)$ через вторые производные от u в точках $y+2h$, $y+h$, y с точностью до $O(h^3)$.

Имеем по формуле Тейлора:

$$u(y+2h) = u(y+h) + h\frac{du(y+h)}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(y+h)}{dy^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(y+h)}{dy^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(y+h)}{dy^4} + \ldots$$

$$u(y) = u(y+h) - h\frac{du(y+h)}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(y+h)}{dy^2} - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(y+h)}{dy^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(y+h)}{dy^4} + \ldots$$

Отсюда

$$u(y+2h) - 2u(y+h) + u(y) = h^2\frac{d^2u(y+h)}{dy^2} + \frac{h^4}{12}\frac{d^4u(y+h)}{dy^4} + O(h^6). \quad (1)$$

---

[1] В §§ 75—77 мы воспроизводим, почти без изменений, некоторые разделы статьи В. Н. Фаддеевой [3].

Но

$$\frac{d^2u\,(y+2h)}{dy^2}=\frac{d^2u\,(y+h)}{dy^2}+h\,\frac{d^3u\,(y+h)}{dy^3}+\frac{h^2}{2}\frac{d^4u\,(y+h)}{dy^4}+\dots$$

$$\frac{d^2u\,(y)}{dy^2}=\frac{d^2u\,(y+h)}{dy^2}-h\,\frac{d^2u\,(y+h)}{dy^3}+\frac{h^2}{2}\,\frac{d^4u\,(y+h)}{dy^4}-\dots$$

и, следовательно,

$$h^2\frac{d^4u\,(y+h)}{dy^4}=\frac{d^2u\,(y+2h)}{dy^2}-2\frac{d^2u\,(y+h)}{dy^2}+\frac{d^2u\,(y)}{dy^2}+O\,(h^4).$$

Подставляя полученное значение четвертой производной в формулу (1), получим:

$$\Delta^2 u=u\,(y+2h)-2u\,(y+h)+u\,(y)=$$
$$=\frac{5}{6}h^2\,\frac{d^2u\,(y+h)}{dy^2}+\frac{h^2}{12}\frac{d^2u\,(y+2h)}{dy^2}+\frac{h^2}{12}\,\frac{d^2\,u(y)}{dy^2}+O\,(h^6). \quad (2)$$

Эта формула будет исходной для дальнейших рассуждений.

Пусть требуется найти функцию $u\,(x,\ y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u\,(x,\ y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u\,(x,\ y)}{\partial y^2}=0 \quad (3)$$

в области D при заданных граничных условиях на ограничивающем ее замкнутом контуре. Относительно контура предположим, что он достаточно гладкий и что каждая прямая, параллельная оси x, пересекает его в двух точках.

Проведем прямые, параллельные оси x, с интервалом

$$y=y_1,\ y=y_2,\ \dots,\ y=y_n.$$

Обозначим

$$u_k(x)=u\,(x,\ y_k).$$

Каждая тройка функций $u_{k-1}\,(x)$, $u_k x$ и $u_{k+1}\,(x)$, очевидно, будет удовлетворять соотношению (2), которое мы перепишем в виде:

$$u_{k+1}\,(x)-2u_k\,(x)+u_{k-1}\,(x)=\frac{5}{6}\,h^2\,\frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y^2}\bigg|_{y=y_k}+$$
$$+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 u\,(x,\ y)}{\partial y^2}\bigg|_{y=y_{k-1}}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 u\,(x,\ y)}{\partial y^2}\bigg|_{y=y_{k+1}}+O\,(h^6). \quad (2')$$

Но в силу уравнения (3) мы имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = -u_k''(x). \tag{3'}$$

Подставляя значение производных из формулы (3′) в (2′), получим, удерживая члены до порядка h^6, систему:

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] = 0. \tag{4}$$

$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Эта система предложена М. Г. Слободянским [1, 2].

Система (4) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после присоединения к ней граничных условий определяет n неизвестных функций $u_k(x)$. Она не зависит от вида контура области, для которой ищется решение. Входящие в нее «граничные» функции $u_0(x)$ и $u_{n+1}(x)$ определяются совершенно естественно из краевых условий в случае, если граница области содержит отрезки, параллельные оси x (черт. 12). В случае закругленного контура вопрос об определении функций $u_0(x)$ и $u_{n+1}(x)$ требует особого исследования. Аналогично для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y) \tag{5}$$

с граничным условием $u = 0$ на контуре имеем на основании уравнения (5):

$$\left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = -u_k''(x) + f_k(x), \tag{6}$$

где $f_k(x) = f(x, y_k)$. Поэтому система для определения функций $u_k(x)$ будет иметь вид:

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] - \\ - f_k(x) - \frac{f_{k+1}(x) - 2f_k(x) + f_{k-1}(x)}{12} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

или после приведения подобных членов

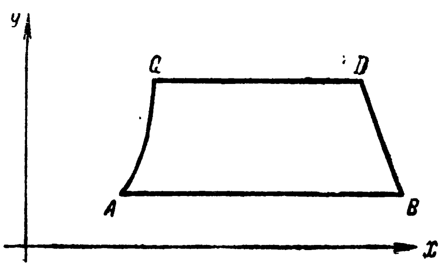
$$\frac{5}{6}u_k''(x)+\frac{1}{12}[u_{k+1}''(x)+u_{k-1}''(x)]+$$
$$+\frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x)-2u_k(x)+u_{k-1}(x)]-$$
$$-\frac{5}{6}f_k(x)-\frac{f_{k+1}(x)+f_{k-1}(x)}{12}=0, \tag{7}$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,n.$$

Ограничиваясь определением функций $u_k(x)$, т. е. определением функции $u(y,\ x)$ лишь на некотором числе прямых, параллельных оси x, мы получим для приближенных значений этих функций систему n линейных дифференциальных уравнений.

Решение этой системы дает, вообще говоря, значительно более точный результат, чем решение системы, получаемой методом конечных разностей.

§ 76. Случай области специального вида

В этом параграфе мы рассмотрим подробнее применение метода прямых к интегрированию уравнения Пуассона в том случае, когда область имеет вид, изображенный на черт. 12,



Черт. 12.

т. е. когда граница области состоит из отрезков AB и CD прямых, параллельных оси x, и дуг AC и BD, каждая из которых пересекается любой прямой, параллельной оси x, не более, чем в одной точке.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$$

с краевым условием

$$u = 0$$

на контуре.

Как мы уже отмечали, в этом случае $u_0(x) = u_{n+1}(x) = u_0''(x) = u_{n+1}''(x) = 0$, и потому мы получаем вполне определенную систему для нахождения $u_k(x)$:

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] - F_k(x) = 0, \qquad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$F_k(x) = \frac{5}{6} f_k(x) - \frac{f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)}{12}. \qquad (2)$$

Система (1) есть система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Преобразуем ее в систему, каждое уравнение которой содержит только одну неизвестную функцию.

Для этого рассмотрим векторы:

$$U = [u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)],$$
$$F = [F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)]. \qquad (3)$$

Обозначим через A и M матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно переписать в виде:

$$AU'' + \frac{M}{h^2} U - F = 0. \tag{4}$$

Для того чтобы преобразовать систему (1) в распадающуюся, нам надо привести матрицы A и M к диагональному виду при помощи одного и того же ортогонального преобразования, что оказывается возможным.

Действительно,

$$A = E + \frac{M}{12}, \tag{5}$$

где E — единичная матрица. Отсюда видно, что ортогональное преобразование к диагональному виду одной матрицы влечет за собой такое же преобразование другой матрицы.

Именно, пусть B — ортогональное преобразование, приводящее M к диагональному виду, т. е. пусть

$$B^{-1}MB = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

где

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда, очевидно,

$$B^{-1}AB = \left(1 + \frac{\lambda_1}{12}, 1 + \frac{\lambda_2}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right).$$

Найдем теперь ортогональное преобразование $B = \|b_{ks}\|$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Имеем:

$$MB = B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Отсюда, фиксируя s, получаем для определения числа b_{ks} систему

$$b_{k-1,s} - 2b_{k,s} + b_{k+1,s} = b_{ks}\lambda_s; \quad b_0 = b_{n+1} = 0,$$

или

$$b_{k-1,s} + (-2 - \lambda_s) b_{k,s} + b_{k+1,s} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Для определения всех элементов матрицы B мы получаем, таким образом n систем вида (6).

Для того чтобы эти системы имели не нулевые решения, необходимо, чтобы их определители равнялись нулю, т. е. необходимо, чтобы числа λ_s были корнями характеристического уравнения:

$$D_n = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Обозначим

$$-2-\lambda = 2\cos\theta. \qquad (8)$$

Тогда определитель D_n запишется в виде

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \qquad (9)$$

и может быть легко вычислен.

Именно,

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \qquad (10)$$

Чтобы доказать равенство (10), разложим D_n по элементам первого столбца. Это даст нам разностное уравнение

$$D_n = 2\cos 2\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Непосредственным вычислением находим

$$D_1 = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}, \quad D_2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta};$$

теперь формула (10) устанавливается переходом от n к $n+1$.

