

Н.С. Голубева, В.Н. Митрохин

# ОСНОВЫ радиоэлектроники сверхвысоких частот

Издание второе, стереотипное

*Допущено Министерством образования и науки  
Российской Федерации в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
«Радиотехника»*

Москва  
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана  
2008

УДК 538.3(075.8)

ББК 22.3

Г60

Рецензенты:

Кафедра «Физика и техника оптической связи»  
Нижегородского государственного технического университета  
(заведующий кафедрой засл. деятель науки Российской Федерации,  
д-р техн. наук, проф. С.Б. Раевский);  
засл. деятель науки Российской Федерации,  
д-р техн. наук, проф. Г.Г. Шишкин  
(Московский государственный авиационный институт — ТУ)

**Голубева Н.С., Митрохин В.Н.**

Г60 Основы радиоэлектроники сверхвысоких частот: Учеб. пособие для вузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 488 с.: ил. (Электроника).

ISBN 5-7038-2740-X

Изложены основы теории линейных и нелинейных электромагнитных процессов в пассивных и активных средах. Рассмотрено взаимодействие электромагнитного поля с электронным потоком, диэлектрической, магнитной и плазменной средами, а также вопросы преобразования частот, усиления и генерирования. Приведена теория волноводов, в том числе неоднородных, сложных конфигураций, содержащих намагнитченные ферриты; резонаторов; ферритовых устройств сверхвысоких частот. В приложении кратко изложены применяемый математический аппарат и основные сведения из квантовой механики.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, который читают авторы в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов радиотехнических специальностей вузов. Будет полезно аспирантам и инженерам.

УДК 538.3(075.8)

ББК 22.3

© Н.С. Голубева, В.Н. Митрохин, 2006

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006

© Оформление. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006

ISBN 5-7038-2740-X

*175-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана  
и светлой памяти нашего учителя —  
Александра Михайловича Кузусева —  
посвящается*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Достижения современной радиоэлектроники нашли широкое применение во всех областях человеческой деятельности. В значительной степени это связано с простотой преобразования электромагнитной энергии из одного вида в другой и возможностью передачи ее на любые расстояния.

В книге дается анализ физических процессов, происходящих в линейных и нелинейных, в активных и пассивных средах. Изложение основывается на уравнениях электромагнитного поля, в которые нелинейность вводится через параметры среды.

Процессы передачи электромагнитной энергии по направляющим системам, в том числе по регулярным, неоднородным, сложного поперечного сечения, содержащим намагнитенные ферриты волноводам и по ступенчатым и плавным переходам, рассматриваются как линейные. В этом случае электромагнитное поле не взаимодействует со средой, в которой оно распространяется. Характеристики поля и среды не изменяются.

Нелинейные процессы преобразования частоты, самофокусировка и самоканализация, при которых энергия электромагнитного поля не возрастает, рассматриваются как результат взаимодействия поля с пассивной средой; генерирование и усиление электромагнитного поля — с активной средой.

В книге рассмотрены физические процессы в колебательных системах, включая объемные резонаторы и ферритовые волноводные устройства сверхвысоких частот, использующие эффект Фарадея и ферромагнитный резонанс, различия в структурах полей прямой и обратной волн.

Волноводные устройства сверхвысоких частот относятся к устройствам с распределенными параметрами, и электромагнитные процессы, происходящие в них, имеют волновой характер. Поэтому, если интерес представляют особенности передачи энергии через эти устройства, то нет необходимости определять электромагнитное поле в каждой точке системы сложным электродинамическим путем. Для расчета характеристик целесообразно воспользоваться более простым путем — теорией электрических цепей, оперирующей интегральными функциями (током, напряжением, сопротивлением, индуктивностью, емкостью).

Применяемые методы решений уравнений и основные понятия квантовой механики приведены в приложении, что дает возможность не нарушать логику и последовательность изложения основного материала.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам рукописи — кафедре «Физика и техника оптической связи» Нижегородского государственного технического университета (заведующий кафедрой профессор С.Б. Раевский) и профессору Г.Г. Шишкину. Их советы и ценные замечания способствовали улучшению содержания книги.

*Н.С. Голубева,  
В.Н. Митрохин*

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $\mathbf{A}$  — векторный потенциал  
 $\dot{\mathbf{A}}$  — то же в комплексной форме  
 $A_{nm}$  — коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения  
 $[\mathbf{A}]$  — матрица передачи  
 $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции  
 $\dot{\mathbf{B}}$  — то же в комплексной форме  
 $B_{mn}$  — коэффициент Эйнштейна для индуцированного поглощения  
 $B_{nm}$  — коэффициент Эйнштейна для индуцированного излучения  
 $C_0$  — погонная емкость длинной линии  
 $c$  — скорость света  
 $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции  
 $\dot{\mathbf{D}}$  — то же в комплексной форме  
 $e$  — заряд электрона  
 $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля  
 $\dot{\mathbf{E}}$  — то же в комплексной форме  
 $E_m$  — амплитуда напряженности электрического поля  
 $\dot{E}_m$  — комплексная амплитуда напряженности электрического поля  
 $\dot{E}_m(n\omega)$  — комплексная амплитуда напряженности  $n$ -й гармоники электрического поля  
 $E_d$  — действующее значение напряженности электрического поля  
 $\dot{E}_d$  — комплексное действующее значение напряженности электрического поля  
 $\mathbf{E}^{\text{ст}}$  — вектор напряженности стороннего электрического поля  
 $\dot{\mathbf{E}}^{\text{ст}}$  — то же в комплексной форме  
 $f$  — частота  
 $(F_{ik})$  — тензор напряженности электромагнитного поля  
 $(f_{ik})$  — тензор индукции  
 $g$  — коэффициент вырождения  
 $g(\omega)$  — форм-фактор спектральной линии  
 $\mathbf{H}$  — вектор напряженности магнитного поля  
 $\dot{\mathbf{H}}$  — то же в комплексной форме

- $H_m$  — амплитуда напряженности магнитного поля  
 $\dot{H}_m$  — комплексная амплитуда напряженности магнитного поля  
 $\dot{H}_m(n\omega)$  — комплексная амплитуда напряженности  $n$ -й гармоники магнитного поля  
 $H_d$  — действующее значение напряженности магнитного поля  
 $\dot{H}_d$  — комплексное действующее значение напряженности магнитного поля  
 $h, \hbar$  — постоянная Планка ( $\hbar = h/(2\pi)$ )  
 $\dot{i}$  — комплексное действующее значение переменного тока  
 $i$  — мгновенное значение тока  
 $\mathbf{J}$  — вектор плотности тока  
 $J_m$  — амплитуда плотности тока  
 $\dot{J}_m$  — комплексная амплитуда плотности тока  
 $\dot{J}_m(n\omega)$  — комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники плотности тока  
 $\mathbf{J}^{\text{ст}}$  — вектор плотности стороннего тока  
 $J_m^{\text{ст}}$  — амплитуда плотности стороннего тока  
 $\dot{J}_m^{\text{ст}}$  — комплексная амплитуда плотности стороннего тока  
 $\mathbf{J}_{\text{пол}}$  — вектор плотности тока поляризации  
 $\mathbf{J}_{\text{нам}}$  — вектор плотности тока намагниченности  
 $\mathbf{J}$  — четырехмерный вектор плотности тока  
 $J_{\text{пов}}$  — поверхностная плотность тока  
 $k$  — постоянная Больцмана  
 $\mathbf{k}$  — вектор комплексной постоянной распространения  
 $\dot{k}(n\omega)$  — комплексная постоянная распространения  $n$ -й гармоники  
 $\dot{k}_J(n\omega)$  — комплексная постоянная распространения  $n$ -й гармоники тока  
 $\dot{k}_M(n\omega)$  — комплексная постоянная распространения  $n$ -й гармоники намагниченности  
 $\dot{k}_p(n\omega)$  — комплексная постоянная распространения  $n$ -й гармоники поляризации  
 $k_0$  — постоянная распространения направляющей системы  
 $L_0$  — погонная индуктивность длинной линии  
 $l$  — длина  
 $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности  
 $\dot{M}_m$  — комплексная амплитуда намагниченности  
 $\dot{M}_m(n\omega)$  — комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники намагниченности  
 $(M_{ik})$  — тензор поляризации  
 $m$  — масса электрона  
 $n$  — коэффициент преломления

- $N_n$  — населенность  $n$ -го уровня  
 $\mathbf{P}$  — вектор поляризации  
 $\dot{P}_m$  — комплексная амплитуда поляризации  
 $\dot{P}_m(n\omega)$  — комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники поляризации  
 $\dot{P}$  — комплексная мощность  
 $P_0$  — действительная (активная) мощность  
 $P_r$  — реактивная мощность  
 $\dot{P}_E$  — комплексный коэффициент прохождения по электрическому полю  
 $\dot{P}_H$  — комплексный коэффициент прохождения по магнитному полю  
 $P_{0\text{ нам}}$  — средняя плотность мощности, связанная с намагниченностью  
 $P_{0\text{ пол}}$  — средняя плотность мощности, связанная с поляризацией  
 $P_{0\text{ пров}}$  — средняя плотность мощности, связанная с проводимостью  
 $P_{0\text{ погл}}^{\text{инд}}$  — средняя плотность мощности индуцированного поглощения  
 $P_{0\text{ изл}}^{\text{инд}}$  — средняя плотность мощности индуцированного излучения  
 $Q$  — добротность  
 $q$  — электрический заряд  
 $R_0$  — погонное сопротивление длинной линии  
 $[\mathbf{S}]$  — волновая матрица рассеяния  
 $T$  — абсолютная температура  
 $T$  — период  
 $[\mathbf{T}]$  — волновая матрица передачи  
 $t$  — время  
 $\dot{U}$  — комплексное действующее значение напряжения  
 $\mathbf{v}$  — вектор скорости  
 $V$  — объем  
 $v_{\text{гр}}$  — групповая скорость  
 $v_{\text{ф}}$  — фазовая скорость  
 $W$  — энергия  
 $w$  — плотность энергии  
 $w_0$  — средняя плотность энергии  
 $Y = g \pm jb$  — комплексная проводимость  
 $\mathbf{Z}$  — вектор Герца  
 $Z = R \pm jX$  — комплексное сопротивление  
 $Z_0$  — волновое сопротивление  
 $Z_{\text{ОН}}$  — волновое сопротивление направляющей системы при волне Н  
 $Z_{\text{ОЕ}}$  — волновое сопротивление направляющей системы при волне Е

- $\alpha$  — постоянная затухания  
 $\alpha_{\text{ус}}$  — постоянная усиления  
 $\alpha_{\text{пот}}$  — коэффициент потерь для активной среды  
 $\beta$  — фазовая постоянная  
 $\Gamma$  — комплексный коэффициент отражения по напряжению  
 $\dot{\Gamma}_E$  — комплексный коэффициент отражения по электрическому полю  
 $\dot{\Gamma}_H$  — комплексный коэффициент отражения по магнитному полю  
 $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость  
 $\epsilon_0$  — электрическая постоянная  
 $\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость  
 $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$  — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость  
 $\epsilon_a^{\text{л}}(n\omega)$  — линейная абсолютная диэлектрическая проницаемость на частоте  $n\omega$   
 $\theta$  — угол падения  
 $\theta_0$  — угол отражения  
 $\vartheta$  — угол преломления  
 $\lambda$  — длина волны  
 $\kappa$  — поверхностная плотность заряда  
 $\Lambda$  — длина волны в направляющей системе  
 $\lambda_p$  — резонансная длина волны  
 $\mu$  — относительная магнитная проницаемость  
 $\mu_0$  — магнитная постоянная  
 $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость  
 $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$  — комплексная абсолютная магнитная проницаемость  
 $\mu_a^{\text{л}}(n\omega)$  — линейная абсолютная магнитная проницаемость на частоте  $n\omega$   
 $\rho$  — объемная плотность заряда  
 $\rho_{\text{св}}$  — объемная плотность связанных зарядов  
 $\sigma$  — удельная проводимость  
 $\sigma^{\text{л}}(n\omega)$  — удельная линейная проводимость на частоте  $n\omega$   
 $\tau$  — линейная плотность заряда  
 $\varphi$  — фаза  
 $\Phi$  — скалярный потенциал  
 $\chi_э$  — электрическая восприимчивость  
 $\chi_м$  — магнитная восприимчивость  
 $\omega$  — круговая частота  
 $\omega_p$  — резонансная круговая частота  
 $\Phi$  — четырехмерный вектор-потенциал  
 $\Pi$  — вектор Пойнтинга

- $\dot{\mathbf{H}}$  — комплексный вектор Пойнтинга  
 $\Pi_0$  — среднее значение вектора Пойнтинга

### Общие математические обозначения

- $\mathbf{A}$  — вектор  
 $|\mathbf{A}|$  — модуль  
 $A_n$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{A}$   
 $A_\tau$  — тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{A}$   
 $A_{nm}$  — значения корней функции Бесселя  
 $B_{nm}$  — значения корней производной функции Бесселя  
 $e$  — основание натурального логарифма  
 $J_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка  
 $N_n(x)$  — функция Неймана  $n$ -го порядка

### Символы математических операций

- $[\mathbf{AB}]$  — векторное произведение  
 $(\mathbf{AB})$  — скалярное произведение  
 $\text{grad}$  — градиент  
 $\text{Grad}$  — четырехмерный градиент  
 $\text{div}$  — дивергенция  
 $\text{Div}$  — четырехмерная дивергенция  
 $\text{rot}$  — ротор  
 $\text{Rot}$  — четырехмерный ротор  
 $\nabla$  — оператор Гамильтона  
 $\Delta$  — оператор Лапласа  
 $\square$  — четырехмерный оператор Гамильтона  
 $\square^2$  — оператор Даламбера  
 $\int_S$  — интеграл по поверхности  $S$   
 $\oint_S$  — интеграл по замкнутой поверхности  $S$   
 $\int_L$  — интеграл по контуру  $L$   
 $\oint_L$  — интеграл по замкнутому контуру  $L$   
 $\int_V$  — интеграл по объему  $V$   
 $[a_{ik}]$  — матрица  
 $(\mu_{ik})$  — тензор  
 $\hat{L}$  — оператор



# 1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СРЕДЫ

## 1.1. Характеристики поля

*Электромагнитным полем* называется область пространства, характеризующаяся векторами электрических напряженности  $\mathbf{E}$  и индукции  $\mathbf{D}$ , магнитных напряженности  $\mathbf{H}$  и индукции  $\mathbf{B}$ . В общем случае нестационарного и неоднородного поля эти векторы являются функциями не только координат, но и времени:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_i, t); \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(x_i, t); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x_i, t); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x_i, t).$$

Единица напряженности электрического поля согласно международной системе единиц (СИ) — вольт на метр (В/м), электрической индукции — кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>), напряженности магнитного поля — ампер на метр (А/м), магнитной индукции — тесла (Тл).

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  однозначно определяются силовым воздействием поля на пробный заряд  $q_n$  (точечный малый заряд, не изменяющий исследуемое поле). Сила ( $\mathbf{H}$ ), действующая на пробный заряд  $q_n$ , помещенный в какой-либо точке пространства и движущийся со скоростью  $v$ , равна

$$\mathbf{F} = q_n \mathbf{E} + q_n [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Отсюда вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  определяется как сила, действующая на неподвижный ( $\mathbf{v} = 0$ ) единичный заряд:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_n}.$$

Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  определяется добавочной силой

$$\mathbf{F}_L = q_n [\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

называемой *силой Лоренца*. Под действием этой силы заряд движется по окружности постоянного радиуса в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ .

Электромагнитное поле наглядно можно представить с помощью силовых линий. Линии, в любой точке которых направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с касательной, называют электрическими силовыми линиями. Линии, в любой точке

которых направление вектора  $\mathbf{B}$  совпадает с касательной, называют силовыми линиями магнитной индукции. Силовые линии характеризуют не только направление, но и значение поля, так как число силовых линий на единицу площади, перпендикулярной силовым линиям, пропорционально напряженностям поля. Условимся электрические силовые линии представлять сплошными линиями, а магнитные — пунктирными.

Электромагнитное поле можно характеризовать так называемыми электромагнитными потенциалами — векторным  $\mathbf{A}$  и скалярным  $\phi$ . Эти величины связаны с векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (1.2)$$

т. е. электрическое поле создается зарядами и изменением во времени магнитного поля; поле магнитной индукции имеет соленоидальный характер.

## 1.2. Характеристики среды

Среда, в которой происходят электрические и связанные с ними магнитные явления, характеризуется диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью.

Связь векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  определяется свойствами среды. В вакууме

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

где  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  (Ф/м) — электрическая постоянная;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Гн/м) — магнитная постоянная.

В зависимости от значения удельной проводимости среды делятся на проводники ( $\sigma \geq 10^4$  См/м), полупроводники ( $10^{-10} < \sigma < 10^4$  См/м) и диэлектрики ( $\sigma < 10^{-10}$  См/м). Во многих задачах электродинамики удобно реальные проводник и диэлектрик заменять идеальными проводником ( $\sigma = \infty$ ) и диэлектриком ( $\sigma = 0$ ).

**Проводники** характеризуются наличием свободных зарядов, которые могут свободно перемещаться под действием электрического поля, при этом создается ток проводимости. В металлических проводниках это электроны, в жидких электролитах — ионы.

Плотность тока свободных зарядов  $\mathbf{J}$  (А/м<sup>2</sup>) зависит от напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если влиянием магнитного поля можно пренебречь, то плотность тока можно определить по выражению

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Если проводимость  $\sigma$  не зависит от напряженности электромагнитного поля, то приведенное соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Как показывает опыт, электрические токи в проводящей среде могут быть вызваны не только электрическим полем, но и другими причинами неэлектрического происхождения (в случае разности температур появляются токи термического происхождения). При этом

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ct}}),$$

где  $\mathbf{E}^{\text{ct}}$  — напряженность поля сторонних ЭДС, имеющих неэлектрическое происхождение, которое также вызывает ток проводимости. Если проводимость  $\sigma$  не зависит от напряженности поля, то приведенное соотношение выражает обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

В общем случае проводимость  $\sigma$  зависит от напряженности электромагнитного поля:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

**Диэлектрики** характеризуются наличием связанных зарядов, входящих в состав нейтральных молекул диэлектриков. Под действием электрического поля происходит смещение ядра атома, обладающего положительным зарядом, и искажение орбит отрицательных электронов. При этом центр тяжести отрицательных зарядов уже не совпадает с положительным зарядом ядра. Такая система эквивалентна диполю.

*Электрическим диполем* называется система двух одинаковых по величине, но разных по знаку зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных друг от друга на некотором расстоянии  $l$ . Электрический диполь характеризуется электрическим моментом

$$\mathbf{p}_s = ql. \quad (1.3)$$

Дипольный момент направлен от заряда  $-q$  к заряду  $+q$ .

Под действием внешнего электрического поля связанные заряды смещаются и диэлектрик поляризуется. Эта поляризация называется индуцированной и характеризуется вектором поляризации  $\mathbf{P}$  (Кл/м<sup>2</sup>):

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.4)$$

Вместе с тем поляризацию можно определить как электрический момент единицы объема, т. е.

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_s}{\Delta V} = \sum_{i=1}^n q_i l_i, \quad (1.5)$$

где  $\Delta \mathbf{p}_s$  — вектор электрического момента объема  $\Delta V$ ;  $n$  — число диполей в единице объема.

Если рассматривать связь зарядов в диполе как упругую, то очевидно, что

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_s \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

где  $\chi_s$  — безразмерный коэффициент, называемый электрической восприимчивостью.

Подставляя выражение (1.6) в (1.4), получаем

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_s) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_a \mathbf{E},$$

где  $\epsilon_a$  — коэффициент пропорциональности (Ф/м), называемый абсолютной диэлектрической проницаемостью,

$$\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0.$$

Здесь  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость.

Линейная зависимость вектора поляризации  $\mathbf{P}$  от напряженности электрического поля определяется значением поля. При достаточно больших значениях полей электрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость зависят от напряженности электрического поля:

$$\chi_s = \chi_s(E); \quad \epsilon_a = \epsilon_a(E).$$

Индукцированная поляризация состоит из электронной, ионной и ориентационной составляющих. Первая составляющая обусловлена смещением электронов относительно ядра в пределах атома, вторая — взаимным смещением отрицательных и положительных ионов кристаллической решетки. Ориентационная составляющая поляризации имеет место в диэлектрике, молекулы которого обладают собственным электрическим моментом с хаотической ориентацией их в отсутствие внешнего электрического поля. Такие молекулы называются полярными. Под действием внешнего поля  $\mathbf{E}$  молекулы ориентируются в соответствующем направлении. Примером могут служить молекулы воды, аммиака.

В электрическом поле процессы смещения электронов, ионов и ориентация молекул происходят не мгновенно, а требуют некоторого времени. Время, в течение которого достигается равновесное состояние  $1/e$  (37 %) всех частиц, называется *временем релаксации*.

Очевидно, что чем меньше масса частиц, тем меньше время релаксации; наименьшее время релаксации у электронов. Если период изменения электрического поля сравним с временем (или меньше его) релаксации ориентационного, ионного или электронного механизма поляризации, то соответствующий механизм перестает действовать.

С увеличением частоты поля перестают действовать сначала ориентационный, затем ионный и, наконец, электронный механизмы. Поэтому вектор поляризации  $\mathbf{P}$ , а следовательно, и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  с увеличением частоты уменьшаются. Этим объясняется изменение диэлектрической проницаемости воды от 80 при статическом поле до 1,77 при оптических частотах. Ориентационная поляризация, играющая значительную роль при низких частотах, при длинах волн, меньших 1 см, становится несущественной.

С увеличением температуры поляризуемость, а следовательно,  $\chi_s$  и  $\epsilon$  уменьшаются, так как ориентирующее действие электрического поля уменьшается, что обусловлено тепловыми колебаниями.

Вследствие поляризации внутри диэлектрика создается поле, противоположное по направлению внешнему электрическому полю. В диэлектрике конеч-

ных размеров напряженность внутреннего поля, равная сумме противоположно направленных напряженностей внешнего поля и поля связанных зарядов, будет меньше напряженности внешнего поля. Это явление называется деполяризацией.

Диэлектрики, в которых существуют самопроизвольно (спонтанно) поляризованные области (домены) и в отсутствие внешнего электрического поля, называются *сегнетоэлектриками* (*ферроэлектриками*). При наличии внешнего поля эти домены ориентируются, вследствие чего  $D \gg \epsilon_0 E$  и  $\epsilon \gg 1$ .

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков  $\epsilon = \epsilon(E)$  может составлять несколько тысяч единиц. Примером может служить титанат бария.

**Магнетики** — это среды, способные намагничиваться. Аналогично вектору поляризации вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  (А/м) определяется выражением

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_M}{\Delta V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{Ma_i} = \chi_M \mathbf{H},$$

где  $\Delta \mathbf{p}_M$  — вектор магнитного момента объема  $\Delta V$ ;  $\mathbf{p}_{Ma_i}$  — магнитный момент атома;  $n$  — число атомов в единице объема.

Вектор магнитной индукции определяют по формуле

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_a \mathbf{H}.$$

Здесь  $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость вещества;  $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$  — относительная магнитная проницаемость вещества.

*Элементарный магнитный диполь* — это движущийся по орбите электрон, обладающий орбитальным магнитным моментом. Кроме того, он имеет собственный спиновый момент. Во внешнем постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  возникает прецессия вектора магнитного момента электрона. В результате прецессии у электронов появляется дополнительный орбитальный момент, направленный против вектора  $\mathbf{H}_0$ .

Магнетики делят на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

У диамагнетиков магнитный момент атома  $\mathbf{p}_{Ma_i}$ , определяемый магнитными моментами электронов, в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю:

$$\mathbf{p}_{Ma_i} = 0.$$

Во внешнем магнитном поле вследствие возникновения отрицательного прецессионного магнитного момента  $\mathbf{p}_{пр}$  магнитный момент атома отрицательный и вектор  $\mathbf{M}$  направлен против вектора поля  $\mathbf{H}$ , что соответствует

$$\chi_M < 0.$$

У парамагнетиков и в отсутствие внешнего поля

$$\mathbf{p}_{Ma_i} \neq 0.$$

Однако вследствие хаотической ориентации атомных моментов намагниченность парамагнитного вещества равна нулю. В присутствии внешнего поля ( $H_0 \neq 0$ ) происходит соответствующая ориентация собственных атомных моментов, причем

$$P_{маг} \gg P_{пр},$$

и суммарный магнитный момент совпадает с направлением внешнего магнитного поля, т. е.

$$\chi_m > 0.$$

В ферромагнетиках существуют отдельные микроскопические области (домены) с линейными размерами порядка  $10^{-3}$  см. Внутри каждого домена все элементарные моменты параллельны друг другу, поэтому каждый домен обладает собственным магнитным моментом, значение которого определяется структурой вещества и не зависит от внешнего поля, т. е. каждый домен спонтанно намагничен до насыщения. Однако в отсутствие внешнего поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотически и суммарный магнитный момент равен нулю. Во внешнем магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов доменов по направлению внешнего поля, вследствие чего  $B \gg H$ , т. е.

$$\chi_m \gg 1 \text{ и } \mu \gg 1.$$

У ферромагнетиков магнитная проницаемость зависит от значения поля:

$$\mu = \mu(H).$$

В случае поля насыщения  $H_{нас}$  моменты всех доменов ориентируются в одном направлении и при дальнейшем увеличении значения поля намагниченность вещества остается практически неизменной. Это явление называется насыщением, а соответствующая намагниченность — намагниченностью насыщения  $M_{нас}$ .

Магнитная проницаемость, как и диэлектрическая, зависит от частоты поля и температуры. У магнетиков конечных размеров напряженность внутреннего поля меньше напряженности внешнего поля. Это явление называется размагничиванием.

Среда называется однородной, если параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  не зависят от координат, линейной — если эти параметры не зависят от значения векторов  $E$  и  $H$ , и изотропной (в электромагнитном смысле) — если эти параметры являются скалярными величинами, т. е. не зависят от направления векторов  $E$  и  $H$ .

Среда называется неоднородной, если хотя бы один из параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  зависит от координат, нелинейной — если хотя бы один из этих параметров зависит от напряженности поля, и анизотропной — если свойства среды зависят от направления векторов поля. В последнем случае параметры среды являются тензорными величинами.

Уравнения состояния среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_a \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_a \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{CT}}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для линейных сред эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{\text{л}} = \varepsilon_a^{\text{л}} \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}^{\text{л}}) = \mu_a^{\text{л}} \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma^{\text{л}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{CT}}) = \mathbf{J}^{\text{л}} + \mathbf{J}^{\text{CT}}, \end{aligned} \quad (1.7a)$$

для нелинейных сред:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{\text{л}} + \mathbf{P}^{\text{нл}} = \varepsilon_a^{\text{л}} \mathbf{E} + \mathbf{P}^{\text{нл}}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}^{\text{л}} + \mathbf{M}^{\text{нл}}) = \mu_a^{\text{л}} \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}^{\text{нл}}; \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}^{\text{л}} + \mathbf{J}^{\text{нл}} + \mathbf{J}^{\text{CT}} = \sigma^{\text{л}} \mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{нл}} + \mathbf{J}^{\text{CT}}. \end{aligned} \quad (1.7б)$$

Здесь  $\mathbf{P}^{\text{л}}$  и  $\mathbf{P}^{\text{нл}}$  — соответственно части вектора поляризации  $\mathbf{P}$ , линейно и нелинейно зависящие от поля  $\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{M}^{\text{л}}$  и  $\mathbf{M}^{\text{нл}}$  — соответственно линейная и нелинейная части вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ ;  $\mathbf{J}^{\text{л}}$  и  $\mathbf{J}^{\text{нл}}$  — соответственно линейная и нелинейная части плотности тока;  $\mathbf{J}^{\text{CT}}$  — плотность стороннего тока.

Если анизотропия проявляется в магнитном поле (анизотропный магнетик), то

$$B_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k.$$

Аналогично описывается анизотропия диэлектрических свойств и проводимости:

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k; \\ J_i &= \sigma_{ik} (E_k + E_k^{\text{CT}}). \end{aligned}$$

В случае анизотропных сред векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{B}$  не параллельны векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

### 1.3. Интегральные уравнения электромагнитного поля

В основу уравнений электромагнитного поля легли следующие экспериментально установленные законы и факты.

#### 1. Закон о возбуждении магнитного поля (закон Ампера):

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum_k i_k. \quad (1.8)$$

Циркуляция напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром (рис. 1.1). Этот закон указывает, что причиной существования магнитного поля является ток. Положительное направление обхода контура согласуется с положительным направлением нормали  $\mathbf{n}$ .

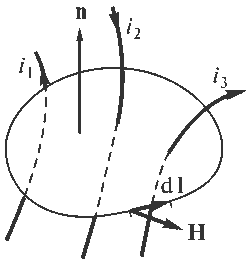


Рис. 1.1. К закону Ампера

**2. Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):**

$$e = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Наводимая в контуре ЭДС, равная циркуляции напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  вдоль всего контура проводника  $L$ , равна изменению во времени потока магнитной индукции  $\Phi$  ( $\mathbf{B}$ ) через площадь, ограниченную этим контуром (рис. 1.2). Это означает, что причиной создания электрического поля (ЭДС) является изменение магнитного потока во времени.

Знак « $\leftarrow$ » в правой части равенства (1.9) показывает, что направление индуцированной в проводнике ЭДС связано с направлением потока как направление вращения левого винта с его поступательным движением.

**3. Закон взаимодействия электрических зарядов (закон Кулона):**

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_r \frac{qq'}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (1.10)$$

Между двумя покоящимися зарядами действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Эта сила направлена от одного заряда к другому.

**4. Отсутствие магнитных зарядов, аналогичных электрическим.** Эти экспериментальные законы и факты обобщил Д.К. Максвелл в 1873 г. Правую часть уравнения закона Ампера (1.8) Максвелл представил в виде

$$\sum_k \mathbf{i}_k = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{см}}) d\mathbf{S},$$

где

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}})$$

— плотность тока проводимости, обусловленного движением свободных зарядов;  $\mathbf{J}_{\text{см}}$  — плотность тока смещения, обусловленного изменением электрического поля.

При воздействии переменного поля  $\mathbf{E}$  на диэлектрик в нем происходит смещение связанных зарядов в пределах молекулы, что также является током. Пусть за время  $dt$  электрическое поле  $\mathbf{E}$  изменяется на  $d\mathbf{E}$ , что вызовет смещение зарядов диполя на  $d\mathbf{l}$  и изменение дипольного момента  $\mathbf{p}_s$ , согласно выражению (1.3) на величину

$$d\mathbf{p}_s = q d\mathbf{l} = q \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = qv dt,$$

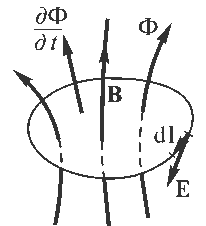


Рис 1.2. К закону Фарадея



где  $\mathbf{v}$  — скорость смещения связанных разноименных зарядов относительно друг друга.

Изменение электрического момента единицы объема, т. е. изменение вектора поляризации, согласно (1.5) определяется выражением

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{l}_i = \mathbf{v} \sum_{i=1}^n q_i = \rho_{\text{св}} \mathbf{v} = \mathbf{J}_{\text{пол}},$$

где  $\rho_{\text{св}}$  — объемная плотность одноименных связанных смещающихся зарядов;  $\mathbf{J}_{\text{пол}}$  — плотность тока поляризации.

Ток поляризации, как и ток проводимости, сопровождается магнитным полем. Магнитное поле появляется при изменении электрического поля и в вакууме. Экспериментально это было подтверждено Г. Герцем в 1886 г. Ток смещения в вакууме определяется выражением

$$\mathbf{J}_{\text{см.вак}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Таким образом, полный ток, создающий магнитное поле,

$$\mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

и первое интегральное уравнение электромагнитного поля имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{см}}) d\mathbf{S} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (I')$$

Представим правую часть уравнения о законе электромагнитной индукции (1.9) в виде

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

и получим второе интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (II')$$

Полагая в уравнении закона Кулона (1.10)

$$q' \ll q$$

и рассматривая  $q'$  как пробный заряд, определяем напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , создаваемого зарядом  $q$  в точке расположения пробного заряда, в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}$$

или

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Определяя поток электрической индукции через поверхность сферы радиуса  $r$ , получаем

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q.$$

Поскольку в общем случае

$$q = \int_V \rho dV,$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда ( $\text{Кл/м}^3$ ), запишем третье интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (\text{III})$$

представляющее собой известную теорему Гаусса: поток вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен значению заряда  $q$ , расположенного в объеме  $V$ , ограниченном этой поверхностью. Это уравнение является обобщением опытного факта о прерывности электрических силовых линий на поверхности зарядов.

Обобщая опытный факт об отсутствии магнитных зарядов, аналогичным электрическим, получаем четвертое интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{IV})$$

Это уравнение указывает на непрерывность силовых линий магнитной индукции.

Полученные интегральные уравнения определяют основные законы электромагнитных процессов. Однако эти уравнения не учитывают в явном виде конечное значение скорости распространения электромагнитного поля.

#### 1.4. Дифференциальные уравнения электромагнитного поля

Более общую математическую формулировку основных законов электромагнитного поля дал Д.К. Максвелл в 1873 г. в виде дифференциальных уравнений. Уравнения Максвелла применимы к более широкому диапазону волн. Однако они не пригодны для описания электромагнитных процессов на частотах, соответствующих волнам, длина  $\lambda$  которых сравнима с расстоянием  $d$  между элементарными частицами вещества. Условие применимости уравнений Максвелла

$$\lambda \gg d.$$

Первое дифференциальное уравнение электромагнитного поля получаем из первого интегрального уравнения (I), применяя теорему Стокса (см. § П.2) и приравнявая подынтегральные выражения, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{I})$$

Из уравнения (I) следует, что вихревое магнитное поле связано с наличием токов проводимости и смещения.

Второе дифференциальное уравнение получаем аналогично первому из второго интегрального уравнения (II')

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{II})$$

Отсюда следует, что вихревое электрическое поле связано с изменением во времени магнитной индукции.

Из уравнений (I) и (II) следует возможность распространения электромагнитных волн вдали от проводников с током, так как электрическое и магнитное поля могут существовать, взаимно возбуждая друг друга.

Третье дифференциальное уравнение получаем из третьего интегрального уравнения (III'), применяя теорему Остроградского—Гаусса (см. § П.2) и приравнявая подынтегральные выражения:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{III})$$

Из уравнения (III) следует, что электрическое поле кроме вихревой компоненты может иметь и потенциальную, определяемую электрическими зарядами.

Четвертое дифференциальное уравнение получаем аналогично третьему из четвертого интегрального уравнения (IV'):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Из этого уравнения следует, что нет магнитных зарядов, аналогичных электрическим.

Итак, имеем четыре уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

которые представляют собой пространственно-временное описание электромагнитного процесса. Однако этих уравнений еще не достаточно для решения задач, так как они не учитывают свойств среды, которые задаются зависимостью векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{B}$  от векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

### 1.5. Уравнения непрерывности (закон сохранения заряда)

Из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме (I), применяя к нему операцию дивергенции и учитывая формулу (П.10)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0,$$

получаем

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

т. е. линии полного тока должны быть замкнуты. Если линии тока проходят через проводники, диэлектрики или вакуум, то ток проводимости, протекающий в проводниках, замыкается на ток смещения в вакууме и диэлектрике.

Учитывая уравнение (III) и меняя местами операции  $\operatorname{div}$  и  $\frac{\partial}{\partial t}$ , получаем пятое дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{V})$$

выражающее закон сохранения заряда и называемое уравнением непрерывности. Интегрируя по объему  $V$  и применяя теорему Остроградского — Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, dV = \oint_S \mathbf{J} \, d\mathbf{S},$$

этот закон можно записать в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{J} \, d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV \quad (\text{V}')$$

— ток через замкнутую поверхность равен убыли заряда в объеме, ограниченном этой поверхностью.

### 1.6. Линейные, нелинейные и параметрические электромагнитные процессы в средах

Электромагнитные процессы описываются уравнениями Максвелла (I)—(IV) и уравнениями состояния среды (1.7).

Электромагнитный процесс, протекающий в среде, свойства которой не зависят от напряженности электромагнитного поля (линейная среда), называется линейным. Уравнения Максвелла (I)—(IV) с учетом уравнений (1.7) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Основные свойства электромагнитных процессов вытекают из линейности описывающих их уравнений:

- выполнение принципа суперпозиции. Различные частотные составляющие поля распространяются независимо друг от друга;
- амплитуды частотных составляющих распространяющегося поля пропорциональны амплитудам соответствующих составляющих источника (закон Ома);
- спектр распространяющегося поля неизменен, в нем нет составляющих, не содержащихся в спектре источника.

Электромагнитные процессы, протекающие в средах, свойства которых зависят от напряженности распространяющегося электромагнитного поля, называются нелинейными. Нелинейные процессы связаны с нелинейными свойствами среды, которые проявляются в нелинейном взаимодействии среды с распространяющимся электромагнитным полем.

Среда называется нелинейной, если хотя бы один из ее параметров (диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , магнитная проницаемость  $\mu$  или проводимость  $\sigma$ ) зависит от напряженности распространяющегося поля.

Электромагнитные процессы в нелинейных средах с учетом уравнений состояния среды (1.7а) описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений Максвелла (I)—(IV). Принцип суперпозиции для таких уравнений невыполним. Электромагнитные поля, возбужденные различными источниками или различными частотными составляющими спектра источника и распространяющиеся в нелинейной среде, взаимодействуют друг с другом. Изменение параметров среды под влиянием одной из составляющих поля оказывает влияние на распространение других составляющих. Взаимодействие распространяющегося поля со средой приводит к существенному изменению поля. Характер этого изменения зависит от природы и свойств нелинейной среды, напряженности распространяющегося поля. При распространении в нелинейной среде в спектре электромагнитного поля появляются новые частоты, не содержащиеся в спектре источника. Этим нелинейные электромагнитные процессы принципиально отличаются от линейных. При этом амплитуды частотных составляющих распространяющегося поля оказываются непропорциональными амплитудам частотных составляющих источника.

В радиоэлектронике наряду с нелинейными процессами широкое применение нашли параметрические процессы. Если параметры среды не зависят от напряженности распространяющегося поля, но изменяются во времени по определенному закону внешними силами (электрические, механические и др.), то такая среда называется параметрической и явления, происходящие в ней, — параметрическими.

Электромагнитный процесс в параметрической среде описывается системой линейных дифференциальных уравнений Максвелла (I)—(IV) с коэффициентами, зависящими от времени. Для таких уравнений выполняется принцип суперпозиции, и составляющие распространяющегося поля не взаимодействуют друг с другом; при этом также наблюдается преобразование частоты. Спектр распространяющегося поля не зависит от напряженности поля, а определяется лишь спектром источника и изменением во времени параметров среды.

Нелинейные и параметрические процессы проявляются как обратное воздействие среды на распространяющееся поле. При распространении электромагнитного поля и в нелинейной, и в параметрической средах изменяется спектр частот. Основное различие этих процессов состоит в том, что нелинейные процессы зависят от интенсивности распространяющегося поля, а параметрические — не зависят.

Примерами нелинейных и параметрических процессов являются усиление и генерирование электрических колебаний, детектирование, умножение, деление и смешение частот.

В основе генерирования и усиления лежит взаимодействие электромагнитного поля с активной средой. В электронных приборах (триодах, клистродах, магнетронах, лампах бегущей волны и т. п.) энергия постоянного тока преобразуется в энергию высокой частоты в результате взаимодействия движущихся электронов с электромагнитным полем. Усиление или генерирование в этих приборах происходит за счет кинетической энергии электронов, которая получается от источников постоянного тока. В квантовых генераторах и усилителях внутренняя энергия возбужденных атомов, молекул или ионов преобразуется в энергию электромагнитного излучения, а возбуждение частиц осуществляется за счет внешних источников энергии (электрических, тепловых и др.).

### 1.7. Граничные условия

Для решения уравнений Максвелла (I)—(IV) необходимы дополнительные данные, позволяющие определить постоянные интегрирования. К таким данным относятся граничные условия, т. е. условия на границах разнородных сред.

Рассмотрим границу раздела двух сред с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ . Граница раздела этих двух сред может быть заряжена свободными зарядами, располагающимися на поверхности раздела в бесконечно тонком слое с поверхностной плотностью заряда  $\kappa$  (Кл/м<sup>2</sup>), и по ней могут течь поверхностные токи проводимости с поверхностной плотностью  $J_{\text{пов}}$  (А/м).

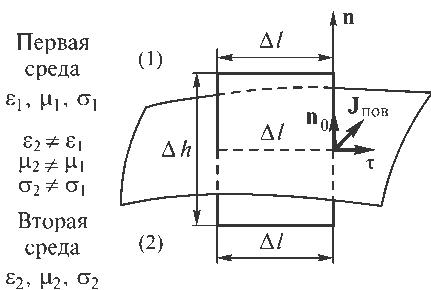
Примером поверхностных зарядов могут служить заряды, возникающие на поверхности проводника, внесенного в электростатическое поле, а примером поверхностных токов — токи, возникающие на поверхности проводника, в поле высокой частоты.

**Граничные условия для тангенциальных составляющих** определим, вычисляя циркуляцию вектора по контуру, находящемуся частично в первой 1, частично во второй 2 среде и стягивающемуся к линии раздела (рис. 1.3).

Согласно второму интегральному уравнению (II')

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}.$$

Применим это уравнение к контуру, показанному на рис. 1.3. Интеграл в левой части распадается на четыре интеграла, взятых по сторонам контура. При  $\Delta h \rightarrow 0$  интегралы, взятые по сторонам длиной  $\Delta h$ , обратятся в нуль. В нуль обратится и стоящий справа интеграл, взятый по поверхности, так как



**Рис. 1.3.** К определению граничных условий для тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

площадь  $\Delta l \Delta h$ , ограниченная контуром, будет равна нулю. Считая контур достаточно малым, можно принять, что поле вдоль отдельных участков контура постоянно. Таким образом,

$$E_{\tau(1)} \Delta l - E_{\tau(2)} \Delta l = 0.$$

Здесь  $E_{\tau(2)}$  со знаком «-», так как согласно направлению обхода контура  $\mathbf{E}_{(2)}$  проецируется на направление  $-\tau_0$ . Отсюда

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)},$$

т. е. на поверхности раздела двух сред тангенциальная составляющая напряженности электрического поля непрерывна. Это условие можно записать в векторной форме как

$$[\mathbf{n}_0(\mathbf{E}_{(1)} - \mathbf{E}_{(2)})] = 0,$$

где  $\mathbf{n}_0$  — орт (единичный вектор) нормали к поверхности раздела.

Аналогично из первого интегрального уравнения Максвелла ( $\Gamma'$ )

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$$

получим граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля.

После интегрирования по контуру (см. рис. 1.3) и перехода к пределу при  $\Delta h \rightarrow 0$  получим

$$H_{\tau(1)} \Delta l - H_{\tau(2)} \Delta l = \Delta l \lim_{\Delta h \rightarrow 0} J \Delta h,$$

так как интегралы, взятые по сторонам  $\Delta h$ , и поток  $\mathbf{D}$  через площадь  $\Delta l \Delta h$  равны нулю;  $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} J \Delta h$  представляет собой ток, текущий в бесконечно тонкой пленке, т. е.

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} J \Delta h = J_{\text{пов}}.$$

Таким образом,

$$H_{\tau(1)} - H_{\tau(2)} = J_{\text{пов}},$$

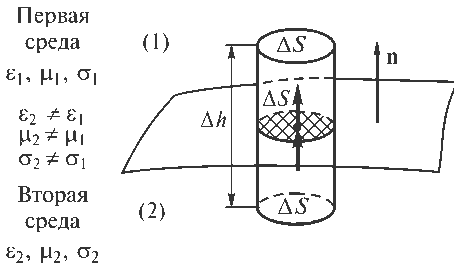
т. е. тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля изменяется при переходе через границу раздела, если поверхностный ток не равен нулю. В противном случае

$$H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)},$$

т. е. тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на поверхности раздела при отсутствии поверхностного тока непрерывна.

В общем случае это выражение в векторной форме имеет вид

$$[\mathbf{n}_0(\mathbf{H}_{(1)} - \mathbf{H}_{(2)})] = \mathbf{J}_{\text{пов}}.$$



**Рис. 1.4.** К определению граничных условий для нормальных составляющих векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$

Граничные условия для тангенциальных составляющих плотности тока проводимости получим из условия для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}.$$

Поскольку

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

то

$$\frac{J_{\tau(1)}}{J_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

т. е. тангенциальные составляющие плотности тока на границе раздела терпят разрыв.

**Граничные условия для нормальных составляющих** определим, вычисляя поток вектора через поверхность, расположенную в первой и второй средах и стягивающуюся к поверхности раздела.

Согласно четвертому интегральному уравнению (IV')

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0.$$

Применим это уравнение к цилиндру, представленному на рис. 1.4. Считая магнитное поле на верхнем и нижнем основаниях постоянным вследствие малости цилиндра, а поток через боковую поверхность при  $\Delta h \rightarrow 0$  равным нулю, с учетом направления нормали к поверхности получаем

$$B_{n(1)}\Delta S - B_{n(2)}\Delta S = 0.$$

Отсюда

$$B_{n(1)} = B_{n(2)},$$

т. е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции на поверхности раздела непрерывна. В векторной форме это выражение имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{B}_{(1)} - \mathbf{B}_{(2)})) = 0.$$

Таким же образом, применяя интегральное уравнение (III'), получаем

$$D_{n(1)} - D_{n(2)} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho \Delta h = \kappa,$$

т. е. нормальная составляющая вектора электрической индукции изменяется скачком, если на поверхности раздела имеются свободные заряды. В векторной форме последнее выражение имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{D}_{(1)} - \mathbf{D}_{(2)})) = \kappa.$$

Условие для нормальных составляющих вектора плотности тока проводимости найдем из уравнения непрерывности для полного тока



$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0$$

или

$$\oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S} = 0.$$

Аналогично определению граничных условий для нормальных составляющих векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  нормальные составляющие плотности тока проводимости определяются как

$$J_{n(1)} + \frac{\partial D_{n(1)}}{\partial t} = J_{n(2)} + \frac{\partial D_{n(2)}}{\partial t}$$

или

$$J_{n(2)} = J_{n(1)} + \frac{\partial}{\partial t}(D_{n(1)} - D_{n(2)}) = J_{n(1)} + \frac{\partial \kappa}{\partial t},$$

т. е. нормальные составляющие плотности тока проводимости на границе раздела терпят разрыв.

В векторной форме это условие имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{J}_{(2)} - \mathbf{J}_{(1)})) = \frac{\partial \kappa}{\partial t}.$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

| Векторы                  | Составляющие   |   |
|--------------------------|--|---|
|                          | тангенциальные   | нормальные  |
| $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ | $E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}$  | $D_{n(1)} - D_{n(2)} = \kappa$<br>$D_{n(1)} = D_{n(2)}$ при $\kappa = 0$  |
| $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ | $H_{\tau(1)} - H_{\tau(2)} = J_{\text{пов}}$<br>$H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)}$ при $J_{\text{пов}} = 0$ | $B_{n(1)} = B_{n(2)}$   |
| $\mathbf{J}$             | $\frac{J_{\tau(1)}}{J_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  | $J_{n(2)} = J_{n(1)} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}$<br>$J_{n(1)} = J_{n(2)}$ при $\kappa = 0$ или $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$ |

**Примечание.**  $\kappa$  — поверхностная плотность заряда ( $\text{Кл}/\text{м}^2$ ), т. е. плотность заряда, не занимающего объем, а сосредоточенного на геометрической поверхности (на бесконечно тонкой пленке);  $J_{\text{пов}}$  — поверхностная плотность тока ( $\text{А}/\text{м}$ ), т. е. плотность тока, текущего по поверхности и не занимающего объем.

В частном случае, когда второй средой является идеальный проводник, в котором поле всегда равно нулю, граничные условия принимают вид

$$E_{\tau} = 0; \quad H_{\tau} = J_{\text{пов}}; \quad E_n = \frac{\kappa}{\varepsilon_a}; \quad H_n = 0,$$

или в векторной форме

$$[\mathbf{n}_0 \mathbf{H}] = \mathbf{J}_{\text{пов}}; \quad [\mathbf{n}_0 \mathbf{E}] = 0; \quad (\mathbf{n}_0 \mathbf{H}) = 0; \quad (\mathbf{n}_0 \mathbf{E}) = \frac{\kappa}{\varepsilon_a}.$$

В соответствии с этими условиями электрические силовые линии подходят к поверхности идеального проводника по направлению нормали, а магнитные силовые линии — по касательной.

### 1.8. Теорема Умова — Пойнтинга

В электромагнитном поле происходит перенос энергии от источников к потребителю. Характер движения энергии определяется теоремой Умова — Пойнтинга.

Умножим скалярно первое уравнение Максвелла (I) на вектор  $\mathbf{E}$ , а второе уравнение (II) — на вектор  $\mathbf{H}$  и, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J} \mathbf{E}.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения по формуле (II.15)

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

а правую часть с учетом первого и второго уравнений состояния среды (1.7)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

получаем

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{J} \mathbf{E} = 0. \quad (1.11)$$

Это теорема Умова — Пойнтинга, представляющая собой закон сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме.

Интегрируя (1.11) по произвольному объему и применяя теорему Остроградского — Гаусса к интегралу от дивергенции, получаем теорему Умова — Пойнтинга в интегральной форме:

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} dV + \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV + \int_V \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{J} \mathbf{E} dV = 0. \quad (1.12)$$

Здесь  $[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{\Pi}$  — вектор Пойнтинга, представляющий собой плотность потока мощности ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ) (направление этого вектора совпадает с направлением движения энергии);  $\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$  — мощность, входящая (если  $\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} < 0$ ) или излучаемая

(если  $\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} > 0$ ) через поверхность  $S$ . В частных случаях это выражение пред-

ставляет собой мощность, либо излучаемую антенной или световым прожектором, либо мощность, отводимую из данного объема проводами или волноводами, пере-

секающими поверхность, ограничивающую этот объем;  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} dV$  —

изменение энергии в единицу времени в объеме  $V$  в вакууме;  $\int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV$  — из-

менение энергии в единицу времени в объеме  $V$  в среде, обусловленное поляри-

зацией;  $\int_V \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV$  — изменение энергии в единицу времени в объеме  $V$  в

среде, обусловленное намагниченностью;  $\int_V \mathbf{J} \mathbf{E} dV$  — изменение энергии в еди-

ницу времени в объеме  $V$  в среде, обусловленное проводимостью.

Плотность мощности, обусловленная взаимодействием поля с проводящей средой, равна

$$p_{\text{пров}} = \mathbf{J} \mathbf{E}. \quad (1.13a)$$

Плотности мощности, обусловленные процессами поляризации и намагничивания среды, определяются выражениями

$$p_{\text{пол}} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}; \quad (1.13б)$$

$$p_{\text{нам}} = \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (1.13в)$$

В нелинейной среде в случае монохроматического источника

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_E(n\omega)];$$

$$\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_H(n\omega)];$$

$$\mathbf{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_P(n\omega)];$$

$$\mathbf{M} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_M(n\omega)];$$

$$\mathbf{J} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{J}_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_J(n\omega)]$$

и согласно (1.13a)—(1.13в) плотности мощности имеют вид

$$p_{\text{пров}} = \sum_{q,r=0}^{\infty} \mathbf{J}_m(q\omega) \mathbf{E}_m(r\omega) \cos[q\omega t - \varphi_J(q\omega)] \cos[r\omega t - \varphi_E(r\omega)]; \quad (1.14a)$$

$$p_{\text{пол}} = - \sum_{q,r=0}^{\infty} r\omega \mathbf{E}_m(q\omega) \mathbf{P}_m(r\omega) \cos[q\omega t - \varphi_E(q\omega)] \sin[r\omega t - \varphi_P(r\omega)]; \quad (1.14б)$$

$$p_{\text{нам}} = -\mu_0 \sum_{q,r=0}^{\infty} r\omega \mathbf{H}_m(q\omega) \mathbf{M}_m(r\omega) \cos[q\omega t - \varphi_H(q\omega)] \sin[r\omega t - \varphi_M(r\omega)]. \quad (1.14в)$$

В выражениях (1.14a)—(1.14в) с учетом волнового характера процессов

$$\varphi_E(n\omega) = \mathbf{k}(n\omega)\mathbf{r} + \varphi_E;$$

$$\varphi_H(n\omega) = \mathbf{k}(n\omega)\mathbf{r} + \varphi_H;$$

$$\varphi_P(n\omega) = \mathbf{k}_P(n\omega)\mathbf{r} + \varphi_P;$$

$$\varphi_M(n\omega) = \mathbf{k}_M(n\omega)\mathbf{r} + \varphi_M;$$

$$\varphi_J(n\omega) = \mathbf{k}_J(n\omega)\mathbf{r} + \varphi_J,$$

где  $\mathbf{k}(n\omega)$ ,  $\mathbf{k}_P(n\omega)$ ,  $\mathbf{k}_M(n\omega)$  и  $\mathbf{k}_J(n\omega)$  — постоянные распространения гармоник поля, поляризации, намагниченности и тока соответственно.

Слагаемые, стоящие под знаком суммы в выражениях (1.14a)—(1.14в) для мгновенных плотностей мощности, определяют обмен энергией между любыми гармониками поля и тока, поля и поляризации, поля и намагниченности. Если эти слагаемые положительны, то энергия переходит от поля в среду, если отрицательны — от среды к полю. В каждой точке пространства этот процесс в зависимости от времени направлен в одну или другую сторону. В фиксированный момент времени в одних точках пространства процесс может быть направлен в одну сторону, в других — в другую.

Средние плотности мощности, связанные с проводимостью, поляризацией и намагничиванием среды, определяются соответственно выражениями

$$p_{0\text{пров}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{J} \mathbf{E} dt;$$

$$p_{0\text{пол}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dt;$$

$$p_{0\text{нам}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dt.$$

Здесь  $T$  — время усреднения, намного большее периода колебаний ( $T \gg 2\pi/\omega$ ).

При усреднении следует учитывать, что отличаться от нуля будут лишь слагаемые, не зависящие от времени, т. е. соответствующие  $q-r=0$ , и согласно (П.71) и (П.72) получаем

$$\begin{aligned}
 p_{\text{пров}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{J}_m(n\omega) \mathbf{E}_m(n\omega) \cos \varphi_{JE}(n\omega) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{J}}(n\omega) \dot{\mathbf{E}}^*(n\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{J}}^*(n\omega) \dot{\mathbf{E}}(n\omega); \quad (1.15a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\text{пол}} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n\omega \mathbf{E}_m(n\omega) \mathbf{P}_m(n\omega) \sin \varphi_{EP}(n\omega) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{E}}(n\omega) \dot{\mathbf{P}}^*(n\omega) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{E}}^*(n\omega) \dot{\mathbf{P}}(n\omega); \quad (1.15б)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\text{нам}} &= -\frac{1}{2} \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\omega \mathbf{H}_m(n\omega) \mathbf{M}_m(n\omega) \sin \varphi_{HM}(n\omega) = \\
 &= \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{H}}(n\omega) \dot{\mathbf{M}}^*(n\omega) = -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{\mathbf{H}}^*(n\omega) \dot{\mathbf{M}}(n\omega), \quad (1.15в)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_{JE}(n\omega) = \varphi_J(n\omega) - \varphi_E(n\omega)$ ,  $\varphi_{EP}(n\omega) = \varphi_E(n\omega) - \varphi_P(n\omega)$ ,  $\varphi_{HM}(n\omega) = \varphi_H(n\omega) - \varphi_M(n\omega)$  — сдвиги по фазе во времени между  $\mathbf{J}(n\omega)$  и  $\mathbf{E}(n\omega)$ ,  $\mathbf{E}(n\omega)$  и  $\mathbf{P}(n\omega)$ ,  $\mathbf{H}(n\omega)$  и  $\mathbf{M}(n\omega)$  соответственно.

При  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_{JE}(n\omega) < \frac{\pi}{2}$  слагаемые выражения (1.15а) больше нуля и они определяют мощность, поглощаемую средой; при  $\frac{\pi}{2} < \varphi_{JE}(n\omega) < \frac{3\pi}{2}$  среда отдает энергию полю.

При  $\pi < \varphi_{EP, HM}(n\omega) < 2\pi$  слагаемые выражений (1.15б) и (1.15в) больше нуля и определяют мощность, отдаваемую полем среде и расходуемую на увеличение поляризации и намагниченности среды; при  $0 < \varphi_{EP, HM}(n\omega) < \pi$  слагаемые меньше нуля и определяют мощность, отдаваемую средой распространяющемуся полю. Эффективный обмен энергией возможен лишь между одинаковыми гармониками поля и поляризации или намагниченности. Максимум энергии передается при сдвиге по фазе  $\pm \pi/2$ .

Полагая для простоты среду линейной (принципиального значения это предположение не имеет), перепишем выражение (1.12) с учетом  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ct}})$  в следующем виде:

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} dV + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV - \int_V \mathbf{J}\mathbf{E}^{\text{ct}} dV = 0$$

или

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + Q + P^{\text{ct}} = 0,$$

где  $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} dV$  — изменение энергии в единицу времени в объ-

еме  $V$ ;  $Q = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV$  — мощность, преобразуемая в тепловую энергию по закону

Джоуля — Ленца (потери);  $P^{ct} = -\int_V \mathbf{J} \mathbf{E}^{ct} dV$  — мощность сторонних источников.

Если  $P^{ct} < 0$ , источники отдают энергию полю, если  $P^{ct} > 0$ , энергия поля переходит к источникам.

Под токами сторонних источников, которые в системе уравнений считаются заданными, понимают токи, возбуждающие электромагнитное поле, но создаваемые иными причинами, иным электромагнитным полем, чем поле, описываемое уравнениями.

Для создания электромагнитного поля обычно используют излучающий элемент (антенну), энергия к которому подводится от генератора соединительной линией. Строго говоря, источником электромагнитного поля являются все токи сложной системы: генератор, линия, излучатель. Однако при решении задач считают, что источником поля являются лишь токи излучателя, так как практически генератор и соединительная линия полностью экранированы и участия в образовании электромагнитного поля во внешнем пространстве не принимают. Поэтому генератор и соединительную линию при исследовании электромагнитного поля из рассмотрения можно исключить, считая, что они играют лишь роль источника сторонней напряженности поля  $\mathbf{E}^{ct}$ , приложенной непосредственно к излучателю ( $\mathbf{E}^{ct}$  также считается заданной).

Если  $P^{ct} < 0$ , то

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + Q = P^{ct},$$

т. е. мощность сторонних источников, распределенных в исследуемом объеме, расходуется на теплоту, выделяющуюся в этом объеме, изменение энергии в нем и излучение через поверхность, ограничивающую этот объем.

Если  $P^{ct} > 0$ , то

$$-\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial t} + Q + P^{ct},$$

т. е. приток мощности через поверхность, ограничивающую исследуемый объем, расходуется на теплоту, выделяющуюся в этом объеме, изменение энергии в нем и возбуждение сторонних источников, размещенных в этом объеме.

### 1.9. Уравнения электромагнитного поля в частных производных второго порядка (волновые уравнения)

Уравнения для напряженностей поля. Уравнения Максвелла (I) и (II) с учетом уравнений состояния среды (1.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

а с учетом (1.7б) — в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_a^n \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{пл}}}{\partial t} + \sigma^n \mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{пл}} + \mathbf{J}^{\text{ср}}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a^n \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}^{\text{пл}}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.16a)$$

Чтобы определить волновое уравнение для напряженности электрического поля, возьмем  $\operatorname{rot}$  от обеих частей второго уравнения системы (1.16)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M}.$$

Подставляя сюда  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  из первого уравнения системы (1.16), получаем волновое уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (1.17)$$

Первый и третий члены правой части уравнения (1.17) характеризуют дополнительные источники поля в виде токов поляризации и намагниченности, так как плотности этих токов определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{пол}} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}; \\ \mathbf{J}_{\text{нам}} &= \operatorname{rot} \mathbf{M}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{J}_{\text{пол}}$  — плотность тока поляризации;  $\mathbf{J}_{\text{нам}}$  — плотность тока намагниченности.

Действительно, элементарный магнитный диполь можно представить как ток  $i$ , протекающий по контуру, ограничивающему элементарную площадку  $dS$ . При этом магнитный момент магнитного диполя определяется выражением

$$\mathbf{m} = i dS,$$

или

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} dV,$$

где  $dV$  — элементарный объем.

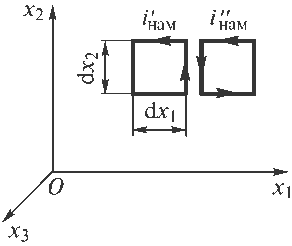


Рис. 1.5. К определению тока намагниченности

Если намагниченность среды однородна, то токи на общих границах соседних контуров, текущие в противоположные стороны, взаимно компенсируются и суммарный магнитный ток равен нулю. Если намагниченность неоднородна, то токи, текущие в соседних контурах, неодинаковы и компенсация не происходит. При этом суммарный магнитный ток не равен нулю.

Рассмотрим для простоты случай, когда намагниченность направлена по оси  $x_3$ , т. е.

$$\mathbf{M} = (0, 0, M_3),$$

что соответствует расположению контуров элементарных диполей в плоскости  $x_1Ox_2$ . Рассмотрим два контура с токами  $i'_{\text{нам}}$  и  $i''_{\text{нам}}$  (рис. 1.5). Если намагниченность среды неоднородна, то токи  $i'_{\text{нам}}$  и  $i''_{\text{нам}}$  неодинаковы, т. е.

$$i'_{\text{нам}} = \frac{m'}{dS} = \frac{M_3 dV}{dS} = \frac{M_3 dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2};$$

$$i''_{\text{нам}} = \frac{m''}{dS} = \frac{\left(M_3 + \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx_1\right) dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2}.$$

Ток на общей границе контуров

$$i_{\text{нам}} = i''_{\text{нам}} - i'_{\text{нам}} = \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx_1 dx_3,$$

соответствующая плотность тока

$$J_{\text{нам}} = \frac{i_{\text{нам}}}{dx_1 dx_3} = \frac{\partial M_3}{\partial x_1}.$$

В общем случае

$$\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3);$$

$$\mathbf{J}_{\text{нам}} = \text{rot } \mathbf{M}.$$

Если свободные заряды отсутствуют ( $\rho = 0$ ), то

$$\text{div } \mathbf{D} = 0$$

и согласно (П.11)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}.$$

При этом волновое уравнение (1.17) будет иметь вид

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{M}. \quad (1.18)$$



Аналогичным образом, взяв  $\text{rot}$  от обеих частей первого уравнения системы (1.16) и подставив  $\text{rot } \mathbf{E}$  из второго уравнения, получим волновое уравнение для напряженности магнитного поля

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{M} + \text{rot } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{J}$$

или с учетом того, что

$$\text{div } \mathbf{H} = 0,$$

найдем

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{M} - \text{rot } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{J}. \quad (1.19)$$

Точно так же можно получить волновые уравнения для напряженностей поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  из системы уравнений (1.16а):

$$\begin{aligned} & \text{rot rot } \mathbf{E} + \mu_a^n \sigma^n \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a^n \varepsilon_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \\ & = -\mu_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t^2} - \mu_a^n \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{нл}}}{\partial t} - \mu_a^n \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ст}}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{M}^{\text{нл}}; \\ & \text{rot rot } \mathbf{H} + \mu_a^n \sigma^n \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu_a^n \varepsilon_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \\ & = -\varepsilon_a^n \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{\text{нл}}}{\partial t^2} - \sigma^n \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}^{\text{нл}}}{\partial t} + \text{rot } \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{J}^{\text{нл}} + \text{rot } \mathbf{J}^{\text{ст}}, \end{aligned} \quad (1.17a)$$

или

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{E} - \mu_a^n \sigma^n \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_a^n \varepsilon_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \\ & = \mu_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t^2} + \mu_a^n \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{нл}}}{\partial t} + \mu_a^n \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ст}}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{M}^{\text{нл}}; \\ & \Delta \mathbf{H} - \mu_a^n \sigma^n \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a^n \varepsilon_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \\ & = \varepsilon_a^n \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{\text{нл}}}{\partial t^2} + \sigma^n \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}^{\text{нл}}}{\partial t} - \text{rot } \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{J}^{\text{нл}} - \text{rot } \mathbf{J}^{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (1.18a)$$

Здесь члены, содержащие множители  $\mathbf{P}^{\text{нл}}$ ,  $\mathbf{M}^{\text{нл}}$ ,  $\mathbf{J}^{\text{нл}}$ , можно рассматривать как дополнительные источники поля, порождающие различные нелинейные эффекты (появление гармоник, смешение частот, выпрямление и т. д.)

В случае линейной среды уравнения (1.18а) и (1.19а) имеют вид

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_a^n \sigma^n \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_a^n \varepsilon_a^n \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_a^n \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ст}}}{\partial t}; \quad (1.20)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_a^\pi \sigma^\pi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a^\pi \varepsilon_a^\pi \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}}, \quad (1.21)$$

или, так как

$$\begin{aligned} \mu_a^\pi \sigma^\pi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a^\pi \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{ct}}}{\partial t} &= \mu_a^\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; \\ \mu_a^\pi \sigma^\pi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}} &= -\sigma^\pi \text{rot } \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{J}^{\text{ct}} - \text{rot } \mathbf{J}, \end{aligned}$$

то

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_a^\pi \varepsilon_a^\pi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_a^\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; \quad (1.22)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_a^\pi \varepsilon_a^\pi \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}. \quad (1.23)$$

Векторные уравнения (1.22) и (1.23) эквивалентны шести скалярным, в то время как уравнения Максвелла (I)—(IV) эквивалентны восьми скалярным уравнениям.

Неоднородные векторные уравнения (1.22) и (1.23) называются неоднородными векторными волновыми уравнениями, или уравнениями Даламбера.

**Уравнения для электромагнитных потенциалов.** Эти уравнения получим для линейной среды. Из уравнения Максвелла (IV)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

следует, что поле магнитной индукции соленоидально, и вектор  $\mathbf{B}$  можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный электромагнитный потенциал.

Если среда линейна, то

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (II), получаем

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Согласно (П.9)

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{grad}(-\varphi).$$

Отсюда

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

где  $\varphi$  — электромагнитный скалярный потенциал.

Потребуем, чтобы напряженности поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , выраженные через потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , удовлетворяли уравнению (I). Подставим (1.24) и (1.25) в (I):

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{J} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right).$$

Преобразовав  $\text{rot rot } \mathbf{A}$  по формуле (П.11), получим

$$-\Delta \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \nabla \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu_a \mathbf{J}. \quad (1.26)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным, связывающим четыре скалярных величины  $A_i$  и  $\varphi$ . Чтобы решить уравнение (1.26), необходимо ввести дополнительное условие для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , называемое условием калибровки:

$$\nabla \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.27)$$

Тогда (1.26) запишем в виде

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}. \quad (1.28)$$

Уравнение для  $\varphi$  найдем подстановкой (1.25) в (III):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} - \Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

подставив значение  $\nabla \mathbf{A}$ , из (1.27) получим

$$\Delta \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.29)$$

Уравнения (1.28) и (1.29) представляют собой неоднородные волновые уравнения, связывающие скалярный и векторный потенциалы с плотностями заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{J}$ .

Введение электромагнитных потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  упрощает решение задач электродинамики, так как решение уравнений сводится к определению четырех величин (трех проекций  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ ) вместо шести (проекций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ );  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  находятся простым дифференцированием выражений (1.24) и (1.25).

Два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если заданы потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , то согласно (1.24) и (1.25) однозначно определены  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а значит, и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать разные потенциалы. Если в выражения (1.24) и (1.25) подставить

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } f; \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $f$  — произвольная функция координат и времени, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не изменяются. Таким образом, преобразование потенциалов вида (1.30) не изменяет поля. Такая инвариантность называется градиентной. При наложении калибровочного условия (1.27) электромагнитные потенциалы определяются однозначно.

**Вектор Герца.** Потенциалы  $A$  и  $\phi$ , удовлетворяющие условию калибровки (1.27), можно выразить через вектор  $\mathbf{Z}$  — поляризационный потенциал, или вектор Герца:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}; \quad \phi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}. \quad (1.31)$$

Эти выражения удовлетворяют уравнению калибровки (1.27).

Подставляя выражения (1.31) в уравнение (1.28) или (1.29), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 \mathbf{Z} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_a} \quad (1.32)$$

или

$$\Delta \mathbf{Z} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_a}, \quad (1.33)$$

где вектор  $\mathbf{p} = \int \mathbf{J} dt$  — называется вектором поляризации по аналогии. С током свободных зарядов вектор  $\mathbf{p}$  связан так же, как истинный вектор поляризации  $\mathbf{P}$  (вектор поляризации единицы объема диэлектрика) связан с током поляризации, т. е.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t},$$

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

По существу, вектор  $\mathbf{p}$  отличается от вектора  $\mathbf{P}$ . Вектор  $\mathbf{p}$  определяется неопределенным интегралом, причем постоянную интегрирования можно принять равной нулю, так как достаточно, чтобы вектор  $\mathbf{Z}$  удовлетворял условию (1.32), а оно будет удовлетворяться независимо от того, будет ли к интегралу приписана постоянная или нет (так как  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$ ).

Подставляя (1.31) в (1.24) и (1.25), получаем

$$\mathbf{E} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{Z};$$

$$\mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{Z}. \quad (1.34)$$

Сравнивая полученные уравнения (1.22), (1.23), (1.28), (1.29) и (1.33) для напряженностей поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , вектора Герца  $\mathbf{Z}$ , видим, что все эти величины удовлетворяют одинаковым уравнениям вида

$$\Delta \mathbf{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = -\chi, \quad (1.35)$$

где

$$\chi = \chi(\rho, \mathbf{J}, t); \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

Решение уравнения (1.35) дано в приложении и имеет вид (П.79)

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi(t - r/v)}{r} dV.$$

Учитывая в (1.22), (1.23), (1.28), (1.29) и (1.33) значение  $\chi(t - r/v)$ , получаем следующие выражения:

- для запаздывающего скалярного потенциала

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t - r/v)}{r} dV; \quad (1.36)$$

- для запаздывающего векторного потенциала

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(t - r/v)}{r} dV; \quad (1.37)$$

- для запаздывающего потенциала Герца

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{p(t - r/v)}{r} dV. \quad (1.38)$$

В большинстве практических случаев объемное распределение токов и зарядов можно заменить их линейным распределением по проводнику, тогда выражения (1.36) и (1.37) примут вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_L \frac{\tau(t - r/v)}{r} dl; \quad (1.39)$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_L \frac{I(t - r/v)}{r} dl, \quad (1.40)$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда;  $I$  — ток.

Из полученных выражений следует, что потенциалы в любой точке переменного поля, отстоящей от источника на расстояние  $r$ , в любой момент времени  $t$  определяются плотностями зарядов и токов источников в предшествующий

момент  $t - r/v$ . Поэтому эти потенциалы называются запаздывающими. Здесь  $r/v$  — время, необходимое для распространения поля от источника к исследуемой точке.

Электромагнитное поле возбуждается зарядами и токами проводимости и распространяется от места возбуждения с конечной скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ . В воздухе скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света.

### 1.10. Классификация электромагнитных полей

Классификация электромагнитных полей основана на зависимости векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  от времени.

**Нестационарное поле** (или поле, быстро изменяющееся во времени) создается неравномерно движущимися зарядами. Это поле в линейной среде описывается всей системой уравнений Максвелла (I)—(IV) и волновыми уравнениями (1.22), (1.23), (1.28), (1.29), (1.33). Электромагнитные потенциалы и напряженности поля связаны соотношениями (1.24) и (1.25). Уравнения состояния для сред записываются в форме (1.7), граничные условия приведены в § 1.7.

Очевидно, что при нестационарном поле члены  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  в уравнениях Максвелла (I) и (II) значительны, т. е. электромагнитное поле в этом случае может распространяться вдали от зарядов и токов, создающих поле.

**Квазистационарное поле** (или поле, медленно изменяющееся во времени) также создается неравномерно движущимися зарядами ( $\mathbf{J} = \mathbf{J}(t)$ ). Однако скорость изменения процесса в этом случае намного меньше, чем в предыдущем. Квазистационарное поле описывается теми же уравнениями Максвелла, что и нестационарное. Изменяется лишь первое уравнение. При наличии тока проводимости в этом уравнении можно пренебречь током смещения, так как для квазистационарных процессов  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ll \mathbf{J}$ .

В этом случае уравнение Максвелла (I) будет иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \approx \mathbf{J}.$$

Остальные уравнения останутся без изменения. Излучение во внешнее пространство электромагнитной энергии ввиду малости производных  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  незначительно. Электромагнитное поле концентрируется около зарядов и проводников с током.

Учитывая малость производных  $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  по сравнению с другими членами, можно переписать уравнения Даламбера в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} &\approx -\mu_a \mathbf{J}; \\ \Delta \varphi &= -\rho/\epsilon_a.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Решения этих уравнений, называемых уравнениями Пуассона, имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(t)}{r} dV; \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t)}{r} dV.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Выражения для напряженностей поля, записываемые через электромагнитные потенциалы, уравнения состояния среды и граничные условия те же, что и в случае нестационарного поля.

Понятие быстроты электромагнитного процесса относительно. Если область достаточно мала, то при любой скорости изменения процесс, протекающий в ней, можно рассматривать как квазистационарный. В области же значительного размера, проявятся все особенности этого процесса как быстропеременного. К квазистационарным полям относятся поля, создаваемые переменным током, текущим в проводках.

**Стационарное поле** (или поле, не изменяющееся во времени) создается равномерно движущимися зарядами (поле постоянного тока  $\mathbf{J}(t) = \text{const}$ ). Это поле описывается уравнениями Максвелла, в которых  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ :

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

Излучение электромагнитного поля отсутствует. Стационарное поле создается около проводов, по которым течет постоянный ток.

Уравнения состояния среды и граничные условия не изменяются. Электромагнитные потенциалы находятся решением уравнений Пуассона

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV; \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Напряженности поля связаны с электромагнитными потенциалами согласно (1.24) и (1.25) соотношениями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Уравнения стационарного поля не являются какими-либо приближениями исходных уравнений Максвелла, а точно соответствуют определенному частному случаю.

**Статическое поле** характеризуется независимостью от времени и полным отсутствием движения зарядов ( $\mathbf{J} = 0$ ).

Исходные уравнения и граничные условия электродинамики в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \mathbf{D} &= \epsilon_a \mathbf{E}; \\ E_{\tau(1)} &= E_{\tau(2)}; \\ D_{n(1)} - D_{n(2)} &= \chi. \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}; \\ H_{\tau(1)} &= H_{\tau(2)}; \\ B_{n(1)} &= B_{n(2)}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Таким образом, уравнения разбиваются на две независимые системы; в одну из них входят только электрические величины, в другую — только магнитные.

Система уравнений (1.44) описывает электростатические поля. Поскольку  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , то поле потенциально и

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где  $\varphi$  — электростатический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -\rho / \epsilon_a.$$

Решение этого уравнения дает

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV.$$

Система уравнений (1.45) описывает магнитостатические поля. Первое уравнение этой системы позволяет формально записать

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m,$$

где  $\varphi_m$  — магнитостатический потенциал, который, как следует из второго уравнения системы (1.45), удовлетворяет уравнению Лапласа.

Поскольку граничные условия для  $\mathbf{H}$  совпадают с граничными условиями для  $\mathbf{E}$  электростатической задачи, то решение магнитостатической задачи совпадает с решением соответствующей электростатической задачи и может быть получено из них путем замены  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$  и  $\epsilon_a$  на  $\mu_a$ .



### 1.11. Электродинамика движущихся сред

Приведение законов электродинамики к релятивистскому виду заключается в представлении этих законов в четырехмерной векторной форме. Такое представление определяет ряд физических зависимостей между отдельными величинами, важных для более глубокого понимания электромагнитных процессов. Пространство и время представляют собой единую физическую сущность — четырехмерное пространство — время. Пространство и время не утрачивают своей качественной специфики, но в то же время они взаимосвязаны и взаимозависимы. Пространственные и временные характеристики электромагнитного поля зависят от движения заряженных тел. Это не простое соединение электрического и магнитного полей, а глубокое диалектическое единство качественно разнородных и одновременно тесно связанных между собой форм существования материи.

Обладает ли среда свойствами диэлектрика или магнетика — зависит от того, находится она в покое или в движении. Но это объясняется не качественным изменением параметров среды, а их относительностью.

Магнитогидродинамические генераторы, электромагнитные насосы, ускорители элементарных частиц и т. д. представляют собой устройства, с которыми все чаще приходится сталкиваться инженеру-радисту. Для ясного понимания принципа действия этих устройств и их расчета совершенно необходимы современные представления в области электродинамики движущихся сред.

### 1.12. Уравнение непрерывности преобразования тока и заряда

Перепишем уравнение непрерывности (V), приняв  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}$  — скорость движения зарядов), в виде

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.46)$$

Преобразуя это уравнение к четырехмерному виду (см. § П.3), получаем

$$\nabla_i \rho v_i + \frac{\partial j c \rho}{\partial x_4} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, вектор  $\rho\mathbf{v}$  и скаляр  $j c \rho$  можно рассматривать как три пространственных и одну временную составляющую четырехмерной плотности тока

$$\mathbf{J} = (\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, j c \rho), \quad (1.47)$$

при этом (1.46) переходит в уравнение

$$\square_i J_i = \operatorname{Div} \mathbf{J} = 0, \quad (1.48)$$

где

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 + \frac{\partial}{\partial x_4} \mathbf{e}_4$$

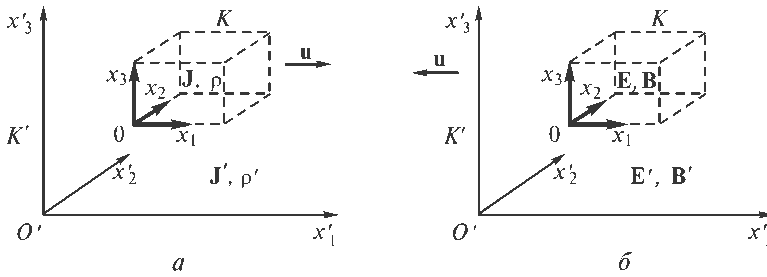


Рис. 1.6. Движущиеся инерциальные системы

— пространственно-временной оператор, соответствующий оператору Гамильтона  $\nabla$ , применяемому к вектору в трехмерном пространстве, и называемый четырехмерной дивергенцией (обозначается  $\text{Div}$  в отличие от обозначения  $\text{div}$  в трехмерном пространстве).

Пользуясь четырехмерным представлением плотности тока (1.47), можно видеть, как она меняется при переходе от одной инерциальной системы к другой (рис. 1.6, а). Пусть в системе  $K$  имеется ток плотностью  $\mathbf{J}$  и неподвижный заряд плотностью  $\rho$  и система  $K$  движется относительно системы  $K'$  со скоростью  $\mathbf{u}$  в направлении оси  $O'x'_1$ . Матрица преобразования Лоренца от движущейся системы координат к неподвижной (П.59) имеет вид

$$[\alpha_{ki}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$J'_1 = \frac{J_1 - j(u/c)J_4}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad J'_2 = J_2;$$

$$J'_3 = J_3; \quad J'_4 = \frac{J_4 + j(u/c)J_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Учитывая, что  $J_4 = j\rho$  и  $J'_4 = j\rho'$ , и переходя к произвольному направлению движения, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{J}_{\parallel} + u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\
 \mathbf{J}'_{\perp} &= \mathbf{J}_{\perp}; \\
 \rho' &= \frac{\rho + \frac{1}{c^2}(\mathbf{u}\mathbf{J}_{\parallel})}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.49}$$

Здесь в индексах значками « $\parallel$ » и « $\perp$ » обозначены параллельные и перпендикулярные направления к вектору  $\mathbf{u}$ .

Плотность тока, наблюдаемая в неподвижной системе  $K'$  в направлениях, перпендикулярных направлению движения, равна плотности тока, наблюдаемой в движущейся системе  $K$ .

Плотность тока, наблюдаемая в системе  $K'$  в направлении, параллельном направлению движения, отличается от наблюдаемой в движущейся системе  $K$ . Эта плотность тока не равна нулю, когда ток в движущейся системе отсутствует:

$$J'_{\parallel} = \frac{u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Плотность заряда, наблюдаемая в системе  $K'$ , отличается от таковой в движущейся системе  $K$ . Если токи в системе  $K$  отсутствуют, то

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

т. е. плотность заряда увеличивается при переходе от системы, где заряд неподвижен, к системе, где заряд движется. Количество же заряда  $dq$  в определенном заданном объеме  $dV$  одинаково для обеих систем. Действительно, так как согласно (П.55)

$$V' = V\sqrt{1 - u^2/c^2},$$

то

$$q' = \rho'V' = \frac{\rho V\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \rho V = q.$$

Следует отметить, что плотность движущегося заряда увеличивается вследствие лоренцова сокращения. Заряд же, в частности заряд электрона, остается постоянным в любой системе, т. е. является инвариантом.

## 1.13. Волновые уравнения для движущихся сред

Перепишем уравнения для электромагнитных потенциалов (1.28) и (1.29) для случая  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\epsilon_a = \epsilon_0$ , положив  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \rho \mathbf{v}; \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\end{aligned}\tag{1.50}$$

Левую часть полученных уравнений можно представить как  $\square^2 \mathbf{A}$  и  $\square^2 \varphi$ , где оператор

$$\square^2 = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial(jct)^2} = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

— оператор Даламбера, аналогичный оператору Лапласа в трехмерном пространстве.

Из четырех одинаково построенных уравнений (1.50) три уже слиты в одно векторное уравнение. Поэтому естественно предположить, что в четырехмерном обобщении  $\Phi$  будет играть роль временной составляющей, которую нужно присоединить к пространственным составляющим  $A_i$ , и записать уравнения (1.50) в виде

$$\square^2 \Phi = -\mu_0 \mathbf{J}.\tag{1.51}$$

Переписывая калибровочное уравнение (1.27) в четырехмерной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial j}{\partial x_4} \frac{\Phi}{c} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial j}{\partial x_4} \frac{\Phi}{c} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и сопоставляя его с (1.51) и (1.50), видим, что  $\Phi$  представляет собой четырехмерный вектор-потенциал, пространственные составляющие которого  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), временная составляющая  $\Phi_4 = j \frac{\Phi}{c}$ , т. е.

$$\Phi = \left( A_1, A_2, A_3, j \frac{\Phi}{c} \right),\tag{1.52}$$

а

$$\mathbf{J} = (\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, j c \rho)$$

— четырехмерный вектор плотности тока, что совпадает с (1.47).

### 1.14. Тензоры электромагнитного поля

Согласно (1.1)

$$E_i = -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \text{grad}_i \varphi = -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

и в четырехмерной записи составляющие электрической напряженности  $\mathbf{E}$  в соответствии с (1.52) имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 &= jc \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right); \\ E_2 &= jc \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right); \\ E_3 &= jc \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Согласно (1.2)

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

и в четырехмерной записи составляющие вектора  $\mathbf{B}$  в соответствии с (1.52) имеют вид

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}; \\ B_2 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}; \\ B_3 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Единый принцип построения уравнений (1.53) и (1.54) говорит о том, что составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  можно объединить четырехмерным образованием. Для этого введем в рассмотрение четырехмерный ротор

$$\text{Rot}_{ik} \Phi = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k},$$

являющийся антисимметричным четырехмерным тензором второго ранга (П.65), так как

$$\text{Rot}_{nn} \Phi = 0; \quad \text{Rot}_{ik} \Phi = -\text{Rot}_{ki} \Phi.$$

Умножим (1.53) на  $-j$ , а (1.54) на  $c$ , тогда компоненты тензора

$$F_{ik} = (c\mathbf{B}, -j\mathbf{E}) = c \text{Rot}_{ik} \Phi,$$

где запись  $(c\mathbf{B}, -j\mathbf{E})$  указывает на объединение двух трехмерных векторов в одну четырехмерную величину — тензор напряженности

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_3 & -cB_2 & -jE_1 \\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -jE_2 \\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -jE_3 \\ jE_1 & jE_2 & jE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  можно связать тензором, объединяющим  $\mathbf{H}$  и  $jc\mathbf{D}$  одинаковой размерности и называемым *тензором индукции*:

$$f_{ik} = (\mathbf{H}, -jc\mathbf{D}) = \frac{1}{\mu_0} \text{Rot}_{ik} \Phi;$$

$$(f_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -jcD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -jcD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -jcD_3 \\ jcD_1 & jcD_2 & jcD_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Таким образом, в четырехмерном пространстве поле не может быть описано с помощью двух векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а должно описываться одним антисимметричным четырехмерным тензором второго ранга. Отсюда следует, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не являются независимыми величинами.

Пусть система  $K$  неподвижна, а система  $K'$  движется относительно этой системы со скоростью  $\mathbf{u}$  в отрицательном направлении оси  $x'_1$  (рис. 1.6, б). На основе преобразований Лоренца тензор напряженности в системе  $K'$  будет иметь вид

$$F'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} F_{lm},$$

где

$$[\alpha_{il}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{bmatrix}.$$

Поскольку тензор  $(F_{ik})$  антисимметричный, то

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

и

$$F'_{11} = F'_{22} = F'_{33} = F'_{44} = 0.$$

Действительно,

$$F'_{11} = \alpha_{1l} \alpha_{lm} F_{lm} = \alpha_{11} \alpha_{1m} F_{1m} + \alpha_{14} \alpha_{1m} F_{4m} = \alpha_{11} \alpha_{14} F_{14} + \alpha_{14} \alpha_{11} F_{41} = 0.$$

Аналогично

$$F'_{22} = F'_{33} = F'_{44} = 0;$$

$$F'_{12} = \alpha_{1l}\alpha_{2m}F_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{2m}F_{1m} + \alpha_{14}\alpha_{2m}F_{4m} = \alpha_{11}F_{12} + \alpha_{14}F_{42} = \frac{cB_3 - \frac{u}{c}E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -F'_{21};$$

$$F'_{13} = \alpha_{1l}\alpha_{3m}F_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{3m}F_{1m} + \alpha_{14}\alpha_{3m}F_{4m} = \alpha_{11}F_{13} + \alpha_{14}F_{43} = -\frac{cB_2 + \frac{u}{c}E_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -F'_{31};$$

$$F'_{14} = \alpha_{1l}\alpha_{4m}F_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{4m}F_{1m} + \alpha_{14}\alpha_{4m}F_{4m} = \alpha_{11}\alpha_{44}F_{14} + \alpha_{14}\alpha_{41}F_{41} = -jE_1 = -F'_{41};$$

$$F'_{23} = \alpha_{2l}\alpha_{3m}F_{lm} = \alpha_{3m}F_{2m} = cB_1 = -F'_{32};$$

$$F'_{24} = \alpha_{2l}\alpha_{4m}F_{lm} = \alpha_{4m}F_{2m} = \alpha_{41}F_{21} + \alpha_{44}F_{24} = \frac{j u B_3 - j E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -j \frac{E_2 - u B_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -F'_{42};$$

$$F'_{34} = \alpha_{3l}\alpha_{4m}F_{lm} = \alpha_{4m}F_{3m} = \alpha_{41}F_{31} + \alpha_{44}F_{34} = \frac{-j u B_2 - j E_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -j \frac{E_3 + u B_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -F'_{43}.$$

Окончательно имеем

$$(F'_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cB_3 - \frac{u}{c}E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & -\frac{cB_2 + \frac{u}{c}E_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & -jE_1 \\ -\frac{cB_3 - \frac{u}{c}E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & cB_1 & -j\frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ \frac{cB_2 + \frac{u}{c}E_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & -cB_1 & 0 & -j\frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ jE_1 & j\frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & j\frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Очевидно, что тензор  $(F'_{ik})$ , записанный через составляющие векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ , будет иметь такой же вид, как и тензор  $(F_{ik})$ , записанный через составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  (1.55), а именно

$$(F'_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & cB'_3 & -cB'_2 & -jE'_1 \\ -cB'_3 & 0 & cB'_1 & -jE'_2 \\ cB'_2 & -cB'_1 & 0 & -jE'_3 \\ jE'_1 & jE'_2 & jE'_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.57a)$$

Сравнив (1.57a) с (1.57), получим

$$E'_1 = E_1; \quad E'_2 = \frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$E'_3 = \frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$B'_1 = B_1; \quad B'_2 = \frac{B_2 + \frac{u}{c^2} E_3}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$B'_3 = \frac{B_3 - \frac{u}{c^2} E_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

В случае произвольного направления движения систем координат

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}; \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{u}\mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}; \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{u}\mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где в индексах значками « $\parallel$ » и « $\perp$ » обозначены параллельные и перпендикулярные направления к вектору  $\mathbf{u}$ .

Выражения (1.58) показывают, что составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , параллельные направлению движения, при измерении в обеих системах (см. рис. 1.6, б) одинаковы, а составляющие, перпендикулярные направлению движения, различаются. При этом, если в неподвижной системе  $K$  существует только поле  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}$ , то в движущейся системе  $K'$ , направление движения которой совпадает с направлением  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}$ , поле определится соответственно вектором  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ . Если направление  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не совпадает с направлением движения системы  $K'$ , то при наличии в системе  $K$  только электрического или только магнитного поля в движущейся системе  $K'$  будет и то, и другое поле.

Из уравнений (1.58) следует, что электрическое и магнитное поля не могут существовать раздельно. Эти уравнения имеют большое значение при решении конкретных задач о движении зарядов в электромагнитных полях. Подбирая систему координат, можно исключить электрическое или магнитное поле, вследствие чего решение задачи упрощается.