Требование $D_n = 0$ дает n значений для θ:

$$\theta_s = \frac{\pi s}{n+1} \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (11)$$

и потому

$$\lambda_s = -2\left(1+\cos\frac{\pi s}{n+1}\right) \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Числа b_{ks} являются компонентами собственного вектора матрицы M для характеристического числа λ_s. Они определяются из системы (11) с точностью до постоянного множителя, который определяется затем из условия нормированности.

В качестве решения системы (11) можно взять числа

$$b'_{ks} = \Delta_k^s, \tag{13}$$

где Δ_k^s — алгебраические дополнения первой строки k-го столбца определителя D_n с подстановкой в них $\theta=\theta_s$.

Действительно, подставив b'_{ks} в уравнения системы, получим для всех уравнений, кроме k-го, в левой части нули как сумму произведений алгебраических дополнений одной строки на элементы другой. Левая часть k-го уравнения превратится в D_n^s, т. е. в определитель D_n с подстановкой λ_s вместо λ, и потому также будет нулем.

Но алгебраические дополнения Δ_k^s легко вычисляются. Именно, пусть Δ_k — алгебраическое дополнение первой строки k-го столбца определителя D_n. Тогда

$$\Delta_k = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1\quad 2\cos\varphi\quad 1\quad 0\ \ldots\ 0\quad 2\cos\varphi}}^{k-1} & \overbrace{\hphantom{2\cos\varphi\quad 1\quad 0\ \ldots\ 0\quad 2\cos\varphi}}^{n-k} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 2\cos\varphi & 1 & 0\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2\cos\varphi & 1\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 1 & 2\cos\varphi & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 & 2\cos\varphi & 1 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1\ \ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 1 & 2\cos\varphi
\end{array}\right| \end{array}$$

Отсюда, раскладывая Δ_k по элементам первого столбца $k-1$ раз, получим:

$$\Delta_k = (-1)^{k-1} D_{n-k} = (-1)^{k-1}\frac{\sin(n+1-k)\theta}{\sin\theta}.$$

Это дает:

$$\Delta_k^s = (-1)^{k-1} \frac{\sin (n+1-k)\theta_s}{\sin \theta_s}. \tag{14}$$

Наконец, нормируем элементы матрицы B по столбцам, т. е. определим c_s так, чтобы

$$c_s^2 \sum_{k=1}^{n} b_{ks}'^2 = c_s^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 (n+1-k)\theta_s}{\sin^2 \theta_s} = 1.$$

Легко подсчитать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2 (n+1-k)\theta_s = \frac{n+1}{2}.$$

Это дает

$$c_s = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \theta_s. \tag{15}$$

Таким образом, элементы преобразующей матрицы B будут:

$$b_{ks} = b_{ks}' c_s = (-1)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin (n+1-k) \frac{\pi s}{n+1} =$$

$$= (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi s k}{n+1}. \tag{16}$$

Отсюда видно, что матрица B симметрична, и, так как она еще и ортогональная, то

$$B = B^* = B^{-1} = \| b_{ks} \| = \left\| (-1)^{s+k} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k s}{n+1} \right\|. \tag{17}$$

Таким образом,

$$M = B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) B,$$

$$A = B\left(1 + \frac{\lambda_1}{12}, 1 + \frac{\lambda_2}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right) B,$$

и потому система (4) будет иметь вид:

$$\left(1 + \frac{\lambda_1}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right) BU'' + \frac{1}{h^2} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) BU - BF = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} BU &= V = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ BF &= G = (g_1, g_2, \ldots, g_n). \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда

$$\left(1+\frac{\lambda_1}{12}, \ldots, 1+\frac{\lambda_n}{12}\right) V'' + \frac{1}{h^2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V - G = 0.$$

Последнее уравнение равносильно n независимым уравнениям

$$\left(1+\frac{\lambda_k}{12}\right) v_k''(x) + \frac{\lambda_k}{h^2} v_k(x) - g_k(x) = 0, \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Введем следующее обозначение:

$$\alpha_k^2 = -\frac{\lambda_k}{h^2\left(1+\frac{\lambda_k}{12}\right)} = \frac{12(1+\cos\theta_k)}{h^2(5-\cos\theta_k)} \tag{20}$$

и

$$\varphi_k(x) = \frac{g_k(x)}{1+\frac{\lambda_k}{12}} = \frac{6g_k(x)}{5-\cos\theta_k}. \tag{21}$$

Тогда систему (19) можно переписать в виде:

$$v_k''(x) - \alpha_k^2 v_k(x) - \varphi_k(x) = 0. \tag{19'}$$

Предположим для простоты, что как контур области, так и краевые условия симметричны относительно оси x. Решение системы будет четной функцией от x и, очевидно, $v_k = C_k \operatorname{ch} \alpha_k x + \overline{v}_k(x)$, где $\overline{v}_k(x)$ — четное частное решение системы (19').

Частное решение системы (19') целесообразно находить непосредственно, например, методом неопределенных коэффициентов в случае, если функции $\varphi_k(x)$ имеют достаточно простой вид.

Можно частное решение системы (19') представить в виде:

$$\overline{v}_k(x) = \frac{1}{\alpha_k}\int_0^x \operatorname{sh} \alpha_k(x-t)\,\varphi_k(t)\,dt. \tag{22}$$

Переходя обратно к функциям $u_k(x)$, получим на основании (18)

$$U = B^{-1}V = BV$$

или

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} v_s(x). \tag{23}$$

Отсюда

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} C_s \operatorname{ch} \alpha_s x + \sum_{s=1}^{n} b_{ks} \bar{v}(x) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} C_s \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k s}{n+1} \operatorname{ch} \alpha_s x +$$

$$+ \int_0^x \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{k+s} \sqrt{2} \sin \frac{\pi k s}{n+1}}{\sqrt{n+1}\, \alpha_s} \operatorname{sh} \alpha_s (x-t)\, \varphi_s(t)\, dt. \tag{24}$$

Отметим здесь, что решение (24) по форме не зависит от вида контура области. Постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определяются из алгебраической системы, получаемой из (24) после подстановки в нее краевых условий.

Для удобства вычислений целесообразно положить

$$A_s = C_s \sqrt{\frac{2}{n+1}} \operatorname{ch} \alpha_s x_m,$$

где x_m — наибольшая из всех абсцисс точек пересечения прямых $y = y_k$ с контуром области D. Тогда решение запишется в виде:

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin \frac{\pi k s}{n+1} A_s \frac{\operatorname{ch} \alpha_s x}{\operatorname{ch} \alpha_s x_m} +$$

$$+ \int_0^x \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{k+s} \sin \frac{\pi k s}{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}\, \alpha_s} \operatorname{sh} \alpha_s (x-t)\, \varphi_s(t)\, dt. \tag{25}$$

Отметим также, что иногда частное решение системы (1) можно найти непосредственно. Так, например, в случае задачи кручения:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -1 \tag{26}$$

при $u = 0$ на контуре области система (1) будет иметь вид:

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] + 1 = 0, \tag{27}$$

и потому частным решением ее будут числа a_k, определяемые из системы

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} + h^2 = 0. \tag{28}$$

Легко видеть, что

$$a_k = \frac{k(n+1-k)}{2} h^2. \tag{29}$$

В этом случае искомые функции $u_k(x)$ будут вычисляться по формуле:

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi ks}{n+1} A_s \frac{\operatorname{ch} \alpha_s x_k}{\operatorname{ch} \alpha_s x_m} + \frac{k(n+1-k)}{2} h^2, \tag{30}$$

и наша задача будет заключаться лишь в определении постоянных A_s из линейной алгебраической системы:

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi ks}{n+1} A_s \frac{\operatorname{ch} \alpha_s x_k}{\operatorname{ch} \alpha_s x_m} + \frac{k(n+1-k)}{2} h^2 = 0, \tag{31}$$

которую мы получаем, удовлетворяя краевым условиям в точках контура с ординатами y_k.

Числа α_s, $\delta_k^s = (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi ks}{n+1}$, $a_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$ зависят только от числа проведенных нами прямых $y = y_k$. В статье В. Н. Фаддеевой [3] даны таблицы этих величин для значений $n = 3, 5, 7, 11, 15$.

§ 77. Области с закругленными краями

Для иллюстрации приема рассмотрим область, симметричную относительно обеих координатных осей. В статье В. Н. Фаддеевой [3], из которой мы этот прием заимствуем, он разработан и для некоторых других случаев.

Для простоты выкладок ограничимся задачей кручения. Система (4) § 75 имеет вид (см. формулу (27) § 76)

$$\frac{5}{6}u_k''(x)+\frac{1}{12}[u_{k+1}''(x)+u_{k-1}''(x)]+\frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x)-2u_k(x)+ \\ +u_{k-1}(x)]+1=0, \quad k-1,\ 2,\ \dots\ n,$$

причем на этот раз функции $u_0(x)$ и $u_{n+1}(x)$ не определяются из краевых условий.

Представляется возможным, по аналогии со случаем прямолинейных границ, считать $u_0(x)$ и $u_{n+1}(x)$, так же как и их вторые производные, нулями. Однако для этого нет достаточных оснований. Вычисления показывают, что при этом получаются удовлетворительные результаты в центральных точках, при довольно большой относительной погрешности вблизи краев.

Так, решая задачу кручения $\Delta u=-1$, $u=0$, на контуре для эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{3.6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1,$$

произведем вычисления для случая пяти, семи и одиннадцати прямых.