### 1.15. Тензор поляризации

Поскольку векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  слиты в один тензор, то разумно предположить, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  также должны сливаться в четырехмерном пространстве в четырехмерный тензор второго ранга. Формулы

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}$$

объединяются соотношением

$$M_{ik} = \frac{F_{ik}}{c\mu_0} - f_{ik},$$

т. е.

$$(M_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 & jcP_1 \\ -M_3 & 0 & M_1 & jcP_2 \\ M_2 & -M_1 & 0 & jcP_3 \\ -jcP_1 & -jcP_2 & -jcP_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично (1.58) векторы поляризации и намагниченности связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}; \quad \mathbf{P}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{P}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{u}\mathbf{M}_{\perp}]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ \mathbf{M}'_{\parallel} = \mathbf{M}_{\parallel}; \quad \mathbf{M}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{M}_{\perp} + [\mathbf{u}\mathbf{P}_{\perp}]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Из выражений (1.59) следует, что измерения, проводимые в системах  $K$  и  $K'$ , дают различные значения векторов поляризации и намагниченности. Разумеется, здесь речь идет не об изменении структуры вещества движущихся сред, а об относительности электромагнитных параметров, характеризующих среды.

### 1.16. Уравнения для «медленно» движущихся сред

Для случая «медленно» движущихся сред, т. е. при

$$u/c \ll 1$$

выражения (1.58) и (1.59) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}]; \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{u}\mathbf{E}]; \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{uM}]; \quad (1.61)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + [\mathbf{uP}].$$

Согласно второму уравнению (1.61) покоящаяся в неподвижной системе  $K$  диэлектрическая среда, поляризованная под действием внешнего электрического поля

$$\mathbf{E} \neq 0; \quad \mathbf{P} \neq 0; \quad \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{B} = 0,$$

в движущейся системе  $K'$  будет обладать магнитными свойствами, т. е.

$$\mathbf{M}' = [\mathbf{uP}],$$

и согласно второму уравнению (1.60) появится магнитное поле

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} [\mathbf{uE}].$$

В проводящей намагниченной среде, покоящейся в неподвижной системе  $K$ ,

$$\mathbf{B} \neq 0; \quad \mathbf{M} \neq 0; \quad \mathbf{P} = 0; \quad \mathbf{E} = 0.$$

В движущейся системе  $K'$  согласно первому уравнению (1.61) среда будет обладать и свойствами диэлектрика, т. е.

$$\mathbf{P}' = -\frac{1}{c^2} [\mathbf{uM}],$$

и в ней появится электрическое поле  $\mathbf{E}'$ , определяемое согласно первому уравнению (1.60) выражением

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{uB}].$$

Таким образом, энергия электромагнитного поля возрастает при движении проводника или диэлектрика во внешних магнитном или электрическом полях (при соответствующем направлении внешнего поля и направлении движения). Механическая энергия движения переходит в электромагнитную энергию поля. На этом принципе основаны генераторы электромагнитной энергии, в частности плазменные генераторы, вырабатывающие большую энергию за счет большой скорости движения подмагниченной плазмы.

### 1.17. Уравнения Максвелла для движущихся сред

Уравнения Максвелла в четырехмерной форме записываются через четырехмерные тензоры второго ранга  $(f_{ik})$  и  $(F_{ik})$ , определяемые выражениями (1.55) и (1.56), и имеют вид:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = J_i; \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} = 0. \quad (1.63)$$

Первая система (1.62) содержит четыре уравнения и при  $i = 1, 2, 3$  эквивалентна уравнению Максвелла (I)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

а при  $i = 4$  эквивалентна уравнению Максвелла (III)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Действительно,

при  $i = 1$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = \frac{\partial D_1}{\partial t} + J_1;$$

при  $i = 2$

$$-\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = \frac{\partial D_2}{\partial t} + J_2;$$

при  $i = 3$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = \frac{\partial D_3}{\partial t} + J_3$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

при  $i = 4$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = \rho$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Вторая система (1.63) содержит четыре уравнения и при  $i = 2, 3, 4$ ,  $k = 3, 4, 1$ ,  $m = 4, 1, 2$ , эквивалентна уравнению Максвелла (II)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

а при  $i = 1$ ,  $k = 2$ ,  $m = 3$  эквивалентна уравнению Максвелла (IV)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

### Вопросы

1. Какие физические величины характеризуют электромагнитное поле?
2. Какие параметры характеризуют среды, в которых происходят электрические и связанные с ними магнитные явления?
3. Объясните механизм поляризации среды и как определяется вектор поляризации?
4. Объясните механизм намагниченности среды и как определяется вектор намагниченности?
5. Какие среды называются линейными, нелинейными и параметрическими?
6. Какая среда является изотропной, а какая — анизотропной?
7. Запишите интегральные уравнения электромагнитного поля и поясните их физический смысл.
8. Что такое ток проводимости и ток смещения?
9. Запишите уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме (уравнения Максвелла), поясните их физический смысл и укажите уравнения, определяющие возможность распространения электромагнитного поля без проводов.
10. Назовите основные свойства линейных, нелинейных и параметрических процессов.
11. В чем состоят преимущества использования волновых уравнений электромагнитного поля при решении задач электродинамики?
12. С помощью каких условий определяются постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений электромагнитного поля? Запишите эти условия в математической форме.
13. Какие процессы характеризует теорема Умова — Пойнтинга? Что определяет вектор Пойнтинга?
14. Что дает представление уравнений классической электродинамики в четырехмерной форме?
15. Какие характеристики электромагнитного поля объединяют тензор напряженности и тензор индукции?
16. Какие характеристики среды объединяет тензор поляризации?
17. Какие электромагнитные поля называются нестационарным, квазистационарным, стационарным, электростатическим и какими зарядами и токами эти поля создаются?
18. Изменяется ли значение заряда при переходе от одной инерциальной системы к другой?

### Задачи

С помощью соответствующих интегральных уравнений электромагнитного поля решите следующие задачи.

1. Докажите утверждения:
  - а) статический заряд может располагаться лишь на поверхности проводника;
  - б) полый проводник экранирует внутреннее пространство от поля зарядов, расположенных снаружи, и не экранирует внешнее пространство от поля зарядов, расположенных внутри.
2. Две бесконечные проводящие пластины толщиной  $d_1$  и  $d_2$  расположены параллельно друг другу на расстоянии  $d$ . Заряд на единицу площади (суммарный заряд на

обеих сторонах пластины) равен  $q_1$  для первой пластины и  $q_2$  — для второй. Покажите, что:

- а) поверхностные плотности зарядов на внутренних поверхностях пластин одинаковы по величине и противоположны по знаку;
- б) поверхностные плотности зарядов на внешних поверхностях одинаковы;
- в) значения поверхностных плотностей зарядов не зависят от  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d$ .

Рассмотрите частный случай  $q_1 = -q_2 = q$ .

3. Определите напряженность электростатического поля внутри и вне системы, состоящей из двух проводников, заряды которых одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Системы имеют следующий вид:
  - а) две большие плоские пластины площадью  $S$ , расположенные друг от друга на небольшом расстоянии  $d$ ;
  - б) две концентрические сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ );
  - в) два концентрических цилиндра, длина которых намного больше их радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ).
4. Определите напряженность магнитного поля внутри и вне системы, состоящей из двух длинных концентрических цилиндров (коаксиальный кабель), по которым течет постоянный ток  $I$  в противоположных направлениях. Радиус внутреннего цилиндра —  $R_1$ , внешнего —  $R_2$  и  $R_3$  ( $R_3 > R_2$ ). Постройте графики зависимости напряженности  $\mathbf{H}$  от расстояния до центра системы. Проверьте выполнение граничных условий.

С помощью соответствующих уравнений электродинамики движущихся сред решите следующие задачи.

5. Покажите, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения.
6. Покажите, что движущийся поляризованный диэлектрик будет обладать и свойствами магнетика.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

### 2.1. Основные уравнения

**Уравнения Максвелла в символической форме.** Если электромагнитное поле возбуждается монохроматическим источником, т. е.

$$\mathbf{J}^{\text{ст}} = \mathbf{J}_m^{\text{ст}} \cos(\omega t + \varphi_J),$$

то поле у источника также имеет монохроматический характер:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E); \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t + \varphi_H). \quad (2.2)$$

В общем случае поляризация диэлектрика зависит от напряженности электрического поля

$$P = P(E)$$

и для изотропной среды может быть представлена в виде

$$P = P^{\text{л}} + P^{\text{нл}}, \quad (2.3)$$

где

$$P^{\text{л}} = \epsilon_0 \chi_{\epsilon 1} E;$$

$$P^{\text{нл}} = \epsilon_0 (\chi_{\epsilon 2} E^2 + \chi_{\epsilon 3} E^3 + \dots).$$

Для большинства диэлектриков (не обладающих сегнетоэлектрическими свойствами)

$$\frac{\chi_{\epsilon 2}}{\chi_{\epsilon 1}} \ll 10^{-11} \text{ м/В}$$

и

$$\chi_{\epsilon 1} E \gg \chi_{\epsilon 2} E^2 \gg \chi_{\epsilon 3} E^3 \gg \dots$$

В данном случае символический метод непосредственно не применим, но формулу (2.1) можно представить в виде (П.68):

$$E = \frac{\dot{E} + \dot{E}^*}{2}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_m e^{j\omega t} = E_m e^{j(\omega t + \varphi_E)}; \\ \dot{E}^* &= \dot{E}_m^* e^{-j\omega t} = E_m e^{-j(\omega t + \varphi_E)}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.4) в формулу (2.3), получаем

$$\begin{aligned} P = \epsilon_0 \left[ \chi_{\epsilon 3}^{\text{II}} \frac{\dot{E} + \dot{E}^*}{2} + \frac{\chi_{\epsilon 31}}{4} (\dot{E}^2 + 2\dot{E}\dot{E}^* + \dot{E}^{*2}) + \right. \\ \left. + \frac{\chi_{\epsilon 32}}{8} (\dot{E}^3 + 3\dot{E}^2\dot{E}^* + 3\dot{E}\dot{E}^{*2} + \dot{E}^{*3}) + \right. \\ \left. + \frac{\chi_{\epsilon 33}}{16} (\dot{E}^4 + 4\dot{E}^3\dot{E}^* + 6\dot{E}^2\dot{E}^{*2} + 4\dot{E}\dot{E}^{*3} + \dot{E}^{*4}) + \dots \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Анализируя структуру формулы (2.5), можно заметить, что в результате перемножения различных степеней  $\dot{E}$  и  $\dot{E}^*$  кроме составляющей поляризации с частотой  $\omega$  появились постоянная составляющая поляризации, составляющие поляризации с удвоенной, утроенной и т. д. частотами.

Рассмотрим, например, выражение  $\dot{E}^2 + 2\dot{E}\dot{E}^* + \dot{E}^{*2}$ , входящее в формулу (2.5). Поскольку

$$\begin{aligned} \dot{E}^2 &= E_m^2 e^{j2(\omega t + \varphi_E)}; \\ \dot{E}^{*2} &= E_m^2 e^{-j2(\omega t + \varphi_E)}, \end{aligned}$$

то сумма

$$\dot{E}^2 + \dot{E}^{*2} = 2E_m^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_E),$$

произведение

$$2\dot{E}\dot{E}^* = 2E_m^2.$$

Таким образом, выражение  $\dot{E}^2 + 2\dot{E}\dot{E}^* + \dot{E}^{*2}$  содержит постоянную составляющую поляризации и составляющую поляризации с удвоенной частотой (вторую гармонику).

Аналогично анализируя выражение  $\dot{E}^3 + 3\dot{E}^2\dot{E}^* + 3\dot{E}\dot{E}^{*2} + \dot{E}^{*3}$ , нетрудно убедиться в том, что оно содержит составляющие поляризации с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ .

Группируя члены, соответствующие постоянной составляющей поляризации, первой гармонике, второй гармонике и т. д., преобразуем формулу (2.5) к следующему виду:

$$P = P^{\text{II}}(\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} P^{\text{HII}}(n\omega).$$

Здесь

$$P^{\text{II}}(\omega) = \epsilon_0 \frac{\chi_{\epsilon 3}^{\text{II}}}{2} (\dot{E} + \dot{E}^*)$$

— составляющая поляризации, линейно зависящая от амплитуды действующего поля и характеризующая лишь линейные эффекты;

$$P^{\text{лп}}(n\omega) = P_m^{\text{лп}}(n\omega) \cos n(\omega t + \varphi_E)$$

— составляющие поляризации, нелинейно зависящие от действующего поля (определяющие нелинейные эффекты), в том числе:

$$P^{\text{нп}}(0) = \varepsilon_0 \left( \frac{\chi_{\varepsilon 1}}{2} E_m^2 + \frac{3}{8} \chi_{\varepsilon 3} E_m^4 + \dots \right)$$

— постоянная составляющая поляризации;

$$\dot{P}_m^{\text{нп}}(\omega) = \varepsilon_0 (\chi_{\varepsilon 1}^{\omega} \dot{E}_m^2 \dot{E}_m^* + \chi_{\varepsilon 2}^{\omega} \dot{E}_m^3 \dot{E}_m^{*2} + \dots);$$

$$\dot{P}_m^{\text{нп}}(2\omega) = \varepsilon_0 (\chi_{\varepsilon 1}^{2\omega} \dot{E}_m^2 + \chi_{\varepsilon 2}^{2\omega} \dot{E}_m^3 \dot{E}_m^* + \dots);$$

$$\dot{P}_m^{\text{нп}}(3\omega) = \varepsilon_0 (\chi_{\varepsilon 1}^{3\omega} \dot{E}_m^3 + \chi_{\varepsilon 2}^{3\omega} \dot{E}_m^4 \dot{E}_m^* + \dots)$$

.....

— комплексные амплитуды нелинейных составляющих поляризации с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ;  $\chi_{\varepsilon l}^{n\omega}$  — коэффициенты, определяемые через коэффициенты разложения (см. (2.3)).

Аналогично можно показать, что если в спектре источника содержится несколько составляющих, то в спектре поляризации будут не только гармоники этих составляющих, но и составляющие с комбинационными частотами.

Намагниченность магнетика можно представить в виде суммы

$$M = M^{\text{л}} + M^{\text{нп}},$$

где

$$M^{\text{л}} = \chi_M^{\text{л}} H;$$

$$M^{\text{нп}} = \chi_{M1} H^2 + \chi_{M2} H^3 + \chi_{M3} H^4 + \dots$$

В случае монохроматического источника поле у источника представим в виде

$$H = \frac{\dot{H} + \dot{H}^*}{2} = \frac{\dot{H}_m e^{j\omega t} + \dot{H}_m^* e^{-j\omega t}}{2},$$

а намагниченность магнетика — в виде

$$M = \chi_M^{\text{л}} \frac{\dot{H} + \dot{H}^*}{2} + \frac{\chi_{M1}}{4} (\dot{H}^2 + 2\dot{H}\dot{H}^* + \dot{H}^{*2}) + \frac{\chi_{M2}}{8} (\dot{H}^3 + 3\dot{H}^2\dot{H}^* + 3\dot{H}\dot{H}^{*2} + \dot{H}^{*3}) + \dots$$

или

$$M = M^{\text{нп}}(0) + M^{\text{л}}(\omega) + M^{\text{нп}}(\omega) + M^{\text{нп}}(2\omega) + M^{\text{нп}}(3\omega) + \dots$$

Таким образом, намагниченность нелинейного магнетика также содержит удвоенные, утроенные и т. д. частоты и постоянную составляющую. При действии немонохроматического источника появляются комбинационные составляющие.



Аналогичным путем можно получить выражение для нелинейной плотности тока:

$$J = J^{\text{нл}}(0) + J^{\text{л}}(\omega) + J^{\text{нл}}(\omega) + J^{\text{нл}}(2\omega) + \dots$$

Согласно уравнениям Максвелла (1.16) и волновым уравнениям (1.18) и (1.19), нелинейные составляющие поляризации, тока и намагничивания, в свою очередь, возбуждают гармоники поля, а если в спектре источника имеется несколько гармонических составляющих, — и комбинационные составляющие.

Таким образом, если источник монохроматический, т. е.

$$\mathbf{J}^{\text{ст}} = \mathbf{J}_m^{\text{ст}} \cos(\omega t + \varphi_J),$$

то в нелинейной среде векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}^{\text{нл}}$ ,  $\mathbf{M}^{\text{нл}}$  и  $\mathbf{J}^{\text{нл}}$  можно представить в виде суммы гармонических составляющих:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) e^{jn\omega t}; \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) e^{jn\omega t}; \\ \mathbf{P}^{\text{нл}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{P}}_m^{\text{нл}}(n\omega) e^{jn\omega t}; \\ \mathbf{M}^{\text{нл}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{M}}_m^{\text{нл}}(n\omega) e^{jn\omega t}; \\ \mathbf{J}^{\text{нл}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{нл}}(n\omega) e^{jn\omega t}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя выражения (2.6) в уравнения Максвелла (1.16), заменяя дифференцирование по времени умножением на  $jn\omega$  и приравнивая величины, содержащие одинаковые частоты  $n\omega$ , получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) &= jn\omega[\tilde{\epsilon}_a^n(n\omega)\dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) + \dot{\mathbf{P}}_m^{\text{нл}}(n\omega)] + \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{нл}}(n\omega) + \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{ст}}(n\omega); \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) &= -jn\omega\tilde{\mu}_a^n(n\omega)\dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) - jn\omega\mu_0\dot{\mathbf{M}}_m^{\text{нл}}(n\omega), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;  $\tilde{\epsilon}_a^n(n\omega) = \epsilon_a^n(n\omega) - j \frac{\sigma^n(n\omega)}{n\omega}$ ;  $\tilde{\mu}_a^n(n\omega) = \mu_a^n(n\omega) - j\mu_a^{n''}(n\omega)$   $J_m^{\text{ст}}(n\omega) = 0$  при  $n \neq 1$ .

Поле в нелинейной среде содержит большое число гармонических составляющих с частотами  $n\omega$ , взаимодействующих друг с другом. Например, при составляющих с частотами  $\omega$  и  $3\omega$  появляются частоты  $3\omega + \omega = 4\omega$ ,  $3\omega - \omega = 2\omega$ ,  $3\omega + 2\omega = 5\omega$  и т. д. Таким образом, все гармонические составляющие поля взаимосвязаны. Математически это описывается уравнениями

(2.7), в правые части которых входят амплитуды  $\dot{\mathbf{P}}_m^{нп}(n\omega)$ ,  $\dot{\mathbf{M}}_m^{нп}(n\omega)$  и  $\dot{\mathbf{J}}_m^{нп}(n\omega)$ , причем каждая из этих амплитуд зависит не только от своей составляющей поля с частотой  $n\omega$ , но и от всех остальных гармонических составляющих. Таким образом, все уравнения (2.7) оказываются взаимосвязанными.

В случае линейной среды уравнения (2.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) &= j\omega \tilde{\epsilon}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) + \dot{\mathbf{J}}_m^{ст}(\omega); \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) &= -j\omega \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{H}}_m(\omega). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь  $\tilde{\epsilon}_a^n$  — комплексная диэлектрическая проницаемость, выполняющая функцию диэлектрической проницаемости проводящей среды,

$$\tilde{\epsilon}_a^n = \epsilon'_a - j\epsilon''_a,$$

где  $\epsilon'_a = \epsilon_a$ ,  $\epsilon''_a = \frac{\sigma}{\omega}$ .

Отношение

$$\frac{\epsilon''_a}{\epsilon'_a} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a},$$

равное модулю отношения плотностей тока проводимости и смещения, называется тангенсом угла электрических потерь среды

$$\text{tg } \delta_s = \left| \frac{J_{пр}}{J_{см}} \right| = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}.$$

Мнимая часть комплексной проницаемости  $\tilde{\epsilon}_a$  может быть обусловлена не только проводимостью, но и явлением гистерезиса, т. е. запаздыванием по фазе вектора  $\mathbf{D}$  относительно вектора  $\mathbf{E}$ . Оба эти фактора приводят к выделению теплоты в веществе, т. е. к потерям.

Разделение сред на проводники, полупроводники и диэлектрики может быть проведено по значению  $\text{tg } \delta_s$ . Так, если  $J_{пр} \gg J_{см}$ , т. е.  $\text{tg } \delta_s \gg 1$ , то током смещения можно пренебречь и такую среду рассматривать как проводник.

Если ток смещения значительно больше тока проводимости, то  $\text{tg } \delta_s \ll 1$  и такую среду можно рассматривать как диэлектрик.

Если токи проводимости и смещения примерно равны, то  $\text{tg } \delta_s \approx 1$  и среда является полупроводником.

Магнитная проницаемость также является комплексной величиной

$$\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a.$$

Наличие мнимой части объясняется гистерезисом, т. е. отставанием по фазе вектора  $\mathbf{B}$  от вектора  $\mathbf{H}$ . Отношение

$$\text{tg } \delta_m = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}$$

называется тангенсом угла магнитных потерь.

Уравнения Максвелла (2.8) при отсутствии стороннего тока ( $J^{ct} = 0$ ) имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) &= j\omega \tilde{\varepsilon}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{E}}_m(\omega); \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) &= -j\omega \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{H}}_m(\omega).\end{aligned}$$

Система уравнений не изменится, если заменить  $\dot{\mathbf{H}}_m$  на  $\dot{\mathbf{E}}_m$ , а  $\tilde{\varepsilon}_a^n$  на  $-\tilde{\mu}_a^n$ . Это свойство уравнений называется перестановочной двойственностью.

**Волновые уравнения в символической форме.** Подставляя (2.6) в уравнения (1.18а) и (1.19а) и приравнявая члены, содержащие одинаковые частоты  $n\omega$ , получаем:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) + (n\omega)^2 \tilde{\varepsilon}_a^n(n\omega) \tilde{\mu}_a^n(n\omega) \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) = \\ = -(n\omega)^2 \tilde{\mu}_a^n(n\omega) \dot{\mathbf{P}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega) + jn\omega [\tilde{\mu}_a^n(n\omega) \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega) + \\ + \tilde{\mu}_a^n(n\omega) \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}} + \mu_0 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{M}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega)];\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) + (n\omega)^2 \tilde{\varepsilon}_a^n(n\omega) \tilde{\mu}_a^n(n\omega) \dot{\mathbf{H}}_m(n\omega) = \\ = -(n\omega)^2 \tilde{\varepsilon}_a^n(n\omega) \mu_0 \dot{\mathbf{M}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega) - jn\omega \operatorname{rot} \dot{\mathbf{P}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega) - \\ - \operatorname{rot} \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{HЛ}}(n\omega) - \operatorname{rot} \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(n\omega),\end{aligned}\quad (2.10)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;  $\dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(n\omega) = 0$  при  $n \neq 1$ .

Если в спектре источника содержится несколько частот, то системы (2.9) и (2.10) будут содержать уравнения, написанные для гармоник этих частот и комбинационных частот. Системы (2.9) и (2.10) представляют собой системы бесконечного числа связанных уравнений.

При решении конкретных задач нелинейной электродинамики в зависимости от постановки и желаемой точности решения ограничиваются определенным номером гармоник, так как они быстро убывают с возрастанием номера. Это же относится и к комбинационным частотам. При этом число уравнений сокращается, а сами нелинейные уравнения становятся приближенными.

Если среда линейна, то уравнения (2.9) и (2.10) имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) + \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a^n(\omega) \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) = j\omega \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(\omega); \\ \Delta \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) + \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a^n(\omega) \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(\omega)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) + k^2 \dot{\mathbf{E}}_m(\omega) = j\omega \tilde{\mu}_a^n(\omega) \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(\omega); \\ \Delta \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) + k^2 \dot{\mathbf{H}}_m(\omega) = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{J}}_m^{\text{CT}}(\omega),\end{aligned}\quad (2.11)$$

где  $k = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a^n \tilde{\mu}_a^n} = \omega \sqrt{(\varepsilon_a^{\text{J}} - j\varepsilon_a^{\text{J}''})(\mu_a^{\text{J}} - j\mu_a^{\text{J}''})} = \beta - j\alpha$  — постоянная распространения;  $\beta$  — фазовая постоянная;  $\alpha$  — постоянная затухания.

Физический смысл этих величин будет рассмотрен в § 2.4. Используя введенный в § 1.9 векторный и скалярный потенциалы, перепишем выражения (1.24) и (1.25) в символической форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_a^\pi} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}; \\ \dot{\mathbf{E}} &= -\operatorname{grad} \dot{\phi} - j\omega \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Волновые уравнения для электромагнитных потенциалов (1.28) и (1.29) в символической форме имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} &= -\dot{\boldsymbol{\rho}}_a^\pi \mathbf{j}^{\text{CT}}; \\ \Delta \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} &= -\dot{\rho}^{\text{CT}} / \epsilon_a^\pi. \end{aligned} \tag{2.12}$$

При отсутствии потерь

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a^\pi \mu_a^\pi}$$

и выражения (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} &= -\mu_a^\pi \mathbf{j}^{\text{CT}}; \\ \Delta \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} &= -\dot{\rho}^{\text{CT}} / \epsilon_a^\pi. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений получим, представив (1.36) и (1.37) в символической форме (П.84). С учетом временной зависимости при отсутствии потерь получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\mu_a^\pi}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_m^{\text{CT}} e^{j\omega(t-r/v)}}{r} dV; \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a^\pi} \int_V \frac{\dot{\rho}_m^{\text{CT}} e^{j\omega(t-r/v)}}{r} dV. \end{aligned}$$

Для комплексных амплитуд решения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_m &= \frac{\mu_a^\pi}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_m^{\text{CT}} e^{-jk\mathbf{r}}}{r} dV; \\ \dot{\phi}_m &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a^\pi} \int_V \frac{\dot{\rho}_m^{\text{CT}} e^{-jk\mathbf{r}}}{r} dV, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a^\pi \mu_a^\pi} = \frac{\omega}{v}.$$

Решения представляют собой суперпозицию сферических волн, расходящихся от точечных источников, сосредоточенных в объеме  $V$ .

Если объемное распределение токов и зарядов заменить линейным распределением по проводнику, то выражения (2.13) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{A}_m &= \frac{\mu_a^n}{4\pi} \int_L \frac{I_m^{ct} e^{-jkr}}{r} dl; \\ \dot{\Phi}_m &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a^n} \int_L \frac{\tau_m^{ct} e^{-jkr}}{r} dl,\end{aligned}\quad (2.14)$$

где  $I_m^{ct}$  — амплитуда тока в проводнике;  $\tau_m^{ct}$  — амплитуда линейного заряда, Кл/м.

Используя введенный в § 1.9 вектор Герца, перепишем выражения (1.34) в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= \omega^2 \epsilon_a^n \mu_a^n \dot{\mathbf{Z}} + \text{grad div } \dot{\mathbf{Z}}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \epsilon_a^n \text{rot } \dot{\mathbf{Z}}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Волновое уравнение (1.33) для вектора Герца в комплексной форме имеет вид

$$\Delta \dot{\mathbf{Z}} + k^2 \dot{\mathbf{Z}} = -\frac{1}{\epsilon_a^n} \dot{\mathbf{p}}^{ct}, \quad (2.16)$$

где

$$\dot{\mathbf{p}}^{ct} = \int \mathbf{j}^{ct} dt.$$

Решение уравнения (2.16) имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{Z}}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_a^n} \int_V \frac{\dot{\mathbf{p}}_m^{ct} e^{-jkr}}{r} dV. \quad (2.17)$$

**Граничные условия.** При решении полученных уравнений должны учитываться граничные условия. В общем случае граничные условия для тангенциальных и нормальных составляющих поля имеют вид

$$\begin{aligned}E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}; \quad D_{n(1)} - D_{n(2)} = \varkappa; \\ H_{\tau(1)} - H_{\tau(2)} &= J_{\text{пов}}; \quad B_{n(2)} = B_{n(1)}.\end{aligned}$$

Эти условия выполняются в любой момент времени, поэтому они должны выполняться для любых гармоник и составляющих комбинационных частот. Для гармоник эти условия имеют вид

$$\begin{aligned}E_{\tau(1)}(n\omega) &= E_{\tau(2)}(n\omega); \quad H_{\tau(1)}(n\omega) - H_{\tau(2)}(n\omega) = J_{\text{пов}}(n\omega); \\ D_{n(1)}(n\omega) - D_{n(2)}(n\omega) &= \varkappa(n\omega); \quad B_{n(1)}(n\omega) = B_{n(2)}(n\omega).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Для комбинационных частот граничные условия имеют аналогичный вид.

## 2.2. Энергетические соотношения и теорема Умова—Пойнтинга в комплексном виде

**Энергетические соотношения. Действующие значения.** Запишем согласно выражению (П.68) мгновенное значение плотности энергии монохроматического поля

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2) = \frac{1}{8}[\epsilon_a (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*)^2 + \mu_a (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^*)^2],$$

мгновенное значение плотности мощности

$$p = (\mathbf{J}\mathbf{E}) = \frac{1}{4}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^*)(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*),$$

мгновенное значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{1}{4}[(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*)(\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^*)].$$

Под мгновенным значением понимается значение в данный момент времени  $t$ .

Согласно (П.69) среднее значение плотности энергии

$$w_0 = \frac{1}{4}(\epsilon_a E_m^2 + \mu_a H_m^2), \quad (2.19)$$

среднее значение плотности мощности

$$p_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J}_m^* \dot{\mathbf{E}}_m) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J}_m \dot{\mathbf{E}}_m^*) = \operatorname{Re} \dot{p}, \quad (2.20)$$

где  $\dot{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_m \dot{\mathbf{E}}_m^*)$  — комплексная плотность мощности; среднее значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}}, \quad (2.21)$$

где  $\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{H}}_m]$  — комплексный вектор Умова—Пойнтинга.

По аналогии с теорией линейных электрических цепей введем действующие, или эффективные, значения напряженностей поля и плотности тока.

*Действующим, или эффективным, значением напряженности переменного поля  $E_d$  называется значение постоянного поля  $E_0$ , действие которого эквивалентно переменному полю, т. е. за одно и то же время, равное целому числу периодов, в среде выделяется одна и та же энергия.*

Согласно данному определению

$$\sigma E_0^2 T = \sigma E_d^2 T = \int_0^T \sigma E^2 dt.$$

Отсюда действующее значение напряженности электрического поля

$$E_{\text{д}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt}.$$

В случае монохроматического поля

$$E = E_m \cos(\omega t + \varphi_E)$$

и

$$E_{\text{д}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично определяется действующее значение напряженности магнитного поля и плотности тока:

$$H_{\text{д}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T H^2 dt};$$

$$J_{\text{д}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T J^2 dt}.$$

В случае монохроматического поля

$$H_{\text{д}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}}; \quad J_{\text{д}} = \frac{J_m}{\sqrt{2}}.$$

Соответствующие комплексные действующие значения напряженностей полей и плотности тока равны:

$$\dot{E}_{\text{д}} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_E};$$

$$\dot{H}_{\text{д}} = \frac{\dot{H}_m}{\sqrt{2}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_H};$$

$$\dot{j}_{\text{д}} = \frac{\dot{j}_m}{\sqrt{2}} = \frac{J_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_J}.$$

Отсюда средние значения (2.19)—(2.21) можно представить в следующем виде:

$$w_0 = \frac{1}{2} (\epsilon_a E_{\text{д}}^2 + \mu_a H_{\text{д}}^2);$$

$$p_0 = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{\text{д}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}^*) = (\mathbf{J}_{\text{д}} \mathbf{E}_{\text{д}}) \cos \varphi_{JE};$$

$$\Pi_0 = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{д}}^*] = [\mathbf{E}_{\text{д}} \mathbf{H}_{\text{д}}] \cos \varphi_{EH},$$

где  $\varphi_{JE}$  — сдвиг по фазе между  $\dot{\mathbf{J}}_{\text{д}}$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}$ ;  $\varphi_{EH}$  — сдвиг по фазе между  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}_{\text{д}}$

**Теорема Умова—Пойнтинга в комплексной форме.** Квадратичное соотношение, связывающее комплексные амплитуды, аналогичное теореме Умова—Пойнтинга (см. § 1.8), получим, умножив уравнение, комплексно сопряженное с первым уравнением системы (2.8) на  $\dot{\mathbf{E}}$ , а второе уравнение на  $\dot{\mathbf{H}}^*$ , и, проделав те же преобразования, что и при выводе теоремы Умова—Пойнтинга (см. § 1.8), запишем

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] + j\omega(\tilde{\mu}_a H_m^2 - \tilde{\epsilon}_a'^* E_m^2) + (\mathbf{J}_m^{\text{ст}*} \dot{\mathbf{E}}_m) = 0. \quad (2.22)$$

Введем согласно (2.19)—(2.21) обозначения:  $\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*]$  — комплексный вектор Пойнтинга;  $p_{\text{э0}} = \frac{\omega \epsilon_a''}{2} E_m^2$  — средняя плотность мощности электрических потерь (так как действительно  $p_{\text{э0}} = \frac{1}{2} \frac{J_m^2}{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma E_m^2 = \frac{\omega}{2} \epsilon_a'' E_m^2$ ) и аналогично  $p_{\text{м0}} = \frac{\omega \mu_a''}{2} H_m^2$  — средняя плотность мощности магнитных потерь;  $w_{\text{э0}} = \frac{\epsilon_a'}{4} E_m^2$  — средняя плотность электрической энергии;  $w_{\text{м0}} = \frac{\mu_a'}{4} H_m^2$  — средняя плотность магнитной энергии;  $\dot{p}^{\text{ст}} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_m^{\text{ст}*} \dot{\mathbf{E}}_m)$  — комплексная плотность мощности сторонних источников.

Перепишем выражение (2.22) с учетом принятых обозначений:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{\Pi}} + 2j\omega(w_{\text{м0}} - w_{\text{э0}}) + (p_{\text{м0}} + p_{\text{э0}}) + \dot{p}^{\text{ст}} = 0,$$

или в интегральной форме

$$\oint_S \dot{\mathbf{\Pi}} d\mathbf{S} + 2j\omega(W_{\text{м0}} - W_{\text{э0}}) + (P_{\text{м0}} + P_{\text{э0}}) + \dot{P}^{\text{ст}} = 0, \quad (2.23)$$

где  $W_{\text{м0}} = \int_V w_{\text{м0}} dV$  — среднее значение магнитной энергии в объеме  $V$ ;

$W_{\text{э0}} = \int_V w_{\text{э0}} dV$  — среднее значение электрической энергии в объеме  $V$ ;

$P_{\text{м0}} = \int_V p_{\text{м0}} dV$  — среднее значение мощности магнитных потерь в объеме  $V$ ;

$P_{\text{э0}} = \int_V p_{\text{э0}} dV$  — среднее значение мощности электрических потерь в объеме  $V$ ;

$\dot{P}^{\text{ст}} = \int_V \dot{p}^{\text{ст}} dV$  — комплексная мощность сторонних источников, распределенных в объеме  $V$ .



Выражение (2.23) представляет собой теорему Умова — Пойнтинга в комплексной форме для монохроматического поля. Приравнявая в (2.23) действительные части, получаем

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} + P_{\text{з0}} + P_{\text{м0}} + \operatorname{Re} \dot{P}^{\text{ct}} = 0,$$

где  $\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = \oint_S \dot{\mathbf{H}}_0 d\mathbf{S}$  — согласно (2.21) поток усредненного вектора Пойнтинга, или действительная (активная) мощность излучения через поверхность  $S$ , ограничивающую исследуемый объем  $V$ ;  $\operatorname{Re} \dot{P}^{\text{ct}} = P_0^{\text{ct}}$  — согласно (2.20) действительная (активная) мощность сторонних источников.

Таким образом,

$$\oint_S \dot{\mathbf{H}}_0 d\mathbf{S} + P_{\text{з0}} + P_{\text{м0}} + P_0^{\text{ct}} = 0. \quad (2.24)$$

Соотношение (2.24) называется теоремой о действительной (активной) мощности и характеризует баланс действительных (активных) мощностей.

Если  $P_0^{\text{ct}} < 0$ , то сторонние источники отдают энергию полю, если  $P_0^{\text{ct}} > 0$  — поле отдает энергию источникам. Очевидно, что  $P_0^{\text{ct}} < 0$  соответствует сдвигу фаз между  $\mathbf{J}^{\text{ct}}$  и  $\mathbf{E}$ , определяемому условием

$$\cos \varphi < 0,$$

т. е. угол  $\varphi$  изменяется в пределах

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi,$$

а  $P_0^{\text{ct}} > 0$  соответствует условию

$$\cos \varphi > 0,$$

т. е. изменению  $\varphi$  в пределах

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Если  $P_0^{\text{ct}} < 0$ , то выражение (2.24) переписывается в виде

$$\oint_S \dot{\mathbf{H}}_0 d\mathbf{S} + P_{\text{з0}} + P_{\text{м0}} = P_0^{\text{ct}}.$$

Действительная (активная) мощность сторонних источников, распределенная в исследуемом объеме  $V$ , расходуется на излучение через поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем, и магнитные и электрические потери (теплота) в нем.

Если  $P_0^{\text{ct}} > 0$ , то

$$-\oint_S \dot{\mathbf{H}}_0 d\mathbf{S} = P_{\text{з0}} + P_{\text{м0}} + P_0^{\text{ct}}.$$

Приток действительной (активной) мощности через поверхность  $S$ , ограничивающую исследуемый объем, расходуется на потери в этом объеме и поглощение мощности сторонними источниками, размещенными в нем.

Кроме мощности, непрерывно излучаемой через поверхность, и мощности, непрерывно расходуемой в объеме, существует обмен энергией без потерь между сторонними источниками и полем в данном объеме.

Приравнявая в соотношении (2.23) мнимые части, получаем

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} + 2\omega(W_{M0} - W_{Э0}) + \operatorname{Im} \dot{P}^{\text{ct}} = 0 \quad (2.25)$$

или

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} + P_r + P_r^{\text{ct}} = 0,$$

где  $\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S}$  — значение реактивной мощности излучения через поверхность  $S$ ;

$\operatorname{Im} \dot{P}_r^{\text{ct}}$  — значение реактивной мощности источников, распределенной в объеме  $V$ ;  $2\omega(W_{M0} - W_{Э0})$  — значение реактивной мощности, запасенной в объеме  $V$ .

Соотношение (2.25) называется теоремой о реактивной мощности и характеризует баланс реактивных мощностей.

В общем случае среды с потерями отношение

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu'_a(1 - j \operatorname{tg} \delta_m)}{\epsilon'_a(1 - j \operatorname{tg} \delta_s)}} \quad (2.26)$$

является комплексной величиной и напряженности электрического и магнитного полей не совпадают по фазе. Вектор Пойнтинга в разные части периода поля имеет разные направления. При этом происходит обмен энергией между полем и сторонними источниками.

Однако если

$$\operatorname{tg} \delta_s = \operatorname{tg} \delta_m$$

или

$$\frac{\mu''_a}{\mu'_a} = \frac{\epsilon''_a}{\epsilon'_a}, \quad (2.27)$$

то отношение

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a}} \quad (2.28)$$

является действительной величиной и сдвиг по фазе между электрическим и магнитным полем отсутствует. При этом вектор Пойнтинга направлен в одну сторону. Согласно (2.28),  $\oint_S \operatorname{Im} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = P_r = 0$ , а в соответствии с (2.25)  $P_r^{\text{ct}} = 0$ ,

т. е. обмен энергией между сторонними источниками и полем отсутствует.

Условие (2.27) можно удовлетворить, подбирая параметры среды, заполняющей объем  $V$ , или, так как эти параметры зависят от частоты, подбирая частоту. Если объем  $V$  изолирован и

$$\oint_S \dot{\Pi} dS = 0,$$

то в общем случае согласно (2.25)

$$P_r = -P_r^{ct}, \tag{2.29}$$

т. е. происходит обмен энергией между сторонними источниками и полем.

Если запасенная энергия постоянна во времени, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mu_a H^2 + \epsilon_a E^2}{2} dV = 0,$$

что возможно, если электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе во времени на  $\pi/2$  и запасенная в объеме  $V$  электрическая и магнитная энергии равны. При этом  $P_r = 0$ , а следовательно, согласно (2.29) и  $P_r^{ct} = 0$ , т. е. обмен энергией между полем и источником отсутствует, но происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полем. Такой электромагнитный процесс называется электрическим резонансом.

Условия резонанса при данных геометрических размерах изолированного объема и параметрах заполняющей среды могут быть удовлетворены подбором частоты (резонансная частота) или при данной частоте — подбором геометрических размеров объема (резонансный объем).

Очевидно, что  $\text{Im } \dot{P}^{ct} \neq 0$ , если между  $\mathbf{J}^{ct}$  и  $\mathbf{E}$  существует сдвиг фаз  $\varphi$ .

Такой же сдвиг фаз будет между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , так как причиной магнитного поля является ток, и  $\mathbf{H}$  во времени изменяется так же, как  $\mathbf{J}^{ct}$ . Из рис. 2.1 следует, что так как направления векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  определяются их зависимостью от времени, то существуют части периода поля, где векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  меняют свое направление одновременно, и части периода поля, например  $(t_1, t_2)$ , в течение которых один из векторов сохраняет свое направление, а другой меняет на обратное, что соответствует изменению направления вектора Пойнтинга. Таким образом, в течение одной части

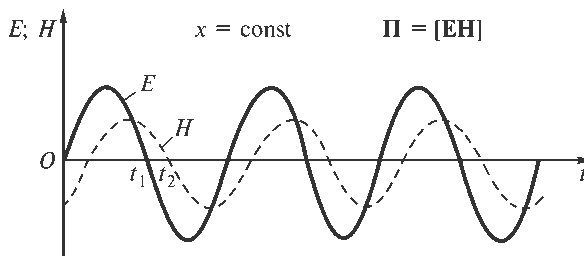


Рис. 2.1. К движению реактивной мощности

периода поля реактивная энергия излучается через поверхность, ограничивающую исследуемый объем, в течение другой — входит в этот объем.

Аналогично одновременное изменение направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}^{\text{ct}}$  приводит к тому, что в течение одной части периода поля  $\text{Im } \dot{P}^{\text{ct}} < 0$ , в течение другой —  $\text{Im } \dot{P}^{\text{ct}} > 0$ , т. е. реактивная мощность меняет направление движения (то входит, то выходит из источника). Можно показать, что в те части периода поля, когда сторонний источник поглощает реактивную мощность, реактивная мощность излучения направлена к источнику, в те части периода, когда сторонний источник выделяет реактивную мощность, реактивная мощность направлена от источника. Таким образом, происходит обмен реактивной мощностью между полем и сторонними источниками. Если магнитное и электрическое поля совпадают по фазе, обмен энергией между источником и средой прекращается.

### 2.3. Излучение электромагнитных волн. Электрический диполь Герца

Определим поле электрического диполя Герца, представляющего собой линейный проводник длиной  $l$  ( $l \ll \lambda$ ), по которому протекает ток, изменяющийся по гармоническому закону (рис. 2.2). При условии  $l \ll \lambda$  распределение тока по длине провода можно считать однородным.

Участок провода с однородным распределением тока можно рассматривать как электрический диполь с изменяющимися во времени зарядами. Применяя к любому объему проводника уравнение непрерывности

$$\oint_S \mathbf{J}^{\text{ct}} d\mathbf{S} = -\frac{\partial q^{\text{ct}}}{\partial t}$$

и считая, что он окружен непроводящей средой, получаем

$$\Delta I^{\text{ct}} = -\frac{\partial q^{\text{ct}}}{\partial t},$$

где  $\Delta I^{\text{ct}}$  — изменение тока по длине рассматриваемого проводника. В символической форме можно записать

$$\Delta \dot{I}_m^{\text{ct}} = -j\omega \dot{q}_m^{\text{ct}}. \quad (2.30)$$

Изменение тока от значения  $I_m^{\text{ct}}$  до нуля наблюдается лишь на концах проводника и, следовательно, везде, кроме концов проводника, заряд отсутствует, а на его концах имеются заряды, равные по величине, но проти-

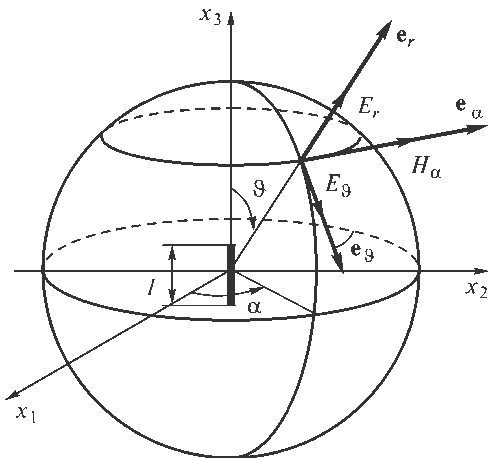


Рис. 2.2. К расчету поля элементарного излучателя (диполь Герца)

воположные по знаку, т. е. имеем дело с диполем, электрический момент которого  $\mathbf{p}_3 = q^{\text{ст}}\mathbf{l}$ ,  $q^{\text{ст}} = q_m^{\text{ст}} \sin \omega t$ . В этом случае вектор Герца согласно (2.17) равен

$$\dot{\mathbf{Z}}_m = \frac{q_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_a r} \mathbf{l} = -\frac{jI_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_a \omega r} \mathbf{l}.$$

Напряженность магнитного поля согласно (2.15) равна

$$\dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_a \text{rot } \dot{\mathbf{Z}}.$$

В сферической системе координат, в центре которой расположен диполь,

$$\dot{\mathbf{Z}}_m = -j \frac{I_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}} l}{4\pi\epsilon_a \omega r} \mathbf{e}_3 = -j \frac{I_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}} l}{4\pi\epsilon_a \omega r} (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta).$$

Согласно выражению (П.42) имеем

$$\begin{aligned} H_{mr} &= H_{m\vartheta} = 0; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{j\omega\epsilon_a}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\dot{Z}_{m\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{Z}_{mr} \right] = \\ &= \frac{j l}{4\pi} \left( \frac{k I_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}}}{r} - j \frac{I_m^{\text{ст}} e^{-jk\mathbf{r}}}{r^2} \right) \sin \vartheta = \\ &= \frac{I_m^{\text{ст}} l e^{-jk\mathbf{r}}}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} + jk \right) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Электрическое поле диполя можно определить из первого уравнения Максвелла для монохроматического поля:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -j \frac{1}{\omega\epsilon_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= -j \frac{I_m^{\text{ст}} l e^{-jk\mathbf{r}}}{2\pi\omega\epsilon_a r^2} \left( \frac{1}{r} + jk \right) \cos \vartheta; \\ \dot{E}_{m\vartheta} &= -j \frac{I_m^{\text{ст}} l e^{-jk\mathbf{r}}}{4\pi\omega\epsilon_a r} \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} - k^2 \right) \sin \vartheta; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (2.31a)$$

Переходя от символической записи (2.31) и (2.31a) к векторам поля, получаем

$$\begin{aligned}
 H_r &= H_\vartheta = E_a = 0; \\
 H_a &= \frac{kI_m^{ct}}{4\pi r} \left[ \frac{1}{kr} \cos(\omega t - \mathbf{kr}) - \sin(\omega t - \mathbf{kr}) \right] \sin \vartheta; \\
 E_r &= \frac{kI_m^{ct}}{2\pi\omega\epsilon_a r^2} \left[ \frac{1}{kr} \sin(\omega t - \mathbf{kr}) + \cos(\omega t - \mathbf{kr}) \right] \cos \vartheta; \\
 E_\vartheta &= \frac{k^2 I_m^{ct}}{4\pi\omega\epsilon_a r} \left[ \left( \frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \sin(\omega t - \mathbf{kr}) + \frac{1}{kr} \cos(\omega t - \mathbf{kr}) \right] \sin \vartheta.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Из выражений (2.32) следует, что электрический вектор лежит в меридиональной плоскости, а магнитный вектор перпендикулярен к этой плоскости. Магнитные силовые линии имеют вид концентрических окружностей, проведенных вокруг диполя.

Учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , рассмотрим выражения (2.32) в двух областях: вблизи излучающего провода на расстояниях  $r \ll \lambda$ , т. е. в области, где  $kr \ll 1$ , и на расстояниях  $r \gg \lambda$ , т. е. в области, где  $kr \gg 1$ .

В ближней зоне ( $kr \ll 1$ ), пренебрегая фазовым сдвигом  $kr$  и учитывая малость величин 1 и  $\frac{1}{kr}$  по сравнению с величиной  $\frac{1}{k^2 r^2}$ , перепишем выражения (2.32) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H_\alpha &\approx \frac{I_m^{ct}}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cos \omega t; \\
 E_r &\approx \frac{I_m^{ct}}{2\pi\omega\epsilon_a r^3} \cos \vartheta \sin \omega t; \\
 E_\vartheta &\approx \frac{I_m^{ct}}{4\pi\omega\epsilon_a r^3} \sin \vartheta \sin \omega t.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Выражения (2.33) описывают поле, не имеющее волнового характера; здесь электрическое и магнитное поля не совпадают по фазе. Магнитное поле находится в фазе с током в проводе, электрическое поле — в фазе с зарядами на концах провода.

Составляющие поля (2.33) называются индукционными составляющими. Они быстро убывают с увеличением расстояния от провода.

Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\Pi_0 = \text{Re } \dot{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] = 0,$$

так как согласно (2.33) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  сдвинуты по фазе во времени на  $\frac{\pi}{2}$  и

комплексный вектор Пойнтинга  $\dot{\Pi}$  является чисто мнимой величиной. Таким образом, движения энергии нет, происходит лишь периодический обмен энергией между электрической и магнитной составляющими поля. Полем излучения в ближней зоне можно пренебречь по сравнению с полем индукции.

В дальней зоне ( $kr \gg 1$ ) можно пренебречь слагаемыми с множителями  $\frac{1}{k^2 r^2}$  и  $\frac{1}{kr}$ , тогда выражения (2.32) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_\alpha &\approx -\frac{kI_m^{ct}}{4\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - \mathbf{kr}); \\ E_r &\approx 0; \\ E_\vartheta &\approx -\frac{k^2 I_m^{ct}}{4\pi\omega\epsilon_a r} \sin \vartheta \sin(\omega t - \mathbf{kr}). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Выражения (2.34) имеют волновой характер и характеризуют поле излучения. Это поле представляет собой сферическую волну, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  совпадают по фазе, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения. Силовые линии магнитного поля параллельны широтам сферы, а линии электрического поля расположены вдоль меридианов. Оба поля имеют наибольшую напряженность у экватора ( $\vartheta = 90^\circ$ ) и исчезают на полюсах ( $\vartheta = 0$ ). Полное представление о характере поля излучения дает диаграмма направленности, представляющая собой в произвольной меридиональной плоскости зависимость амплитуды  $E_m$  или  $H_m$  от угла  $\vartheta$  для фиксированного расстояния  $r$  (рис. 2.3).

В каждой точке пространства векторы поля изменяются во времени по синусоиде.

Средняя плотность потока мощности, переносимая волной,

$$\Pi_0 = \text{Re } \dot{\Pi} = \frac{I_m^{ct 2} k^3 I^2}{32\pi^2 \omega \epsilon_a r^2} \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_r.$$

Усредненный вектор Пойнтинга направлен по радиусу и обратно пропорционален квадрату расстояния. Он характеризует энергию, распространяющуюся от диполя.

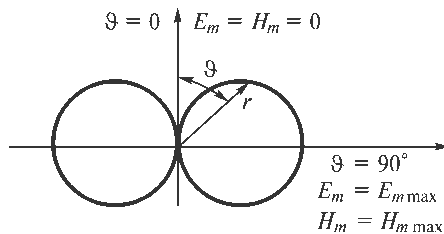


Рис. 2.3. Диаграмма излучения диполя Герца

Сравнивая системы (2.33) и (2.34), видим, что электрические составляющие поля индукции и излучения находятся в противофазе, а составляющие магнитного поля сдвинуты на  $90^\circ$ . Это объясняется тем, что поле излучения создается не благодаря току и заряду диполя, а вследствие изменений поля индукции. Поля индукции и излучения примерно равны на расстоянии  $r = \frac{\lambda}{2\pi}$ .

### 2.4. Плоская однородная монохроматическая волна в неограниченной однородной изотропной линейной среде. Фазовая и групповая скорости

Рассмотрим распространение плоской однородной электромагнитной волны в однородной изотропной среде, лишенной источников. Волна называется плоской однородной, если векторы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, неизменны по фазе и амплитуде. Практически плоской можно считать волну, создаваемую любой антенной в дальней зоне, в пределах площадки, линейные размеры которой достаточно малы по сравнению с расстоянием этой площадки от антенны. Если совместить направление распространения волны с одной из осей декартовой системы координат, то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будут зависеть от одной координаты и времени.

**Среда с потерями.** В этом случае  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$ ,  $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$ . Постоянная распространения волны

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$$

является комплексной величиной.

Пусть направление распространения волны совпадает с осью  $x_3$ , тогда  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_3, t)$  и  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_3, t)$ . Волновой процесс не зависит от координат  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0, \tag{2.35}$$

и волновые уравнения (2.11) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_m}{\partial x_3^2} + \dot{k}^2 \dot{H}_m = 0; \quad \frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial x_3^2} + \dot{k}^2 \dot{E}_m = 0. \tag{2.36}$$

Уравнения (2.36) называются уравнениями Гельмгольца и представляют собой линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$\dot{E}_m = \mathbf{A} e^{-j\dot{k}x_3} + \mathbf{B} e^{j\dot{k}x_3}.$$

Отбрасывая второй член уравнения как не имеющий физического смысла (волны, идущей к источнику и возрастающей, в неограниченной однородной среде быть не может) и учитывая зависимость от времени в виде  $e^{j\omega t}$ , получаем



$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - \dot{k}x_3)}, \quad (2.37)$$

где  $E_m$  — амплитуда электрической составляющей поля.

Учитывая, что

$$\dot{k} = \beta - j\alpha,$$

имеем

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{-\alpha x_3} e^{j(\omega t - \beta x_3)}.$$

Переходя к вектору  $\mathbf{E}$ , получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3).$$

Поскольку уравнения (2.36) для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  одинаковы, то

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi)$$

и достаточно рассмотреть поведение одного из векторов —  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . Здесь  $\varphi$  — возможный начальный сдвиг;  $\alpha$  — постоянная затухания, характеризующая скорость убывания амплитуды;  $\beta$  — фазовая постоянная, характеризующая скорость изменения фазы при распространении волны.

В каждой плоскости  $x_3 = \text{const}$  поле меняется во времени, в каждый данный момент времени поле различно для разных значений координаты  $x_3$ .

Очевидно, что фаза поля имеет одно и то же значение для различных значений координаты  $x_3$  и моментов времени  $t$ , удовлетворяющих условию

$$\omega(t + \Delta t) - \beta(x_3 + \Delta x_3) = \omega t - \beta x_3$$

или

$$\omega \Delta t - \beta \Delta x_3 = 0.$$

Это значит, что если в момент времени  $t$  в плоскости  $x_3 = \text{const}$  поле имеет некоторое определенное значение фазы, то такое же значение оно будет иметь через промежуток времени  $\Delta t$  в плоскости, отстоящей от плоскости  $x_3 = \text{const}$  на расстояние  $\Delta x_3$  по оси  $x_3$ . Таким образом, фаза электромагнитного поля распространяется вдоль оси  $x_3$  со скоростью

$$v_\varphi = \frac{\Delta x_3}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (2.38)$$

называемой *фазовой скоростью*. С такой скоростью перемещается плоскость равных фаз, называемая фронтом волны (плоскость равных фаз и плоскость равных амплитуд могут и не совпадать).

Если наблюдатель перемещается вместе с плоскостью выбранных постоянных значений фазы, то эта фаза будет для него постоянной, не зависящей от времени.

Неподвижный наблюдатель отметит изменение фазы с течением времени, так как мимо него будут проходить плоскости с разными значениями фазы.

Очевидно, что имеются точки, где значение фазы в данный момент времени отличается лишь на  $2\pi$ . Ближайшее расстояние  $\lambda$  между этими точками определяется из условия

$$\beta(x_3 + \lambda) - \beta x_3 = 2\pi$$

и называется *длиной волны* (м)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{2.39}$$

Фазовая постоянная (м<sup>-1</sup>)

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

т. е. она равна числу волн, укладываемых на отрезке в  $2\pi$  единиц длины, по этому она называется волновым числом.

Уравнения Максвелла (2.8) для монохроматического поля в среде с потерями имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}}; \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

В декартовой системе координат с учетом (2.35) и зависимости  $\dot{\mathbf{H}}$  и  $\dot{\mathbf{E}}$  от координаты  $x_3$  в виде  $e^{-jkx_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} = -jk \right)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} k\dot{H}_2 &= \omega\tilde{\epsilon}_a\dot{E}_1; \\ k\dot{H}_1 &= -\omega\tilde{\epsilon}_a\dot{E}_2; \\ \dot{E}_3 &= 0; \\ k\dot{E}_2 &= -\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_1; \\ k\dot{E}_1 &= \omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_2; \\ \dot{H}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Здесь постоянную распространения  $k$  можно рассматривать как вектор  $\dot{\mathbf{k}}$ , направление которого в случае плоской однородной волны определяет направление ее распространения. При этом систему уравнений (2.40) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -[\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{H}}] &= \omega\tilde{\epsilon}_a\dot{\mathbf{E}}; \\ [\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{E}}] &= \omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Из (2.41) следует, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  взаимно перпендикулярны; векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости  $x_1Ox_2$ . Так, если  $\mathbf{E}$  направлен по оси  $x_1$ , то  $\mathbf{H}$  — по оси  $x_2$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3);$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi).$$

Из векторных уравнений (2.41) следует выражение

$$k \dot{H} = \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}$$

или при  $k = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a}$

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}}, \quad (2.42)$$

определяющее сдвиг по фазе во времени между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ . Выражение

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = |Z_0| e^{j\varphi}$$

называется волновым сопротивлением (Ом) среды.

Вследствие сдвига по фазе направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , как видно на рис. 2.4, меняются неодновременно, поэтому вектор Пойнтинга направлен то по направлению распространения волны, то обратно к источнику.

Средняя плотность потока мощности в среде с потерями определяется выражением (2.21), т. е.

$$\Pi_0 = \operatorname{Re} \dot{\Pi} = \mathbf{e}_3 \frac{E_m H_m}{2} \cos \varphi \cdot e^{-2\alpha x_3},$$

и зависит от сдвига фаз между электрическим и магнитным полем.

Затухание энергии электромагнитного поля при прохождении волной пути  $l$  определяется отношением средних плотностей потока мощности на концах этого участка:

$$\frac{\Pi_0(x_3)}{\Pi_0(x_3 + l)} = e^{2\alpha l}.$$

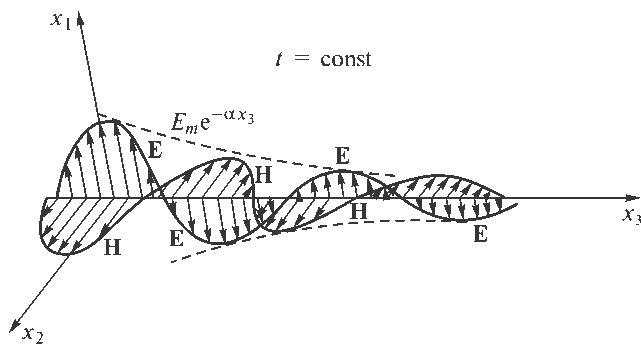


Рис. 2.4. Плоская волна в среде с потерями

Затухание волны в децибелах (дБ) равно

$$L = 10 \lg e^{2\alpha l} \approx 8,69\alpha l.$$

В общем случае, когда направление распространения поля не совпадает ни с одной из осей координат, волновые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} &= 0; \\ \Delta \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} &= 0, \end{aligned}$$

а их решения —

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_m e^{j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi)}, \end{aligned}$$

где  $\dot{\mathbf{k}}$  — комплексный волновой вектор,  $\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\beta} - j\boldsymbol{\alpha}$ .

Вектор  $\boldsymbol{\beta}$  определяет направление распространения волны. Он перпендикулярен плоскости равных фаз. Вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  перпендикулярен плоскости равных амплитуд. Направления этих векторов могут не совпадать. Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  определяет исследуемую точку.

Определим постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  через параметры среды:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \omega \sqrt{(\epsilon'_a - j\epsilon''_a)(\mu'_a - j\mu''_a)} = \beta - j\alpha,$$

где  $\dot{k}$  — постоянная распространения волны;  $\epsilon'_a$ ,  $\mu'_a$  и  $\epsilon''_a$ ,  $\mu''_a$  — действительные и мнимые части диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$  и магнитной проницаемости  $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$ , или

$$\omega^2[(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a) - j(\epsilon'_a \mu''_a + \epsilon''_a \mu'_a)] = (\beta^2 - \alpha^2) - j2\alpha\beta.$$

Приравняем действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a); \\ 2\alpha\beta &= \omega^2(\epsilon'_a \mu''_a + \epsilon''_a \mu'_a). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a) + \sqrt{(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a)^2 + (\epsilon'_a \mu''_a + \epsilon''_a \mu'_a)^2}}{2}}; \\ \alpha &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{-(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a) + \sqrt{(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a)^2 + (\epsilon'_a \mu''_a + \epsilon''_a \mu'_a)^2}}{2}}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Для обычных диэлектриков и металлов  $\mu' = 1$ ,  $\mu'' = 0$ , поэтому формулы (2.43) упрощаются:

$$\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon'_a\mu_0} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_s}}{2}}; \\ \alpha &= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon'_a\mu_0} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_s}}{2}}.\end{aligned}\quad (2.44)$$

В диэлектриках с малыми потерями ток проводимости мал по сравнению с током смещения ( $\sigma \ll \omega\varepsilon'_a$ ) тангенс угла электрических потерь,  $\operatorname{tg} \delta_s = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} < 10^{-4}$ , и, следовательно, постоянная затухания  $\alpha$  мала. Волна распространяется на большие расстояния практически без затухания. Фазовая постоянная

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_a}.$$

Если потери в диэлектрике обусловлены только проводимостью, то

$$\varepsilon''_a = \frac{\sigma}{\omega}.$$

Воспользовавшись приближенной формулой  $(1+a)^2 = 1 + \frac{a}{2}$  для малых  $a$ , получим

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \varepsilon' \left(1 + \frac{\varepsilon''^2}{2\varepsilon'^2}\right)}{2}} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{60\pi\sigma}{\sqrt{\varepsilon'}}.\quad (2.45)$$

Фазовая скорость в диэлектрике с малыми потерями

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon'_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}}.$$

Очевидно, что в случае диэлектрика с малыми потерями распространение сигнала происходит с малым затуханием и почти без искажений.

В проводниках ток проводимости намного больше тока смещения ( $\omega\varepsilon'_a < \sigma$ )  $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$ , и выражения (2.44) имеют вид

$$\beta = \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon''_a}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}.\quad (2.45a)$$

В проводящей среде наблюдается большое затухание энергии. Расстояние  $\Delta$ , на котором амплитуда поля убывает в  $e = 2,72$  раза, называется *глубиной проникновения* (м)

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}.$$

Фазовая скорость и длина волны в среде с потерями определяется выражениями (2.38) и (2.39). Очевидно, что фазовая скорость и длина волны в среде с потерями меньше, чем в среде без потерь. В среде с потерями фазовая скорость зависит от частоты. Зависимость фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*.

Если  $\text{tg } \delta_s = \text{tg } \delta_m$  или  $\epsilon''\mu' = \epsilon'\mu''$ , то выражения (2.43) имеют следующий вид:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a) + (\epsilon'_a \mu'_a + \epsilon''_a \mu''_a)}{2}} = \omega \sqrt{\epsilon'_a \mu'_a};$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{-(\epsilon'_a \mu'_a - \epsilon''_a \mu''_a) + (\epsilon'_a \mu'_a + \epsilon''_a \mu''_a)}{2}} = \omega \sqrt{\epsilon''_a \mu''_a},$$

а фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'_a \mu'_a}}$$

не зависит от частоты.

Таким образом, среда с потерями при условии  $\text{tg } \delta_s = \text{tg } \delta_m$  не обладает дисперсией. Сигнал не искажается при распространении, а лишь уменьшается по величине. В среде существует чисто бегущая волна, так как волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0(\mu' - j\mu'')}{\epsilon_0(\epsilon' - j\epsilon'')}} = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a}}$$

является действительной величиной и сдвиг фаз между электрическим и магнитным полем равен нулю.

В случае монохроматического поля

$$v_\phi = v_s,$$

где  $v_s$  — скорость распространения энергии.

Сигнал, представляющий собой спектр частот, вследствие дисперсии изменяет форму, а следовательно, изменяется и распределение энергии в спектре. В связи с этим вводится понятие групповой скорости, характеризующей распространение в пространстве максимума энергии.

Рассмотрим простейший случай, когда сигнал состоит из двух синусоид с одинаковыми амплитудами и мало отличающимися частотами:

$$E(x_3, t) = E_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3) + E_m e^{-\alpha x_3} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x_3] =$$

$$= 2E_m e^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x_3\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)x_3\right].$$

Поскольку  $\Delta\omega \ll \omega$  и  $\Delta\beta \ll \beta$ ,

$$E(x_3, t) = 2E_m e^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x_3\right) \cos(\omega t - \beta x_3).$$

Это колебание можно рассматривать как сигнал с несущей частотой  $\omega$  и огибающей

$$2E_m e^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x_3\right).$$

Скорость перемещения максимума огибающей в пространстве и называется *групповой скоростью*. Групповая скорость — это скорость распространения сигнала, так как информация передается огибающей, а не высокочастотным заполнением.

Максимум огибающей перемещается со скоростью, определяемой из условия

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x_3 = \frac{\Delta\omega}{2}(t + \Delta t) - \frac{\Delta\beta}{2}(x_3 + \Delta x_3),$$

т. е.

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$v_{\text{гр}} = \frac{dx_3}{dt} = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

Определим зависимость между фазовой и групповой скоростью:

$$\frac{dv_{\phi}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = \frac{\beta - \omega \frac{d\beta}{d\omega}}{\beta^2} = \frac{\beta - \omega \frac{1}{v_{\text{гр}}}}{\beta^2}.$$

Отсюда

$$v_{\text{гр}} = \frac{v_{\phi}}{1 - \omega \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}.$$

Это соотношение называется формулой Релея. Если среда не обладает дисперсией (фазовая скорость не зависит от частоты и  $\frac{dv_{\phi}}{d\omega} = 0$ ), то

$$v_{\text{гр}} = v_{\phi}.$$

Если с увеличением частоты фазовая скорость возрастает, т. е.  $\frac{dv_{\phi}}{d\omega} > 0$ , то

групповая скорость будет больше фазовой; если  $\frac{dv_{\phi}}{d\omega} < 0$ , то групповая скорость будет меньше фазовой.

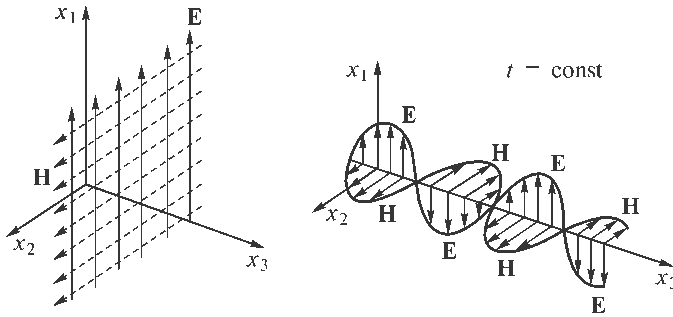


Рис. 2.5. Плоская волна в среде без потерь

Дисперсия, при которой групповая скорость меньше фазовой, называется нормальной дисперсией, в противном случае — аномальной. Дисперсия, обусловленная проводимостью среды, является аномальной.

**Среда без потерь.** В отсутствие потерь параметры среды  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ , а следовательно, и  $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  являются действительными величинами, и уравнения Максвелла в векторной форме (2.41), имеют вид

$$\begin{aligned} -[\mathbf{k}\dot{\mathbf{H}}] &= \omega\epsilon_a\dot{\mathbf{E}}; \\ [\mathbf{k}\dot{\mathbf{E}}] &= \omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}, \end{aligned}$$

т. е. векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  взаимно перпендикулярны (рис. 2.5).

Волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{E_m}{H_m}$$

— действительная величина. Магнитное и электрическое поля совпадают по фазе, и поле плоской волны является полем бегущей волны.

В воздухе волновое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi.$$

Поле плоской волны определяется выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - kx_3) = \mathbf{e}_1 H_m Z_0 \cos(\omega t - kx_3); \\ \mathbf{H} &= \mathbf{e}_2 H_m \cos(\omega t - kx_3) = \mathbf{e}_2 \frac{E_m}{Z_0} \cos(\omega t - kx_3). \end{aligned}$$

Вектор Пойнтинга в любой момент времени направлен в сторону распространения волны и определяет плотность потока мощности:

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{e}_3 H_m^2 Z_0 \cos^2(\omega t - kx_3). \tag{2.46}$$

Средняя плотность потока мощности согласно (2.21) равна



$$\mathbf{\Pi}_0 = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{e}_3 \frac{H_m^2 Z_0}{2}.$$

Мгновенные плотности электрической и магнитной энергий соответственно равны

$$w_э = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \frac{\varepsilon_a}{2} H_m^2 Z_0^2 \cos^2(\omega t - kx_3);$$

$$w_м = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\mu_a}{2} H_m^2 \cos^2(\omega t - kx_3).$$

Учитывая значение волнового сопротивления, получаем

$$w_э = w_м,$$

и, следовательно, полная плотность электромагнитной энергии

$$w = w_э + w_м = \mu_a H_m^2 \cos^2(\omega t - kx_3) = \varepsilon_a E_m^2 \cos^2(\omega t - kx_3). \quad (2.47)$$

Фазовая скорость согласно (2.38) равна

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (2.48)$$

Длина волны в соответствии с формулой (2.39)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

где  $c$  — скорости света в воздухе;  $\lambda_0$  — длина волны в воздухе.

Скорость движения энергии можно определить по формуле

$$\mathbf{v}_э = \frac{\mathbf{\Pi}}{w}.$$

Действительно, вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}$  определяется как количество энергии, проходящей через единицу площади в единицу времени. Эта энергия заключена в объеме прямоугольного параллелепипеда с единичным основанием и высотой  $h$ . Очевидно, что скорость распространения энергии и равна этой высоте. Чтобы найти значение  $h$ , надо разделить энергию  $\mathbf{\Pi}$ , заключенную в объеме параллелепипеда, на энергию единицы объема  $w$ . С учетом (2.46) и (2.47) находим

$$\mathbf{v}_э = \mathbf{e}_3 \frac{Z_0}{\mu_a} = \mathbf{e}_3 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \quad (2.49)$$

Сравнивая (2.48) и (2.49), получаем

$$v_э = v_\phi = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}.$$

В случае немонохроматического поля это условие сохраняется, так как фазовая скорость не зависит от частоты, форма сигнала не изменяется и не изменяется распределение энергии в спектре.

## 2.5. Пассивные и активные среды

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в однодородной изотропной среде с комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_a &= \epsilon'_a - j\epsilon''_a; \\ \tilde{\mu}_a &= \mu'_a - j\mu''_a.\end{aligned}$$

Постоянная распространения плоской волны в такой среде определяется выражением

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha,$$

где  $\beta$  — фазовая постоянная;  $\alpha$  — постоянная затухания.

Среда называется *пассивной*, если  $\alpha > 0$  и она поглощает энергию распространяющегося электромагнитного поля.

Среда называется *активной*, если  $\alpha < 0$  и она отдает энергию электромагнитному полю.

Если  $\epsilon''_a > 0$  и  $\mu''_a > 0$ , то  $\alpha > 0$  и среда пассивна.

Если  $\epsilon''_a < 0$  и  $\mu''_a < 0$ , то  $\alpha < 0$  и среда активна.

Если  $\epsilon''_a > 0$  и  $\mu''_a < 0$  или  $\epsilon''_a < 0$ , и  $\mu''_a > 0$ , то для определения характера среды надо найти знак величины

$$\alpha = -\text{Im}\left[\omega\sqrt{(\epsilon'_a - j\epsilon''_a)(\mu'_a - j\mu''_a)}\right].$$

Примеры активных сред: область электронного пучка, в которой электроны отдают энергию полю; среда внутри конденсатора, емкость которого периодически изменяется (параметрические колебания); активные среды, используемые в квантовых усилителях и генераторах.

При распространении плоской волны в активной среде в направлении оси  $x_3$  электромагнитное поле определяется выражениями

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_m e^{|\alpha|x_3} \cos(\omega t - \beta x_3); \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_m e^{|\alpha|x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi).\end{aligned}$$

При распространении волны на расстояние  $l$  напряженность поля увеличивается в  $e^{|\alpha|l}$  раз, мощность поля — в  $e^{2|\alpha|l}$  раз. Величину  $|\alpha|$  можно назвать коэффициентом усиления активной среды. При этом величина  $G \approx 8,69|\alpha|l$  определяет усиление в децибелах.

**Поток электронов в переменном поле.** Рассмотрим свойства некоторых сред более подробно. Для простоты полагаем, что поле имеет продольную электрическую составляющую, совпадающую с осью электронного пучка, и однородно по сечению пучка. Если электрическая составляющая поля совпадает с направлением движения электронов, то они тормозятся и энергия поля увеличивается за счет уменьшения кинетической энергии электронов. Происходит излучение ( $\alpha < 0$ ), среда ведет себя как активная. При противоположном направлении электрической составляющей поля электроны ускоряются, их кинетическая энергия увеличивается, а энергия поля уменьшается. Электроны поглощают энергию поля ( $\alpha > 0$ ), среда ведет себя как пассивная.

Рассмотрим случай торможения электронов. Определим напряженность электрического поля как

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_3 E_m e^{j(\omega t - kx_3)},$$

где  $\dot{k} = \beta - j\alpha$  — постоянная распространения.

Скорость электронов можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_3 v_0 + \mathbf{e}_3 v_-,$$

где  $v_0$  — постоянная составляющая, которая определяется постоянным электрическим полем, создаваемым внешним источником;  $v_-$  — переменная составляющая, определяемая переменным полем,

$$v_- = -v_m e^{j(\omega t - kx_3)}; \quad v_0 \gg v_m,$$

где знак « $\rightarrow$ » определяет торможение электрона.

В линейном приближении уравнение движения электрона имеет вид

$$m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = eE$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E, \quad (2.50)$$

где  $e$  и  $m$  — соответственно заряд и масса электрона.

Найдем полную производную скорости  $v = v(x_3, t)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x_3}$$

и запишем уравнение движения электрона в символической форме:

$$\frac{e}{m} \dot{E}_m \approx j\omega \dot{v}_m - j\dot{k} v_0 v_m. \quad (2.51)$$

Вследствие модуляции скорости электронов происходит модуляция плотности заряда (образование сгустков электронов)

$$\dot{\rho} = \rho_0 + \dot{\rho}_\sim,$$

где  $\dot{\rho}_\sim = \dot{\rho}_m e^{j(\omega t - kx_3)}$  — переменная составляющая плотности электронного потока;  $\rho_m \ll \rho_0$  и модуляция плотности тока

$$\dot{J} = \rho_0 v_0 + \dot{J}_\sim,$$

где

$$\dot{J}_\sim = (\rho_0 \dot{v}_m + \rho_m v_0) e^{j(\omega t - kx_3)} = -j_m e^{j(\omega t - kx_3)} \quad (2.52)$$

— переменная составляющая плотности тока.

Поскольку плотность тока  $J$  является функцией координаты  $x_3$ , то в соответствии с уравнением непрерывности  $\left( \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$  запишем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x_3}$$

или

$$\dot{\rho}_m = \frac{k}{\omega} j_m. \quad (2.53)$$

Решая совместно уравнения (2.51)—(2.53), получаем

$$j_m \approx \frac{jk_3 \rho_0 e}{(k_3 - k)^2} \dot{E}_m,$$

где  $k_3 = \omega/v_0$  — волновое электронное число.

Плотность комплексной мощности переменной составляющей тока определяется выражением

$$\dot{p} = \frac{1}{2} (j_m^* \dot{E}_m) = -\frac{jk_3 \frac{\rho_0 e}{v_0 m}}{2[(k_3 - \beta)^2 + 2j\alpha(k_3 - \beta) - \alpha^2]} E_m^2,$$

а плотность действительной мощности

$$p_0 = \operatorname{Re} \dot{p} = -\frac{k_3 \frac{\rho_0 e}{v_0 m} (k_3 - \beta)\alpha}{[(k_3 - \beta)^2 - \alpha^2]^2 + 4\alpha^2 (k_3 - \beta)^2} E_m^2. \quad (2.54)$$

При торможении электронов  $p_0 < 0$  и электроны отдают энергию полю.

Согласно выражению (2.54) усиление электромагнитного поля ( $\alpha < 0$ ) происходит при  $k_3 < \beta$  или  $v_0 > v_\phi$ , т. е. скорость движения электронов должна превышать фазовую скорость распространения электромагнитной волны, чтобы сгустки электронов находились в тормозящем поле.

При  $v_0 = v_\phi$  плотность действительной мощности  $p_0 = 0$  и взаимодействие поля с потоком электронов отсутствует, что соответствует локализации электронов в области нулевого поля.

В соответствии с (2.22) плотность действительной мощности определяется выражением

$$p_0 = \frac{\omega \epsilon_a''}{2} E_m^2. \quad (2.55)$$

Сравнив (2.54) с (2.55), найдем значение мнимой части диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_a'' = - \frac{2 \frac{p_0}{v_0^2} \frac{e}{m} (k_s - \beta) \alpha}{[(k_s - \beta)^2 - \alpha^2]^2 + 4\alpha^2 (k_s - \beta)^2}. \quad (2.56)$$

Выражение (2.56) справедливо и для ускоряющего, и для тормозящего поля. Различие заключается лишь в том, что в случае тормозящего поля ( $k_s < \beta$ ,  $\epsilon_a'' < 0$ ) — среда активная, а в случае ускоряющего поля ( $k_s > \beta$ ,  $\epsilon_a'' > 0$ ) — среда пассивная.

**Квантовые двухуровневые среды.** Внутренняя энергия атомов и молекул твердого тела или газа квантована. Согласно теории Бора атом или молекула не может находиться в состояниях с произвольной энергией, а может находиться только в определенных дискретных состояниях, называемых устойчивыми или стационарными. Одному и тому же уровню энергии могут соответствовать несколько различных состояний атома или молекулы. Состояния с одинаковой энергией называются вырожденными. Число состояний с одинаковой энергией называется степенью (кратностью) вырождения или статистическим весом.

Переход системы (атома, молекулы) из одного энергетического состояния, соответствующего определенному уровню энергии, в другое, соответствующее другому уровню, называется квантовым переходом. При переходе с более низкого на более высокий уровень система поглощает энергию, при переходе с более высокого на более низкий — отдает.

Различают *излучательные* и *безызлучательные квантовые переходы*. При безызлучательных переходах изменение энергии не связано с излучением, т. е. испусканием или поглощением фотонов; энергия системы изменяется при взаимодействии с другими атомами или окружающей средой (взаимодействие с кристаллической решеткой, соударение атомов друг с другом и т. д.). При излучательных переходах система излучает или поглощает электромагнитную энергию в виде квантов:

$$\hbar\omega = W_n - W_m,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка;  $W_n$  и  $W_m$  ( $W_n > W_m$ ) — энергетические уровни.

Если эти переходы совершаются при отсутствии внешнего электромагнитного излучения, то они называются *спонтанными* (самопроизвольными). Спонтанные переходы случайны, и различные частицы излучают энергию неодновременно и независимо друг от друга, поэтому фазы электромагнитных волн, излучаемых отдельными частицами, не согласованы друг с другом. Случайный характер имеет не только время излучения кванта, но и его поляризация и направление распространения (это некогерентное излучение).

Рассмотрим систему частиц, имеющую энергетические уровни  $W_n$  и  $W_m$  ( $W_n > W_m$ ). Если плотность мала, то взаимодействием атомов друг с другом можно пренебречь и безызлучательные переходы не учитывать. Пусть в единице объема вещества в момент времени  $t$  некоторое количество частиц  $N_n$  находится в состояниях с энергией  $W_n$ . В течение промежутка времени  $dt$  часть этих частиц перейдет на уровень  $W_m$ . Если вероятность спонтанного перехода в единицу времени для одной частицы обозначить через  $A_{nm}$ , то число частиц в единице объема, покинувших уровень с энергией  $W_n$  за время  $dt$ , определится выражением

$$dN_n = -A_{nm}N_n dt,$$

откуда

$$N_n(t) = N_n(0)e^{-A_{nm}t} = N_n(0)e^{-t/\Delta t_{nm}},$$

где  $N_n(0)$  — число частиц в единице объема вещества в состояниях с энергией  $W_n$  в момент времени  $t = 0$ .

Для одной частицы вероятность нахождения на возбужденном уровне определяется выражением

$$f(t) = e^{-t/\Delta t_{nm}}.$$

Величина

$$\Delta t_{nm} = \frac{1}{A_{nm}}$$

определяет время, в течение которого число частиц, находящихся в возбужденном состоянии, убывает в  $e$  раз. Она определяет среднее время жизни частиц в возбужденном состоянии. Действительно, число частиц, проживших на уровне  $W_n$  в течение времени  $t$ , равно  $A_{nm}N_n(t)$  — числу частиц, покидающих в течение времени  $t$  этот уровень, и среднее время жизни определяется выражением

$$\Delta t_{nm} = \frac{1}{N_n(0)} \int_0^{\infty} t A_{nm} N_n dt = \frac{1}{A_{nm}},$$

т. е. среднее время жизни  $\Delta t_{nm}$  — величина, обратная вероятности перехода.

Спонтанные переходы обуславливают конечность времени жизни атома или молекулы в возбужденном состоянии. Основными характеристиками этого процесса являются время жизни частицы в возбужденном состоянии и обратная величина — вероятность спонтанного перехода.

Плотность мощности спонтанного перехода определяется выражением

$$P_{\text{спонт}}(t) = \hbar\omega_{nm}N_n(t)$$

или

$$P_{\text{спонт}}(t) = \hbar\omega_{nm}N_n(0)e^{-A_{nm}t} = P_{\text{спонт}}(0)e^{-t/\Delta t_{nm}},$$

т. е. мощность спонтанного излучения убывает во времени по экспоненциальному закону.

Величина  $A_{nm}$ , называемая *коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения*, определяется средним числом фотонов, спонтанно излучаемых одной частицей в 1 с, и имеет размерность  $[c^{-1}]$ .

Излучение, вызываемое взаимодействием с веществом внешнего электромагнитного поля, частота которого близка к частоте квантового перехода, называется *индуцированным* или *вынужденным*. При этом частота, поляризация и направление распространения индуцированного излучения одинаковы с частотой, поляризацией и направлением распространения поля, вызывающим это излучение, и внешнее поле усиливается без изменения характеристик (когерентное излучение).

Вероятность индуцированного перехода в единицу времени пропорциональна спектральной плотности энергии  $w_0(\omega_{nm})$  вынуждающего излучения на частоте перехода и при индуцированном излучении для одной частицы определяется выражением

$$P_{nm} = B_{nm}w_0(\omega_{nm}), \quad (2.57)$$

где  $B_{nm}$  — *коэффициент Эйнштейна для индуцированного излучения*, определяемый числом фотонов, испускаемых в среднем одной частицей в 1 с при единичной спектральной плотности вынуждающего излучения, и имеющий размерность  $[m^3 \cdot Дж^{-4} \cdot c^{-2}]$ .

Вероятность излучательного перехода равна сумме вероятностей спонтанного и индуцированного переходов и для одной частицы определяется выражением

$$A_{nm} + B_{nm}w_0(\omega_{nm}).$$

При этом число переходов с уровня  $W_n$  на уровень  $W_m$  в момент времени  $t$  за промежуток времени  $dt$  в единице объема составит

$$dN_n = -[A_{nm} + B_{nm}w_0(\omega_{nm})]N_n dt.$$

Внешнее поле может вызывать не только индуцированные переходы с верхних уровней на нижние, сопровождаемые индуцированным излучением, но и переходы с нижних уровней на верхние, приводящие к *резонансному поглощению* электромагнитной энергии поля веществом.

Вероятность перехода с уровня  $W_m$  на уровень  $W_n$  в единицу времени для одной частицы также пропорциональна спектральной плотности энергии на частоте перехода

$$P_{mn} = B_{mn}w_0(\omega_{mn}),$$

где  $B_{mn}$  — коэффициент Эйнштейна для индуцированного поглощения, определяемый числом фотонов, в среднем поглощаемых одной частицей за 1 с при единичной спектральной плотности вынуждающего излучения.

Число переходов с уровня  $W_m$  на уровень  $W_n$  в единице объема вещества в момент времени  $t$  за промежуток времени  $dt$  определяется выражением

$$dN_m = -B_{mn} w_0(\omega_{mn}) N_m dt,$$

где  $N_m$  — число частиц на уровне  $W_m$  в единице объема в момент времени  $t$ .

При тепловом равновесии, когда излучаемая и поглощаемая энергии одинаковы, одинаково и число частиц, переходящих с верхнего уровня на нижний и обратно:

$$[A_{nm} + B_{nm} w_0(\omega_{nm})] N_n = B_{mn} w(\omega_{mn}) N_m.$$

Из последнего соотношения и термодинамических соображений можно показать, что

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn},$$

где  $g_n$  и  $g_m$  — кратность вырождения уровней с энергией  $W_n$  и  $W_m$ , и определить вероятность спонтанного перехода

$$A_{nm} = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} B_{nm} = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \frac{g_m}{g_n} B_{mn}. \tag{2.58}$$

Если коэффициент преломления среды  $n$  отличается от единицы, то скорость света  $c$  заменяется на  $v = c/n$ .

В приведенных выше расчетах использовались коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$ , определяющие полные (интегральные по частоте) вероятности спонтанного и индуцированного излучений в единицу времени. В действительности вероятности перехода при спонтанном и индуцированном излучениях зависят от частоты, на которой излучается фотон. Эта зависимость от частоты определяется формой спектральной линии. Спектральную плотность вероятности спонтанного перехода  $A_{nm}(\omega)$  можно представить в виде

$$A_{nm}(\omega) = A_{nm} g(\omega),$$

причем

$$A_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{nm}(\omega) d\omega,$$

где  $g(\omega)$  — форм-фактор спектральной линии. Аналогичное выражение можно записать для спектральной плотности вероятности индуцированного перехода:

$$B_{nm}(\omega) = B_{nm} g(\omega).$$

Очевидно, что соотношение между коэффициентами  $A_{nm}(\omega)$  и  $B_{nm}(\omega)$  то же самое, что и между коэффициентами  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$ .

Плотность мощности индуцированного излучения при переходе с уровня  $W_n$  на уровень  $W_m$  определяется выражением



$$P_{0\text{ изл}}^{\text{инд}} = B_{nm} g(\omega) w_0(\omega_{nm}) \hbar \omega_{nm} N_n. \quad (2.59)$$

Плотность мощности поглощения при переходе частиц с уровня  $W_m$  на уровень  $W_n$

$$P_{0\text{ погл}}^{\text{инд}} = \frac{g_n}{g_m} B_{nm} g(\omega) w_0(\omega_{nm}) \hbar \omega_{nm} N_m. \quad (2.60)$$

Населенность энергетического уровня определяется числом частиц в единице объема вещества, находящихся на данном уровне, деленном на статистический вес. Если вырождение отсутствует, то населенность определяется числом частиц в единице объема вещества, находящихся на данном энергетическом уровне.

Спонтанные переходы уменьшают населенность только верхних уровней, индуцированные переходы проходят в обе стороны. При малой интенсивности вынуждающего поля интенсивность индуцированных переходов меньше интенсивности спонтанных переходов и практически частицы переходят только на нижние уровни. При большой интенсивности вынуждающего поля интенсивность индуцированных переходов значительно превышает интенсивность спонтанных переходов и наблюдается тенденция к выравниванию населенности рассматриваемых верхнего и нижнего уровней.

В естественных условиях при равновесии между веществом и окружающей средой (в условиях теплового равновесия) распределение частиц по энергетическим уровням подчиняется *распределению Больцмана* (см. § П. 6)

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}},$$

где  $N_n$  и  $N_m$  — число частиц соответственно на уровнях  $n$  и  $m$  в единице объема;  $g_n$  и  $g_m$  — статистические веса состояний  $n$  и  $m$ ;  $W_n$  и  $W_m$  — энергии, соответствующие уровням  $n$  и  $m$ ;  $k$  — постоянная Больцмана,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $T$  — абсолютная температура.

Из этого распределения следует, что населенности уровней уменьшаются с увеличением энергии уровня; с повышением температуры населенность верхних уровней растет, но все же будет меньше, чем населенность нижних уровней. Поэтому при нормальных условиях

$$\frac{N_n}{g_n} < \frac{N_m}{g_m}$$

и согласно (2.59) и (2.60)

$$P_{0\text{ погл}}^{\text{инд}} > P_{0\text{ изл}}^{\text{инд}},$$

т. е. вещество поглощает энергию электромагнитной волны. Среда, удовлетворяющая распределению Больцмана, является пассивной.

Для того чтобы при распространении в среде волна не затухала, а усиливалась, необходимо, чтобы

$$P_{0 \text{ изл}}^{\text{инд}} > P_{0 \text{ погл}}^{\text{инд}}$$

и, следовательно,

$$\frac{N_n}{g_n} > \frac{N_m}{g_m}.$$

Неравновесные состояния, удовлетворяющие этому условию, называются состояниями с *инверсной населенностью*. Волна, частота которой соответствует частоте индуцированного перехода, при распространении в среде с инверсной населенностью усиливается; такая среда называется *активной*.

Спонтанные переходы частиц не влияют на усиливающееся поле, но создают фон (шумы). Поскольку мощность этих шумов пропорциональна коэффициенту  $A_{nm} = A_{nm}(\omega^3)$ , то она быстро растет с увеличением частоты и затрудняет прием полезного сигнала.

Состояния с инверсной населенностью удовлетворяют распределению Больцмана при «отрицательной температуре»:

$$T = -\frac{W_n - W_m}{k \ln \frac{N_n g_m}{g_n N_m}} < 0.$$

Понятие «отрицательная температура» эквивалентно понятию «инверсная населенность».

Разность

$$\Delta N = N_n - \frac{g_n}{g_m} N_m > 0$$

определяет *плотность инверсной населенности*. Если вырождение уровней отсутствует, то

$$\Delta N = N_n - N_m > 0.$$

Поскольку спонтанное излучение не влияет на усиление электромагнитного поля, распространяющегося в среде с инверсной населенностью, а вносит лишь шумы, то плотность мощности излучения в соответствии с (2.59) и (2.60)

$$P_{0 \text{ изл}} = P_{0 \text{ изл}}^{\text{инд}} - P_{0 \text{ погл}}^{\text{инд}} = B_{nm} g(\omega) w_0(\omega_{nm}) \hbar \omega_{nm} \Delta N. \quad (2.61)$$

В соответствии с (2.22) плотность действительной мощности в диэлектрике определяется выражением

$$P_{0з} = \frac{\omega}{2} \epsilon_a'' E_m^2.$$

В зависимости от знака  $\epsilon_a''$  это или поглощаемая, или излучаемая мощность. Отсюда согласно (2.61) для активного диэлектрика

$$\epsilon'' = -B_{nm} g(\omega) \hbar \Delta N < 0, \quad (2.62)$$

так как частота распространяющегося поля  $\omega = \omega_{nm}$ ,

$$w_0(\omega_{nm}) = w_0(\omega) = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2}$$

— средняя плотность энергии. Для пассивного диэлектрика  $\epsilon''$  тоже определяется выражением (2.62), но  $\epsilon'' > 0$ .

В случае магнитной среды

$$p_{0m} = \frac{\omega}{2} \mu_a'' H_m^2$$

и магнитная проницаемость активного магнетика определяется выражением

$$\mu'' = -B_{nm} g(\omega) \hbar \Delta N < 0, \quad (2.63)$$

для пассивного магнетика справедливо это же выражение, но  $\mu'' > 0$ .

Любое неравновесное распределение, если оно не подвергается возмущению, самопроизвольно изменяется до тех пор, пока не станет равновесным. Процессы, приводящие систему в равновесное состояние, называются *релаксационными*. Если система приходит в равновесное состояние в результате обмена энергией с окружающей средой, то релаксационные процессы называются *«продольными»*. Отклонение значений внутренней энергии от равновесного уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону и определяется уравнением

$$\frac{d(W - W_{\text{равн}})}{dt} = -\frac{1}{T_1} (W - W_{\text{равн}}), \quad (2.64)$$

где  $T_1$  — *«продольное» время релаксации* — величина, обратная затуханию.

Возвращение системы в равновесное состояние за счет обмена энергией с окружающей средой определяется функцией

$$f_1(t) = \frac{1}{T_1} e^{-t/T_1}. \quad (2.65)$$

Система может находиться в неравновесном состоянии, не отличающемся энергией ( $W = W_{\text{равн}}$ ) от равновесного состояния, а отличающемся некоторой упорядоченностью, например между частицами может быть фазовая взаимосвязь. Релаксационные процессы, стремящиеся нарушить упорядоченность системы, называются *«поперечными»*. Они характеризуются экспоненциальным убыванием упорядоченности с течением времени и *«поперечным» временем релаксации*  $T_2$ .

Возвращение системы в равновесное состояние за счет разупорядоченности определяется функцией

$$f_2(t) = \frac{1}{T_2} e^{-t/T_2}. \quad (2.66)$$

Обмен энергией между системой и окружающей средой всегда приводит к разупорядоченности, поэтому  $T_2 < T_1$ . В твердых средах  $T_2 \ll T_1$ , в жидкостях и газах значения  $T_2$  и  $T_1$  близки.

При больших напряженностях поля, поскольку вероятность индуцированного излучения и поглощения увеличивается с ростом поля и значительно превышает вероятность релаксационного процесса (спонтанного излучения), населенности верхнего и нижнего уровней выравниваются. Доля мощности поглощаемого излучения по сравнению с мощностью всего электромагнитного поля уменьшается, стремясь к некоторому пределу, определяемому скоростью, с которой частицы могут отдавать энергию окружающей среде (скорость релаксации). Этот эффект называется *насыщением*. При этом

$$\frac{N_n}{g_n} \approx \frac{N_m}{g_m}$$

и согласно (2.59) и (2.60)

$$P_{0 \text{ изл}}^{\text{инд}} \approx P_{0 \text{ погл}}^{\text{инд}},$$

т. е., доля поглощения мала, среда остается пассивной, но практически «прозрачной» для вынуждающего электромагнитного поля.

## Вопросы

1. Назовите условия и преимущества применения символического метода при исследовании электромагнитных процессов.
2. Когда символический метод непосредственно не применим?
3. Сформулируйте теоремы об активной и реактивной мощностях. Что характерно для движения энергии в первом и во втором случае?
4. Что такое электрический диполь Герца?
5. Почему ближняя зона электрического диполя Герца называется зоной индукции? Каково среднее значение вектора Пойнтинга в этой зоне?
6. Почему дальняя зона диполя Герца называется зоной излучения? Что можно сказать о среднем значении вектора Пойнтинга в этой зоне?
7. Какой вид имеет диаграмма излучения электрического диполя Герца?
8. Дайте определение плоской однородной волны. Как направлены векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ?
9. Дайте определения фазовой и групповой скоростей.
10. Дайте определение волнового сопротивления среды.
11. Что такое дисперсия?
12. Что происходит с монохроматическим сигналом, распространяющимся в среде с потерями?
13. Какая среда называется активной, а какая — пассивной?
14. Когда поток электронов, взаимодействуя с электромагнитным полем, ведет себя как активная среда?

15. Какие среды характеризуются распределением Больцмана? Дайте характеристику этому распределению.
16. Какое излучение называется спонтанным, а какое — индуцированным?
17. Что такое инверсная населенность?

### Задачи

1. Докажите невозможность существования электромагнитного поля, имеющего только продольные составляющие.
2. Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна распространяется в линейной среде без потерь с параметрами  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ . Амплитуда напряженности электрического поля  $E_m = 50$  мВ/м, частота  $\omega = 10^8$  с<sup>-1</sup>. Запишите выражения для мгновенных значений магнитной и электрической составляющих поля. Определите фазовую скорость и длину волны.
3. В линейной диэлектрической среде с параметрами  $\epsilon_a = 10\epsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 10^{-2}$  См/м вдоль оси  $x_3$  распространяется плоская электромагнитная волна линейной поляризации частотой  $f = 15,9$  МГц. Напряженность электрической составляющей поля в точке  $x_3 = 0$  в момент времени  $t = 0$  равна  $E_m = 10^{-2}$  В/м. Запишите выражения для мгновенных значений  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и определите расстояние, на котором амплитуды напряженности электрического и магнитного полей убывают в 1000 раз.
4. Плоская электромагнитная волна распространяется в диэлектрической среде. Измерения показали, что на пути, равном 10 см, колебание с частотой 1 ГГц приобретает дополнительный по сравнению с вакуумом сдвиг по фазе, равный  $40^\circ$ . Определите диэлектрическую проницаемость среды.
5. Определите толщину медного экрана, обеспечивающего ослабление амплитуды электромагнитного поля в  $10^4$  раз на частотах 50 Гц и 50 МГц.
6. Электрический излучатель длиной  $l = 0,2$  м возбуждается током частотой 15 МГц и амплитудой  $I_m = 4$  А. Найдите значения амплитуд составляющих электрического и магнитного полей на расстоянии 5 км от излучателя. Радиус-вектор, проведенный в точку наблюдения, образует с осью излучателя угол  $60^\circ$ .

## 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПАССИВНЫХ СРЕДАХ

### 3.1. Распространение электромагнитного поля в безграничных диэлектрических средах

Как известно, диэлектрик можно представить в виде системы связанных зарядов. Диэлектрик электрически нейтрален, поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

и распространение электромагнитного поля в диэлектрической среде с потерями без сторонних источников согласно (1.18а) описывается уравнением

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_a^{\pi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Нелинейная поляризация  $\mathbf{P}^{\text{нл}}$  в правой части уравнения связана со смещением электронов, ионов и ориентацией молекул под действием распространяющегося поля.

**Электронная поляризация.** Эта поляризация определяется смещением электронов под действием поля относительно ядра, которое считается неподвижным. Предполагается, что постоянный электрический момент отсутствует; магнитная составляющая поля, распространяющегося в диэлектрике, на смещение зарядов не влияет; заряды смещаются под действием напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ . Если диэлектрик изотропный и вектор  $\mathbf{E}$  направлен по оси  $x_1$ , то и смещение электронов происходит по этой оси. Пренебрегая взаимодействием индуцированных дипольных моментов, запишем уравнение движения электронов в скалярной форме:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F \quad (3.2)$$

или

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + mg \frac{dx_1}{dt} + m\omega_0^2 x_1 + mbx_1^2 = eE, \quad (3.3)$$

где  $mg \frac{dx_1}{dt}$  — сила, аналогичная силе трения, определяемая потерями в диэлек-

трике;  $m\omega_0^2 x_1$  — сила, аналогичная силе упругости, определяемая действием ядра на электрон. Эта сила линейна при малых смещениях электрона, т. е. малом значении напряженности поля; при больших напряженностях поля, при больших смещениях она нелинейна и определяется выражением

$$m\omega_0^2 x_1 + mbx_1^2,$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $\omega_0$  — резонансная частота колебания электронов, соответствующая оптическому диапазону волн,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;  $k$  — коэффициент упругости.

Умножив обе части уравнения (3.3) на  $e$ , разделив на  $m$ , а затем просуммировав по всем  $N$  электронам, смещающимся под действием поля в единице объема, получим

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + 2\gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P + \beta P^2 = \frac{e^2 N}{m} E, \quad (3.4)$$

где  $P = eNx_1$  — поляризация;  $2\gamma = g$  — коэффициент, аналогичный коэффициенту трения;  $\beta = b/(eN)$ .

Рассмотрим распространение электромагнитного поля, возбуждаемого током:

$$\mathbf{J}^{\text{ст}} = \mathbf{J}_m^{\text{ст}} \cos(\omega t + \varphi)$$

в нелинейной среде с потерями, не содержащей сторонних источников. В этом случае система уравнений (2.9) имеет вид

$$\Delta \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) + (n\omega)^2 \tilde{\epsilon}_a^n(n\omega) \mu_0 \dot{\mathbf{E}}_m(n\omega) = -(n\omega)^2 \mu_0 \dot{\mathbf{P}}_m^{\text{нл}}(n\omega). \quad (3.5)$$

Здесь  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если поле распространяется в виде линейно-поляризованной плоской однородной волны в направлении оси  $x_3$ , то уравнение (3.5) можно записать в скалярной форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m(n\omega)}{\partial x_3^2} + (n\omega)^2 \tilde{\epsilon}_a^n(n\omega) \mu_0 \dot{E}_m(n\omega) = -(n\omega)^2 \mu_0 \dot{P}_m^{\text{нл}}(n\omega), \quad (3.6)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для решения этих нелинейных уравнений воспользуемся методом последовательных приближений (см. § П.5). В линейном (нулевом) приближении вместо системы (3.6) можно записать уравнение

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m(\omega)}{\partial x_3^2} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a^n(\omega) \mu_0 \dot{E}_m(\omega) = 0,$$

решение которого представляет бегущую волну:

$$\dot{E}(\omega) = E_m e^{j[\omega x - k(\omega)x_3]} = E_m e^{-\alpha x_3} e^{j[\omega x - \beta(\omega)x_3]},$$

где  $\dot{k}(\omega)$  — постоянная распространения волны,  $\dot{k}(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$ .

Уравнение (3.4) в линейном приближении имеет вид

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + 2\gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P = \frac{e^2 N}{m} E$$

или в символической форме

$$-\omega^2 \dot{P} + j\omega 2\gamma \dot{P} + \omega_0^2 \dot{P} = \frac{e^2 N}{m} \dot{E},$$

откуда

$$\dot{P}^\pi(\omega) = \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\gamma\omega)} \dot{E}.$$

В обычной форме

$$P^\pi(\omega) = \frac{\dot{P}^\pi(\omega) + \dot{P}^{\pi*}(\omega)}{2} = \frac{e^2 N E_m e^{-\alpha x_3}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \times \\ \times [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \beta x_3) + 2\gamma\omega \sin(\omega t - \beta x_3)].$$

Учитывая, что

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a},$$

получаем

$$P^\pi(\omega) = \frac{e^2 N}{m} \frac{E_m e^{-\alpha x_3}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.7)$$

Здесь

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}.$$

Электрическая восприимчивость среды в линейном приближении определяется выражением

$$\dot{\chi}_\varepsilon^\pi(\omega) = \frac{\dot{P}^\pi(\omega)}{\varepsilon_0 \dot{E}} = \frac{e^2 N [(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\gamma\omega]}{m\varepsilon_0 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]},$$

а ее диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\varepsilon}^\pi = 1 + \frac{e^2 N [(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\gamma\omega]}{m\varepsilon_0 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}$$

или



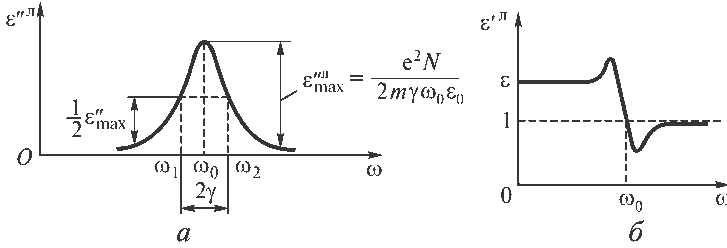


Рис. 3.1. Зависимости  $\epsilon''^{\pi}$  (а) и  $\epsilon'^{\pi}$  (б) от частоты

$$\tilde{\epsilon}^{\pi} = 1 + \chi_3^{\pi} = \epsilon'^{\pi} - j\epsilon''^{\pi},$$

где

$$\epsilon'^{\pi} = 1 + \frac{e^2 N (\omega_0^2 - \omega^2)}{m \epsilon_0 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]};$$

$$\epsilon''^{\pi} = \frac{2e^2 N \omega \gamma}{m \epsilon_0 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} > 0.$$

Отсюда найдем проводимость среды

$$\sigma^{\pi}(\omega) = \omega \epsilon''^{\pi}(\omega) = \frac{2e^2 N \omega^2 \gamma}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} > 0$$

и плотность тока в ней

$$J^{\pi}(\omega) = \frac{2e^2 N \gamma \omega^2 E_m e^{-\alpha x_3}}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \cos[\omega t - \beta(\omega) x_3].$$

Зависимости  $\epsilon''^{\pi}$  и  $\epsilon'^{\pi}$  от частоты поля при условии  $\gamma \ll \omega$  (малые потери) приведены на рис. 3.1. Кривая  $\epsilon''^{\pi}(\omega)$  определяет поглощение. Она имеет максимум при резонансе между полем и диполем ( $\omega = \omega_0$ )

$$\epsilon''_{\max} = \frac{e^2 N}{2m\gamma\omega_0\epsilon_0}.$$

Кривая симметрична относительно  $\omega_0$ . Ширина кривой поглощения определяется из условия

$$\epsilon''^{\pi}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} \epsilon''^{\pi}(\omega_0)$$

и равна

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma.$$

Согласно (2.62), для пассивной двухуровневой квантовой среды

$$\epsilon''_{\max} = B_{nm} \hbar (N_m - N_n) > 0, \quad N_n < N_m.$$

При малых напряженностях распространяющегося поля диэлектрическая проницаемость  $\epsilon''_{\max}$  определяется разностью населенностей уровней  $n$  и  $m$  в условиях термодинамического равновесия. Частицы поглощают энергию распространяющегося поля и переходят с нижнего энергетического уровня на верхний. В результате населенность верхнего уровня увеличивается, а нижнего — уменьшается и поглощение должно уменьшиться. Однако релаксационные процессы восстанавливают термодинамическое равновесие, переводя избыточное (по сравнению с термодинамическим равновесием) количество частиц с верхнего уровня на нижний. При малых амплитудах распространяющегося поля релаксационные процессы проходят быстрее и практически всегда существует термодинамическое равновесие. При этом поглощение, определяемое разностью  $N_m - N_n$  населенностей нижнего и верхнего уровней, постоянно и не зависит от напряженности распространяющегося поля.

Для диэлектрика без потерь

$$\gamma = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = 0,$$

и поляризация в соответствии с формулой (3.7) определяется выражением

$$P^n(\omega) = \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_m \cos[\omega t - k(\omega)x_3],$$

где

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon_a^n(\omega) \mu_0},$$

откуда находим электрическую восприимчивость диэлектрика

$$\chi_3^n(\omega) = \frac{P^n}{\epsilon_0 E} = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

и его диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon_a^n(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi_3^n(\omega)] = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right].$$

Рассмотрим процессы в нелинейной среде в первом приближении. Подставляя выражение для поляризации в нулевом приближении (3.7) в уравнение (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} + 2\gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P &= \frac{e^2 N}{m} E_m e^{-\alpha x_3} \cos[\omega t - \beta(\omega)x_3] - \\ &- \frac{\beta e^4 N^2 E_m^2 e^{-2\alpha x_3}}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \sin^2[\omega t - \beta(\omega)x_3 + \varphi]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$P = P^л + P^нл, \quad (3.9)$$

где  $P^л$  определяется выражением (3.7), а  $P^нл$  представляет собой нелинейную добавку поляризации. Поскольку

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2},$$

можно легко убедиться, что нелинейная добавка поляризации  $P^нл$  содержит вторую гармонику и постоянную составляющую, и ее можно представить в виде

$$P^нл = \frac{\dot{P}(2\omega) + \dot{P}^*(2\omega)}{2} + P(0).$$

Подставив (3.9) в (3.8), получим уравнение для нелинейной добавки поляризации:

$$\begin{aligned} & -4\omega^2[\dot{P}(2\omega) + \dot{P}^*(2\omega)] + j4\gamma\omega[\dot{P}(2\omega) + \dot{P}^*(2\omega)] + \\ & + \omega_0^2[\dot{P}(2\omega) + \dot{P}^*(2\omega)] + 2\omega_0^2 P(0) = \\ & = -\frac{\beta e^4 N^2 (\dot{E} + \dot{E}^*)^2}{2m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

откуда найдем вторую гармонику поляризации

$$\dot{P}(2\omega) = -\frac{\beta e^4 N^2 \dot{E}^2 [(\omega_0^2 - 4\omega^2) - 4j\gamma\omega]}{2m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2] [(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\gamma^2 \omega^2]}$$

или

$$\begin{aligned} P(2\omega) &= \frac{\dot{P}(2\omega) + \dot{P}^*(2\omega)}{2} = \\ &= -\frac{\beta e^4 N^2 E_m^2 e^{-2\alpha x_3}}{2m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2] \sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\gamma^2 \omega^2}} \times \\ & \quad \times \sin[2\omega t - \beta_P(2\omega)x_3 + 2\varphi + \varphi'], \end{aligned}$$

где

$$\varphi' = \arctg \frac{\omega_0^2 - 4\omega^2}{4\gamma\omega}; \quad \beta_P(2\omega) = 2\beta(\omega)$$

— фазовая постоянная волны второй гармоники поляризации.

Из последнего соотношения следует, что постоянная распространения второй гармоники волны поляризации

$$\dot{k}_P(2\omega) = 2\dot{k}(\omega). \quad (3.11)$$

Найдем теперь электрическую восприимчивость диэлектрика:

$$\dot{\chi}_3(2\omega) = -\frac{\beta e^4 N^2 [(\omega_0^2 - 4\omega^2) - 4j\gamma\omega]}{2m^2 \varepsilon_0 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2][(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\gamma^2 \omega^2]},$$

а из уравнения (3.10) определим постоянную составляющую поляризации:

$$P(0) = -\frac{\beta e^4 N^2 E_m^2}{2m^2 \omega_0^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}.$$

В диэлектрике без потерь

$$\gamma = 0; \quad \varphi = \varphi' = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = 0,$$

поэтому

$$P(2\omega) = -\frac{\beta e^4 N^2 \dot{E}_m^2}{2m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 (\omega_0^2 - 4\omega^2)} \cos[2\omega t - \beta_p(2\omega)x_3];$$

$$\chi_3(2\omega) = -\frac{\beta e^4 N^2}{2\varepsilon_0 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 (\omega_0^2 - 4\omega^2)};$$

$$P(0) = -\frac{\beta e^4 N^2 E_m^2}{2m^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Если возбуждающий ток имеет составляющие с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$J^{ct} = J_{m1}^{ct} \cos \omega_1 t + J_{m2}^{ct} \cos \omega_2 t,$$

то поле и поляризация в линейном приближении также будут содержать эти составляющие с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$E = E(\omega_1) + E(\omega_2);$$

$$P = P(\omega_1) + P(\omega_2).$$

В низшем нелинейном приближении кроме составляющих поляризации с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  появятся постоянная составляющая и составляющие с частотами  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$  и  $\omega_1 - \omega_2$ .

Поляризация зависит от частоты и имеет резонансный характер. Резонанс возникает при  $\omega_0 = \omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 \pm \omega_2$ . Зависимость от частоты усиливается при приближении к одному из возможных резонансов. Если  $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$  и  $\omega_1 \gg \omega_0$ ,  $\omega_2 \gg \omega_0$ , то удерживается лишь составляющая разностной частоты. При учете потерь поляризация при резонансе имеет конечное значение.

Поскольку электронная структура атома практически не зависит от температуры, то и электронная поляризация не зависит от температуры.

Согласно уравнению (3.6) волны нелинейной поляризации являются источниками полей:  $P(0)$  — источником постоянного поля  $E(0)$ ;  $P(2\omega)$  — источником поля удвоенной частоты  $E(2\omega)$ .

Если поле возбуждается током

$$J^{\text{ct}} = J_{m1}^{\text{ct}} \cos \omega_1 t + J_{m2}^{\text{ct}} \cos \omega_2 t,$$

то уже в низшем нелинейном приближении получим составляющие поля

$$E(\omega_1), E(\omega_2), E(2\omega_1), E(2\omega_2), E(\omega_1 + \omega_2), E(\omega_1 - \omega_2).$$

Таким образом, при распространении поля в нелинейной среде в результате взаимодействия со средой происходит его качественное изменение. Процесс этот двусторонний — поле влияет на среду, среда, в свою очередь, вызывает качественное изменение поля. При этом наблюдается взаимодействие полей разных частот. Нелинейные эффекты, вызванные электронной поляризацией, проявляются вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ , т. е. в оптическом диапазоне волн.

Нелинейные эффекты в оптическом диапазоне для большинства диэлектриков наблюдаются при напряженности поля, сравнимой с внутренними полями, действующими между заряженными частицами и имеющими значение порядка  $10^8$  В/м. Внешнее поле такой напряженности можно получить при фокусировке излучения лазера.

Поляризация  $P(2\omega)$  возбуждает вторую гармонику поля  $E(2\omega)$ , которая удовлетворяет одному из уравнений системы (3.6):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}(2\omega)}{\partial x_3^2} + 4\omega^2 \tilde{\epsilon}_a''(2\omega) \mu_0 \dot{E}(2\omega) = -4\omega^2 \mu_0 \dot{P}(2\omega). \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\dot{E}(2\omega) = \dot{E}'_m(2\omega) e^{j[2\omega x - \dot{k}(2\omega)x_3]} + \dot{E}''_m(2\omega) e^{j[2\omega x - \dot{k}_p(2\omega)x_3]}. \quad (3.13)$$

Первое слагаемое выражения (3.13) описывает поле бегущей волны с частотой  $2\omega$  и постоянной распространения

$$\dot{k}(2\omega) = 2\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a''(2\omega) \mu_0}.$$

Второе слагаемое выражения (3.13) представляет собой частное решение неоднородного уравнения (3.12). Оно описывает волну, постоянная распространения которой совпадает с постоянной распространения второй гармоники поляризации (3.11):

$$\dot{k}_p(2\omega) = 2\dot{k}(\omega) = 2\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a''(\omega) \mu_0}.$$

Для определения амплитуды этой волны  $E''_m$  подставим второе слагаемое решения (3.13) в уравнение (3.12). После несложных преобразований окончательно получим

$$\dot{E}(2\omega) = \dot{E}'_m(2\omega) e^{j[2\omega x - \dot{k}(2\omega)x_3]} + \frac{4\omega^2 \mu_0 \dot{P}_m(2\omega)}{k_p^2(2\omega) - \dot{k}^2(2\omega)} e^{j[2\omega x - \dot{k}_p(2\omega)x_3]}.$$

Из этого выражения следует, что поле второй гармоники состоит из двух волн, первая из которых распространяется с постоянной распространения

$$\dot{k}(2\omega) = \beta(2\omega) - j\alpha(2\omega) = 2\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a^n(2\omega)}\mu_0,$$

а вторая — с постоянной распространения

$$\dot{k}_p(2\omega) = \beta_p(2\omega) - j\alpha_p(2\omega) = 2\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a^n(\omega)}\mu_0 = 2\dot{k}(\omega).$$

Амплитуда второй волны определяется амплитудой волны поляризации  $P_m(2\omega)$  и существенным образом зависит от соотношения величин  $\dot{k}(2\omega)$  и  $\dot{k}_p(2\omega)$ .

Нелинейные эффекты, связанные с электронной поляризацией, малы. Однако по мере распространения волны и взаимодействия ее со средой эти эффекты накапливаются, и их можно наблюдать в средах с малыми потерями. В средах с большими потерями эти эффекты могут затухнуть раньше, чем успеют развиться.

Пренебрегая потерями, получим

$$E(2\omega) = E'_m(2\omega) \cos[2\omega t - k(2\omega)x_3] + \frac{4\omega^2\mu_0 P_m(2\omega)}{k_p^2(2\omega) - k^2(2\omega)} \cos[2\omega t - k_p(2\omega)x_3],$$

где

$$k(2\omega) = 2\omega\sqrt{\epsilon_a^n(2\omega)}\mu_0 = \beta(2\omega);$$

$$k_p(2\omega) = 2\omega\sqrt{\epsilon_a^n(\omega)}\mu_0 = \beta_p(2\omega).$$

В случае  $k_p(2\omega) = k(2\omega)$  амплитуда второй волны обращается в бесконечность. При учете потерь амплитуда имеет конечное значение.

Возрастание энергии поля  $E(2\omega)$  определяется передачей энергии от поля основной частоты  $E(\omega)$  через переизлучающую поляризацию  $P(2\omega)$ . Распространяющееся поле  $E(\omega)$  возбуждает диполи вещества, которые создают поле, содержащее кроме составляющей основной частоты, ее гармоники и постоянную составляющую. Энергообмен между полем и средой определяется выражением

$$P_{0\text{пол}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dt.$$

Обмен энергией между полем основной частоты  $E(\omega)$  и волной поляризации  $P(\omega)$  (линейный случай) согласно (1.156) определяется выражением

$$P_{0\text{пол}}(\omega) = \frac{\omega}{2} \text{Im} \dot{\mathbf{E}}(\omega) \dot{\mathbf{P}}^*(\omega).$$

В среде с потерями

$$\dot{\chi}_s(\omega) = \chi'_s(\omega) - j\chi''_s(\omega)$$

и

$$p_{0 \text{ пол}}(\omega) = \frac{\omega \epsilon_0 \chi_3''(\omega)}{2} E_m^2$$

определяет плотность мощности, поглощаемой в диэлектрике.

При возбуждении волны поляризации удвоенной частоты  $P(2\omega)$  полем основной частоты  $E(\omega)$  энергообмен в среднем равен нулю (см. § 1.8). В этом случае мнимая часть нелинейной восприимчивости

$$\chi_3(2\omega) = \chi_3'(2\omega) - j\chi_3''(2\omega)$$

не связана с поглощением энергии средой, а определяет лишь сдвиг фазы волны поляризации  $P(2\omega)$  относительно поля основной частоты  $E(\omega)$ .

Энергообмен между полем  $E(2\omega)$  и поляризацией  $P(2\omega)$  согласно (1.156) определяется выражением

$$p_{0 \text{ пол}}(2\omega) = \omega \text{Im} \dot{E}(2\omega) \dot{P}^*(2\omega) = -\omega E_m(2\omega) P_m(2\omega) \sin \varphi_{EP}(2\omega), \quad (3.14)$$

где

$$\varphi_{EP}(2\omega) = \beta(2\omega)x_3 - \beta_P(2\omega)x_3 + \varphi = \varphi_{EP}(x_3).$$

Знак выражения (3.14) периодически меняется с изменением расстояния. На участках, где  $p_{0 \text{ пол}}(2\omega) < 0$ , энергия от волны поляризации  $P(2\omega)$  (среды) передается волне поля  $E(2\omega)$ ; там, где  $p_{0 \text{ пол}}(2\omega) > 0$ , энергия волны поля  $E(2\omega)$  передается волне поляризации  $P(2\omega)$  (среде), т. е. энергия поля волны  $E(2\omega)$  осциллирует в пространстве (рис. 3.2). Расстояние, на котором движение энергии происходит в одном направлении (от поля к среде или обратно), называется *длиной когерентности* и определяется изменением фазы  $\varphi_{EP}(2\omega)$  на  $\pi$ , т. е.

$$[\beta(2\omega) - \beta_P(2\omega)]l_{\text{ког}} = \pi.$$

Поскольку  $\beta_P(2\omega) = 2\beta(\omega)$ , то

$$l_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\beta(2\omega) - 2\beta(\omega)}. \quad (3.15)$$

Если в выражении (3.14)

$$\beta(2\omega) = \beta_P(2\omega), \quad (3.16)$$

то

$$\varphi_{EP} \neq \varphi(x_3)$$

и знак выражения (3.14) не изменяется, т. е. в среднем переход энергии осуществляется в одном направлении и при  $0 < \varphi_{EP} < \pi$  энергия от волны поляризации  $P(2\omega)$  переходит к волне поля  $E(2\omega)$ . По мере распространения энергия волны поля  $E(2\omega)$  возрастает. Волна поляризации  $P(2\omega)$  соз-

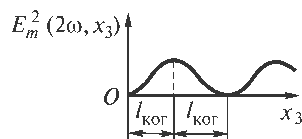
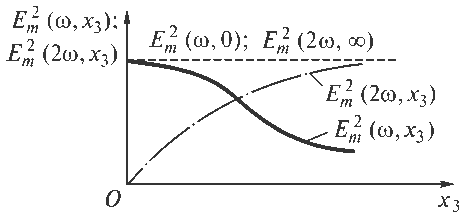


Рис. 3.2. Зависимость мощности второй гармоники от пути, пройденного волной в диэлектрике без потерь



**Рис. 3.3.** Зависимость мощностей основной волны и второй гармоники от пути, пройденного волнами в диэлектрике без потерь, при выполнении условия волнового синхронизма

дается полем основной волны  $E(\omega)$  и таким образом происходит перекачка энергии от волны поля  $E(\omega)$  к волне поля  $E(2\omega)$  через переизлучающую поляризацию  $P(2\omega)$  (рис. 3.3). Фактически это объясняется тем, что по мере распространения в создании поля  $E(2\omega)$  участвуют все новые диполи, которые добавляют свое излучение к энергии распространяющейся волны  $E(2\omega)$ .

Учитывая, что

$$\beta_p(2\omega) = 2\beta(\omega),$$

перепишем выражение (3.16) в виде равенства

$$v(\omega) = v(2\omega), \quad (3.17)$$

называемого *условием волнового синхронизма* для второй гармоники, где  $v(\omega)$  и  $v(2\omega)$  — соответственно фазовые скорости волн  $E(\omega)$  и  $E(2\omega)$ . При этом условии энергия поля основной волны  $E(\omega)$  благодаря переизлучению, осуществляемому средой, по мере распространения переходит в энергию волны  $E(2\omega)$  и согласно выражению (3.15)

$$l_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\beta(2\omega) - 2\beta(\omega)} = \infty.$$

Однако в изотропных средах вследствие дисперсии условие волнового синхронизма (3.17) не выполняется. Это условие может быть выполнено в анизотропных средах с двойным лучепреломлением. В таких средах фазовая скорость зависит не только от частоты, но и от поляризации поля. При распространении электромагнитного поля в такой среде возникает обыкновенная волна, поляризация которой перпендикулярна приложенному полю в средах с управляемой анизотропией или оптической оси для одноосных кристаллов. Электрическая составляющая необыкновенной волны совпадает по направлению с постоянным полем или оптической осью кристалла. Если поле основной частоты  $E(\omega)$  возбуждается таким образом, что поляризация его совпадает с поляризацией обыкновенной волны, то происходит передача энергии от основной волны к волне второй гармоники, которая является необыкновенной. Изменяя приложенное постоянное поле или направление распространения волны  $E(\omega)$  в одноосном кристалле, добиваются выполнения условия волнового синхронизма, при котором передача энергии от волны  $E(\omega)$  к волне  $E(2\omega)$  происходит наиболее интенсивно. При этом длина когерентности равна бесконечности и мощность второй гармоники  $E(2\omega)$  возрастает по мере ее распространения.



В обычных диэлектриках нелинейность мала и даже в сильных полях, создаваемых фокусировкой луча лазера,

$$\left| \frac{P^{\text{нл}}}{P^{\text{л}}} \right| \approx 10^{-3},$$

поэтому нелинейные эффекты проявляются только при достаточно большой длине участка взаимодействия.

Кристаллы, применяемые для преобразования частоты, должны быть прозрачны для основной частоты и выделяемой гармоники, обладать высокой степенью однородности, достаточно большой нелинейностью и способностью к двойному лучепреломлению. При прохождении излучения лазера через такие кристаллы практически возможно получить вторую гармонику с эффективностью преобразования до 80 %.

Аналогичным образом можно получить другие гармоники. При наличии в возбуждающем поле двух составляющих с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  появляются комбинационные составляющие с частотами  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ .

При достаточно больших напряженностях распространяющегося поля поглощение зависит от напряженности поля и уменьшается с увеличением напряженности. Поглощение определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости. Согласно (2.62) в двухуровневых квантовых средах

$$\epsilon''_{a \max} = -\epsilon_0 B_{nm} \hbar (N_n - N_m).$$

В случае достаточно больших напряженностях поля населенность верхнего уровня возрастает, термодинамическое равновесие нарушается и релаксационные процессы не успевают его восстанавливать. Разность населенностей  $|N_n - N_m|$  уменьшается, что приводит к уменьшению доли поглощения. Это типично нелинейный эффект насыщения.

**Ионная поляризация.** Эта поляризация связана со смещением противоположно заряженных ионов под действием электрического поля. Механизм ионной поляризации аналогичен механизму электронной поляризации и определяется аналогичными выражениями, в которых вместо массы электрона фигурирует приведенная масса молекулы

$$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — массы ионов. Вследствие большой массы ионов резонансная частота ионной поляризации значительно меньше резонансной частоты электронной поляризации и приходится на инфракрасный диапазон. В этом диапазоне наблюдается резко выраженная зависимость ионной электрической восприимчивости и поляризации от частоты (дисперсия); от температуры эти величины не зависят.

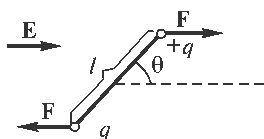


Рис. 3.4. Диполь в однородном электрическом поле

В диапазоне световых волн механизм ионной поляризации перестает действовать, так как относительно тяжелые ионы кристаллической решетки не успевают колебаться с частотой действующего поля.

**Ориентационная поляризация.** Эта поляризация связана с поворотом молекул, обладающих постоянным дипольным моментом, под действием электрического поля. Молекулу, обладающую дипольным моментом, можно представить в виде диполя, образованного зарядами  $+q$  и  $-q$ , находящимися друг от друга на расстоянии  $l$ . В однородном электрическом поле на диполь действует пара сил (рис. 3.4), стремящихся установить диполь по полю.

Потенциальная энергия диполя в электрическом поле

$$U = -p_0 E \cos \theta,$$

где  $p_0 = ql$  — постоянный дипольный момент молекулы;  $\theta$  — угол между направлением дипольного момента (электрический момент диполя направлен от  $-q$  к  $+q$ ) и направлением вектора электрической напряженности  $E$ .

Система всегда стремится к положению, соответствующему минимуму потенциальной энергии, т. е. стремится установиться по полю ( $\theta = 0$ ). Однако в результате теплового движения не все диполи точно ориентируются по полю. Поляризацию вещества, связанную с ориентацией молекул, можно представить в виде

$$P_{0 \text{ ориент}} = N p_0 \overline{\cos \theta}.$$

Здесь  $N$  — число диполей в единице объема;  $\overline{\cos \theta}$  — среднее значение косинуса угла между полем и диполем, определяемое функцией Ланжевена:

$$\overline{\cos \theta} = L(x) = \text{cth } x - \frac{1}{x},$$

где  $x = p_0 E / (kT)$ ;  $k$  — постоянная Больцмана. Из графика, приведенного на рис. 3.5, следует, что нелинейность проявляется при значениях  $x$ , соответствующих напряженности поля порядка  $10^7$  В/м и выше.

Ориентационная поляризация зависит от температуры и возрастает с ее понижением.

**Сегнетоэлектрики.** Они характеризуются наличием самопроизвольной поляризации: соседние диполи стремятся ориентироваться параллельно друг другу в результате взаимодействия между ними. Таким образом возникают целые макроскопические области (домены) с самопроизвольной поляризацией в определенном направлении. Поляризация сегнетоэлектриков нелинейно зависит от приложенного поля  $E$ . Под действием приложенного поля в сегнетоэлектрике наблюдаются

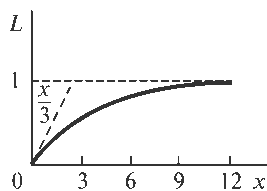


Рис. 3.5. Функция Ланжевена

следующие явления: изменение поляризации каждого домена по величине, изменение направления поляризации доменов, изменение размера доменов (если поляризация доменов ориентирована параллельно или почти параллельно полю  $E$ , то они могут расти за счет смещения границ между доменами). Нелинейность сегнетоэлектриков проявляется в слабых полях.

Зависимость  $P$  от  $E$  у сегнетоэлектриков имеет гистерезисный характер, обусловленный отставанием изменения поляризации от изменения электрического поля. Типичный вид петли гистерезиса показан на рис. 3.6. При увеличении напряженности поля поляризация вначале растет по кривой  $OA$  и стремится к насыщению  $P_{\text{нас}}$ . При уменьшении напряженности поля до нуля диэлектрик остается в поляризованном состоянии, характеризуемом остаточной поляризацией  $P_{\text{ост}}$ . Чтобы свести поляризацию к нулю, необходимо приложить поле обратного направления  $E_{\text{коэр}}$ , называемое коэрцитивной силой. Форма петли гистерезиса зависит от частоты поля и свойств сегнетоэлектрика.

Поляризация сегнетоэлектриков уменьшается с повышением температуры, и при температурах, превышающих так называемую сегнетоэлектрическую точку Кюри, самопроизвольная поляризация исчезает.

Сегнетоэлектрики используют в конденсаторах, кулон-вольтная характеристика которых нелинейна. Такие конденсаторы называются варикондами.

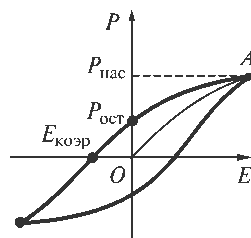


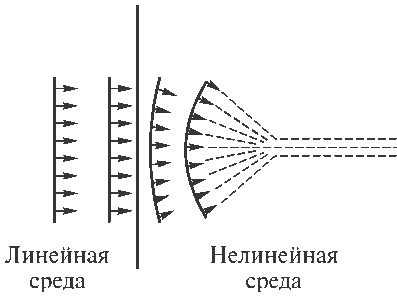
Рис. 3.6. Зависимость поляризации сегнетоэлектрика от напряженности поля

### 3.2. Самофокусировка и самоканализация энергии электромагнитного поля

Под действием электромагнитного поля большой интенсивности диэлектрическая проницаемость среды изменяется. Для диэлектрика нелинейность диэлектрической проницаемости определяется не только электронной и ориентационной поляризуемостью, но и давлением электромагнитной волны, изменяющей плотность вещества (особенно в газах), а следовательно, и диэлектрическую проницаемость. Повышение температуры под давлением электромагнитного поля также приводит к изменению плотности вещества, а следовательно, и диэлектрической проницаемости.

Электромагнитную энергию можно передать на расстояние направленным излучением в виде потока энергии, ограниченного в поперечном направлении. В этом же направлении изменяется и напряженность поля в потоке.

Влияние нелинейности на распределение потока энергии можно исследовать с помощью нелинейных волновых уравнений. Однако ввиду сложности решения этой задачи ограничимся качественным рассмотрением. Под действием электромагнитного поля большой интенсивности диэлектрическая проницаемость среды изменяется приблизительно по закону



$$\epsilon_a = \epsilon_0(\epsilon^n + \epsilon_2 E^2), \quad (3.18)$$

при реально достижимой напряженности поля

$$\epsilon_2 E^2 \ll 1$$

и показатель преломления определяется выражением

$$n = \sqrt{\epsilon} = n^n + n_2 E^2. \quad (3.19)$$

**Рис. 3.7.** Самофокусировка и самоканализация энергии

Поскольку напряженность поля в потоке убывает от оси к краям, то коэффициент преломления при  $n_2 > 0$  также убывает в радиальном направлении. При этом фаза поля на периферии потока согласно выражению

$$e^{-j\omega\sqrt{\epsilon_{a,10}} \cdot z} = e^{-j\frac{\omega n}{c} z}$$

будет опережать фазу поля на оси. В связи с этим происходит искривление фазового фронта, что эквивалентно действию собирающей линзы (рис. 3.7). Энергия концентрируется на оси потока (фокусируется), что приводит к увеличению напряженности поля и коэффициента преломления на оси потока и к дальнейшему увеличению фокусировки (*самофокусировка*). В отличие от фокусирующей линзы, когда поток после фокуса снова расходится, в нелинейной среде происходит захват потока в канал (*самоканализация*). Дальнейшее фокусирование ограничивается другими нелинейными процессами, противодействующими фокусировке. Диаметр канала составляет несколько длин волн. Напряженность поля внутри канала может оказаться настолько большой (примерно  $10^8$  В/см), что происходит разрушение материала.

В нелинейной среде при большой плотности мощности в потоке (порядка мегаватт на квадратный сантиметр в оптическом диапазоне волн) создаются условия, при которых поток не расходится, и приближенно для монохроматического поля его можно рассматривать как распространяющийся внутри канала, заполненного диэлектрической средой с проницаемостью

$$\epsilon_{эф} = \epsilon^n + \frac{1}{2} \epsilon_2 E_m^2, \quad (3.20)$$

представляющей собой диэлектрическую проницаемость (3.18), усредненную во времени. Канал окружен линейной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon^n$  (рис. 3.8). При этом любой луч, падающий на границу раздела сред под углом, большим критического угла, определяемого выражением

$$\sin \varphi_{кр} = \frac{n^n}{n^n + \frac{1}{2} n_2 E_m^2} = 1 - \frac{\epsilon_2}{4\epsilon^n} E_m^2, \quad (3.21)$$

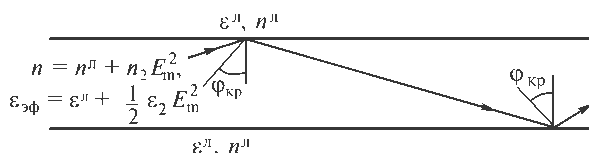


Рис. 3.8. К самоканализации энергии

удовлетворяет условию полного внутреннего отражения и не выходит за пределы канала.

При слабой нелинейности

$$\sin \varphi_{\text{кр}} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \right) \approx 1 - \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \right)^2}{2},$$

откуда в соответствии с уравнением (3.21)

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{2\epsilon^{\text{II}}}} \cdot E_m. \quad (3.22)$$

Если излучатель имеет апертуру в виде круга диаметром  $2R$ , то при распространении в линейной среде дифракционная расходимость определяется выражением

$$\varphi_{\text{диф}} = \frac{1,22\lambda}{2R}, \quad (3.23)$$

где  $\lambda$  — длина волны в данной среде.

Очевидно, что в нелинейной среде при выполнении условия

$$\varphi_{\text{диф}} \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \quad (3.24)$$

поток имеет форму цилиндра и расходимость не наблюдается. Условие (3.24) называется условием самоканализации. Это условие согласно (3.22) и (3.23) можно представить в виде

$$\frac{1,22\lambda}{2R} \leq \sqrt{\frac{\epsilon_2}{2\epsilon^{\text{II}}}} \cdot E_m. \quad (3.25)$$

Средняя мощность, передаваемая при канализации,

$$P_0 \approx \frac{\pi R^2 E_m^2}{2Z_0}, \quad (3.26)$$

где  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_a \text{эф}}$  — волновое сопротивление среды в канале.

Наименьшая, или критическая, мощность, при которой возникает явление самоканализации, определяется согласно (3.26) и (3.25) выражением

$$P_{0\text{кр}} \approx \frac{(1,22\lambda)^2 \pi \epsilon^\pi}{4Z_0 \epsilon_2}. \quad (3.27)$$

Если  $P_0 < P_{0\text{кр}}$ , то поток расходящийся; при  $P_0 \approx P_{0\text{кр}}$  наблюдается самоканализация потока; при  $P_0 > P_{0\text{кр}}$  плотность мощности и напряженность в канале сильно возрастают, что может привести к распаду канала на отдельные области (нити) самоканализации.

Если среда такова, что в выражении (3.19)  $n_2 < 0$ , то при распространении потока энергии цилиндрической формы, в котором напряженность падает от оси к краям, коэффициент преломления возрастает в радиальном направлении. По мере распространения потока в такой нелинейной среде поверхности равных фаз будут все больше и больше выгибаться, что эквивалентно рассеивающей линзе (дефокусировка).

Аналогичные явления наблюдаются при распространении узких направленных пучков электромагнитных волн в плазме ионосферы. Пучок может фокусироваться или образовывать волноводный канал в верхних слоях ионосферы (свыше 250 км), где концентрация электронов уменьшается с ростом мощности волны. В нижних слоях (до 250 км) концентрация электронов возрастает под воздействием поля и пучки дефокусируются.

### 3.3. Распространение электромагнитного поля в безграничной изотропной плазме

Плазма представляет собой ионизированный газ, содержащий заряженные частицы, нейтральные атомы и молекулы. Обычно плазма электрически нейтральна, т. е. на единицу ее объема приходится одинаковое число положительных и отрицательных зарядов, но в объемах, линейные размеры которых сравнимы с величиной  $r_D$ , называемой радиусом Дебая, возможны флуктуации заряда. Радиус Дебая определяется расстоянием, на котором происходит экранирование любого заряда плазмы вследствие группировки вокруг этого заряда противоположно заряженных частиц. Нелинейность проявляется в плазме при сравнительно небольших полях.

Поскольку плазма нейтральна, то

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

и волновое уравнение согласно (1.18) можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{CT}}}{\partial t} \quad (3.28)$$

или в соответствии с уравнением (1.18a) —

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_a^\pi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{МП}}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{CT}}}{\partial t}, \quad (3.28a)$$

где  $\mathbf{J}^{\text{нл}}$  — нелинейная плотность тока, определяющая нелинейные эффекты.

Пренебрегая движением тяжелых ионов, считаем, что ток в плазме определяется только движением электронов.

Уравнение движения электронов в плазме под действием распространяющегося поля имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\nu\mathbf{v} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость движения;  $\nu$  — частота эффективных соударений электронов; слагаемое  $m\nu\mathbf{v}$  определяет потери, поскольку при соударении с ионами или молекулой электрон передает импульс  $m\mathbf{v}$ ;  $e$  — заряд электрона;  $m$  — масса электрона.

На достаточно высоких частотах ( $\omega \gg \nu$ ) слагаемым  $m\nu\mathbf{v}$  можно пренебречь, тогда получим

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (3.29)$$

Плотность тока

$$\mathbf{J} = en\mathbf{v},$$

где  $n$  — концентрация плазмы, т. е. число электронов в единице объема.

Нелинейный эффект в плазме связан с лоренцовой силой  $e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , так как скорость электронов  $\mathbf{v}$  зависит от напряженности поля. Отбрасывая этот член, получаем линейное приближение уравнения (3.29):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}.$$

Если источник имеет монохроматический характер, то в линейном приближении и поле будет монохроматическим. Поскольку скорость электронов изменяется по тому же закону, что и поле, в символической форме получим

$$j\omega m\dot{\mathbf{v}} = e\dot{\mathbf{E}},$$

откуда

$$\dot{\mathbf{v}} = -j \frac{e}{\omega m} \dot{\mathbf{E}} \quad (3.30)$$

и

$$\mathbf{J} = -j \frac{e^2 n}{\omega m} \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.31)$$

Подставив выражение (3.31) в волновое уравнение (3.28), переписанное в символической форме, с одной стороны получим

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}} = \frac{e^2 n}{m} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \mu_0 \mathbf{J}^{\text{ст}}$$

или

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \dot{\mathbf{E}} = j \omega \mu_0 \mathbf{j}^{\text{ct}},$$

где  $\omega_p = e \sqrt{\frac{n}{m \epsilon_0}}$  — собственная, или резонансная, частота плазмы. С этой частотой электроны колеблются около своего равновесного положения.

С другой стороны, в соответствии с первым уравнением системы (2.11)

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_a^n \dot{\mathbf{E}} = j \omega \mu_0 \mathbf{j}^{\text{ct}}. \quad (3.32)$$

Таким образом, в линейном приближении плазму можно рассматривать как среду с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_a^n = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

зависящей от частоты.

Постоянная распространения волны

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a^n \mu_0} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}},$$

фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Если  $\omega < \omega_p$ , то  $\epsilon_a^n < 0$  и постоянная распространения волны становится мнимой, т. е.

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\epsilon_a^n \mu_0} = \pm j k_0 \sqrt{|\epsilon^n|} = \pm j |\dot{k}|.$$

Физический смысл имеет только знак «-». При этом даже при отсутствии потерь амплитуда волны будет убывать по экспоненте:

$$\dot{E}_m = E_m e^{-j \dot{k} x_3} = E_m e^{-|\dot{k}| x_3}.$$

Глубина проникновения

$$\Delta = \frac{1}{|\dot{k}|} = \frac{1}{\omega \sqrt{\epsilon_a^n \mu_0}} = \frac{c}{\omega_p \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}}.$$

При  $\omega \ll \omega_p$



$$\Delta = \frac{c}{\omega_p}.$$

Таким образом, при  $\omega < \omega_p$  плазма ведет себя как проводник.

Если  $\omega > \omega_p$ , то  $\epsilon_a^n > 0$ , постоянная распространения является действительной величиной и плазма ведет себя как диэлектрик. При этом  $0 < \epsilon^n < 1$  и фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon^n}} > c,$$

т. е. больше скорости света.

Однако групповая скорость, характеризующая распространение энергии или сигнала,

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c\sqrt{\epsilon^n},$$

т. е. меньше скорости света. Так как собственная частота  $\omega_p$  зависит от концентрации электронов, то на одной и той же частоте плазма в зависимости от концентрации ведет себя или как диэлектрик, или как проводник.

Ионосфера, окружающая Землю, представляет собой ионизированную часть атмосферы, имеет сложную структуру и начинается с высоты 60 км. С увеличением высоты концентрация электронов растет и ионосферу рассматривают как сложную структуру, каждый слой которой характеризуется определенной концентрацией электронов.

В зависимости от частоты радиоволны эти слои ведут себя или как диэлектрические слои, или как проводящие слои и по-разному влияют на распространение волны. Одни слои волна проходит (как диэлектрик), от других она отражается (как от проводника).

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в плазме. При частоте распространяющегося поля

$$\omega \gg \omega_p$$

значение диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_a^n$  почти совпадает со значением  $\epsilon_0$ .

Пусть монохроматический источник возбуждает плоскую однородную волну, распространяющуюся в направлении оси  $x_3$ , в плазме без потерь и сторонних источников. Волновое уравнение, определяющее распространяющееся в плазме поле, согласно (3.28а) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}(n\omega)}{\partial x_3^2} + (n\omega)^2 \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(n\omega) = jn\omega \mu_0 \dot{\mathbf{J}}^{пл}(n\omega). \quad (3.33)$$

В линейном приближении распространение волны характеризуется уравнением

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}(\omega)}{\partial x_3^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}}(\omega) = 0,$$

решение которого

$$\dot{\mathbf{E}}(\omega) = \mathbf{E}_m(\omega) e^{j[\omega t - k(\omega)x_3]},$$

где  $k(\omega) = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = k_0$  — постоянная распространения в плазме, равная постоянной распространения в вакууме.

В обычной форме

$$\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_m(\omega) \cos[\omega t - k(\omega)x_3].$$

Пусть вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль оси  $x_1$ , т. е.

$$\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{e}_1 E_m(\omega) \cos[\omega t - k(\omega)x_3], \quad (3.34)$$

тогда вектор  $\mathbf{H}$  будет направлен вдоль оси  $x_2$ , т. е.

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{e}_2 H_m(\omega) \cos[\omega t - k(\omega)x_3]. \quad (3.35)$$

Электрическая и магнитная составляющие поля в плазме связаны соотношением

$$\sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon_0} E. \quad (3.36)$$

Скорость движения электронов согласно (3.30) и (3.34)

$$\mathbf{v}(\omega) = \mathbf{e}_1 \frac{e}{m\omega} E_m \sin[\omega t - k(\omega)x_3]. \quad (3.37)$$

Рассмотрим нелинейные эффекты в плазме. Перепишем уравнение (3.29) с учетом (3.34)—(3.36) в проекциях по осям координат:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_1}{dt} &= eE - \frac{e}{c} v_3 E; \\ m \frac{dv_2}{dt} &= 0; \\ m \frac{dv_3}{dt} &= \frac{e}{c} v_1 E. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставляя (3.37) и (3.34) в третье уравнение системы (3.38), получаем нелинейное уравнение

$$m \frac{dv_3}{dt} = \frac{e^2}{cm\omega} E_m^2(\omega) \sin[\omega t - k(\omega)x_3] \cos[\omega t - k(\omega)x_3]$$

или

$$m \frac{dv_3}{dt} = \frac{e^2}{2cm\omega} E_m^2(\omega) \sin[2\omega t - 2k(\omega)x_3],$$

интегрируя которое, получаем в низшем нелинейном приближении

$$v_3(2\omega) = -\frac{e^2}{4cm^2\omega^2} E_m^2(\omega) \cos[2\omega t - 2k(\omega)x_3], \quad (3.39)$$

т. е. возникает продольное колебание электронов с удвоенной частотой, и продольный ток

$$\mathbf{J}^{\text{нп}}(2\omega) = -\mathbf{e}_3 \frac{e^3 n}{4cm^2\omega^2} E_m^2(\omega) \cos[2\omega t - 2k(\omega)x_3]. \quad (3.40)$$

Появление тока вдоль оси  $x_3$  объясняется тем, что в поле плоской монохроматической волны под действием силы Лоренца электроны совершают сложное движение типа восьмерки. Вначале электрон начинает двигаться по направлению электрической составляющей поля, появление скорости в направлении электрического поля приводит в действие силу Лоренца, вследствие чего появляется смещение, перпендикулярное  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  основной волны, т. е. ток в этом направлении.

Поскольку скорость модулирована в направлении оси  $x_3$ , то концентрация электронов  $n$  также будет модулирована в этом направлении.

Таким образом, в нелинейном приближении поперечные волны поля создают продольные волны концентрации (плотности) электронов и тока плазмы. В продольном направлении вследствие модуляции плотности происходит разделение зарядов. При этом возникает поле  $\mathbf{E}$ , стремящееся восстановить нейтральность плазмы. Под действием этого поля электроны приходят в движение, равенство положительных и отрицательных зарядов в какой-то момент времени восстанавливается, но по инерции электроны продолжают движение, в связи с чем появляется поле противоположного направления и движение электронов повторяется в противоположном направлении. Эти колебания электронов в плазме называются плазменными или электростатическими.

Возникающее продольное поле имеет потенциальный характер, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0,$$

и волновое уравнение (3.28а) для плазмы, лишенной сторонних источников, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{J}^{\text{нп}}}{\partial t}. \quad (3.41)$$

Подставляя  $\mathbf{J}^{\text{нп}}$ , определяемое выражением (3.40), в уравнение (3.41) и дважды интегрируя по времени, получаем выражение напряженности продольного поля

$$\mathbf{E}(2\omega) = \mathbf{e}_3 \frac{e^3 n}{8cm^2\omega^3\varepsilon_0} E_m^2(\omega) \sin[2\omega t - 2k(\omega)x_3], \quad (3.42)$$

которое соответствует излучению диполей, ориентированных по оси  $x_3$ .

В результате действия поля  $\mathbf{E}(2\omega)$  и силы Лоренца, определяемой основной поперечной волной, электроны двигаются в поперечном направлении. Действи-

тельно, подставляя выражения (3.39) и (3.34) в первое уравнение системы (3.38), получаем

$$m \frac{dv_1}{dt} = eE(\omega) + \frac{e^3}{4c^2 m^2 \omega^2} E_m^3(\omega) \cos[2\omega t - 2k(\omega)x_3] \cos[\omega t - k(\omega)x_3].$$

Учитывая, что

$$\cos 2\theta \cos \theta = \frac{1}{2} [\cos 3\theta + \cos \theta],$$

находим

$$\frac{dv_1(3\omega)}{dt} = \frac{e^3}{8c^2 m^3 \omega^2} E_m^3(\omega) \cos[3\omega t - 3k(\omega)x_3],$$

откуда

$$v_1(3\omega) = \frac{e^3}{24c^2 m^3 \omega^3} E_m^3(\omega) \sin[3\omega t - 3k(\omega)x_3]. \quad (3.43)$$

Составляющая скорости электронов (3.43) образует поперечный ток

$$\mathbf{J}^{\text{пл}}(3\omega) = \mathbf{e}_1 \frac{e^4 n}{24c^2 m^3 \omega^3} E_m^3(\omega) \sin[3\omega t - 3k(\omega)x_3],$$

который согласно (3.28) является источником излучения поперечного поля  $\mathbf{E}(3\omega)$ . Это поле при выполнении условия волнового синхронизма может достигнуть значительной величины за счет перекачки энергии поля  $\mathbf{E}(\omega)$ .

В результате действия поля  $\mathbf{E}(3\omega)$  и силы Лоренца, определяемой основной поперечной волной, электроны двигаются в продольном направлении. Подставляя (3.34) и (3.43) в третье уравнение системы (3.38), получаем

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{e^4}{24c^3 m^4 \omega^4} E_m^4(\omega) \sin[3\omega t - 3k(\omega)x_3] \cos[\omega t - k(\omega)x_3].$$

Учитывая, что

$$\sin 3\theta \cos \theta = \frac{1}{2} (\sin 4\theta - \sin 2\theta),$$

находим  $v_3 = v_3(4\omega)$  и соответственно

$$\mathbf{J}^{\text{пл}} = \mathbf{e}_3 \mathbf{J}^{\text{пл}}(4\omega); \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_3 E(4\omega).$$

Таким образом, поперечные поля  $\mathbf{E}(\omega)$ ,  $\mathbf{E}(3\omega)$ ,  $\mathbf{E}(5\omega)$  и т. д. и продольные поля  $\mathbf{E}(2\omega)$ ,  $\mathbf{E}(4\omega)$ ,  $\mathbf{E}(6\omega)$  и т. д. не являются независимыми. Они взаимодействуют друг с другом через среду.

### 3.4. Поляризация электромагнитных волн

Поляризация определяется законом изменения направления и значения вектора электрической напряженности электромагнитной волны. Плоскость, проведенная через вектор напряженности электрического поля плоской волны, и вектор, совпадающий с направлением ее распространения, называется *плоскостью поляризации* (рис. 3.9). Угол, образованный плоскостью поляризации и горизонтальной плоскостью, называется *углом поляризации*.

Если вектор  $\mathbf{E}$ , изменяясь по абсолютной величине, не изменяет своего направления (кроме прямо противоположного) в пространстве, то поляризация называется линейной. При этом угол поляризации не изменяется во времени и в пространстве.

При распространении в среде без потерь линейно поляризованная волна определяется выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx_3),$$

или

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - kx_3)}.$$

Любая волна, электрический вектор которой составляет произвольный угол с горизонтальной плоскостью, может быть разложена на составляющие горизонтальной и вертикальной поляризаций:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2,$$

где

$$E_1 = E_m \cos \vartheta \cos(\omega t - kx_3) = E_{m1} \cos(\omega t - kx_3);$$

$$E_2 = E_m \sin \vartheta \cos(\omega t - kx_3) = E_{m2} \cos(\omega t - kx_3),$$

или

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_1 E_{m1} e^{j(\omega t - kx_3)} + \mathbf{e}_2 E_{m2} e^{j(\omega t - kx_3)}.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой горизонтально поляризованную волну с амплитудой  $E_{m1}$ , второе — вертикально поляризованную волну с амплитудой  $E_{m2}$ . Обе волны совпадают по фазе во времени. Вектор  $\mathbf{E}$  в любой момент времени лежит в плоскости, составляющей с горизонтальной плоскостью угол

$$\vartheta = \arctg \frac{E_2}{E_1} = \arctg \frac{E_{m2}}{E_{m1}},$$

называемый углом линейной поляризации, а модуль  $\mathbf{E}$  равен

$$|\mathbf{E}| = E_m = \sqrt{E_{m1}^2 + E_{m2}^2}.$$

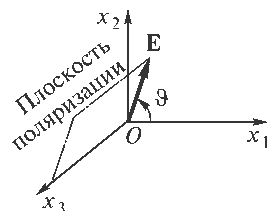


Рис. 3.9. Рассмотрим суперпозицию двух линейно поляризованных волн горизонтальной и вертикальной поляриза-

ций с разными амплитудами и сдвинутыми по фазе во времени на угол  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos(\omega t - kx_3) + \mathbf{e}_2 E_{m2} \cos(\omega t - kx_3 - \varphi). \quad (3.44)$$

При  $\varphi = 0$  получаем линейно поляризованную волну.

Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ , то

$$\mathbf{E} = E_m [\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)]. \quad (3.45)$$

Выражение (3.45) представляет собой уравнение окружности в параметрической форме. Угол

$$\vartheta = \text{arctg} \frac{E_2}{E_1} = \omega t - kx_3$$

изменяется во времени и в пространстве. При фиксированном значении координаты  $x_3$  вектор  $\mathbf{E}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  около оси распространения  $x_3$ .

При  $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$  вращение осуществляется от оси  $x_1$  к оси  $x_2$ , т. е. по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны. Такое вращение называется левым.

При  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  и  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$

$$\mathbf{E} = E_m [\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) - \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)]$$

и вектор  $\mathbf{E}$  вращается против часовой стрелки — правое вращение.

Если вектор  $\mathbf{E}$  вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения с угловой частотой  $\omega$  и абсолютное значение его остается постоянным, то поляризация называется *круговой*. Конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает в этом случае окружность. В зависимости от направления вращения поляризация называется правой или левой (рис. 3.10). С течением времени волна перемещается в направлении оси  $x_3$ , и в результате конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает винтовую линию, расположенную на круглом цилиндре. Шаг винта равен длине волны.

В символической форме уравнение (3.45) для левой круговой поляризации можно записать в виде

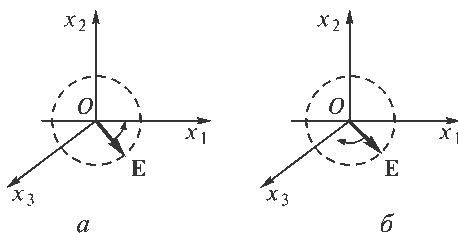


Рис. 3.10. Левая (а) и правая (б) круговые поляризации

$$\dot{E}_{m1} = +j\dot{E}_{m2},$$

где  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  указывает на сдвиг по фазе во времени, для правой круговой поляризации

$$\dot{E}_{m1} = -j\dot{E}_{m2}.$$

Если в уравнении (3.44)  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  и  $E_{m1} \neq E_{m2}$ , то

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos(\omega t - kx_3) \pm \mathbf{e}_2 E_{m2} \sin(\omega t - kx_3). \quad (3.46)$$

Выражение (3.46) представляет собой уравнение эллипса в параметрической форме. Вектор  $\mathbf{E}$  вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, изменяя свое абсолютное значение так, что конец его описывает эллипс. Такая поляризация поля называется *эллиптической*. В зависимости от направления вращения поляризация может быть правой или левой (рис. 3.11). В пространстве вектор  $\mathbf{E}$  описывает винтовую линию, расположенную на эллиптическом цилиндре. Конец вектора  $\mathbf{H}$  также описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной распространению, но повернутый на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

В общем случае выражение (3.44) при любом значении  $\varphi$  представляет собой волну эллиптической поляризации. Причем эллипс может быть ориентирован в плоскости  $x_1 O x_2$  любым образом.

Всякая линейно поляризованная волна может быть разложена на две круговые с противоположным направлением вращения и одинаковыми амплитудами, равными половине амплитуды линейно поляризованной волны. Так, горизонтально поляризованная волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - kx_3)$$

может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - kx_3) &= \frac{E_m}{2} [\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)] + \\ &+ \frac{E_m}{2} [\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) - \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)]. \end{aligned}$$

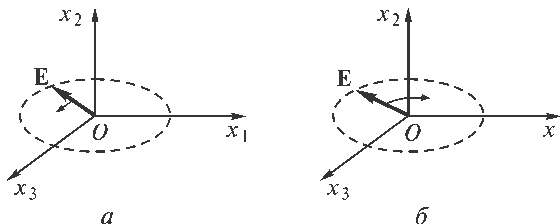


Рис. 3.11. Левая (а) и правая (б) эллиптические поляризации

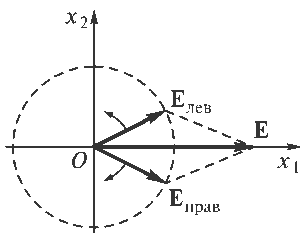


Рис. 3.12. Разложение волны линейной поляризации на две круговые

Первое слагаемое представляет собой левую кругополяризованную волну, второе — правую. Это разложение можно пояснить с помощью рис. 3.12. Очевидно, что линейно поляризованную волну с углом поляризации  $\vartheta$  можно разложить на две круговые волны, вращающиеся в противоположные стороны. Для этого достаточно разложить эту волну на горизонтальную и вертикальную поляризации, а затем каждую из этих поляризаций рассматривать как суперпозицию двух круговых, вращающихся в противоположные стороны.

Эллиптически поляризованную волну можно представить как сумму линейно поляризованной и кругополяризованной волн. Действительно, пусть в выражении (3.46)  $E_{m1} > E_{m2}$  и  $E_{m1} - E_{m2} = E'_m$ , тогда (3.46) можно преобразовать следующим образом:

$$E = e_1 E'_m \cos(\omega t - kx_3) + [e_1 E_{m2} \cos(\omega t - kx_3) \pm e_2 E_{m2} \sin(\omega t - kx_3)].$$

Первое слагаемое полученного уравнения представляет собой линейно поляризованную волну, выражение в квадратных скобках — кругополяризованную волну.

Очевидно, что эллиптически поляризованную волну можно разложить на две круговые волны с разными амплитудами и направлением вращения, так как, в свою очередь, линейно поляризованную волну можно разложить на две круговые.

### 3.5. Распространение электромагнитного поля в безграничной магнитной среде

В магнитной среде при отсутствии сторонних источников распространение электромагнитного поля определяется согласно (2.9) уравнением

$$\Delta \dot{E}_m(n\omega) + (n\omega)^2 \epsilon_0 \mu_a^n(n\omega) E_m(n\omega) = jn\omega \mu_0 \text{rot } \dot{M}_m^{\text{HM}}(n\omega). \quad (3.47)$$

Свойства магнитных сред во многих отношениях формально схожи со свойствами диэлектрических сред (см. § 3.1). Наведенная намагниченность (диамагнетизм) аналогична наведенной поляризации. Существуют атомы и молекулы с постоянными магнитными диполями, так же как атомы и молекулы с постоянными электрическими диполями. Имеются магнитные материалы, обладающие аналогично сегнетоэлектрикам спонтанной намагниченностью.

Особый интерес представляет распространение электромагнитного поля при наличии внешнего постоянного магнитного поля.

**Парамагнитная среда.** Эта среда характеризуется наличием частиц (атомы, молекулы, ионы), обладающих постоянным магнитным моментом. При отсутствии внешнего магнитного поля ориентация этих моментов хаотична и результирующая намагниченность равна нулю. При наличии внешнего магнитного поля



элементарные моменты ориентируются по полю и намагниченность не равна нулю. При этом магнитные моменты частиц ориентируются под действием поля независимо друг от друга.

Намагниченность среды при постоянном магнитном поле уменьшается с увеличением температуры, так как тепловое движение частиц разрушает упорядоченность ориентации моментов. При фиксированной температуре намагниченность растет с увеличением внешнего магнитного поля, стремясь к пределу (насыщению), когда все элементарные моменты выстраиваются в одном направлении.

Магнитные свойства парамагнетиков связаны с наличием нескомпенсированных магнитных моментов электронов незаполненных оболочек. Примером парамагнетиков являются ионы группы железа ( $\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{Mn}^{2+}$ ,  $\text{Co}^{2+}$  и т. д.) с незаполненной внешней электронной оболочкой и ионы редкоземельных элементов с незаполненной внутренней оболочкой.

Магнитный момент частицы  $\mathbf{p}_m$  связан с механическим моментом  $\mathbf{K}_{\text{мех}}$  соотношением

$$\mathbf{p}_m = -\gamma \mathbf{K}_{\text{мех}}, \quad (3.48)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение.

В магнитном поле  $\mathbf{H}$  на частицу с магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$  действует момент сил  $\mu_0 [\mathbf{p}_m \mathbf{H}]$ , стремящийся установить  $\mathbf{p}_m$  по полю. Изменение момента количества движения определяется выражением

$$\frac{d\mathbf{K}_{\text{мех}}}{dt} = \mu_0 [\mathbf{p}_m \mathbf{H}].$$

С учетом (3.48) получаем

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = -\mu_0 \gamma [\mathbf{p}_m \mathbf{H}].$$

Усредняя по единице объема без учета взаимодействия частиц друг с другом и с окружающей средой, получаем уравнение движения вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  без учета потерь

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0 \gamma [\mathbf{M} \mathbf{H}]. \quad (3.49)$$

При наличии лишь внешнего постоянного магнитного поля уравнение (3.49) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0 \gamma [\mathbf{M} \mathbf{H}_0].$$

Согласно этому уравнению вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  прецессирует вокруг направления постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  с угловой скоростью  $\omega_0 = \mu_0 \gamma \mathbf{H}_0$  (ларморова частота прецессии) и неизменным углом прецессии (рис. 3.13).

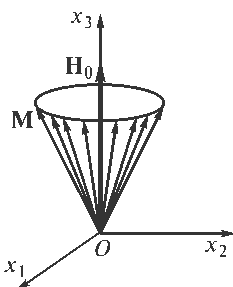


Рис. 3.13. Незатухающая прецессия вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$

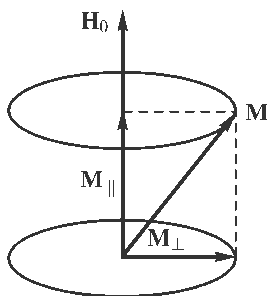


Рис. 3.14. Продольная  $M_{\parallel}$  и поперечная  $M_{\perp}$  составляющие магнитного момента  $M$

го поля  $H_0$  магнитный момент  $M$  изменяется и парамагнетик переходит в новое равновесное состояние. Во время релаксации вектор  $M$  прецессирует вокруг постоянного магнитного поля  $H_0$  (рис. 3.14), его можно представить как сумму

$$M = M_{\parallel} + M_{\perp},$$

где  $M_{\parallel}$  и  $M_{\perp}$  — составляющие магнитного момента  $M$ , параллельная и перпендикулярная постоянному магнитному полю  $H_0$  соответственно.

В процессе релаксации происходит изменение составляющих  $M_{\parallel}$  и  $M_{\perp}$ . Вектор  $M$  в равновесном состоянии направлен по полю, т. е.  $M_{\parallel} \approx M$ , а  $M_{\perp} = 0$ . Изменение этих составляющих происходит с различной скоростью, поэтому различают продольную и поперечную релаксации.

Продольная релаксация приводит к установлению равновесного для данной температуры и значения магнитного поля состояния. При этом большая часть магнитных моментов частиц направлена по полю, меньшая — против поля, что и определяет значение магнитного момента  $M$  в равновесном состоянии. Равновесное распределение частиц по энергетическим уровням подчиняется распределению Больцмана, согласно которому наибольшее число частиц находится на нижнем уровне. Энергия частицы в магнитном поле связана с ориентацией магнитного момента. Минимуму энергии соответствует максимальная проекция магнитного момента на направление поля. Релаксационный процесс, приводящий систему в равновесное состояние, способствует увеличению частиц на нижнем уровне и выстраиванию микроскопических магнитных моментов по полю.

Если равновесное распределение частиц нарушается, например при поглощении энергии электромагнитного поля с частотой  $\omega = \omega_0$ , частицы переходят на верхние уровни, ориентация их магнитных моментов изменяется. Релаксационный процесс возвращает частицы на нижний уровень, восстанавливая равно-

Намагниченность  $M$  определяется суммой магнитных моментов всех частиц в единице объема. Эти моменты взаимодействуют друг с другом и с окружающей средой.

При отсутствии магнитного поля парамагнетик находится в состоянии теплового равновесия, при котором суммарный магнитный момент равен нулю. В магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов частиц: часть из них устанавливается по полю, часть — против поля. Результирующий момент  $M$  в магнитном поле не равен нулю и соответствует новому равновесному состоянию. Процесс перехода от одного равновесного состояния к другому называется релаксацией. Установление нового равновесного состояния происходит не сразу, а по истечении некоторого времени — времени релаксации. При изменении магнитного

весие. При этом частицы отдают часть своей энергии в виде тепловой энергии окружающей среде. Поскольку магнитный момент парамагнетика связан со спинами частиц, а окружающая среда представляет собой атомы кристаллической решетки, то релаксация называется *спин-решеточной*. Пусть постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по оси  $x_3$ , тогда изменение продольной составляющей вектора намагниченности  $M_{\parallel} = M_3$  определяется уравнением, аналогичным (2.64):

$$\frac{d(M_3 - M_0)}{dt} = -\frac{1}{T_1}(M_3 - M_0), \quad (3.50)$$

где  $M_0$  — равновесное значение, которому соответствует  $M_3$  после переориентации в магнитном поле;  $T_1$  — время спин-решеточной, или продольной, релаксации.

Поперечная релаксация связана с прецессией магнитных моментов частиц вокруг направления постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Синхронная прецессия микроскопических моментов приводит к прецессии суммарного момента  $\mathbf{M}$ . Прецессию каждой частицы можно характеризовать вращением поперечной составляющей микроскопического момента в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, прецессию вектора  $\mathbf{M}$  — вращением составляющей  $M_{\perp}$ . Однако синхронность вращения, а следовательно, и фазировка моментов через некоторое время после начала прецессии нарушаются в результате разброса частот прецессии различных частиц. Дело в том, что частота прецессии частиц  $\omega_0$  определяется не только внешним полем  $\mathbf{H}_0$ , но и внутренним полем  $\mathbf{H}_{\text{внутр}}$ , создаваемым соседними частицами:

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma (H_0 + H_{\text{внутр}}).$$

Поле  $H_{\text{внутр}}$  достаточно велико (около  $8 \cdot 10^4$  А/м) и неоднородно. Вследствие его неоднородности наблюдается значительный разброс значений частот прецессии различных частиц  $\Delta\omega_0$ .

Разброс значений частот определяет расфазировку магнитных моментов частиц. Время этой расфазировки (примерно  $1/(\Delta\omega_0)$ ) и есть время поперечной релаксации. Поскольку при поперечной релаксации взаимодействуют спины соседних частиц, то релаксация называется *спин-спиновой*. При этом общая энергия всех парамагнитных частиц сохраняется, происходит лишь обмен энергией друг с другом.

В равновесном состоянии  $M_{\perp} = 0$  и изменение этой составляющей определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= -\frac{M_1}{T_2}; \\ \frac{dM_2}{dt} &= -\frac{M_2}{T_2}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где  $T_2$  — время поперечной, или спин-спиновой, релаксации.

Для твердых парамагнетиков

$$T_1 \ll T_2,$$

для жидкостей и газов

$$T_1 \approx T_2.$$

Движение вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  в магнитном поле как под действием момента (3.49), так и под влиянием релаксационных процессов (3.50) и (3.51) определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}] - \frac{M_1}{T_2}\mathbf{e}_1 - \frac{M_2}{T_2}\mathbf{e}_2 - \frac{M_3 - M_0}{T_1}\mathbf{e}_3. \quad (3.52)$$

Пусть поле  $\mathbf{H}$  представляет собой сумму

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(\omega), \quad (3.53)$$

где  $\mathbf{H}_0$  — постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси  $x_3$ ;  $\mathbf{H}(\omega)$  — высокочастотное монохроматическое поле, перпендикулярное  $\mathbf{H}_0$ , амплитуда этого поля  $H_m(\omega) \ll H_0$ .

Решение уравнения (3.52) определим методом последовательных приближений:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}^{\text{л}}(\omega) + \mathbf{M}_1^{\text{нл}} + \mathbf{M}_2^{\text{нл}} + \dots, \quad (3.54)$$

где  $\mathbf{M}_0 = \chi_{\text{м0}}\mathbf{H}_0$  — намагниченность в постоянном магнитном поле;  $\chi_{\text{м0}}$  — магнитная восприимчивость в постоянном магнитном поле, т. е. статическая восприимчивость;  $\mathbf{M}^{\text{л}}(\omega)$  — линейная часть намагниченности, определяемая переменным полем;  $\mathbf{M}_1^{\text{нл}}$ ,  $\mathbf{M}_2^{\text{нл}}$ , ... — нелинейные добавки соответствующего приближения.

Обычно

$$|\mathbf{M}_0| \gg |\mathbf{M}^{\text{л}}| \gg |\mathbf{M}_1^{\text{нл}}| \gg |\mathbf{M}_2^{\text{нл}}| \dots$$

Поскольку вследствие параллельности  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{M}_0$

$$[\mathbf{M}_0\mathbf{H}_0] = 0,$$

а при насыщении, когда высокочастотное поле мало по сравнению с постоянным,

$$M_3 - M_0 \approx 0,$$

уравнение (3.52) с учетом (3.53) и (3.54) в линейном приближении имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{M}^{\text{л}}(\omega)}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}^{\text{л}}(\omega)\mathbf{H}_0] - \mu_0\gamma[\mathbf{M}_0\mathbf{H}(\omega)] - \frac{M_1^{\text{л}}(\omega)}{T_2}\mathbf{e}_1 - \frac{M_2^{\text{л}}(\omega)}{T_2}\mathbf{e}_2.$$

Перепишем это уравнение в символической форме в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} j\omega \dot{M}_1^n(\omega) &= -\mu_0 \gamma [\dot{M}_2^n(\omega) H_0 - M_0 \dot{H}_2(\omega)] - \frac{\dot{M}_1^n(\omega)}{T_2}; \\ j\omega \dot{M}_2^n(\omega) &= -\mu_0 \gamma [M_0 \dot{H}_1(\omega) - \dot{M}_1^n(\omega) H_0] - \frac{\dot{M}_2^n(\omega)}{T_2}; \\ j\omega \dot{M}_3^n(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно составляющих намагниченности, получаем

$$\begin{aligned} \dot{M}_1^n(\omega) &= \dot{\chi}^M \dot{H}_1(\omega) - j\dot{\chi}_\alpha^M \dot{H}_2(\omega); \\ \dot{M}_2^n(\omega) &= j\dot{\chi}_\alpha^M \dot{H}_1(\omega) + \dot{\chi}^M \dot{H}_2(\omega); \\ M_3^n(\omega) &= 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^M &= \chi_{m0} \frac{\omega_0^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{T_2}\right) + 2j \frac{\omega}{T_2}}; \\ \dot{\chi}_\alpha^M &= -\chi_{m0} \frac{\omega_0 \left(\omega - j \frac{1}{T_2}\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{T_2^2}\right) + 2j \frac{\omega}{T_2}}; \\ \chi_{m0} &= \frac{M_0}{H_0}; \quad \omega_0 = \mu_0 \gamma H_0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Уравнения (3.55) можно представить в тензорной форме:

$$\dot{M}_i^n(\omega) = \chi_{ik}^M(\omega) \dot{H}_k(\omega),$$

где  $\chi_{ik}^M(\omega)$  — тензор магнитной восприимчивости.

Переменная составляющая вектора магнитной индукции

$$B_i(\omega) = \mu_0 \mu_{ik}(\omega) H_k(\omega).$$

Здесь  $\mu_{ik}$  — тензор магнитной проницаемости,

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \chi_{ik}(\omega); \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (3.57)$$

Дисперсия среды определяется действительной частью магнитной проницаемости  $\bar{\mu}_\alpha$ , а поглощение — мнимой. Согласно (3.57) и (3.56), разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a,$$

где

$$\mu'_a = \mu_0 \left[ 1 + \chi_{m0} \frac{\omega_0^2 \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{T_2^2}} \right]; \quad (3.58)$$

$$\mu''_a = \mu_0 \chi_{m0} \frac{\omega_0^2 2 \frac{\omega}{T_2}}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{T_2^2}}. \quad (3.59)$$

Максимальное значение мнимой части магнитной проницаемости (3.59) соответствует резонансной частоте

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2 T_2^2}}.$$

При малых потерях

$$\frac{1}{\omega_0^2 T_2^2} \ll 1 \text{ и } \omega_p \approx \omega_0,$$

при этом

$$\mu'_a = \mu_0 \left[ 1 + \chi_{m0} \frac{\omega_0^2 (\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4 \frac{\omega^2}{T_2^2}} \right]; \quad (3.60)$$

$$\mu''_a = \mu_0 \chi_{m0} \frac{\omega_0^2 2 \frac{\omega}{T_2}}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4 \frac{\omega^2}{T_2^2}}.$$

Кривые зависимостей  $\mu'$  и  $\mu''$  от частоты при условии  $\frac{1}{T_2} \ll \omega$  (малые потери) приведены на рис. 3.15. Кривая  $\mu''(\omega)$  достигает максимума при  $\omega = \omega_p$  и симметрична относительно  $\omega = \omega_p$  (имеет лоренцеву форму). Ширина резонансной кривой поглощения определяется по половинному уровню

$$\mu''(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} \mu''(\omega_p),$$

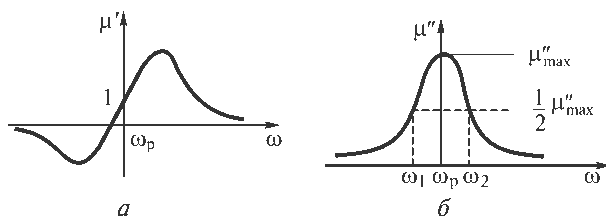


Рис. 3.15. Зависимость  $\mu'$  (а) и  $\mu''$  (б) от частоты для парамагнетика с потерями

и равна

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\frac{1}{T_2}, \quad (3.61)$$

т. е. при малой амплитуде высокочастотного поля ширина линии поглощения определяется временем поперечной релаксации.

Резонансное поглощение высокочастотной энергии при наложении постоянного магнитного поля в средах, содержащих парамагнитные частицы, постоянный магнитный момент которых связан с некомпенсированными магнитными моментами электронов, называется электронным *парамагнитным резонансом*.

В постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  происходит пространственное квантование полного момента атома  $\mathbf{J}$ , и энергетический уровень, соответствующий определенному значению  $J$ , расщепляется на  $2J + 1$  подуровней с разными значениями проекций  $\mathbf{J}$  на направление поля  $\mathbf{H}_0$ , определяемыми значениями  $M_J$  (эф-фekt Зеемана).

Переходы, удовлетворяющие правилу отбора,

$$\Delta J = 0; \quad \Delta M_J = \pm 1$$

соответствуют сверхвысокочастотному диапазону (СВЧ-диапазону).

Расстояние между энергетическими уровнями, удовлетворяющими правилу отбора, определяется выражением

$$\Delta W = g\mu_0\mu_B H_0,$$

где  $g$  — фактор Ланде;  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ ;  $e$  — заряд электрона;  $m$  — масса электрона.

Согласно (2.63) для двухуровневой квантовой среды

$$\mu''_{\max} = B_{nm} \hbar \Delta N = B_{nm} \hbar (N_m - N_n) > 0.$$

При малой амплитуде высокочастотного поля магнитная проницаемость  $\mu''_{\max}$  и, следовательно, поглощаемая мощность зависят от разности населенности уровней в состоянии термодинамического равновесия. Поглощение мощности тем больше, чем больше частиц находится на нижнем уровне и меньше на верхнем.

При поглощении энергии частицы с нижнего уровня переходят на верхний и разность  $N_m - N_n$ , а следовательно, и поглощение должны уменьшаться. Однако при малой амплитуде высокочастотного поля релаксационные процессы успевают восстанавливать термодинамическое равновесие и поглощение, определяемое разностью населенностей нижнего и верхнего уровней, постоянно.

Если амплитуда высокочастотного поля достаточно велика, то релаксационные процессы не успевают восстанавливать термодинамическое равновесие между уровнями. Населенность верхнего уровня увеличивается, а нижнего уменьшается, и при очень большой амплитуде высокочастотного поля происходит выравнивание населенностей (насыщение), что приводит к уменьшению поглощения. Это нелинейный эффект.

Другие нелинейные эффекты (выпрямление, умножение частоты) можно исследовать, определяя следующие члены выражения (3.54):  $M_1^{nl}$ ,  $M_2^{nl}$ , ... и т. д.

**Ферромагнитная среда.** Такая среда характеризуется наличием микроскопических областей (доменов), обладающих самопроизвольной намагниченностью в определенном направлении. Магнитные свойства ферромагнетиков обусловлены наличием некомпенсированных магнитных моментов электронов внешних оболочек.

Особенности явлений в ферромагнетиках связаны с наличием сложной системы сильно взаимодействующих электронов. При этом в ферромагнетиках создается большая результирующая намагниченности и сильное внутреннее магнитное поле.

Ферромагнитные полупроводниковые среды — ферриты — обладают малыми потерями, и в них возможно распространение электромагнитного поля. Это распространение описывается уравнением (3.47).

Движение вектора намагниченности ферромагнетика может быть определено уравнением Ландау — Лифшица

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}] - \frac{\alpha\mu_0\gamma}{M^2}[\mathbf{M}[\mathbf{M}\mathbf{H}]], \quad (3.62)$$

где  $\alpha$  — безразмерный параметр затухания.

Второй (релаксационный) член в правой части уравнения (3.62) характеризует вращательный момент, стремящийся возвратить вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  в положение равновесия.

В постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  прецессирует вокруг направления  $\mathbf{H}_0$ , оставаясь постоянным по величине. Действительно, умножая скалярно обе части уравнения (3.62) на  $\mathbf{M}$ , получаем

$$\frac{d^2M^2}{dt^2} = 0,$$

т. е.  $M = \text{const}$ .



Это возможно, если конец вектора  $\mathbf{M}$  описывает спираль на поверхности сферы (рис. 3.16).

Пусть кроме постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$  действует монохроматическое поле  $\mathbf{H}(\omega)$  в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$ , т. е. результирующее поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(\omega), \quad (3.63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \mathbf{e}_1 H_1(\omega) + \mathbf{e}_2 H_2(\omega); \\ H_m(\omega) &\ll H_0. \end{aligned}$$

Если  $\mathbf{H}_0 > \mathbf{H}_{\text{нас}}$ , где  $\mathbf{H}_{\text{нас}}$  — напряженность поля насыщения, то намагниченность можно описать выражением

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}^{\text{л}}(\omega) + \mathbf{M}_1^{\text{нл}} + \mathbf{M}_2^{\text{нл}} + \dots \quad (3.64)$$

Здесь  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{e}_3 M_{\text{нас}}$ ;  $M_{\text{нас}}$  — намагниченность насыщения,

$$|\mathbf{M}_0| \gg |\mathbf{M}^{\text{л}}(\omega)| \gg |\mathbf{M}_1^{\text{нл}}| \gg |\mathbf{M}_2^{\text{нл}}| \dots \quad (3.65)$$

Решая уравнение (3.62) с учетом (3.63) и (3.64) методом последовательных приближений, в линейном приближении получаем

$$\dot{M}_i^{\text{л}}(\omega) = \dot{\chi}_{ik}^{\text{м}}(\omega) \dot{H}_k(\omega), \quad (3.66)$$

где  $\dot{\chi}_{ik}^{\text{м}}(\omega)$  — тензор магнитной восприимчивости,

$$\begin{aligned} \chi_{ik}^{\text{м}}(\omega) &= \begin{pmatrix} \dot{\chi}_{\text{м}} & -j\dot{\chi}_{\alpha}^{\text{м}} & 0 \\ j\dot{\chi}_{\alpha}^{\text{м}} & \dot{\chi}_{\text{м}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \dot{\chi}_{\text{м}} &= \chi_{0\text{м}} \frac{\omega_{\text{п}}^2 + j\alpha\omega_0\omega}{\omega_{\text{п}}^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega_0\omega}; \\ \dot{\chi}_{\alpha}^{\text{м}}(\omega) &= \chi_{0\text{м}} \frac{\omega_0\omega}{\omega_{\text{п}}^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega_0\omega}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Здесь  $\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0$ ;  $\chi_{0\text{м}} = M_{\text{нас}}/H_0$ ;  $\omega_{\text{п}} = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha^2}$ .

Разделяя действительные и мнимые части второго выражения (3.67) для магнитной восприимчивости, получаем

$$\dot{\chi}_{\text{м}} = \chi'_{\text{м}} - j\chi''_{\text{м}},$$

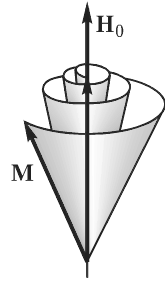


Рис. 3.16. Затухающая прецессия вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$

где

$$\chi'_m = \chi_{0m} \frac{\omega_p^2(\omega_p^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega_0^2\omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}; \quad (3.68)$$

$$\chi''_m = \chi_{0m} \frac{\alpha\omega_0\omega(\omega_p^2 + \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}. \quad (3.69)$$

Тензор магнитной проницаемости

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \chi_{ik}^M. \quad (3.70)$$

Действительная часть магнитной проницаемости согласно (3.70) и (3.68) равна

$$\mu' = 1 + \chi_{0m} \frac{\omega_p^2(\omega_p^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega_0^2\omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}, \quad (3.71)$$

а мнимая часть согласно (3.69) составляет

$$\mu'' = \chi_{0m} \frac{\alpha\omega_0\omega(\omega_p^2 + \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}. \quad (3.72)$$

Зависимость  $\mu'$  от частоты характеризует дисперсионные свойства среды. Характерный вид кривой  $\mu'(\omega)$  представлен на рис. 3.15, а. Величина  $\mu''$  определяет поглощение. Типичный вид зависимости  $\mu''$  от частоты показан на рис. 3.15, б. При резонансе ( $\omega = \omega_p$ ) величина  $\mu''$  достигает максимального значения:

$$\mu''_{\max}(\omega_p) = \chi_{0m} \frac{\omega_p}{2\alpha\omega_0}.$$

Резонансная кривая симметрична относительно резонансной частоты  $\omega_p$ , т. е. имеет лоренцеву форму. Ширина резонансной кривой определяется по половинному уровню.