Приведем таблицу значений $u(x, y)$ при $x=0$.

y	$n=5$	$n=7$	$n=11$	Точное решение
0	2,787	2,741	2,703	2,656
0,5			2,632	2,582
0,75		2,581		2,490
1,00	2,502		2,416	2,361
1,50		2,095	2,055	1,992
2,00	1,617		1,546	1,475
2,25		1,266		1,162
2,50			0,885	0,811

Гораздо более точные результаты получаются при предположении, что

$$u_0(x) = cx^2, \qquad u_{n+1}(x) = cx^2. \tag{1}$$

Неопределенный коэффициент c, входящий в (1), подбирается так, чтобы можно было наилучшим образом учесть кривизну контура. Именно, пусть $u = \varphi(x, y)$ — решение задачи. Тогда уравнение контура будет $\varphi(x, y) = 0$.

Дифференцируя это равенство дважды, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y \partial x} y' + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} y'' = 0.$$

Но, очевидно

$$y' \Big|_M = 0, \qquad y'' \Big|_M = K,$$

где K — кривизна контура в точке M. Поэтому в точке M мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} K = 0.$$

Это дает:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Big|_M = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\Big|_M = -\frac{2c}{K}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -1 - 2c. \tag{3}$$

Но приближенно мы имеем:

$$u_1(x) = u_0(x) - h\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Big|_{y=y_0} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\Big|_{y=y_0}. \tag{4}$$

Отсюда при $x = 0$

$$u_1(0) = \frac{2hc}{K} - \frac{h^2}{2}(1 + 2c).$$

Последнее уравнение, будучи присоединенным к основной системе, позволит нам определить постоянное c.

Исправленная система (27) § 76 будет иметь вид:

$$\frac{5}{6}u_1''(x)+\frac{1}{12}u_2''(x)+\frac{1}{h^2}[u_2(x)-2u_1(x)]+$$
$$+\frac{2c}{12}+\frac{1}{h^2}cx^2+1=0,$$

. . . .

$$\frac{5}{6}u_k''(x)+\frac{1}{12}[u_{k+1}''(x)+u_{k-1}''(x)]+$$
$$+\frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x)-2u_k(x)+u_{k-1}(x)]+1=0, \qquad (5)$$

. . . .

$$\frac{5}{6}u_n''(x)+\frac{1}{12}u_{n-1}''(x)+\frac{1}{h^2}[u_{n-1}(x)-2u_n(x)]+$$
$$+\frac{2c}{12}+\frac{1}{h^2}cx^2+1=0.$$

Частное решение этой системы:

$$\bar{u}_k(x)=c_k x^2+a_k^*. \qquad (6)$$

Постоянные c_k определяются из системы

$$\frac{1}{h^2}(c_2-2c_1)+\frac{1}{h^2}c=0,$$

. . . .

$$\frac{1}{h^2}(c_{k+1}+c_{k-1}-2c_k)=0, \qquad (7)$$

. . . .

$$\frac{1}{h^2}(c_{n-1}-2c_n)+\frac{1}{h^2}c=0,$$

решением которой будет

$$c_k=c.$$

Числа a_k^* определяются из соответствующей системы, решением которой являются значения

$$a_k^*=h^2\frac{k(n+1-k)}{2}(1+2c)=a_k(1+2c). \qquad (8)$$

Таким образом, решением системы будут функции

$$u_k(x)=A_1\delta_k^1\frac{\operatorname{ch}\alpha_1 x}{\operatorname{ch}\alpha_1 x_m}+\ldots+A_n\delta_k^n\frac{\operatorname{ch}\alpha_n x}{\operatorname{ch}\alpha_n x_m}+$$
$$+cx^2+a_k(1+2c). \qquad (9)$$

Линейная алгебраическая система для определения коэффициентов $A_1, \ldots, A_n$ будет иметь свободные члены, зависящие от c. Это, однако, почти совсем не затрудняет вычисления. Функции $u_k(x)$, определенные по формуле (9), значительно более точно совпадают с истинными значениями функции $u(x, y)$ при $y = y_k$.