Резонансное поглощение высокочастотной энергии в ферромагнитных средах при наложении внешнего постоянного магнитного поля называется *ферромагнитным резонансом*. Поглощение определяется переходами между соседними уровнями, возникающими при расщеплении уровней атома в постоянном магнитном поле (эффект Зеемана).

Ферромагнетики ведут себя как линейные среды лишь при небольшой напряженности высокочастотного поля. При больших амплитудах поля возникает нелинейная зависимость между соответствующими составляющими переменного поля и намагниченности.

Условие постоянства вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  при  $H_0 > H_{\text{нас}}$  можно записать в следующем виде:

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 = M_{\text{нас}}^2,$$

где  $M_{\text{нас}}$  — намагниченность насыщения, причем  $\mathbf{M}_{\text{нас}} = \mathbf{e}_3 M_{\text{нас}}$  (рис. 3.17).

Поскольку обычно  $M_1, M_2 \ll M_{\text{нас}}$ , то

$$M_3 \approx M_{\text{нас}} - \frac{1}{2M_{\text{нас}}} (M_1^2 + M_2^2). \quad (3.73)$$

Пусть высокочастотное поле имеет составляющие

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= H_{m1} \cos \omega t; \\ H_2(\omega) &= H_{m2} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Для упрощения расчетов рассмотрим среду без потерь. При этом уравнение движения вектора намагниченности (3.62) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0 \gamma [\mathbf{M}\mathbf{H}], \quad (3.75)$$

а его решения в линейном приближении можно записать согласно (3.66) и с учетом (3.74) как

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= \chi_m H_{m1}(\omega) \cos \omega t + \chi_\alpha^M H_{m2}(\omega) \sin(\omega t + \varphi); \\ M_2(\omega) &= -\chi_\alpha^M H_{m1}(\omega) \sin \omega t + \chi_m H_{m2}(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \\ M_3(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Первое нелинейное приближение получим, подставив (3.76) в (3.73). После несложных преобразований имеем

$$M_3 = M_{\text{нас}} - \Delta M_3 + M_{m3}(2\omega) \cos(2\omega t + \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta M_3 &= \frac{1}{4M_{\text{нас}}} \{ (\chi_m^2 + \chi_\alpha^{M2}) [H_{m1}^2(\omega) + H_{m2}^2(\omega)] + \\ &+ 4\chi_m \chi_\alpha^M \sin \varphi H_{m1}(\omega) H_{m2}(\omega) \} \end{aligned} \quad (3.77)$$

— постоянная составляющая;

$$\begin{aligned} M_{m3}(2\omega) \cos(2\omega t + \psi) &= -\frac{1}{4M_{\text{нас}}} \{ (\chi_m^2 - \chi_\alpha^{M2}) \times \\ &\times [H_{m1}^2(\omega) \cos 2\omega t + H_{m2}^2(\omega) \cos(2\omega t + \varphi)] \} \end{aligned} \quad (3.78)$$

— составляющая удвоенной частоты.

Таким образом, поперечное магнитное поле приводит к уменьшению постоянной намагниченности и появлению переменной намагниченности, направленной по оси  $x_3$  и изменяющейся с удвоенной частотой.

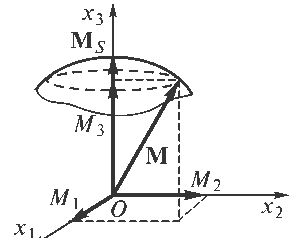


Рис. 3.17. К определению нелинейной намагниченности

Уменьшение постоянной намагниченности, зависящее от амплитуд переменного поля согласно квадратичному закону, как следует из формулы (3.77), происходит при любой поляризации переменного поля.

В случае линейной поляризации, когда, например,  $H_{m2}(\omega) = 0$ , согласно (3.77)

$$\Delta M_3 = \frac{1}{4M_{\text{нас}}} (\chi_m^2 + \chi_\alpha^{m2}) H_{m1}^2(\omega).$$

В случае круговой поляризации  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $H_{m1}(\omega) = H_{m2}(\omega) = H_m(\omega)$  и в соответствии с (3.77)

$$\Delta M_3 = \frac{1}{2M_{\text{нас}}} (\chi_m \mp \chi_\alpha^m)^2 H_m^2(\omega), \quad (3.79)$$

где знак «-» соответствует левому вращению (по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения), знак «+» — правому. Поэтому для правого вращения эффект уменьшения постоянной намагниченности сильнее, чем для левого. Наиболее интенсивен этот эффект в области ферромагнитного резонанса и может быть использован для детектирования модулированного СВЧ-сигнала.

Удвоение частоты определяется выражением (3.78). Косинусы и синусы удвоенной частоты входят в это выражение линейно. Применяв символический метод, перепишем (3.78) в виде

$$\dot{M}_{m3}(2\omega) = -\frac{1}{4M_{\text{нас}}} (\chi_m^2 - \chi_\alpha^{m2}) [\dot{H}_{m1}^2(\omega) + \dot{H}_{m2}^2(\omega)]. \quad (3.80)$$

Таким образом, переменная намагниченность содержит гармонику удвоенной частоты, направленную вдоль постоянного магнитного поля. Согласно (3.47) эта гармоника возбудит электромагнитное поле с частотой  $2\omega$ , магнитная составляющая которого направлена по оси  $x_3$ . Наличие переменной составляющей  $H_3(2\omega)$  изменит вид проекций уравнения (3.75) на оси  $x_1$  и  $x_2$ . Решая эти уравнения относительно компонент переменной намагниченности  $M_1$  и  $M_2$ , перпендикулярных направлению постоянного магнитного поля, получим составляющие намагниченности с частотой  $3\omega$ .

Однако если переменное магнитное поле имеет круговую поляризацию

$$\dot{H}_{m1}(\omega) = \pm j\dot{H}_{m2}(\omega),$$

то согласно (3.80)

$$M_3(2\omega) = 0,$$

т. е. гармоника намагниченности удвоенной частоты отсутствует. При линейной поляризации поля составляющая намагниченности удвоенной частоты  $M_3(2\omega)$  максимальна.

Возникновение составляющей намагниченности с частотой  $2\omega$  можно объяснить следующим образом. Вектор намагниченности прецессирует вокруг направления постоянного магнитного поля, оставаясь постоянным по величине. В общем случае составляющие переменной намагниченности в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$ , не равны друг другу и вектор  $\mathbf{M}$  прецессирует по эллиптической траектории (рис. 3.18). Поскольку вектор  $\mathbf{M}$  не изменяет своей величины, то его проекция на направление  $\mathbf{H}_0$  изменяется с частотой, вдвое большей частоты переменного поля. Если  $\dot{H}_{m1} = \pm j\dot{H}_{m2}$ , т. е. если в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$ , переменное магнитное поле имеет круговую поляризацию, то  $\dot{M}_{m1} = \pm j\dot{M}_{m2}$  и, как видно на рис. 3.19, составляющая удвоенной частоты будет отсутствовать.

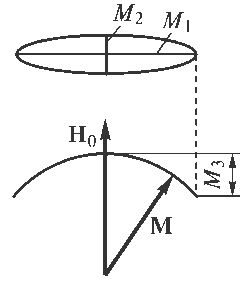


Рис. 3.18. Возникновение намагниченности  $M_3(2\omega)$  в общем случае

При воздействии на ферромагнитную среду составляющих поля с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  наряду с умножением частоты наблюдается появление комбинационных частот  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ , и в первую очередь суммарных и разностных частот  $\omega_1 \pm \omega_2$ .

Рассмотрим поле, имеющее частотные составляющие с круговой поляризацией  $H(\omega_1)$  и  $H(\omega_2)$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\omega_1) + \mathbf{H}(\omega_2).$$

В проекциях на координатные оси это поле можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_1 &= H_m(\omega_1) \cos \omega_1 t + H_m(\omega_2) \cos \omega_2 t; \\ H_2 &= \pm H_m(\omega_1) \sin \omega_1 t \pm H_m(\omega_2) \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Знаки « $\pm$ » в последнем выражении указывают на направление вращения.

Знак « $\rightarrow$ » соответствует правому вращению, знак « $\leftarrow$ » — левому. Формулы (3.81) определяют поля, имеющие одинаковое направление вращения. Очевидно, что в случае полей, имеющих противоположное вращение, знаки « $\pm$ » перед одним из слагаемых второго выражения (3.81) заменяются знаками « $\mp$ ».

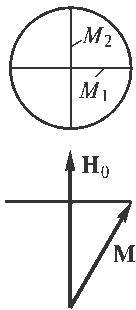


Рис. 3.19. Отсутствие намагниченности  $M_3(2\omega)$  в случае круговой поляризации поля

Подставляя (3.81) в (3.76), получаем:

$$\begin{aligned} M_1 &= [\chi_m(\omega_1) \mp \chi_\alpha^m(\omega_1)] H_m(\omega_1) \cos \omega_1 t + \\ &+ [\chi_m(\omega_2) \mp \chi_\alpha^m(\omega_2)] H_m(\omega_2) \cos \omega_2 t; \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \pm [\chi_m(\omega_1) \mp \chi_\alpha^m(\omega_1)] H_m(\omega_1) \sin \omega_1 t \pm \\ &\pm [\chi_m(\omega_2) \mp \chi_\alpha^m(\omega_2)] H_m(\omega_2) \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Здесь знаки «±» перед квадратными скобками определяют направление вращения, верхний знак в квадратных скобках соответствует левому вращению, нижний — правому.

Подставим (3.82) и (3.83) в (3.73):

$$M_3 = M_{\text{нас}} - \Delta M_3 + M_{m3}(\omega_1 \mp \omega_2) \cos(\omega_1 \mp \omega_2)t,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta M_3 = & \frac{1}{2M_{\text{нас}}} \{ [\chi_m(\omega_1) \mp \chi_\alpha^m(\omega_1)]^2 H_m^2(\omega_1) + \\ & + [\chi_m(\omega_2) \mp \chi_\alpha^m(\omega_2)]^2 H_m^2(\omega_2) \} \end{aligned} \quad (3.84)$$

— постоянная составляющая;

$$\begin{aligned} & M_{m3}(\omega_1 \mp \omega_2) \cos(\omega_1 \mp \omega_2)t = \\ & = \frac{H_m(\omega_1)H_m(\omega_2)}{M_{\text{нас}}} [\chi_m(\omega_1) \mp \chi_\alpha^m(\omega_1)] \times \\ & \times [\chi_m(\omega_2) \mp \chi_\alpha^m(\omega_2)] \cos(\omega_1 \mp \omega_2)t \end{aligned} \quad (3.85)$$

— составляющая разностной и суммарной частот.

В формулах (3.84) и (3.85), как и ранее, верхний знак в квадратных скобках соответствует левому вращению, нижний — правому; разностная частота  $\omega_1 - \omega_2$  — одинаковому направлению вращения полей; суммарная частота  $\omega_1 + \omega_2$  — противоположному.

По формуле (3.84) уменьшение постоянной намагниченности является аддитивным процессом (сравните с формулой (3.79)). В случае действия двух переменных полей этот процесс определяется двумя составляющими, обусловленными каждым полем в отдельности. Эффект наиболее существен для правой круговой поляризации в области ферромагнитного резонанса, где величина  $\chi_m(\omega) + \chi_\alpha^m(\omega)$  значительна.

Намагниченность разностной частоты согласно (3.85) максимальна при правой круговой поляризации обоих полей в области ферромагнитного резонанса хотя бы одного из полей, когда величина  $\chi_m(\omega) + \chi_\alpha^m(\omega)$  для этого поля максимальна. Намагниченность суммарной частоты в соответствии с выражением (3.85) максимальна в области ферромагнитного резонанса для поля правой круговой поляризации, когда  $\chi_m(\omega) + \chi_\alpha^m(\omega)$  максимальна.

Согласно (3.47) составляющие намагниченности  $M_3(\omega_1 + \omega_2)$  и  $M_3(\omega_1 - \omega_2)$  возбуждают соответственно электромагнитные поля  $E(\omega_1 + \omega_2)$  и  $E(\omega_1 - \omega_2)$ , магнитные составляющие которых направлены по оси  $x_3$ .

Если действующие магнитные поля  $H(\omega_1)$  и  $H(\omega_2)$  поперечные, но имеют линейную или эллиптическую поляризацию, то кроме постоянной составляющей,

составляющих частот  $\omega_1 \pm \omega_2$  появятся также составляющие удвоенных частот  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$ . Составляющие частот  $\omega_1 \pm \omega_2$  возбуждаются вследствие того, что поля линейной и эллиптической поляризации можно представить как суперпозицию полей круговой поляризации, вращающихся в противоположные стороны.

### 3.6. Распространение электромагнитного поля в безграничных анизотропных средах

**Ферромагнитная среда.** Рассмотрим распространение электромагнитного поля в однородной анизотропной среде. Примером такой среды является феррит, нашедший широкое применение в технике сверхвысоких частот. Химическая формула феррита  $MFe_2O_3$ , где  $M$  — двухвалентный металл (никель, марганец, магний, медь и др.). Феррит обладает малой проводимостью ( $\sigma = 10^{-4} \dots 10^{-6}$  См/м), и, следовательно, электромагнитная энергия распространяется в ферритовой среде без значительных потерь. Относительная диэлектрическая проницаемость феррита равна 10—20, он относится к магнитодиэлектрикам.

Ферромагнитная среда изотропна, однако при наличии постоянного магнитного поля она становится анизотропной с магнитной проницаемостью, определяемой тензором второго ранга.

Если постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по оси  $x_3$ , то согласно (3.70) тензор относительной магнитной проницаемости имеет вид

$$(\mu_{ik}) = \begin{pmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Ограничимся линейным приближением. Распространение электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла в символической форме

$$\begin{aligned} \text{rot}_i \dot{H}_m &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mi}; \\ \text{rot}_i \dot{E}_m &= -j\omega \mu_0 \mu_{ik} \dot{H}_{mk}, \end{aligned}$$

или в развернутом виде, с учетом (3.86), в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_3} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m3}; \end{aligned} \quad (3.87a)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3} &= -j\omega(\mu_a \dot{H}_{m1} - j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m2}); \\
 \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_1} &= -j\omega(j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}); \\
 \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} &= -j\omega\mu_{3a} \dot{H}_{m3}.
 \end{aligned} \tag{3.876}$$

Рассмотрим два частных случая, имеющие наибольший практический интерес.

**Случай продольного подмагничивания.** Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении, совпадающем с направлением приложенного постоянного магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_0 &= \mathbf{e}_3 H_0; \\
 \dot{\mathbf{H}}_m &= \mathbf{H}_m e^{-jkx_3}; \\
 \dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_m e^{-jkx_3}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = -jk$$

и уравнения Максвелла (3.87а) и (3.87б) имеют вид

$$\begin{aligned}
 k\dot{H}_{m2} &= \omega\epsilon_a \dot{E}_{m1}; \\
 k\dot{H}_{m1} &= -\omega\epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\
 \dot{E}_{m3} &= 0;
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
 kE_{m2} &= -\omega(\mu_a \dot{H}_{m1} - j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m2}); \\
 k\dot{E}_{m1} &= -\omega(j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}); \\
 \dot{H}_{m3} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

т. е. волны являются поперечными.

Подставляя в (3.89) значения  $\dot{E}_{m1}$  и  $\dot{E}_{m2}$ , определяемые из (3.88), получаем

$$\begin{aligned}
 (k^2 - \omega^2\epsilon_a\mu_a)\dot{H}_{m1} + j\omega^2\epsilon_a\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m2} &= 0; \\
 j\omega^2\epsilon_a\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m1} - (k^2 - \omega^2\epsilon_a\mu_a)\dot{H}_{m2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Уравнения (3.90) представляют собой систему однородных уравнений, которая имеет решения, отличные от нуля, при условии, что определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}
 k^2 - \omega^2\epsilon_a\mu_a & j\omega^2\epsilon_a\mu_{\alpha a} \\
 j\omega^2\epsilon_a\mu_{\alpha a} & -(k^2 - \omega^2\epsilon_a\mu_a)
 \end{vmatrix} = 0.$$



Откуда

$$(k^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_a)^2 = \omega^4 \epsilon_a^2 \mu_{\alpha a}^2$$

или

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_a (\mu_a \pm \mu_{\alpha a}). \quad (3.91)$$

Таким образом, постоянная распространения  $k$  имеет два значения, т. е. в направлении оси  $x_3$  могут распространяться две волны с разными постоянными распространения и разными составляющими поля.

Подставляя (3.91) в систему уравнений (3.90), найдем векторы  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющие этой системе. Поскольку система (3.90) однородна, то эти векторы можно определить лишь по направлению:

$$\dot{H}_{m2} = \pm j \dot{H}_{m1},$$

т. е. компоненты вектора  $\mathbf{H}$  ( $H_1$  и  $H_2$ ) равны по амплитуде, но сдвинуты по фазе на  $\pm 90^\circ$ , а следовательно представляют собой волны круговой поляризации, вращающиеся в противоположные стороны (знак « $\rightarrow$ » соответствует левой поляризации, знак « $\leftarrow$ » — правой) и имеющие разные постоянные распространения

$$\begin{aligned} k^+ &= \omega \sqrt{\epsilon_a (\mu_a + \mu_{\alpha a})}; \\ k^- &= \omega \sqrt{\epsilon_a (\mu_a - \mu_{\alpha a})} \end{aligned} \quad (3.92)$$

и разные фазовые скорости

$$\begin{aligned} v^+ &= \frac{\omega}{k^+} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a (\mu_a + \mu_{\alpha a})}}; \\ v^- &= \frac{\omega}{k^-} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a (\mu_a - \mu_{\alpha a})}}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Из выражений (3.92) и (3.93) следует, что продольно-намагниченную ферритовую среду можно характеризовать эффективными параметрами:

$$\mu_{a \text{ эф}}^+ = \mu_a + \mu_{\alpha a}$$

— для волны правой круговой поляризации;

$$\mu_{a \text{ эф}}^- = \mu_a - \mu_{\alpha a}$$

— для волны левой круговой поляризации.

Волновое сопротивление среды для каждой из этих волн также различно:

$$\begin{aligned} Z_0^+ &= \sqrt{\frac{\mu_a + \mu_{\alpha a}}{\epsilon_a}}; \\ Z_0^- &= \sqrt{\frac{\mu_a - \mu_{\alpha a}}{\epsilon_a}}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

В (3.92)—(3.94)  $k^+$ ,  $v^+$ ,  $Z_0^+$  характеризуют правополяризованную волну, а  $k^-$ ,  $v^-$ ,  $Z_0^-$  — левополяризованную. Направления вращения векторов определяются относительно направления постоянного магнитного поля.

Таким образом, плоская волна линейной поляризации, распространяющаяся вдоль направления постоянного магнитного поля, распадается на две волны круговой поляризации с одинаковыми амплитудами векторов напряженности магнитного поля. По мере распространения в феррите, так как  $v^+ \neq v^-$ , между этими волнами набегают фазовый сдвиг и вектор  $\mathbf{H}$  суммарной линейно поляризованной волны непрерывно поворачивается.

В символической форме волны левой и правой круговой поляризации можно записать следующим образом:

волна левой поляризации

$$\mathbf{H}^- = H_m (\mathbf{e}_1 - j\mathbf{e}_2) e^{-jk^-x_3};$$

волна правой поляризации

$$\mathbf{H}^+ = H_m (\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_2) e^{-jk^+x_3}.$$

Суперпозиция этих волн дает линейно поляризованную волну

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_m [(e^{-jk^+x_3} + e^{-jk^-x_3})\mathbf{e}_1 + j(e^{-jk^+x_3} - e^{-jk^-x_3})\mathbf{e}_2]. \quad (3.95)$$

Обозначая

$$k^0 = \frac{k^+ + k^-}{2}; \quad k^+ = k^0 + a; \quad k^- = k^0 - a$$

и преобразуя (3.95) по формуле Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m &= H_m e^{-jk^0x_3} [(e^{jax_3} + e^{-jax_3})\mathbf{e}_1 - j(e^{jax_3} - e^{-jax_3})\mathbf{e}_2] = \\ &= 2H_m e^{-jk^0x_3} (\mathbf{e}_1 \cos ax_3 + \mathbf{e}_2 \sin ax_3). \end{aligned}$$

Таким образом, при распространении волны вдоль оси  $x_3$  меняется соотношение между вертикальной и горизонтальной составляющими вектора  $\mathbf{H}$ . Если при  $x_3 = 0$  имеется только горизонтальная составляющая, то по мере распространения горизонтальная составляющая уменьшается, а вертикальная — возрастает и вектор  $\mathbf{H}$  непрерывно поворачивается (рис. 3.20). Угол поворота

$$\vartheta = \arctg \frac{H_{m2}}{H_{m1}} = ax_3 = \frac{k^+ - k^-}{2} x_3 = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a} (\sqrt{\mu_a + \mu_{\alpha a}} - \sqrt{\mu_a - \mu_{\alpha a}})}{2} x_3. \quad (3.96)$$

Из полученной формулы следует, что  $\mu_{\alpha a}$  характеризует поворот плоскости поляризации. Чем больше  $\mu_{\alpha a}$ , тем больше поворот. Величины  $\mu_a$  и  $\mu_{\alpha a}$  являются функциями приложенного постоянного магнитного поля.

При данной длине пройденного волной пути угол поворота зависит от значения приложенного поля. На этом свойстве основано электрическое управление

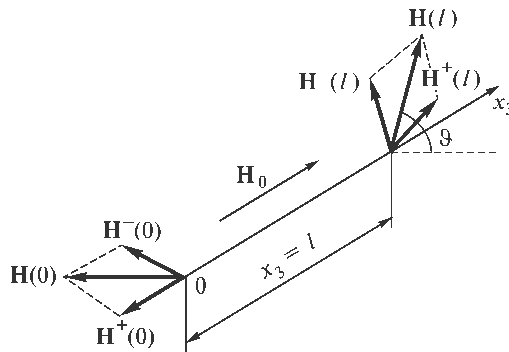


Рис. 3.20. Вращение плоскости поляризации

ние углом поляризации, используемое в вентилях, модуляторах, аттенюаторах и стабилизаторах мощности.

Поскольку волновые сопротивления  $Z_0^+$  и  $Z_0^-$  для волн круговой поляризации с разным направлением вращения различны, то амплитуды электрической напряженности поля отличаются друг от друга:

$$E_m^+ \neq E_m^-$$

а две волны круговой поляризации с разными амплитудами дадут волну эллиптической поляризации.

Под углом поворота плоскости поляризации в этом случае подразумевается угол между большой осью эллипса и направлением поляризации исходной линейно поляризованной волны. Этот угол также можно определить по формуле (3.96).

Вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся в намагниченной ферритовой среде вдоль направления подмагничивающего постоянного поля  $\mathbf{H}_0$ , называется *эффектом Фарадея*. Среда, в которой этот эффект наблюдается, называется *гиротропной* (вращающей). Замечательным свойством этого эффекта является его невзаимность. Независимо от направления распространения выбор  $k^+$  или  $k^-$  для каждой из поляризованных по кругу волн связан с тем, в какую сторону вращается вектор поля, если смотреть по направлению постоянного подмагничивания. Поэтому волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x_3$  (по направлению постоянного поля) будет поворачивать плоскость поляризации в ту же сторону, что и волна, распространяющаяся в противоположном направлении (против направления постоянного поля).

Невзаимность объясняется анизотропией феррита, причиной которой является прецессия спинов электронов в постоянном магнитном поле.

**Случай поперечного подмагничивания.** Пусть плоская волна распространяется в направлении оси  $x_1$ , перпендикулярном направлению постоянного поля  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$ . Полагая в уравнениях (3.87а) и (3.87б)

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = -jk,$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= 0; \\ k\dot{H}_{m3} &= \omega\epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ k\dot{H}_{m2} &= -\omega\epsilon_a \dot{E}_{m3}; \\ \mu_a \dot{H}_{m1} - j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m2} &= 0; \\ k\dot{E}_{m3} &= -\omega(j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}); \\ k\dot{E}_{m2} &= \omega\mu_{3a} \dot{H}_{m3}. \end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно разделить на две независимые системы

$$\begin{aligned} k\dot{H}_{m2} &= -\omega\epsilon_a \dot{E}_{m3}; \\ \mu_a \dot{H}_{m1} &= j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m2}; \\ k\dot{E}_{m3} &= -\omega(j\mu_{\alpha a} \dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}), \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} k\dot{H}_{m3} &= \omega\epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ k\dot{E}_{m2} &= \omega\mu_{3a} \dot{H}_{m3}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Очевидно, что система уравнений (3.97) соответствует волне с продольной составляющей магнитного поля ( $H_{m1} \neq 0$ ), электрический вектор которой совпадает с направлением подмагничивания. Составляющие  $H_{m1}$  и  $H_{m2}$  сдвинуты друг относительно друга по фазе на  $90^\circ$ , а их значения связаны отношением

$$\frac{H_{m1}}{H_{m2}} = \frac{\mu_{\alpha a}}{\mu_a},$$

т. е. волна линейно поляризована по вектору  $\mathbf{E}$  и эллиптически поляризована по вектору  $\mathbf{H}$ .

Рассматриваемая система имеет решение, отличное от нуля, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \mu_a & -j\mu_{\alpha a} & 0 \\ j\omega\mu_{\alpha a} & \omega\mu_a & k \\ 0 & k & \omega\epsilon_a \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-\mu_a k^2 + \omega^2 \mu_a^2 \epsilon_a - \omega^2 \mu_{\alpha a}^2 \epsilon_a = 0.$$

Отсюда постоянная распространения

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a (\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2)}{\mu_a}},$$

а скорость распространения

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a(\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2)}{\mu_a}}}.$$

В отличие от обычной плоской волны, которая имеет только поперечные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , рассматриваемая волна называется *необыкновенной*. Эта волна распространяется со скоростью, которой обладает обычная волна в среде с магнитной проницаемостью, равной

$$\mu_{a \text{ эф}} = \frac{\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2}{\mu_a}.$$

Волновое сопротивление среды для этой волны определяется отношением поперечного электрического поля к поперечному магнитному полю:

$$Z_0 = \frac{E_{m3}}{H_{m2}} = \frac{k}{\omega \epsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2}{\epsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_{a \text{ эф}}}{\epsilon_a}}.$$

Постоянная распространения, фазовая скорость и волновое сопротивление зависят от напряженности постоянного магнитного поля.

Система уравнений (3.98) определяет плоскую волну с составляющими векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и вектором  $\mathbf{E}$ , перпендикулярным направлению подмагничивания. Система имеет решение, не равное нулю, если

$$\begin{vmatrix} k & -\omega \epsilon_a \\ \omega \mu_{3a} & -k \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_{3a}}.$$

Скорость распространения этой плоской волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_{3a}}};$$

волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_{3a}}{\epsilon_a}}.$$

При насыщения феррита  $\mu_{3a} = \mu_0$  и характеристики волны и среды не зависят от постоянного магнитного поля. Волна ведет себя как плоская волна в изотропной среде. Такая волна называется *обыкновенной*. Векторы Пойнтинга обыкновенной и необыкновенной волн не совпадают по направлению.

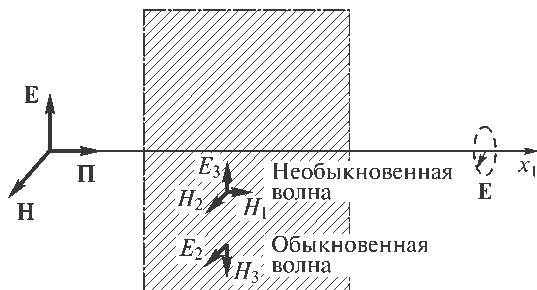


Рис. 3.21. Двойное лучепреломление

Таким образом, если в гиротропную среду в направлении, перпендикулярном намагничиванию, входит плоская волна произвольной линейной поляризации, то она разбивается на две волны — обыкновенную и необыкновенную, — распространяющиеся с разными скоростями. При выходе из гиротропной среды эти волны оказываются в разных фазах и образуют волну эллиптической поляризации. Это явление носит название *двойного лучепреломления* (рис. 3.21). Среда при поперечном подмагничивании обладает взаимными свойствами. Двойное лучепреломление используется в системах быстрого поворота диаграмм излучения антенн.

**Плазма.** В постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = e_3 H_0$  плазма ведет себя как анизотропная среда, диэлектрическая проницаемость которой является эрмитовым тензором второго ранга.

Плотность электронного тока в плазме

$$\mathbf{J} = en\mathbf{v},$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость движения электрона, определяемая без учета столкновений по уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]).$$

В проекциях на оси декартовой системы координат для монохроматического поля

$$j\omega\dot{v}_1 = \frac{e}{m} \dot{E}_1 + \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{v}_2;$$

$$j\omega\dot{v}_2 = \frac{e}{m} E_2 - \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{v}_1;$$

$$j\omega\dot{v}_3 = \frac{e}{m} \dot{E}_3.$$

Решим полученные уравнения относительно составляющих вектора скорости. Обозначив

$$\omega_H = \frac{e}{m} \mu_0 H_0 = \mu_0 \gamma H_0,$$

найдем

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \gamma \frac{j\omega \dot{E}_1 + \omega_H \dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2}; \\ \dot{v}_2 &= \gamma \frac{-\omega_H \dot{E}_1 + j\omega \dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2}; \\ \dot{v}_3 &= -j \frac{\gamma}{\omega} \dot{E}_3.\end{aligned}$$

Подставим полученные значения составляющих вектора скорости в первое уравнение Максвелла в символической форме

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}},$$

которое в проекциях на оси координат имеет вид

$$\begin{aligned}\text{rot}_1 \dot{\mathbf{H}} &= \epsilon_0 \omega_p^2 \frac{j\omega \dot{E}_1 + \omega_H \dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2} + j\omega \epsilon_0 \dot{E}_1; \\ \text{rot}_2 \dot{\mathbf{H}} &= -\epsilon_0 \omega_p^2 \frac{\omega_H \dot{E}_1 - j\omega \dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2} + j\omega \epsilon_0 \dot{E}_2; \\ \text{rot}_3 \dot{\mathbf{H}} &= -j\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \dot{E}_3 + j\omega \epsilon_0 \dot{E}_3,\end{aligned} \quad (3.99)$$

где  $\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{m \epsilon_0}$  — собственная частота плазмы.

Приводя уравнения (3.99) к виду

$$\text{rot}_i \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_{ik} \dot{E}_k,$$

получаем

$$(\epsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \epsilon & -j\epsilon_\alpha & 0 \\ j\epsilon_\alpha & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}\epsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2}; \\ \epsilon_\alpha &= \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega_H^2 - \omega^2)}; \\ \epsilon_3 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Следовательно, при наличии магнитного поля плазма является гиротропной средой. При распространении электромагнитной волны в продольном поле подмагничивания наблюдается вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея), в поперечном — двойное лучепреломление.

### Вопросы

1. Поясните механизм возникновения гармоник при распространении электромагнитного монохроматического поля в нелинейном диэлектрике.
2. Как называется расстояние, на котором обмен энергией между полем и средой происходит в одном направлении и амплитуда гармоники поля возрастает или, наоборот, убывает?
3. При каком условии амплитуда гармоники поля по мере его распространения возрастает?
4. Для анизотропной или изотропной нелинейной среды возможно выполнение условия волнового синхронизма?
5. Поясните механизмы поляризации: электронной, ионной и ориентационной.
6. Опишите явления самофокусировки и самоканализации энергии при распространении луча с большой плотностью энергии.
7. Свойствами какой среды (диэлектрика или проводника) характеризуется плазма в случае, если:
  - а) частота распространяющегося поля больше собственной частоты плазмы;
  - б) частота распространяющегося поля меньше собственной частоты плазмы?
8. Дайте определения линейной, круговой и эллиптической поляризации плоской волны.
9. На составляющие каких поляризации можно разложить волны линейной, круговой и эллиптической поляризации?
10. Какой вид имеет тензор магнитной проницаемости ферромагнитной среды, находящейся в постоянном магнитном поле?
11. Что происходит с плоской электромагнитной волной линейной поляризации при распространении в ферромагнитной среде или плазме при продольном подмагничивании?
12. Что происходит с плоской электромагнитной волной линейной поляризации при распространении в ферромагнитной среде или плазме при поперечном подмагничивании?

### Задачи

1. Электромагнитное поле распространяется в нелинейном диэлектрике. Покажите, что в случае квадратичной зависимости нелинейной поляризации  $P^{\text{нл}} = \epsilon_0 \chi_2 E^2$  в среде появятся три составляющие вектора поляризации  $P(0)$ ,  $P(\omega)$ ,  $P(2\omega)$  и три составляющие поля  $E(0)$ ,  $E(\omega)$ ,  $E(2\omega)$ .
2. Используя результаты решения задачи 1, определите расстояние, называемое длиной когерентности, на котором обмен энергией между  $P(2\omega)$  и  $E(2\omega)$  происходит в одну сторону от  $P(2\omega)$  к  $E(2\omega)$  и  $E(2\omega)$  возрастает или от  $E(2\omega)$  к  $P(2\omega)$  и  $E(2\omega)$  убывает.
3. Определите условие, называемое условием волнового синхронизма, при котором энергия основного распространяющегося поля  $E(\omega)$  благодаря переизлучению, осуществляемому средой, по мере распространения переходит в энергию поля  $E(2\omega)$ .



4. Определите фазовую скорость плоской монохроматической волны частотой  $f = 5$  МГц, распространяющейся в плазме без потерь с концентрацией электронов  $n = 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ .
5. Вычислите ослабление электромагнитного поля частотой  $f = 15$  МГц при прохождении слоя плазмы толщиной 3 см с концентрацией электронов  $n = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ .
6. Намагниченная ферромагнитная среда на частоте  $\omega = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  имеет параметры  $\epsilon = 10$  и

$$(\mu_{ik}) = \begin{pmatrix} 1,91 & j0,69 & 0 \\ -j0,69 & 1,91 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определите толщину пластины  $l$ , при которой сдвиг фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами составит  $90^\circ$ .

7. Определите толщину намагниченной ферромагнитной пластины, при которой на частоте  $\omega = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  поворот плоскости поляризации составит угол  $90^\circ$ . Параметры ферромагнетика приведены в задаче 6.

## 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В ОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ

### 4.1. Наклонное падение электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред. Формулы Френеля

При рассмотрении падения электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред удобно совместить плоскость раздела с одной из координатных плоскостей. Тогда при наклонном падении направление распространения волны не совпадает ни с одной из осей координат и в общем случае распространение волны можно характеризовать волновым комплексным вектором

$$\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\beta} - j\boldsymbol{\alpha}.$$

При этом поле падающей волны описывается выражениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_m e^{-j\dot{\mathbf{k}}\mathbf{r}}; \\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \mathbf{H}_m e^{-j\dot{\mathbf{k}}\mathbf{r}},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, определяющий положение в пространстве исследуемой точки.

Вектор  $\boldsymbol{\beta}$  перпендикулярен плоскости равных фаз и определяет направление и скорость перемещения этой плоскости, вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  перпендикулярен плоскости равных амплитуд и определяет изменение амплитуд. Векторы  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  могут быть и не параллельны.

Если векторы  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  параллельны (плоскости равных фаз и равных амплитуд совпадают), то плоская электромагнитная волна называется *однородной*. Если векторы  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  не параллельны (плоскости равных фаз и равных амплитуд не совпадают), то плоская волна называется *неоднородной*.

В отличие от однородной волны неоднородная волна имеет продольные, т. е. совпадающие с направлением распространения волны, составляющие вектора  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ .

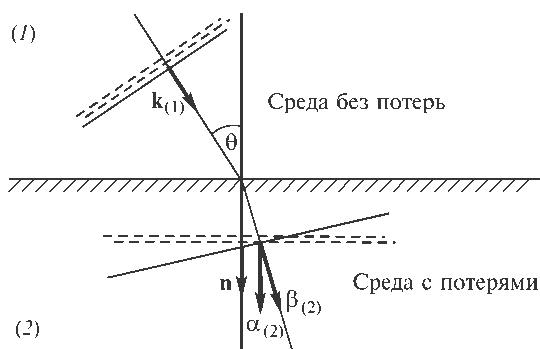


Рис. 4.1. К образованию неоднородных волн:

————— — плоскость равных фаз; ===== — плоскость равных амплитуд

Неоднородные плоские волны образуются при наклонном падении волны на границу раздела двух сред. При этом векторы  $\alpha$  и  $\beta$  по величине и направлению определяются не только параметрами среды, в которой волна распространяется, и частотой поля, но и характером возбуждения волны.

Например, плоская однородная волна падает на границу раздела двух сред. Первая среда — без потерь, вторая — с потерями (рис. 4.1). Если фазовая скорость во второй среде меньше, чем в первой, то плоскость равных фаз изменит направление (угол, образованный вектором  $\beta_{(2)}$  и нормалью к плоскости раздела, направленной во вторую среду, уменьшается). Очевидно, что затухание поля определяется расстоянием от плоскости раздела. В этом случае вектор  $\alpha_{(2)}$  перпендикулярен плоскости раздела. Во второй среде с потерями распространяется плоская неоднородная волна.

**Обе среды линейные и без потерь.** Пусть две однородных изотропных среды, из которых первая характеризуется параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$ , а вторая  $\epsilon_2, \mu_2$ , разделены плоской границей, совпадающей с плоскостью  $x_1Ox_2$  (рис. 4.2).

В первой среде под углом  $\theta$  распространяется плоская однородная волна с постоянной распространения

$$k_{(1)} = \omega \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}.$$

Угол  $\theta$ , образованный нормалью к плоскости раздела и направлением распространения волны, называется *углом падения* (за положительное направление нормали принимаем направление, совпадающее с осью  $x_3$ ).

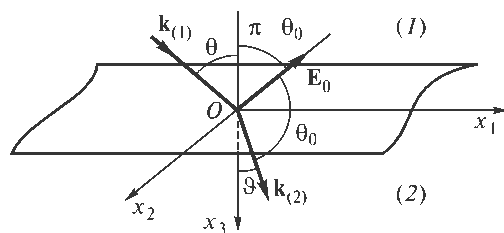


Рис. 4.2. Наклонное падение на границу раздела двух сред (1) и (2)

Плоскость, проведенная через нормаль к плоскости раздела и направление распространения волны, называется *плоскостью падения*.

Волна, распространяющаяся от источника, называется *падающей*, а поле ее первичным. Это поле вызывает колебания свободных и связанных зарядов, находящихся на плоскости раздела. Колебания свободных и связанных зарядов являются причиной возникновения вторичного поля, распространяющегося в первую среду — поля *отраженной* волны, и во вторую среду — поля *прошедшей* или преломленной волны.

Угол, образованный направлением распространения отраженной волны и направлением нормали к плоскости раздела, называется *углом отражения* (угол  $\pi - \theta_0$ ); угол, образованный направлением распространения преломленной волны и нормалью, — *углом преломления* (угол  $\vartheta$ ).

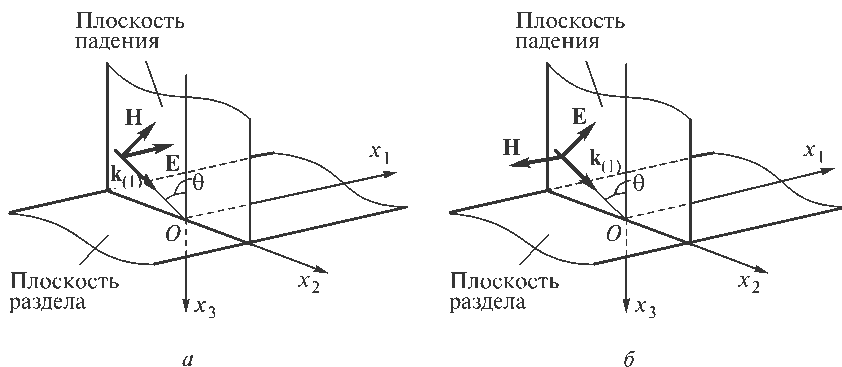
Поле в первой среде  $\mathbf{E}_{(1)}$ ,  $\mathbf{H}_{(1)}$  определяется как сумма падающей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и отраженной  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  волн:

$$\mathbf{E}_{(1)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0.$$

Поле во второй среде  $\mathbf{E}_{(2)}$ ,  $\mathbf{H}_{(2)}$  определяется полем преломленной волны.

Рассмотрим случай горизонтальной и вертикальной линейной поляризации, так как все возможные другие случаи можно представить как суперпозицию этих двух. Если вектор  $\mathbf{E}$  параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *горизонтальной*. При этом вектор  $\mathbf{H}$  лежит в плоскости падения. Если вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения, а вектор  $\mathbf{H}$  параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *вертикальной*. Случай произвольной линейной поляризации можно представить как сумму горизонтальной и вертикальной поляризаций, совпадающих по фазе во времени; круговую поляризацию — как сумму вертикальной и горизонтальной линейных поляризаций, одинаковых по амплитуде и сдвинутых по фазе во времени на  $\pi/2$ ; эллиптическую поляризацию — как сумму вертикальной и горизонтальной поляризаций разных по амплитуде и сдвинутых по фазе во времени.

В случае линейной поляризации для упрощения решения удобно совместить другую координатную плоскость, например  $x_2Ox_3$  (рис. 4.3), с плоскостью паде-



**Рис. 4.3.** Наклонное падение:

*а* — при горизонтальной поляризации; *б* — при вертикальной поляризации

ния. Тогда в случае горизонтальной поляризации с осью  $x_1$  совпадает направление вектора  $\mathbf{E}$ , в случае вертикальной — направление вектора  $\mathbf{H}$ , и выражения, определяющие поле, упростятся. Вектор  $\mathbf{k}_{(1)}$  имеет только две проекции

$$\mathbf{k}_{(1)} = (0, k_{(1)} \sin \theta, k_{(1)} \cos \theta),$$

скалярное произведение векторов  $\mathbf{k}_{(1)}$  и  $\mathbf{r}$  имеет вид

$$(\mathbf{k}_{(1)}\mathbf{r}) = k_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta).$$

Рассмотрим случай горизонтальной поляризации. Поле падающей волны определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{j[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)]}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= H_m (\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta) e^{j[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)]}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В среде без потерь векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  совпадают по фазе:

$$E_m = Z_{01} H_m,$$

где  $Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}}$  — волновое сопротивление первой среды.

Поскольку поле падающей волны не зависит от координаты  $x_1$ , то из условия симметрии очевидно, что вторичное поле не зависит от координаты  $x_1$ , т. е. отраженная и преломленная волны также распространяются в плоскости падения.

Пусть постоянная распространения отраженной волны равна

$$k_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}},$$

тогда выражения для поля отраженной волны имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_0 &= \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m0} e^{j[\omega_0 t - k_0(x_2 \sin \theta_0 + x_3 \cos \theta_0)]}, \\ \dot{\mathbf{H}}_0 &= \dot{H}_{m0} (\mathbf{e}_2 \cos \theta_0 - \mathbf{e}_3 \sin \theta_0) e^{j[\omega_0 t - k_0(x_2 \sin \theta_0 + x_3 \cos \theta_0)]}, \\ \dot{E}_{m0} &= \dot{H}_{m0} Z_{01} \end{aligned} \quad (4.2)$$

( $\dot{E}_{m0}$  и  $\dot{H}_{m0}$  — учитывают возможный сдвиг по фазе отраженной волны относительно падающей).

Поле прошедшей волны имеет вид

$$\begin{aligned} k_{(2)} &= \omega_2 \sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}; \\ \dot{\mathbf{E}}_{(2)} &= \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m(2)} e^{j[\omega_2 t - k_{(2)}(x_2 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta)]}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{(2)} &= \dot{H}_{m(2)} (\mathbf{e}_2 \cos \vartheta - \mathbf{e}_3 \sin \vartheta) e^{j[\omega_2 t - k_{(2)}(x_2 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta)]}, \\ \dot{E}_{m(2)} &= Z_{02} \dot{H}_{m(2)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}}$  — волновое сопротивление второй среды ( $\dot{H}_{m(2)}$  и  $\dot{E}_{m(2)}$  учитывают возможный сдвиг по фазе прошедшей волны относительно падающей).

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух сред

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)} \text{ при } x_3 = 0$$

с учетом выражений (4.1)—(4.3) получим

$$E_m e^{j(\omega t - k_{(1)} x_2 \sin \theta)} + \dot{E}_{m0} e^{j(\omega_0 t - k_0 x_2 \sin \theta_0)} = E_{m(2)} e^{j(\omega_2 t - k_{(2)} x_2 \sin \vartheta)}. \quad (4.4)$$

Поскольку амплитуды  $E_m$ ,  $\dot{E}_{m0}$  и  $\dot{E}_{m(2)}$  от  $t$  и  $x_2$  не зависят, то для выполнения граничного условия (4.4) в любой момент времени  $t$  в любой точке плоскости раздела необходимо, чтобы

$$\omega = \omega_0 = \omega_2, \quad (4.5)$$

т. е. частоты падающей, отраженной и прошедшей волн были равны, и

$$k_{(1)} \sin \theta = k_0 \sin \theta_0 = k_{(2)} \sin \vartheta. \quad (4.6)$$

Из соотношения (4.6) следуют два закона Снеллиуса.

1. Угол падения равен углу отражения

$$\theta = \pi - \theta_0. \quad (4.7)$$

2. Углы падения и преломления связаны соотношением

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \theta} = \frac{k_{(1)}}{k_{(2)}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}, \quad (4.8)$$

где  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  — коэффициенты преломления соответственно первой и второй сред;  $n_{12}$  — относительный коэффициент преломления.

На основании (4.5) и (4.6) выражение (4.4) может быть переписано в виде

$$E_m + \dot{E}_{m0} = \dot{E}_{m(2)}. \quad (4.9)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля на границе раздела двух диэлектрических сред без потерь (когда  $J_{\text{пов}} = 0$ )

$$H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)} \text{ при } x_3 = 0,$$

учитывая уравнения (4.1)—(4.3), (4.5) и (4.6), получаем

$$H_m \cos \theta + \dot{H}_{m0} \cos \theta_0 = \dot{H}_{m(2)} \cos \vartheta.$$

Согласно первому закону Снеллиуса (4.7),  $\theta = \pi - \theta_0$ , тогда

$$(H_m - \dot{H}_{m0}) \cos \theta = H_{m(2)} \cos \vartheta \quad (4.10)$$

или

$$(E_m - \dot{E}_{m0}) \cos \theta = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \dot{E}_{m(2)} \cos \vartheta. \quad (4.11)$$

Явления отражения волны и прохождения волны через границу раздела двух сред при горизонтальной поляризации можно характеризовать коэффициентами отражения  $\dot{\Gamma}_E$  и прохождения  $\dot{P}_E$  по электрическому полю:

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m}; \quad \dot{P}_E = \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m}. \quad (4.12)$$

Преобразуя (4.9) и (4.11), с помощью (4.12) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \dot{\Gamma}_E &= \dot{P}_E; \\ (1 - \dot{\Gamma}_E) \cos \theta &= \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \dot{P}_E \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Решая ее относительно  $\dot{\Gamma}_E$  и  $\dot{P}_E$ , находим

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_E &= \frac{Z_{02} \cos \theta - Z_{01} \cos \vartheta}{Z_{02} \cos \theta + Z_{01} \cos \vartheta}; \\ \dot{P}_E &= \frac{2Z_{02} \cos \theta}{Z_{02} \cos \theta + Z_{01} \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнения (4.13) называются *формулами Френеля*.

В случае вертикальной поляризации поле падающей волны определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= E_m (\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta) e^{j[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)]}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -\mathbf{e}_1 H_m e^{j[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)]}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Сравнивая выражения (4.14) и (4.1), видим, что уравнения, описывающие случай вертикальной поляризации, можно получить из уравнений для горизонтальной поляризации при замене

$$\dot{\mathbf{E}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}}, \quad H_m \Leftrightarrow E_m.$$

При этом (4.9) и (4.10) при замене будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_m + \dot{H}_{m0} &= \dot{H}_{m(2)}; \\ (E_m - \dot{E}_{m0}) \cos \theta &= \dot{E}_{m(2)} \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

или

$$(H_m - \dot{H}_{m0}) \cos \theta = \dot{H}_{m(2)} \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cos \vartheta. \quad (4.16)$$

В случае вертикальной поляризации явления на границе раздела можно характеризовать коэффициентами отражения и прохождения по магнитному полю

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{\dot{H}_{m0}}{H_m}; \quad \dot{P}_H = \frac{\dot{H}_{m(2)}}{H_m}. \quad (4.17)$$

Преобразуя (4.15) и (4.16) с помощью (4.17), получаем

$$1 + \dot{\Gamma}_H = \dot{P}_H;$$

$$(1 - \dot{\Gamma}_H) \cos \theta = \dot{P}_H \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cos \vartheta.$$

Отсюда формулы Френеля для случая вертикальной поляризации имеют вид

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{Z_{01} \cos \theta - Z_{02} \cos \vartheta}{Z_{01} \cos \theta + Z_{02} \cos \vartheta};$$

$$\dot{P}_H = \frac{2Z_{01} \cos \theta}{Z_{01} \cos \theta + Z_{02} \cos \vartheta}. \quad (4.18)$$

Поскольку все величины, входящие в правые части выражений (4.13) и (4.18) действительны, то коэффициенты отражения и прохождения действительны. Очевидно, что фаза прошедшей волны в случаях горизонтальной и вертикальной поляризации совпадает с фазой падающей волны. Отраженная волна совпадает по фазе с падающей волной или сдвинута на  $180^\circ$ . Так, в случае горизонтальной поляризации фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей волны, если

$$Z_{02} \cos \theta > Z_{01} \cos \vartheta.$$

В противном случае фаза меняется скачком на  $180^\circ$ . Аналогичное соотношение имеет место в случае вертикальной поляризации.

Вернемся к случаю горизонтальной поляризации и рассмотрим поле в первой среде, представляющее собой суперпозицию падающего и отраженного полей

$$\dot{E}_{m(1)} = E_m + \dot{E}_{m0}.$$

Подставляя сюда выражения (4.1), (4.2) и (4.12), получаем

$$\dot{E}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + \mathbf{e}_1 \Gamma_E E_m e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta_0 + x_3 \cos \theta_0)}.$$

Поскольку  $\theta = \pi - \theta_0$ ,

$$\dot{E}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m [e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + \Gamma_E e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta - x_3 \cos \theta)}].$$

Прибавляя и вычитая выражение

$$\Gamma_E e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)}$$



и группируя члены, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m [(1 - \Gamma_E) e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + 2\Gamma_E \cos(k_{(1)} x_3 \cos \theta) e^{-jk_{(1)} x_2 \sin \theta}].$$

Таким образом, поле в первой среде можно представить как сумму двух волн, одна из которых распространяется вдоль направления падения с амплитудой  $E_m(1 - \Gamma_E)$ , вторая — вдоль плоскости раздела в направлении оси  $x_2$  с амплитудой, изменяющейся по закону косинуса вдоль оси  $x_3$ . Очевидно, что поле в первой среде является неоднородным.

Поле во второй среде является однородным.

**Обе среды линейные, но вторая — с потерями.** Рассмотрим прохождение плоской волны через плоскости раздела из среды без потерь в среду с потерями (см. рис. 4.1). Распространение преломленной волны характеризуется множителем распространения

$$e^{-\dot{\mathbf{k}}_{(2)} \mathbf{r}},$$

где  $\dot{\mathbf{k}}_{(2)} = \boldsymbol{\beta}_{(2)} - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$  и в общем случае векторы  $\boldsymbol{\beta}_{(2)}$  и  $\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$  не параллельны, но вследствие симметрии возбуждения преломленной волны лежат в плоскости падения. Если плоскость падения совпадает с плоскостью  $x_2 O x_3$ , то скалярное произведение векторов  $\dot{\mathbf{k}}_{(2)}$  и  $\mathbf{r}$  равно

$$(\dot{\mathbf{k}}_{(2)} \mathbf{r}) = \dot{k}_{(2)} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}_{(2)} \sin \vartheta_\beta - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)} \sin \vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}} x_2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_{(2)} \cos \vartheta_\beta - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)} \cos \vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}} x_3 \right).$$

Введем комплексные углы

$$\cos \dot{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{\beta}_{(2)} \cos \vartheta_\beta - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)} \cos \vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}},$$

$$\sin \dot{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{\beta}_{(2)} \sin \vartheta_\beta - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)} \sin \vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}}.$$

Здесь  $\vartheta_\beta$  — угол между нормалью к плоскости раздела и вектором  $\boldsymbol{\beta}_{(2)}$ ;  $\vartheta_\alpha$  — угол между нормалью к плоскости раздела и вектором  $\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$ .

Второй закон Снеллиуса для данного случая имеет вид

$$k_{(1)} \sin \theta = \dot{k}_{(2)} \sin \dot{\vartheta}.$$

Отсюда

$$k_{(1)} \sin \theta = \boldsymbol{\beta}_{(2)} \sin \vartheta_\beta - j\boldsymbol{\alpha}_{(2)} \sin \vartheta_\alpha,$$

т. е.  $\sin \vartheta_\alpha = 0$  или  $\vartheta_\alpha = 0$ , а

$$\sin \vartheta_\beta = \frac{k_{(1)} \sin \theta}{\boldsymbol{\beta}_{(2)}}.$$

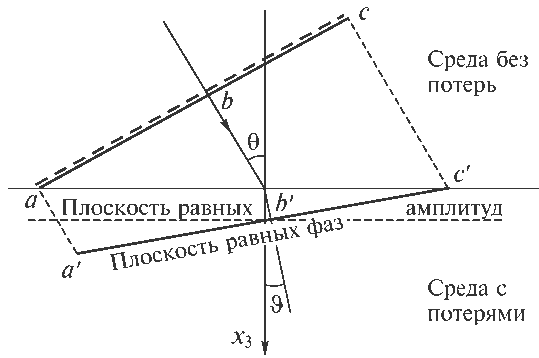


Рис. 4.4. Наклонное падение волны на границу со средой с потерями

Если потери во второй среде малы, то  $k_{(2)} \approx \beta_{(2)}$  и

$$\vartheta_{\beta} \approx \vartheta.$$

В этом случае положение плоскости равных фаз в пространстве определяется выражением

$$x_2 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta = \text{const},$$

а положение плоскости равных амплитуд — выражением

$$x_3 = \text{const}.$$

Плоскости равных фаз и равных амплитуд неоднородной волны, распространяющейся в среде с потерями, приведены на рис. 4.4.

Физически расщепление плоскостей можно представить следующим образом. Падающая волна возбуждает колебания свободных и связанных зарядов, находящихся на плоскости раздела. Амплитуда этих колебаний одинакова на всей плоскости раздела.

Рассмотрим перемещение волны в пространстве (рис. 4.4). Плоскость  $abc$  является плоскостью равных фаз и равных амплитуд. Так как точка  $a$  ввиду различия фазовых скоростей в первой и второй средах пройдет меньший путь ( $v_{\phi(2)} < v_{\phi(1)}$ ), чем точка  $c$ , то во второй среде плоскость равных фаз изменит свое положение в пространстве и совпадет с плоскостью  $a'b'c'$ . Фазы точек  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$  будут одинаковыми, но амплитуды колебаний в этих точках будут различны, так как пути, пройденные этими точками, в среде с потерями различными, следовательно, будет различно затухание амплитуд. Рассматривая колеблющиеся заряды как источники сферических волн, видно, что плоскости равных амплитуд параллельны плоскости раздела, плоскости равных фаз и равных амплитуд не совпадают.

Среда с потерями характеризуется комплексным волновым сопротивлением, и, следовательно, коэффициенты отражения и преломления, определяемые выражениями (4.13) и (4.18), являются комплексными. Таким образом, отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей волны. Причем этот

сдвиг для случаев горизонтальной и вертикальной поляризаций будет различным, и при падении на границу среды с потерями волны произвольной линейной поляризации отраженная и преломленная волны будут поляризованы эллиптически. Эллиптичность зависит не только от параметров сред, но и от угла падения.

При падении на поверхность раздела воздух — вода волны произвольной линейной поляризации отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию.

**Обе среды без потерь, но первая — линейная, вторая — нелинейная.** Если обе среды являются диэлектриками, то электромагнитный процесс в этих средах будет описываться согласно (2.9) уравнениями

$$\Delta \dot{\mathbf{E}}(n\omega) + (n\omega)^2 \epsilon_a^n(n\omega) \mu_0 \dot{\mathbf{E}}(n\omega) = -(n\omega)^2 \mu_0 \dot{\mathbf{P}}^{\text{нл}}(n\omega), \quad (4.19)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В первом нелинейном приближении (см. § 3.1) поле  $\mathbf{E}_{(2)}(\omega)$  возбуждает в нелинейной среде волну нелинейной поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$ , определяемую выражением

$$\dot{\mathbf{P}}_{(2)}(2\omega) = \mathbf{P}_{m(2)}(2\omega) e^{-j[2\omega t - \mathbf{k}_p(2\omega)\mathbf{r}]},$$

где  $\mathbf{k}_p(2\omega)$  — постоянная распространения волны нелинейной поляризации, равная

$$k_p(2\omega) = 2k_{(2)}(\omega) = 2\omega \sqrt{\epsilon_{a2}^n(\omega) \mu_0}. \quad (4.20)$$

Амплитуда второй гармоники волны поляризации  $P_{m(2)}(2\omega)$  согласно (2.3) с учетом (4.12) определяется выражением

$$P_{m(2)}(2\omega) = \epsilon_0 \chi_2(2\omega) E_{m(2)}^2(\omega) = \epsilon_0 \chi_2(2\omega) P_E^2(\omega) E_m^2(\omega). \quad (4.21)$$

Волна поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$  является источником поля  $\mathbf{E}_{(2)}(2\omega)$ . Согласно волновому уравнению (4.19), ограничиваясь низшим нелинейным приближением для второй гармоники, получим

$$\Delta \dot{\mathbf{E}}(2\omega) + 4\omega^2 \epsilon_a^n(2\omega) \mu_0 \dot{\mathbf{E}}(2\omega) = -4\omega^2 \mu_0 \dot{\mathbf{P}}_{(2)}(2\omega), \quad (4.22)$$

где

$$2\omega \sqrt{\epsilon_a^n(2\omega) \mu_0} = k_{(2)}(2\omega)$$

— постоянная распространения волны второй гармоники в нелинейной среде.

Решение неоднородного уравнения (4.22) равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Очевидно, что в изотропной среде направление вектора  $\mathbf{E}_{(2)}(\omega)$  совпадает с направлением второй гармоники вектора поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$  и направлением второй гармоники вектора напряженности поля  $\mathbf{E}_{(2)}(2\omega)$ . Таким образом, аналогично решению уравнения (3.12) получим

$$\mathbf{E}_{m(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_1 E'_{m(2)}(2\omega) e^{-jk_{(2)}(2\omega)r} + \mathbf{e}_1 \frac{4\omega^2 \mu_0 P_{m(2)}(2\omega)}{k_p^2(2\omega) - k_{(2)}^2(2\omega)} e^{-jk_p(2\omega)r}$$

или

$$E_{m(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_1 E'_{m(2)}(2\omega) e^{-jk_{(2)}(2\omega)[x_2 \sin \vartheta(2\omega) + x_3 \cos \vartheta(2\omega)]} + \mathbf{e}_1 \frac{P_{m(2)}(2\omega)}{\varepsilon_{a2}(\omega) - \varepsilon_{a2}(2\omega)} e^{-jk_p(2\omega)[x_2 \sin \vartheta_p(2\omega) + x_3 \cos \vartheta_p(2\omega)]}, \quad (4.23)$$

где  $\vartheta(2\omega)$  — угол между положительным направлением оси  $x_3$  и направлением распространения волны  $\mathbf{E}_{(2)}(2\omega)$ ;  $\vartheta_p(2\omega)$  — угол между положительным направлением оси  $x_3$  и направлением распространения волны поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$ .

Магнитная составляющая поля удвоенной частоты во второй среде определяется выражением

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{m(2)}(2\omega) &= j \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{m(2)}(2\omega)}{2\omega \mu_0} = \\ &= \frac{E'_{m(2)}(2\omega)}{Z_{02}(2\omega)} [\mathbf{e}_2 \cos \vartheta(2\omega) - \mathbf{e}_3 \sin \vartheta(2\omega)] e^{-jk_{(2)}(\omega)[x_2 \sin \vartheta(2\omega) + x_3 \cos \vartheta(2\omega)]} + \\ &+ \frac{P_{m(2)}(2\omega)}{Z_{02}[\varepsilon_{a2}(\omega) - \varepsilon_{a2}(2\omega)]} [\mathbf{e}_2 \cos \vartheta_p(2\omega) - \mathbf{e}_3 \sin \vartheta_p(2\omega)] \times \\ &\times e^{-jk_p(2\omega)[x_2 \sin \vartheta_p(2\omega) + x_3 \cos \vartheta_p(2\omega)]}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

На границе раздела двух сред согласно (2.18) выполняются условия

$$E_{\tau(1)}(2\omega) = E_{\tau(2)}(2\omega); \quad H_{\tau(1)}(2\omega) = H_{\tau(2)}(2\omega).$$

Поскольку граничные условия удовлетворяются в любой момент времени, то отсюда следует, что в первой среде существует «отраженная» волна второй гармоники. Поле «отраженной» волны второй гармоники описывается выражением

$$\mathbf{E}_0(2\omega) = \mathbf{e}_1 E_{m0} e^{j\{2\omega t - k_0(2\omega)[x_2 \sin \theta_0(2\omega) + x_3 \cos \theta_0(2\omega)]\}}, \quad (4.25)$$

где  $k_0(2\omega) = \sqrt{\varepsilon_{a1}^n(2\omega) \mu_0}$  — постоянная распространения волны;  $\theta_0(2\omega)$  — угол отражения.

Найдем магнитную составляющую поля «отраженной» волны второй гармоники:

$$\dot{\mathbf{H}}_0(2\omega) = \frac{j \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_0(2\omega)}{2\omega \mu_0} =$$

$$= \frac{E_{m0}(2\omega)}{Z_{01}(2\omega)} [\mathbf{e}_2 \cos \theta_0(2\omega) - \mathbf{e}_3 \sin \theta_0(2\omega)] e^{j\{2\omega t - k_0(2\omega)[x_2 \sin \theta_0(2\omega) + x_3 \cos \theta_0(2\omega)]\}}. \quad (4.26)$$

На границе раздела (при  $x_3 = 0$ ) из условия непрерывности касательных составляющих электрического поля, согласно выражениям (4.23) и (4.25), для второй гармоники получим

$$\begin{aligned} E'_{m(2)}(2\omega) e^{-jk_{(2)}(2\omega) \sin \vartheta(2\omega) x_2} + \frac{P_{m(2)}(2\omega)}{\epsilon_{a2}(\omega) - \epsilon_{a2}(2\omega)} e^{-jk_p(2\omega) \sin \vartheta_p(2\omega) x_2} = \\ = E_{m0}(2\omega) e^{-jk_0(2\omega) \sin \theta_0(2\omega) x_2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Поскольку граничные условия выполняются в любой точке границы раздела, то равенство (4.27) выполняется при любом значении  $x_2$ , если

$$k_{(2)}(2\omega) \sin \vartheta(2\omega) = k_p(2\omega) \sin \vartheta_p(2\omega) = k_0(2\omega) \sin \theta_0(2\omega),$$

а так как

$$k_p(2\omega) \sin \vartheta_p(2\omega) = 2k_{(2)}(\omega) \sin \vartheta = 2k_{(1)}(\omega) \sin \theta,$$

то

$$2k_{(1)}(\omega) \sin \theta = k_p(2\omega) \sin \vartheta_p(2\omega) = k_{(2)}(2\omega) \sin \vartheta(2\omega) = k_0(2\omega) \sin \theta_0(2\omega), \quad (4.28)$$

где

$$k_{(1)}(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon_{a1}(\omega) \mu_0}; \quad k_{(2)}(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon_{a2}(\omega) \mu_0};$$

$$k_p(2\omega) = 2k_{(2)}(\omega); \quad k_{(2)}(2\omega) = 2\omega \sqrt{\epsilon_{a2}(2\omega) \mu_0};$$

$$k_0(2\omega) = 2\omega \sqrt{\epsilon_{a1}(2\omega) \mu_0}.$$

Исходя из (4.28), получаем выражения, представляющие собой *модифицированные законы Снеллиуса*

$$\sin \vartheta(2\omega) = \frac{2k_{(1)}(\omega)}{k_{(2)}(2\omega)} \sin \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_2(2\omega)}} \sin \theta;$$

$$\sin \vartheta_p(2\omega) = \frac{2k_{(1)}(\omega)}{k_p(2\omega)} \sin \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_2(\omega)}} \sin \theta; \quad (4.29)$$

$$\sin \theta_0(2\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_1(2\omega)}} \sin \theta.$$

Таким образом, в общем случае направление распространения волны второй гармоники в нелинейной среде  $\mathbf{E}_{(2)}(2\omega)$  отличается от совпадающих направлений распространения преломленной волны основной частоты  $\mathbf{E}_{(2)}(\omega)$  и волны нелиней-

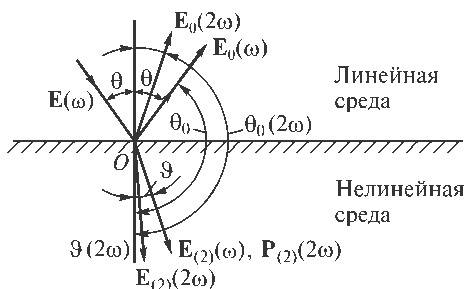


Рис. 4.5. Наклонное падение волны на границу с нелинейной средой

ной поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$ ; направление распространения «отраженной» волны второй гармоники  $\mathbf{E}_0(2\omega)$ , возникающей в первой (линейной) среде, не совпадает с направлением распространения отраженной волны основной частоты  $\mathbf{E}_0(\omega)$  (рис. 4.5).

Направление распространения поля второй гармоники в линейной и нелинейной средах зависит от их дисперсионных свойств.

Если первая среда — вакуум (линейная недиспергирующая среда), то согласно (4.29) получим

$$\begin{aligned} \sin \vartheta(2\omega) &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)}}; \\ \sin \vartheta_P(2\omega) &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)}}; \\ \sin \theta_0(2\omega) &= \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.30)$$

т. е. «отраженная» волна второй гармоники  $\mathbf{E}_0(2\omega)$  в вакууме распространяется в том же направлении, что и отраженная волна основной частоты  $\mathbf{E}_0(\omega)$ . Волна нелинейной поляризации  $\mathbf{P}_{(2)}(2\omega)$  в нелинейной среде распространяется в том же направлении, что и преломленная волна поля основной частоты  $\mathbf{E}_{(2)}(\omega)$ . Но направление распространения волны второй гармоники поля  $\mathbf{E}_{(2)}(2\omega)$  в общем случае, когда  $\varepsilon_2(2\omega) \neq \varepsilon_2(\omega)$ , не совпадает с направлением распространения  $\mathbf{E}_{(2)}(\omega)$ , и лишь в случае  $\varepsilon_2(2\omega) = \varepsilon_2(\omega)$  или нормального падения направления распространения этих волн совпадают.

Соотношения между амплитудами волн вторых гармоник также получаются из граничных условий (2.18):

$$\begin{aligned} E_{\tau(1)}(2\omega) &= E_{\tau(2)}(2\omega); \\ H_{\tau(1)}(2\omega) &= H_{\tau(2)}(2\omega) \end{aligned}$$

или согласно (4.27) и выражениям (4.23)—(4.26), (4.20) и (4.21)

$$E_{m(2)}(2\omega) - E_{m0}(2\omega) = -\frac{4\omega^2\mu_0\varepsilon_0\chi_2(2\omega)P_E^2(\omega)}{4k_{(2)}^2(\omega) - k_{(2)}^2(2\omega)} E_m^2(\omega); \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)}E_{m(2)}(2\omega) \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)}E_{m0}(2\omega) \cos \theta(2\omega) = \\ = -\frac{4\omega^2\mu_0\varepsilon_0\chi_2(2\omega)\sqrt{\varepsilon_2(\omega)}P_E^2(\omega)}{4k_{(2)}^2(\omega) - k_{(2)}^2(2\omega)} E_m^2(\omega) \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где  $\theta(2\omega) = \pi - \theta_0(2\omega)$ .

Решая эти уравнения совместно, получаем выражения для амплитуд «отраженной» и «преломленной» волн второй гармоники

$$\begin{aligned} E_{m0}(2\omega) = E_m^2(\omega) \frac{\chi_2(2\omega)P_E^2(\omega)}{\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_2(2\omega)} \times \\ \times \frac{\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta}{\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)} \cos \theta(2\omega)}; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} E_{m(2)}(2\omega) = -E_m^2(\omega) \frac{\chi_2(2\omega)P_E^2(\omega)}{\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_2(2\omega)} \times \\ \times \frac{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta(\omega) - \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)} \cos \theta(2\omega)}{\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)} \cos \theta(2\omega)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

которые представляют собой *модифицированные формулы Френеля* для поля горизонтальной поляризации.

Умножая числитель и знаменатель выражения (4.33) на выражение  $\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta$  с учетом законов преломления (4.8) и (4.29), получаем:

$$E_{m0}(2\omega) = E_m^2(\omega) \frac{\chi_2(2\omega)P_E^2(\omega)}{\left[\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta\right] \left[\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)} \cos \theta(2\omega)\right]}.$$

Таким образом, амплитуда «отраженной» волны практически не зависит от рассогласования фазовых скоростей волн, распространяющихся в нелинейном диэлектрике. «Отраженное» поле второй гармоники определяется поверхностным слоем нелинейной среды толщиной порядка длины волны. Так как преобразование энергии на границе раздела мало, реакцией поверхностного слоя на падающую волну можно пренебречь и амплитуду падающей волны можно считать постоянной.

Полное поле второй гармоники в нелинейной среде определяется выражением (4.23). В соответствии с выражением (4.29)

$$\mathbf{k}_P(2\omega)\mathbf{r} - \mathbf{k}_2(2\omega)\mathbf{r} = \frac{2\omega}{c} x_3 \left[ \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) \right],$$

следовательно, с учетом (4.31) выражение (4.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_1 \left\{ E_{m0}(2\omega) + \frac{P_{m(2)}(2\omega)}{\varepsilon_{a2}(\omega) - \varepsilon_{a2}(2\omega)} \times \right. \\ \left. \times \left[ e^{-j\frac{2\omega}{c}x_2[\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega)]} - 1 \right] \right\} \times \\ \times e^{j[2\alpha r - k_{(2)}(2\omega)[x_2 \sin \vartheta(2\omega) + x_3 \cos \vartheta(2\omega)]}. \end{aligned}$$

Для значений  $x_3$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{2\omega}{c} x_3 \left[ \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) \right] \ll 1,$$

согласно приближенной формуле

$$e^{-x} \approx 1 - x$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_1 \left\{ E_{m0}(2\omega) - j \frac{P_{m(2)}(2\omega)}{\varepsilon_{a2}(\omega) - \varepsilon_{a2}(2\omega)} \frac{2\omega}{c} x_3 \times \right. \\ \left. \times \left[ \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) \right] \right\} e^{j[2\alpha r - k_{(2)}(2\omega)r]}. \end{aligned}$$

Умножим числитель и знаменатель полученного выражения на  $\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega)$  и учтем выражение (4.29):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_1 \left\{ E_{m0}(2\omega) - j \frac{P_{m(2)}(2\omega) \frac{2\omega}{\varepsilon_0 c} x_3}{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega) + \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega)} \right\} \times \\ \times e^{j[2\alpha r - k_{(2)}(2\omega)r]}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Таким образом, начальная амплитуда «преломленной» волны второй гармоники (при  $x_3 = 0$ ) равна амплитуде «отраженной» волны; составляющая, зависящая от нелинейной поляризации, возрастает пропорционально расстоянию от границы раздела при согласовании фазовых скоростей или при согласовании нормальных составляющих скоростей:

$$\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega) = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_P(2\omega), \quad (4.36)$$

так как касательные составляющие согласованы в силу граничных условий.

Соотношение (4.36) выполняется при

$$\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}; \quad \cos \vartheta(2\omega) = \cos \vartheta_P(2\omega),$$



т. е. при условии волнового синхронизма

$$k_p(2\omega) = k_{(2)}(2\omega).$$

Поскольку практически все среды обладают дисперсией и

$$\varepsilon_2(\omega) \neq \varepsilon_2(2\omega),$$

то согласование возможно лишь в анизотропных средах с двойным лучепреломлением.

Если условия волнового синхронизма не выполнены, то амплитуда напряженности поля будет осциллировать с изменением значения  $x_3$ . Расстояние по оси  $x_3$  между соседними максимумами напряженности поля определяется из условия

$$l \frac{2\omega}{c} [\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \cos \vartheta_p(2\omega) - \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} \cos \vartheta(2\omega)] = 2\pi.$$

Это расстояние соответствует удвоенной длине когерентности.

«Преломленная» волна второй гармоники представляет собой неоднородную плоскую волну. Плоскости равных амплитуд не совпадают с плоскостями равных фаз, параллельны плоскости раздела и определяются выражением

$$x_3 = \text{const.}$$

Амплитуда напряженности поля «преломленной» волны второй гармоники во много раз больше амплитуды напряженности поля «отраженной» волны второй гармоники, так как в создании поля «отраженной» волны участвует лишь поверхностный слой нелинейной среды толщиной порядка длины волны, а в создании «преломленной» волны по мере ее распространения принимают участие все новые и новые диполи нелинейной среды.

## 4.2. Полное прохождение электромагнитного поля при наклонном падении на границу раздела линейных сред без потерь. Угол Брюстера

В случае горизонтальной линейной поляризации отраженная волна отсутствует, если  $\Gamma_E = 0$  или согласно формулам Френеля (4.13)

$$Z_{02} \cos \theta - Z_{01} \cos \vartheta = 0.$$

Учитывая закон преломления Снеллиуса (4.8), получаем

$$Z_{02} \cos \theta - Z_{01} \sqrt{1 - \frac{k_{(1)}^2}{k_{(2)}^2} \sin^2 \theta} = 0,$$

или

$$\sin^2 \theta = \frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \mu_2/\mu_1}. \quad (4.37)$$

Таким образом, в случае сред без потерь для полного прохождения волны необходимо направлять ее под углом, определяемым выражением (4.37). Но для обычных диэлектриков  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  и выражение (4.37) не имеет смысла, горизонтально-поляризованная часть поля отражается при любом угле падения.

В случае вертикальной линейной поляризации условием полного прохождения волны является равенство

$$\Gamma_H = 0.$$

Тогда в соответствии с формулами Френеля (4.13)

$$Z_{02} \cos \vartheta - Z_{01} \cos \theta = 0.$$

Учитывая закон преломления Снеллиуса,

$$Z_{02} \sqrt{1 - \frac{k_{(1)}^2}{k_{(2)}^2} \sin^2 \theta} - Z_{01} \cos \theta = 0,$$

или

$$\sin^2 \theta = \frac{\mu_2 / \mu_1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_1}{\varepsilon_1 / \varepsilon_2 - \varepsilon_2 / \varepsilon_1}.$$

Для обычного диэлектрика

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

и

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{\varepsilon_1 / \varepsilon_2 + 1},$$

или

$$\theta = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (4.38)$$

Таким образом, линейная вертикально поляризованная волна не отражается при падении на границу раздела идеальных диэлектриков под углом, определяемым выражением (4.38) и называемым *углом Брюстера*. При падении под углом Брюстера волны произвольной линейной, круговой или эллиптической поляризации отраженная волна имеет горизонтальную поляризацию. Поэтому угол Брюстера называется также углом полной поляризации.

Угол преломления в данном случае определяется выражением

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta.$$

Учитывая (4.38) и исключая параметры среды, получаем

$$\sin \vartheta = \cos \theta,$$

или

$$\sin \vartheta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Отсюда

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ или } \vartheta + \theta = \frac{\pi}{2},$$

иначе отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

Угол Брюстера на радиочастотах для сред воздух — вода равен  $84^\circ$ , что близко к скользящему падению. Этим объясняется нерегулярность радиопередач над водными поверхностями.

Очевидно, что полного прохождения однородной волны не будет наблюдаться, если вторая среда обладает потерями, так как в этом случае угол падения должен быть комплексным, а однородная волна характеризуется действительным углом падения.

### 4.3. Полное отражение электромагнитного поля от границы раздела двух линейных сред без потерь

При переходе электромагнитной волны из более плотной в электромагнитном смысле среды в менее плотную, т. е. при условии  $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$  или  $n_{12} > 1$ , возможен такой угол падения, называемый критическим  $\theta_{\text{кр}}$ , при котором преломленная волна идет параллельно плоскости раздела, т. е. угол преломления

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Согласно закону преломления, критический угол падения определяется выражением

$$n_{12} \sin \theta_{\text{кр}} = 1 \text{ или } \theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n_{12}}. \quad (4.39)$$

При  $\theta > \theta_{\text{кр}}$

$$\sin \vartheta = n_{12} \sin \theta > 1,$$

угол преломления теряет геометрический смысл. В этом случае

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - n_{12}^2 \sin^2 \theta} = \pm j \left| \cos \vartheta \right|,$$

т. е.  $\cos \vartheta$  является мнимой величиной. Физический смысл имеет знак « $\leftarrow$ ».

Коэффициенты отражения и преломления, определяемые выражениями (4.13) и (4.18) даже в случае сред без потерь являются комплексными величинами.

В случае линейной горизонтальной поляризации

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{02} \cos \theta + jZ_{01} |\cos \dot{\vartheta}|}{Z_{02} \cos \theta - jZ_{01} |\cos \dot{\vartheta}|};$$

$$\dot{P}_E = \frac{2Z_{02} \cos \theta}{Z_{02} \cos \theta - jZ_{01} |\cos \dot{\vartheta}|},$$

в случае линейной вертикальной поляризации

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{Z_{01} \cos \theta + jZ_{02} |\cos \dot{\vartheta}|}{Z_{01} \cos \theta - jZ_{02} |\cos \dot{\vartheta}|};$$

$$\dot{P}_H = \frac{2Z_{01} \cos \theta}{Z_{01} \cos \theta - jZ_{02} |\cos \dot{\vartheta}|},$$

или

$$\dot{\Gamma}_E = e^{j\Psi_E}; \quad \dot{P}_E = P_E e^{j\frac{\Psi_E}{2}}; \quad \dot{\Gamma}_H = e^{j\Psi_H}; \quad \dot{P}_H = P_H e^{j\frac{\Psi_H}{2}},$$

где

$$\Psi_E = 2 \operatorname{arctg} \frac{Z_{01} |\cos \dot{\vartheta}|}{Z_{02} \cos \theta}; \quad P_E = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (Z_{01}/Z_{02})^2 |\cos \dot{\vartheta}|^2}};$$

$$\Psi_H = 2 \operatorname{arctg} \frac{Z_{02} |\cos \dot{\vartheta}|}{Z_{01} \cos \theta}; \quad P_H = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (Z_{02}/Z_{01})^2 |\cos \dot{\vartheta}|^2}}.$$

При линейной горизонтальной поляризации поле в первой среде определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + \mathbf{e}_1 E_m e^{-j[k_{(1)}(x_2 \sin \theta - x_3 \cos \theta - \Psi_E)]} = \\ &= \mathbf{e}_1 2E_m \cos \left( k_{(1)} x_3 \cos \theta + \frac{\Psi_E}{2} \right) e^{-j \left( k_{(1)} x_2 \sin \theta - \frac{\Psi_E}{2} \right)}; \end{aligned} \quad (4.40a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{m(1)} &= H_m (\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta) e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + \\ &+ H_m (-\mathbf{e}_2 \cos \theta - \mathbf{e}_3 \sin \theta) e^{-j[k_{(1)}(x_2 \sin \theta - x_3 \cos \theta) - \Psi_E]} = \\ &= \left[ -j\mathbf{e}_2 2H_m \cos \theta \sin \left( k_{(1)} x_3 \cos \theta + \frac{\Psi_E}{2} \right) - \right. \\ &\left. - \mathbf{e}_3 2H_m \sin \theta \cos \left( k_{(1)} x_3 \cos \theta + \frac{\Psi_E}{2} \right) \right] e^{-j \left( k_{(1)} x_2 \sin \theta - \frac{\Psi_E}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.40б)$$

Поле во второй среде при линейной горизонтальной поляризации

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 P_E E_m e^{-k_{(2)} |\cos \dot{\vartheta}| x_3} e^{-j \left( k_{(2)} x_2 \sin \dot{\vartheta} - \frac{\Psi_E}{2} \right)}; \\ \mathbf{H}_{m(2)} &= P_E H_m (-j\mathbf{e}_2 |\cos \dot{\vartheta}| - \mathbf{e}_3 \sin \dot{\vartheta}) e^{-k_{(2)} x_3 |\cos \dot{\vartheta}|} e^{-j \left( k_{(2)} x_2 \sin \dot{\vartheta} - \frac{\Psi_E}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Из полученных выражений (4.40а) и (4.40б) следует, что поле в первой среде распространяется вдоль плоскости раздела, в направлении оси  $x_2$ , так как составляющие вектора Пойнтинга

$$\Pi_{02} \neq 0, \text{ а } \Pi_{03} = 0$$

вследствие сдвига по фазе на  $90^\circ$  между составляющими поля  $E_{(1)1}$  и  $H_{(1)2}$ . В направлении, перпендикулярном плоскости раздела, движения энергии нет. В этом направлении распределение амплитуд происходит по закону стоячей волны. Длина стоячей волны

$$\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{k_{(1)} \cos \theta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}} \cos \theta},$$

т. е. длина стоячей волны зависит от угла падения.

При  $\theta \rightarrow \pi/2$   $\cos \theta \rightarrow 0$  и  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ . Плоскости равных амплитуд параллельны плоскости раздела. Причем есть плоскости, в которых значения амплитуд равны нулю, и есть плоскости, где они достигают максимума. Плоскости равных фаз перпендикулярны плоскости раздела и перемещаются в направлении  $x_2$ , на что указывает экспонента

$$e^{-j(k_{(1)} x_2 \sin \theta - \frac{\omega E}{2})}$$

Поле во второй среде также распространяется в направлении оси  $x_2$ , а амплитуда поля убывает по экспоненте в направлении оси  $x_3$ . Движения энергии в направлении оси  $x_3$  нет, так как  $\Pi_{03} = 0$  вследствие сдвига по фазе во времени на  $90^\circ$  между  $E_{(2)1}$  и  $H_{(2)2}$ . Волна, распространяющаяся во второй среде, называется *поверхностной*, ибо она распространяется вдоль поверхности, как бы прилипая к ней (рис. 4.6).

Затухание поля во второй среде в направлении оси  $x_3$  при отсутствии в ней истинного поглощения (среда без потерь) означает, что поток энергии не переходит во вторую среду ввиду полного отражения на плоскости раздела.

На рис. 4.7 показано разложение вектора Пойнтинга, иллюстрирующее отсутствие потока энергии в направлении оси  $x_3$ .

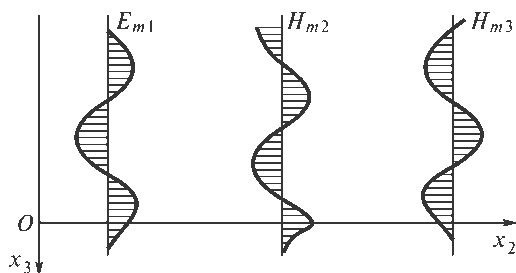


Рис. 4.6. Распределение поля при полном отражении и горизонтальной поляризации падающей волны

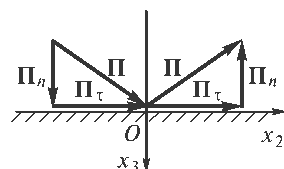


Рис. 4.7. Разложение вектора Пойнтинга на границе раздела при полном отражении волны

Распространение волны в первой среде характеризуется постоянной распространения  $k_0 = k_{(1)} \sin \theta$  и фазовой скоростью

$$v_{\phi(1)} = \frac{\omega}{k_{(1)} \sin \theta} > \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}},$$

большей скорости распространения волны в неограниченной среде с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$ .

Распространение поверхностной волны во второй среде характеризуется постоянной распространения  $k_0 = k_{(2)} \sin \vartheta$  и фазовой скоростью

$$v_{\phi(2)} = \frac{\omega}{k_{(2)} \sin \vartheta} < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}},$$

меньшей скорости распространения волны в неограниченной среде с параметрами  $\epsilon_2, \mu_2$ . Учитывая, что

$$k_{(1)} \sin \theta = k_{(2)} \sin \vartheta,$$

получаем

$$v_{\phi(1)} = v_{\phi(2)}.$$

Поля в первой и второй средах при полном отражении представляют собой неоднородные волны, так как плоскости равных фаз и равных амплитуд не совпадают.

При вертикальной поляризации  $E_{m1} \rightarrow H_{m1}$ ,  $H_{m2} \rightarrow E_{m2}$ ,  $H_{m3} \rightarrow E_{m3}$  и распределение поля имеет вид, представленный на рис. 4.8.

Таким образом, при полном отражении от границы двух диэлектрических сред, одна из которых является более плотной в электромагнитном смысле ( $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$ ), поле существует только в первой среде и распространяется вдоль плоскости раздела, во вторую среду поле проникает слабо в виде поверхностной волны, амплитуда которой быстро затухает при удалении от границы раздела. Этот эффект используется в диэлектрических волноводах.

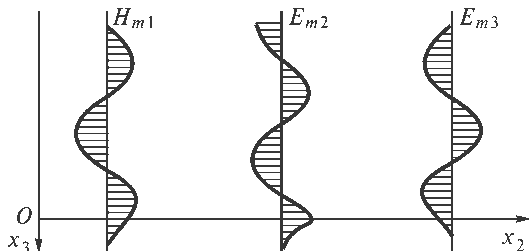
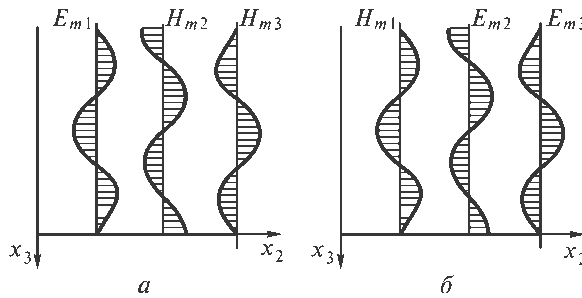


Рис. 4.8. Распределение поля при полном отражении и вертикальной поляризации падающей волны



**Рис. 4.9.** Распределение поля при отражении от идеально проводящей поверхности при горизонтальной (а) и вертикальной (б) линейных поляризациях

Если вторая среда является идеально проводящей, то

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon'_{a2} - j\frac{\sigma}{\omega}}} = 0,$$

так как  $\sigma \rightarrow \infty$  и согласно (4.13) и (4.18) при любом угле падения  $\Gamma_E = -1$ ,  $\Gamma_H = 1$ . Таким образом, от идеально проводящей поверхности волна полностью отражается при любом угле падения.

В соответствии с выражениями (4.40а) и (4.40б) при горизонтальной поляризации поле в первой среде

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= -j\mathbf{e}_1 2E_m \sin(k_{(1)}x_3 \cos \theta) e^{-jk_{(1)}x_2 \sin \theta}, \\ \dot{H}_{m1} &= [\mathbf{e}_2 2H_m \cos \theta \cos(k_{(1)}x_3 \cos \theta) + \\ &+ j\mathbf{e}_3 2H_m \sin \theta \sin(k_{(1)}x_3 \cos \theta)] e^{-jk_{(1)}x_2 \sin \theta}. \end{aligned}$$

Поле во второй среде

$$E_{(2)} = H_{(2)} = 0.$$

Распределение поля для случаев горизонтальной и вертикальной линейных поляризаций приведено на рис. 4.9. В этих случаях металлическая поверхность является направляющей. Волна распространяется вдоль поверхности раздела. Это явление используется в металлических волноводах.

#### 4.4. Нормальное падение электромагнитного поля на границу раздела двух сред

Пусть плоскость  $x_1Ox_2$  разделяет две однородных линейных изотропных среды без потерь (рис. 4.10), параметры которых соответственно равны

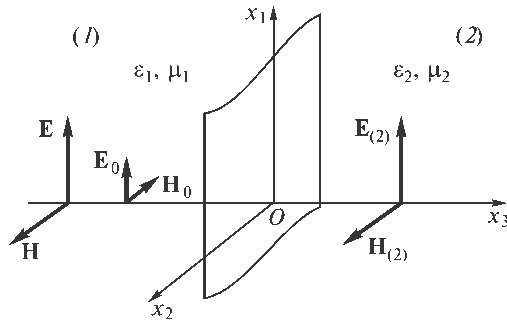


Рис. 4.10. Нормальное падение волны на границу раздела двух сред (1) и (2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \mu_1, Z_{01} &= \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}; \\ \varepsilon_2, \mu_2, Z_{02} &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}. \end{aligned}$$

При нормальном падении  $\theta = 0$  и согласно второму закону Снеллиуса (4.8)  $\vartheta = 0$ . При этом формулы Френеля (4.13) для коэффициентов отражения и прохождения по электрическому полю преобразуются к следующему виду:

$$\Gamma_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \Gamma; \quad P_E = \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = P \text{ при } x_3 = 0,$$

а коэффициенты отражения и прохождения по магнитному полю согласно (4.18) имеют вид

$$\Gamma_H = \frac{\dot{H}_{m0}}{H_m} = -\Gamma; \quad P_H = \frac{\dot{H}_{m(2)}}{H_m} = \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} P.$$

Если  $Z_{02} \neq Z_{01}$ , то поле в первой среде определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-jk_{(1)}x_3} + \mathbf{e}_1 \Gamma E_m e^{jk_{(1)}x_3} = \mathbf{e}_1 E_m [(1 - \Gamma) e^{-jk_{(1)}x_3} + 2\Gamma \cos k_{(1)}x_3]; \\ \dot{H}_{m(1)} &= \mathbf{e}_2 H_m (e^{-jk_{(1)}x_3} - \Gamma e^{jk_{(1)}x_3}) = \mathbf{e}_2 H_m [(1 + \Gamma) e^{-jk_{(1)}x_3} - 2\Gamma \cos k_{(1)}x_3]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Следовательно, поле в первой среде можно представить как сумму бегущей и стоячей волн.

Амплитуда электрического поля в первой среде  $E_{m(1)}$  равна модулю  $|\dot{E}_{m(1)}|$ , т. е.

$$E_{m(1)} = E_m \sqrt{1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_{(1)}x_3}. \quad (4.43)$$



Амплитуда магнитного поля в первой среде

$$H_{m(1)} = H_m \sqrt{1 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cos 2k_{(1)}x_3}. \quad (4.44)$$

Таким образом, амплитуда поля в первой среде периодически изменяется вдоль оси  $x_3$ . «Волнистость» зависит от значения  $|\Gamma|$ , т. е. от значения соотношения волновых сопротивлений сред  $Z_{02}$  и  $Z_{01}$ . Чем больше их различие, тем больше  $|\Gamma|$  и тем больше «волнистость».

Очевидно, что

$$\begin{aligned} E_{m(1)\max} &= (1 + |\Gamma|)E_m; & H_{m(1)\max} &= (1 + |\Gamma|)H_m; \\ E_{m(1)\min} &= (1 - |\Gamma|)E_m; & H_{m(1)\min} &= (1 - |\Gamma|)H_m. \end{aligned}$$

При резком различии  $Z_{01}$  и  $Z_{02}$  амплитуды  $E_{m(1)}$  и  $H_{m(1)}$  периодически спадают до нуля (стоячая волна). Расстояния между соседними максимумами или минимумами, как следует из формулы (4.43) или (4.44), равны  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  — длина волны в первой среде. Действительно, максимумам соответствуют согласно (4.43)

$$\cos 2k_{(1)}x_3 = 1,$$

т. е.

$$2k_{(1)}x_3 = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда расстояния между максимумами

$$n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\pi}{k_{(1)}}.$$

Во второй среде поле определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 P E_m e^{-jk_{(2)}x_3}; \\ \dot{\mathbf{H}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_2 \frac{Z_{01}}{Z_{02}} P H_m e^{-jk_{(2)}x_3}, \end{aligned}$$

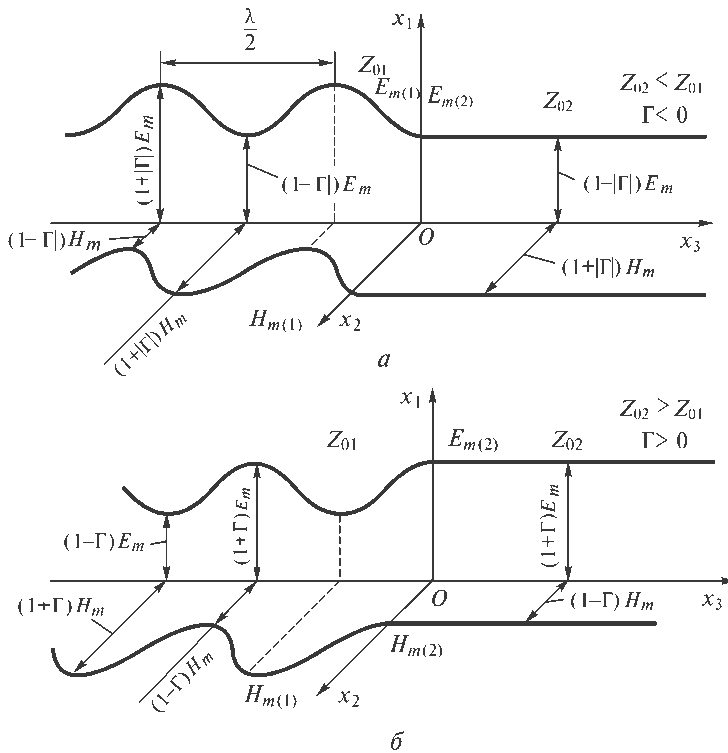
т. е. во второй среде распространяется бегущая волна, амплитуда которой не зависит от координаты  $x_3$ . Распределение амплитуд поля в зависимости от координаты  $x_3$  приведено на рис. 4.11.

Поток энергии в первой среде определяется средним значением вектора Пойнтинга бегущей волны

$$\Pi_{0(1)} = \frac{1}{2}(1 - \Gamma^2)E_m H_m = \frac{1}{2}(1 - \Gamma^2) \frac{E_m^2}{Z_{01}},$$

во второй среде

$$\Pi_{0(2)} = \frac{1}{2} \frac{Z_{01}}{Z_{02}} P^2 E_m H_m = \frac{1}{2} \frac{(1 + \Gamma)^2}{Z_{02}} E_m^2,$$



**Рис. 4.11.** Распределение амплитуд поля при нормальном падении на границу раздела двух сред с различными волновыми сопротивлениями:

*a* —  $Z_{02} < Z_{01}$ ; *б* —  $Z_{02} > Z_{01}$

НО

$$\frac{1-\Gamma^2}{Z_{01}} = \frac{(1+\Gamma)^2}{Z_{02}},$$

поэтому, как и следовало ожидать, потоки энергии в первой и второй средах равны.

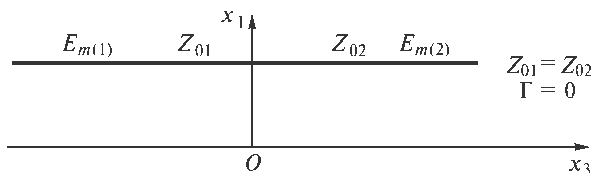
Для характеристики поля в первой среде при наличии отражения применяется так называемый коэффициент стоячей волны по напряженности

$$K_{с.в.н} = \frac{E_{m \max}}{E_{m \min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} > 1$$

или коэффициент стоячей волны по мощности

$$K_{с.в.м} = \frac{E_{m \max}^2}{E_{m \min}^2} = \frac{(1+|\Gamma|)^2}{(1-|\Gamma|)^2} > 1.$$

Обратные величины коэффициентов стоячей волны называются коэффициентом бегущей волны по напряженности



**Рис. 4.12.** Распределение амплитуд поля при нормальном падении на границу раздела двух сред с одинаковыми волновыми сопротивлениями

$$K_{\text{б.в.н}} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} < 1$$

или коэффициентом бегущей волны по мощности

$$K_{\text{б.в.м}} = \frac{(1 - |\Gamma|)^2}{(1 + |\Gamma|)^2} < 1.$$

Если  $Z_{01} = Z_{02}$ , то  $\Gamma = 0$ ,  $P = 1$ , т. е. отраженной волны нет, амплитуды поля в первой и второй среде равны (рис. 4.12).

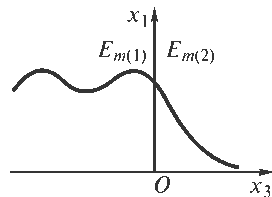
Радиолокатор обнаруживает цель по отраженной волне. Если подобрать материал так, что  $\sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , то пластина из такого материала при нормальном падении на нее лучей будет «невидимой» для радиолокатора. Волновое сопротивление пенополистирола близко к волновому сопротивлению воздуха, поэтому его используют для различных втулок в волноводах.

Рассмотрим случай, когда плоская волна падает нормально из среды без потерь на плоскость раздела ее со средой с потерями. Так как в этом случае  $Z_{02}$  комплексная величина, то коэффициент отражения

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z}_{02} - Z_{01}}{\dot{Z}_{02} + Z_{01}} = \Gamma e^{j\varphi}$$

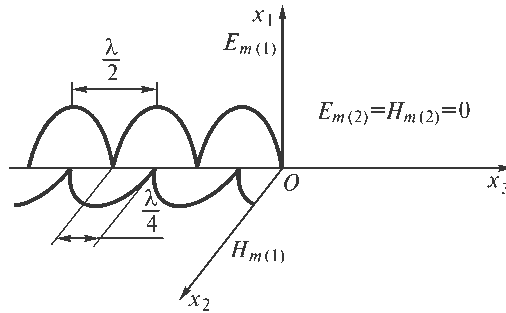
является комплексной величиной и волна при отражении меняет не только амплитуду, но и фазу. Амплитуда волны во второй среде затухает по экспоненте, зависимость амплитуд от  $x_3$  в первой и второй средах имеет вид, приведенный на рис. 4.13. Если среда обладает потерями из-за проводимости, то ее волновое сопротивление

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon'_{a2} - j \frac{\sigma_2}{\omega}}}$$



**Рис. 4.13.** Распределение амплитуд поля при нормальном падении на границу со средой с потерями

В случае проводника можно пренебречь  $\epsilon'_{a2}$  по сравнению с  $\epsilon''_{a2} = \sigma_2/\omega$ , при этом



**Рис. 4.14.** Распределение амплитуд поля при нормальном падении на границу с идеально проводящей средой

$$\dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{a2}}{\sigma_2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{\sigma_2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = |Z_{02}| e^{j\frac{\pi}{4}}$$

(сдвиг на  $45^\circ$  указывает на то, что в проводящей среде электрическая и магнитная составляющие сдвинуты по фазе на  $45^\circ$ ).

Если вторая среда является идеально проводящей ( $\sigma_2 = \infty$ ), то  $Z_{02} = 0$ ,  $\Gamma = -1$ ,  $P = 0$  и поле не проходит во вторую среду. В первой среде поле определяется выражениями

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m (e^{-jk_{(1)}x_3} - e^{jk_{(1)}x_3}) = -\mathbf{e}_1 j 2 E_m \sin k_{(1)} x_3;$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{m(1)} = \mathbf{e}_2 H_m (e^{-jk_{(1)}x_3} + e^{jk_{(1)}x_3}) = \mathbf{e}_2 2 H_m \cos k_{(1)} x_3,$$

т. е. магнитное и электрическое поля сдвинуты во времени на  $90^\circ$  и представляют собой стоячую волну (рис. 4.14). Существуют плоскости, отстоящие друг от друга на четверть волны и перпендикулярные оси  $x_3$ , в которых амплитуды электрического или магнитного поля в любой момент времени всегда равны нулю. Поскольку в любой момент времени вектор Пойнтинга в точках этих плоскостей равен нулю, то энергия через эти плоскости не проходит и движения энергии в среде нет. Движение энергии происходит лишь в пределах четвертьволновых объемов. Энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля, и наоборот.

Среднее значение вектора Пойнтинга в любой точке поля равно нулю, т. е.

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{H}}_m] = 0,$$

так как  $[\dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{H}}_m]$  является мнимой величиной.

### 4.5. Нормальное падение электромагнитного поля на движущуюся плоскость раздела. Эффект Доплера

Рассмотрим отражение и преломление плоской электромагнитной волны, падающей на плоскость раздела, перемещающуюся со скоростью  $u$  в направлении оси  $x_3$ :

$$u \ll c.$$

Пусть напряженность электрического поля падающей волны

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_1 E_m e^{j(\omega t - k_{(1)} x_3)},$$

отраженной волны

$$\dot{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{e}_1 E_{m0} e^{j(\omega_0 t + k_{(1)0} x_3)},$$

прошедшей волны

$$\dot{\mathbf{E}}_{(2)} = \mathbf{e}_1 E_{m(2)} e^{j(\omega_2 t - k_{(2)} x_3)}.$$

На плоскости раздела, перемещающейся со скоростью  $u$ , выполняется граничное условие для тангенциальных составляющих вектора  $\mathbf{E}$

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}$$

или

$$E_m e^{j(\omega t - k_{(1)} x_3)} + E_{m0} e^{j(\omega_0 t + k_{(1)0} x_3)} = E_{m(2)} e^{j(\omega_2 t - k_{(2)} x_3)},$$

а при  $x_3 = ut$

$$E_m e^{j(\omega - k_{(1)} u)t} + E_{m0} e^{j(\omega_0 + k_{(1)0} u)t} = E_{m(2)} e^{j(\omega_2 - k_{(2)} u)t}.$$

Чтобы это условие выполнялось в любой момент времени  $t$ , необходимо выполнение равенства

$$\omega - k_{(1)} u = \omega_0 + k_{(1)0} u = \omega_2 - k_{(2)} u. \quad (4.45)$$

Если первая среда — воздух, то

$$k_{(1)} = \frac{\omega}{c}; \quad k_{(1)0} = \frac{\omega_0}{c}. \quad (4.46)$$

Вторая среда движется со скоростью  $u$ . Поскольку эта скорость мала, то можно считать, что волна движется относительно этой среды со скоростью  $v_{(2)} - u \approx v_{(2)}$

$$k_{(2)} = \frac{\omega_2}{v_{(2)}} = \omega_2 \sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}. \quad (4.47)$$

Подставляя (4.46) и (4.47) в (4.45), получаем

$$\omega \left(1 - \frac{u}{c}\right) = \omega_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \omega_2 \left(1 - \frac{u}{v_{(2)}}\right)$$

или

$$\begin{aligned}\omega_0 &\approx \omega \left(1 - 2\frac{u}{c}\right); \\ \omega_2 &\approx \omega \left[1 + \frac{u}{c}(\sqrt{\epsilon_2\mu_2} - 1)\right].\end{aligned}\tag{4.48}$$

При обратном направлении движения плоскости раздела

$$\begin{aligned}\omega_0 &\approx \omega \left(1 + 2\frac{u}{c}\right); \\ \omega_2 &\approx \omega \left[1 - \frac{u}{c}(\sqrt{\epsilon_2\mu_2} - 1)\right].\end{aligned}\tag{4.49}$$

Полученные формулы (4.48) и (4.49) выражают *эффект Доплера*, который заключается в том, что частоты отраженной и прошедшей волн при движении границы раздела или тела отличаются от частоты падающей волны. В результате этого суммарное поле падающей и отраженной волны имеет изменяющуюся во времени амплитуду, т. е. возникают биения. Частота биений

$$f_\delta = \frac{|\omega - \omega_0|}{2\pi} = f \frac{2u}{c}.$$

Эффект Доплера используется в радиолокационной технике для определения скорости движущейся цели и ее обнаружения.

#### 4.6. Пондеромоторные силы (давление) электромагнитной волны

Тела, помещенные в поле электромагнитной волны, испытывают в этом поле действие механических (пондеромоторных) сил.

Рассмотрим простейший случай нормального падения электромагнитной волны на поверхность идеального проводника. В этом случае поверхность испытывает давление в направлении падающей волны. Это давление обусловливается тем, что поле волны возбуждает в проводнике поверхностный ток проводимости плотности  $J_{\text{пов}}$ , который изменяется по тому же закону, что и возбуждающее его поле и величина которого зависит от этого поля. Действительно, согласно граничному условию (см. § 1.7)

$$\mathbf{J}_{\text{пов}} = [\mathbf{n}_0 \mathbf{H}].$$

Токи, представляющие собой поток электронов, подвергаются воздействию лоренцевой силы со стороны магнитной составляющей поля, которая ее вызывает.

Лоренцева сила, действующая на движущийся заряд  $q$ , определяется выражением

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Выделим единичный элемент поверхности на проводнике и определим силу, действующую на этот элемент, или давление  $\mathbf{p}$ . Заряд, соответствующий этому элементу поверхности, равен  $\kappa$ . Отсюда при векторе  $\mathbf{H}$ , параллельном границе раздела, и векторе  $\mathbf{n}_0$ , совпадающем с направлением распространения волны,

$$\mathbf{p} = \kappa[\nabla V] = \mu_0[\mathbf{J}_{\text{пов}} \mathbf{H}] = \mu_0[[\mathbf{H}\mathbf{n}_0]\mathbf{H}] = \mathbf{n}_0\mu_0 H^2. \quad (4.50)$$

В случае монохроматического поля магнитное поле на поверхности проводника

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 2H_m \cos \omega t.$$

Подставляя это значение в выражение (4.50), получаем

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}_0 4H_m^2 \mu_0 \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение давления

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{n}_0 2\mu_0 H_m^2.$$

Сила, действующая на площадку площадью  $S$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}S.$$

Электромагнитная волна оказывает давление и на поверхность диэлектрика. Это давление электромагнитной волны мало и его непосредственно очень трудно измерить. Так, электромагнитная энергия света оказывает на металлический лист, расположенный на Земле, давление  $p = 10^{-6}$  кг/м<sup>2</sup>.

Впервые экспериментально обнаружил и измерил давление электромагнитной (световой) волны в 1901 г. П.Н. Лебедев.

Давление электромагнитной волны можно использовать для измерения мощности электромагнитного поля. Давлением света объясняется наличие хвостов у комет, направленных от Солнца к Земле.

Взаимное притяжение или отталкивание проводов с током, обнаруженное впервые Г.Х. Эрстедом в 1825 г. и нашедшее в дальнейшем свое практическое применение в создании электродвигателей, является частным случаем рассмотренного нами явления силового воздействия электромагнитного поля.

Общая формула, определяющая давление электромагнитной энергии, падающей на поверхность раздела двух сред под произвольным углом, когда вектор  $\mathbf{n}_0$  направлен в сторону первой среды, имеет вид

$$\mathbf{p}_{\text{эм}} = \left[ \mu_a \mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{n}_0) - \frac{1}{2} \mu_a H^2 \mathbf{n}_0 \right] + \left[ \epsilon_a \mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n}_0) - \frac{1}{2} \epsilon_a E^2 \mathbf{n}_0 \right].$$

При нормальном падении волны поля и вектора  $\mathbf{n}_0$ , совпадающем с направлением распространения волны,

$$\mathbf{p}_{\text{эм}} = \frac{1}{2} (\mu_a H^2 + \epsilon_a E^2) \mathbf{n}_0,$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются на границе раздела.

Если обе среды без потерь, то

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m (1 + \Gamma) \cos \omega t;$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{E}_m}{Z_0} (1 - \Gamma) \cos \omega t$$

и

$$P_{\text{эм}} = \frac{1}{2} [\epsilon_a E_m^2 (1 - \Gamma)^2 + \epsilon_a E_m^2 (1 + \Gamma)^2] \cos^2 \omega t = \epsilon_a E_m^2 (1 + \Gamma^2) \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение давления электромагнитной энергии

$$\mathbf{P}_{\text{эм0}} = \frac{1}{2} \epsilon_a E_m^2 (1 + \Gamma^2) \mathbf{n}_0 = \frac{\Pi_0}{v_{(1)}} (1 + \Gamma^2) \mathbf{n}_0 = w_{\text{эм0}} (1 + \Gamma^2) \mathbf{n}_0,$$

где  $w_{\text{эм0}}$  — среднее значение плотности электромагнитной энергии.

Если вторая среда полностью прозрачна или является абсолютно черным телом, то

$$\mathbf{P}_{\text{эм0}} = w_{\text{эм0}} \mathbf{n}_0,$$

поскольку  $\Gamma = 0$ .

Если вторая среда является идеальным проводником, то  $\Gamma^2 = 1$  и

$$\mathbf{P}_{\text{эм0}} = 2w_{\text{эм0}} \mathbf{n}_0.$$

Измеряя давление электромагнитной энергии, можно определить плотность энергии электромагнитного поля.

## 4.7. Поверхностный эффект

Рассмотрим более подробно явления, возникающие в проводящей среде при падении на нее электромагнитной волны. Следует отметить, что согласно второму закону Снеллиуса, преломленная волна при любом угле падения распространяется нормально к плоскости раздела. В проводящей среде в соответствии с (2.45a)

$$k_{(2)} = \beta - j\alpha;$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}},$$

а поле прошедшей волны определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 \dot{P} E_m e^{-\alpha x_3} e^{-j\beta x_3}; \\ \dot{\mathbf{H}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_2 \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \dot{P} H_m e^{-\alpha x_3} e^{-j\beta x_3}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Электромагнитное поле проникает в глубь второй среды, убывая по экспоненте. Это поле вызывает во второй среде ток, плотность которого связана с вектором  $\mathbf{E}_{(2)}$  соотношением



$$\mathbf{J}_{(2)} = \sigma_2 \mathbf{E}_{(2)},$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{J}}_{m(2)} = \mathbf{e}_1 \dot{P} E_m \sigma_2 e^{-\alpha x_3} e^{-j\beta x_3}$$

или амплитудное значение

$$J_{m(2)} = P E_m \sigma_2 e^{-\alpha x_3}.$$

Распределение тока в зависимости от значения  $x_3$  приведено на рис. 4.15.

Расстояние, на котором амплитуда уменьшается в  $e$  раз, называется глубиной проникновения или толщиной скин-слоя, оно равно

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{a2} \sigma_2}}.$$

Графически значение  $\Delta$  определяется длиной подкасательной (см. рис. 4.15). Глубина проникновения поля зависит от частоты  $\omega$  и проводимости среды  $\sigma_2$ . Так, для меди  $\Delta = 1$  см при  $f = 50$  Гц и  $\Delta = 3 \cdot 10^{-3}$  см при  $f = 10^5$  Гц.

Длина волны в проводнике

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

На расстоянии, равном длине волны, амплитуда тока убывает в  $e^{2\pi} = 540$  раз. Фаза тока линейно зависит от расстояния. На расстоянии, равном половине длины волны, фазы различаются на  $180^\circ$  и в любой момент времени в частях проводника, отстоящих друг от друга на  $\lambda/2$ , ток идет в противоположных направлениях.

Комплексная амплитуда тока, текущего через пластину шириной 1 м, равна

$$\dot{I}_{m(2)} = \int_0^{\infty} \sigma_2 \dot{E}_{m(2)} dx_3,$$

с учетом (4.51)

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m(2)} &= \sigma_2 E_{m(2)}(x_3 = 0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\Delta} x_3} e^{-j\frac{1}{\Delta} x_3} dx_3 = \\ &= \frac{\sigma_2 E_{m(2)}(x_3 = 0) \Delta}{1 + j} = \frac{J_{m(2)}(x_3 = 0) \Delta}{1 + j}, \end{aligned}$$

или

$$I_{m(2)} = \frac{J_{m(2)}(x_3 = 0) \Delta}{\sqrt{2}},$$

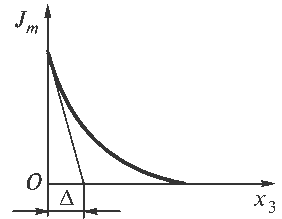


Рис. 4.15. Распределение плотности тока в проводнике

т. е. значение тока таково, каким бы оно было, если бы он, не уменьшаясь по амплитуде, проникал в глубь проводника на расстояние  $\Delta$ .

При сильном скин-эффекте расстояние  $\Delta$  мало, и ток сосредоточен в поверхностном слое. При этом удобно пользоваться понятием поверхностного сопротивления проводника  $Z_S$  (Ом/□), определяемого отношением

$$Z_S = \frac{\dot{E}_{m(2)}(x_3 = 0)}{\dot{I}_{m(2)}},$$

т. е. отношением значения комплексной амплитуды напряженности электрического поля на поверхности проводника к значению тока, рассчитанному на единицу ширины пластины. Поверхностное сопротивление проводника — это сопротивление квадрата поверхности, не зависящее от размера его стороны:

$$Z_S = \frac{1}{\sigma_2 \Delta} (1 + j),$$

т. е. оно состоит из равных друг другу активного и реактивного сопротивления:

$$R_S = X_S = \frac{1}{\sigma_2 \Delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{2 \sigma_2}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_{a2}}{\sigma_2}}.$$

Действительная составляющая  $R_S$  определяет потери на джоулеву теплоту, мнимая составляющая  $X_S$  определяет индуктивность, обусловленную внутренним магнитным полем в проводнике.

Полученные выражения относятся к плоской пластине неограниченных размеров. Однако эти результаты приближенно справедливы для проводников любой формы, если их радиус кривизны намного больше глубины проникновения тока в проводник. Особенно это относится к высоким частотам, на которых глубина проникновения мала и измеряется долями миллиметра.

В случае круглого провода радиусом  $a$  ( $a \gg \Delta$ ) активное сопротивление единицы длины провода на достаточно высоких частотах определяется выражением

$$R_f = \frac{R_S}{2\pi a} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_{a2}}{\sigma_2}}.$$

При постоянном токе сопротивление единицы длины провода

$$R_0 = \frac{1}{\sigma_2 \pi a^2}.$$

Отношение этих сопротивлений

$$\frac{R_f}{R_0} = \frac{a}{2} \sqrt{\pi f \mu_{a2} \sigma_2},$$

т. е. влияние поверхностного эффекта на сопротивление особенно значительно в проводах большого сечения.

В серебряном проводе ( $\sigma = 6 \cdot 10^7$  См/м) радиусом 2 мм на частоте  $f = 3 \cdot 10^8$  Гц сопротивление  $R_f$  в 250 раз больше, чем на постоянном токе. Поэтому для уменьшения сопротивления переменному току сплошные проводники заменяют совокупностью изолированных друг от друга проводников.

Для уменьшения активного сопротивления на высоких частотах поверхность проводника часто покрывается серебром, имеющим большую проводимость. Поскольку на высоких частотах центральная часть сечения проводника практически не используется, то для уменьшения массы и экономии металла проводники делают полыми.

При увеличении частоты магнитное поле внутри проводника уменьшается, а следовательно, уменьшается и связанная с ним индуктивность провода ( $X_s = \omega L$ ).

Ток сосредотачивается вблизи тех поверхностей проводников, через которые электромагнитное поле проникает в них из окружающего пространства. Поэтому в случае цилиндрического проводника такой поверхностью является его наружная поверхность, в случае коаксиального кабеля ток высокой частоты протекает в слое у наружной поверхности внутреннего проводника и внутренней поверхности внешнего проводника, в случае волновода — на внутренней поверхности стенок.

Поверхностный эффект имеет и полезное применение в технике. С его помощью осуществляют поверхностную закалку стальных изделий, помещая изделия в поле высокой частоты. Индуцированные токи вызывают сильный нагрев наружной поверхности изделия без повышения температуры внутренней поверхности, что необходимо для поверхностной закалки.

Внутри идеального проводника электромагнитное поле тождественно равно нулю, а на его поверхности для электрического поля имеют место граничные условия

$$E_\tau = 0 \text{ или } [\mathbf{n}_0 \mathbf{E}] = 0, \quad (4.52)$$

где  $\mathbf{n}_0$  — орт нормали к поверхности проводника, направленный внутрь него.

Тангенциальная составляющая магнитного поля на поверхности проводника терпит разрыв и равна

$$H_\tau = J_{\text{пов}} \text{ или } [\mathbf{n}_0 \mathbf{H}] = \mathbf{J}_{\text{пов}}. \quad (4.53)$$

В формулах (4.52) и (4.53) через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  обозначены значения полей в точках, бесконечно близких к поверхности идеального проводника, но лежащих вне его.

В случае реального проводника проводимость  $\sigma$  велика, но конечна. При этом электромагнитное поле проникает в проводник. Однако вследствие сильного поглощения поля оно быстро затухает. Граничные условия (4.52) и (4.53) становятся приближенными. Толщина поверхностного слоя в проводниках мала, и тем меньше, чем больше проводимость и частота электромагнитного поля. По-

этому погрешность при использовании граничных условий (4.52) и (4.53) для реального проводника мала.

Таким образом, распределение поля при падении волны на идеальный проводник совпадает с распределением поля при падении волны на реальный проводник. Различие состоит лишь в том, что в последнем случае имеются потери на Джоулеву теплоту, которые тем больше, чем меньше толщина поверхностного слоя. Однако потери малы, и в большинстве практических задач можно реальный проводник заменить идеальным. Упрощение заключается в том, что поле внутри идеального проводника можно не рассматривать, а наличие проводника учитывать с помощью граничных условий на его поверхности (4.52) и (4.53).

### Вопросы

1. Как ориентированы в пространстве плоскости равных фаз и амплитуд плоских однородных и неоднородных волн?
2. Как связаны углы падения, отражения и преломления согласно законам Снеллиуса?
3. Всегда ли угол падения равен углу отражения?
4. Какую поляризацию будет иметь волна, отраженная от плоскости среды с потерями, если падающая волна имеет произвольную линейную поляризацию и падает на плоскость под произвольным углом падения?
5. Если плоская волна круговой поляризации падает на плоскую границу раздела воздух — диэлектрик без потерь под произвольным углом, какие поляризации будут иметь отраженная и преломленная волны?
6. Плоская волна круговой поляризации падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков под углом Брюстера. Какую поляризацию будет иметь отраженная волна, какую прошедшая?
7. Возможно ли полное прохождение волны линейной горизонтальной поляризации при наклонном падении на границу раздела двух диэлектрических сред?
8. При каких углах падения на границу раздела двух диэлектрических сред без потерь наблюдается полное отражение волны?
9. Какова структура поля во второй среде при полном отражении?
10. Как изменяются частоты прошедшей и отраженной волн при падении волны на движущуюся границу раздела?

### Задачи

1. На плоскую границу раздела воздух — диэлектрик без потерь с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  падает под углом  $\theta$  плоская линейно поляризованная волна, направление поляризации которой составляет угол  $\alpha$  с плоскостью падения. Определите:
  - а) коэффициенты отражения и прохождения;
  - б) угол поляризации прошедшей и отраженной волн.
2. Плоская линейно поляризованная волна падает на границу раздела двух диэлектрических сред без потерь. Угол падения  $\theta$  удовлетворяет условию  $\sin \theta > \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$  при

$\epsilon_2 < \epsilon_1$ . Угол поляризации равен  $\nu$ . Покажите, что:

- а) коэффициент отражения по модулю равен единице (полное отражение);
  - б) прошедшая волна не является поперечной;
  - в) среднее значение нормальной составляющей вектора Пойнтинга на границе раздела равно нулю.
3. По условию задачи 2 определите:
- а) поляризацию отраженной волны;
  - б) условие, при котором отраженная волна будет иметь круговую поляризацию.
4. Волна произвольной линейной поляризации падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков с параметрами  $\epsilon_1 = 1$  и  $\epsilon_2 = 3$ . Определите угол падения, при котором отраженная волна имеет линейную горизонтальную поляризацию.
5. Волна линейной поляризации падает по направлению нормали на границу раздела диэлектрик без потерь — идеальный проводник. Определите поле и среднее значение вектора Пойнтинга в диэлектрической среде.
6. Две диэлектрические среды с параметрами  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  разделены диэлектрической пластиной с параметром  $\epsilon_2$ . Определите:
- а) толщину пластины, при которой отражение будет минимальным;
  - б) условия, при которых отражение будет отсутствовать.
7. Плоская однородная волна падает наклонно под углом  $\theta$  на плоскую границу раздела воздух — проводящая среда с параметрами  $\epsilon_2$  и  $\sigma_2$ . Определите направления затухания и распространения, а также фазовую скорость неоднородной волны в проводящей среде.

## 5. ВОЛНОВОДЫ

### 5.1. Направляющие системы

Электромагнитная энергия высокой частоты передается на большие расстояния излучающими системами, диаграмма направленности которых формируется в дальней зоне. Передачу энергии высокой частоты на короткие расстояния и низкой частоты на большие расстояния осуществляют направляющие системы, основанные на способности металлической поверхности и границы двух диэлектриков направлять движение волны.

Энергию постоянного и переменного тока можно передать с помощью двухпроводной линии (рис. 5.1, *а*). При этом провода играют роль осей, направляющих энергию от источника к нагрузке, а не роль труб, в которых эта энергия «протекает». Энергия концентрируется около поверхности проводов в окружающем диэлектрике. Энергия, входящая в проводник, движется не вдоль оси проводника, а перпендикулярно к его поверхности и расходится на компенсацию потерь, возникающих в результате столкновения электронов с кристаллической решеткой. С повышением частоты производные  $\frac{\partial D}{\partial t}$  и  $\frac{\partial B}{\partial t}$  в уравнениях

Максвелла (I) и (II) возрастают, при этом возникают потери на излучение. Чтобы уменьшить потери на излучение, применяют систему в виде двух лент (ленточная линия, рис. 5.1, *б*) или коаксиальную систему (коаксиальная линия — кабель, рис. 5.1, *в*), когда один провод превращается в трубку, а другой размещается внутри этой трубки. В последнем случае потери на излучение возникают лишь вследствие неисправностей (отверстий) внешней оплетки кабеля. Энергия в кабеле концентрируется около внутреннего провода, и потери определяются

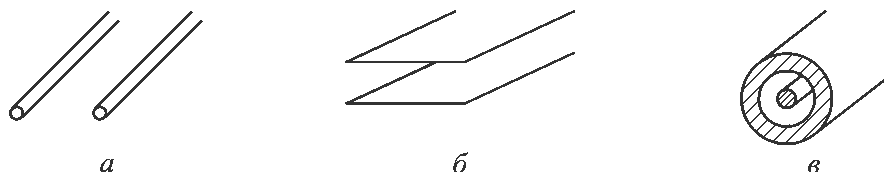


Рис. 5.1. Линия:

*а* — двухпроводная; *б* — ленточная; *в* — коаксиальная

потерями в этом проводнике. С увеличением частоты эти потери возрастают, и коаксиальную линию целесообразно заменить волноводной в виде металлического прямоугольного или круглого волновода (рис. 5.2).

Волноводы используются на сверхвысоких частотах (сантиметровые (10...1 см) или миллиметровые волны (10...1 мм)). В этом диапазоне для передачи энергии иногда применяют диэлектрические волноводы, использующие способность границы раздела двух диэлектрических сред при полном отражении направлять движение энергии электромагнитной волны. Применение этих волноводов ограничено потерями в диэлектрике.

В оптическом диапазоне используют диэлектрические (стеклянные) волноводы-нити (световоды).

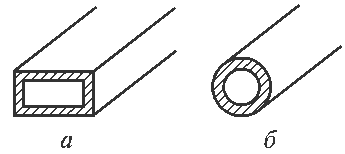


Рис. 5.2. Металлические волноводы: а — прямоугольный; б — круглый

### 5.2. Электромагнитные волны между проводящими параллельными плоскостями

**H<sub>n</sub>-волна.** Рассмотрим отражение наклонно падающей волны от идеально проводящей плоскости. При выбранном направлении осей координат в случае горизонтальной поляризации (рис. 5.3) составляющая электрического поля определяется выражением

$$E_{m(1)} = e_1 E_m e^{-jk_0 r} + e_1 E_{m0} e^{-jk_0 r},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}r &= -k \cos \theta \cdot x_2 + k \sin \theta \cdot x_3; \\ \mathbf{k}_0 r &= k \cos \theta \cdot x_2 + k \sin \theta \cdot x_3. \end{aligned}$$

Коэффициент отражения от идеально проводящей плоскости согласно выражению (4.13) равен

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m} = \frac{Z_{02} \cos \theta - Z_{01} \cos \vartheta}{Z_{02} \cos \theta + Z_{01} \cos \vartheta} = -1,$$

поскольку

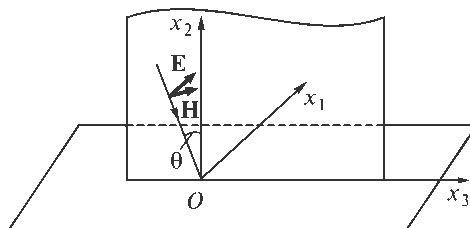


Рис. 5.3. Падение электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon'_{a2} - j \frac{\sigma_2}{\omega}}} = 0 \text{ при } \sigma_2 = \infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-jk(-x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta)} - \mathbf{e}_1 E_m e^{-jk(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta)} = \\ &= j\mathbf{e}_1 2E_m \sin(kx_2 \cos \theta) e^{-jkx_3 \sin \theta}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

т. е. электромагнитная волна распространяется вдоль идеально проводящей плоскости в направлении оси  $x_3$  с постоянной распространения

$$k_0 = k \sin \theta \quad (5.2)$$

и амплитуда ее изменяется в направлении, перпендикулярном проводящей плоскости, по закону синуса (рис. 5.4)

$$\sin(k \cos \theta) x_2.$$

Пространственная периодичность в направлении оси  $x_2$  определяется выражением

$$\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{k \cos \theta} = \frac{\lambda}{\cos \theta}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что  $\lambda_{\perp}$  тем больше, чем больше угол падения волны. Магнитная составляющая поля находится из первого уравнения Максвелла (2.8)

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$$

или

$$\dot{\mathbf{H}}_m = j \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m}{\omega\mu_a}.$$

Согласно (5.1), учитывая, что  $E_m = Z_0 H_m$ , получаем

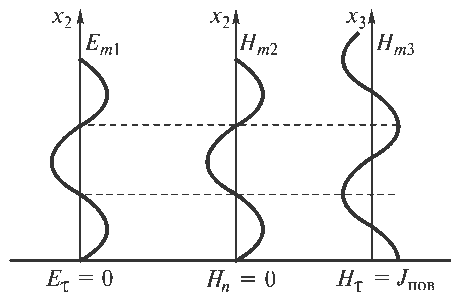


Рис. 5.4. Распределение амплитуд поля  $E_{m1}$ ,  $H_{m2}$ ,  $H_{m3}$



$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m(1)} &= \frac{j}{\omega\mu_a} \left( \frac{\partial \dot{E}_{m(1)}}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial \dot{E}_{m(1)}}{\partial x_2} \mathbf{e}_3 \right) = \\ &= [j\mathbf{e}_2 2H_m \sin \theta \sin(k \cos \theta \cdot x_2) + \mathbf{e}_3 2H_m \cos \theta \cos(k \cos \theta \cdot x_2)] e^{-jk_0 x_3}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

На проводящей поверхности

$$E_\tau = E_1 = 0; \quad H_n = H_2 = 0; \quad H_\tau = H_3 \neq 0,$$

т. е. граничные условия выполняются.

На расстоянии  $d_n = \frac{n\lambda_1}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) от проводящей поверхности эти условия также выполняются, т. е. параллельно идеально проводящей плоскости на расстоянии  $d_n$  можно поместить другую идеально проводящую плоскость и при этом поле не изменит своей структуры. На рис. 5.5 приведена структура поля в момент времени  $t = \text{const}$  для  $n = 3$ . Магнитные силовые линии обозначены пунктирной линией, электрические — сплошной. При рассмотрении во времени вся картина движется в направлении оси  $x_3$ .

На внутренних поверхностях проводящих плоскостей наводятся поверхностные токи, направление и величина которых определяются из граничного условия

$$H_\tau = J_{\text{пов}} \quad \text{или} \quad [\mathbf{n}_0 \mathbf{H}] = \mathbf{J}_{\text{пов}},$$

где  $\mathbf{n}_0$  — орт нормали, направленный внутрь системы. Токи проводимости параллельны оси  $x_1$  и замыкаются через токи смещения, равные

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{e}_1 \omega\epsilon_a 2E_m \sin(k \sin \theta \cdot x_2) e^{-jk_0 x_3},$$

где  $\epsilon_a$  — диэлектрическая проницаемость заполняющей среды.

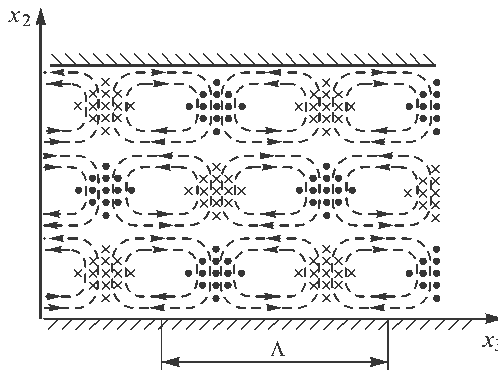


Рис. 5.5. Структура поля между параллельными идеально проводящими плоскостями при  $n = 3$  и продольной составляющей вектора  $\mathbf{H}$  (H-волна)

Распространяющееся поле имеет составляющую вектора  $\mathbf{H}$ , совпадающую с направлением распространения волны, и называется магнитной волной (Н-волной).

Выясним свойства системы, в которой распространяется Н-волна. Предполагаем, что пространство между плоскостями заполнено средой без потерь с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ , т. е. волновое сопротивление, фазовая скорость, постоянная распространения и длина волны в такой среде, если она не ограничена, соответственно равны

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}; \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в воздухе.

Число популоволновых вариаций, укладываемых между параллельными плоскостями, характеризует тип волны, определяемый способом возбуждения. Оно равно

$$n = \frac{2d_n}{\lambda_{\perp}} = \frac{dk \cos \theta}{\pi} = \frac{2d \cos \theta}{\lambda},$$

где  $d = d_n$  — расстояние между плоскостями.

При этом вид поля определяется как  $H_n$  (см. рис. 5.5).

Угол  $\theta$  представляет собой угол, под которым падает плоская однородная волна на идеально проводящую плоскость. Распространение между двумя параллельными плоскостями можно рассматривать как суперпозицию двух однородных волн, многократно отражающихся от параллельных плоскостей под углом  $\theta$ . При заданном расстоянии между плоскостями  $d$  и типе волны  $H_n$  угол падения  $\theta$  зависит от частоты распространяющейся волны и определяется выражением

$$\cos \theta = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{n}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \cdot fd}. \quad (5.5)$$

Эта зависимость определяется граничными условиями на проводящих плоскостях. С уменьшением частоты (увеличением  $\lambda$ )  $\cos \theta$  стремится к единице ( $\theta \rightarrow 0$ ), и при некотором значении частоты, называемой критической частотой  $f_{кр}$ ,

$$\cos \theta = 1; \quad \theta = 0.$$

При  $f < f_{кр}$   $\cos \theta$  окажется больше единицы, а угол  $\theta$  — мнимой величиной. Это значит, что распространение электромагнитной волны при условии  $\frac{n\lambda}{2d} > 1$  невозможно. Описанный процесс иллюстрируется на рис. 5.6. Условие

$$\frac{n\lambda}{2d} = 1 \quad (5.6)$$

называется критическим. Для распространения волны необходимо, чтобы  $\lambda < \lambda_{кр}$  или  $f > f_{кр}$ .

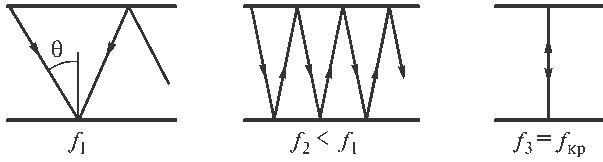


Рис. 5.6. Изменение угла падения  $\theta$  с уменьшением частоты

Согласно (5.6)

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2d}{n} \quad (5.7)$$

или

$$f_{\text{кр}} = \frac{n}{2d\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}.$$

Сравнивая выражения (5.7) с (5.3), видим, что  $\lambda_{\text{кр}} = \lambda_{\perp}$ . Если волна имеет длину  $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$ , то распространение волны вдоль оси  $x_3$  не происходит, так как в этом случае исходная плоская волна падает нормально на идеально проводящие плоскости, между которыми устанавливается обыкновенная стоячая волна.

При данной частоте  $f$  может распространяться несколько типов волн, каждому из которых соответствует определенное значение  $n$  и, следовательно, критическая длина волны (5.7). Число распространяющихся типов волн ограничивается условием

$$n = \frac{2d}{\lambda}.$$

Если  $n < \frac{2d}{\lambda}$ , то все типы Н-волны, удовлетворяющие этому условию, будут распространяться, так как очевидно, что для них всех удовлетворяется условие  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ ; если  $n > \frac{2d}{\lambda}$ , то соответствующие типы волн не будут распространяться.

Поскольку  $4 > \frac{2d}{\lambda} > 3$ , то будут распространяться три типа волн с  $n = 1, 2, 3$ .

Волна с  $n = 0$  существовать не может, что следует из уравнений (5.1), так как в соответствии с выражением (5.5)  $k \cos \theta = 0$ .

Постоянная распространения  $k_0$  согласно (5.2) определяется выражением  $k_0 = k \sin \theta$  или  $k_0 = k\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ . С учетом (5.5) и (5.7) это выражение можно переписать в виде

$$k_0 = k\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2} = k\sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}. \quad (5.8)$$

При  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$  или  $f < f_{\text{кр}}$  постоянная распространения становится мнимой величиной

$$k_0 = -jk\sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2 - 1}$$

и поле (5.1), сохраняя неизменной фазу, убывает в направлении оси  $x_3$  по экспоненциальному закону.

Найдем фазовую скорость  $v_\phi$ , групповую скорость  $v_{\text{гр}}$ , длину волны  $\Lambda$  в направлении ее распространения и волновое сопротивление системы  $Z_{0H}$ . Согласно определению постоянной распространения

$$k_0 = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

и выражению (5.8) получим

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}}. \quad (5.9)$$

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_0}.$$

Связь между групповой и фазовой скоростями определяется выражением

$$v_{\text{гр}} = \frac{v_\phi}{1 - \frac{\omega}{v_\phi} \frac{dv_\phi}{d\omega}}.$$

Отсюда

$$v_{\text{гр}} = v\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2} = v\sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}. \quad (5.10)$$

Длина волны в направлении оси  $x_3$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}}. \quad (5.11)$$

В выражение вектора Пойнтинга, характеризующего передачу энергии, входят только перпендикулярные к направлению распространения составляющие электрического и магнитного поля. Удобно ввести в рассмотрение волновое или характеристическое сопротивление системы, которое определяется как отношение составляющей вектора  $\mathbf{E}$  (находящейся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны) к составляющей вектора  $\mathbf{H}$  (находящейся в той же плоскости). Обозначим это сопротивление  $Z_{0H}$ , так как в случае горизонтальной поляризации имеется продольная составляющая магнитного поля.

Согласно (5.1), (5.4) и (5.5)

$$Z_{0H} = \frac{E_1}{H_1} = \frac{E_1}{H_2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{\sin \theta} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})}}, \quad (5.12)$$

где  $Z_0$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Из полученных выражений (5.8)—(5.12) следует, что постоянная распространения, фазовая и групповая скорости (рис. 5.7), длина направляемой волны и волновое сопротивление зависят от частоты  $f$ , т. е. распространение направляемой волны сопровождается дисперсией. Необходимо отметить, что в данном случае дисперсия обязана ограничению среды в геометрическом смысле, так как предполагается, что сама среда, в которой происходит распространение поля, не обладает ни потерями, ни дисперсией ( $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  не зависят от  $f$ ). Значения параметров  $v_\phi$ ,  $\Lambda$  и  $Z_{0H}$  больше, чем их значения в свободном пространстве. При увеличении частоты (уменьшении  $\lambda$ ) значения  $\Lambda$ ,  $v_\phi$  и  $Z_{0H}$  стремятся к значениям, характерным для свободного пространства. При уменьшении частоты значения  $\Lambda$ ,  $v_\phi$  и  $Z_{0H}$  увеличиваются и при  $f = f_{кр}$  обращаются в бесконечность. Значения постоянной распространения  $k_0$  и групповая скорость  $v_{гр}$  меньше, чем соответствующие значения в свободном пространстве.

Значения  $v_{гр}$  и  $k_0$  при увеличении частоты  $f$  стремятся к значениям  $v$  и  $k$  в свободном пространстве, при уменьшении частоты значения  $v_{гр}$  и  $k_0$  уменьшаются и при  $f = f_{кр}$  обращаются в нуль (см. рис. 5.7). При этом  $v_{гр} v_\phi = v^2$ .

Если среда, находящаяся между плоскостями, представляет собой воздух, то фазовая скорость направленной волны больше скорости света. Это не противоречит теории относительности, согласно которой скорость распространения электромагнитного поля не может быть больше скорости света, так как в данном случае  $v_\phi$  не скорость распространения электромагнитного поля, а скорость распространения фазы направленной волны в установившемся режиме. Скорость распространения электромагнитного поля определяется как скорость распространения электромагнитной энергии и в установившемся режиме совпадает с групповой скоростью  $v_{гр}$ , которая меньше скорости света.

Интерпретация неоднородной волны, распространяющейся между параллельными плоскостями, в виде суммы двух однородных плоских волн позволяет объяснить отличие  $\Lambda$  от  $\lambda$  и  $v_\phi$  от  $v$ . На рис. 5.8 гребни плоских однородных волн представлены одной сплошной линией, впадины — двумя. Там, где встречаются гребни или впадины обеих волн, соответственно образуются гребни или впадины результирующей волны. Расстояние между соседними гребнями или впадинами определяет длину результирующей волны  $\Lambda$ . Из рисунка следует, что

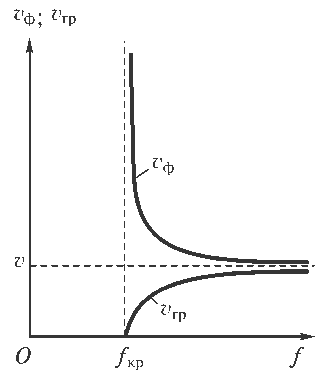


Рис. 5.7. Зависимость групповой и фазовой скоростей от частоты

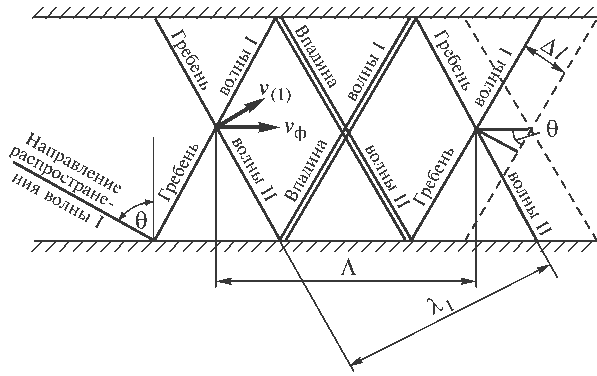


Рис. 5.8. К определению длины результирующей волны  $\Lambda$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta}.$$

Гребень каждой волны перемещается со скоростью  $v$  (рис. 5.9). В точке пересечения гребней составляющих волн расположен гребень результирующей волны. Точка пересечения гребней перемещается быстрее, чем гребень составляющей волны:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}; \quad v_\phi = \frac{\Delta l}{\Delta t \sin \theta}; \quad v_\phi > v.$$

То, что  $v_{гр} < v$ , легко объясняется тем, что каждая составляющая плоская волна бежит со скоростью  $v$  по зигзагообразному пути, в направлении оси  $x_3$ , сигнал за то же время проходит более короткий путь. Таким образом,  $v_{гр} < v$ .

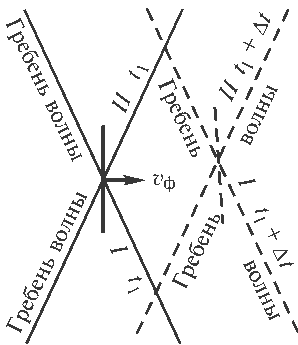


Рис. 5.9. К определению фазовой скорости  $v_\phi$ :

— — положение гребней составляющих волн в момент  $t_1$ ;  
 ---- — положение гребней составляющих волн в момент  $t_1 + \Delta t$

**$E_n$ -волны.** В случае вертикальной поляризации между пластинами распространяется неоднородная волна с продольной электрической составляющей. Зависимость  $k_0$ ,  $v_\phi$ ,  $v_{гр}$  и  $\Lambda$  от частоты определяется, как и для Н-волны формулами (5.8)—(5.11), а волновое сопротивление системы определяется выражением

$$Z_{0E} = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{E_2}{E_1} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}.$$

Отметим, что

$$Z_{0E} Z_{0H} = \left(\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}\right)^2 = Z_0^2.$$

**Т-волна.** Между параллельными плоскостями может распространяться и плоская однородная волна.

Действительно, если плоская однородная волна распространяется в свободном пространстве в направлении оси  $x_3$ , то

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_m &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-jkx_3}; \\ \dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{e}_2 E_m e^{-jkx_3}.\end{aligned}$$

Если внести две идеально проводящие плоскости, перпендикулярные оси  $x_2$  и отстоящие друг от друга на любое расстояние  $d$ , то поле не изменится, так как граничные условия удовлетворяются. Поле имеет только поперечные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Волна распространяется между параллельными плоскостями так же, как в свободном пространстве, т. е.

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \quad v_\phi = v_{\text{гр}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Таким образом, между параллельными плоскостями могут распространяться Н-, Е- и Т-волны в следующих случаях.

1. Продольная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  отсутствует, существует продольная составляющая вектора  $\mathbf{H}$ , электрическая составляющая находится в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Такая волна называется Н-волной.

2. Продольная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  отсутствует, существует продольная составляющая вектора  $\mathbf{E}$ , магнитная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  находится в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Такая волна называется Е-волной.

3. Продольные составляющие векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  отсутствуют, составляющие векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  находятся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Такая волна называется Т-волной.

Т-волна представляет собой волну, значение постоянной распространения которой  $k$ , а значит, и ее фазовая скорость не зависят от геометрии направляющей системы, т. е. от расстояния  $d$  между параллельными плоскостями.

В технике для передачи энергии используют ленточные линии, представляющие собой длинные металлические ленты конечной ширины. При достаточной ширине этих лент поле между ними, если пренебречь краевым эффектом, совпадает с полем, распространяющимся между бесконечными параллельными идеально проводящими плоскостями.

### 5.3. Прямоугольный волновод. $H_{mn}$ -волны

Структуру электромагнитного поля в прямоугольном волноводе можно определить с помощью уже исследованного поля между параллельными плоскостями.

Действительно, систему, состоящую из двух параллельных идеально проводящих плоскостей (см. рис. 5.5), между которыми распространяется Н-волна, описываемая уравнениями (5.1) и (5.4), можно дополнить двумя другими парал-

лельными идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными первым двум и параллельными плоскости  $x_2Ox_3$ . При этом вектор  $\mathbf{E}$  будет перпендикулярен этим дополнительным плоскостям, и, следовательно, граничное условие  $E_\tau = 0$  будет удовлетворено при любом расстоянии между дополнительными плоскостями. Таким образом, мы перешли к прямоугольному волноводу с Н-волной.

В прямоугольном волноводу может распространяться и Е-волна, однако в этом случае граничное условие  $E_\tau = 0$  удовлетворяется на дополнительных плоскостях только при определенных расстояниях между ними.

Т-волна вследствие невыполнимости граничного условия  $E_\tau = 0$  при любом расстоянии между дополнительными плоскостями распространяться не может.

Рассмотрим прямоугольный волновод, у которого широкая стенка имеет размер  $a$  и направлена по оси  $x_1$ , узкая — размер  $b$  и направлена по оси  $x_2$ . В этом случае направление распространения поля совпадает с осью  $x_3$  (рис. 5.10).

Предполагаем, что волновод заполнен средой без потерь с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . Поскольку стенки выполнены из хорошо проводящего материала, то с большой точностью выполняются условия (4.52) и (4.53), т. е. стенки волновода можно считать идеально проводящими.

Исследуем поле Н-волны. В этом случае имеется продольная составляющая вектора  $\mathbf{H}$ ,  $E_3 = 0$ . Волна распространяется в направлении оси  $x_3$ , множитель распространения  $e^{-jk_0x_3}$ .

Волновое уравнение для составляющей  $H_{m3}$  имеет вид

$$\Delta \dot{H}_{m3} + k^2 \dot{H}_{m3} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{m3}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{m3}}{\partial x_2^2} + (k^2 - k_0^2) \dot{H}_{m3} = 0. \quad (5.13)$$

Очевидно, что вследствие необходимости удовлетворения граничных условий на стенках волновода решение этого уравнения будет иметь вид

$$\dot{H}_{m3} = H_{m3}(x_1, x_2) e^{-jk_0x_3}.$$

Согласно методу Фурье — методу разделения переменных — представим это решение в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$\dot{H}_{m3} = X_1(x_1) X_2(x_2) e^{-jk_0x_3} = X_1 X_2 e^{-jk_0x_3}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.13) и разделив на произведение  $X_1 X_2 e^{-jk_0x_3}$ , получаем

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = -(k^2 - k_0^2) = -\chi^2,$$

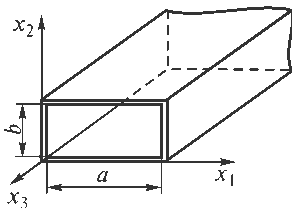


Рис. 5.10. Прямоугольный волновод



где  $\chi^2$  не зависит от переменных  $x_1, x_2$ . Такое равенство возможно, если каждое слагаемое не зависит от этих переменных, т. е.

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} = -\chi_1^2; \quad \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = -\chi_2^2,$$

где

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2.$$

Полученные уравнения представляют собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, их решения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1; \\ X_2 &= C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{H}_{m3} = (A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1)(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3}, \quad (5.14)$$

где  $A, B, C, D, \chi_1, \chi_2$  — постоянные интегрирования, которые необходимо определить.

Остальные составляющие поля найдем из уравнений Максвелла (2.8)

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m &= j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m; \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m &= -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_m. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial x_3} = -jk_0$  и  $E_{m3} = 0$ , получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} + jk_0 \dot{H}_{m2} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}; \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} + jk_0 \dot{H}_{m1} = -j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}; \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} = 0;$$

$$\dot{E}_{m2} = -\frac{\omega \mu_a}{k_0} \dot{H}_{m1}; \quad (5.17)$$

$$\dot{E}_{m1} = \frac{\omega \mu_a}{k_0} \dot{H}_{m2}; \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{m3}.$$

Подставляя (5.17) в (5.16), получаем

$$\dot{H}_{m1} = -\frac{jk_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1}. \quad (5.19)$$

Согласно (5.18) и (5.15)

$$\dot{H}_{m2} = -\frac{jk_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2}. \quad (5.20)$$

Определим постоянные интегрирования  $A, B, C, D, \chi_1, \chi_2$  при удовлетворении граничных условий на стенках волновода. На границе раздела диэлектрик — проводник  $E_\tau = 0$ . Это условие можно записать в виде:

- 1)  $E_{m2} = 0$  при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ;
- 2)  $E_{m1} = 0$  при  $x_2 = 0$  и  $x_2 = b$ .

В соответствии с выражениями (5.17), (5.19) и (5.14)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m2} &= \frac{j\omega\mu_a}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} = \frac{j\omega\mu_a\chi_1}{\chi^2} \times \\ &\times (-A \sin \chi_1 x_1 + B \cos \chi_1 x_1)(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3}. \end{aligned}$$

В случае  $x_1 = 0$

$$B(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3} = 0.$$

Выражение в скобках, в котором  $x_2$  произвольно, не равно нулю, следовательно,  $B = 0$ .

В случае  $x_1 = a$

$$-A \sin \chi_1 a (C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3} = 0.$$

Здесь  $A \neq 0$ , так как в противном случае не было бы изменения поля вдоль оси  $x_1$ , а это невозможно при наличии боковых металлических стенок. Очевидно, что

$$\sin \chi_1 a = 0$$

или

$$\chi_1 a = m\pi,$$

где  $m$  — целое число.

Отсюда

$$\chi_1 = \frac{m\pi}{a}.$$

Согласно (5.18), (5.20) и (5.14)

$$\dot{E}_{m1} = -\frac{j\omega\mu_a}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} = -\frac{j\omega\mu_a\chi_2}{\chi^2} A \cos \chi_1 x_1 (-C \sin \chi_2 x_2 + D \cos \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3}.$$

При  $x_2 = 0$

$$A \cos \chi_1 x_1 D = 0.$$

Отсюда  $D = 0$ ,  $C \neq 0$ .

При  $x_2 = b$

$$A \cos \chi_1 x_1 C \sin \chi_2 b = 0.$$

Отсюда

$$\sin \chi_2 b = 0$$

или

$$\chi_2 = \frac{n\pi}{b},$$

где  $n$  — целое число.

Обозначив  $AC = H$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m1} &= \frac{jk_0 \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m2} &= \frac{jk_0 \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m1} &= \frac{j\omega \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{j\omega \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь  $\chi_1 = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\chi_2 = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\chi^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,

но одновременно  $m$  и  $n$  не могут равняться нулю, так как согласно выражениям (5.21) электромагнитное поле будет равно нулю.

Полученные формулы определяют поле  $H_{mn}$ -волны в прямоугольном волноводе. Решения (5.21) возможны лишь для определенных значений  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , при которых удовлетворяются граничные условия. Эти значения называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями.

Решение, выраженное уравнениями (5.21), представляет собой частное решение для одного значения  $m$  и одного значения  $n$ . Общее решение в векторной форме можно представить в виде

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (\mathbf{E}_{mn} + \mathbf{H}_{mn}),$$

т. е. поле в волноводе в самом общем случае является суперпозицией полей, соответствующих всем возможным собственным значениям.

Каждому собственному колебанию  $H_{mn}$ -волны соответствует своя постоянная распространения  $k_{0mn}$ . В дальнейшем там, где это не будет вызывать недоумений, индексы  $m, n$  будем опускать.

$H_{mn}$ -волна будет распространяться, если соответствующая ей постоянная распространения  $k_0$  действительная:

$$k_0 = \sqrt{k^2 - \chi^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2}.$$

В соответствии с выражением (5.8)

$$k_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2},$$

т. е.

$$\frac{\chi}{k} = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}$$

или

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (5.22)$$

Критическая частота

$$f_{\text{кр}} = \frac{v}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (5.23)$$

где  $v$  — скорость распространения поля в среде, заполняющей волновод.

Из полученных формул (5.22) и (5.23) следует, что  $\lambda_{\text{кр}}$  для данного типа волны определяется только геометрическими размерами волновода, в то время как критическая частота зависит и от параметров среды, заполняющей волновод.

Если длина волны в свободном пространстве с параметрами среды, заполняющей волновод,  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$  или частота  $f > f_{\text{кр}}$ , то волна распространяется по волноводу. В противном случае ( $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ ) она затухает на небольшом отрезке длины волновода.

Числа  $m$  и  $n$  в уравнениях (5.21) определяют число полуволновых вариаций поля по соответствующим осям  $x_1$  и  $x_2$  и служат для обозначения типа волны. Числа  $m$  и  $n$  однозначно определяют критическую длину волны, соответствующую данным размерам волновода. При этом согласно (5.22) с увеличением чисел  $m$  и  $n$  критическая длина волны уменьшается.

Для  $H_{mn}$ -волн

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad v_{гр} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2};$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad Z_{0H} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Поскольку фазовая и групповая скорости зависят от частоты, то прямоугольный волновод обладает дисперсией.

#### 5.4. Поле $H_{10}$ в прямоугольном волноводе

Основным, или низшим, типом волны называется такой тип, который обладает наибольшей критической длиной волны при данных размерах волновода. При этом поперечные размеры волновода для заданной частоты оказываются наименьшими. Если одно из чисел  $m$  или  $n$  равно нулю, то, как это следует из уравнений (5.21), поле будет существовать. Поэтому низшим типом  $H$ -волны в прямоугольном волноводе при  $a > b$  является волна  $H_{10}$ , у которой

$$\lambda_{кр10} = 2a.$$

Следующим по простоте типом является волна  $H_{01}$ , критическая длина которой  $\lambda_{кр01} = 2b$ . Так как  $b < a$ , то  $\lambda_{кр10} > \lambda_{кр01}$ . Критические длины волн других типов еще короче. Чтобы волновод работал на основном типе должно соблюдаться условие

$$\lambda_{кр01} < \lambda < \lambda_{кр10}.$$

$H_{10}$ -волна применяется почти всегда для передачи энергии по прямоугольному волноводу. Структуру поля  $H_{10}$  получим, приняв в формулах (5.21)  $m = 1$ ,  $n = 0$ :

$$\dot{H}_{m3} = H \cos \frac{\pi}{a} x_1 e^{-jk_0 x_3};$$

$$\dot{H}_{m1} = jk_0 \frac{a}{\pi} H \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{-jk_0 x_3};$$

$$\dot{E}_{m2} = -\frac{j\omega\mu_a a}{\pi} H \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{-jk_0 x_3}.$$

Учитывая, что

$$k_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

и

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos \frac{\pi}{a} x_1 e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m1} &= j \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m2} &= -j \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cdot e^{-jk_0 x_3}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

или

$$\begin{aligned} H_3 &= H \cos \frac{\pi}{a} x_1 \cos(\omega t - k_0 x_3); \\ H_1 &= -\frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin(\omega t - k_0 x_3); \\ E_2 &= \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin(\omega t - k_0 x_3). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Структура поля  $H_{10}$  приведена на рис. 5.11. В направлении оси  $x_2$  поле однородно, линии электрического поля идут параллельно оси  $x_2$ . Распределение поля по оси  $x_1$  имеет вид стоячей волны, причем вдоль стороны  $a$  волновода укладывается одна стоячая полуволна поля. Вдоль оси  $x_3$  поле имеет вид бегущей волны, постоянная распространения которой

$$k_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2},$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве с параметрами среды, заполняющей волновод.

Скорость распространения этой волны

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}.$$

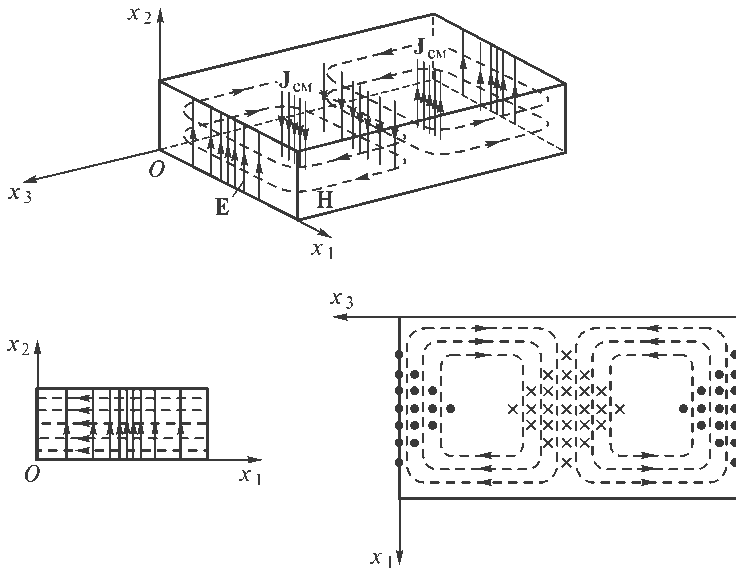


Рис. 5.11. Структура поля  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе

Длина волны в волноводе отличается от длины волны в свободном пространстве и равна

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}.$$

Волновое сопротивление

$$Z_{0H} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}.$$

Интересно отметить, что согласно (5.25) магнитное поле имеет две составляющие, амплитуды которых зависят от координат рассматриваемой точки. Эти составляющие сдвинуты в пространстве и во времени на  $90^\circ$ . Таким образом, магнитное поле имеет эллиптическую поляризацию, которая вырождается в линейную в точках плоскости, соответствующих  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = \frac{a}{2}$ ,  $x_1 = a$ .

При  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$

$$H_3 = H \cos(\omega t - k_0 x_3); \quad H_1 = 0;$$

при  $x_1 = \frac{a}{2}$

$$H_3 = 0; \quad H_1 = \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \sin(\omega t - k_0 x_3).$$

Магнитное поле имеет круговую поляризацию в тех точках, где амплитуды составляющих  $H_1$  и  $H_3$  равны. Эти точки лежат в плоскостях, называемых плоскостями круговой поляризации. Таких плоскостей две. Они параллельны боковым стенкам волновода и находятся на одинаковом расстоянии от этих стенок. Вращение вектора  $\mathbf{H}$  в точках этих плоскостей имеет противоположное направление. Координаты плоскостей находятся из условия равенства амплитуд составляющих магнитного поля

$$H \cos \frac{\pi}{a} x_1 = \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \sin \frac{\pi}{a} x_1$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{a} x_1 = \frac{\lambda}{2a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}},$$

где  $x_1$  — расстояние от соответствующей боковой стенки плоскости круговой поляризации.

Из полученной формулы следует, что положение плоскости круговой поляризации изменяется с изменением частоты.

Плотность тока смещения

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Согласно (5.25) ток смещения в прямоугольном волноводе определяется выражением

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \mathbf{e}_2 \varepsilon_a \frac{2a\omega}{\lambda} Z_0 H \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos(\omega t - k_0 x_3).$$

Таким образом, распределение тока смещения совпадает с распределением электрического поля с опережением во времени на четверть периода (или на  $90^\circ$  по фазе). Токи смещения приведены на рис. 5.12.

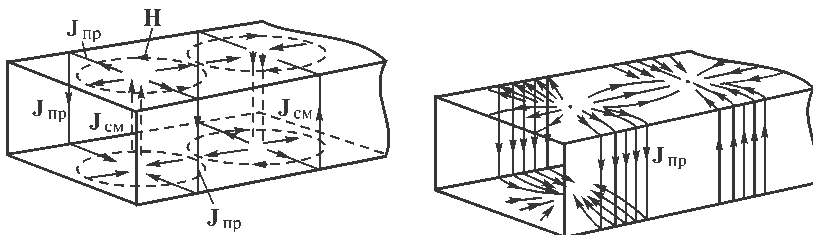


Рис. 5.12. Токи проводимости и токи смещения поля  $H_{10}$



В стенках волновода наводится поверхностный ток, определяемый из граничных условий

$$\mathbf{J}_{\text{пов}} = [\mathbf{n}_0 \mathbf{H}],$$

где  $\mathbf{n}_0$  — орт внешней нормали к поверхности, направленный внутрь волновода.

Поверхностные токи замыкаются через токи смещения, образуя замкнутые кольца полного тока. Картина поверхностных токов приведена на рис. 5.12.

Мощность, переносимая волной основного типа  $H_{10}$  может быть определена путем интегрирования вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода и усреднения его во времени. Согласно (5.24)

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{E}_2 \dot{H}_1^* = \frac{2a^2}{\lambda^2} Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1; \\ P_0 &= \int_0^a \int_0^b \Pi_0 dx_1 dx_2 = \frac{a^3 b}{\lambda^2} Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H^2 = \frac{a^3 b}{\lambda^2 Z_{0H}} Z_0^2 H^2 = \frac{E_{2\max}^2}{4Z_{0H}} ab, \end{aligned}$$

где  $E_{2\max}$  — максимальная амплитуда электрического поля волны  $H_{10}$  при

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad Z_{0H} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \text{ — волновое сопротивление прямоугольного волно-}$$

вода при распространении основного типа  $H_{10}$ .

Предельной мощностью называется наибольшая мощность, которую можно передать по волноводу без электрического пробоя. Эта мощность определяется действующим значением предельной напряженности электрического поля  $E_{\text{пред}}$  в

точке  $x_1 = \frac{a}{2}$ . Для воздуха при нормальном атмосферном давлении и нормальной ионизации предельная напряженность электрического поля равна 30 кВ/см. В режиме бегущей волны предельная мощность

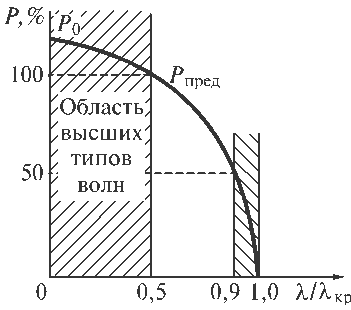
$$E_{\text{пред.б.в}} = \frac{E_{\text{пред}}^2}{4Z_0} ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

При наличии отражения предельная мощность уменьшается, так как в местах пучности поля опасность пробоя возрастает.

Допустимая рабочая мощность рассчитывается с учетом наличия отраженной волны (допустимое значение  $K_{\text{с.в.н}} \leq 1,5$ ), запаса электрической прочности и неоднородностей, которые концентрируют электрическое поле:

$$P_{\text{доп}} = \left(\frac{1}{3} \cdots \frac{1}{5}\right) P_{\text{пред.б.в.}}$$

Предельная и допустимая мощности зависят от частоты.



**Рис. 5.13.** Зависимость предельной мощности от отношения  $\lambda/\lambda_{кр}$

График зависимости предельной мощности от отношения  $\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} = \frac{\lambda}{2a}$  приведен на рис. 5.13.

Рабочей областью обычно считают область

$$0,5 \leq \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \leq 0,9.$$

Слева эта область ограничена появлением высших типов, справа — уменьшением предельной мощности вдвое по сравнению с ее значением на границе области высших типов волн, условно принятым за единицу. Следует отметить, что в выделенной рабочей области высшие типы волн

не распространяются, если  $\lambda > 2b$ . Это условие выполняется, если  $b < \frac{a}{2}$ , что и имеет место во всех применяемых прямоугольных волноводах. При заданных размерах волновода диапазон значений рабочей длины волны определяется соотношением

$$a \leq \lambda \leq 1,8a.$$

Обычно передача энергии в волноводе ведется на основном типе волны. При наличии высших типов волн наблюдаются нежелательные интерференционные явления.

### 5.5. Прямоугольный волновод. $E_{mn}$ -волны

В случае  $E_{mn}$ -волн продольная составляющая  $H_3 = 0$ . Продольную составляющую  $E_3$  можно определить из уравнения

$$\Delta \dot{E}_{m3} + k^2 \dot{E}_{m3} = 0.$$

Поскольку это уравнение аналогично уравнению для  $H_{m3}$  (5.13), то  $E_{m3}$  будет иметь такой же вид, как и  $H_{m3}$  (5.14), т. е.

$$\dot{E}_{m3} = (A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1)(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3}, \quad (5.26)$$

где

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2; \quad k^2 - k_0^2 = \chi^2.$$

Постоянные интегрирования найдем из граничного условия  $E_\tau = 0$ , которое сводится к следующему виду:

1)  $E_{m3} = 0$  при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ;

2)  $E_{m3} = 0$  при  $x_2 = 0$  и  $x_2 = b$ .

При  $x_1 = 0$

$$A(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3} = 0,$$

т. е.  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ .

При  $x_1 = a$

$$B \sin \chi_1 a (C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2) e^{-jk_0 x_3} = 0,$$

т. е.  $\sin \chi_1 a = 0$  или  $\chi_1 = \frac{m\pi}{a}$ , где  $m$  — целые числа.

При  $x_2 = 0$

$$B \sin \chi_1 x_1 C \cdot e^{-jk_0 x_3} = 0,$$

т. е.  $C = 0$ ,  $D \neq 0$ .

При  $x_2 = b$

$$B \sin \chi_1 x_1 D \sin \chi_2 b \cdot e^{-jk_0 x_3} = 0,$$

т. е.  $\sin \chi_2 b = 0$  или  $\chi_2 = \frac{n\pi}{b}$ , где  $n$  — целые числа.

Таким образом, выражение (5.26) будет иметь вид

$$\dot{E}_{m3} = E \sin \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}, \quad (5.27)$$

где  $BD = E$ .

Остальные составляющие поля найдем из уравнений Максвелла (2.8)

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m;$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_m.$$

В проекциях на оси координат, учитывая, что  $H_{m3} = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial x_3} = -jk_0$ ,

получаем

$$jk_0 \dot{H}_{m2} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1};$$

$$-jk_0 \dot{H}_{m1} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}; \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m3},$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_2} + jk_0 \dot{E}_{m2} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{m1};$$

$$-jk_0 \dot{E}_{m1} - \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_1} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{m2}; \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} = 0.$$

В соответствии с выражением (5.28)

$$\begin{aligned}\dot{E}_{m1} &= \frac{k_0}{\omega \epsilon_a} \dot{H}_{m2}; \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{k_0}{\omega \epsilon_a} \dot{H}_{m1}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

Подставляя (5.30) в (5.29) с учетом  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  и  $k^2 - k_0^2 = \chi^2$ , получаем

$$\begin{aligned}\dot{H}_{m1} &= \frac{j\omega \epsilon_a}{\chi^2} \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_2}; \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{j\omega \epsilon_a}{\chi^2} \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_1}.\end{aligned}\quad (5.30a)$$

Согласно (5.30), (5.30a) и (5.27) окончательно имеем

$$\begin{aligned}E_{m3} &= E \sin \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ E_{m1} &= -\frac{jk_0 \chi_1}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{jk_0 \chi_2}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m1} &= \frac{j\omega \epsilon_a \chi_2}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{j\omega \epsilon_a \chi_1}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cdot e^{-jk_0 x_3},\end{aligned}\quad (5.31)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\chi_1 = \frac{m\pi}{a}$ ;  $\chi_2 = \frac{n\pi}{b}$ ;  $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ .

В полученных формулах числа  $m$  и  $n$  не могут равняться нулю. Критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},\quad (5.32)$$

т. е. определяется той же формулой, что и для Н-волн. Поэтому волны  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  при одинаковых индексах имеют одну и ту же критическую длину волны.

Низший тип  $E_{mn}$ -волн — это  $E_{11}$ -волна, критическая длина которой

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

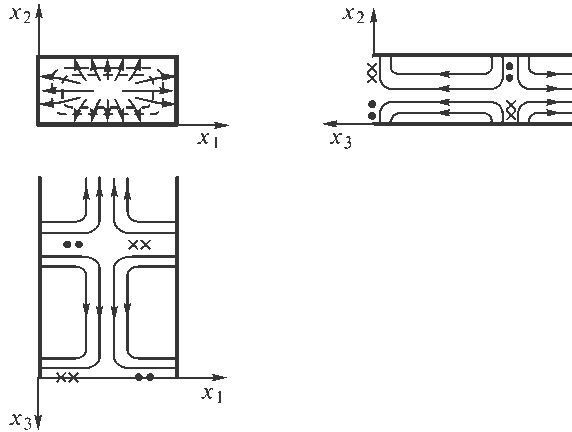


Рис. 5.14. Структура поля  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе

меньше длины  $\lambda_{кр}$  поля  $H_{10}$ . Структура поля  $E_{11}$  приведена на рис. 5.14.

Для Е-волн

$$k_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}; \quad v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad v_{гр} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2};$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad Z_{0E} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

т. е. и при распространении Е-волн прямоугольный волновод является системой с дисперсией.

## 5.6. П- и Н-образные волноводы

Для увеличения широкополосности тракта в технике сверхвысоких частот применяют волноводы П- и Н-образного поперечного сечения, или П- и Н-образные волноводы (рис. 5.15). Преимущество таких волноводов перед прямоугольными заключается в том, что критическая длина основной волны оказывается значительно больше, чем в прямоугольном волноводе тех же поперечных размеров, т. е. П- и Н-образные волноводы более широкополосны. Поясним это обстоятельство. Представим П-образный волновод в виде прямоугольного волновода, деформированного в средней части тонким идеально проводящим ребром (рис. 5.16, а). Полоса пропускания прямоугольного волновода занимает область длин волн

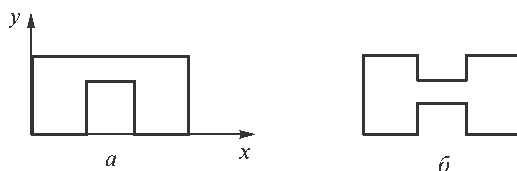


Рис. 5.15. Волноводы:

а — П-образный; б — Н-образный

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} < \lambda < \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}}.$$

Как видно на рис. 5.16, б, где представлено распределение электрической составляющей  $E_y$  волн  $\text{H}_{10}$  и  $\text{H}_{20}$  прямоугольного волновода, введение ребра почти не оказывает влияния на  $\text{H}_{20}$ -волну, т. е.  $\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}}$  существенно не изменяется. Сильное влияние ребро оказывает на  $\text{H}_{10}$ -волну, поскольку вводится в максимум ее электрического поля. Чтобы определить новые значения  $\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}}$  ( $\lambda_{\text{кр}}^{\text{кH}_{10}}$ )\*, воспользуемся тем, что критическая длина волны волновода  $\lambda_{\text{кр}}$  совпадает с резонансной длиной волны  $\lambda_p$  в поперечном сечении. (В поперечном сечении имеет место резонанс, поскольку поле имеет характер стоячей волны.) Критическую частоту можно приблизительно найти по формуле

$$\omega_{\text{кр}}^{\text{кH}_{10}} = \omega_p^{\text{кH}_{10}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{эф}} C_{\text{эф}}}},$$

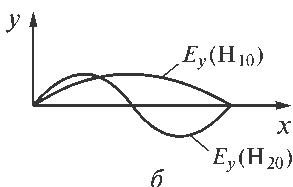
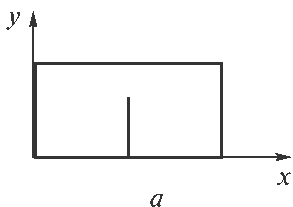


Рис. 5.16.

деформированный П-образный волновод (а) и распределение составляющей  $E_y$  для волн  $\text{H}_{10}$  и  $\text{H}_{20}$  (б)

где  $L_{\text{эф}}$  и  $C_{\text{эф}}$  — эффективные индуктивность и емкость резонансного контура.

Введение ребра увеличивает значение  $C_{\text{эф}}$ , в результате критическая частота  $\omega_{\text{кр}}^{\text{кH}_{10}}$  уменьшается, а следовательно, увеличивается  $\lambda_{\text{кр}}^{\text{кH}_{10}}$ . Линия передачи становится более широкополосной. Таким образом, применение П- и Н-образных волноводов позволяет снизить критическую частоту при заданных габаритах волновода или уменьшить его габариты при заданной рабочей частоте. Недостатком П- и Н-образных волноводов по сравнению с прямоугольным волноводом является увеличение коэффициента затухания и снижение пропускаемой мощности.

Электромагнитное поле основной волны в волноводах П- и Н-образного сечений имеет малую продольную компоненту  $H_z$ , и волна близка к Т-волне.

\* Приставка «к» перед  $\text{H}_{10}$  обозначает волну квази  $\text{H}_{10}$ .

### 5.7. Волновод круглого сечения

**$H_{nm}$ -волны.** При исследовании волн в волноводе круглого сечения (рис. 5.17) используется цилиндрическая система координат. Ось  $z$  совпадает с осью волновода и направлением распространения волн, т. е. множитель распространения  $e^{-jk_0z}$ . Волновое уравнение

$$\Delta \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0$$

является векторным. Векторный лапласиан

$$\Delta \mathbf{H} = \text{rot rot } \mathbf{H} - \text{grad div } \mathbf{H},$$

скалярный лапласиан

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

Только в декартовой системе координат выражения для скалярного и векторного лапласианов одинаковы.

В цилиндрической системе координат

$$\Delta \mathbf{H} = \left( \Delta H_r - \frac{H_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_r + \left( \Delta H_\alpha - \frac{H_\alpha}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha + \Delta H_z \mathbf{e}_z,$$

где  $\Delta H_r$ ,  $\Delta H_\alpha$ ,  $\Delta H_z$  — лапласианы скалярных величин;

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Только проекция векторного лапласиана на ось  $z$  (прямолинейную ось) зависит от одной составляющей вектора  $\mathbf{H}$ . Для этой составляющей скалярное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_z = 0,$$

или, так как  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_0^2$ , то

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + \chi^2 \dot{H}_{mz} = 0, \quad (5.33)$$

где

$$\chi^2 = k^2 - k_0^2.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_m(r, \alpha) e^{-jk_0z}. \quad (5.34)$$

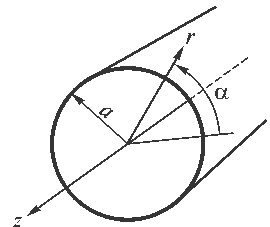


Рис. 5.17. Круглый волновод

Зависимость амплитуды от координат  $r$  и  $\alpha$  обусловлена граничными условиями на стенках волновода. Применим метод Фурье, согласно которому  $\dot{H}_{mz}$  можно представить как произведение функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\dot{H}_{mz} = R(r)\Phi(\alpha)e^{-jk_0z} = R\Phi \cdot e^{-jk_0z}. \quad (5.35)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.33) и разделив его на произведение  $R\Phi \cdot e^{-jk_0z}$ , получаем

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \chi^2 = 0, \quad (5.36)$$

или

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -\chi^2,$$

где  $\chi^2$  — величина, не зависящая от координат  $r$  и  $\alpha$ .

Величина  $\alpha$  входит только во второе слагаемое. Если  $r$  постоянно, а  $\alpha$  изменяется, то сумма этих слагаемых не изменяется. Это возможно лишь в том случае, когда  $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$  не зависит от  $\alpha$ . Поле должно иметь периодическую зависимость от  $\alpha$  и при изменении угла  $\alpha$  на  $2\pi$  иметь то же значение. Таким образом,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \quad (5.37)$$

где  $n$  — целое число.

Решение этого уравнения

$$\Phi = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha$$

можно представить в виде

$$\Phi = \begin{cases} \cos n\alpha; \\ \sin n\alpha. \end{cases}$$

Дифференцируя (5.36) с учетом (5.37), получаем

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \chi^2 = 0.$$

Обозначив  $\chi r = x$ , получим

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{Rx} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) = 0$$

или



$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя. Решение его представляет сумму

$$R = CJ_n(x) + DN_n(x),$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка;  $N_n(x)$  — функция Неймана  $n$ -го порядка.

При  $x=0$ , т. е. при  $r=0$ ,  $N_n(0)=-\infty$  и второе слагаемое физического смысла не имеет, так как электромагнитное поле в центре волновода имеет конечное значение. Таким образом, решение уравнения (5.33) имеет вид

$$\dot{H}_{mz} = HJ_n(\chi r) \begin{cases} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{cases} e^{-jk_0 z}.$$

Остальные составляющие находятся из уравнений Максвелла (2.8). В проекциях на оси цилиндрической системы координат имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r \dot{H}_{m\alpha})}{\partial z} \right] &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mr}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{mr}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m\alpha}; \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r \dot{H}_{m\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial \dot{H}_{mr}}{\partial \alpha} \right] &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mz}; \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r \dot{E}_{m\alpha})}{\partial z} \right] &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{mr}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{mr}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{m\alpha}; \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r \dot{E}_{m\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial \dot{E}_{mr}}{\partial \alpha} \right] &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{mz}. \end{aligned}$$

Для Н-волн  $H_{mz} \neq 0$  и  $E_{mz} = 0$ . Кроме того,  $\frac{\partial}{\partial z} = -jk_0$ . С учетом этого получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha} + jk_0 r \dot{H}_{m\alpha} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mr}; \quad (5.39)$$

$$-jk_0 \dot{H}_{mr} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m\alpha}; \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}jk_0 \dot{E}_{m\alpha} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_{mr}; \\jk_0 \dot{E}_{mr} &= j\omega\mu_a \dot{H}_{m\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{\omega\mu_a}{k_0} \dot{H}_{mr}; \\ \dot{E}_{mr} &= \frac{\omega\mu_a}{k_0} \dot{H}_{m\alpha}.\end{aligned}$$

С учетом значений  $\dot{E}_{m\alpha}$  и  $\dot{E}_{mr}$  в (5.39) и (5.40) получим

$$\begin{aligned}\dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{jk_0}{\chi^2 r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha}; \\ \dot{H}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mz} &= HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi} HJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{jk_0}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{j\omega\mu_a n}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= \frac{j\omega\mu_a}{\chi} HJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Согласно граничным условиям  $E_r = 0$  при  $r = a$ , т. е. на стенке волновода. Это условие соответствует  $E_\alpha = 0$  при  $r = a$ , т. е.  $J'_n(\chi a) = 0$ .

График функций Бесселя имеет вид затухающих синусоид. Все  $J_n(x)$ , за исключением  $J_0(x)$ , при  $x = 0$  обращаются в нуль,  $J_0(0) = 1$ . Корни уравнения  $J_n(x) = 0$  представляют собой значения, соответствующие точкам пересечения функции  $J_n(x)$  с осью  $x$ . Это значения  $A_{nm}$ , где  $n$  — порядок функций Бесселя;  $m$  — номер корня.  $B_{nm}$  — корни уравнения  $J'_n(x) = 0$ , т. е. точки пересечения функции  $J'_n(x)$  с осью  $x$ .

Таким образом,

$$\chi = \frac{B_{nm}}{a}.$$

Критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi a}{B_{nm}}.$$

Числа  $n$  в выражениях (5.41) определяют число вариаций по углу, числа  $m$  — по радиусу.

Постоянная распространения

$$k_0 = k \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2},$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  — постоянная распространения в свободном пространстве;  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}},$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$  — скорость распространения в свободном пространстве.

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = v \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}.$$

Длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}.$$

Волновое сопротивление волновода

$$Z_{0H} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}},$$

где  $Z_0 = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Аналогичным образом определяется структура поля  $E_{nm}$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{mz} &= EJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\
 \dot{E}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi} EJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\
 \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{jnk_0}{\chi^2 r} EJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\
 \dot{H}_{mr} &= \frac{j\omega\epsilon_a n}{\chi^2 r} EJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\
 \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{j\omega\epsilon_a}{\chi} EJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Согласно граничным условиям  $E_r = 0$  при  $r = a$  или  $E_{mz} = 0$  при  $r = a$ . Отсюда

$$J_n(\chi a) = 0$$

или

$$\chi a = A_{nm}.$$

Критическая длина волны в этом случае определяется выражением

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi a}{A_{nm}},$$

где  $A_{nm}$  — корни уравнения  $J_n(x) = 0$ .

Низшими типами волн в круглых волноводах являются волны  $H_{11}$  и  $E_{01}$ . Структура поля  $H_{11}$  (рис. 5.18) имеет вид, аналогичный структуре поля  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе; структура поля  $E_{01}$  (см. рис. 5.18) аналогична структуре поля  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе. При плавном переходе от прямоугольного волновода к круглому  $H_{10}$  переходит в  $H_{11}$ -волну,  $E_{11}$ -волна — в  $E_{01}$ -волну. Вследствие осевой симметрии  $E_{01}$ -волну применяют во вращающихся соединениях.  $H_{01}$ -волна имеет структуру поля, получаемую из структуры поля  $E_{01}$ -волны, если поменять местами электрические и магнитные составляющие (см. рис. 5.18). При всех типах волн, за исключением  $H_{01}$  в круглом волноводе потери в стенках волновода при увеличении частоты увеличиваются. При  $H_{01}$  они уменьшаются, так как тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$ , определяющая энергию, поглощаемую стенками, уменьшается по сравнению с поперечной составляющей, определяющей передаваемую волноводом мощность.