§ 78. Дифференциальные уравнения метода прямых для бигармонического уравнения

Уравнения, указанные в заглавии параграфа, легче всего получить, исходя из известного представления любой бигармонической функции $u(x, y)$ через две гармонические $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$:

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + y\psi(x, y) \tag{1}$$

— мы получим нужный нам результат, просто написав уравнения (4) § 77 для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Это дает нам следующую систему дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{5}{6}\varphi_k''(x) + \frac{1}{12}[\varphi_{k-1}''(x) + \varphi_{k+1}''(x)] + \\
&\qquad + \frac{1}{h^2}[\varphi_{k-1}(x) - 2\varphi_k(x) + \varphi_{k+1}(x)] = 0, \\
&\frac{5}{6}\psi_k''(x) + \frac{1}{12}[\psi_{k-1}''(x) + \psi_{k+1}''(x)] + \\
&\qquad + \frac{1}{h^2}[\psi_{k-1}(x) - 2\psi_k(x) + \psi_{k+1}(x)] = 0. \\
&\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots n.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Система (2) содержит $2n$ уравнений с $2n+4$ неизвестными

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n, \varphi_{n+1}; \quad \psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n, \psi_{n-1}.$$

Допустим, что область имеет вид, изображенный на черт. 12, и пусть $H = (n+1)h$ ее высота. Допустим, далее, что на контуре области заданы значения самой функции $u(x, y)$ и ее нормальной производной. Тогда на прямой AB

заданы величины

$$[\varphi(x, y)+y\psi(x, y)]_{y=0}=\varphi_0(x), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y)+y\psi(x, y)]_{y=0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}+\psi_0(x), \tag{4}$$

а на прямой CD — величины

$$[\varphi(x, y)+y\psi(x, y)]_{y=H}=\varphi_{n+1}(x)+H\psi_{n+1}(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y)+y\psi(x, y)]_{y=H}=$$

$$=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=H}+H\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=H}+\psi_{n+1}(x). \tag{6}$$

Найдем выражения величины $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}$ и ей аналогичных через функции $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$. По формуле Тейлора

$$\varphi(x, y+l)=\varphi(x, y)+l\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{l^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{l^3}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+O(l^4), \tag{7}$$

где $O(\xi)$ обозначает величину того же порядка малости, как и ξ. Положим в (7) $y=y_k$, $l=h$. Тогда

$$\varphi_{k+1}=\varphi_k(x)+h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=y_k}+$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)_{y=y_k}+O(h^4). \tag{8}$$

Но $\varphi(x, y)$ — гармоническая функция, поэтому

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=y_k}=-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{y=y_k}=-\varphi_k''(x),$$

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)_{y=y_k}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k}.$$

Подставив это в (8), получим

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x) + h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} - \frac{h^2}{2}\varphi_k''(x) -$$
$$- \frac{h^3}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} + O(h^4). \tag{9}$$

Отбросим в (9) член

$$-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

и из полученного таким образом равенства определим величину

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)}{h} + \frac{h}{2}\varphi_k''(x) + O(h^2). \tag{10}$$

Подставим это в четвертый член справа в (9). Отбросив члены порядка h^4, мы получим теперь

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)}{h} + \frac{h}{6}\varphi_{k+1}''(x) +$$
$$+ \frac{h}{3}\varphi_k''(x) + O(h^3).$$

При $k=0$ получаем отсюда приближенную формулу

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_0(x)}{h} + \frac{h}{6}\varphi_1''(x) + \frac{h}{3}\varphi_0''(x). \tag{11}$$

Полагая теперь в (7) $y=y_k$, $l=-h$, мы таким же путем придем к формуле

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)}{h} - \frac{h}{6}\varphi_{k-1}''(x) - \frac{h}{3}\varphi_k''(x),$$

что при $k=n+1$ дает

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=H} = \frac{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)}{h} - \frac{h}{6}\varphi_n''(x) - \frac{h}{3}\varphi_{n+1}''(x). \tag{12}$$

Уравнение (3) определяет величину $\varphi_0(x)$. Если теперь подставить в (4) и (6) выражения

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=H}, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=H},$$

полученные из формул (11) и (12), то мы получим три дифференциальных уравнения, в которые войдут неизвестные $\varphi_1(x)$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$; $\psi_n(x)$, $\psi_{n+1}(x)$. Присоединив эти уравнения к уравнениям (2), мы получим систему из $2n+3$ дифференциальных уравнений с $2n+3$ неизвестными φ_1, ... φ_{n+1}, ψ_0, ψ_1, ... ψ_{n+1}. Краевые условия для этой системы мы получим, используя краевые условия задачи в точках пересечения контура области с прямыми $y=y_k$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Блейх Ф. и Мелан Е.

[1]. Уравнения в конечных разностях статики сооружений. ОНТИ ДНТВУ НКМП, Харьков, 1936.

де-Бройль Л.

[1]. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. ИЛ, 1948.

Валле-Пуссен, Ш. Ж.

[1]. Курс анализа бесконечно малых, т. I, 1922; т. II, 1933.

Варвак П. М.

[1]. Развитие и приложение метод асеток к расчету пластинок, ч. I, Изд. АН УССР, Киев, 1949.

Вейль Г. (H. Weil).

[1]. Das asymptotische Verteilungsgesetz d. Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körper. Rend. Circ. Math. di Palermo, V. 39, 1915.