Однако в круглом волноводе  $H_{01}$ -волна неустойчива и даже при небольшой эллиптичности сечения она превращается в  $E_{11}$ -волну, обладающую той же кри-

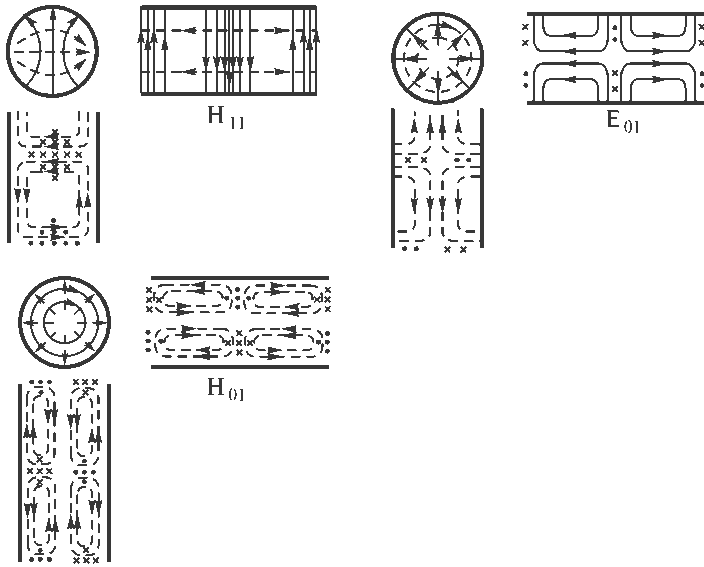


Рис. 5.18. Структура поля волн  $H_{11}$ ,  $E_{01}$  и  $H_{01}$  в круглом волноводе

тической частотой, но большими потерями. Для устойчивого существования  $H_{01}$ -волны волновод делают из изолированных колец или из изолированного провода.

### 5.8. Коаксиальный волновод

Коаксиальный волновод (кабель) состоит из центральной цилиндрической жилы и изолированной от нее коаксиальной оболочки (рис. 5.19). В коаксиальном кабеле могут распространяться волны  $H_{nm}$ ,  $E_{nm}$  и Т.

Структура поля волн  $E_{nm}$  и  $H_{nm}$  определяется так же, как в случае круглого волновода.

**$H_{nm}$ -волна.** Волновое уравнение

$$\Delta \dot{H} + k^2 \dot{H} = 0$$

можно написать лишь для компоненты  $z$ , т. е.

$$\Delta \dot{H}_{mz} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0,$$

или согласно (П.38)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0.$$

(5.43)

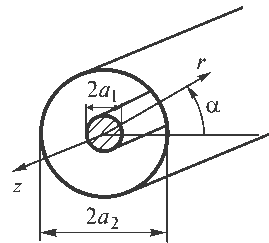


Рис. 5.19. Коаксиальный волновод

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_{mz}(r, \alpha) e^{-jk_0 z}. \quad (5.44)$$

Подставляя (5.44) в (5.43), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + (k^2 - k_0^2) \dot{H}_{mz} = 0$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + \chi^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (5.45)$$

Для решения применим метод Фурье — метод разделения переменных. Представим (5.44) как произведение функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$\dot{H}_{mz} = R(r) \Phi(\alpha) e^{-jk_0 z} = R \Phi \cdot e^{-jk_0 z}. \quad (5.46)$$

Подставляя (5.46) в (5.45) и поделив на выражение (5.46), получаем

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -\chi^2. \quad (5.47)$$

Фиксируя переменную  $r$ , а  $\alpha$  считая переменной, видим, что так как величина  $\chi$  постоянная, то слагаемое  $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$  также постоянное. Поле имеет периодическую зависимость и при изменении угла  $\alpha$  на  $2\pi$  не изменяется. Таким образом,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \quad (5.48)$$

где  $n$  — целое число.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = \left. \begin{aligned} &A \cos n\alpha + B \sin n\alpha = \\ &\sin n\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Учитывая (5.48) в (5.47), находим

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + \chi^2 = 0.$$

Поделив на  $\chi^2$  и обозначив  $\chi r$  через  $x$ , получим

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0$$

— уравнение Бесселя, решение которого имеет вид

$$R = CJ_n(x) + DN_n(x). \quad (5.50)$$

Здесь функция Неймана  $N_n(x)$  учитывается в решении, так как точка  $x = 0$ , соответствующая  $r = 0$ , исключается внутренней жилой. Учитывая (5.49) и (5.50) в (5.46), получаем

$$H_{mz} = [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}. \quad (5.51)$$

Остальные составляющие находим из уравнений Максвелла (2.8) аналогично тому, как это делалось в случае круглого волновода. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi} [CJ'_n(\chi r) + DN'_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{jn k_0}{\chi^2 r} [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{j\omega\mu_a n}{\chi^2 r} [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= \frac{j\omega\mu_a}{\chi} [CJ'_n(\chi r) + DN'_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}. \end{aligned}$$

Поперечное волновое число  $\chi$  определим из граничных условий. Согласно граничным условиям  $E_r = 0$ , т. е.  $E_{m\alpha} = 0$  при  $r = a_1$  и  $r = a_2$ , что соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} CJ'_n(\chi a_1) + DN'_n(\chi a_2) &= 0; \\ CJ'_n(\chi a_2) + DN'_n(\chi a_2) &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{N'_n(\chi a_1)}{J'_n(\chi a_1)} = \frac{N'_n(\chi a_2)}{J'_n(\chi a_2)}.$$

Корни трансцендентного уравнения

$$N'_n(\chi a_1)J'_n(\chi a_2) - N'_n(\chi a_2)J'_n(\chi a_1) = 0$$

определяют поперечные волновые числа  $\chi$ , зависящие от геометрии волновода ( $a_1$  и  $a_2$ ) и типа волны (значений  $n$  и  $m$ ).

Структура поля  $E_{nm}$  определяется аналогично. В соответствии с (5.51)

$$\dot{E}_{mz} = [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} e^{-jk_0 z}$$

и поперечные волновые числа определяются из трансцендентного уравнения

$$N_n(\chi a_1)J_n(\chi a_2) - N_n(\chi a_2)J_n(\chi a_1) = 0.$$

Критическая длина

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi}$$

волн  $E_{nm}$  и  $H_{nm}$  различная.

Основной волной в коаксиальном волноводе является Т-волна. При работе на этой волне размеры коаксиального волновода минимальны.

Постоянная распространения Т-волны

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$$

равна постоянной распространения в свободном пространстве. Поле эквивалентно полю между двумя параллельными плоскостями, свернутыми в цилиндр. При этом

$$E_z = H_z = E_\alpha = H_r = 0.$$

Проекция волнового уравнения на ось  $r$  согласно (П.39) равна

$$\Delta\dot{E}_{mr} - \frac{\dot{E}_{mr}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\dot{E}_{m\alpha}}{\partial\alpha} + k^2\dot{E}_{mr} = 0$$

содержит одну составляющую  $\dot{E}_{mr}$ , так как  $\dot{E}_{m\alpha} = 0$ , т. е.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\dot{E}_{mr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\dot{E}_{mr}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{mr}}{\partial z^2} - \frac{\dot{E}_{mr}}{r^2} + k^2\dot{E}_{mr} = 0. \quad (5.52)$$

Очевидно, что решение будет иметь вид

$$\dot{E}_{mr} = R(r)e^{-jkz}. \quad (5.53)$$

Подставляя (5.53) в (5.52) и поделив на (5.53) с учетом того, что  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2$ ,

получаем

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} - k^2 - \frac{1}{r^2} + k^2 = 0$$

или

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r^2} = 0. \quad (5.54)$$

Уравнение решаем подстановкой:

$$r = e^t; \quad dr = e^t dt; \quad dt = e^{-t} dr.$$

Первая производная



$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{dR}{dt}.$$

Вторая производная

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( e^{-t} \frac{dR}{dt} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dR}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right).$$

Подставляя эти значения в (5.54), получаем

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R = 0 \quad (5.55)$$

— дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение

$$p^2 - 1 = 0$$

имеет корни

$$p_{1,2} = \pm 1.$$

Решение уравнения (5.55) имеет вид

$$R = A e^t + B e^{-t} = Ar + \frac{B}{r},$$

но физический смысл имеет лишь второе слагаемое, так как с увеличением значения  $r$  электрическое поле уменьшается.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= \frac{E_m}{r} \cdot e^{-jkz}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{E_m}{Z_0 r} \cdot e^{-jkz}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где  $Z_0 = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$ .

Структура поля Т-волны приведена на рис. 5.20.

Обычный коаксиальный кабель характеризуют интегральными величинами — током и напряжением. Ток, текущий по кабелю, определяется выражением

$$\dot{I} = \oint_L \dot{\mathbf{J}}_{\text{пов}} d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{E_m}{a_1 Z_0} \cdot e^{-jkz} a_1 d\alpha = \frac{2\pi}{Z_0} E_m \cdot e^{-jkz},$$

напряжение между цилиндрами коаксиальной линии

$$\dot{U} = \int_{a_1}^{a_2} \dot{E}_{mr} dr = E_m \ln \frac{a_2}{a_1} \cdot e^{-jkz},$$

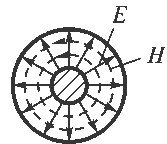


Рис. 5.20. Структура поля Т-волны в коаксиальном волноводе

сопротивление коаксиальной линии

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Если среда, заполняющая волновод, не обладает потерями, то фазовая и групповая скорости не зависят от частоты:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}; \quad v_{\text{гр}} = v_{\phi},$$

т. е. дисперсии нет. Коаксиальная линия передачи с Т-волной применяется в диапазоне частот от постоянного тока до 10 ГГц.

### 5.9. Волноводы с замедленной фазовой скоростью направляемых волн

В рассмотренных выше простейших волноводных линиях передачи фазовые скорости распространения волн превышают скорость света. Такие волны называются быстрыми, а системы, в которых они возможны, — ускоряющими.

В ряде практических приложений требуется, чтобы фазовая скорость электромагнитной волны была меньше скорости света. Медленные волны можно получить, например, в периодических системах, т. е. в системах, продольно неоднородных, состоящих из повторяющихся структурных элементов. Периодическую систему можно создать на основе обычного металлического волновода, если по его длине на равных расстояниях друг от друга разместить диафрагмы. В лампах бегущей волны (ЛБВ) и линейных ускорителях заряженных частиц — основной области применения диафрагмированных (гофрированных) волноводов — от волноводов требуются круговая симметрия и наличие продольного электрического поля.

**Круглый диафрагмированный волновод.** Продольное сечение диафрагмированного круглого волновода показано на рис. 5.21. Диафрагмы представляют собой тонкие металлические перегородки с круговым сечением радиусом  $a$ , прикрепленные к стенке волновода на расстоянии  $d$  друг от друга.

Решение электродинамических задач о периодических системах основано на теореме Флокé, утверждающей, что распределение поля в любой бесконечной

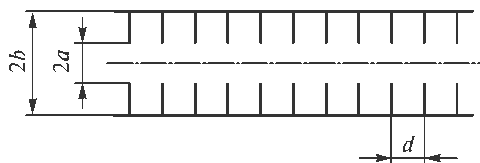


Рис. 5.21. Диафрагмированный круглый волновод

периодической линии должно периодически повторяться в силу идентичности граничных условий. Следовательно, поля в соседних ячейках могут отличаться лишь по фазе (а при наличии поглощения — и по амплитуде):

$$\bar{\Psi}_m(x, y, z + d) = \bar{\Psi}_m(x, y, z) e^{-j\varphi},$$

где  $\varphi = \beta z$ .

Поля в периодической системе обычно представляют в виде суммы пространственных гармоник — гармоник Хартри (аналог гармоник Фурье):

$$\bar{\Psi}_m(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_n(x, y) e^{-j(\beta + 2\pi n/d)z},$$

т. е. свободный волновой процесс рассматривают как наложение бесконечной совокупности плоских неоднородных волн с поперечными распределениями  $\mathbf{E}_n(x, y)$  и  $\mathbf{H}_n(x, y)$  и с постоянными распространения

$$\beta_n = \beta + \frac{2\pi n}{d}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если период направляющей системы весьма мал по сравнению с длиной волны ( $d \ll \lambda$ ), то удовлетворительные результаты дает решение задачи *приближенным методом*, не учитывающим периодичности системы.

Рассмотрим практически используемую симметричную электрическую волну. Приняв во внимание, что в случае медленных волн поперечное волновое число является чисто мнимым:

$$k_c = j\tilde{k}_c,$$

где  $\tilde{k}_c = \sqrt{\beta^2 - k^2} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_a}$  — действительное положительное число, запишем выражения для составляющих поля в области  $0 \leq r < a$ , свободной от диафрагм:

$$\begin{aligned} E_{z1} &= A_1 I_0(\tilde{k}_c r) e^{-j\beta z}; \\ E_{r1} &= -A_1 \frac{j\beta}{\tilde{k}_c} I_1(\tilde{k}_c r) e^{-j\beta z}; \\ H_{\alpha 1} &= A_1 \frac{j\omega \epsilon_a}{\tilde{k}_c} I_1(\tilde{k}_c r) e^{-j\beta z}, \end{aligned}$$

где  $I_n(\tilde{k}_c r)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Волна такого типа в диафрагмированной области ( $a < r < b$ ) невозможна, так как составляющая  $E_r$  должна обращаться в нуль на стенках диафрагм, а составляющая  $E_z$  — при  $r = b$ . Из условия  $d \ll \lambda$  следует, что на протяжении одного

периода  $d$  фаза волны изменяется незначительно, т. е.  $\beta d \ll 1$ . Поэтому в области  $a < r < b$  возбуждается в основном поле, не зависящее от  $z$ . Простейший тип колебаний, удовлетворяющий указанным требованиям, имеет вид

$$\begin{aligned} E_{z2} &= A_2 [J_0(kr)N_0(kb) - N_0(kr)J_0(kb)]; \\ E_{r2} &= 0; \\ H_{\alpha 2} &= A_2 \frac{j\omega\epsilon_a}{k} [J_1(kr)N_0(kb) - N_1(kr)J_0(kb)]. \end{aligned}$$

Можно сказать, что наличие перегородок приводит к появлению в области  $a < r < b$  стоячих цилиндрических волн.

Приравняем тангенциальные составляющие полей на границе  $r = a$ :

$$E_{z1} = E_{z2}; \quad H_{\alpha 1} = H_{\alpha 2} \quad \text{при } r = a, \quad -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2},$$

или

$$\begin{aligned} A_1 I_0(\tilde{k}_c a) e^{-j\beta z} &= A_2 [J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb)]; \\ A_1 \frac{j\omega\epsilon_a}{\tilde{k}_c} I_1(\tilde{k}_c a) e^{-j\beta z} &= A_2 \frac{j\omega\epsilon_a}{k} [J_1(ka)N_0(kb) - N_1(ka)J_0(kb)]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Согласно левым частям равенств (5.57) поля зависят от координаты  $z$  при  $r = a$ , а согласно их правым частям поля не зависят от координаты  $z$  при  $r = a$ . Поэтому точное удовлетворение условию сопряжения невозможно. Однако при  $\beta d \ll 1$  экспоненту  $e^{-j\beta z}$  можно заменить единицей и тогда поля сопрягаются («сшиваются»).

Из соотношения (5.57) получим характеристическое уравнение

$$\tilde{k}_c a \frac{I_0(\tilde{k}_c a)}{I_1(\tilde{k}_c a)} = \frac{J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)N_0(kb) - N_1(ka)J_0(kb)} ka, \quad (5.58)$$

определяющее постоянную распространения симметричной волны электрического типа при известных размерах  $a$  и  $b$  диафрагмированного волновода. Анализ характеристического уравнения показал, что замедленная волна в данной системе возможна лишь при определенных условиях (правая часть уравнения (5.58) должна быть больше двух).

Для получения интенсивного взаимодействия между волной и частицами в ЛБВ и линейных ускорителях необходимо, чтобы поле имело достаточно сильную электрическую составляющую вдоль направления движения частиц ( $E_z$ ), благодаря которой происходит их торможение (в ЛБВ) или ускорение (в ускорителях). Замедление  $\left(p = \frac{\beta}{k}\right)$  бегущей вдоль диафрагмированного волновода волны должно быть малым ( $p \approx 1$ ) в ускорителях и порядка 10 в ЛБВ.

Распределение электрического поля в области волновода  $0 \leq r \leq a$  показано на рис. 5.22. Электромагнитное поле «прилипает» к поверхности  $r = a$  тем сильнее, чем больше параметр  $\tilde{k}_c a = ka\sqrt{p^2 - 1}$ . При  $\tilde{k}_c a \gg 1$  поле экспоненциально убывает при удалении от диафрагмы. Медленная волна проявляет поверхностный характер. Поэтому применять диафрагмированный волновод при больших значениях параметра  $\tilde{k}_c a$  невыгодно, так как на электроны, движущиеся вблизи от оси  $z$ , действует сравнительно слабое поле.

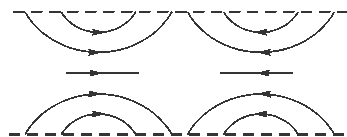


Рис. 5.22. Распределение электрического поля в диафрагмированном волноводе

В заключение отметим, что несимметричная медленная волна в диафрагмированном волноводе имеет продольную электрическую составляющую, пропорциональную функции  $I_m(\tilde{k}_c r)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Если  $\tilde{k}_c r \ll 1$ , то  $I_m(\tilde{k}_c r) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\tilde{k}_c r}{2} \right)^m$ , откуда  $E_z = 0$  при  $r = 0$ , т. е. электри-

ческое поле волны не действует на электроны, движущиеся по оси  $z$ .

**Линии поверхностной волны.** Линии поверхностной волны — линии открытого типа. Часть энергии распространяющейся вдоль них волны сосредоточена во внешнем пространстве. Линии поверхностной волны иначе называют линиями замедленной волны, поскольку фазовая скорость волн в них меньше скорости распространения плоских волн во внешней среде. Благодаря замедлению волны электромагнитное поле распространяющейся вдоль линии волны как бы «прилипает» («прижимается») со стороны внешнего пространства к поверхности линии. Отсюда название — поверхностная волна. Амплитуда поверхностной волны экспоненциально убывает по нормали к поверхности линии (рис. 5.23), хотя в окружающей среде ее ничто не ограничивает.

Линии поверхностной волны (диэлектрические волноводы, спирали, гофрированные структуры) находят широкое применение в технике сверхвысоких частот от дециметрового до субмиллиметрового диапазонов волн.

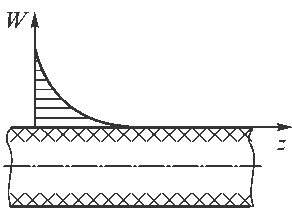


Рис. 5.23. Распределение амплитуды поверхностной волны:

$W$  — энергия волны, распространяющаяся во внешнем пространстве

**Диэлектрические волноводы.** Диэлектрический волновод представляет собой линию передачи, выполненную в виде стержня прямоугольного, круглого, кольцевого или другого сечения (рис. 5.24) из диэлектрика с небольшими потерями и диэлектрической проницаемостью большей, чем у окружающей среды. Такие линии, не содержащие металлических проводников, могут применяться для передачи СВЧ-энергии.

Волноводные свойства диэлектрического стержня обусловлены тем, что волна, распространяющаяся в диэлектрике и падающая на границу раздела с другой электродинамически менее плотной средой, при оп-

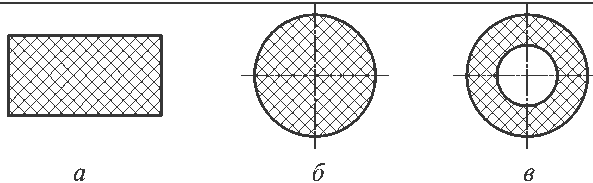


Рис. 5.24. Поперечное сечение диэлектрических волноводов:

*a* — прямоугольное; *б* — круглое; *в* — кольцевое

ределенных условиях испытывает полное внутреннее отражение. При этом часть энергии сохраняется в пределах диэлектрика, а часть просачивается во внешнюю среду, создавая поверхностную волну (рис. 5.25). Таким образом, энергия волны распространяется внутри и вне диэлектрического стержня. Чем больше поперечные размеры стержня по сравнению с длиной волны и чем выше относительная диэлектрическая проницаемость материала стержня, тем большая часть энергии распространяется внутри диэлектрика и тем более замедленной становится волна.

Рассмотрим задачу о распространении электромагнитных волн в продольно-регулярном диэлектрическом волноводе круглого сечения, поперечное сечение которого показано на рис. 5.26.

В соответствии с методом частичных областей разобьем плоскость поперечного сечения волновода на две частичные области, соответствующие различным средам. Запишем продольные составляющие электромагнитного поля в этих областях:

• в области 1 ( $0 \leq r \leq a$ ) с учетом условий  $2\pi$ -периодичности и ограниченности поля в нуле

$$E_{z1} = A_1 J_m(k_{c1} r); \quad n \rightarrow m$$

$$H_{z1} = A_2 J_m(k_{c1} r), \quad n \rightarrow m$$

где  $k_{c1} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_{a1} \mu_{a1} - \beta^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - p^2}$ ;  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}$ ;  $\mu_1 = \frac{\mu_{a1}}{\mu_0}$ ;  $p = \frac{\beta}{2\pi/\lambda}$ ;

• в области 2 ( $0 \leq r \leq \infty$ ) с учетом условий  $2\pi$ -периодичности и экспоненциального убывания поля поверхностной волны

$$E_{z2} = A_3 K_m(\tilde{k}_{c2} r); \quad n \rightarrow m$$

$$H_{z2} = A_4 K_m(\tilde{k}_{c2} r), \quad n \rightarrow m$$

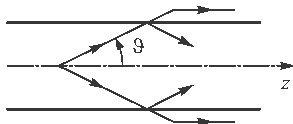


Рис. 5.25. Образование поверхностной волны

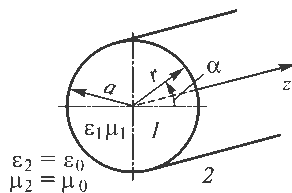


Рис. 5.26. Круглый диэлектрический волновод:

1 — внутренняя область; 2 — внешняя область

где  $\tilde{k}_{c_2} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{p-1}$ ;  $K_m(\tilde{k}_{c_2} r)$  — функция Макдональда. Здесь и далее волновой множитель  $\exp(j\omega t - \gamma z)$  опускаем.

Поперечные составляющие полей определяются через продольные следующими формулами:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{k_c^2} \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\omega\mu_a}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} \right); \\ E_\alpha &= -\frac{1}{k_c^2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} + j\omega\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial r} \right); \\ H_r &= -\frac{1}{k_c^2} \left( \gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\omega\epsilon_a}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} \right); \\ H_\alpha &= -\frac{1}{k_c^2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} + j\omega\epsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \quad \gamma = j\beta, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} = jm. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Далее на границе раздела ( $r = a$ ) проведем сопряжение тангенциальных составляющих полей:

$$\begin{aligned} E_{z_1} &= E_{z_2}; & E_{\alpha_1} &= E_{\alpha_2}; \\ H_{z_1} &= H_{z_2}; & H_{\alpha_1} &= H_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель полученной системы уравнений, найдем характеристическое уравнение относительно неизвестной постоянной распространения  $\beta$  (а при  $\beta = 0$  — относительно  $\lambda_{кр}$ ). Характеристическое уравнение имеет бесчисленное множество корней, определяющих дискретный спектр собственных волн диэлектрического волновода. (Помимо дискретного спектра собственных волн диэлектрический волновод имеет непрерывный спектр волн излучения, не учитываемых данным характеристическим уравнением. Однако это обстоятельство для продольно регулярных систем не следует учитывать, поскольку излучение возникает лишь при возбуждении, а также в местах появления неоднородностей — изгибов, скруток и др.)

Анализ характеристического уравнения, которое ввиду громоздкости здесь не приводится, показал, что только при  $m = 0$  возможно независимое существование волн типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  (симметричные волны). В обозначениях  $H_{0n}$  и  $E_{0n}$   $n$  — номер корня соответствующего характеристического уравнения. В остальных случаях когда  $m \neq 0$  (несимметричные волны), поле электромагнитной волны имеет обе продольные составляющие, т. е. является гибридным. Такие волны обозначаются  $(HE)_{mn}$  и  $(EH)_{mn}$  в зависимости от того, в какие волны —  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  — они вырождаются при  $a/\lambda \rightarrow \infty$ . В обозначениях  $(HE)_{mn}$  и  $(EH)_{mn}$   $n$  — соответственно порядковый номер нечетного и четного корней характеристического уравнения.

Низшим типом волны в диэлектрическом волноводе является волна  $(HE)_{11}$ . Структура поля этой волны показана на рис. 5.27.

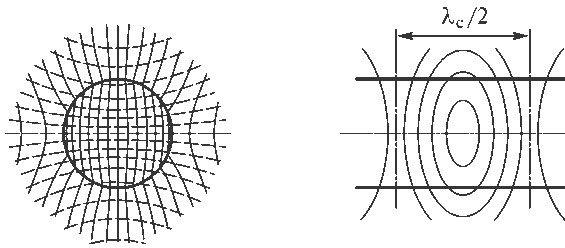


Рис. 5.27. Структура поля волны  $(HE)_{11}$

В поперечном сечении диэлектрического стержня кольца силовых линий волны  $(HE)_{11}$  лежат на параболических цилиндрах. Цилиндры электрических линий являются выпуклыми, а цилиндры магнитных линий — вогнутыми. Отметим, что во многих литературных источниках, наоборот, выпуклыми изображают магнитные линии, исходя из качественной аналогии с волной  $H_{11}$  полого металлического волновода круглого сечения. Однако в металлическом волноводе внешняя среда (металл) является электродинамически более плотной, чем внутренняя, в диэлектрическом волноводе — наоборот, поэтому и форма силовых линий должна иметь различный характер.

Волна  $(HE)_{11}$  не имеет критической частоты ( $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$ ), т. е. теоретически может распространяться на всех частотах и при любом диаметре стержня. Однако направляющее действие и степень концентрации энергии в диэлектрическом волноводе очень быстро уменьшаются при уменьшении частоты ниже некоторого определенного значения. Это значение можно назвать реальной критической частотой.

Все остальные типы волн имеют критические частоты (критические длины волн), определяемые из характеристического уравнения при  $\beta = 0$ . Однако обычное понятие критической частоты для металлических волноводов в данном случае нельзя использовать, поскольку в диэлектрическом волноводе без потерь постоянная распространения  $\gamma$  всегда является мнимой величиной  $k = j\beta$ . Критическими частотами в случае диэлектрического волновода называются частоты, при которых волны определенных типов перестают существовать. По мере приближения к критической частоте энергия волны внутри стержня стремится к нулю, т. е. волна вытесняется во внешнее пространство. При частоте ниже критической волна не распространяется вдоль диэлектрика и перестает существовать, рассеиваясь в окружающей среде, в противоположность металлическому волноводу, в котором после критической частоты постоянная распространения становится действительной.

Фазовая скорость в диэлектрическом волноводе при критической частоте равна скорости электромагнитных волн в свободном пространстве  $v_{\phi} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ , т. е. скорости света. При  $\lambda \ll \lambda_{кр}$  фазовая скорость приближается к скорости в неограниченной среде с параметрами материала диэлектрического волновода:



$v_{\text{ф}} = 1/\sqrt{\epsilon_{\text{ад}}\mu_{\text{ад}}} = c/\sqrt{\epsilon_{\text{д}}}$ . Таким образом, волны в диэлектрическом волноводе оказываются замедленными по отношению к скорости распространения во внешней среде и ускоренными по отношению к скорости распространения во внутренней среде.

Групповая скорость волн в диэлектрическом волноводе всегда меньше скорости распространения во внешней среде.

Диэлектрический волновод характеризуется эффективным поперечным сечением, через которое проходит основной поток мощности (около 90 %), переносимой вдоль волновода.

Затухание в диэлектрическом волноводе определяется в основном потерями в диэлектрике. Потери в диэлектрическом волноводе, выполненном даже из диэлектрика с малыми потерями, значительно больше, чем в металлических волноводах при тех же частотах. Затухание можно существенно снизить, уменьшая поперечные размеры диэлектрического стержня (по сравнению с длиной волны), т. е. вытесняя волну во внешнее пространство. Однако при этом диэлектрические волноводы не могут подвергаться изгибам, скруткам и т. д.

Недостатками диэлектрических волноводов является наличие поля во внешней области, в результате чего при любом нарушении регулярности неизбежно возникает излучение, а также большие, чем у металлических волноводов, габариты. Зачастую диэлектрические волноводы требуют электрической экранировки. При этом металлические экраны являются нежелательными, так как вызывают перекрестную связь между волнами различных типов, к тому же затухание диэлектрических волноводов возрастает за счет потерь в экране. Наилучшие результаты дает экранировка с помощью поглощающих труб. Диаметр этих труб должен быть таким, чтобы не захватывать область распространения энергии вокруг диэлектрика.

В настоящее время диэлектрические волноводы ограниченной длины используются в качестве диэлектрических антенн, а также для построения различных функциональных узлов: направленных ответвителей, мостов, аттенюаторов, эталонных нагрузок, фазовращателей, резонаторов и т. д. В качестве линий передачи диэлектрические волноводы используются сравнительно редко. Применение диэлектрических волноводов наиболее перспективно в миллиметровом диапазоне волн, где они по сравнению с другими типами волноводов имеют ряд преимуществ, прежде всего простоту и дешевизну производства. Применяются диэлектрические волноводы также в субмиллиметровом и оптическом диапазонах. В области очень коротких электромагнитных волн, соответствующей дальнему инфракрасному и световому диапазонам, диэлектрический волновод является единственной приемлемой одноволновой и регулярной линией передачи.

**Однопроводные линии с поверхностной волной.** Электромагнитные волны замедляются не только диэлектриками, но и проводниками. Поверхностная волна может распространяться также вдоль однопроводной линии передачи, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) линия имеет отличное от нуля поверхностное сопротивление;
- 2) идеальный проводник покрыт тонким слоем диэлектрика (линия Губб);
- 3) идеальный проводник выполнен в виде гребенчатой структуры;
- 4) идеальный проводник свит в спираль.

Если провод является идеально проводящим, то распространение волны вдоль него происходит со скоростью света  $c$ . При этом вся энергия волны находится в окружающем проводник пространстве.

**Провод конечной проводимости.** При конечной проводимости провода часть энергии распространяется внутри него, волна замедляется и приобретает поверхностный характер (в направлении, перпендикулярном линии передачи, амплитуда поля убывает по экспоненте). Практически достаточно, чтобы конечную проводимость имел поверхностный слой провода, больший, чем глубина проникновения поля в проводник. Его можно рассматривать как диэлектрический стержень, имеющий комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_{a1} - j \frac{\sigma_1}{\omega},$$

где  $\sigma_1$  — удельная проводимость среды.

Формулы, характеризующие распространение волн вдоль проводника с конечной проводимостью, можно получить из формул для диэлектрического волновода путем замены  $\epsilon_1$  на  $\tilde{\epsilon}_1$ .

Сказанное позволяет сделать следующие выводы. Вдоль проводника с конечной проводимостью могут распространяться симметричные волны электрического и магнитного типов, а также несимметричные гибридные волны. Однако в отличие от диэлектрического волновода основной является волна типа  $E_{01}$ , имеющая нулевую критическую частоту. Структура поля этой волны показана на рис. 5.28. Волна  $E_{01}$  близка к волне идеально проводящей однопроводной линии. Продольная составляющая вектора  $E$  в сравнении с поперечной чрезвычайно мала.

Высшие типы волн однопроводной линии из реального проводника испытывают очень сильное поглощение, поскольку их поля в основном сосредоточены в проводнике; они не имеют практического значения.

Радиальная протяженность поля в окружающем пространстве может быть значительно уменьшена, если металлический провод покрыт тонким слоем ди-

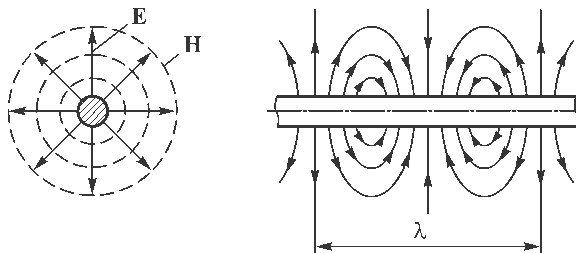
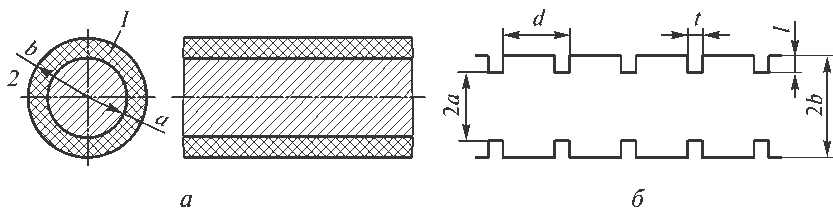


Рис. 5.28. Структура поля волны  $E_{01}$



**Рис. 5.29.** Металлический проводник, покрытый слоем диэлектрика (а), и в виде гофрированной структуры (б):

1 — слой диэлектрика с параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $\mu_{a1}$ ; 2 — внешняя среда с параметрами  $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$ ,  $\mu_{a2} = \mu_0$

электрика или поверхность провода выполнить в виде гофрированной структуры (рис. 5.29). Коэффициент замедления в первом случае определяется толщиной диэлектрика, а во втором — глубиной канавок.

**Линия с диэлектрическим покрытием.** Задача о свободных колебаниях в такой системе решается методом частичных областей. Поперечное сечение представляется в виде двух частичных областей 1 и 2. Продольные составляющие полей в частичных областях записываются следующими формулами:

- для области 1 ( $a \leq r \leq b$ )

$$E_{z1} = A_1 [J_m(k_{c1} r) N_m(k_{c1} a) - N_m(k_{c1} r) J_m(k_{c1} a)];$$

$$H_{z1} = A_2 [J_m(k_{c1} r) N'_m(k_{c1} a) - N_m(k_{c1} r) J'_m(k_{c1} a)];$$

- для области 2 ( $r \geq b$ )

$$E_{z2} = A_3 K_m(\tilde{k}_{c2} r);$$

$$H_{z2} = A_4 K_m(\tilde{k}_{c2} r),$$

где  $k_{c1} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_{a1} \mu_{a1} - \beta^2}$ ;  $\tilde{k}_{c2} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \epsilon_{a2} \mu_{a2}}$ .

Выражения для остальных составляющих полей определяются формулами (5.59). Постоянную  $\beta$  определяем из условия равенства тангенциальных составляющих полей на границе  $r = b$ .

Основными волнами линии с диэлектрическим покрытием являются поверхностные волны типов  $E_{01}$  и  $(HE)_{11}$ , не имеющие отсечек.

Затухание поверхностной волны в линии определяется потерями в металле и диэлектрике. Линии с диэлектрическим покрытием имеют несколько большее затухание, чем линии без покрытия.

**Гофрированный стержень.** Одним из параметров, характеризующих поверхностную волну, является поверхностное сопротивление, равное отношению касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела. Это чисто реактивное сопротивление, индуктивное и емкостное соответственно для поверхностных волн электрического и магнитного типов.

Существуют различные способы создания реактивного поверхностного сопротивления. Например, можно прорезать канавки в металлической поверхности, как показано на рис. 5.29. Каждую канавку гофрированной структуры можно рассматривать как короткозамкнутый отрезок линии длиной  $l$ . Если  $l < \lambda/4$ , ее входное сопротивление чисто реактивное и носит индуктивный характер. Вдоль гофрированной структуры распространяется поверхностная электрическая волна. При  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  входное сопротивление канавки является емкостным.

Для расчета гофрированного стержня при  $t \approx d$  (ребристый стержень) можно использовать приближенный метод, применявшийся ранее для расчета диафрагмированного волновода.

Не приводя расчетных формул, отметим основные свойства гофрированных (ребристых) стержней:

1) в гофрированном стержне, как и во всякой периодической структуре открытого типа, поверхностные волны существуют лишь при условии  $\lambda > 2d$ , где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве, а  $d$  — период структуры; так же должно быть  $\lambda_c > 2d$ ;

2) симметричные поверхности волны могут быть только электрическими; симметричных магнитных волн не существует. Несимметричные поверхностные волны являются гибридными;

3) поверхностные волны с индексами  $m = 0$  и 1 существуют при глубине канавок  $l < \lambda/4$ . При  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  они отсутствуют;

4) симметричная электрическая волна и несимметричная волна низшего типа не имеют отсечки со стороны длинных волн (что весьма существенно для использования гофрированного стержня в качестве линии передачи). Однако для каждой из них существует отсечка (срыв колебаний) со стороны более коротких волн;

5) несимметричная волна с индексом  $m = 2, 3, \dots$  существует при глубине канавок, значение которой находится между некоторыми минимальным и максимальным значениями, зависящими от типа волны и частоты, т. е. волна имеет две отсечки.

Гофрированные стержни ( $t \sim d$ ) используются в качестве антенн, создающих направленное излучение в дециметровом и метровом диапазонах волн, где рупоры и параболические зеркала должны иметь весьма большие размеры и поэтому неудобны. При этом используется простейшая несимметричная волна, дающая максимум излучения в направлении распространения. Симметричная электрическая волна для этой цели неприменима, так как ее излучение вдоль оси стержня равно нулю.

**Полосковая линия.** Полосковая линия, как несимметричная, так и симметричная, состоит из нескольких изолированных друг от друга металлических проводников (рис. 5.30). Следовательно, низшим типом волны в этой линии является Т-волна.

Строгий анализ структуры полей в полосковой линии весьма сложен. Ограничимся приближенным рассмотрением этого вопроса путем сопоставления полосковой и коаксиальной линий, основанным на том, что полосковую линию можно рассмотреть как деформированную коаксиальную линию.

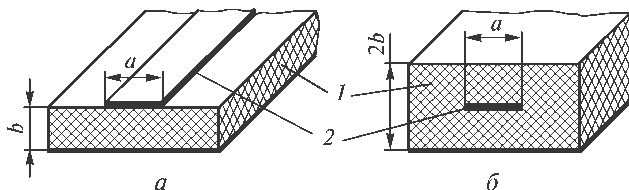


Рис. 5.30. Полосковая линия передачи:

$a$  — несимметричная;  $b$  — симметричная; 1 — диэлектрик; 2 — полосковый проводник

Поскольку поперечное волновое число у Т-волны равно нулю независимо от размеров и формы поперечного сечения направляющей системы, то при деформировании поперечного сечения коаксиальной линии тип волны в ней не меняется. Меняется только форма силовых линий электрического и магнитного полей. На рис. 5.31 показано, как от коаксиальной линии путем последовательного изменения формы проводников можно перейти к симметричной полосковой линии. На последнем этапе узкие боковые стенки внешнего проводника удаляются на бесконечное расстояние. Аналогично, путем последовательного деформирования поперечного сечения коаксиальной линии, в которой распространяется  $H_{11}$ -волна, можно найти структуру поля первого высшего типа волны симметричной полосковой линии. При этом критическая длина волны при воздушном заполнении  $\lambda_{кр}^{H_{11}} \approx 2a$ .

**Спиральный волновод.** Спиральная линия (или спиральный волновод) образуется путем сворачивания провода по винтовой линии (рис. 5.32, а). Замедление электромагнитных волн в спиральной линии осуществляется за счет того, что, изгибая провод (по которому электромагнитные волны распространяются со скоростью света) в спираль, удлиняют путь волны и тем самым уменьшают скорость ее перемещения в осевом направлении. Фазовая скорость волнового процесса в направлении оси системы

$$v_{\phi} = c \sin \vartheta,$$

т. е. замедление определяется углом намотки спирали  $\vartheta$  (углом между проводом и плоскостью  $z = \text{const}$ ) (рис. 5.32, б).

Строгий расчет характеристик спирали связан с большими математическими трудностями, обусловленными отсутствием подходящей системы координат, в которой поверхность спирали была бы координатной и при этом разделялись

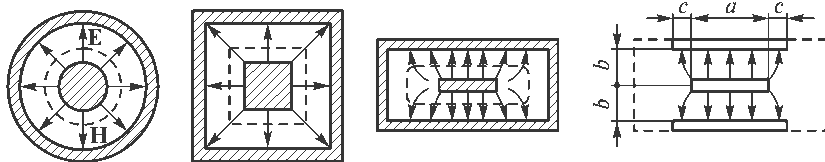


Рис. 5.31. Трансформация поперечного сечения коаксиальной линии к симметричной полосковой

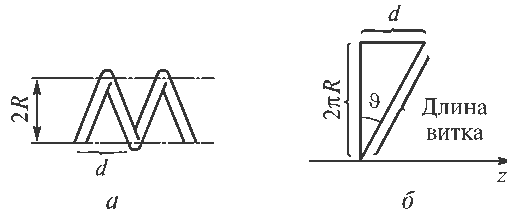


Рис. 5.32. Спиральный волновод:

*a* — спираль; *b* — длина витка и угол намотки спирали

бы переменные в уравнениях Максвелла. Из приближенных методов наибольшее применение нашел метод спирально проводящего цилиндра. Согласно этому методу, если период спирали мал по сравнению с длиной волны ( $d \ll \lambda$ ), т. е. навивка довольно густая, в качестве модели спирального волновода может быть принят цилиндр с анизотропно проводящей поверхностью, обладающей в каждой точке идеальной проводимостью в направлении витков спирали и не проводящей в перпендикулярном направлении. Модель не отражает детали поля, связанные с дискретностью витков спирали и ее периодичностью, но отражает общие особенности, связанные с характером протекания токов по спирали.

Рассмотрим бесконечный спирально проводящий цилиндр (рис. 5.33). Обозначим через  $s$  направление вдоль проводов, через  $\tau$  — перпендикулярное к ним направление.

Запишем в цилиндрической системе координат продольные составляющие электромагнитного поля внутри (индекс «1») и снаружи (индекс «2») цилиндра с учетом условий конечности поля на оси цилиндра и экспоненциального убывания поля поверхностной волны:

- при  $r < R$

$$E_{z1} = C_1 I_m(\tilde{k}_c r);$$

$$H_{z1} = C_2 I_m(\tilde{k}_c r);$$

- при  $r > R$

$$E_{z2} = C_3 K_m(\tilde{k}_c r);$$

$$H_{z2} = C_4 K_m(\tilde{k}_c r),$$

где  $\tilde{k}_c = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$  — для замедленных волн.

Поперечные составляющие полей выражаются через продольные формулами (5.59) с учетом замены  $k_c \rightarrow j\tilde{k}_c$ .

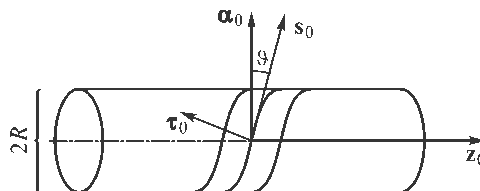


Рис. 5.33. Спирально проводящий цилиндр

Граничные условия на анизотропно проводящей поверхности цилиндра можно сформулировать следующим образом:

1) составляющая  $E_s$  напряженности электрического поля, параллельная направлению проводимости, должна равняться нулю:

$$E_{s1}|_{r=R} = E_{s2}|_{r=R} = 0; \quad (5.60)$$

2) составляющая  $E_\tau$ , перпендикулярная направлению проводимости, должна быть непрерывной на поверхности цилиндра,  $E_{\tau 1}|_{r=R} = E_{\tau 2}|_{r=R}$ , или, что то же самое,

$$E_{z1}|_{r=R} = E_{z2}|_{r=R}; \quad E_{\alpha 1}|_{r=R} = E_{\alpha 2}|_{r=R}; \quad (5.61)$$

3) тангенциальные составляющие магнитного поля в направлении анизотропной проводимости (т. е. в направлении поверхностных токов) должны быть равны. Это есть условие отсутствия тока в направлении, перпендикулярном виткам спирали,

$$H_{s1}|_{r=R} = H_{s2}|_{r=R}. \quad (5.62)$$

Отметим, что  $\mathbf{z}_0 = \alpha_0 \cos \vartheta + \mathbf{z}_0 \sin \vartheta$ , т. е.

$$E_s = E_\alpha \cos \vartheta + E_z \sin \vartheta \text{ и т. д.}$$

Подставляя выражения для составляющих полей в граничные условия (5.60)—(5.62), получаем систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных амплитудных коэффициентов  $C_1—C_4$ . Характеристическое уравнение относительно  $\beta$  определим, как обычно, приравниванием нулю определителя системы.

Анализ характеристического уравнения показывает, что волны, распространяющиеся вдоль спирального волновода, являются гибридными: даже простейшие (симметричные) волны имеют обе продольные составляющие электромагнитного поля.

Это ясно и из простых физических соображений. Действительно, ток, протекающий по спиральному направлению, можно представить в виде кругового тока  $I_\alpha$  и осевого тока  $I_z$ . Току  $I_\alpha$  соответствует продольное магнитное поле  $H_z$ , а току  $I_z$  — поле  $H_\alpha$ . Спирально проводящий цилиндр не проводит тока в направлении, перпендикулярном направлению витков, поэтому составляющая напряженности электрического поля на поверхности спирально проводящего цилиндра, перпендикулярная направлению витков, должна быть отлична от нуля. Эта составляющая поля также может быть представлена в виде суммы кругового  $E_\alpha$  и осевого  $E_z$  полей.

При анализе волн в спирально проводящем цилиндре мы не учитывали дискретности и периодичности спирального волновода. В спирально проводящем цилиндре могут распространяться лишь отдельные дискретные нормальные волны и нет никаких пространственных гармоник, свойственных спиральному волноводу.

Ток, текущий по реальному спиральному проводу, возбуждает в окружающем пространстве сложное электромагнитное поле, представляющее собой суперпозицию бесконечного числа гармоник, которые характеризуются азимутальным числом  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и волновым числом  $\beta_m$ :

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m(r) e^{j(m\alpha + \beta_m z)}; \quad (H = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(r) e^{j(m\alpha + \beta_m z)}).$$

Обычно параметры спирали и диапазон волн выбирают так, чтобы поле одной гармоники ( $m$ -й) по величине значительно превосходило все остальные гармоники. При этом в спиральном волноводе имеет место так называемый  $m$ -й пространственный резонанс и ряды можно заменить одним лишь  $m$ -м членом. При  $m = 0$  имеет место нулевой пространственный резонанс. Пространственный резонанс наблюдается, когда на протяжении большого числа витков (периодов спирали) ток на смежных участках витков (при  $\alpha = \text{const}$ ) имеет практически одну и ту же фазу. Условие  $m$ -го пространственного резонанса

$$|\beta_m| \ll 2\pi/d.$$

Симметричная волна в спиральном волноводе при низких частотах распространяется вдоль оси волновода со скоростью, лишь немного меньшей  $c$ . С ростом частоты фазовая скорость этой волны уменьшается, одновременно изменяется структура ее электромагнитного поля: оно приобретает внутри и вне волновода поверхностный характер, «прилипая» к поверхности ( $r = R$ ). При достаточно высоких частотах ток в противоположных точках одного и того же витка имеет разные знаки, и происходит переход от симметричной ( $m = 0$ ) к несимметричной ( $m = 1$ ) структуре поля. Волны с различными азимутальными индексами могут непрерывно переходить друг в друга при изменении частоты. Эти переходы обусловлены дискретностью спирали, что в граничных условиях (5.60)—(5.62) не учитывалось. Отметим, что в спиральном волноводе могут распространяться и быстрые волны. Действительно, если спираль выполнена в виде ленты, то при уменьшении зазора между соседними витками свойства спирального волновода должны приближаться к свойствам обычного круглого волновода со сплошной стенкой.

В настоящее время спиральные линии широко применяются как линии поддержки (в метровом диапазоне), как замедляющие системы (в сантиметровом диапазоне) и как волноводные системы (в миллиметровом диапазоне). Спиральная замедляющая линия имеет исключительно большое значение для ЛБВ и некоторых родственных ей электронных приборов (используется симметричная волна). Спиральные линии применяются также для конструирования антенн (используется несимметричная волна с  $m = 1$ ).

**Биспираль (бифилярная спираль).** Большое практическое значение имеет не только обычная одиночная спираль, но и двухзаходная спираль, или биспираль. Она получается, если между витками обычной спирали параллельно им поместить вторую такую же спираль (рис. 5.34).



В биспирали следует различать волны двух типов:

- 1) синфазные волны, когда сдвиг по фазе между токами в проводниках равен нулю;
- 2) противофазные волны, когда фазовый сдвиг между токами равен  $\pi$ .

Синфазные волны испытывают только четные пространственные резонансы  $2m$  (где  $m = 0, 2, 4, \dots$ ), а противофазные — нечетные  $(2m + 1)$  (где  $m = 1, 3, 5, \dots$ ).

Биспираль с синфазным типом колебаний нашла применение в ЛБВ с электростатической фокусировкой, а с противофазным — в генераторных и усилительных лампах обратной волны (ЛОВ). В лампе обратной волны, как известно, используются волны с фазовой скоростью, близкой к скорости электронов, но с противоположно направленной групповой скоростью. Такая волна, перенося энергию в направлении  $-z$ , имеет фазовую скорость, направленную по  $+z$ , и наоборот.

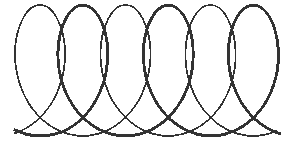


Рис. 5.34. Биспираль

## 5.10. Неоднородные волноводы

Неоднородными называются такие волноводы, у которых в направлении распространения волны меняется поперечное сечение. В ряде случаев они также называются нерегулярными. Рассмотрим наиболее распространенные виды таких волноводов: конический (рис. 5.35, *a*), коаксиальный конический (рис. 5.35, *b*), биконический (рис. 5.35, *в*), квазипирамидальный (рис. 5.35, *г*), сферический (рис. 5.35, *д*), клиновидный (рис. 5.35, *e*), секториальный (рис. 5.35, *ж*) и радиальный (рис. 5.35, *з*) волноводы.

Решение уравнений Максвелла при нахождении полей в электродинамических структурах, геометрия которых такова, что граничные поверхности совпадают с координатными поверхностями криволинейной ортогональной системы координат  $q_1, q_2, q_3$ , можно получить в виде суперпозиции электрических  $E_{mn}$ -волн и магнитных  $H_{mn}$ -волн, составляющие полей которых определяются через скалярные потенциальные функции  $U$  и  $V$ . Если выполняются условия Бромвича

$$h_1 = 1; \quad \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_3} \right) = 0,$$

где  $h_1, h_2, h_3$  — коэффициенты Ламэ, то составляющие электромагнитного поля определяются следующими соотношениями:

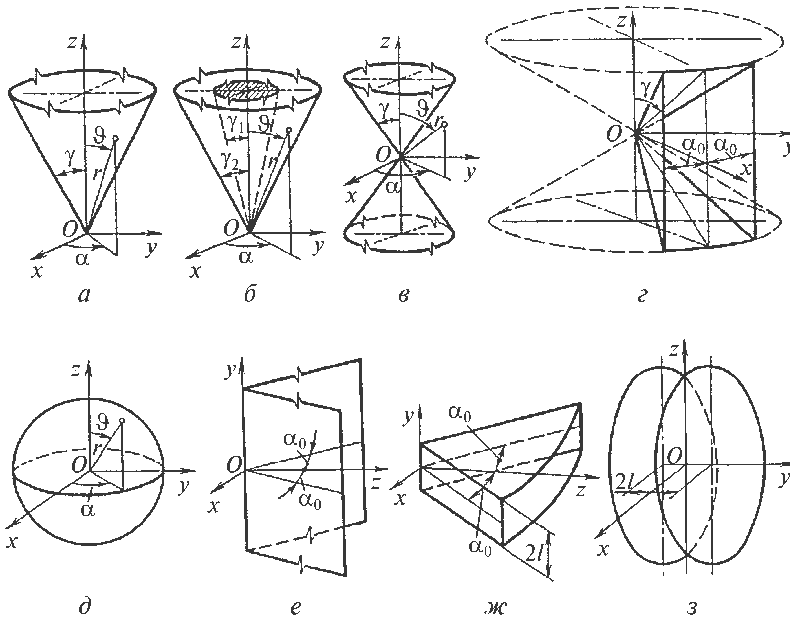


Рис. 5.35. Неоднородные волноводы со сферическими и цилиндрическими направляемыми волнами:

*a* — конический; *б* — коаксиальный конический; *в* — биконический; *г* — квазипирамидальный; *д* — сферический; *е* — клиновидный; *ж* — секториальный; *з* — радиальный

• для  $E_{mn}$ -волны —

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= 0; \quad \dot{E}_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + k^2 U; \\ \dot{H}_2 &= j\omega\epsilon_a \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}; \quad \dot{E}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}; \\ \dot{H}_3 &= -j\omega\epsilon_a \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}; \quad \dot{E}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3}; \end{aligned} \quad (5.63)$$

• для  $H_{mn}$ -волны —

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= 0; \quad \dot{H}_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + k^2 V; \\ \dot{E}_2 &= -j\omega\mu_a \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3}; \quad \dot{H}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}; \\ \dot{E}_3 &= j\omega\mu_a \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2}; \quad \dot{H}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Потенциальные функции  $U$  и  $V$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_1^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial W}{\partial q_3} \right) \right] + k^2 W = 0 \quad (5.65)$$

и соответствующим граничным условиям. Здесь  $W$  — это  $U$  или  $V$ .

**Неоднородные волноводы со сферическими направляемыми волнами.**  
В сферической системе координат (см. § П.2)  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \vartheta$ ,  $q_3 = \alpha$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \vartheta$  и при замене в уравнении (5.65)  $U = ru$ ,  $V = rv$  потенциалы Дебая  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad \Delta v + k^2 v = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в сферической системе координат.

Согласно методу Фурье (метод разделения переменных) для этих уравнений получаем три дифференциальных уравнения:

- по координате  $r$  — уравнение Бесселя в сферической системе координат

$$(kr)^2 R''_{\eta}(kr) + 2kr R'_{\eta}(kr) + [(kr)^2 - \eta(\eta + 1)] R_{\eta}(kr) = 0, \quad (5.66)$$

где штрихи означают производные по аргументу  $kr$ ;

- по координате  $\vartheta$  — уравнение Лежандра

$$(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} L_{\eta}^{p_m}(z) - 2z \frac{d}{dz} L_{\eta}^{p_m}(z) + \left[ \eta(\eta + 1) - \frac{p_m^2}{1 - z^2} \right] L_{\eta}^{p_m}(z) = 0, \quad (5.67)$$

где  $z = \cos \vartheta$ ;

- по координате  $\alpha$  — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Phi''_{p_m}(\alpha) + p_m^2 \Phi(\alpha) = 0. \quad (5.68)$$

Таким образом, частные решения уравнения (5.65) для скалярных потенциалов  $U$  и  $V$  в сферической системе координат имеют вид

$$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} kr R_{\eta}(kr) L_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta) \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} P_m \alpha, \quad (5.69)$$

где  $A$ ,  $B$  — постоянные коэффициенты, определяемые из условий возбуждения;  $\eta = \nu_{mn}$ ,  $\mu_{mn}$  — собственные значения волн  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$ , определяемые из граничных условий  $E_t = 0$  на идеально проводящих поверхностях конического, коаксиального конического, биконического и секториального волноводов по координате  $\vartheta$ ;  $L_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta)$  — частные решения уравнения (5.67), которые являются линейной комбинацией присоединенных функций Лежандра первого рода  $P_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta)$  и второго рода  $Q_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta)$  — для коаксиального конического, биконического и квазипирамидального волноводов;  $L_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta) = P_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta)$  — для

конического и сферического волноводов;  $p_m = m$  — целые числа, определяемые условиями периодичности поля по координате  $\alpha$  для конического, коаксиального конического, биконического и сферического волноводов; для квазипирамидального волновода  $p_m = m\pi/(2\alpha_0)$  — собственные значения, определяемые из граничных условий  $E_\tau = 0$  на идеально проводящих поверхностях (плоскостях) по координате  $\alpha$  ( $2\alpha_0$  — угол раствора в плоскости  $\vartheta = \pi/2$  (см. рис. 5.35,  $z$ )).

Частными решениями уравнения (5.66)  $R_\eta(kr)$  являются линейные комбинации сферических функций Бесселя первого рода  $j_\eta(kr)$ , сферических функций Бесселя второго рода  $n_\eta(kr)$ , а также сферических функций Ханкеля первого и второго рода  $h_\eta^{(1,2)}(kr)$ , причем

$$j_\eta(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot J_{\eta+\frac{1}{2}}(kr); \quad n_\eta(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot N_{\eta+\frac{1}{2}}(kr); \quad h_\eta^{(1,2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot H_{\eta+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(kr),$$

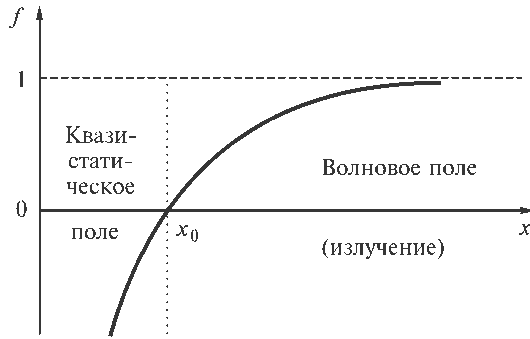
где  $J_{\eta+\frac{1}{2}}(kr)$ ,  $N_{\eta+\frac{1}{2}}(kr)$ ,  $H_{\eta+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(kr)$  — цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля соответственно.

Для того чтобы удовлетворить условию ограниченности поля при  $kr \rightarrow 0$ , необходимо принять  $R_\eta(kr) = j_\eta(kr)$ , поскольку функции  $n_\eta(kr)$  имеют особенность при  $kr \rightarrow 0$ . Чтобы удовлетворить условию излучения при  $kr \rightarrow \infty$ , необходимо принять  $R_\eta(kr) = h_\eta^{(2)}(kr)$  при временной зависимости  $e^{j\omega t}$ , если рассматриваются прямые волны. Как видим, одной функциональной зависимостью невозможно описать поле в диапазоне  $0 \leq kr \leq \infty$ . Однако радиальная зависимость  $kr \cdot R_\eta(kr)$  функций  $U$  и  $V$ , как нетрудно убедиться, введя замены  $x = kr$ ,  $y = kr \cdot R_\eta(kr)$ , удовлетворяет уравнению

$$y'' + f(x)y = 0, \quad (5.70)$$

где  $f(x) = 1 - x_0^2/x^2$ ,  $x_0 = \eta(\eta+1)$ .

Точки дифференциального уравнения (5.70)  $x = x_0$  при  $f(x) = 0$  определяют критические сечения неоднородных волноводов, поскольку при  $f(x) < 0$  имеем запредельную область волновода (квазистатическое поле), а при  $f(x) > 0$  — область распространяющихся внутри волновода волн. Этот факт условно показан на рис. 5.36, где представлена кривая зависимости функции  $f(x)$ . Таким образом, критическое сечение разграничивает области пространства внутри неоднородного волновода с различным характером поведения поля собственной волны. Учитывая этот факт и радиальную зависимость потенциалов  $U$  и  $V$ , решения



**Рис. 5.36.** Разграничение критическим сечением областей пространства внутри неоднородного волновода с различным характером поведения поля собственной волны

дифференциального уравнения (5.65) в сферической системе координат представим в следующем виде:

$$y = kr \cdot R_{\eta}(kr) = kr \begin{cases} j_{\eta}[(kr)_{\text{кр}}] h_{\eta}^{(2)}(kr) & \text{при } kr \geq (kr)_{\text{кр}}; \\ h_{\eta}^{(2)}[(kr)_{\text{кр}}] j_{\eta}(kr) & \text{при } kr \leq (kr)_{\text{кр}}, \end{cases} \quad (5.71)$$

где  $(kr)_{\text{кр}} = \sqrt{\eta(\eta+1)}$ .

Подставляя выражение (5.69) с учетом (5.71) в соотношения (5.63) и (5.64), получим компоненты электромагнитного поля в рассматриваемых волноводах. При известных выражениях для компонент поля можно найти волновое сопротивление каждого типа волны, определяемое как отношение полной поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля к полной поперечной составляющей вектора напряженности магнитного поля. Для волн  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  соответственно получим

$$\begin{aligned} Z_{0E} &= jZ_0 \frac{y'}{y} = \frac{[krR_{v_{mn}}(kr)]'}{krR_{v_{mn}}(kr)}; \\ Z_{0E} &= jZ_0 \frac{y'}{y} = \frac{[krR_{v_{mn}}(kr)]'}{krR_{v_{mn}}(kr)}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

При рассмотрении волновых процессов в неоднородных волноводах удобно ввести логарифмическую производную радиальной зависимости

$$(\ln y)' = y'/y = s,$$

т. е.  $y = C e^{\int s dx} = C e^{\int s d(kr)} = C e^{\int ks dr}$ , где  $C$  — произвольная постоянная, а величина  $ks$  имеет физический смысл локальной «постоянной» распространения соответствующего типа волны. Подставляя выражение для логарифмической производной радиальной зависимости в уравнение (5.70), получаем дифференци-

альное уравнение для величины  $s$ . Этим уравнением является дифференциальное уравнение Риккати

$$s' + s^2 = \frac{\eta(\eta+1)}{(kr)^2} - 1.$$

При  $kr \rightarrow \infty$ ,  $s' \rightarrow 0$  получаем  $s^\infty \rightarrow \pm j$ , т. е. волна распространяется как плоская в радиальном направлении с постоянной распространения  $k_0 = \pm k$ . С учетом изложенного «постоянная» распространения собственного типа волны  $k_0^\eta$  определяется как

$$k_0^\eta = -jk \frac{y'}{y} = -jk \frac{[krR_\eta(kr)]'}{krR_\eta(kr)}. \quad (5.73)$$

Поскольку  $k_0^\eta$  зависит от  $r$ , то слово «постоянная» взято в кавычки.

Тогда выражения для волновых сопротивлений собственных типов волн (5.72) принимают вид

$$Z_{0E} = -Z_0 k_0^\eta / k; \quad Z_{0H} = Z_0 k / k_0^\eta. \quad (5.74)$$

Из выражений (5.71) и (5.73) следует, что  $k_0^\eta$  — величина мнимая при  $kr < (kr)_{\text{кр}}$  и характеризует коэффициент затухания волны соответствующего типа. При  $kr > (kr)_{\text{кр}}$  величина  $k_0^\eta$  комплексная, действительная часть которой  $\text{Re } k_0^\eta$  — фазовая «постоянная», а мнимая  $\text{Im } k_0^\eta$  — коэффициент затухания. Волновое сопротивление является комплексной величиной, реактивная составляющая которого на критическом сечении претерпевает скачок. При  $kr \rightarrow \infty$   $k_0^\eta = k$ ,  $Z_{0E} = Z_{0H} = Z_0$ , а при  $(kr)_{\text{кр}} \rightarrow \infty$

$$k_0^\eta = k \sqrt{1 - \frac{\eta(\eta+1)}{(kr)^2}}.$$

Следует отметить, что в коаксиальном коническом и биконическом волноводах основным типом является Т-волна, для которой критическое сечение отсутствует, и она может распространяться от любого конечного  $r$ .

Фазовая скорость  $v_\phi$  и длина волны в системе  $\Lambda$  собственного  $\eta$ -го типа волны определяются соответственно формулами

$$v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re } k_0^\eta} = c \left| krh_\eta^{(2)}(kr) \right|^2; \quad (5.75)$$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\text{Re } k_0^\eta} = \lambda \left| krh_\eta^{(2)}(kr) \right|^2, \quad (5.76)$$

где  $c$  — скорость света. При выводе этих формул использовались выражение (5.73) и выражение в верхней строке формулы (5.71).

**Энергетические характеристики собственных сферических волн неоднородных волноводов.** Из выражений для составляющих поля (5.63) и (5.64) с учетом соотношений (5.69) и (5.70) следует, что для каждой волны собственного типа  $E_{mn}$  поперечный вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}_{\perp}^{\nu} = \mathbf{e}_{\vartheta} H_{\vartheta}^{\nu} + \mathbf{e}_{\alpha} H_{\alpha}^{\nu}$$

на собственном критическом сечении непрерывен, а поперечный вектор напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_{\perp}^{\nu} = \mathbf{e}_{\vartheta} E_{\vartheta}^{\nu} + \mathbf{e}_{\alpha} E_{\alpha}^{\nu}$$

претерпевает разрыв, определяющий эквивалентный магнитный поверхностный ток плотностью

$$\mathbf{J}_{\nu}^{\text{M}} = -[\mathbf{e}_r, \text{sign } \mathbf{E}_{\perp}^{\nu}], \quad (5.77)$$

где  $\text{sign } \mathbf{E}_{\perp}^{\nu} = E_{\perp}^{\nu+} - E_{\perp}^{\nu-}$  — сигнатура поперечного вектора напряженности электрического поля на собственном критическом сечении; верхний индекс «+» означает, что  $E_{\perp}^{\nu+}$  берется при  $kr = (kr)_{\text{кр}}$  со стороны  $kr \geq (kr)_{\text{кр}}$ , а индекс «-» — со стороны  $kr \leq (kr)_{\text{кр}}$ , индекс « $\nu$ » означает пару индексов « $m$ » для  $E_{mn}$ -волн. Для каждой  $H_{mn}$ -волны вектор  $\mathbf{H}_{\perp}^{\mu}$  претерпевает разрыв на собственном критическом сечении, определяющий эквивалентный электрический поверхностный ток плотностью

$$\mathbf{J}_{\mu}^{\text{E}} = [\mathbf{e}_r, \text{sign } \mathbf{H}_{\perp}^{\mu}]. \quad (5.78)$$

Здесь индекс « $\mu$ » означает пару индексов « $m$ » для  $H_{mn}$ -волн. При этом вектор  $\mathbf{E}_{\perp}^{\mu}$  на собственном критическом сечении непрерывен.

Таким образом, собственные волны рассматриваемых волноводов содержат вторичные источники в виде эквивалентных поверхностных токов (5.77) и (5.78) на собственных критических сечениях.

Следует отметить, что поверхностные электрические и магнитные токи вводятся как эквивалентные всякий раз, когда рассматриваемое электромагнитное поле претерпевает разрыв на некоторой поверхности  $S$ . Тем самым создается возможность и поверхностные токи задавать не явным образом, а в виде значений скачка тангенциальных компонент вектора  $\mathbf{E}_{\perp}$  или  $\mathbf{H}_{\perp}$  на какой-либо поверхности. В общем случае наличие источника электромагнитного поля в свободном пространстве можно установить по характерному разрыву непрерывности поля, или сигнатуре. Эти разрывы, накладывающиеся на решение уравнений Максвелла, можно считать факторами, создающими поля излучения. В данном

случае поверхностью, на которой происходит скачок соответствующей тангенциальной составляющей поля, является критическое сечение  $(kr)_{\text{кр}} = \sqrt{\eta(\eta+1)}$ .

Таким образом, физический процесс образования эквивалентных электрического и магнитного токов на критическом сечении — разрыв соответствующего тангенциального поля.

Следуя и далее принципу эквивалентности, будем рассматривать собственный сферический лист эквивалентного магнитного тока на критическом сечении как источник  $E_{mn}$ -волн, а собственный сферический лист эквивалентного электрического тока — как источник  $H_{mn}$ -волн. Воспользовавшись теоремой Умова — Пойнтинга в комплексной форме для каждого собственного типа волны, получим

$$-\frac{1}{2k^2} \int_{S_{\text{кр}}} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{J}_v^M & \mathbf{H}_\perp^{V*} \\ \mathbf{J}_\mu^{E*} & \mathbf{E}_\perp^\mu \end{array} \right\} dS_{\text{кр}} = j2\omega (W_H^\eta - W_E^\eta) + \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{E}_\perp^\eta, \mathbf{H}_\perp^{\eta*}] \mathbf{e}_r dS, \quad (5.79)$$

где  $W_H^\eta$  и  $W_E^\eta$  — средние за период значения запасенных магнитной и электрической энергий собственной волны в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ;  $dS_{\text{кр}} = (kr)_{\text{кр}}^2 \sin \vartheta d\alpha d\vartheta$ ,  $dS = r^2 \sin \vartheta d\alpha d\vartheta$ .

В левой части выражения (5.79) стоят члены, которые определяют мощность, отдаваемую эквивалентным источником  $\eta$ -го типа волны. Выражения, стоящие в правой части, показывают, куда расходуется энергия источника. Первый член в правой части определяет реактивную мощность, накапливаемую в данном объеме, второй член — мощность, излучаемую через поверхность  $S$  (он является комплексным, как и левая часть выражения (5.79)). Действительные части этих выражений равны и определяют излученную мощность:

$$P_\Sigma^\eta = \text{Re} \frac{1}{2k^2} \int_{S_{\text{кр}}} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{J}_v^M & \mathbf{H}_\perp^{V*} \\ \mathbf{J}_\mu^{E*} & \mathbf{E}_\perp^\mu \end{array} \right\} dS_{\text{кр}} = \text{Re} \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{E}_\perp^\eta, \mathbf{H}_\perp^{\eta*}] \mathbf{e}_r dS. \quad (5.80)$$

Подставляя выражения (5.63), (5.64), (5.69), (5.71), (5.77), (5.78) в (5.80), получаем

$$\begin{aligned} P_\Sigma^V &= \frac{1}{2} |A|^2 \frac{k^2}{Z_0} j_V^2 [(kr)_{\text{кр}}]; \\ P_\Sigma^\mu &= \frac{1}{2} |B|^2 k^2 Z_0 j_\mu^2 [(kr)_{\text{кр}}]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Выражение (5.80) отражает известный факт: излучаемая мощность может быть рассчитана либо методом наведенных ЭДС или МДС (первый интеграл в (5.80)), либо методом вектора Пойнтинга (второй интеграл в (5.80)). Оба метода дают один и тот же результат (5.81). Следовательно, критические сечения неод-



нородных волноводов со сферическими направляемыми волнами можно рассматривать как излучающие поверхности с распределением эквивалентных плотностей токов, определяемых выражениями (5.77), (5.78).

**Конический волновод.** В сферической системе координат с началом в вершине конуса и углом раствора  $2\gamma$  конический волновод представлен схематически на рис. 5.35, а. Потенциалы  $U$  и  $V$  в этом случае определяются выражением (5.69), в котором

$$L_{\eta}^m(\cos \vartheta) = P_{\eta}^m(\cos \vartheta),$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  Компоненты поля определяются выражениями (5.63) и (5.64). Удовлетворение граничных условий на внутренней идеально проводящей поверхности конуса  $E_{\alpha}^{\nu}|_{\vartheta=\gamma} = 0$  и  $E_{\alpha}^{\mu}|_{\vartheta=\gamma} = 0$  приводит к уравнениям для определения собственных значений  $\nu$  для  $E_{mn}$ -волн и  $\mu$  для  $H_{mn}$ -волн

$$P_{\nu}^m(\cos \gamma) = 0; \quad \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_{\mu}^m(\cos \vartheta) \right|_{\vartheta=\gamma} = 0. \quad (5.82)$$

Определение корней этих уравнений при нецелых значениях  $\nu$  и  $\mu$  представляет собой сложную математическую проблему. Поэтому при решении прикладных задач технической электродинамики и антенн широко используется аппроксимация сферических присоединенных функций Лежандра  $P_{\nu}^m(\cos \vartheta)$  цилиндрическими функциями Бесселя первого рода  $m$ -го порядка вида  $P_{\nu}^m(\cos \vartheta) \approx J_m(\vartheta\sqrt{\nu(\nu+1)})$ . Тогда уравнения (5.82) принимают вид

$$J_m(\gamma\sqrt{\nu(\nu+1)}) = 0; \quad \left. J'_m(\vartheta\sqrt{\mu(\mu+1)}) \right|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (5.83)$$

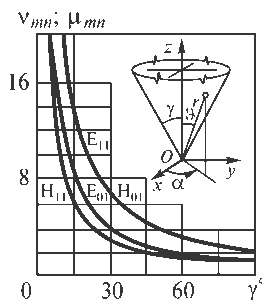
где штрих означает производную по всему аргументу.

Обозначая корни первого уравнения через  $A_{mn}$ , а корни второго уравнения через  $B_{mn}$ , получаем формулы для расчета собственных значений  $\nu$  и  $\mu$ :

$$\nu = \sqrt{0,25 + (A_{mn}/\gamma)^2} - 0,5;$$

$$\mu = \sqrt{0,25 + (B_{mn}/\gamma)^2} - 0,5.$$

Зависимость собственных значений для нескольких первых типов волн от угла  $\gamma$  представлена на рис. 5.37. Последовательность возбуждения типов волн совпадает с последовательностью их возбуждения в круглом волноводе. Основным типом волны является  $H_{11}$ , а ближайшим к нему —  $E_{01}$ . Однако следует иметь в виду, что в коническом волноводе волны сферические и каждый последующий тип волны распространяется со своего критического сечения:



**Рис. 5.37.** Зависимость собственных значений для нескольких первых типов волн от угла  $\gamma$

$$(kr)_{\text{кр}}^{\nu} = \sqrt{\nu(\nu+1)} = A_{mn}/\gamma; \quad (kr)_{\text{кр}}^{\mu} = \sqrt{\mu(\mu+1)} = B_{mn}/\gamma.$$

При известных собственных значениях и собственных критических сечениях все соотношения и формулы для параметров конического волновода, полученные выше, принимают конкретный вид.

**Коаксиальный конический и биконический волноводы.** В сферической системе координат с началом в вершинах конусов коаксиальный конический и биконический волноводы схематически представлены на рис. 5.35, б, в. Если в биконическом волноводе обозначить  $\gamma = \gamma_1$ ,  $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ , то фактически рассматривается одна и та же электродинамическая структура. Основная низшая волна — Т-волна и ее волновые параметры обсуждались выше. Рассмотрим высшие типы волн. Выражения для потенциалов  $U$  и  $V$  имеют вид (5.69), где

$$L_{\eta}^m(\cos \vartheta) = P_{\eta}^m(\cos \vartheta) + C_{\eta} Q_{\eta}^m(\cos \vartheta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Компоненты поля определяются выражениями (5.63) и (5.64). Удовлетворение граничным условиям на идеально проводящих поверхностях конусов  $E_{\alpha}^{\nu}|_{\vartheta=\gamma_1, \gamma_2} = 0$ ,  $E_{\alpha}^{\mu}|_{\vartheta=\gamma_1, \gamma_2} = 0$  приводит к характеристическим уравнениям для определения собственных значений  $\nu$  и  $\mu$ :

$$\begin{aligned} P_{\nu}^m(\cos \gamma_2) Q_{\nu}^m(\cos \gamma_1) - P_{\nu}^m(\cos \gamma_1) Q_{\nu}^m(\cos \gamma_2) &= 0; \\ P_{\mu}^{m'}(\cos \gamma_2) Q_{\mu}^{m'}(\cos \gamma_1) - P_{\mu}^{m'}(\cos \gamma_1) Q_{\mu}^{m'}(\cos \gamma_2) &= 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где штрих означает производную по углу  $\vartheta$ . Поскольку получить аналитические выражения для корней этих уравнений не представляется возможным, обычно в литературе приводятся результаты численных исследований и представляются графические зависимости параметров  $\nu$  и  $\mu$  от разности углов  $\gamma_2 - \gamma_1$ . Анализ этих зависимостей показывает, что  $H_{m1}$ -волны ведут себя как и аналогичные волны в регулярном коаксиальном волноводе: с уменьшением разности углов  $\gamma_2 - \gamma_1$  их собственные значения монотонно уменьшаются, что приводит к уменьшению расстояния от вершины конусов до собственного критического сечения. Зависимость параметров  $\nu$  и  $\mu$  от угла  $\gamma_1$  при разных значениях  $\gamma_2$  показывает, что при  $\gamma_2 \rightarrow 0$  наблюдается разрежение спектра собственных волн, т. е. увеличение расстояния между критическими сечениями. При  $\gamma_1 \rightarrow 0$  внутренний конус наибольшее влияние оказывает на симметричные электрические  $E_{0n}$ -волны. На несимметричные  $E_{mn}$ -волны его влияние сказывается меньше. Характерной особенностью несимметричных магнитных  $H_{mn}$ -волн являются провалы в зависимостях  $\mu = \mu(\gamma_1)$ , так что одному и тому же собственному значению соответствуют различные значения  $\gamma_1$ . В поведении  $H_{m1}$ -волн в биконическом волноводе, так же как и в коаксиальном регулярном, наблюдается особенность, заключающаяся в том, что с уменьшением значения  $\gamma_1$  собственные значения для

$H_{m1}$ -волн увеличиваются, тогда увеличивается и значение критических сечений  $(kr)_{\text{кр}}^{\mu}$  (т. е. критическая длина волны  $\lambda_{\text{кр}}$  уменьшается) и, следовательно, при уменьшении угла  $\gamma_1$  до некоторого значения эта волна из распространяющейся превратится в затухающую. Аналогичная особенность отмечена и в поведении  $H_{mn}$ -волн.

**Квазипирамидальный волновод.** В сферической системе координат с началом в вершине биконической структуры квазипирамидальный волновод получается заменой пирамидального волновода сектором биконического волновода, ограниченного двумя плоскими стенками (см. рис. 5.35, з). Выражения для потенциалов  $U$  и  $V$  имеют вид (5.69). Собственные значения  $\nu$  и  $\mu$  определяются из уравнений (5.84), в которых вместо  $m$  подставляется  $p_m = m\pi/(2\alpha_0)$ , вместо  $\gamma_1$  —  $\gamma$ , а вместо  $\gamma_2$  —  $\pi - \gamma$ . Если угол раствора по координате  $\alpha$  выбрать так, чтобы  $\pi/(2\alpha_0)$  было целым числом, то  $p_m$  будут целыми числами и весь анализ, проведенный для биконического волновода, будет справедлив и в случае пирамидального волновода. Собственные значения  $\nu$  и  $\mu$  тогда определяются численными методами, а критические сечения для каждого типа волны — формулами

$$(kr)_{\text{кр}}^{\nu} = \sqrt{\nu(\nu+1)}; \quad (kr)_{\text{кр}}^{\mu} = \sqrt{\mu(\mu+1)}.$$

При известных собственных значениях и собственных критических сечениях все соотношения и формулы для параметров квазипирамидального волновода (5.73)—(5.76), (5.81) принимают конкретный вид.

**Сферический волновод.** Свободное пространство можно рассматривать как неоднородную область распространения сферических электромагнитных волн или как сферический волновод (см. рис 5.35, д). Распространение электромагнитных волн происходит в направлении орта  $\mathbf{e}_r$ , а сечениями, поперечными относительно этого направления, являются полные сферические поверхности  $r = \text{const}$ . Потенциалы  $U$  и  $V$  имеют вид (5.69), где  $p_m = m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ,  $\eta = n = 1, 2, 3, \dots$ , т. е.  $m < n$ , а

$$L_{\eta}^{p_m}(\cos \vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta)$$

представляют собой присоединенные полиномы Лежандра. Критические сечения определяются выражением  $(kr)_{\text{кр}} = \sqrt{n(n+1)}$ . При известных собственных значениях и собственных критических сечениях формулы для параметров сферического волновода (5.73)—(5.76), (5.81) принимают конкретный вид. Основной низшей волной в сферическом волноводе является электрическая  $E_{01}$ -волна, для которой критическое сечение  $(kr)_{\text{кр}}^{\nu} = \sqrt{2}$ .

**Неоднородные волноводы с цилиндрическими направляемыми волнами.** В цилиндрической системе координат (см. § П.2)  $q_1 = z$ ,  $q_2 = r$ ,  $q_3 = \alpha$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 1$ ,  $h_3 = r$  и условия Бромвича выполняются. Решение уравнений

Максвелла можно получить в виде суперпозиции «электрических» и «магнитных» типов волн, составляющие которых определяются через потенциальные функции  $U$  и  $V$  в соответствии с (5.63) и (5.64). Термины «электрические» (« $E_{mn}$ ») и «магнитные» (« $H_{mn}$ ») взяты в кавычки. Это означает, что данное разбиение не соответствует принятой волноводной классификации, т. е. координата  $z$  не совпадает с направлением распространения волн. Последние являются цилиндрическими и распространяются в направлении радиальной координаты  $r$ . Функции  $U$  и  $V$  удовлетворяют уравнению (5.65), которое в данном случае представляет собой уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0; \quad \Delta V + k^2 V = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

Согласно методу Фурье (метод разделения переменных) для этих уравнений получаем частные решения для потенциалов  $U$  и  $V$  в виде:

$$\left. \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right. Z_{p_m}(hr) \left. \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \left( p_m \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \left( g_n z + \frac{n\pi}{2} \right), \quad (5.85)$$

где  $h^2 = k^2 - g_n^2$ ,  $p_m$ ,  $g_n$  — собственные значения, определяемые из граничных условий ( $g_n = 0$ ) для клиновидного волновода (см. рис. 5.35, *е*);  $g_n = n\pi/(2l)$  — для секториального (см. рис. 5.35, *ж*) и радиального (см. рис. 5.35, *з*) волноводов высотой  $2l$ ;  $n$  — целые числа, включая 0, для волн «электрического» типа;  $n \neq 0$  — для волн «магнитного» типа;  $p_m = m$  — целые числа в случае радиального волновода (включая 0 — для волн «магнитного» типа и  $m \neq 0$  — для волн «электрического» типа);  $p_m = m\pi/(2\alpha_0)$  — собственные значения для клиновидного и секториального волноводов с углом раствора  $2\alpha_0$ ;  $Z_{p_m}(hr)$  — радиальная зависимость, выражающаяся через функции Бесселя в соответствии с граничными условиями по радиальной координате. Функция  $Z_{p_m}(hr)$  удовлетворяет уравнению Бесселя, и чтобы выполнить условие ограниченности поля при  $hr \rightarrow 0$ , необходимо радиальную зависимость представить в виде функции Бесселя первого рода  $J_{p_m}(hr)$ , а чтобы удовлетворить условию излучения поля при  $hr \rightarrow \infty$ , необходимо  $Z_{p_m}(hr)$  представить в виде функции Ханкеля второго рода  $H_{p_m}^{(2)}(hr)$  (временная зависимость  $e^{j\omega t}$ , рассматриваются прямые волны). В переходной области требуется дополнительное исследование.

Если представить  $Z_{p_m}(hr) = R_{p_m}(hr)/\sqrt{hr}$ , то от уравнения Бесселя для  $Z_{p_m}(hr)$  перейдем к уравнению вида (5.70) для функции  $R_{p_m}(hr)$  (где  $x = kr$ ,  $y = R_{p_m}(hr)$ ,  $f(x) = 1 - x_0^2/x^2$ ,  $x_0 = 1 - (p_m^2 - 0,25)/(hr)^2$ ). Графически функция  $f(x)$  представлена на рис. 5.36. В точке поворота ( $x = x_0 = (hr)_{\text{кр}} = \sqrt{p_m^2 - 0,25}$ ,

$p_m > 0,5$ ) меняется характер решения так, что при  $x < x_0$  решение уравнения (5.70) описывает процесс затухания волны, а при  $x > x_0$  — процесс распространения волны, т. е.  $hr = (hr)_{\text{кр}}$  является критическим сечением рассматриваемых неоднородных волноводов с цилиндрическими направляемыми волнами.

Таким образом, радиальную зависимость поля  $Z_{p_m}(hr)$ , удовлетворяющую условию ограниченности при  $hr \rightarrow 0$ , условию излучения при  $hr \rightarrow \infty$  и являющуюся непрерывной при  $hr = (hr)_{\text{кр}}$ , следует записать в виде

$$Z_{p_m}(hr) = \begin{cases} H_{p_m}^{(2)}[(hr)_{\text{кр}}] J_{p_m}(hr) & \text{при } hr \leq (hr)_{\text{кр}}, \\ J_{p_m}[(hr)_{\text{кр}}] H_{p_m}^{(2)}(hr) & \text{при } hr \geq (hr)_{\text{кр}}. \end{cases} \quad (5.86)$$

Поперечные (относительно направления орта  $\mathbf{e}_r$  по координате  $r$ ) составляющие электромагнитного поля  $\mathbf{E}_{\perp}$ ,  $\mathbf{H}_{\perp}$  представляют собой суперпозицию поперечных составляющих электромагнитного поля волн « $\mathbf{E}_{mn}$ » и « $\mathbf{H}_{mn}$ »

$$\mathbf{E}_{\perp} = \sum_{\nu} \mathbf{E}_{\perp}^{\nu} + \sum_{\mu} \mathbf{E}_{\perp}^{\mu}; \quad \mathbf{H}_{\perp} = \sum_{\nu} \mathbf{H}_{\perp}^{\nu} + \sum_{\mu} \mathbf{H}_{\perp}^{\mu}.$$

Из выражений (5.63) и (5.64) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp}^{\nu} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U \right) \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H}_{\perp}^{\nu} = -j\omega \epsilon_a \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_{\alpha}; \\ \mathbf{E}_{\perp}^{\mu} &= j\omega \mu_a \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_{\alpha}; \quad \mathbf{H}_{\perp}^{\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Здесь  $\mathbf{e}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{e}_z$  — орты по координатам  $\alpha$ ,  $z$ .

«Постоянная» распространения собственных типов волн  $k_0$  определяется логарифмической производной радиальной зависимости аналогично (5.73):

$$k_0 = -\frac{j h Z'_{p_m}(hz)}{Z_{p_m}(hz)}, \quad (5.88)$$

где штрих означает производную по всему аргументу. Если учесть выражение (5.86), то из (5.88) следует, что при  $hr < (hr)_{\text{кр}}$   $k_0$  — мнимая величина, представляющая собой коэффициент затухания соответствующего типа волны; при  $hr > (hr)_{\text{кр}}$   $k_0$  — величина комплексная, причем действительная ее часть  $\text{Re } k_0$  — фазовая постоянная, а мнимая часть  $\text{Im } k_0$  — коэффициент затухания. Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля  $H_{p_m}^{(2)}(hr)$ , при  $hr \rightarrow \infty$  получаем  $k_0 = h$ , а при  $(hr)_{\text{кр}} \rightarrow \infty$

$$k_0 = k \sqrt{1 - \frac{g_n^2}{k^2} - \frac{p_m^2 - 0,25}{(kr)^2}}.$$

Необходимо отметить, что большие значения  $(hr)_{кр}$  соответствуют малым углам раствора  $\alpha_0$ , либо высшим типам волн, т. е. фактически малой кривизне фазового фронта волны.

Волновые сопротивления для волн « $E_{mn}$ » и « $H_{mn}$ » определяются соответственно выражениями

$$Z_{0\langle E \rangle} = \frac{Z_0 h^2}{kk_0}; \quad Z_{0\langle H \rangle} = -\frac{Z_0 k k_0}{h^2}.$$

Фазовая скорость  $v_\phi$  и длина волны в системе  $\Lambda$  собственного типа волны определяются соответственно формулами

$$v_\phi = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k_0} = \frac{\pi}{2} c \left| \sqrt{kr} \cdot H_{p_m}^{(2)}(hr) \right|^2; \quad (5.89)$$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} k_0} = \frac{1}{2} \lambda \left| \sqrt{kr} \cdot H_{p_m}^{(2)}(hr) \right|^2, \quad (5.90)$$

где  $c$  — скорость света. При выводе этих формул использовались выражение (5.88) и выражение в нижней строке формулы (5.86).

Следует отметить, что низшим типом основной волны радиального волновода является Т-волна, для которой  $k_0 = k$ ,  $Z_T = Z_0$ , критическое сечение отсутствует, т. е. Т-волна может распространяться вдоль направления распространения волны с фазовой скоростью  $v_\phi = c$  и длиной в системе  $\Lambda = \lambda$ .

**Энергетические характеристики собственных цилиндрических волн неоднородных волноводов.** Воспользовавшись выражениями для составляющих поля (5.63), (5.64) с учетом соотношений (5.85) и (5.86), можно убедиться, что для каждой собственной волны типа « $E_{mn}$ » касательные составляющие вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_\perp^V$  на собственном критическом сечении непрерывны, а касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{E}_\perp^H$  претерпевают разрыв, определяющий эквивалентный электрический поверхностный ток плотностью

$$\mathbf{J}_v^s = [\mathbf{e}_r, \operatorname{sign} \mathbf{H}_\perp^V].$$

Для каждой собственной волны типа « $H_{mn}$ » касательные составляющие вектора  $\mathbf{E}_\perp^H$  претерпевают разрыв и в этом случае эквивалентный магнитный поверхностный ток

$$\mathbf{J}_\mu^M = -[\mathbf{e}_r, \operatorname{sign} \mathbf{E}_\perp^H].$$

При этом касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}_\perp^H$  на собственном критическом сечении остаются непрерывными. Результирующие выражения для этих плотностей токов имеют вид

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{J}_v^{\text{э}} \\ \mathbf{J}_\mu^{\text{м}} \end{matrix} \right\} = -\frac{2kh}{\pi(hr)_{\text{кр}}} \left[ \frac{AY_0 \sin\left(p_m \alpha + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(g_n z + \frac{n\pi}{2}\right)}{BZ_0 \cos\left(p_m \alpha + \frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(g_n z + \frac{n\pi}{2}\right)} \right] \mathbf{e}_z,$$

где  $Y_0 = 1/Z_0$  — волновая проводимость свободного пространства.

Таким образом, собственные волны неоднородных волноводов с цилиндрическими направляемыми волнами содержат вторичные источники в виде эквивалентных поверхностных токов на критических сечениях.

Следуя и далее принципу эквивалентности, будем рассматривать собственный цилиндрический лист эквивалентного электрического тока на критическом сечении как источник « $E_{mn}$ »-волн, а собственный цилиндрический лист эквивалентного магнитного тока — как источник « $H_{mn}$ »-волн. Воспользовавшись теоремой Умова — Пойнтинга в комплексной форме для каждого собственного типа волны, аналогично выражению (5.79) получим

$$-\frac{1}{2h} \int_{S_{\text{кр}}} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{J}_v^{\text{э}*} & \mathbf{E}_\perp^v \\ \mathbf{J}_\mu^{\text{м}} & \mathbf{H}_\perp^{\mu*} \end{matrix} \right\} dS_{\text{кр}} = j2\omega(W_H^{mn} - W_E^{mn}) + \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{E}_\perp^{mn}, \mathbf{H}_\perp^{mn*}] \mathbf{e}_r dS.$$

Здесь  $dS = r d\alpha dz$ ;  $dS_{\text{кр}} = (hr)_{\text{кр}} d\alpha dz$ , откуда излучаемая с критического сечения мощность

$$P_\Sigma^{mn} = \frac{kh^2}{\pi} \left\{ \frac{|A|^2 Y_0 N_v^2}{|B|^2 Z_0 N_\mu^2} \right\} J_{p_m}^2 [(hr)_{\text{кр}}].$$

Здесь

$$N_{v,\mu}^2 = \int_{-1-\alpha_0}^1 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[ \frac{\sin\left(p_m \alpha + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(g_n z + \frac{n\pi}{2}\right)}{\cos\left(p_m \alpha + \frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(g_n z + \frac{n\pi}{2}\right)} \right]^2 d\alpha dz.$$

**Клиновидный волновод.** В цилиндрической системе координат клиновидный волновод с ребром вдоль оси  $z$  и углом раствора  $2\alpha_0$  схематически показан на рис. 5.37, *e*. Компоненты  $E_z$ ,  $H_r$ ,  $H_\alpha$  электромагнитного поля собственных волн типа  $E_{m0}$  определяются через скалярный потенциал  $U$  выражения (5.85), в котором следует принять  $n=0$ ,  $g_n=0$ ,  $h=k$ . Собственные значения  $p_m = m\pi/(2\alpha_0)$  определяются из граничного условия  $E_z|_{\alpha=\pm\alpha_0} = 0$ . Критические

сечения определяют из выражения  $(kr)_{\text{кр}} = \sqrt{p_m^2 - 0,25}$ . При известных собственных значениях все соотношения и формулы для параметров клиновидного волновода, полученные выше, принимают конкретный вид. На рис. 5.38 представлены зависимости собственных значений  $p_m$  от угла  $\alpha_0$  для первых низших

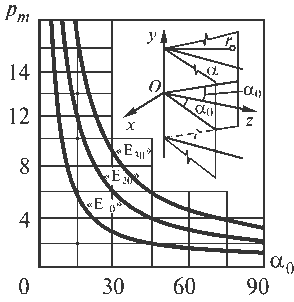


Рис. 5.38. Зависимости собственных значений  $p_m$  от угла  $\alpha_0$  для первых низших типов волн « $E_{10}$ », « $E_{20}$ » и « $E_{30}$ »

типов волн « $E_{10}$ », « $E_{20}$ », « $E_{30}$ ». Плотности эквивалентных электрических поверхностных токов на критических сечениях

$$\mathbf{J}_{m0}^a = -\frac{2Ak^2}{\pi(kr)_{кр} Z_0} \sin\left(p_m \alpha + \frac{m\pi}{2}\right) \mathbf{e}_z.$$

Эти плотности токов обратно пропорциональны электрическому расстоянию до критического сечения  $(kr)_{кр}$ .

При  $(kr)_{кр} \rightarrow \infty$  амплитуды этих токов становятся малыми. Мощность, излучаемая с критического сечения

$$P_{\Sigma}^{m0} = \frac{k^3 N_v^2}{\pi Z_0} |A|^2 J_{p_m}^2 [(kr)_{кр}].$$

**Секториальный волновод.** В цилиндрической системе координат секториальный волновод с углом раствора  $2\alpha_0$  и высотой  $2l$  схематически представлен на рис. 5.35, ж. Компоненты электромагнитного поля определяются через потенциалы  $U$  и  $V$  по формулам (5.87) с учетом выражения (5.85), где  $p_m = m\pi/(2\alpha_0)$ ,  $g_n = n\pi/(2l)$  ( $m, n$  — целые числа) определяются из граничных условий на идеально проводящих внутренних поверхностях волновода. Критические сечения определяются выражением  $(hr)_{кр} = \sqrt{p_m^2 - 0,25}$ . Волновые параметры « $E_{m0}$ »-волн были рассмотрены выше. Они такие же, как и в клиновидном волноводе. Волновое сопротивление « $H_{m0}$ »-волн  $Z_{0H}$  определяется при  $g_n = 0$  и равно  $Z_0 k_0/k$ , причем в выражении для  $k_0$  вместо  $h$  следует подставить  $k$ .

Волны  $E_{0n}$  и  $H_{0n}$  для действительных значений  $hr$  критических сечений не имеют. Их волновые сопротивления определяются соответственно как

$$Z_{0«E»} = \frac{Z_0 h^2}{k k_0}; \quad Z_{0«H»} = \frac{Z_0 k k_0}{h^2}.$$

Волны « $E_{mn}$ » и « $H_{mn}$ » являются гибридными, поскольку у них  $E_r \neq 0$ ,  $H_r \neq 0$ .

**Радиальный волновод.** В цилиндрической системе координат радиальный волновод представляет собой две плоскости с расстоянием между ними  $2l$  (см. рис. 5.35, з). Компоненты электромагнитного поля определяются потенциалами  $U$  и  $V$  по формулам (5.87) с учетом выражения (5.85), где собственные значения  $p_m = m$ ,  $g_n = n\pi/(2l)$  ( $m, n$  — целые числа) определяются из граничных условий на идеально проводящих внутренних поверхностях волновода. Критические сечения вычисляются по формуле  $(hr)_{кр} = \sqrt{m^2 - 0,25}$ . Анализ волнового процесса аналогичен тому, который был проведен для секториального волновода. Однако



здесь основным низшим типом волны является Т-волна, для которой  $k_0 = k$ ,  $Z_T = Z_0$ , а критическое сечение отсутствует.

### 5.11. Ступенчатые и плавные переходы

Отрезки *нерегулярных* линий передачи сверхвысоких частот находят применение в качестве фиксированных трансформаторов полных сопротивлений. Такими трансформаторами являются ступенчатые и плавные переходы, с помощью которых осуществляется согласование двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями. Основным достоинством ступенчатых и плавных трансформирующих переходов является широкополосность, достигаемая за счет увеличения длины перехода и подбора его профиля.

**Ступенчатый переход.** Ступенчатым переходом называют каскадное соединение  $n$  отрезков передающей линии («ступенек»), имеющих одинаковую длину  $l$  (как правило,  $l = \lambda/4$ ) и различные волновые сопротивления  $Z_i$ . Число ступенек в переходе на единицу меньше числа скачков волнового сопротивления.

На рис. 5.39 изображен двухступенчатый переход, включенный между двумя прямоугольными волноводами, а на рис. 5.40 — схема  $n$ -ступенчатого перехода, соединяющего две линии передачи с волновыми сопротивлениями  $Z_{в1}$  и  $Z_{в2}$ .

Строгая теория ступенчатых переходов весьма громоздка и при числе ступенек, большем четырех, практически применима, если расчет проведен на ЭВМ. Приближенная теория, не учитывающая повторных отражений, справедлива, когда перепад волновых сопротивлений согласуемых линий не слишком велик (не превышает 10).

Согласно приближенной теории отраженная волна на входе  $n$ -ступенчатого перехода является суммой волн, отраженных от каждой ступеньки (см. рис. 5.40):

$$\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-2j\beta l} + \dots + \Gamma_n e^{-2jn\beta l}, \quad (5.91)$$

где

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_{в1}}{Z_1 + Z_{в1}}; \quad \Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}; \quad \dots, \quad \Gamma_n = \frac{Z_{в2} - Z_n}{Z_{в2} + Z_n}. \quad (5.92)$$

Коэффициенты отражения  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  и число ступенек следует подобрать так, чтобы в рабочей полосе частот модуль суммарного коэффициента отражения не превышал заданного значения  $\Gamma_{\max}$ :

$$|\Gamma_{\Sigma}| = \left| \sum_{k=0}^n \Gamma_k e^{-2jk\beta l} \right| \leq \Gamma_{\max}. \quad (5.93)$$

Предположим, что удалось так подобрать коэффициенты  $\Gamma_k$ , чтобы удовлетворялось неравенство (5.93). Зная эти коэффициенты, по формулам (5.92)

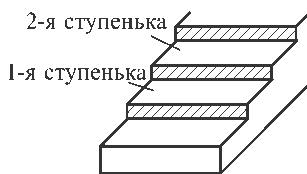


Рис. 5.39. Двухступенчатый переход

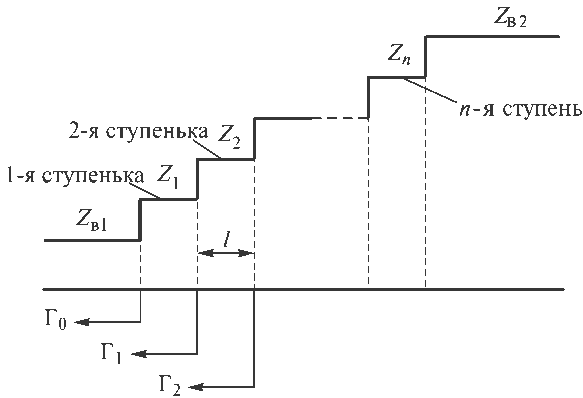


Рис. 5.40. Схема перехода волновых сопротивлений

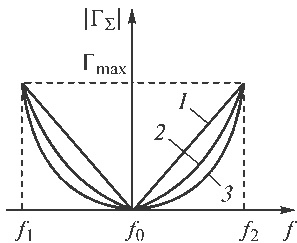
можно определить волновое сопротивление каждой ступеньки в переходе. В свою очередь, величина волнового сопротивления линии однозначно связана с размерами ее поперечного сечения. В результате полностью определяется конструкция ступенчатого перехода.

Для решения задачи синтеза ступенчатого перехода необходимо задать функцию, описывающую зависимость  $|\Gamma_\Sigma|$  от частоты. Эта зависимость всегда полиномиальна. Обычно применяют две разновидности полиномов: чебышевские полиномы и полиномы Баттерворса. Соответственно различают чебышевские ступенчатые переходы и переходы с максимально плоской характеристикой.

Коэффициент отражения от входа ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой в пределах полосы согласования задается в виде

$$|\Gamma_\Sigma| = A |\cos \beta l|^n. \quad (5.94)$$

Параметр  $A$  находится из условия, что на граничной частоте  $f_1$  полосы согласования  $|\Gamma_\Sigma| = \Gamma_{\max}$ , т. е.



$$A |\cos \beta_1 l|^n = \Gamma_{\max}; \quad A = \frac{\Gamma_{\max}}{|\cos \beta_1 l|^n}. \quad (5.95)$$

Зависимость  $|\Gamma_\Sigma|$  от частоты при различных значениях  $n$  (число ступенек) представлена на рис. 5.41. Условие (5.95) должно выполняться также и на частоте  $f_2$ , поэтому

$$|\cos \beta_1 l| = |\cos \beta_2 l|,$$

что эквивалентно равенству

$$\beta_1 l + \beta_2 l = \pi. \quad (5.96)$$

Рис. 5.41. Зависимость  $|\Gamma_\Sigma|$  от частоты  $f$  при монотонном характере изменения коэффициента отражения:

1 —  $n = 1$ ; 2 —  $n = 2$ ; 3 —  $n = 4$

Подставляя в (5.96)  $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$  и  $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$ , находим длину ступеньки

$$l = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{\lambda_0}{4},$$

где  $\lambda_0 = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  — длина волны в линии передачи на некоторой частоте  $f_0$ , называемой центральной.

Правая часть выражения (5.94) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} |\Gamma_\Sigma| &= A |\cos \beta l|^n = A \left| \left( \frac{e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}}{2} \right)^n \right| = A \left| \frac{(1 + e^{-2j\beta l})^n}{2^n} \right|^* = \\ &= \left| \frac{A}{2^n} + A \frac{n}{2^n} e^{-2j\beta l} + A \frac{n(n-1)}{2^{2n}} e^{-4j\beta l} + \dots + \frac{A}{2^n} e^{-2jn\beta l} \right|. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых экспоненциальных множителях в правых частях (5.91) и (5.97), находим коэффициенты отражения от ступенек:

$$\Gamma_0 = \Gamma_n = \frac{A}{2^n}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_{n-1} = \frac{A}{2^n} n, \quad \Gamma_2 = \frac{A}{2^n} \frac{n(n-1)}{2!}, \quad \dots$$

Число ступенек в переходе

$$n = \frac{\lg \left[ \Gamma_{\max} \left| \frac{Z_{B12} + 1}{Z_{B12} - 1} \right| \right]}{\lg |\cos \beta_1 l|},$$

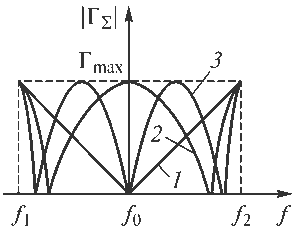
где  $Z_{B12} = Z_{B2} - Z_{B1}$ .

На рис. 5.41 видно, что коэффициент отражения от входа ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой возрастает монотонно по мере приближения к граничным частотам полосы согласования. Поэтому фазовая характеристика этого перехода близка к линейной.

Важным достоинством этого ступенчатого перехода является слабая зависимость его параметров от погрешностей, неизбежных при изготовлении. Это объясняется тем, что почти во всей полосе согласования коэффициент отражения от входа перехода существенно меньше заданного значения. Обычно рассчитывают ступенчатый переход на несколько большую полосу согласования, чем необходимо. Тогда небольшое увеличение числа отражений, обусловленное погрешностями изготовления, повлечет за собой увеличение значений коэффициентов отражения выше допустимых лишь на частотах вне требуемой полосы согласования.

\* Формула преобразования:

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} x^k + \dots$$



**Рис. 5.42.** Зависимость  $|\Gamma_\Sigma|$  от частоты  $f$  при колебательном характере изменения коэффициента отражения:

1 —  $n = 1$ ; 2 —  $n = 2$ ; 3 —  $n = 3$

Ступенчатый переход с максимально плоской характеристикой не является оптимальным по длине. Чтобы получить переход меньшей длины, необходимо отказаться от монотонного характера изменения функции  $|\Gamma_\Sigma|$  и перейти к колебательному, как показано на рис. 5.42. Подобную характеристику имеет чебышевский ступенчатый переход, у которого

$$|\Gamma_\Sigma| = \Gamma_{\max} \left| T_n \left( \frac{\cos \beta l}{\cos \beta_1 l} \right) \right|,$$

где  $T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \text{ch}(n \text{ arch } x) & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$  — полином

Чебышева первого рода  $n$ -го порядка.

Методика синтеза чебышевского перехода мало отличается от изложенной выше методики синтеза перехода с максимально плоской характеристикой. Поэтому не будем на ней останавливаться.

Можно показать, используя свойства полиномов Чебышева, что и при заданных перепаде волнового сопротивления, значении  $\Gamma_{\max}$  и полосе согласования ( $f_1 - f_2$ ) чебышевский ступенчатый переход обладает наименьшей по сравнению с любым другим переходом длиной. Недостатками чебышевского ступенчатого перехода являются нелинейность фазовой характеристики и существенная зависимость параметров от точности изготовления перехода. Последнее объясняется тем, что у чебышевского ступенчатого перехода  $|\Gamma_\Sigma| = \Gamma_{\max}$  не только на краях полосы согласования, но и на многих частотах в полосе согласования.

**Плавный переход.** В плавном переходе в отличие от ступенчатого волновое сопротивление линии передачи меняется не скачками, а непрерывно вдоль всей длины перехода, т. е. плавный переход является нерегулярной линией передачи, в которой волновое сопротивление  $Z$  есть функция продольной координаты. Теоретически плавный переход можно рассматривать как предельный случай ступенчатого перехода со ступеньками бесконечно малой длины и высоты (рис. 5.43).

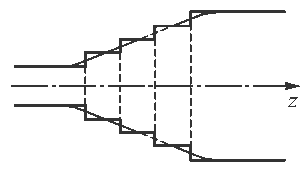
Рассмотрим две разновидности плавного перехода.

*Экспоненциальный плавный переход.* Такое название получил переход, у которого волновое сопротивление изменяется по экспоненциальному закону

$$Z(z) = Z_{в1} e^{\nu z},$$

где  $\nu$  — постоянная, а модуль коэффициента отражения равен

$$|\Gamma_\Sigma| = \frac{|\ln(Z_{в2} - Z_{в1})|}{2} \left| \frac{\sin \beta l}{\beta l} \right|.$$



**Рис. 5.43.** Аппроксимация плавного перехода ступеньками

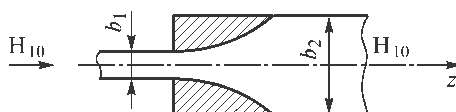


Рис. 5.44. Экспоненциальный плавный переход

Экспоненциальный плавный переход может иметь вид, показанный на рис. 5.44. Прямоугольные волноводы, имеющие одинаковые широкие размеры  $a$  и разные узкие размеры сечения  $b_1$  и  $b_2$ , согласуются с помощью металлических вкладышей экспоненциального профиля.

Частотная характеристика экспоненциального плавного перехода показана на рис. 5.45 (кривая 1). Она весьма несовершенна. Зачастую заданный допуск на рассогласование достигается лишь после пятого-шестого «всплеска» характеристики, т. е. длина перехода должна быть порядка  $(2,5 \dots 3,0)\lambda_2$  (где  $\lambda_2$  — длинноволновая граница рабочего диапазона). Такая длина значительно больше оптимальной длины плавного перехода. Преимуществом экспоненциального плавного перехода является простота расчета и изготовления; в коаксиальном варианте он практически совпадает с линейным конусом.

*Компенсированный экспоненциальный плавный переход.* Характеристика, близкая к чебышевской, может быть сформирована путем некоторых улучшений экспоненциальной линии. Компенсированным экспоненциальным плавным переходом называется переход, в котором

$$Z(z) = Z_{в1} \cdot e^{\gamma(z+a) \sin 2\pi z/l}.$$

Модуль коэффициента отражения от входа перехода равен

$$|\Gamma_{\Sigma}| = \ln(Z_{в2} - Z_{в1}) \left| \frac{\sin \beta l}{2\beta l} \right| \left| 1 + 2\pi a_1 \frac{(\beta l)^2}{(\beta l)^2 - \pi^2} \right|.$$

Хорошие результаты получаются в том случае, когда коэффициент  $a_1$  выбран таким образом, чтобы в какой-либо из точек кривой, представленной на рис. 5.45,

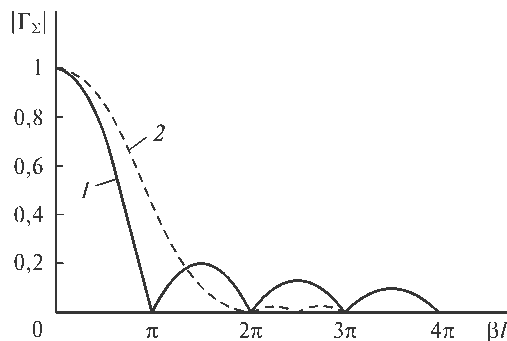


Рис. 5.45. Частотная характеристика экспоненциального плавного перехода:

1 — простого; 2 — компенсированного

где у обычного экспоненциального плавного перехода имеет место «всплеск» коэффициента отражения ( $\beta l = 5\pi/2, 7\pi/2, \dots$  и т. д.), у компенсированного экспоненциального плавного перехода имело место полное отсутствие отражений. Частотная характеристика компенсированного экспоненциального плавного перехода показана на рис. 5.45 (кривая 2). При  $(Z_{в2} - Z_{в1}) = e^2$  и  $\Gamma_{\max} \leq 0,05$  длина компенсированного экспоненциального плавного перехода приблизительно равна  $\lambda$ , тогда как обычный экспоненциальный плавный переход имеет длину  $30\lambda$ .

Кроме рассмотренных выше переходов применяют плавные переходы с вероятностной, чебышевской и некоторыми другими частотными характеристиками. Чебышевский плавный переход получается как предельный случай чебышевского ступенчатого перехода, в котором неограниченно увеличивается число ступенек и одновременно стремится к нулю длина ступеньки. Аналогичным образом от ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой можно перейти к плавному переходу, у которого характеристика коэффициента передачи близка к кривой Гаусса, известной из теории вероятности. Как и в случае ступенчатых переходов, чебышевский плавный переход является самым коротким из всех плавных переходов. Компенсированный экспоненциальный плавный переход лишь незначительно длиннее чебышевского плавного перехода.

Сравнение плавных и ступенчатых переходов показывает, что при заданных значениях  $\Gamma_{\max}$  и  $(Z_{в2} - Z_{в1})$  плавный переход всегда длиннее ступенчатого.

## 5.12. Волноводы, содержащие намагниченные ферриты

**Уравнения Максвелла в условиях гирромагнитной среды.** Будем использовать обобщенно-цилиндрическую ортогональную систему координат  $(\xi, \eta, z)$ . Направление распространения электромагнитной волны будем считать совпадающим с продольной осью  $z$ . Закон изменения составляющих поля в зависимости от координаты  $z$  и времени примем для прямой волны в форме  $\exp j(\omega t - \beta z)$ , где  $\beta$  — фазовая постоянная. Волновой множитель  $\exp j(\omega t - \beta z)$  с целью упрощения записи в дальнейшем будем всюду опускать.

Уравнения Максвелла в условиях гирромагнитной среды при отсутствии сторонних источников и для гармонических во времени процессов имеют вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}}; \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}, \quad (5.98)$$

где векторы электрической и магнитной индукций  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  связаны с векторами напряженностей электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  посредством соотношений

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$$

Здесь  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости гирромагнитной среды, причем  $\mu_a = \mu_0(\mu_{ik})$ .

Тензор магнитной проницаемости имеет следующий вид:

• в случае продольного намагничивания (когда направление постоянного магнитного поля совпадает с направлением распространения волны  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0z}$ )

$$(\mu_{ik}) = \begin{pmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}; \quad (5.99)$$

• в случае поперечного намагничивания (когда  $\mathbf{H}_0$  лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, например  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0\eta}$ )

$$(\mu_{ik}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -j\mu_\alpha \\ 0 & \mu_\eta & 0 \\ j\mu_\alpha & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (5.100)$$

С учетом оговоренных выше условий проекции уравнений Максвелла (5.98) на оси координат  $(\xi, \eta, z)$  примут следующий вид:

• в случае продольного намагничивания

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_\eta} \left( \frac{\partial H_z}{\partial \eta} + j\beta h_\eta H_\eta \right) &= j\omega \epsilon_a E_\xi; \\ \frac{1}{h_\xi} \left( j\beta h_\xi H_\xi + \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) &= -j\omega \epsilon_a E_\eta; \end{aligned} \quad (5.101)$$

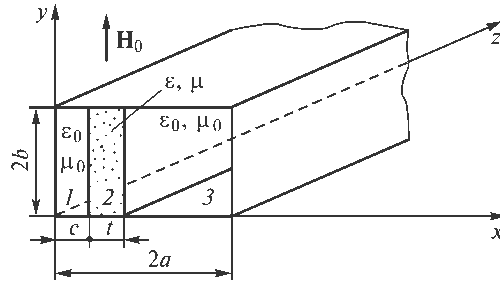
$$\begin{aligned} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi H_\xi) \right] &= j\omega \epsilon_a E_z; \\ \frac{1}{h_\eta} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + j\beta h_\eta E_\eta \right) &= -j\omega \mu_0 (\mu H_\xi - j\mu_\alpha H_\eta); \\ \frac{1}{h_\xi} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + j\beta h_\xi E_\xi \right) &= j\omega \mu_0 (j\mu_\alpha H_\xi + \mu H_\eta); \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi E_\xi) \right] = -j\omega \mu_0 \mu_z H_z;$$

• в случае поперечного намагничивания справедливы формулы (5.101) и

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_\eta} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + j\beta h_\eta E_\eta \right) &= -j\omega \mu_0 (\mu H_\xi - j\mu_\alpha H_z); \\ \frac{1}{h_\xi} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + j\beta h_\xi E_\xi \right) &= j\omega \mu_0 \mu_\eta H_\eta; \\ \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi E_\xi) \right] &= -j\omega \mu_0 (j\mu_\alpha H_\xi + \mu H_z). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Здесь  $h_\xi, h_\eta$  — коэффициенты Ламе.



**Рис. 5.46.** Прямоугольный волновод с поперечно намагниченной ферритовой пластиной в декартовой системе координат:

1, 2, 3 — частичные области

Из формул (5.101)—(5.103) после ряда преобразований можно получить выражения поперечных составляющих электромагнитного поля через продольные, а также систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка (или два независимых волновых уравнения) относительно продольных составляющих. Эти уравнения запишем далее в конкретных координатных системах (декартовой и цилиндрической) при рассмотрении наиболее важных с практической точки зрения продольно регулярных волноводных структур: прямоугольного волновода с поперечно намагниченной пластиной и круглого волновода с ферритом, намагниченным продольным и азимутальным (кольцевым) полем.

**Прямоугольный волновод с поперечно намагниченной ферритовой пластиной.** Эта задача является координатной в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  (рис. 5.46).

Рассмотрим типы полей, характеризующиеся независимостью компонент от координаты  $y$ , совпадающей с направлением намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0$ . К такому типу полей относится и волна низшего типа  $H_{10}$ .

Прежде всего получим в декартовой системе координат решения уравнений Максвелла для безграничной ферритовой среды с намагничивающим полем, нормальным направлению распространения, при отсутствии вариаций поля вдоль намагничивания.

Положим в формулах (5.101), (5.103)

$$\xi = x; \quad \eta = y; \quad h_\xi = h_\eta = 1; \quad \mu_\eta = \mu_y; \quad k_{c\eta} = k_{cy}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

После преобразования получим

$$E_x = -\frac{j\beta}{k_{cy}^2} \frac{dE_z}{dx}; \quad H_y = -\frac{j\omega\epsilon_a}{k_{cy}^2} \frac{dE_z}{dx}; \quad (5.103a)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu_0}{k_c^2} \left( \beta\mu_\alpha H_z - \mu \frac{dH_z}{dx} \right); \quad (5.103b)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega^2 \epsilon_a \mu_a \mu_0 H_z - \beta \frac{dH_z}{dx} \right);$$



$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + k_{cy}^2 E_z = 0; \quad (5.104a)$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + k_{c\perp}^2 H_z = 0, \quad (5.104б)$$

где  $k_{cy}^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_y - \beta^2$ ;  $k_{c\perp}^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_{\perp} - \beta^2$ ;  $\mu_{\perp} = (\mu^2 - \mu_{\alpha}^2) / \mu$ .

Как видим, имеет место распадение типов колебаний на две независимые группы:  $E_{0n}$  (с составляющими  $E_z$ ,  $E_x$ ,  $H_y$  (5.104а), (5.103а)) и  $H_{0n}$  (с составляющими  $H_z$ ,  $H_x$ ,  $E_y$  (5.104б), (5.103б)); индексы «0» и «n» обозначают, как обычно, числа вариаций поля по осям  $x$  и  $y$  соответственно.  $E_{0n}$  — волны «обыкновенные»,  $H_{0n}$  — «необыкновенные». От гирромагнитных свойств среды полностью зависят только волны типа  $H$ .

Решения независимых волновых уравнений относительно продольных составляющих электромагнитного поля (5.104а) и (5.104б) записываются через элементарные функции:

$$E_z = A \cos(k_{cy} x) + B \sin(k_{cy} x);$$

$$H_z = C \cos(k_{c\perp} x) + D \sin(k_{c\perp} x).$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — произвольные постоянные.

Поперечные составляющие выражаются через продольные формулами (5.103а), (5.103б).

Перейдем к решению задачи о свободных колебаниях прямоугольного волновода с поперечно намагниченной ферритовой пластиной. Сразу же отметим, что в таком волноводе (как и в полном прямоугольном волноводе) поля  $E_{0n}$ -волн не могут существовать, так как не удовлетворяют граничным условиям задачи. Действительно, все составляющие вектора  $\mathbf{E}$  этих полей ( $E_x$ ,  $E_z$ ) обращаются в нуль при  $y = 0$  и  $y = 2b$ . Но поскольку  $\partial/\partial y = 0$ , то вектор  $\mathbf{E}$  для поля  $E_{0n}$ -волн везде равен нулю.

Используя метод частичных областей, разобьем плоскость поперечного сечения волновода на три области (1–3 на рис. 5.46), соответствующие различным средам, запишем с учетом так называемых «внутренних»\* граничных условий компоненты электромагнитного поля в областях и затем проведем сопряжение касательных составляющих полей на границах раздела сред. При этом получим систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов поля. Условие совместности такой системы дает характеристическое уравнение для определения постоянных распространения собственных волн волновода или спектра критических частот.

\* Под «внутренними» понимаются граничные условия, которым строго удовлетворяет каждое частное решение волнового уравнения в двумерной области.

Запишем «внутренние» граничные условия и тангенциальные составляющие электромагнитного поля в областях волновода  $\left( \text{условие } \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0,2b} = 0 \text{ записывать не будем, так как } \frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$ :

• область 1 ( $0 \leq x \leq c$ ), диэлектрическая среда с параметрами  $\epsilon_{a1} = \epsilon_0$  и  $\mu_{a1} = \mu_0$  —

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_{z1}}{dx} \right|_{x=0} &= 0; \\ H_{z1} &= C_1 \cos(k_{c1}x); \\ E_{y1} &= -C_1 \frac{j\omega\mu_0}{k_{c1}} \sin(k_{c1}x); \end{aligned} \quad (5.105)$$

• область 2 ( $c \leq x \leq c+t$ ), поперечно намагниченная гиромангнитная среда с параметрами  $\epsilon_2 = \epsilon_a$  и  $\mu_2 = \mu_{ik}$  (5.100) —

$$\begin{aligned} H_{z2} &= C_2 \cos(k_{c\perp}x) + D_2 \sin(k_{c\perp}x); \\ E_{y2} &= -\frac{j\omega}{k_{c2}^2} \{ C_2 [\beta\mu_\alpha \cos(k_{c\perp}x) + \mu_2 k_{c\perp} \sin(k_{c\perp}x)] + \\ &\quad + D_2 [\beta\mu_\alpha \sin(k_{c\perp}x) - \mu_2 k_{c\perp} \cos(k_{c\perp}x)] \}; \\ k_{c\perp}^2 &= \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 \mu_\perp - \beta^2; \quad \mu_\perp = \frac{\mu_2^2 - \mu_\alpha}{\mu_2}; \end{aligned} \quad (5.106)$$

• область 3 ( $c+t \leq x \leq 2a$ ), диэлектрическая среда с параметрами  $\epsilon_3 = \epsilon_0$  и  $\mu_3 = \mu_0$  —

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_{z3}}{dx} \right|_{x=2a} &= 0; \\ H_{z3} &= C_3 \cos[k_{c3}(x-2a)]; \\ E_{y3} &= -C_3 \frac{j\omega\mu_a}{k_{c3}} \sin[k_{c3}(x-2a)]. \end{aligned} \quad (5.107)$$

В формулах (5.105)—(5.107)

$$k_{cj}^2 = \omega^2 \epsilon_j \mu_j - \beta^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Условие непрерывности тангенциальных составляющих полей на границах раздела сред (областей)

$$\begin{aligned} H_{z1} = H_{z2}; E_{y1} = E_{y2} \quad \text{при } x = c; \\ H_{z2} = H_{z3}; E_{y2} = E_{y3} \quad \text{при } x = c + t \end{aligned} \quad (5.108)$$

приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных амплитудных коэффициентов поля  $C_1, C_2, D_2, C_3$ . Приравняв нулю определитель этой системы, составленный из коэффициентов при неизвестных  $C_1, C_2, D_2, C_3$  (условие существования нетривиального решения системы), получаем характеристическое (или дисперсионное) уравнение, определяющее постоянные распространения  $\beta$  собственных типов колебаний  $H_{0n}$  волновода:

$$\begin{vmatrix} \cos(k_{c1}c) & -\cos(k_{c1}c) & -\sin(k_{c1}c) & 0 \\ -\frac{j\omega\mu_1}{k_{c1}} \sin(k_{c1}c) & \frac{j\omega}{k_{c2}^2} [\beta\mu_\alpha \cos(k_{c1}c) + \mu_2 k_{c1} \sin(k_{c1}c)] & \frac{j\omega}{k_{c2}^2} [\beta\mu_\alpha \sin(k_{c1}c) - \mu_2 k_{c1} \cos(k_{c1}c)] & 0 \\ 0 & \cos[k_{c1}(c+t)] & \sin[k_{c1}(c+t)] & -\cos[k_{c3}(c+t-2a)] \\ 0 & -\frac{j\omega}{k_{c2}^2} \{\beta\mu_\alpha \cos[k_{c1}(c+t)] + \mu_2 k_{c1} \sin[k_{c1}(c+t)]\} & -\frac{j\omega}{k_{c2}^2} \{\beta\mu_\alpha \sin[k_{c1}(c+t)] + \mu_2 k_{c1} \cos[k_{c1}(c+t)]\} & \frac{j\omega\mu_3}{k_{c3}} \sin[k_{c3} \times \\ & & & \times (c+t-2a)] \end{vmatrix} = 0. \quad (5.109)$$

Уравнение (5.109) имеет бесконечное множество корней, каждый из которых соответствует определенному типу колебаний  $H_{0n}$ , индекс « $n$ » в обозначении волны указывает на номер корня характеристического уравнения.

Те из полей, для которых корни уравнения (5.109) при действительных параметрах сред являются действительными, имеют характер распространяющихся волн, а остальные — ближних полей с экспоненциально убывающей амплитудой. Критические длины волн, соответствующие переходу волны в ближнее поле, могут быть определены из уравнения (5.109), если положить в нем  $\beta = 0$ .

Уравнение (5.109) при  $\beta \neq 0$  содержит члены, в которые  $\beta$  и  $\mu_\alpha$  входят в первой степени. Поэтому смена знака  $\beta$  (изменение направления распространения волны) или  $\mu_\alpha$  (изменение направления намагничивающего поля) приводит к изменению значений корней характеристического уравнения. Другими словами, постоянные распространения волн или коэффициенты ослабления ближних полей будут различными для разных направлений постоянного намагничивания и разных направлений распространения. При одновременном изменении этих направлений (знаков  $\beta$  и  $\mu_\alpha$ ) корни уравнения останутся прежними. Замена  $c \rightleftharpoons 2a - c - t$ , т. е. перенос пластины в симметричное относительно оси волновода положение, вызовет такое же изменение корней уравнения, как изменение знака  $\mu_\alpha$  или  $\beta$ . При  $\beta = 0$  значение  $\mu_\alpha$  входит в уравнение (5.109) только в квадрате. Таким образом, критические длины волн не зависят от направления постоянного намагничивания.

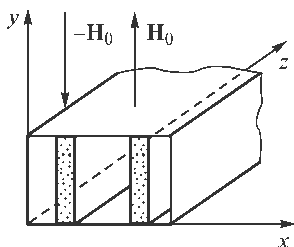


Рис. 5.47. Прямоугольный волновод с двумя симметричными ферритовыми пластинами в декартовой системе координат

Корни уравнения (5.109), соответствующие различным знакам  $\mu_\alpha$  при неизменном знаке  $\beta$  (или наоборот) будем обозначать  $\beta_+$  и  $\beta_-$ . Величина

$$\Delta\beta = \beta_+ - \beta_-$$

для распространяющихся волн называется невязимной разностью постоянных распространения. Ее действительная часть  $\Delta\beta'$  представляет собой невязимную разность фазовых постоянных (или дифференциальный фазовый сдвиг, приходящийся на единицу длины), а мнимая часть  $\Delta\beta''$  — невязимную разность коэффициентов поглощения.

Метод частичных областей, использованный при выводе уравнения (5.109), можно применить для решения задач о прямоугольном волноводе, содержащем несколько пластин с различными гиротропными и изотропными параметрами.

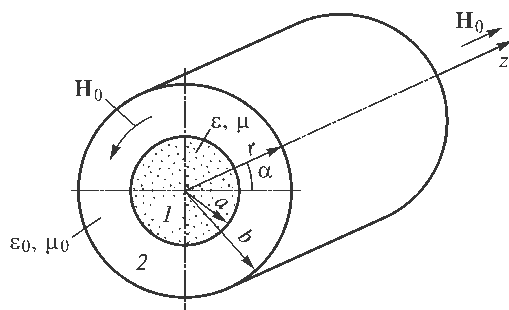
Большой практический интерес представляет, например, задача о волноводе с двумя одинаковыми ферритовыми пластинами, расположенными симметрично относительно его оси (рис. 5.47).

Как следует из уравнения (5.109), одновременное изменение направления постоянного намагничивания и перенос пластины в симметричное положение не изменяют постоянной распространения. Отсюда следует, что действие двух пластин, намагниченных в противоположных направлениях, является «согласным», а при одинаковом намагничивании невязимные эффекты уничтожаются, т. е.  $\Delta\beta = 0$ .

Корни характеристического уравнения, соответствующего случаю двух пластин, изменяются при изменении направления постоянного намагничивания обеих пластин или направления распространения или остаются без изменения при одновременном изменении этих направлений.

Невязимный эффект, т. е. зависимость корней характеристического уравнения от знака  $\beta$  или  $\mu_\alpha$ , может исчезать при некоторых положениях пластин в волноводе. Так, для волновода с одной пластиной таким положением будет, в частности, симметричное, причем для основного типа волны  $H_{10}$  оно является единственным. В случае волновода с двумя одинаковыми пластинами, расположенными симметрично относительно оси волновода, постоянная распространения  $\beta$  будет взаимной, если пластины намагничены в одном направлении. Если же пластины намагничены противоположно, то условие взаимности для основной волны не может быть выполнено.

**Круглый волновод с ферритом, намагниченным продольным и азимутальным (кольцевым) полем.** Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круглого волновода с осесимметричным ферритовым стержнем, намагниченным вдоль оси  $z$  (продольное намагничивание) или вдоль оси  $\alpha$  (азимутальное намагничивание). Задача имеет строгое решение в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$



**Рис. 5.48.** Круглый волновод с ферритовым стержнем в цилиндрической системе координат:

1, 2 — частичные области

(рис. 5.48). Поэтому в цилиндрических координатах получим решения уравнений Максвелла для безграничной ферритовой среды с продольным и азимутальным намагничиванием. Закон изменения составляющих поля в зависимости от угловой координаты  $\alpha$  примем в форме  $\exp(jm\alpha)$  (это необходимо, чтобы удовлетворить граничным условиям в цилиндрическом волноводе). В выражениях для составляющих электромагнитного поля (5.101) — (5.103) перейдем к цилиндрической системе координат путем замен:

$$\xi = r; \quad \eta = \alpha; \quad h_{\xi} = h_r = 1; \quad h_{\eta} = h_{\alpha} = r; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} = jm. \quad (5.110)$$

**Продольное намагничивание.** В результате преобразования формул (5.101), (5.102) с учетом (5.110), получим

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{a_0} \left[ j\beta \left( k_c^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} - \omega^2 \epsilon_a \mu_a m_0 \frac{m}{r} E_z \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left( \mu_{\alpha} \mu_0 \beta^2 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \mu \mu_0 k_{c\perp}^2 \frac{m}{r} H_z \right) \right]; \\ E_{\alpha} &= -\frac{1}{a_0} \left[ -\beta \left( \omega^2 \epsilon_a \mu_{\alpha} \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} - k_c^2 \frac{m}{r} E_z \right) + \right. \\ &\quad \left. + j\omega \mu_0 \left( \mu k_{c\perp}^2 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \mu_{\alpha} \beta^2 \frac{m}{r} H_z \right) \right]; \\ H_r &= -\frac{1}{a_0} \left[ \omega \epsilon_a \left( \omega^2 \epsilon_a \mu_{\alpha} \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} - k_c^2 \frac{m}{r} E_z \right) - \right. \\ &\quad \left. - j\beta \left( k_{c\perp}^2 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega^2 \epsilon_a \mu_{\alpha} \mu_0 \frac{m}{r} H_z \right) \right]; \\ H_{\alpha} &= -\frac{1}{a_0} \left[ j\omega \epsilon_a \left( k_c^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} - \omega^2 \epsilon_a \mu_{\alpha} \mu_0 \frac{m}{r} E_z \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left( \omega^2 \epsilon_a \mu_{\alpha} \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - k_c^2 \frac{m}{r} H_z \right) \right]; \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left( k_{c\perp}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) E_z + j\beta\omega\mu_z\mu_0 \frac{\mu_\alpha}{\mu} H_z &= 0; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left( k_c^2 \frac{\mu_z}{\mu} - \frac{m^2}{r^2} \right) H_z + j\beta\omega\epsilon_a \frac{\mu_\alpha}{\mu} E_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{c\perp}^2 &= \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_\perp - \beta^2; \quad \mu_\perp = \frac{\mu^2 + \mu_\alpha^2}{\mu}; \\ a_0 &= k_{c+}^2 k_{c-}^2; \quad k_{c\pm}^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_\pm - \beta^2; \end{aligned}$$

$\mu_\pm = \mu \pm \mu_\alpha$  — эффективные магнитные проницаемости среды соответственно для право- и левополяризованных по кругу волн.

Из (5.111) и (5.112) следует, что волны типов Н и Е отдельно существовать не могут, т. е. поле распространяющейся волны является гибридным (шестикомпонентным). В дальнейшем эти волны будем обозначать  $(EH)_{mn}$  (где  $m, n$  — число вариаций поля по  $\alpha$  и  $r$  соответственно). Записью в такой форме подчеркивается то обстоятельство, что при вырождении гиромангнитной среды в диэлектрическую ( $\mu_z \rightarrow \mu, \mu_\alpha \rightarrow 0$ ) гибридные волны  $(HE)_{mn}$  и  $(EH)_{mn}$  трансформируются в обычные волны  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$ . Распадение колебаний на две независимые группы волн  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  имеет место лишь при  $\beta = 0$  (критический режим).

Для решения системы уравнений (5.112) введем некоторую скалярную функцию  $\Psi$ , являющуюся линейной комбинацией  $E_z$  и  $H_z$ :

$$\Psi = E_z + i\Lambda H_z. \quad (5.113)$$

Умножим второе уравнение системы (5.112) на  $i\Lambda$  и сложим с первым. Тогда с учетом (5.113) система уравнений (5.112) может быть сведена к одному уравнению относительно  $\Psi$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left( \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \Psi = 0, \quad (5.114)$$

если величины  $\kappa$  и  $\Lambda$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \frac{\mu_z}{\mu} k_c^2 - \beta\omega\epsilon_a \frac{\mu_\alpha}{\mu} \Lambda_{1,2}; \\ \Lambda_{1,2} &= \frac{\tilde{\alpha}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right)^2 + \frac{\mu_0 \mu_z}{\epsilon_a}}; \\ \tilde{\alpha} &= \frac{k_c^2 \mu_0 (\mu_z - \mu) + \omega^2 \epsilon_a \mu_\alpha^2 \mu_0^2}{\beta\omega\mu_\alpha \mu_0}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Будем считать, например, что  $\Lambda_1$  соответствует знаку «+» в этих выражениях, а  $\Lambda_2$  — знаку «-».

Дифференциальное уравнение (5.114) представляет собой уравнение Бесселя, общее решение которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= AJ_m(\kappa_1 r) + BN_m(\kappa_1 r); \\ \Psi_2 &= CJ_m(\kappa_2 r) + DN_m(\kappa_2 r),\end{aligned}\quad (5.116)$$

где  $J_m(\kappa r)$  и  $N_m(\kappa r)$  — функция Бесселя первого рода и функция Неймана соответственно.

Из формулы (5.113) следует, что  $E_z$  и  $H_z$  должны удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned}E_z + j\Lambda_1 H_z &= \Psi_1; \\ E_z + j\Lambda_2 H_z &= \Psi_2,\end{aligned}$$

откуда  $E_z = \frac{\Lambda_2 \Psi_1 - \Lambda_1 \Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}$ ;  $H_z = j \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}$ , или

$$\begin{aligned}E_z &= A\Lambda_2 J_m(\kappa_1 r) + B\Lambda_2 N_m(\kappa_1 r) - C\Lambda_1 J_m(\kappa_2 r) - D\Lambda_1 N_m(\kappa_2 r), \\ H_z &= j[AJ_m(\kappa_1 r) + BN_m(\kappa_1 r) - CJ_m(\kappa_2 r) - DN_m(\kappa_2 r)].\end{aligned}\quad (5.117)$$

Поперечные составляющие полей выражаются через продольные с помощью формул (5.111).

**Азимутальное намагничивание.** Выражения для составляющих электромагнитного поля (5.101), (5.103) после преобразований с учетом (5.110) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}E_r &= -\frac{1}{k_{cy}^2} \left( j\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{m\omega\mu_\alpha\mu_0}{r} H_z \right); \\ E_\alpha &= -\frac{1}{k_c^2} \left( j\beta\omega\mu_0\mu_\alpha H_z - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\beta n}{r} E_z \right); \\ H_r &= \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_\alpha H_z - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{m\omega\epsilon_a}{r} E_z \right); \\ H_\alpha &= \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{\beta n}{r} H_z - j\omega\epsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial r} \right);\end{aligned}\quad (5.118)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left( k_{c\alpha}^2 - a_1 \frac{m^2}{r^2} \right) E_z &= \frac{m}{r} \left[ \rho_1 (1 - a_1) \frac{\partial H_z}{\partial r} + \rho_2 a_1 H_z \right]; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left( k_c^2 - \frac{\tilde{\alpha}}{r} - c - \frac{a_2 m^2}{a_1 r^2} \right) H_z &= \frac{m}{r} \left[ \rho_3 \left( 1 - \frac{1}{a_1} \right) \frac{\partial E_z}{\partial r} + \rho_4 E_z \right],\end{aligned}\quad (5.119)$$

где  $k_{cy}^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu_\alpha - \beta^2$ ;  $a_1 = \frac{k_{c\alpha}^2}{k_c^2}$ ;  $\rho_1 = -j \frac{\beta}{\omega \epsilon_a}$ ;  $\rho_3 = -\rho_1 \frac{\epsilon_a}{\mu \mu_0}$ ;  $\tilde{\alpha} = -\frac{\beta \mu_\alpha}{\mu}$ ;  
 $a_2 = \frac{\mu_\alpha}{\mu}$ ;  $\rho_2 = -j \omega \mu_0 \mu_\alpha$ ;  $\rho_4 = -\rho_2 \frac{\epsilon_a}{\mu \mu_0}$ ;  $c = \rho_2 \rho_4$ .

Как следует из (5.118), (5.119), электромагнитные волны являются гибридными, распадение на волны типов Н и Е имеет место лишь в случае волн, обладающих симметрией вращения ( $m = 0$ ,  $H_{0m}$ ,  $E_{0m}$ ). При  $m = 0$  система уравнений (5.119) распадается на два независимых волновых уравнения:

уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + k_{c\alpha}^2 E_z = 0;$$

вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left( k_c^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{r} - c \right) H_z = 0,$$

решения которых могут быть выражены через известные специальные функции

$$\begin{aligned} E_z &= A J_0(k_{c\alpha} r) + B N_0(k_{c\alpha} r); \\ H_z &= C v^{-\frac{1}{2}} M_{x,0}(v) + D v^{-\frac{1}{2}} W_{x,0}(v), \end{aligned} \quad (5.120)$$

где  $M_{x,0}(v)$ ,  $W_{x,0}(v)$  — функции Уиттекера первого и второго рода,

$$v = 2j \sqrt{k_c^2 - c} \cdot r; \quad \chi = -j \frac{\tilde{\alpha}}{2 \sqrt{k_c^2 - c}}. \quad (5.121)$$

В общем случае ( $m \neq 0$ ) решения системы уравнений (5.119) могут быть найдены методом, аналогичным методу Фробениуса. Решения записываются с помощью новых специальных функций

$$\begin{aligned} E_z &= A U_{m,1}(x) + B V_{m,1}(x) + m \rho_2 a_1 [C T_{m,2}(x) + D W_{m,2}(x)]; \\ H_z &= m \rho_4 [A T_{m,1}(x) + B W_{m,1}(x)] + C U_{m,2}(x) + D V_{m,2}(x), \end{aligned} \quad (5.122)$$

которые можно представить в форме бесконечных степенных рядов

$$\begin{aligned} U_{m,1}(x) &= x^{m \sqrt{a_2}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l; \\ T_{m,1}(x) &= x^{m \sqrt{a_2}} \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

и рядов более общего вида, содержащих логарифмические члены. Коэффициенты бесконечных рядов ( $a_l$ ,  $b_l$  и т. д.) вычисляются по рекуррентным формулам.



В пределе при  $m \rightarrow 0$  решения уравнений (5.122) переходят в решения (5.120). Поперечные составляющие полей выражаются через продольные формулами (5.118).

Запишем составляющие электромагнитного поля и граничные условия, которым они удовлетворяют, в слоях волновода, поперечное сечение которого показано на рис. 5.48:

- область 1 ( $0 \leq r \leq a$ ), ферритовая среда с параметрами  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$

$$|E_{z1}|_{r=0} < \infty; \quad |H_{z1}|_{r=0} < \infty;$$

в случае продольного намагничивания —

$$\begin{aligned} E_{z1} &= A_1 \Lambda_2 J_m(\chi_1 r) - C_1 \Lambda_1 J_m(\chi_2 r); \\ H_{z1} &= jA_1 J_m(\chi_1 r) - jC_1 J_m(\chi_2 r) \text{ и формулы (5.111);} \end{aligned}$$

в случае азимутального намагничивания —

$$\begin{aligned} E_{z1} &= A_1 U_{m,1}(k_{c1} r) + m \rho_2 a_1 C_1 T_{m,2}(k_{c1} r); \\ H_{z1} &= m \rho_4 A_1 T_{m,1}(k_{c1} r) + C_1 U_{m,2}(k_{c1} r) \text{ и формулы (5.118);} \end{aligned}$$

- область 2 ( $a \leq r \leq b$ ), диэлектрическая среда с параметрами  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $\mu_2 = \mu_0$  —

$$E_{z2}|_{r=b} = 0; \quad \left. \frac{\partial H_{z2}}{\partial r} \right|_{r=b} = 0;$$

$$E_{z2} = A_2 \Phi_m(k_{c2} r);$$

$$H_{z2} = C_2 G_m(k_{c2} r),$$

где

$$\Phi_n(k_{c2}) = \frac{J_n(k_{c2} r)}{J_n(k_{c2} b)} - \frac{N_n(k_{c2} r)}{N_n(k_{c2} b)};$$

$$G_n(k_{c2} r) = \frac{J_n(k_{c2} r)}{J_n(k_{c2} b)} - \frac{N_n(k_{c2} r)}{N_n(k_{c2} b)}.$$

Поперечные составляющие полей могут быть вычислены по формулам (5.118) при  $\mu_\alpha = 0$ .

Условие непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе раздела сред (областей)

$$E_{z1} = E_{z2}; \quad H_{z1} = H_{z2}; \quad E_{\alpha 1} = E_{\alpha 2}; \quad H_{\alpha 1} = H_{\alpha 2} \quad \text{при } r = a$$

приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $C_2$ . Характеристическое (или дисперсионное) уравнение, определяющее постоянные распространения  $\beta$  собственных типов колебаний  $(HE)_{mn}$  и  $(EH)_{mn}$  волновода ( $a$  при  $\beta = 0$  — спектр крити-

ческих частот), получается приравниванием нулю определителя этой системы. В обозначениях волн  $(HE)_{mt}$  и  $(EH)_{mt}$   $m$  — в первом случае порядковый номер нечетного корня, а во втором — четного корня характеристического уравнения.

Не выписывая характеристического уравнения, которое окажется весьма громоздким, отметим наиболее важные явления, имеющие место в круглом волноводе с ферритовым слоем.

*Продольному намагничиванию характерно:*

- а) явление магнитного вращения плоскости поляризации (эффект Фарадея);
- б) явление не взаимного поглощения при ферромагнитном резонансе для волн круговой (или эллиптической) поляризации;
- в) различие структуры поля круговых волн правого и левого вращений.

*Азимутальное намагничивание* — это явление не взаимного фазового сдвига волны произвольной поляризации при изменении направления намагничивающего поля (или при изменении направления распространения волны, если направление намагничивающего поля остается неизменным).

## Вопросы

1. Направляющая система — две параллельные проводящие плоскости, отстоящие друг от друга на расстояние  $d$ :
  - а) перечислите виды волн, распространяющиеся в этой системе, и укажите, при каких условиях распространяются;
  - б) запишите выражение, определяющее критическую длину волн  $E_n$  и  $H_n$ ;
  - в) запишите выражения, определяющие постоянную распространения, фазовую и групповую скорости, длину волны в системе и волновые сопротивления при распространении волн  $H_n$  и  $E_n$ ;
  - г) запишите выражения, определяющие те же характеристики для Т-волн;
  - д) приведите структуру поля Т-волны.
2. Направляющая система — прямоугольный волновод:
  - а) какие виды волн могут распространяться в волноводе и при каких условиях?
  - б) запишите выражения, определяющие критическую длину волн  $E_{nm}$  и  $H_{nm}$ ;
  - в) какой тип волны является основным? Приведите структуру его поля;
  - г) определите рабочий диапазон основного типа волн.
3. Направляющая система — круглый волновод:
  - а) какие виды волн могут в нем распространяться?
  - б) запишите выражения, определяющие критические длины волн  $H_{nm}$  и  $E_{nm}$ .
4. Направляющая система — коаксиальный волновод:
  - а) какие виды волн могут в нем распространяться?
  - б) почему на практике используется в основном Т-волна?
  - в) назовите характеристики Т-волны;
  - г) приведите структуру поля Т-волны.
5. Направляющая система — волноводы с замедленной фазовой скоростью направленных волн:
  - а) сформулируйте теорему Флоке;
  - б) где используется диафрагмированный волновод?

- в) при каких условиях в диафрагмированном волноводе может распространяться симметричная замедленная волна электрического типа?
- г) чем обусловлены волноводные свойства диэлектрического стержня?
- д) какие направляемые электромагнитные волны называются гибридными?
- е) сформулируйте основные свойства волны  $(HE)_{11}$  круглого диэлектрического волновода;
- ж) каковы свойства  $E_{01}$ -волны проводника с конечной проводимостью?
- з) сформулируйте основные электродинамические свойства полосковой линии передачи;
- и) что показывает анализ характеристического уравнения спирального волновода?
6. Направляющая система — неоднородные волноводы:
- а) перечислите основные свойства неоднородных волноводов со сферическими направляемыми волнами;
- б) как определяются критические сечения конического волновода?
- в) как образуются эквивалентные поверхностные электрические и магнитные токи на критических сечениях неоднородных волноводов?
- г) сформулируйте теорему Умова — Пойнтинга в комплексной форме для каждого собственного типа волны неоднородного волновода;
- д) перечислите аналитические, лучевые, волновые и энергетические свойства электромагнитного поля неоднородных волноводов с цилиндрическими направленными волнами.
7. Направляющая система — волноводы, содержащие намагниченные ферриты:
- а) почему  $E_{0n}$ -волны не могут существовать в прямоугольном волноводе с поперечно намагниченной ферритовой пластиной?
- б) как получить характеристическое уравнение для определения постоянных распространения собственных колебаний  $H_{0n}$ -волн прямоугольного волновода с поперечно намагниченной ферритовой пластиной?
- в) какие типы волн могут существовать в круглом волноводе с осесимметричным продольно намагниченным ферритовым стержнем?
- г) перечислите основные свойства электромагнитного поля при продольном и поперечном подмагничивании ферритового стержня в круглом волноводе.

### Задачи

1. Определите типы  $E_n$ -волны, которые могут распространяться между параллельными идеально проводящими плоскостями при частоте  $f = 10^9$  Гц и расстоянии между плоскостями  $d = 25$  см. Найдите критическую длину волны, длину волны в системе, фазовую скорость, волновое сопротивление системы. Определите структуру распространяющегося поля.
2. Полосковая линия заполнена диэлектриком с  $\epsilon = 4$ , ширина полос  $l = 20$  см, толщина диэлектрика  $d = 4$  см. Амплитуда напряженности электрического поля  $E_m = 100$  В/м. Пренебрегая краевым эффектом, определите мощность, передаваемую Т-волной.
3. По полосковой линии шириной  $l = 20$  см и высотой  $d = 9$  см, заполненной воздухом, передается мощность 100 Вт. Рассчитайте амплитуды электрической и магнитной составляющих поля Т-волны. Краевым эффектом пренебречь.

4. В прямоугольном волноводе размерами  $23 \times 10$  мм, заполненном воздухом, распространяется  $H_{10}$ -волна. Амплитуда напряженности электрической составляющей поля в центре волновода  $E_m = 10^5$  В/м, частота  $f = 10$  ГГц. Напишите выражения для составляющих поля, определите положение плоскостей круговой поляризации магнитного поля, плотность поверхностного тока на внутренних стенках волновода, ток смещения и мощность, передаваемую волноводом.
5. Определите мощность, переносимую волной основного типа в прямоугольном волноводе размерами  $72 \times 34$  мм, если наибольшее амплитудное значение напряженности электрического поля при частоте 3 ГГц составляет 100 В/м.
6. Определите критическую длину волны, фазовую и групповую скорости, длину волны в прямоугольном волноводе размерами  $23 \times 10$  мм для  $E_{11}$ -волны. Частота колебаний 10 ГГц.
7. В круглом металлическом волноводе диаметром 50 мм распространяется  $E_{12}$ -волна на частоте 14 ГГц. Определите длину волны, фазовую и групповую скорости.
8. Определите, какие типы волн распространяются в круглом волноводе радиусом 15 мм, заполненном воздухом. Частота 7,5 ГГц.
9. Коаксиальный волновод с параметрами  $R_1 = 1$  мм,  $R_2 = 4$  мм,  $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$  работает на Т-волне. Между проводниками создана разность потенциалов  $U = 300$  В. Определите напряженность электрического поля на окружности радиусом  $r = 1,5$  мм.
10. Коаксиальный волновод с параметрами  $R_1 = 5$  мм,  $R_2 = 15$  мм,  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  работает на Т-волне. Напряженность электрического поля на поверхности внутреннего проводника равна  $10^4$  В/м. Определите амплитудные значения плотности поверхностного тока на внутреннем и внешнем проводниках.

## 6. РЕЗОНАТОРЫ

### 6.1. Объемные резонаторы

Системы, в которых в результате внешнего воздействия возбуждаются свободные колебания, называются колебательными системами. Свободные колебания существуют в изолированной системе и после прекращения внешнего воздействия. Характер свободных колебаний определяется только параметрами системы, необходимая энергия доставляется извне в начальный момент возбуждения колебаний.

На высоких частотах свойствами колебательных систем обладают объемные резонаторы. Объемные резонаторы представляют собой часть диэлектрической среды, ограниченной металлической поверхностью — металлические резонаторы — или помещенной в менее плотную (в электромагнитном смысле) среду — диэлектрические резонаторы. В обоих случаях на внутренней поверхности резонатора выполняются условия полного отражения.

Электромагнитные колебания существуют в любом объеме, ограниченном металлической поверхностью, если размеры его достаточно велики по сравнению с длиной волны колебаний. Однако на практике широкое применение нашли резонаторы простой геометрической формы: прямоугольный и цилиндрический резонаторы.

Для того чтобы свободные колебания в объемном резонаторе не затухали, необходимо выполнение следующих условий: металлические стенки должны обладать бесконечной проводимостью, чтобы токи в этих стенках не вызывали потерь; среда, заполняющая объем резонатора, не должна обладать потерями. Практически потери в стенках и особенно в среде малы, и структура электромагнитного поля в реальных условиях мало отличается от структуры идеализированных колебаний в отсутствие потерь.

**Прямоугольный объемный резонатор.** Пересечем прямоугольный волновод, изображенный на рис. 5.12, двумя идеально проводящими плоскостями, параллельными плоскости  $x_1Ox_2$  ( $x_3 = 0$  и  $x_3 = l$ ). Определение структуры поля сводится к интегрированию в декартовой системе координат волнового уравнения для любой проекции вектора **E** или **H** и нахождению других составляющих поля

из уравнений Максвелла (2.8). Постоянные интегрирования находятся из удовлетворения граничных условий на всех стенках резонатора.

Поле  $H_{mnp}$  характеризуется наличием составляющих магнитного поля по всем трем осям координат, но одна из составляющих электрического поля отсутствует.

Очевидно, что  $H_{m3} = H_{m3}(x_1, x_2, x_3)$ , так как граничные условия должны выполняться на всех стенках резонатора, ограничивающих его объем по осям  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

Представим  $\dot{H}_{m3}$  в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$\dot{H}_{m3} = X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3) = X_1X_2X_3,$$

подставив ее в волновое уравнение (2.11) и разделив на  $X_1X_2X_3$ , получим

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} + \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -k^2,$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , т. е. от координат  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  не зависит. Это равенство возможно, если каждое слагаемое представляет собой постоянную величину, т. е.

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} = -\chi_1^2; \quad \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = -\chi_2^2; \quad \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -\chi_3^2.$$

Здесь  $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \chi^2 + \chi_3^2 = k^2$ .

Полученные уравнения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} X_1(x_1) &= A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1; \\ X_2(x_2) &= C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2; \\ X_3(x_3) &= E \cos \chi_3 x_3 + F \sin \chi_3 x_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{H}_{m3} = (A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1)(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2)(E \cos \chi_3 x_3 + F \sin \chi_3 x_3).$$

Согласно граничным условиям:

- 1)  $H_{m3} = H_\tau \neq 0$  при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ;
- 2)  $H_{m3} = H_\tau \neq 0$  при  $x_2 = 0$  и  $x_2 = b$ ;
- 3)  $H_{m3} = H_n = 0$  при  $x_3 = 0$  и  $x_3 = l$ .

Первое условие возможно

$$\text{при } A \neq 0, \quad B = 0 \text{ и } \chi_1 = \frac{m\pi}{a}.$$

Второе условие возможно

$$\text{при } C \neq 0, D = 0 \text{ и } \chi_2 = \frac{n\pi}{b}.$$

Третье условие возможно

$$\text{при } E = 0, F \neq 0 \text{ и } \chi_3 = \frac{p\pi}{l}.$$

Таким образом,

$$H_{m3} = H \cos \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3, \quad (6.1)$$

где  $H = ACF$ .

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m;$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$$

при  $E_3 = 0$  в проекциях на оси координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_3} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} &= 0; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3} &= j\omega \mu_a \dot{H}_{m1}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{m2}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{m3}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Согласно первым двум уравнениям системы (6.3)

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= -\frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3}; \\ \dot{H}_{m2} &= \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя второе уравнение системы (6.4) в первое уравнение системы (6.2), учитывая, что  $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = -\chi_3^2$ , получаем

$$\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial^2 \dot{E}_{m1}}{\partial x_3^2} = j \omega \epsilon_a \dot{E}_{m1},$$

или

$$j \left( \omega \epsilon_a - \frac{\chi_3^2}{\omega \mu_a} \right) \dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2},$$

или

$$\frac{j \chi^2}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2},$$

т. е., учитывая (6.1), получаем

$$\dot{E}_{m1} = \frac{j \omega \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3. \quad (6.5)$$

Подставляя первое уравнение системы (6.4) во второе уравнение системы (6.2), находим

$$-\frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial^2 \dot{E}_{m2}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} = j \omega \epsilon_a \dot{E}_{m2},$$

или

$$\frac{j \chi_3^2}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m2} - j \omega \epsilon_a \dot{E}_{m2} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1},$$

или

$$\frac{j(k^2 - \chi_3^2)}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m2} = -\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1},$$

т. е., учитывая (6.1), получаем

$$\dot{E}_{m2} = -\frac{j \omega \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3. \quad (6.6)$$

Согласно (6.4)—(6.6)

$$\dot{H}_{m1} = -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3;$$

$$\dot{H}_{m2} = -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3.$$

Таким образом, поле  $H_{mnp}$  имеет вид



$$\begin{aligned}
\dot{H}_{m3} &= H \cos \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3; \\
\dot{H}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3; \\
\dot{H}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3; \\
\dot{E}_{m1} &= \frac{j\omega_p \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3; \\
\dot{E}_{m2} &= -\frac{j\omega_p \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Здесь

$$\chi_1 = \frac{m\pi}{a}; \quad \chi_2 = \frac{n\pi}{b}; \quad \chi_3 = \frac{p\pi}{l}; \tag{6.8}$$

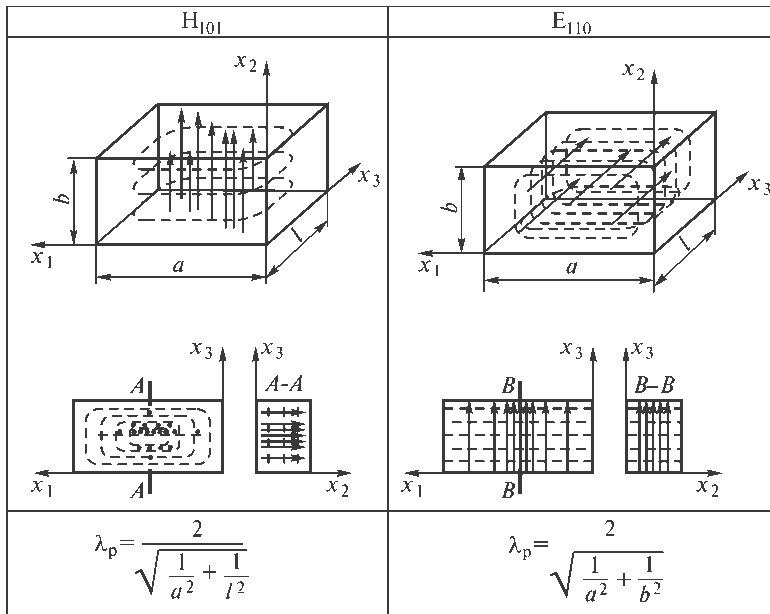
$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2; \quad \chi^2 + \chi_3^2 = k^2; \quad k = \omega_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \tag{6.9}$$

где  $\omega_p$  — резонансная частота;  $\epsilon_a, \mu_a$  — параметры среды, заполнявшей резонатор;  $m, n$  и  $p$  — целые числа ( $m$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $p = 1, 2, 3, \dots$ ). Одновременно  $m$  и  $n$  нулю равняться не могут.

Поле  $E_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе можно найти аналогично полю  $H_{mnp}$  или рассматривая поле в резонаторе как суперпозицию волн, определяемых формулами (5.31) распространяющихся в противоположных направлениях (с учетом коэффициента отражения от металлической стенки для различных составляющих поля). В результате получим

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{m3} &= E \sin \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3; \\
\dot{E}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3; \\
\dot{E}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3; \\
\dot{H}_{m1} &= \frac{j\chi_2 \omega_p \epsilon_a}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3; \\
\dot{H}_{m2} &= -\frac{j\chi_1 \omega_p \epsilon_a}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

где  $\chi_1 = \frac{m\pi}{a}$ ;  $\chi_2 = \frac{n\pi}{b}$ ;  $\chi_3 = \frac{p\pi}{l}$ ;  $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ ;  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $p = 0, 1, 2, \dots$



**Рис. 6.1.** Структура полей в прямоугольном резонаторе

Из выражений (6.7) и (6.10) следует, что фаза полей не меняется в пространстве (стоячая волна). На стенках резонатора касательные составляющие электрического поля и нормальные составляющие магнитного поля равны нулю, а нормальные составляющие электрического поля и касательные составляющие магнитного поля достигают максимума. Этим и объясняется, что величины  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  принимают значения, лишь определяемые выражениями (6.8), так как на соответствующих длинах  $a$ ,  $b$  и  $l$  должно укладываться целое число полуволн. Структура полей в объемном прямоугольном резонаторе представлена на рис. 6.1.

Величина  $k = \omega_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  согласно (6.9) и (6.8) может иметь только определенные, образующие бесконечный ряд, значения, называемые собственными волновыми числами резонатора. Соответствующие им выражения E- и H-полей объемного резонатора (6.7) и (6.10) называются собственными функциями.

Учитывая, что

$$k = \omega_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2},$$

получаем резонансные частоты прямоугольного резонатора

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

образующие бесконечный дискретный спектр. Этим частотам соответствуют резонансные длины волн

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}.$$

Таким образом, резонансные длины волн зависят от геометрических размеров резонатора и целых чисел  $m$ ,  $n$  и  $p$ , определяющих тип колебания. Наименьшая длина волны имеет место для одной из комбинаций значений  $mnp$ : 011, 101 или 110. При этом значение, равное нулю, соответствует наименьшему ребру прямоугольного резонатора.

Резонансные длины волн полей  $E_{mnp}$  и  $H_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе, определяемых одной и той же комбинацией чисел  $m$ ,  $n$  и  $p$ , равны. Соответствие разных полей одной и той же длине волны называется вырождением.

**Круглый цилиндрический резонатор.** В случае круглого цилиндрического резонатора структура поля находится решением волнового уравнения (2.11) и уравнений Максвелла (2.8) в цилиндрической системе координат. Составляющие поля имеют следующий вид:

$H_{mnp}$ -поле

$$\begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z; \\ \dot{H}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} HJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \sin \chi_z z; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi_z}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} \sin \chi_z z; \\ \dot{E}_{mr} &= \frac{jn\omega_p \mu_\alpha}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{j\omega_p \mu_\alpha}{\chi} HJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где  $\chi_z = \frac{p\pi}{l}$ ;  $p = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\chi = \frac{B_{nm}}{a}$ ;  $B_{nm}$  — корни уравнения  $J'_n(x) = 0$ ;  $a$  — радиус резонатора;  $l$  — длина резонатора;

$E_{nmp}$ -поле

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{mz} &= EJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z; \\
 \dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} EJ'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \sin \chi_z z; \\
 \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi_z}{\chi^2 r} EJ_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} \sin \chi_z z; \\
 \dot{H}_{mr} &= \frac{jn\omega_p \varepsilon_a}{\chi^2 r} J_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z; \\
 \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{j\omega_p \varepsilon_a}{\chi} J'_n(\chi r) \left. \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right\} \cos \chi_z z,
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

где  $\chi_z = \frac{p\pi}{l}$ ;  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $\chi = \frac{A_{nm}}{a}$ ;  $A_{nm}$  — корни уравнения  $J_n(x) = 0$ ;  $a$  — радиус резонатора;  $l$  — длина резонатора.

Из полученных выражений (6.11) и (6.12) следует, что электромагнитное поле как для Н-, так и для Е-колебаний представляет собой стоячие волны с узлами  $E_r$ ,  $E_\alpha$  и  $H_z$  на основаниях цилиндра и узлами  $E_z$ ,  $E_\alpha$  и  $H_r$  на боковой поверхности.

Резонансные частоты и длины волн резонатора:

$H_{nmp}$ -поле

$$\begin{aligned}
 \omega_p &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}; \\
 \lambda_p &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}};
 \end{aligned}$$

$E_{nmp}$ -поле

$$\begin{aligned}
 \omega_p &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}; \\
 \lambda_p &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Наибольшая резонансная длина волны для Е-колебаний соответствует типу  $E_{010}$ , для Н-колебаний — типу  $H_{111}$ .

В отличие от прямоугольного резонатора длины волн для колебаний  $H_{nmp}$  и  $E_{nmp}$  не совпадают.

**Резонатор с потерями.** Потери в резонаторах обусловлены потерями в стенках резонатора, в среде, заполняющей объем резонатора, а также излучением через отверстия в стенках резонатора.

Потери в стенках резонатора аналогичны потерям в стенках волновода и определяются выражением

$$P_{0\text{ст}} = \sqrt{\frac{\mu_{a\text{ст}} \omega_p}{2\sigma_{\text{ст}}}} \cdot \int_S H_{\text{дт}}^2 dS, \quad (6.13)$$

где интегрирование ведется по всей внутренней поверхности резонатора. Напомним, что  $H_{\text{дт}}$  — действующее значение тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности резонатора, вычисленное в предположении отсутствия потерь;  $\mu_{a\text{ст}}$  и  $\sigma_{\text{ст}}$  — магнитная проницаемость и проводимость материала стенок соответственно.

Потери в диэлектрике, заполняющем резонатор,

$$P_{0\text{диэл}} = \text{Re} \int_V (\mathbf{J}_d \mathbf{E}_d^*) dV = \int_V \sigma E_d^2 dV, \quad (6.14)$$

где  $E_d$  — действующее значение напряженности электрического поля в резонаторе;  $\sigma$  — проводимость диэлектрика.

Если в стенках резонатора имеются отверстия, то через них будет излучаться электромагнитная энергия. Это излучение может происходить как в свободное пространство, так и в связанный с резонатором волновод или в другой резонатор. Излучаемая мощность

$$P_{0\text{изл}} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_0} [\mathbf{E} \dot{\mathbf{H}}^*] dS, \quad (6.15)$$

где интегрирование проводится по поверхности, соответствующей отверстию.

Общая мощность потерь

$$P_0 = P_{0\text{ст}} + P_{0\text{диэл}} + P_{0\text{изл}}. \quad (6.16)$$

Конечно, потери всех видов изменяют распределение поля в резонаторе, но практический интерес представляет случай малых потерь, при котором распределение поля близко к идеальному и резонатор можно рассматривать как изолированную систему, обладающую запасом энергии:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \mu_a H_m^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E_m^2 dV; \\ W &= \int_V \mu_a H_d^2 dV = \int_V \epsilon_a E_d^2 dV. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Потери энергии в такой системе характеризуются добротностью  $Q$  (безразмерная величина). С точностью до постоянного множителя  $2\pi$  добротность определяется отношением запасенной энергии  $W$  к потерям энергии  $W_T$  за период

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = \frac{\omega_p W}{P_0}, \quad (6.18)$$

где  $P_0$  — средняя мощность потерь.

Потери приводят к затуханию колебаний и уменьшению запасенной энергии резонатора, если она не восполняется извне

$$\frac{dW}{dt} = -P_0.$$

Подставляя это соотношение в (6.18), получаем уравнение

$$Q = \frac{\omega_p W}{-\frac{dW}{dt}}$$

или

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega_p}{Q} W = 0,$$

решение которого имеет вид

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega_p t}{Q}},$$

т. е. запас энергии убывает по экспоненциальному закону, причем тем быстрее, чем меньше добротность.

Поскольку энергия пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля, то очевидно, что изменение амплитуды напряженности происходит по закону

$$E_m(t) = E_m \cdot e^{-\frac{\omega_p t}{2Q}};$$

$$H_m(t) = H_m \cdot e^{-\frac{\omega_p t}{2Q}}.$$

Эти выражения характеризуют колебания частотой  $\omega_p$ , затухающие во времени по экспоненциальному закону.

Коэффициент  $\alpha = \frac{\omega_p}{2Q}$  называется коэффициентом затухания.

Мгновенные значения напряженности можно записать в виде

$$\dot{E} = E_m e^{-\frac{\omega_p t}{2Q}} \cdot e^{j\omega_p t} = E_m \cdot e^{j\omega_p t};$$

$$\dot{H} = H_m e^{-\frac{\omega_p t}{2Q}} \cdot e^{j\omega_p t} = H_m \cdot e^{j\omega_p t}.$$

Величина

$$\dot{\omega}_p = \omega_p \left( 1 + j \frac{1}{2Q} \right) \quad (6.19)$$

называется комплексной частотой собственных колебаний.

Согласно (6.16) и (6.18) можно записать

$$\frac{1}{Q} = \frac{P_0}{\omega_p W} = \frac{1}{Q_{\text{ст}}} + \frac{1}{Q_{\text{диэл}}} + \frac{1}{Q_{\text{изл}}},$$

где  $Q_{\text{ст}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{ст}}}$  — добротность резонатора при наличии потерь только в стенках;

$Q_{\text{диэл}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{диэл}}}$  — добротность резонатора, обусловленная потерями только в ди-

электрике;  $Q_{\text{изл}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{изл}}}$  — добротность резонатора при наличии потерь только

за счет излучения.

Добротности  $Q_{\text{ст}}$ ,  $Q_{\text{диэл}}$  и  $Q_{\text{изл}}$  называют частичными добротностями. Добротность, обусловленную потерями в стенках и диэлектрике, называют собственной добротностью  $Q_0$  и определяют по формуле

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{ст}}} + \frac{1}{Q_{\text{диэл}}}.$$

Добротность  $Q_{\text{изл}}$ , определяемая излучением, называется внешней, общая добротность  $Q$  — нагруженной.

На практике чаще применяют круглые цилиндрические резонаторы, работающие на  $H_{01p}$ -колебаниях. Такие резонаторы при данном объеме обладают наибольшей добротностью. Отсутствие продольных составляющих тока на боковой поверхности и радиальных составляющих на торцах резонатора позволяет изготавливать резонаторы разъемными без ухудшения добротности, так как разрывы не прерывают линий тока.

Объемные металлические резонаторы нашли широкое применение в технике сверхвысоких частот, для выделения сигнала определенной частоты, определения длины волны и измерения электромагнитных параметров веществ.

## 6.2. Открытые резонаторы

Применение обычных объемных резонаторов, геометрические размеры которых соответствуют настройке на одну собственную частоту, в оптическом диапазоне нецелесообразно, так как технологически трудно создать резонатор с размерами порядка длины волны (доли микрометра). Кроме того, при таких малых размерах



**Рис. 6.2.** Открытые резонаторы, образованные:

*a* — плоскими зеркалами; *b* — сферическими; *в* — плоским зеркалом и призмой полного отражения; *г* — призмами полного отражения

добротность резонатора резко уменьшается, а резонатор, размеры которого намного больше длины волны, практически теряет свои резонансные свойства.

Действительно, согласно формуле Релея — Джинса число собственных колебаний, возникающих в резонансной трехмерной системе в интервале частот  $\Delta\omega$ , равно

$$p = \frac{V}{2\pi^2 v^2} \omega^2 \Delta\omega,$$

где  $V$  — объем системы;  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$  — скорость распространения электромагнитной волны.

Эта формула асимптотическая, точность ее повышается с увеличением частоты  $\omega$ . С повышением частоты спектр собственных колебаний сильно сгущается, потери в стенках резонатора возрастают пропорционально  $\sqrt{\omega}$ , резонансные кривые каждого типа колебания расширяются и перекрываются.

Для одномерной системы длиной  $l$

$$p = \frac{2l}{\pi v} \Delta\omega,$$

т. е. спектр с повышением частоты не сгущается.

В оптическом диапазоне волн используются резонаторы, образуемые системой двух обращенных друг к другу отражающих поверхностей (зеркал). С точки зрения геометрической оптики между системой параллельных зеркал могут существовать пары параллельных, преобразующихся при отражении друг в друга лучей. Эти лучи и определяют собственные колебания резонатора, который эквивалентен одномерной колебательной системе. Под  $l$  в этом случае подразумевается расстояние между зеркалами. Поскольку резонатор ограничен лишь двумя поверхностями и открыт с других сторон, то его называют открытым. Размеры такого резонатора намного больше длины волны, а спектр достаточно разрежен. Открытый резонатор длиной 1 м имеет в  $10^{10}$  раз меньше резонансных частот, чем объемный резонатор такой же длины.

Отражающие поверхности могут представлять собой зеркала (плоские, сферические, параболические), грани призм полного внутреннего отражения или границы раздела сред с различными показателями преломления (рис. 6.2). При этом необходимо иметь поверхности с большим коэффициентом отражения и



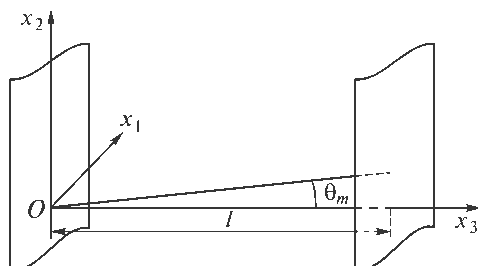


Рис. 6.3. Плоский резонатор

малыми потерями на поглощение. Такие поверхности создаются с помощью диэлектрических покрытий, которые обеспечивают коэффициент отражения более 0,99 на рабочей длине волны.

**Плоский резонатор.** Рассмотрим резонатор, образованный параллельными плоскими бесконечно протяженными зеркалами без потерь (рис. 6.3). В таком резонаторе возможно существование двух плоских однородных волн, распространяющихся от одной отражающей поверхности к другой вдоль оси резонатора навстречу друг другу. При этом образуются стоячие волны, называемые *продольными* или *аксиальными типами (модами) основного колебания*, подчиняющиеся условию

$$l = q \frac{\lambda}{2}, \quad (6.20)$$

где  $l$  — расстояние между зеркалами;  $q$  — число полуволн, укладываемых между зеркалами;  $\lambda$  — длина волны в среде, заполняющей резонатор.

Стоячие волны могут образовываться и при сложениях плоских волн, распространяющихся под некоторым углом  $\theta$  к оси резонатора.

Такие стоячие волны называют *продольными типами данного поперечного или углового колебания*. Условие их образования согласно (5.5) имеет вид

$$l = q \frac{\lambda_{\perp}}{2} = q \frac{\lambda}{2 \cos \theta}. \quad (6.21)$$

Здесь  $\lambda_{\perp} = \lambda / \cos \theta$  определяет вариации поля в направлении оси резонатора.

Для продольных типов основного колебания собственные частоты равны

$$f_q = q \frac{v}{2l} = q \frac{c}{2nl}. \quad (6.22)$$

Для продольных типов поперечных колебаний собственные частоты равны

$$f_q = q \frac{v}{2l \cos \theta} = q \frac{c}{2nl \cos \theta}, \quad (6.23)$$

где  $c$  — скорость света;  $n$  — коэффициент преломления среды, заполняющей резонатор;  $v = c/n$ .

Для поперечных типов колебаний имеет место вырождение, т. е. одной и той же частоте соответствует множество поперечных типов, отличающихся значением  $q$  и углом распространения  $\theta$ . Пусть плоские волны распространяются под углом  $\theta$  в плоскости  $x_1Ox_3$  (см. рис. 6.3). Фиксируя частоту основного типа колебания  $f_q(\theta = 0)$ , найдем соответствующий этой частоте первый поперечный тип колебания. Очевидно, что число полуволн для этого типа колебаний должно отличаться на единицу и он будет распространяться под фиксированным углом  $\theta = \theta_1$ , т. е.

$$f_q(\theta = 0) = f_{q-1}(\theta = \theta_1)$$

или согласно (6.23)

$$\cos \theta_1 = \frac{q-1}{q}.$$

Аналогично для  $m$ -го поперечного типа, распространяющегося под углом  $\theta_m$  к оси резонатора, имеем

$$f_q(\theta = 0) = f_{q-m}(\theta = \theta_m),$$

и в соответствии с выражением (6.23)

$$\cos \theta_m = \frac{q-m}{q}.$$

При  $m \ll q$ , что соответствует поперечным колебаниям, имеющим место в резонаторах с зеркалами конечных размеров, получим

$$\cos \theta_m \approx 1 - \frac{\theta_m^2}{2} \approx 1 - \frac{m}{q}, \quad (6.24)$$

откуда

$$\theta_m = \sqrt{\frac{2m}{q}}$$

или согласно (6.20)

$$\theta_m = \sqrt{m \frac{\lambda}{l}} \quad (m \ll q).$$

Аналогичное соотношение получим, рассматривая распространение плоских волн под углом  $\theta_n$  в плоскости  $x_2Ox_3$ :

$$\theta_n = \sqrt{n \frac{\lambda}{l}} \quad (n \ll q).$$

При  $m, n \ll q$  углы  $\theta_m$  и  $\theta_n$  принимают дискретные значения, угловое расстояние между соседними поперечными типами

$$\Delta\theta_m = \sqrt{\frac{\lambda}{l}} \cdot (\sqrt{m+1} - \sqrt{m});$$

$$\Delta\theta_n = \sqrt{\frac{\lambda}{l}} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

и структура поля на зеркалах неоднородна, имеются периодические вариации поля.

Расстояние по частоте между соседними продольными типами основного и поперечных колебаний одинаково, и согласно (6.22) и (6.23) с учетом (6.24) получаем

$$\Delta f = f_q - f_{q-1} = \frac{v}{2l}.$$

Для малых значений  $m$  и  $n$  значения углов  $\theta_m$  и  $\theta_n$  малы и поле поперечных типов можно считать имеющим структуру поперечной электромагнитной волны (Т-волны), характеризующуюся определенным числом полувольт  $q$ , укладывающихся на длине резонатора, и числами  $m$  и  $n$ , определяющими направление распространения волн в резонаторе. Соответствующий тип колебаний определяется как  $T_{mq}$ .

Открытый резонатор с параллельными плоскими зеркалами конечных размеров можно рассматривать как волновод, образованный параллельными плоскостями, в котором распространяется волна при частоте, лишь немного большей критической. Такая волна, подходя к краям волновода, не излучается, а с коэффициентом отражения, близким по модулю к единице, отражается обратно.

Поле пассивного резонатора определяется однородными уравнениями Гельмгольца

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0;$$

$$\Delta \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0.$$

В декартовой системе координат скалярные волновые уравнения для составляющих поля имеют тот же вид:

$$\Delta \dot{u} + k^2 \dot{u} = 0, \quad (6.25)$$

где под функцией  $\dot{u}$  подразумевается любая составляющая  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{H}_1$  или  $\dot{H}_2$ . Составляющие поля находят из решения этого уравнения и выполнения граничных условий.

Однако ввиду дифракции невозможно точно решить волновое уравнение и от уравнения (6.25) переходят к параболическому уравнению, представляющему собой уравнение второго порядка, в котором отсутствует по крайней мере одна из вторых производных.

Решение волнового уравнения (6.25) приближенно записывают в виде

$$\dot{u} = \dot{u}_m(x_1, x_2, x_3) e^{-jkx_3}, \quad (6.26)$$

при этом поле в резонаторе можно представить как суперпозицию двух волн вида (6.26), бегущих в противоположные стороны. В выражении (6.26) значение множителя  $e^{-jkx_3}$  быстро изменяется в направлении оси  $x_3$ , а значение  $u_m(x_1, x_2, x_3)$  медленно изменяется в поперечном направлении (поперечная диффузия поля) и еще медленнее — в продольном. Функция  $u_m(x_1, x_2, x_3)$  характеризует отличие поля в резонаторе от плоской волны: неоднородность поля в поперечном направлении, изменение сечения луча при распространении, кривизну фазового фронта. Подставляя (6.26) в (6.25) и опуская вследствие малости член  $\frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x_3^2}$ , получаем параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x_2^2} - 2jk \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial x_3} = 0. \quad (6.27)$$

Возможное решение (6.27) для основного колебания имеет вид

$$\dot{u}_m = e^{-j\left(p + \frac{k}{2q}r^2\right)}, \quad (6.28)$$

где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$  — расстояние от оси;  $p = p(x_3)$  — комплексный параметр, характеризующий изменение амплитуды и фазы поля при распространении вдоль оси  $x_3$ ;  $q = q(x_3)$  — комплексный параметр, характеризующий распределение интенсивности по координате  $r$  и кривизну волнового фронта, который вблизи оси  $x_3$  является сферическим. Параметр  $q$  можно определить из выражения

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (6.29)$$

При подстановке (6.29) в (6.28) очевидно, что  $R = R(x_3)$  — радиус кривизны волнового фронта в точке пересечения с осью  $x_3$ , а  $w = w(x_3)$  определяет уменьшение амплитуды поля  $E$  с увеличением расстояния от оси  $x_3$ . Распределение поля в поперечной плоскости подчиняется *закону Гаусса* (рис. 6.4) и значение  $w$  определяется расстоянием, на котором амплитуда поля в  $e$  раз меньше, чем на оси. Параметр  $w$  обычно называют радиусом пучка, а  $2w$  — диаметром пучка.

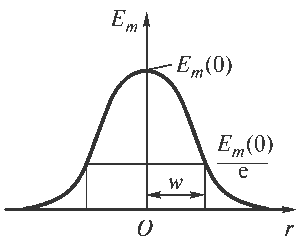


Рис. 6.4. Поперечное распределение амплитуды поля основного типа колебания

Подставляя (6.28) в (6.27) и приравнявая члены с  $r$  в одинаковой степени, получаем

$$\frac{dq}{dx_3} = 1; \quad (6.30)$$

$$\frac{dp}{dx_3} = -\frac{j}{q}. \quad (6.31)$$

Интегрируя уравнение (6.30), получаем соотношение

$$q_2 = q_1 + \Delta x_3, \quad (6.32)$$

связывающее комплексные параметры  $q$ , соответствующие любым поперечным сечениям 1 и 2, отстоящим друг от друга на расстоянии  $\Delta x_3$ .

Распределение интенсивности в любой поперечной плоскости является гауссовым и изменяется вдоль оси  $x_3$ . Гауссов пучок стягивается к минимальному диаметру  $2w_0$  в сечении, где фазовый фронт плоский ( $R = \infty$ , «горловина»). Согласно (6.29) параметр  $q_0$ , соответствующий этому сечению, равен

$$q_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (6.33)$$

Если  $x_3$  отсчитывать от этой плоскости, то на расстоянии  $x_3$  в соответствии с (6.32) и (6.33)

$$q(x_3) = q_0 + x_3 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + x_3. \quad (6.34)$$

Согласно (6.29) и (6.34)

$$\frac{1}{x_3 + j \frac{\pi w_0^2}{\lambda}} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

или

$$\frac{x_3 - j \frac{\pi w_0^2}{\lambda}}{x_3^2 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}.$$

Приравнявая действительные и мнимые члены правой и левой частей этого уравнения, получаем

$$R(x_3) = x_3 \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda x_3} \right)^2 \right]; \quad (6.35)$$

$$w^2(x_3) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \right)^2 \right], \quad (6.36)$$

где расстояние  $x_3$  отсчитывается от «горловины».

На рис. 6.5 показано расширение пучка, определяемое уравнением (6.36). Образующая пучка представляет собой гиперболу с асимптотами, наклоненными к оси под углом

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

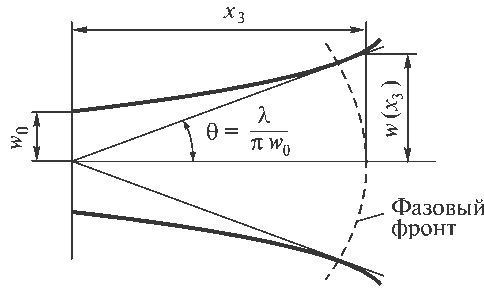


Рис. 6.5. Продольное распределение поля основного колебания

Этот угол равен дифракционному в дальней зоне для волны основного типа.

Параметр  $p$ , определяющий решение (6.28), найдем из уравнения (6.31), подставив в него (6.34):

$$\frac{dp}{dx_3} = -\frac{j}{x_3 + j\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$jp(x_3) = \ln \left[ 1 - j \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \right] = \ln \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \right)^2} - j \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \right).$$

Действительная часть  $p$

$$\operatorname{Re} p = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \quad (6.37)$$

определяет разность фаз между гауссовым пучком и идеальной плоской волной. Мнимая часть  $p$  с учетом (6.36) равна

$$\operatorname{Im} p = \ln \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda x_3}{\pi w_0^2} \right)^2} = \ln \frac{w}{w_0}, \quad (6.38)$$

и поскольку

$$e^{-\ln \frac{w}{w_0}} = \frac{w_0}{w},$$

то (6.38) определяет амплитудный множитель  $w_0/w$ , характеризующий уменьшение амплитуды на оси вследствие расширения пучка.