Волш Дж. (J. Walsh).

[1]. Über d. Entwickelung einer analytischen Function nach Polynomen. Math. Ann., Bd. 96, S. 430—436, 1926/27.

Галеркин Б. Г.

[1]. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин. Вестник инженеров, № 19, 1915, стр. 897—908.

Гершгорин С. А.

[1]. Об электрических сетках для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа. Журн. прикл. физ., т. VI, вып. 3—4, 1929, стр. 3—30.

Гюнтер Н. М.

[1]. La théorie des potentiels. Paris, 1934.

Дерюгин Л. Н.

[1]. Расчет критической частоты П- и Н-волноводов. Радиотехника, т. III, № 6, 1948.

Динник А. Н.

[1]. Устойчивость упругих систем. ОНТИ НКТП, 1935.

Канторович Л. В. и Крылов В. И.

[1]. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1941.

Канторович Л. В.

[1]. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, т. III, вып. 6 (28), 1948.

Келдыш М. В.

[1]. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. Изв. АН СССР, сер. матем., т. VI, № 6, 1942.

Кравчук М.

[1]. Застосування способу моментів до розв"язання лінійних діфференціальних та інтегральних рівнянь. Вид. Укр. Акад. Наук, Київ, 1936.

[2]. Sur la résolution approchée des équations intégrales linéaires. C. R., t. 188, 1929, p. 978.

Крейн М. Г.

[1]. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, ч. I. Матем. Сборн., т. 20 (62): 3; 1947; ч. II, Матем. Сборн., т. 21 (63): 3; 1947.

Крылов Н. М.

[1]. О некоторых направлениях в области приближенного решения проблем математической физики. Юбилейный сборник, изд. АН СССР, 1947.

Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н.

[1]. Sur la calcul des racines de la transcendante de Frédholm etc. Изв. АН СССР, сер. ОМЕН, № 5, 1929, стр. 471.

Курант Р. и Гильберт Д.

[1]. Методы математической физики, т. I, ГТТИ, 1933.

[2]. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1945, спец. гл. VII.

Курант Р., Фридрихс К. и Леви Г.

[1]. О разностных уравнениях математической физики. Успехи матем. наук, вып. VIII, 1940.

Ладыженская О. А.

[1]. Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. Автореферат диссертации. Лен. Гос. Университет, 1949.

Лейбензон Л. С.

[1]. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.

[2]. Вариационные методы теории упругости в приложении к кручению авиационных профилей. Труды ЦАГИ, вып. 495, 1940.

[3]. Вариационные методы решения задач теории упругости. Гостехиздат, 1943.

Люстерник Л. А.

[1]. Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung. Матем. Сборн., т. 33., 1926, стр. 189—200.

[2]. Проблема Дирихле. Успехи мат. наук, вып. VIII, 1940.

[3]. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XX, 1947, стр. 49—64.

Ляв А.

[1]. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП, 1935.

Маркус Г.

[1]. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий. ДНТВУ, Киев, 1936.

Микеладзе Ш. Е.

[1]. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа. Изв. АН СССР, сер. матем., т. V, № 1, 1941.

Михлин С. Г.

[1]. Интегральные уравнения. Гостехиздат, изд. 2-е, 1949.

[2]. О сходимости метода Галеркина. ДАН, т. 61, № 2, 1948.

[3]. Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина. Уч. записки ЛГУ, № 135, сер. матем. наук, № 18, 1950.

[4]. Сингулярные интегральные уравнения. Успехи матем. наук, т. III, вып. 3 (25), 1948.

[5]. О сходимости метода наименьших квадратов. ДАН, т. 59, № 7, 1948.

[6]. Метод наименьших квадратов в задачах математической физики. Уч. записки ЛГУ, № 111, сер. матем. наук, вып. 16, 1949.

[7]. Плоская задача теории упругости. Труды Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 65, 1935.

[8]. Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Труды Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 76, 1936.

[9]. Об одной теореме F. Noether'a. ДАН, т. 43, № 4, 1944.

Мусхелишвили Н. И.

[1]. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.

[2]. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР, изд. 3-е, 1949.

Новожилов В. В.

[1]. Теория тонких оболочек. Изд. Военно-морск. Акад. им. А. Н. Крылова, 1947.

Панов Д. Ю.

[1]. Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Дополнение к книге Скарборо. Численные методы математического анализа. ОНТИ, 1934.

[2]. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. 3-е, Гостехиздат, 1949.

[3]. Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений эллиптического типа. Успехи матем. наук, вып. IV, 1937.

Перельман Я. И.

[1]. Метод Б. Г. Галеркина в вариационном исчислении и в теории упругости. Прикл. матем. и мех., т. V, вып. 2, 1941.

Петров Г. И.

[1]. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. Прикл. матем. и мех., т. IV, вып. 3, 1940.

Петровский И. Г.

[1]. Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей. Успехи матем. наук, вып. VIII, 1940.

Пиконе М. (M. Picone).

[1]. Nuove metodo d'approssimazione per la soluzione de probleme di Dirichlet. Rend. Accad. d. Lincei, ser. 5, t. 31, 1922.

Плеснер А. И.

[1]. Спектральная теория линейных операторов. Успехи матем. наук, вып. IX, 1941.

Плеснер А. И. и Рохлин В. А.

[1]. Спектральная теория линейных операторов. Успехи матем. наук, т. I, вып. 1 (11), 1946.

Польский Н. И.

[1]. О сходимости приближенных методов типа Галеркина. Автореферат диссертации. Киевский Гос. Универс., 1950.

Привалов И. И.

[1]. Введение в теорию функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1948.

[2]. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1935.

Рафальсон З. Х.

[1]. К вопросу о решении бигармонического уравнения. ДАН, т. 64, № 8, 1949.

Репман Ю. В.

[1]. К вопросу математического обоснования метода Галеркина решения задач об устойчивости упругих систем. Прикл матем. и мех., т. 4, вып. 2, 1940.

Слободянский М. Г.

[1]. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. матем. и мех., т. 3, вып. 1, 1939.

[2]. Пространственные задачи теории упругости для призматических тел. Уч. записки ЛГУ, Механика, вып. 39, 1940.

Смирнов В. И.

[1]. Курс высшей математики, т. V, Гостехиздат, 1947.

[2]. Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1950.

[3]. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1941.

Соболев С. Л.

[1]. Об одной задаче полигармонических уравнений. Матем. Сборн., т. II, № 3, 1937.

[2]. Об одной теореме функционального анализа. Матем. Сборн., т. IV, № 3, 1938.

[3]. Основная краевая задача для полигармонического уравнения в области с вырожденным контуром. ДАН, т. III (XII), № 7 (162), 1936.

[4]. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1947.

Сретенский Л. Н.

[1]. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ НКТП, 1934.

Тимошенко С. П.

[1]. Теория упругости. ОНТИ, 1937.

[2]. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.

Трефтц Э. (E. Trefftz).

[1]. E. Trefftz. Ein Gegestück zum Ritzschen Verfahren. Verhandl. d. 2 intern. Kongress f. technische Mechanik. Zürich, 1926, S. 131—138.

[2]. Математическая теория упругости. ГТТИ, 1932.

Фаддеева В. Н.

[1]. (В. Н. Замятина). О фундаментальных функциях оператора X^{IV}. Труды Лен. ин-та инж. пром. строит., № 6, 1935, стр. 74—95.

[2]. О фундаментальных функциях оператора X^{IV}. Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 28, 1949, стр. 157—159.

[3]. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 28, 1949, стр. 73—103.

Фридрихс К. (K. Friedrichs).

[1]. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf d. Spektralzerlegung v. Differentialoperatoren. Math. Ann. Bd. 109, H. 4—5, 1934.

[2]. Randwert u. Eigenwert-probleme aus d. Theorie d. elastischen Platten. Math. Ann. Bd. 98, 1928.

[3]. On the boundary-value problem of the theory of elasticity and Korn's inequality. Annals of mathematics, vol. 48, № 2, 1947.

[4]. An inequality for potential functions. American Journal of Mathematics, vol. 68, № 4, 1946.

Шевченко К. Н.

[1]. Применение вариационного метода к решению задач теории упругости. Прикл. матем. и мех., т. II, вып. 2, 1938.

[2]. Колебание пластинки в ее плоскости. Прикл. матем. и мех., т. VI, 1942, стр. 41—52.

Янке Е. и Эмде Ф.

[1]. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1948.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
47	15 снизу	пространства	множества	Авт.
69	1 „	$(f, Au_0 - \eta)$	$(\eta, Au_0 - f)$	„
74	5 „	$\Lambda(u_0, u_0)$	$\Lambda_1(u_0, u_0)$	„
91	16 „	$\mathbf{u}'(\mathbf{A}\mathbf{u}'' - \mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}')$	$(\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}'' - \mathbf{u}''\mathbf{A}\mathbf{u}')$	Корр.
140	2 сверху	$u(x_1, y_1) - u(0, y_1) = 0$	$u(x_1, y_1) - u(0, y_1)$.	Авт.
164	1 „	$M(Q)$	$u(Q)$	„
192	4 снизу	так как	так же как	„
300	5 сверху	$\varkappa$.	H.	„
309	8 „	$\Vert u_n + uu_m \Vert$	$\Vert u_n \Vert + \Vert u_m \Vert$	„

Зак. 1664.