С учетом полученных соотношений (6.37), (6.38), (6.29) и выражения (6.28) решение (6.26) для основного колебания с гауссовым распределением поля в поперечном сечении имеет вид

$$\dot{u}_m = \frac{w_0}{w} e^{-r^2 \left( \frac{1}{w^2} + j \frac{k}{2R} \right)} e^{-j(kx_3 - \varphi)}. \quad (6.39)$$

Другие возможные решения волнового уравнения (6.25) определяют поперечные типы колебаний, при конечных размерах зеркал характеризуемые несколькими вариациями поля в поперечном направлении.

Собственные типы колебаний открытого резонатора, часто называемые модами, характеризуются определенным распределением амплитуд и фаз по поверхности зеркала. Запаздывание фазы у краев зеркала по сравнению с центром соответствует долям длины волны. В то же время по любому поперечному размеру прямоугольного зеркала или диаметру круглого зеркала укладывается множество длин волн. Отсюда следует, что кривизна фронта в резонаторе мала и колебания в резонаторе являются поперечными. Такие типы колебаний обычно обозначаются как  $T_{mq}$ , где индексы « $m$ » и « $n$ » называются поперечными ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ), а индекс « $q$ » — продольным, или аксиальным. Поперечные индексы определяют число изменений знака поля на поверхности прямоугольного зеркала в направлении координат  $x_1$  и  $x_2$ , для круглого зеркала индекс « $m$ » обозначает число изменений знака вдоль радиуса, а индекс « $n$ » — по углу (рис. 6.6). Продольный индекс « $q$ » равен числу полувольт, укладываемых на длине резонатора.

Условие резонанса

$$kl - \varphi_{mn} = q\pi, \quad (6.40)$$

где  $\varphi_{mn}$  зависит от индексов « $m$ » и « $n$ ».

Из равенства (6.40) следует, что резонансные частоты

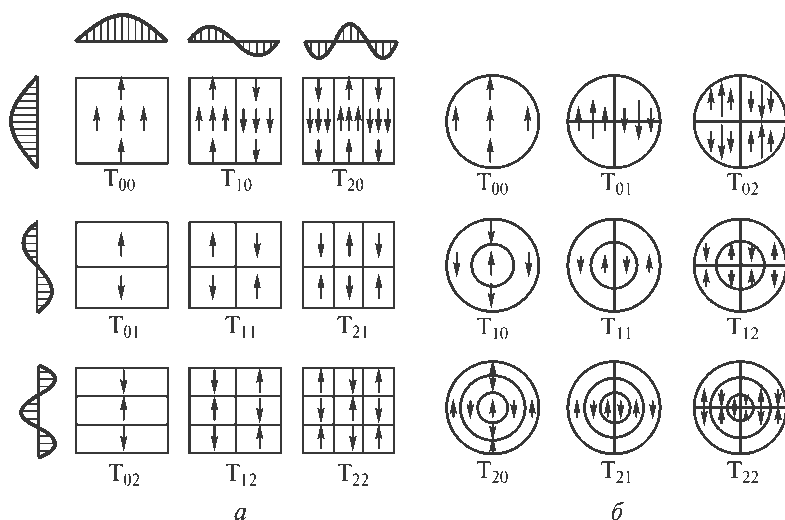


Рис. 6.6. Распределение поля на поверхностях зеркал открытых резонаторов:

$a$  — плоские прямоугольные зеркала;  $b$  — плоские круглые зеркала

$$f_{mnq} = \frac{c}{2\pi nl} (\varphi_{mn} + q\pi), \quad (6.41)$$

где  $n$  — показатель преломления среды, заполняющей резонатор.

Разность резонансных частот соседних колебаний с одинаковыми поперечными индексами и отличающимися продольными индексами на единицу равна

$$\Delta f = f_q - f_{q-1} = \frac{v}{2l}. \quad (6.42)$$

Поскольку  $q \gg m$  и  $q \gg n$ , разность частот, определяемая выражением (6.42), мала по сравнению с резонансной частотой, определяемой (6.41), то моды с одинаковыми значениями  $m$  и  $n$ , но разными значениями  $q$  объединяют в одну *поперечную моду*, опуская  $q$  и обозначая ее как  $T_{mn}$ . Согласно (6.42) расстояние по частоте между соседними продольными колебаниями, относящимися к различным поперечным модам, одинаково. Таким образом, наборы частот, соответствующие различным поперечным модам, сдвинуты относительно друг друга по частоте. Этот сдвиг определяется фазовым сдвигом  $\varphi_{mn}$ , различным для разных поперечных мод. Случай, когда частоты различных поперечных мод совпадают, называется вырождением.

При небольших значениях  $m$ ,  $n$  энергия поля в основном сосредоточена в центральной области зеркала и быстро спадает до нуля при приближении к краям. Типы колебаний с большими значениями  $m$  и  $n$  образуются в результате сложения плоских волн, распространяющихся под большими углами к оси резонатора. Поле этих типов вблизи краев зеркала достаточно велико, поэтому дифракционные потери велики и такие поперечные типы практически не могут существовать.

Чем больше значения  $m$  и  $n$ , тем больше поле у краев зеркала, тем больше дифракционные потери. Суммарные потери определяются как сумма потерь дифракционных и потерь на зеркалах. Последние одинаковы для всех типов колебаний. Наименьшими дифракционными потерями обладает основное колебание  $T_{00}$ , для которого распределение амплитуды достигает максимума в центре и довольно круто спадает к краям.

Распределение поля на поверхностях зеркал, дифракционные потери и фазовый сдвиг зависят от длины резонатора  $l$ , апертурного размера зеркала  $2a$ , длины волны  $\lambda$  и характеризуются числом Френеля:

$$N_{\Phi} = \frac{a^2}{l\lambda}.$$

Чем больше значение  $N_{\Phi}$ , тем меньше амплитуда поля на краях зеркал, тем меньше дифракционные потери. Зависимости потерь мощности за один проход от числа Френеля  $N_{\Phi}$  для круглых плоских зеркал приведены на рис. 6.7. Если  $N_{\Phi} > 10$ , то дифракционные потери определяются выражением

$$\alpha_{\text{диф}} = 5,23 \cdot 10^{-2} A_{n(m+1)} N_{\Phi}^{-3/2}, \quad (6.43)$$



где  $A_{n(m+1)}$  —  $(m+1)$ -й корень уравнения  $J_n(x) = 0$ ;  $J_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка.

**Конфокальный симметричный резонатор.** Такой резонатор образуется сферическими отражателями, расположенными на расстоянии, равном радиусу кривизны зеркала. Так как фокусное расстояние сферического зеркала равно половине его радиуса, то фокусы обоих зеркал совпадают (рис. 6.8).

Для исследования такого резонатора применим тот же метод, что и для исследования плоского резонатора. Однако поверхности зеркал в этом случае являются поверхностями равных фаз, распределение же амплитуд по поверхностям зеркал неоднородно. При этом поле больше сконцентрировано в центрах зеркал и меньше у краев, чем в случае плоских зеркал. Поэтому дифракционные потери конфокального резонатора значительно меньше, чем плоского (рис. 6.9). Отношение потерь низших поперечных типов к потерям основного типа значительно больше, чем в случае плоского резонатора.

Собственные частоты конфокального резонатора с квадратными зеркалами определяются выражением

$$f_{mnq} = \frac{v}{4l} (2q + 1 + m + n), \quad (6.44)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$  — скорость распространения электромагнитных волн в среде, заполняющей резонатор.

Спектр возможных частот сильно вырожден. Увеличивая значение  $m+n$  на любое целое число и уменьшая значение  $q$  на половину этого числа, получаем то же значение частоты. Расстояние по частоте между соседними типами колебаний, для которых значения  $m+n$  отличаются на единицу, равно

$$\Delta f = f_{mnq} - f_{(m-1)nq} = \frac{v}{4l}.$$

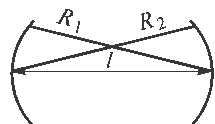


Рис. 6.8. Конфокальный симметричный резонатор ( $R_1 = R_2 = l$ )

Расстояние по частоте между продольными типами основного колебания  $T_{00}$ , как и в плоском резонаторе, равно

$$\Delta f = f_{00q} - f_{00(q-1)} = \frac{v}{2l}.$$

Для конфокального резонатора с круглыми зеркалами

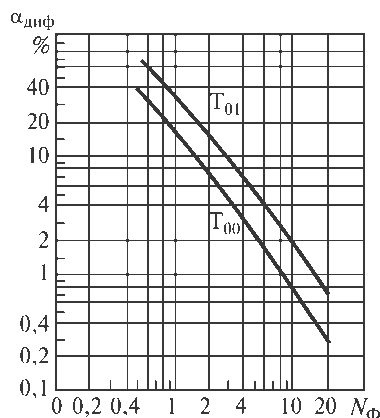
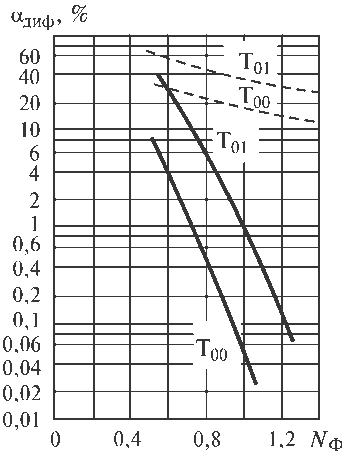


Рис. 6.7. Зависимость относительных потерь мощности за один проход от числа Френеля  $N_F$  для круглых плоских зеркал



**Рис. 6.9.** Дифракционные потери за один проход конфокального (сплошная линия) и плоского (пунктирная линия) резонаторов

$$f_{mnq} = \frac{v}{4l} (2q + 1 + 2m + n), \quad (6.45)$$

где  $m$  — радиальный индекс.

Здесь также наблюдается вырождение. При увеличении значения  $2m + n$  на целое четное число и уменьшении значения  $q$  на половину этого числа частота не изменяется.

Расстояние по частоте между соседними типами колебаний, для которых значения по  $m$  отличаются на единицу, согласно (6.45) равно

$$\Delta f = f_{mnq} - f_{(m-1)nq} = \frac{v}{2l}. \quad (6.46)$$

Расстояние по частоте между соседними типами колебаний, для которых значения по  $n$  отличаются на единицу, определяется выражением

$$\Delta f = f_{mnq} - f_{(m-1)nq} = \frac{v}{2l}. \quad (6.47)$$

Расстояние по частоте между продольными типами колебаний  $T_{00}$

$$\Delta f = f_{00q} - f_{00(q-1)} = \frac{v}{2l}.$$

Для основного типа колебаний радиус круга на поверхности зеркала, соответствующий уменьшению напряженности поля по сравнению с центром в  $e$  раз, определяется выражением

$$r_{1/e} = \sqrt{\frac{\lambda l}{\pi}}$$

и не зависит от размеров зеркала. Увеличение размеров отражателя приводит лишь к уменьшению дифракционных потерь.

Диаметр круга на зеркале, в пределах которого мощность уменьшается вдвое, определяется выражением

$$d_{0,5} = 1,18 \sqrt{\frac{\lambda l}{\pi}}.$$

Поле внутри резонатора представляет собой суперпозицию двух волновых пучков, распространяющихся навстречу друг другу. Поверхность постоянной фазы представляет собой сферическую поверхность, радиус кривизны которой изменяется от бесконечности в центре резонатора (фокальная плоскость) до радиусов зеркал на поверхности отражателей. Поверхности равной относительной интенсивности поля имеют вид гиперболоидов вращения, ось которых совпадает с осью резонатора

(рис. 6.10). Поперечное сечение пучка для основной моды максимально на поверхности зеркала и минимально в фокальной плоскости, где фазовый фронт плоский. В фокальной плоскости радиус круга, соответствующий ослаблению поля в  $e$  раз, определяется выражением

$$r_{1/e} = \sqrt{\frac{\lambda l}{2\pi}}.$$

Если зеркало частично прозрачно, то энергия излучается в виде луча с максимумом вдоль оси резонатора. Зная распределение поля на поверхности зеркала, можно определить диаграмму направленности. Для поля  $T_{00}$  ширина диаграммы по половинному уровню

$$\theta_{0,5} = 0,53 \frac{\lambda}{r_{1/e}} = 0,63 \frac{\lambda}{d_{0,5}}.$$

Вне резонатора кривизна фронта быстро уменьшается и фронт волны стремится к плоскому.

Сферический конфокальный резонатор обладает преимуществами по сравнению с плоскопараллельным. Он характеризуется меньшими дифракционными потерями и большими различиями этих потерь для низших типов колебаний. Поле конфокального резонатора гораздо больше сконцентрировано у оси. Этот резонатор легче настроить, чем плоскопараллельный. Однако при нарушении конфокальности дифракционные потери резко возрастают.

Добротность открытого резонатора, как и любой резонансной системы, определяется выражением

$$Q = \frac{\omega_p W}{P_0}, \quad (6.48)$$

где  $\omega_p$  — резонансная круговая частота;  $W$  — энергия, запасенная при резонансе;  $P_0$  — средняя мощность потерь данного типа колебаний.

Потери в резонаторе определяются потерями в зеркалах и потерями на дифракцию. Отражение от зеркала сопровождается частичным рассеянием, поглощением в зеркале и частичным прохождением через него. Все это можно рассматривать как потери в зеркалах независимо от того, используется ли рассеянное и прошедшее излучение в выходном излучении.

При отражении плоской волны от зеркала в результате дифракции отраженная волна представляет собой расходящийся пучок, угол расхождения которого  $\vartheta = \lambda/d$  для квадратного зеркала со стороной  $d$  и  $\vartheta = 1,22 \lambda/d$  для круглого зеркала диаметром  $d$ . Вследствие конечных размеров зеркал часть энергии, зависящая от амплитуды волны на краях зеркала и угла  $\vartheta$ , теряется при каждом отра-

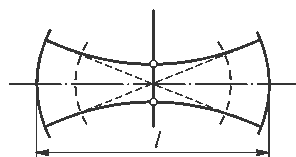


Рис. 6.10. Синфазные поверхности и поверхности равной интенсивности конфокального резонатора

жении. Для резонаторов с размерами зеркал, намного большими длины волны, для низших поперечных типов дифракционные потери малы, и потери резонатора определяются лишь потерями в зеркалах, которые одинаковы для всех типов колебаний.

Пренебрежем дифракционными потерями и потерями на поглощение и при вычислении добротности плоского резонатора будем учитывать лишь потери за счет частичного прохождения излучения через зеркала.

Энергия электромагнитного поля резонатора  $W$  распределяется поровну между прямой и обратной волнами. Энергия прямой волны  $W/2$  проходит через любое поперечное сечение за время  $l/v$  ( $l$  — длина резонатора;  $v$  — скорость распространения волны). При этом средний поток мощности через поперечное сечение равен

$$\int_S \Pi_0 dS = \frac{Wv}{2l},$$

где  $\Pi_0$  — среднее значение вектора Пойнтинга.

Средняя мощность потерь на каждом из зеркал при коэффициенте отражения по напряженности электрического поля  $\dot{\Gamma}_E$

$$P_{0 \text{ зерк}} = \frac{Wv}{2l} (1 - |\dot{\Gamma}_E|^2) = \frac{P_0}{2},$$

и согласно (6.48) добротность резонатора

$$Q = \frac{\omega_p l}{v(1 - |\dot{\Gamma}_E|^2)} = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{1}{1 - |\dot{\Gamma}_E|^2}. \quad (6.49)$$

При  $l/\lambda \gg 1$  и больших значениях  $|\dot{\Gamma}_E|^2$  добротность должна быть очень большой. Например, при  $l = 1$  м,  $\lambda_p = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м и  $|\dot{\Gamma}_E|^2 = 0,99$  согласно (6.49)

$$Q = \frac{6,28 \cdot 1}{0,63 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{1 - 0,99} \approx 10^9.$$

Ширина резонансного пика

$$\Delta f_p = \frac{f_p}{Q} = \frac{v(1 - |\dot{\Gamma}_E|^2)}{2\pi l}.$$

Для нашего примера, если резонатор пустой,

$$\Delta f_p = \frac{3 \cdot 10^8 (1 - 0,99)}{6,28 \cdot 1} \approx 0,5 \text{ МГц.}$$

Расстояние по шкале частот между резонансными пиками в соответствии с выражением (6.42)

$$\Delta f = \frac{v}{2l} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 150 \text{ МГц.}$$

При учете дифракционных потерь добротности различных типов колебаний различаются, так как их дифракционные потери различны (см. (6.43)). Наименьшими дифракционными потерями обладает основной тип колебания  $T_{00}$ . Для поперечных типов  $T_{mn}$  дифракционные потери больше и растут с увеличением значений  $m$  и  $n$ . В формуле (6.49) величина  $(1 - |\dot{\Gamma}_E|^2)$  характеризует относительные потери на одно отражение от зеркала. Очевидно, что с учетом дифракционных потерь

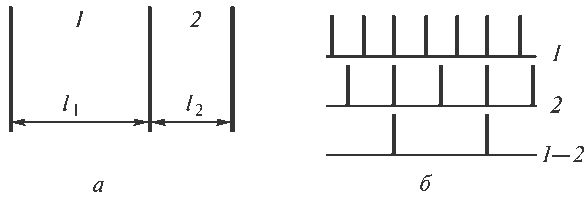
$$Q_{mn} = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{1}{1 - |\dot{\Gamma}_E|^2 + \alpha_{\text{диф } mn}}, \quad (6.50)$$

где  $\alpha_{\text{диф } mn}$  — дифракционные потери типа  $T_{mn}$  на одно отражение.

Добротность тем больше, чем больше длина резонатора. Однако это справедливо лишь до тех пор, пока дифракционные потери меньше потерь в зеркалах. Потери в зеркалах не зависят от длины резонатора, дифракционные потери увеличиваются с увеличением его длины. Поэтому после того момента, когда дифракционные потери и потери в зеркалах с увеличением длины резонатора сравниваются, дальнейшее увеличение длины  $l$  согласно (6.50) приводит к уменьшению добротности  $Q_{mn}$ .

В оптическом диапазоне волн ширина линии рабочего перехода значительно больше расстояний между частотами всех типов колебаний и одновременно, если не принять специальных мер, возбуждается большое число поперечных и продольных типов. При этом структура поля оказывается очень сложной, мощность излучения распределяется между всеми типами колебаний, ухудшается когерентность и монохроматичность излучения, диаграмма излучения оказывается сильно изрезанной.

Нежелательные высшие поперечные типы можно подавить, увеличив дифракционные потери этих типов по сравнению с потерями основного колебания  $T_{00}$ , уменьшая число Френеля. При  $N_f \ll 1$  резонатор становится высокоселективной системой. Однако для обычных плоского и конфокального резонаторов число Френеля, меньшее единицы, практически невозможно получить при приемлемых размерах резонаторов. Это возможно для резонатора, образованного плоским и сферическим зеркалами, расположенными на расстоянии, приблизительно равном радиусу зеркала (полуконцентрический резонатор). При расстоянии между зеркалами, значительно меньшем радиуса, добротность резонатора для всех типов колебаний одинакова, так как потери определяются только потерями в зеркалах и излучением из резонатора, а они одинаковы для всех типов колебаний. Однако с увеличением длины резонатора дифракционные потери быстро растут и становятся различными для разных типов колебаний, поэтому добротность, определяемая выражением (6.50), для разных типов колебаний уменьшается в различной степени.



**Рис. 6.11.** Селекция продольных типов колебаний в связанных резонаторах: *а* — связанные резонаторы; *б* — спектр колебаний: 1 — в резонаторе 1; 2 — в резонаторе 2; 1—2 — в связанных резонаторах

При увеличении расстояния между зеркалами до значений  $l/R \approx 1$  число типов колебаний уменьшается при незначительном уменьшении мощности. При  $l/R \approx 0,975$  наблюдается только один основной тип  $T_{00}$  (одномодовый режим). При этом мощность излучения составляет 0,8 от максимально излучаемой мощности. При увеличении расстояния  $l$  ( $l > R$ ) мощность основного колебания уменьшается.

При одном основном типе колебаний  $T_{00}$  поле на зеркалах описывается функцией Гаусса, диаграмма излучения становится узкой и гладкой, в спектре излучения остаются лишь частоты, соответствующие продольным типам колебаний.

Наиболее эффективным методом подавления продольных типов колебаний является использование системы связанных резонаторов. Максимальную добротность в такой системе имеют типы колебаний, являющиеся резонансными для каждого резонатора, входящего в систему. В простейшем случае двух связанных резонаторов, образованных тремя зеркалами, подбирая длины этих резонаторов и коэффициент пропускания среднего зеркала, добиваются работы на тех типах колебаний, резонансные частоты которых одинаковы для обоих резонаторов, существенно ослабив или подавив остальные (рис. 6.11). Эффективность метода повышается при увеличении числа связанных резонаторов. При настройке расстояний между зеркалами с точностью до долей длины волны и подборе коэффициентов отражения зеркал можно получить одночастотный режим работы.

Практически число связанных резонаторов можно увеличить, используя в качестве одного из отражателей стопу из нескольких плоскопараллельных пластин. Такие пластины представляют собой резонаторы, в которых собственные частоты продольных колебаний находятся на расстояниях, больших, чем у основного резонатора.

## Вопросы

1. В объемном прямоугольном резонаторе могут возбуждаться колебания  $H_{mnp}$  и  $E_{mnp}$ , в круглом — колебания  $H_{nmp}$  и  $E_{nmp}$ . Что можно сказать о структуре поля этих колебаний, исходя из их обозначения?
2. Почему в оптическом диапазоне частот применяются не объемные, а открытые резонаторы?
3. В открытом резонаторе могут возбуждаться  $T_{mn}$ -колебания. Что можно сказать о структуре полей этих колебаний, исходя из их обозначений?
4. Что представляет собой основное колебание  $T_{00}$ , возникающее в открытом резонаторе?
5. Что представляет собой поперечное колебание  $T_{mn}$ ?
6. Как определяется добротность резонатора?
7. Перечислите потери, определяющие добротность объемного и открытого резонаторов.
8. Какой тип колебания в открытом резонаторе обладает наименьшими дифракционными потерями?
9. От чего зависят дифракционные потери?
10. Какой вид имеют поперечное и продольное распределения интенсивности поля основного колебания?
11. Как можно уменьшить число продольных и поперечных типов колебаний?

## Задачи

1. В объемном прямоугольном резонаторе, размеры которого  $20 \times 10 \times 30$  см, возбуждается поле  $H_{101}$ . Резонатор заполнен воздухом, проводимость стенок резонатора  $\sigma = 5,6 \cdot 10^7$  См/м, максимальная напряженность электрического поля в центре резонатора  $E_m = 10^5$  В/м. Определите резонансную частоту, структуру поля  $H_{101}$ , запасаемую энергию, потери в стенках резонатора, добротность и полосу пропускания.
2. Определите резонансную длину волны двух низших типов колебаний, возбуждаемых в прямоугольном резонаторе размерами  $20 \times 25 \times 30$  мм.
3. Определите длину  $l$  прямоугольного резонатора сечением  $23 \times 10$  мм, если в резонаторе возбуждается колебание  $H_{103}$  и резонансная частота 9 ГГц.
4. Прямоугольный объемный резонатор заполнен воздухом и имеет размеры  $35 \times 15 \times 60$  мм. Определите резонансную длину волны поля  $E_{112}$ .
5. Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением  $23 \times 10$  мм, внутри которого перемещается поршень. В резонаторе возбуждается поле  $H_{101}$ . Определите пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8...12 ГГц.
6. Определите составляющие поля  $H_{011}$  в цилиндрическом резонаторе и его длину  $l$ , если  $R = 5$  см, а резонансная частота 8,35 ГГц.
7. Открытый пустой резонатор гелий-неонового лазера ( $\lambda_p = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м) образован плоскими зеркалами, коэффициент отражения которых  $|\Gamma_E|^2 = 0,99$ . Длина резонатора  $l = 1$  м. Определите расстояние между резонансными частотами продольных типов

- основного колебания  $T_{00}$ , добротность и ширину резонансных пиков, если дифракционные потери на один проход  $\alpha_{\text{диф}} = 0,2$ .
8. Условие задачи то же, что и задачи 7. Определите расстояние между резонансными частотами продольных типов углового колебания  $T_{01}$ , добротность и ширину резонансных пиков, если  $\alpha_{\text{диф}} = 0,4$ .
  9. Конфокальный резонатор гелий-неонового лазера ( $\lambda_p = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м) образован сферическими зеркалами, коэффициент отражения которых  $|\Gamma_E|^2 = 0,99$ . Длина резонатора  $l = 1$  м. Определите расстояние между продольными типами основного колебания  $T_{00}$  по частоте, добротность и ширину резонансных пиков, если  $\alpha_{\text{диф}} = 0,006$ .
  10. Условие задачи то же, что и задачи 9. Определите расстояние между продольными типами углового колебания  $T_{01}$  по частоте, добротность и ширину резонансных пиков, если  $\alpha_{\text{диф}} = 0,01$ .



## 7. ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

### 7.1. Волноводные устройства, использующие эффект Фарадея

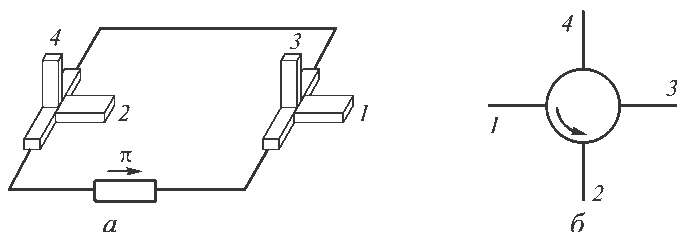
**Гиратор.** Простейшим устройством, использующим эффект Фарадея, является гиратор. Гиратор — двулучевое устройство (четырёхполосник), имеющее сдвиг фазы, в одном направлении передачи равный нулю, а в другом направлении —  $180^\circ$ . На рис. 7.1 показан гиратор, состоящий из скрученного на  $90^\circ$  прямоугольного волновода и  $90^\circ$ -ного вращателя поляризации. Таким образом, выходное плечо ориентировано так же, как и входное.



Рис. 7.1. Схема гиратора

Пусть волна, распространяющаяся слева направо, имеет вертикальную поляризацию вектора электрического поля и скрутка поворачивает этот вектор на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Вращатель поляризации поворачивает его еще на  $90^\circ$  и в результате вектор электрического поля в выходном плече оказывается повернутым на  $180^\circ$  по отношению к вектору во входном плече. При движении вертикально поляризованной волны в противоположном направлении (справа налево) вращатель поляризации поворачивает вектор электрического поля в ту же сторону, что и в первом случае (по часовой стрелке относительно направления намагничивающего поля  $H_0$ ), скрутка поворачивает вектор в противоположную сторону и в результате вектор электрического поля оказывается направленным так же, как и во входном плече.

**Циркулятор.** На основе гиратора можно построить циркулятор (рис. 7.2, а). Такой циркулятор работает следующим образом. Сигнал, поступающий в плечо 1, делится поровну между боковыми плечами двойного тройника. Обе составляющие сигнала проходят одинаковые пути, так что в боковых плечах левого двойного тройника они оказываются в фазе и результирующий сигнал проходит в плечо 2.



**Рис. 7.2.** Циркулятор:

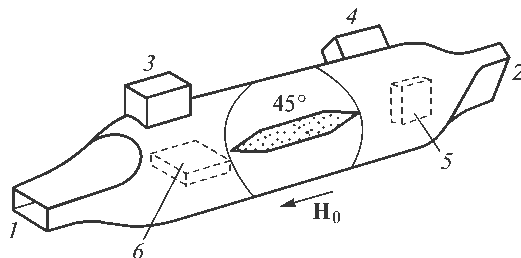
*a* — схема; *б* — схемное обозначение; 1—4 — плечи

Сигнал, поступающий в плечо 2, точно так же делится пополам между боковыми плечами. Однако теперь гиратор меняет фазу одной из составляющих прохождения сигнала на  $180^\circ$ . Противофазные волны в боковых плечах правого двойного тройника складываются в плече 3. Аналогично сигнал проходит из плеча 3 в плечо 4, из плеча 4 — в плечо 1 и т. д. В схемном обозначении циркулятора, показанном на рис. 7.2, б, стрелка соответствует последовательности  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Циркулятор, использующий эффект Фарадея, показан на рис. 7.3. Плечо 1 левой секции представляет собой переход с прямоугольного волновода на круглый; плечо 3 — прямоугольный волновод, расположенный под прямым углом к плечу 1 и связанный с круглым волноводом. Благодаря такому взаимному расположению плеч 1 и 3, а также наличию металлической пластины в переходе, связь между этими плечами отсутствует. Такая же секция (плечи 2 и 4), повернутая на  $45^\circ$  относительно первой, подключена с другой стороны отрезка круглого волновода с ферритом.

Вертикально поляризованный вектор электрического поля волны, поступающей в плечо 1, проходя через круглый волновод с ферритовым стержнем, поворачивается на  $45^\circ$  против часовой стрелки (относительно направления распространения) и в результате волна проходит в плечо 2. Вектор сигнала, поступающего в плечо 2, оказывается горизонтально поляризованным и возбуждает плечо 3. Аналогичным образом из плеча 3 сигнал поступает в плечо 4, из плеча 4 — в плечо 1 и т. д. При изменении направления намагничивающего поля сигнал передается в направлении каналов  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ .

**Вентиль.** Вентиль — однонаправленная линия передачи. Рассмотрим некоторые виды вентиляей.



**Рис. 7.3.** Схема циркулятора, использующего эффект Фарадея:

1—4 — плечи; 5, 6 — металлические пластины

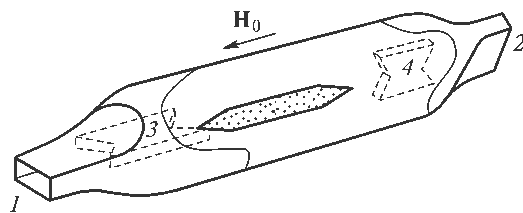


Рис. 7.4. Схема вентиля:

1, 2 — плечи; 3, 4 — поглощающие пластины

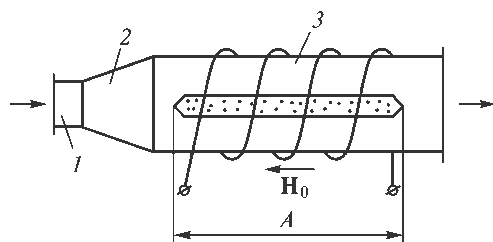
Циркулятор, использующий эффект Фарадея (см. рис. 7.3), можно применять как вентиль, если к плечам 3 и 4 подключить согласованные нагрузки. Распространение энергии в таком вентиле происходит в направлении  $1 \rightarrow 2$ . Отражения сигналов от выходной нагрузки в плече 2 не возвращаются во входное плечо 1, а поглощаются в согласованной нагрузке (плечо 3).

Более компактная конструкция вентиля представлена на рис. 7.4. В ней отсутствуют плечи 3 и 4 (см. рис. 7.3), а вместо металлических пластин установлены поглощающие пластины. Волновод с ферритом поворачивает поляризацию волны на  $45^\circ$ . Поэтому вектор электрического поля волны, падающей в плечо 1, нормален к поглощающей пластине 4, и волна проходит в плечо 2. При обратном направлении распространения вектор сигнала, поступающего в плечо 1, поворачивается ферритовым стержнем на  $45^\circ$  в ту же сторону и приобретает горизонтальную поляризацию. Такая волна будет поглощена пластиной 3. Небольшая часть энергии обратной волны, которая может отразиться от пластины 3 и переднего края феррита, после нового прохождения ферритовой секции будет поглощена пластиной 4. Отметим, что пластины 3 и 4 почти не оказывают влияния на прямую волну, распространяющуюся в направлении  $1 \rightarrow 2$ , электрический вектор которой направлен нормально к поверхности пластин. Рассмотренный вентиль пригоден для работы на малых уровнях мощности, поскольку поглощающие пластины не могут рассеивать значительную мощность.

**Амплитудные модуляторы и переключатели.** Рассмотренные выше фарадеевы циркуляторы можно использовать в качестве невзаимных электрически управляемых переключателей. В этом случае намагничивающее поле создается с помощью катушки, намотанной на участок волновода с ферритовым цилиндром, и переключение волноводных каналов осуществляется изменением направления тока в катушке. Обычно к плечу 4 (см. рис. 7.3) подключается согласованная нагрузка, и в зависимости от полярности тока в обмотке в плече 2 сигнал есть или нет (положение «включено» или «выключено»).

Если подмагничивающий ток изменяется по синусоидальному закону, то выходной СВЧ-сигнал в плече 2 будет иметь амплитудную модуляцию. Когда ток в катушке проходит через нулевое значение, магнитного поля нет и вращение поляризации отсутствует, при этом энергия сигнала делится поровну между плечами 2 и 4.

При положительных и отрицательных максимумах тока в плечи 2 и 4 соответственно поступает больше или меньше половины энергии сигнала. Если



**Рис. 7.5.** Схема вращателя плоскости поляризации, использующего эффект Фарадея: 1 — прямоугольный волновод; 2 — переход; 3 — круглый волновод

100 %-ной модуляции не требуется, сигнал в плече 2 можно увеличить, введя постоянную составляющую тока управляющей обмотки, создающую постоянное намагничивание. Для этого можно также использовать кольцевые магниты, одеваемые на волновод, или поместить магнитный брусок непосредственно в ферритовый элемент.

Вентиль для малого уровня мощности, показанный на рис. 7.4, также можно использовать в качестве переключателя и модулятора.

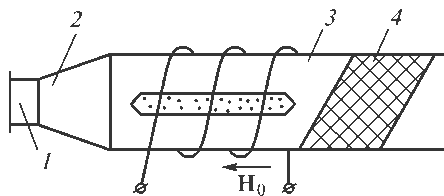
**Вращатели плоскости поляризации, использующие эффект Фарадея.** Устройство, осуществляющее поворот плоскости поляризации, называется вращателем плоскости поляризации.

Вращатель плоскости поляризации, использующий эффект Фарадея, является невзаимным устройством. Оно состоит из участка круглого волновода с продольно намагниченным ферритовым цилиндром, соединенного плавным переходом с волноводом прямоугольного сечения (рис. 7.5).  $H_{10}$ -волна, поступающая из прямоугольного волновода 1, преобразуется в переходе 2 в  $H_{11}$ -волну круглого волновода 3. После прохождения ферритовой секции длиной  $A$  линейно поляризованная волна будет иметь плоскость поляризации, повернутую относительно первоначального положения на угол, пропорциональный длине  $A$ . Угол поворота плоскости поляризации зависит от напряженности постоянного магнитного поля, электрических параметров феррита, размеров стержня и диаметра волновода.

Если феррит обладает заметными потерями, различными для различных круговых поляризаций, то результирующая волна окажется поляризованной эллиптически. На практике обычно потерями в феррите пренебрегают.

Недостатком рассмотренного вращателя является то, что одновременно с поворотом плоскости поляризации изменяется фаза волны, в ряде задач это является нежелательным.

Для компенсации нежелательного фазового сдвига в круглом волноводе 3 вращателя после ферритового стержня может быть установлена тонкая диэлектрическая пластина (рис. 7.6). Пластина 4 установлена параллельно вектору поля волны в прямоугольном волноводе 1 и изготовлена из диэлектрика с малыми потерями, например из тефлона. Пластина чувствительна к поляризации проходящей через нее волны и обеспечивает фазовую задержку, пропорциональную



**Рис. 7.6.** Схема вращателя плоскости поляризации с диэлектрической пластиной:

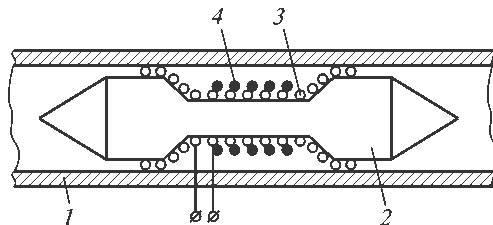
1 — прямоугольный волновод; 2 — переход; 3 — круглый волновод; 4 — диэлектрическая пластина

углу поворота плоскости поляризации. Размеры пластины выбирают таким образом, чтобы суммарный фазовый сдвиг, создаваемый ферритовым стержнем и пластиной, оставался на выходе устройства постоянным и не менялся в зависимости от угла поворота плоскости поляризации.

Компенсатор фазового сдвига может быть выполнен также в виде двух металлических стержней, установленных за ферритовым стержнем перпендикулярно вектору поля прямоугольного волновода. Их диаметры и расстояние друг от друга подбираются экспериментально, чтобы фазовый сдвиг, создаваемый ими, был равен по величине и противоположен по знаку фазовой задержке, обусловленной ферритовым стержнем.

Недостатками описанных выше ферритовых вращателей плоскости поляризации являются, во-первых, большая постоянная времени обмотки электромагнита, что приводит к низким скоростям поворота плоскости поляризации, и, во-вторых, значительные потери мощности управления в случае изготовления обмоток с малыми постоянными времени.

Конструкция вращателей с большой скоростью поворота плоскости поляризации представлена на рис. 7.7. Внутри круглого волновода 1 помещен диэлектрический стержень 2, в котором запрессован ферритовый элемент. Первичная обмотка 3, намотанная вдоль диэлектрического стержня, состоит из двух секций, намотанных навстречу друг другу. Последние витки имеют хороший контакт с внутренней поверхностью волновода. Диэлектрический стержень и обмотка 3 образуют вспомогательный волновод, по которому проходят электромагнитные волны. Для создания постоянного магнитного поля служит обмотка 4, намотанная поверх обмотки 3. Выводы обмотки 4 проходят через отверстие в стенке



**Рис. 7.7.** Схема вращателя с большой скоростью поворота плоскости поляризации:

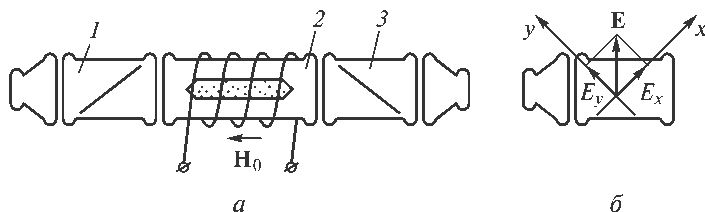
1 — круглый волновод; 2 — диэлектрический стержень с ферритовым элементом; 3 — первичная обмотка катушки; 4 — вторичная обмотка катушки

волновода. Поскольку обмотка 3 состоит из двух секций, намотанных навстречу друг другу, взаимная индукция между обмотками 3 и 4 отсутствует. Поэтому в обмотке 3 отсутствует наведенный ток, хотя проходящий через обмотку 4 ток имеет переменную составляющую. Постоянная времени обмотки 4 такова, что плоскость поляризации может поворачиваться с частотой до 100 КГц. Это позволяет использовать такие вращатели для изменения поляризации антенн при переходе из режима излучения в режим приема.

**Фазовращатели, управляемые продольным магнитным полем.** Фазовращатели, управляемые продольным полем, представляют собой круглую волноводную секцию с продольно намагниченным ферритовым стержнем. При распространении через такую секцию волны круговой поляризации происходит задержка по фазе, значение которой зависит от направления поляризации волны и напряженности намагничивающего поля. Последняя зависимость сильно выражена именно при малых значениях напряженности, что делает рассматриваемые фазовращатели экономичными и конструктивно удобными.

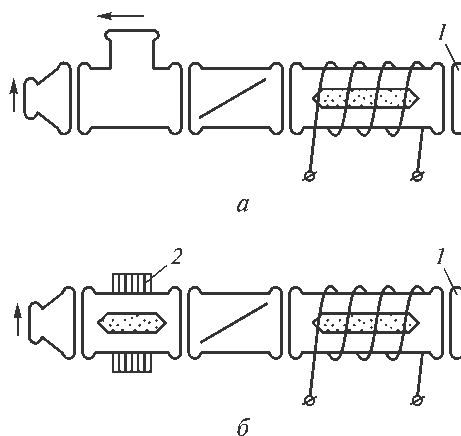
Конструкция фазовращателя с продольным намагничивающим полем, предназначенная для осуществления фазовой задержки линейно поляризованной волны, схематично показана на рис. 7.8, а. Она состоит из двух поляризаторов 1, 3, двух переходных секций с прямоугольного сечения на круглое и участка круглого волновода 2 с продольно намагниченным ферритовым цилиндром.

Поляризатор представляет собой устройство, служащее для преобразования линейно поляризованной волны в волну круговой поляризации (поляризатор 1) и наоборот (поляризатор 3). Он состоит из четвертьволновой диэлектрической пластины в круглом волноводе, установленной под углом  $45^\circ$  к вектору поля  $E$  прямоугольного волновода. На пластине вектор  $E$  раскладывается на две ортогональные составляющие, одна из которых ( $E_x$ ) ориентирована по пластине, а другая ( $E_y$ ) — по нормали к ней (рис. 7.8, б). Составляющая  $E_y$ , проходя через секцию с пластиной, никаким изменениям не подвергается (если пренебречь очень незначительным затуханием), а составляющая  $E_x$  претерпевает задержку, значение которой зависит от длины и толщины пластины. Размеры пластины подбираются таким образом, чтобы составляющая  $E_x$  задержалась относительно  $E_y$  на  $90^\circ$ . В результате на выходе секции с пластиной образуется кругополяризованная волна. Причем в зависимости от того, как ориентирована пластина от-



**Рис. 7.8.** Схема фазовращателя, управляемого продольным магнитным полем (а) и разложение вектора  $E$  на две ортогональные составляющие (б):

1, 3 — поляризаторы; 2 — круглый волновод



**Рис. 7.9.** Схемы фазовращателей, управляемых продольным магнитным полем:

*а* — с волноводным тройником; *б* — с вращателем, использующим эффект Фарадея; 1 — заглушка; 2 — вращатель

носителем вектора  $\mathbf{E}$ , под углом  $45^\circ$  или  $-45^\circ$ , будет иметь место круговая поляризация правого или левого вращения соответственно.

Рассматриваемый фазовращатель в принципе является невзаимным, поскольку волна, проходящая ферритовую секцию в обратном направлении, будет иметь левое (а не правое) вращение. Однако при малых управляющих полях эта невзаимность проявляется слабо, так как фазовые сдвиги для круговых волн разных вращений примерно одинаковы.

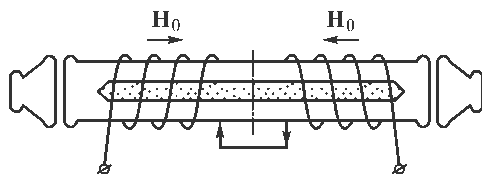
Недостатком такого фазовращения является необходимость преобразования линейно поляризованной волны в волну круговой поляризации и наоборот.

На рис. 7.9 приведены схемы фазовращателей, в которых фазовый сдвиг при том же управляющем поле получается вдвое больше, чем в рассмотренном выше случае. Это достигается за счет того, что волна дважды проходит через ферритовый элемент. Для этого круглый волновод за ферритовой секцией замкнут коротко с помощью заглушки, от которой волна отражается и распространяется через ферритовый элемент в обратном направлении.

В конструкции, представленной на рис. 7.9, *а*, использован волноводный тройник, поскольку вектор электрического поля в результате двукратного прохождения волны через поляризатор поворачивается в пространстве на  $90^\circ$ .

В фазовращателе, схема которого приведена на рис. 7.9, *б*, вместо тройника использован вращатель, использующий эффект Фарадея, поворачивающий плоскость поляризации волны на  $45^\circ$  (на  $90^\circ$  при прохождении в обе стороны). В этом случае плоскость поляризации волны после прохождения фазовращателя сохраняется неизменной.

Рассмотренные выше фазовращатели предназначены для придания фазового сдвига волнам, поляризованным по кругу, а в случае их использования для линейно поляризованных волн последние необходимо сначала преобразовать в волны круговой поляризации.



**Рис. 7.10.** Схема фазовращателя, управляемого продольным магнитным полем с двумя обмотками электромагнита, намотанными в противоположных направлениях

В фазовращателе, изображенном на рис. 7.10, не требуется предварительного преобразования волны линейной поляризации в поляризованную по кругу волну. Обмотка электромагнита содержит две секции, намотанные в противоположных направлениях. При распространении линейно поляризованной волны по волноводу, содержащему продольно намагниченный ферритовый стержень, происходит поворот плоскости поляризации волны и изменение ее фазы. Поскольку два участка ферритового стержня намагничены в противоположных направлениях, результирующий угол поворота плоскости поляризации будет равен нулю, а фаза волны изменится на величину  $\Delta\varphi = \frac{|\Delta\varphi_-| - |\Delta\varphi_+|}{2}l$ , где  $l$  — общая

длина феррита;  $\Delta\varphi_-$  и  $\Delta\varphi_+$  — приращение фазы для волн левого и правого вращений соответственно. Изменяя значение управляющего поля, можно регулировать фазу линейно поляризованной волны, сохраняя неизменной ее плоскость поляризации. Рассмотренный фазовращатель взаимный. Достоинством такого фазовращателя является простота конструкции, а недостатком — малое значение фазового сдвига при небольших значениях управляющего поля.

## 7.2. Волноводные устройства, использующие явление взаимного поглощения при ферромагнитном резонансе

Невзаимное резонансное поглощение в ферритах используется для создания вентилях, в которых значительная часть энергии волны, распространяющейся в одном направлении, поглощается в феррите, тогда как волна обратного направления проходит через линию почти без потерь.

Резонансный вентиль может быть построен с использованием круглого, прямоугольного, коаксиального, П- и Н-образного, спирального или плоского волновода, а также любой другой линии передачи, если только в некоторой области ее существует или может быть создано вращение вектора переменного магнитного поля при движении волны по волноводу. Для получения невзаимного резонансного поглощения наличие круговой (или эллиптической) поляризации является обязательным.

**Резонансный вентиль на круглом волноводе.** Резонансный вентиль на круглом волноводе имеет конструкцию, подобную вращателю поляризаций, ис-



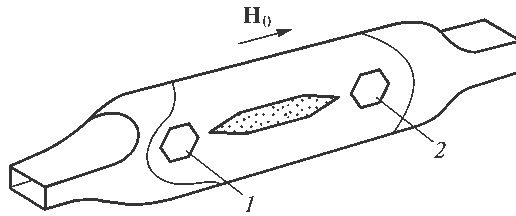


Рис. 7.11. Схема резонансного вентиля на круглом волноводе:  
1, 2 — четвертьволновые пластины

пользующей эффект Фарадея (рис. 7.11). Чтобы преобразовать линейно поляризованную волну  $H_{11}$  круглого волновода в волну круговой поляризации, необходимую для работы устройства, используются четвертьволновые пластины. Пластина 1 обеспечивает создание волны, например, с левой круговой поляризацией (против часовой стрелки относительно вектора  $H_0$ ). Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, преобразуется пластиной 2 в волну с правой круговой поляризацией. Если подмагничивающее поле имеет такую величину, что выполняется условие резонанса, то волна с правым направлением круговой поляризации будет сильно поглощаться в ферритовом стержне. Поскольку ферритовый стержень в круглом волноводе не соприкасается с металлическими стенками, он может рассеять лишь небольшое количество теплоты. Поэтому области применения этих устройств ограничиваются случаями, когда мощность обратной волны мала.

**Резонансные вентили на прямоугольном волноводе.** Резонансные вентили на прямоугольном волноводе находят наибольшее практическое применение. Они обладают двумя основными особенностями, представляющими значительный интерес при разработке устройств сверхвысоких частот: высокая рабочая мощность; возможность работы в широкой области частот (от 100 МГц до 300 ГГц).

Наличие круговой поляризации вектора переменного магнитного поля при движении волны по волноводу иллюстрируется рис. 7.12, где показана картина магнитных силовых линий в плоскости широкой стенки волновода. В точке  $P$  вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$  вращается против часовой стрелки, когда картина поля движется вдоль положительного направления оси  $z$ , и по часовой стрелке при движении в обратном направлении.

Если в точке  $P$   $H_x = H_z$ , то имеет место круговая поляризация, в противном случае — эллиптическая. (В центре волновода и у боковых стенок вектор  $\mathbf{H}$  поляризован линейно.)

В точку  $P$  можно поместить феррит, к которому приложено постоянное магнитное поле, перпендикулярное широким стенкам волновода (поперечное намагничивание). Спиновые диполи будут прецессировать вокруг на-

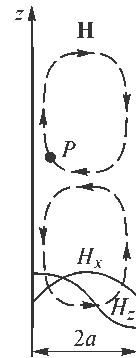


Рис. 7.12. Магнитные силовые линии в плоскости широкой стенки волновода



Рис. 7.13. Варианты расположения ферритовой пластины в резонансном волноводе

правления постоянного магнитного поля, и направление вращения вектора  $\mathbf{H}$  будет совпадать с направлением прецессии или противоположно ему в зависимости от направления движения картины поля. Если СВЧ-поле имеет резонансную частоту, будет наблюдаться резонансное поглощение энергии.

Существует несколько вариантов расположения ферритовой пластины в резонансном волноводе, некоторые из которых показаны на рис. 7.13. Она либо приклеивается к широким стенкам волновода, либо поддерживается в нужном сечении диэлектрическим стержнем, проходящим через боковое отверстие в боковой стенке волновода.

**Коаксиальный резонансный вентиль.** Если сравнительно небольшая мощность, пропускаемая линией, не является препятствием, можно использовать коаксиальный вентиль, существенными преимуществами которого являются широкополосность и компактность.

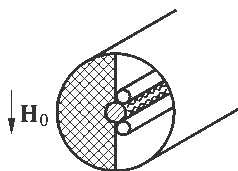


Рис. 7.14. Коаксиальный резонансный вентиль

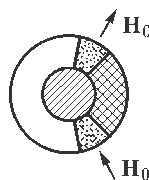
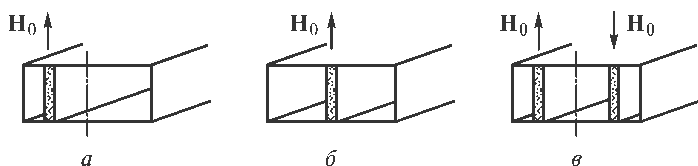


Рис. 7.15. Поперечное сечение коаксиального резонансного вентилья с асимметрично расположенными ферритовыми пластинами

В коаксиальном волноводе, представленном на рис. 7.14, половина линии заполнена диэлектриком с относительно большой диэлектрической проницаемостью. Диэлектрик используется для искажения картины поля волны. Как известно, Т-волна не имеет продольной составляющей магнитного СВЧ-поля и не создает вращающегося магнитного поля, необходимого для появления невзаимных эффектов. Продольная составляющая магнитного поля может быть создана посредством внесения асимметрии в поперечное сечение линии (с помощью искажения формы) или путем введения диэлектрика (рис. 7.15).

### 7.3. Волноводные устройства, использующие различия в структурах полей прямой и обратной волн

**Невзаимные фазовращатели.** Невзаимные фазовращатели используют различие фазовых постоянных для двух направлений распространения электромагнитной



**Рис. 7.16.** Фазовращатель на прямоугольном волноводе с поперечно намагниченной ферритовой пластиной

: *a* — смещенной относительно центра волновода; *b* — находящейся в центре волновода; *v* — с двумя симметричными противоположно намагниченными пластинами

волны или (что то же самое) при неизменном направлении распространения энергии — различие фазовых постоянных ( $\Delta\beta$ ) для двух направлений намагничивающего поля. Дифференциальный (или разностный) фазовый сдвиг, создаваемый фазовращателем, определяется по формуле

$$\Delta\varphi = \Delta\beta l,$$

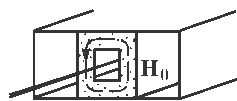
где  $l$  — длина фазовращателя.

Фазовращатель на прямоугольном волноводе, показанный на рис. 7.16, *a*, содержит поперечно намагниченную ферритовую пластину, смещенную относительно центра волновода. Если поперечно намагниченная ферритовая пластина расположена в центре волновода (рис. 7.16, *b*), фазовращатель будет взаимным. Две противоположно намагниченные ферритовые пластины, расположенные на равных расстояниях от боковых стенок волновода (рис. 7.16, *v*), увеличивают дифференциальный фазовый сдвиг примерно вдвое.

В рассматриваемых фазовращателях для реализации достаточно больших фазовых сдвигов требуются большие управляющие поля и, как следствие, громоздкие электромагниты. Поэтому фазовращатели с поперечным полем нельзя использовать для быстрой регулировки фазы. В этом состоит их основной недостаток.

Этот недостаток устранен в конструкции, представленной на рис. 7.17, где вместо двух противоположно намагниченных ферритовых пластин используется ферритовый тороид. Внутри тороида проходит управляющий провод, по которому пропускаются импульсы тока разной полярности, создающие азимутальное (или кольцевое) намагничивающее поле. Каждой полярности импульса тока соответствует определенное состояние остаточной намагниченности феррита (рис. 7.18), а следовательно, и постоянной распространения волны. Разность постоянных распространения для двух состояний остаточной намагниченности определяет дифференциальный (или разностный) фазовый сдвиг, приходящийся на единицу длины фазовращателя.

Основным отличием таких фазовращателей является то, что при азимутальном намагничивании ферритовый тороид имеет размагничивающий фактор, близкий к нулю, и, следовательно, в каждом состоянии остаточной намагниченности будет находиться сколь угодно долго. Для



**Рис. 7.17.** Фазовращатель на прямоугольном волноводе с ферритовым тороидом

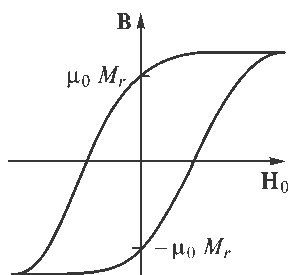


Рис. 7.18. Петля гистерезиса

изменения фазы фазовращателя достаточно перемагнитить ферритовый тороид коротким импульсом тока и не нужно поддерживать намагниченный ток во время работы фазовращателя, т.е. требуется малая мощность управления. Работа в состоянии остаточной намагниченности (так называемый принцип магнитной памяти) легко реализуется за счет использования ферритов с прямоугольной петлей гистерезиса.

Другое принципиальное отличие этих фазовращателей — отсутствие внешней магнитной системы. Переключающий импульс магнитного поля создается проводником с током, находящимся внутри линии передачи. Поэтому металлические стенки волновода не оказывают размагничивающего действия, и можно достичь максимально возможного для ферритовых устройств быстродействия.

Недостатком конструкции, представленной на рис. 7.17, является сравнительно низкая добротность (отношение дифференциального фазового сдвига к потерям). Это обусловлено тем, что горизонтальные участки ферритового тороида не участвуют в создании дифференциального фазового сдвига. Поэтому, когда фазовращатель работает на низком уровне мощности сверхвысоких частот, т.е. не требуется контакта с металлической поверхностью волновода, ферритовый вкладыш выполняется в форме трубки (рис. 7.19, а), надетой, как правило, на диэлектрический стержень.

Фазовращатель на круглом волноводе с азимутально намагниченным ферритовым вкладышем кольцевого сечения может работать с сигналами произвольной поляризации (рис. 7.19, б).

**Вентили на смещении поля.** Вентили на смещении поля используют различие в структуре поля прямой и обратной волн. Достоинством таких вентилях является сравнительно небольшая величина внешнего магнитного поля ( $H_0 \ll H$ ). Вентили на смещении поля разработаны как на круглых, так и на прямоугольных волноводах.

Вентиль на круглом волноводе с продольно намагниченным ферритом показан на рис. 7.20. В его конструкции используется различие в структуре поля волн круговой поляризации  $H_{11}$  правого (прямая волна) вращения. Для преобра-

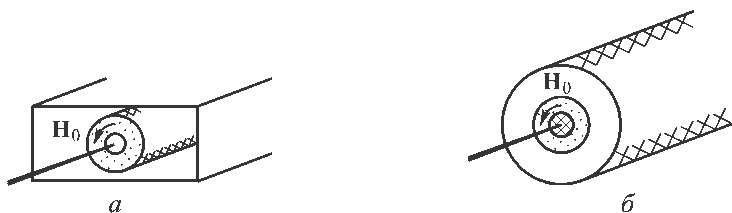


Рис. 7.19. Фазовращатель:

а — на прямоугольном волноводе с ферритовой трубкой; б — на круглом волноводе с ферритовым вкладышем кольцевого сечения

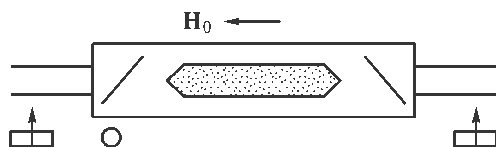


Рис. 7.20. Вентиль на круглом волноводе с продольно намагниченным ферритом

зования линейно поляризованной волны в волну круговой поляризации и обратно применены диэлектрические четвертьволновые пластины. Ферритовый стержень либо покрывается поглощающей пленкой, либо изготавливается полым с металлическим стержнем внутри, либо содержит поглощающий слой аквадага. Эффективная магнитная проницаемость ферритовой среды для кругополяризованных волн правого и левого вращений  $\mu_+ = \mu - \mu_\alpha$  и  $\mu_- = \mu + \mu_\alpha$  соответственно. Поэтому левополяризованная волна концентрируется в феррите значительно сильнее, чем правополяризованная. Если диаметр ферритового стержня достаточно велик, то левополяризованная волна почти полностью концентрируется в феррите и сильно затухает. Для волны с правой круговой поляризацией поглощение сравнительно невелико, поскольку СВЧ-поле почти не проникает в феррит (благодаря малой эффективной магнитной проницаемости феррита).

Вентиль на прямоугольном волноводе с поперечно намагниченной ферритовой пластиной изображен на рис. 7.21, а. Поглощающий материал расположен на одной из боковых поверхностей ферритовой пластины, которая установлена в волноводе вблизи его базовой стенки. Размеры и параметры ферритовой пластины и ее местоположение в волноводе можно выбрать таким образом, что картины распределения напряженности электрического поля для прямой и обратной волн будут соответствовать приведенной на рис. 7.21, а. При этом поглотитель будет оказывать слабое влияние на прямую волну, в то время как обратная волна будет интенсивно в нем затухать.

Вентиль с двумя ферритовыми пластинами, показанный на рис. 7.21, б, сложнее по конструкции, чем вентиль с одной пластиной. В отношении электрических характеристик оба вентиля можно считать в первом приближении равноценными. Этим и объясняется то обстоятельство, что вентили с двумя пластинами не получили широкого распространения.



Рис. 7.21. Вентиль на прямоугольном волноводе:

а — с поперечно намагниченной ферритовой пластиной; б — с двумя ферритовыми пластинами; 1 — распределение составляющей поля  $E_y$  прямой волны; 2 — распределение составляющей поля  $E_y$  обратной волны

### 7.4. Y-циркулятор

Благодаря своим исключительно малым габаритам и хорошим электрическим параметрам Y-циркуляторы нашли широкое применение в технике сверхвысоких частот.

Волноводный Y-циркулятор представляет собой симметричное соединение волноводов под углом  $120^\circ$ . В центре такого разветвления расположен ферритовый цилиндр достаточно большого диаметра (высота его не обязательно равна высоте волновода), намагниченный вдоль своей оси (рис. 7.22). Наличие феррита придает волноводному мосту невзаимные свойства, что и позволяет реализовать циркулятор. Если рассматриваемый волноводный элемент не содержит феррита, то волна, поступающая в плечо 1, делится поровну между плечами 2 и 3. При этом коэффициент стоячей волны со стороны плеча 1 равен двум, так как плечо 1 нагружено на сопротивление, равное половине волнового сопротивления линии. При наличии намагниченного феррита волны, проходящие в плечи 2 и 3, являются результатом суперпозиции двух полей: первичного ( $E_{21}$ ,  $E_{31}$ ) и переизлученного ферритовым цилиндром ( $E'_{21}$ ,  $E'_{31}$ ). Первичные поля в плечах 2 и 3 в силу симметрии системы синфазные и равны по амплитуде. Амплитуда и фаза вторичного поля зависят от размеров и параметров намагниченного феррита. Их значения можно подобрать так, чтобы поля  $E_{21}$  и  $E'_{21}$  в плече 2 были синфазные, а поля  $E_{31}$  и  $E'_{31}$  в плече 3 — противофазные. Если, кроме того, эти поля равны по амплитуде, то волна из плеча 1 будет полностью передаваться в плечо 2. В силу симметрии системы волна из плеча 2 будет попадать в плечо 3, из плеча 3 — в плечо 1. Таким образом, рассматриваемый элемент будет представлять собой циркулятор, пропускающий волны в направлении плеч  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  или  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  в зависимости от направления намагничивающего поля. Отметим, что система будет согласована со стороны трех плеч, поскольку, например, плечо 1 будет подключено только к плечу 2, т. е. нагружено на сопротивление, равное волновому. В волноводных Y-циркуляторах, как правило, используется разветвление в H-плоскости (циркуляторы H-типа). Возможно, однако, разветвление в плоскости E. Свойства и принцип работы обоих типов циркуляторов одинаковы, но направление движения волн (при одинаковой ориентации магнитного поля) получается различным.

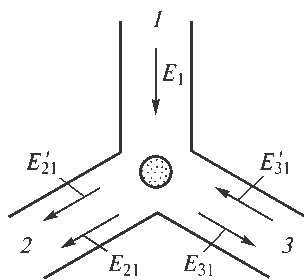


Рис. 7.22. Y-циркулятор:

1—3 — плечи

Y-циркуляторы могут одинаково успешно работать как при дорезонансном, так и при зарезонансном значениях постоянного магнитного поля. В настоящее время Y-циркуляторы разработаны для очень широкого диапазона длин волн (от 15 м до 2 мм). То обстоятельство, что они могут работать при полях, превышающих резонансное значение, делает Y-циркуляторы наиболее подходящими системами для использования на низких частотах. При этом их габариты (при использовании коаксиальных и полосковых линий) возрастают не сильно. Использование Y-циркуляторов

в области коротких миллиметровых волн также не встречает особых затруднений. Поскольку  $Y$ -циркуляторы не могут работать при малых значениях поля, то им не требуются специальные ферриты и сложные волноводные элементы.

Однако  $Y$ -циркуляторы являются принципиально узкополосными и нетермостабильными устройствами. Это связано с тем, что энергия электромагнитной волны почти полностью должна быть сконцентрирована в ферритовом стержне и небольшие отклонения значений параметров феррита от оптимальных значений вызывают сильную расстройку циркулятора. По той же причине  $Y$ -циркуляторы можно использовать при сравнительно небольших уровнях импульсной и средней мощности.

### 7.5. Фазовые циркуляторы

Принцип действия фазовых циркуляторов основан на явлении невзаимного фазового сдвига, которое имеет место, например, в прямоугольном волноводе, содержащем поперечно намагниченную ферритовую пластину. Для создания циркулятора на основе невзаимного фазовращателя необходимы дополнительные волноводные элементы: щелевой мост, двойной Т-образный мост и переходное устройство с одинарного волновода на сдвоенный. Рассмотрим их как самостоятельные устройства.

**Щелевой мост.** Щелевой мост представляет собой два сдвоенных волновода, в общей узкой стенке которых прорезана щель определенной формы (рис. 7.23). Высота щели обычно равна высоте волновода. На этом участке волновода возможно распространение не только основного колебания ( $H_{10}$ -волна), но и волны второго типа ( $H_{20}$ ), в то время как волны высших типов распространяться не могут.

$H_{10}$ -волна, идущая из плеча 1, возбуждает  $H_{10}$ - и  $H_{20}$ -волны, имеющие одинаковые амплитуды. Пусть эти волны в плече 1 будут в фазе, тогда в плече 2 они будут в противофазе. Поскольку фазовая скорость волны  $H_{20}$  больше, чем волны  $H_{10}$ , первая волна опережает по фазе вторую, длина щели подбирается таким об-

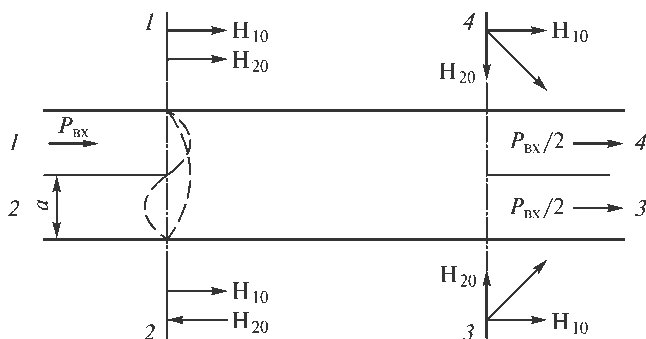
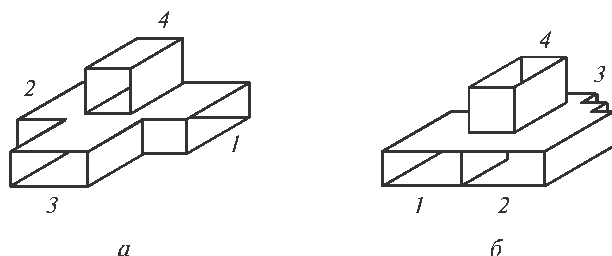


Рис. 7.23. Щелевой мост:

1—4 — плечи



**Рис. 7.24.** Двойной Т-образный мост (а) и модифицированный двойной Т-образный мост (б):

1—4 — плечи

разом, чтобы это опережение составило  $90^\circ$ . Таким образом, после прохождения участка с двойной шириной сдвиг фаз между волнами  $H_{10}$  и  $H_{20}$  перед плечом 4 составит  $90^\circ$ , а перед плечом 3 —  $-90^\circ$ . В результате сложения обоих типов колебаний в плечах 3 и 4 образуются волны типа  $H_{10}$  с одинаковой амплитудой, но сдвинутых по фазе относительно друг друга на  $90^\circ$ . Иными словами, энергия волны, поступающей в одно из четырех плеч щелевого моста, делится поровну между двумя противоположными плечами, а волны в этих плечах имеют фазовый сдвиг  $90^\circ$ . Точная настройка щелевого моста обычно осуществляется погружением в щель настроечного винта, расположенного в центре щели, после чего положение винта фиксируется гайкой.

**Двойной Т-образный мост.** Энергия волны, поступающая в плечо 3 (рис. 7.24, а), делится поровну между плечами 1 и 2, а возбуждаемые в этих плечах волны синфазны. При поступлении в плечо 4 энергия волны также делится поровну между плечами 1 и 2, однако волны в них возбуждаются в противофазе. Волноводный двойной Т-образный мост является взаимным устройством, поэтому волны, поступающие в плечи 1 и 2 с одинаковой фазой, складываются и попадают в плечо 3, а в противофазе — в плечо 4.

В фазовых циркуляторах используется модифицированный двойной Т-мост (рис. 7.24, б). Видоизменение заключается в повороте плеч 1 и 2 относительно вертикальной оси симметрии. Качественное согласование двойного Т-моста, особенно со стороны плеча 4, довольно затруднительно. В связи с этим его частотные характеристики несколько хуже, чем у щелевого моста.

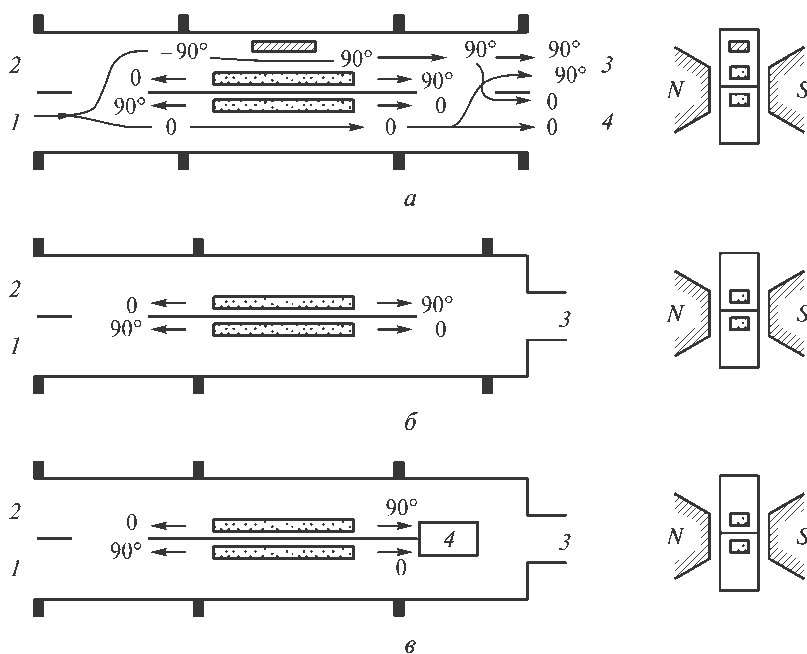
Переходное устройство с одинарного волновода на двоянный представлено на рис. 7.25. Ценным свойством такого устройства является равномерность деления энергии волны, поступающей в плечо 3, между плечами 1 и 2. Используя перечисленные волноводные элементы и невзаимные фазовращатели, можно построить несколько типов фазовых циркуляторов. Рассмотрим три из них.

**Рис. 7.25.** Переходное устройство с одинарного волновода на двоянный:

1—3 — плечи

**Фазовые циркуляторы.** Первый тип фазового циркулятора схематически представлен на рис. 7.26, а. Он состоит из двух щелевых мостов, диэлектрической пластины, создающей взаимный фазовый сдвиг  $90^\circ$ , и из двух





**Рис. 7.26.** Фазовый циркулятор:

*а* — первого типа; *б* — второго типа; *в* — третьего типа; 1—4 — плечи

одинаковых ферритовых пластин, намагниченных в одном и том же направлении и расположенных симметрично относительно общей стенки двух волноводов. Ферритовые пластины и намагничивающее поле, создаваемое постоянным магнитом, подобраны так, что невзаимный фазовый сдвиг в каждом канале равен  $90^\circ$ .

Энергия волны, поступающей в плечо 1 циркулятора, делится поровну в первом щелевом мосте, причем волна, возбуждаемая в верхнем волноводе, получает фазовый сдвиг  $-90^\circ$ . Проходя по фазовращателю, волна в верхнем волноводе испытывает дополнительный фазовый сдвиг на  $180^\circ$ , в то время как волна в нижнем волноводе дополнительного фазового сдвига не получает.

Проходя через второй щелевой мост, обе волны испытывают фазовый сдвиг  $-90^\circ$ . В плече 4 складываются две волны, имеющие фазовый сдвиг, равный нулю, а в плече 3 — две волны с фазовым сдвигом  $90^\circ$  и  $-90^\circ$ . Поэтому вся энергия поступает в плечо 4. Проследивая далее, можно убедиться, что в рассматриваемой системе волны будут проходить в направлении плеч  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . При переключении направления внешнего поля волны будут проходить в обратном направлении  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Второй тип фазового циркулятора, изображенный на рис. 7.26, б, является трехплечим. Вместо второго щелевого моста применен переход со сдвоенного волновода на обычный. Повторяя приведенные выше рассуждения, легко убедиться, что волны будут двигаться в направлении плеч  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , а при переключении направления намагничивающего поля — в направлении плеч  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

Наконец, в фазовом циркуляторе третьего типа, приведенном на рис. 7.26, в, вместо переходного волноводного устройства использован модифицированный двойной Т-мост. В этом типе циркулятора, который, как и первый, является четырехплечем, волны передаются в направлении плеч  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

## 7.6. Взаимные ферритовые устройства

К взаимным ферритовым устройствам относятся: фазовращатель Реджиа — Спенсера, быстродействующий модулятор (переключатель), резонаторы и фильтры, перестраиваемые ферритом.

**Фазовращатель Реджиа — Спенсера** представляет собой участок прямоугольного волновода, вдоль оси которого расположен достаточно толстый ферритовый стержень, намагничиваемый в продольном направлении (рис. 7.27). Фазовращатель позволяет получить большие фазовые сдвиги при малых управляющих полях ( $H_0 < H$ ).

Зависимость взаимного фазового сдвига от величины намагничивающего поля представлена на рис. 7.28.

Большая величина регулируемого сдвига фазы объясняется двумя главными факторами: концентрацией поля в районе феррита и изменяющейся высокочастотной магнитной проницаемостью. В реальных конструкциях фазовращателей применяются ферритовые стержни больших размеров, в которых электромагнитная энергия концентрируется благодаря значительной диэлектрической проницаемости феррита. При увеличении значения намагничивающего поля от нуля до конечного значения эффективная высокочастотная магнитная проницаемость феррита изменяется от единицы до значения, соответствующего намагничению насыщения.

**Быстродействующий модулятор (выключатель).** Выключатель представляет собой устройство, которое в одном режиме пропускает волну, а в другом — отражает или поглощает ее. Схема взаимного выключателя, основанного на эффекте Фарадея, представлена на рис. 7.29. При отсутствии тока в катушке намагничивающее поле равно нулю и вращения плоскости поляризации не происходит. Поэтому волна из плеча 1 поступает в плечо 2, где ставят поглощающую нагрузку. Если подобрать такое значение тока, чтобы угол поворота плоскости

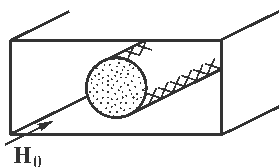


Рис. 7.27. Фазовращатель Реджиа — Спенсера

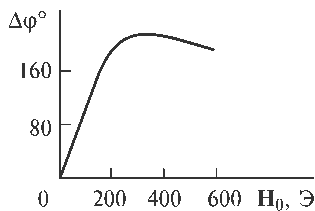


Рис. 7.28. Зависимость фазового сдвига от значения намагничивающего поля

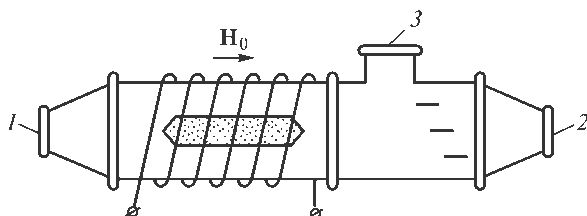


Рис. 7.29. Быстродействующий модулятор:

1—3 — плечи

поляризации составил  $90^\circ$ , то волна из плеча 1 будет передаваться в плечо 3. Выключатель не обладает вентильными свойствами.

**Резонаторы и фильтры, перестраиваемые ферритом.** С помощью ферритов можно создать электрически управляемые узкополосные фильтры, перестраиваемые в широкой полосе частот. Принцип работы ферритовых фильтров основан на явлении ферромагнитного резонанса.

Фильтром может служить объемный резонатор с помещенным внутрь него ферритом. Под влиянием поля намагничивания изменяются параметры феррита (компоненты тензора магнитной проницаемости). Изменение действительных частей компонентов тензора приводит к сдвигу частоты резонатора, а изменение мнимых частей обуславливает потери в феррите и, как следствие, изменение добротности резонатора. Однако такие фильтры (с поликристаллическими ферритами) не нашли применения вследствие зависимости их параметров от различных факторов.

Широкое применение находят фильтры, состоящие из линий передачи с помещенными в них монокристаллами феррита. Последние имеют форму сфер или дисков. Схема полосового фильтра на ортогональных линиях передачи, связанных с помощью ферритовой сферы, изображена на рис. 7.30.

При не намагниченном феррите энергия сверхвысокой частоты из одной линии в другую передаваться не может вследствие ортогональности типов колебаний. Максимальная связь между линиями передачи имеет место при намагничивающем поле, создающем ферромагнитный резонанс на частоте СВЧ-сигнала. Следует отметить, что применение ортогональных линий передачи позволяет увеличить развязку (затухание) вне полосы пропускания фильтра.

Схемы проходных фильтров показаны на рис. 7.31. В режекторном фильтре (рис. 7.31, а) входная СВЧ-волна возбуждает в намагниченном феррите вторичные волны  $H_1$  и  $H_2$ , распространяющиеся в направлениях 1 и 2. При резонансе фазовый сдвиг между первичной волной  $H_{вх}$  и волной  $H_2$  оказывается равным  $180^\circ$  и энергия через фильтр (в направлении 2) не распространяется.

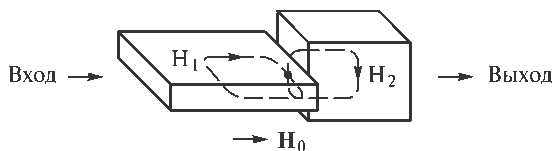


Рис. 7.30. Схема полосового фильтра на ортогональных линиях передачи



Рис. 7.31. Схемы проходных фильтров:

*а* — режекторного; *б* — полосового

В полосовом фильтре (рис. 7.31, *б*) кроме возбуждения вторичных волн  $H_1$  и  $H_2$ , распространяющихся в направлениях *1* и *2*, наблюдается отражение от диафрагмы волны  $H_{отр}$  в направлении *1*. При соответствующем выборе диафрагмы происходит компенсация волн  $H_1$ ,  $H_{вх}$  и  $H_{отр}$ . Волна  $H_2$  проходит через фильтр. Вне полосы пропускания (вдали от резонанса) энергия сверхвысоких частот через фильтр не проходит, так как волновод за счет толстой диафрагмы становится запердельным.

При изготовлении СВЧ-фильтра необходимо, чтобы ферритовая сфера располагалась в области максимума магнитного СВЧ-поля соответствующей ориентации.

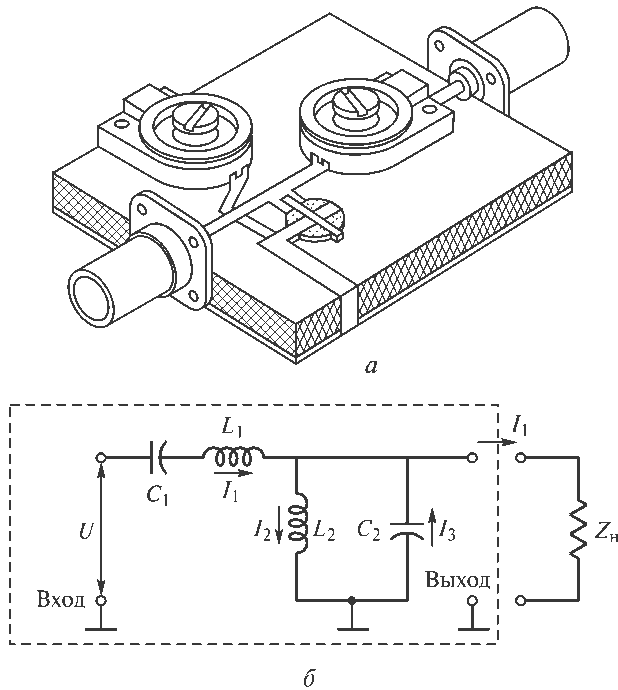
### 7.7. Ферритовые устройства на полосковых линиях и периодических структурах

С уменьшением частоты увеличиваются габариты и масса ферритовых устройств. В дециметровом диапазоне волн проблема больших габаритов и веса частично может быть решена применением полосковых линий. На полосковых линиях могут быть выполнены резонансный вентиль, Y-циркулятор и некоторые другие устройства.

**Вентили на полосковых линиях.** Вентили на полосковых линиях являются наиболее компактными в этом классе устройств. Миниатюрный вентиль для диапазона порядка 400 МГц может быть создан с использованием элементов с сосредоточенными емкостями (рис. 7.32, *а*).

Подстроечные конденсаторы используются для настройки в резонанс параллельного и последовательного резонансных контуров, показанных на рис. 7.32, *б*. При этом, как следует из эквивалентной схемы, выполняются условия  $I_2 = -iI_1$ . Эти токи создают в феррите магнитное поле с круговой поляризацией, вращающееся в одном направлении, когда ток  $I_1$  направлен к нагрузке, и в противоположном направлении, когда ток  $I_1$  направлен к входу. Таким образом, условия, при которых может существовать резонансный вентиль, создаются элементами с сосредоточенными постоянными.

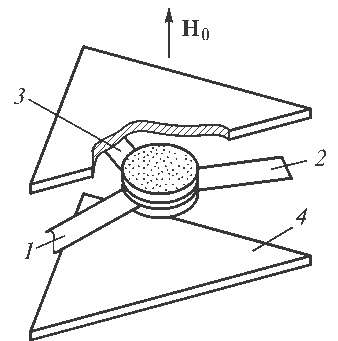
**Y-циркуляр на полосковых линиях.** Классический циркуляр, основанный на использовании фарадеева вращения поляризации или невязимного сдвига фа-



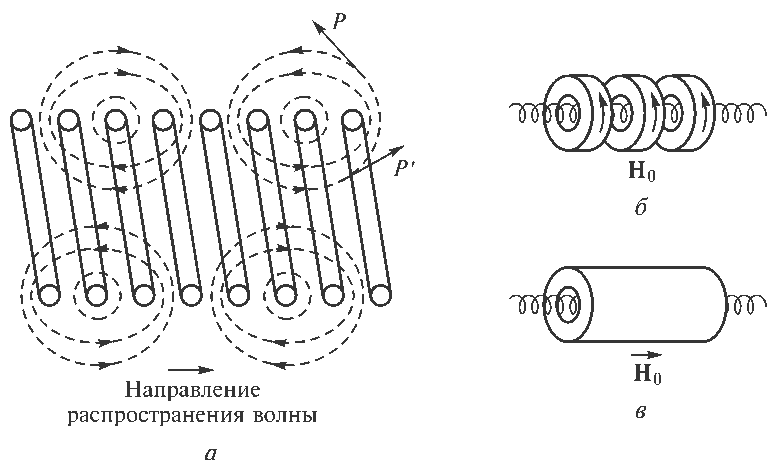
**Рис. 7.32.** Схемы вентиля на полосковых линиях с сосредоточенными емкостями: *a* — конструктивная; *б* — эквивалентная

зы, не может удовлетворительно работать на частотах ниже 3000 МГц. Иначе обстоит дело с Y-циркуляторами, которые могут быть выполнены в полосковом варианте.

Полосковая конструкция Y-циркулятора показана на рис. 7.33. К ферритовым дискам перпендикулярно их основаниям приложено постоянное магнитное поле, превышающее резонансное. Размеры диска и напряженность внешнего магнитного поля  $H_0$  подобраны так, что плечи сочленения согласованы. На частотах выше 1000 МГц циркулятор может работать и до резонанса. Волна, падающая в плечо 1 циркулятора, представляет собой Т-волну, вектор электрического поля которой параллелен вектору постоянного магнитного поля. Результирующая электромагнитная волна является суперпозицией двух волн, падающей и переизлученной ферритом. Она имеет картину поля, для которой векторы Пойнтинга существуют во входном плече 1 и выходном плече 2, в плече 3 результирующий вектор Пойнтинга равен нулю.



**Рис. 7.33.** Y-циркулятор на полосковой линии: 1—3 — плечи (полоски); 4 — металлическая плата



**Рис. 7.34.** Резонансный вентиль на спиральной линии:

*a* — структура силовых линий магнитного СВЧ-поля в спиральной линии передачи; *б* — вентиль с азимутально намагниченным ферритовым кольцом; *в* — вентиль с продольно намагниченным ферритовым кольцом

Полосковые конструкции ферритовых устройств хорошо работают на малом и среднем уровнях мощности сверхвысоких частот.

**Ферритовые устройства на спиральных линиях.** Практическое применение в диапазоне дециметровых волн находят ферритовые устройства на основе спиральных линий. Основным достоинством спиральной системы является ее широкополосность. (Фазовая скорость замедленной волны почти в точности совпадает с групповой скоростью и остается практически неизменной в диапазоне частот порядка октавы и более.) Недостатком спиральной системы является малая теплорассеивающая способность, а также трудность ее изготовления и применения в диапазоне более коротких волн.

**Резонансный вентиль на спиральных линиях.** На рис. 7.34, *a* показаны силовые линии магнитного СВЧ-поля в спиральной линии передачи. Проекция вектора магнитного поля на плоскость чертежа в точке *P* (или *P'*) вращается в разные стороны в зависимости от того, в каком направлении распространяется волна по линии. Поэтому азимутально намагниченное ферритовое кольцо, надетое на линию (рис. 7.34, *б*), приводит к невзаимному резонансному поглощению в линии. Ферритовые кольца намагничиваются током в несколько ампер, проходящим через небольшую обмотку, охватывающую их. Вентиль может быть и без внешнего магнитного поля, если применить феррит с прямоугольной петлей гистерезиса.

Ферритовое кольцо можно намагнитить продольно (см. рис. 7.34, *в*), так как проекция вектора магнитного поля на плоскость, перпендикулярную оси спирали, также имеет эллиптическую поляризацию.

Спиральный вентиль (см. рис. 7.34, *б*) впервые был применен в усилительной лампе бегущей волны для подавления обратной волны, обусловленной отражениями, и тем самым для предохранения лампы от самовозбуждения при большом усилении.

## 7.8. Особенности ферритовых устройств миллиметрового диапазона волн

При разработке ферритовых устройств миллиметрового диапазона волн возникает ряд трудностей.

1. Из формулы  $\omega_p = \gamma H_p$  (где  $\omega_p$  — частота ферромагнитного резонанса;  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\gamma \approx 2,8$  МГц/Э;  $H_{рез}$  — напряженность постоянного магнитного поля, требуемая для резонанса) следует, что для частот более 28 000 МГц подмагничивающее поле, необходимое для ферромагнитного резонанса, превышает 10 000 Э (до 100 000 Э в диапазоне субмиллиметровых волн). Создание таких больших полей с помощью постоянного магнита или электромагнита является сложной проблемой. В устройствах четырехмиллиметрового диапазона волн или еще более коротковолновых это уже практически невозможно.

Для создания резонансных устройств, работающих на очень высоких частотах, существуют два пути:

а) необходимость в больших подмагничивающих полях отпадает, если использовать ферромагнитные материалы с большими (порядка 20 000 Э) внутренними полями анизотропии. Такие большие внутренние поля имеют кристаллы с гексагональной структурой, а также некоторые поликристаллические материалы. Внутренние поля анизотропии в этих кристаллах могут достигать 50 000 Э. Резонанс в миллиметровом диапазоне может происходить в таких полях при отсутствии внешнего магнитного поля, что позволяет создавать резонансные вентили для двухмиллиметрового диапазона (а нерезонансные устройства и для более коротких волн);

б) для работы на еще более коротких — субмиллиметровых — волнах можно использовать антиферромагнитные кристаллы, внутренние поля взаимодействия в которых достигают 100 000 Э. Однако такие устройства зачастую должны работать при низкой температуре — более низкой, чем температура Нееля (аналог температуры Кюри) антиферромагнетика (10...700 К).

2. Нерезонансные устройства миллиметрового диапазона могут быть созданы с использованием обычных ферритов, так как в этих устройствах не требуется больших магнитных полей. В этом случае трудности связаны с тем, что модуль недиагональной компоненты тензора магнитной проницаемости феррита с увеличением частоты уменьшается, а это ухудшает работу фарадеевых вращателей плоскости поляризации и невзаимных фазовращателей.

Кроме того, следует отметить трудности, связанные с чрезвычайно малыми размерами волноводов, что препятствует осуществлению обычных устройств (вращателей поляризации и фазовращателей). Появление Y-циркулятора позволило отказаться от применения обычных фазовых циркуляторов на очень коротких волнах.

### Вопросы

1. Волноводные устройства на основе эффекта Фарадея:
  - а) как устроены гиратор и вентиль?
  - б) на каких принципах работают амплитудные модуляторы и переключатели?
  - в) как устроены вращатели плоскости поляризации и фазовращатели, управляемые продольным магнитным полем, использующие эффект Фарадея?
2. Волноводные устройства, использующие явление взаимного поглощения при ферромагнитном резонансе:
  - а) опишите принцип работы резонансного вентиля на круглом волноводе;
  - б) какими основными особенностями обладают резонансные вентили на прямоугольном волноводе?
3. Волноводные устройства, использующие различия в структурах полей прямой и обратной волн:
  - а) каковы принципы построения невзаимных фазовращателей на основе прямоугольного и круглого волноводов?
  - б) каковы принципы построения вентилях на смещении поля?
4. Какова роль щелевого моста и двойного Т-моста при построении фазовых циркуляторов?
5. Взаимные ферритовые устройства:
  - а) каков принцип построения фазовращателя Реджиа — Спенсера?
  - б) принципы построения быстродействующих модуляторов, резонаторов и фильтров.
6. Каковы принципы построения вентилях и Y-циркуляторов на основе полосковых и спиральных линий передачи?



## 8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С АКТИВНОЙ СРЕДОЙ. УСИЛЕНИЕ И ГЕНЕРИРОВАНИЕ

### 8.1. Распространение электромагнитной волны в активной среде. Условия усиления и генерирования

**Усиление поля в активной среде.** При распространении в пассивной среде с потерями электромагнитное поле поглощается и амплитуда поля с увеличением расстояния убывает по экспоненциальному закону

$$E_m(x) = E_m \cdot e^{-\alpha x},$$

где  $\alpha$  — постоянная затухания. Для диэлектрика с малыми потерями  $\alpha$  определяется выражением (2.45):

$$\alpha = \frac{\omega \varepsilon''}{2cn}, \quad (8.1)$$

где  $n$  — коэффициент преломления.

При распространении в активной среде электромагнитное поле усиливается, амплитуда поля возрастает по экспоненциальному закону:

$$E_m(x) = E_m \cdot e^{\alpha_{yc}x}.$$

Здесь  $\alpha_{yc}$  — коэффициент усиления. Его можно определить по формуле (8.1), рассматривая активную среду как диэлектрик с малыми отрицательными потерями ( $\varepsilon'' < 0$ ). С учетом (2.62) для двухуровневой квантовой среды коэффициент квантового усиления определяется выражением

$$\alpha_{yc}(\omega) = \frac{\omega \hbar}{2cn} B_{nm} g(\omega) \left( N_n - \frac{g_n}{g_m} N_m \right). \quad (8.2)$$

Для усиления электромагнитного поля необходимо, чтобы  $\alpha_{yc}(\omega) > 0$ , т. е. создание инверсной населенности, когда выполняется условие

$$\left( N_n - \frac{g_n}{g_m} N_m \right) > 0.$$

В квантовой среде наряду с индуцированными происходят спонтанные переходы, фаза, поляризация и частота которых не связаны с распространяющимся полем и поэтому на усиление электромагнитной волны не влияют. Спонтанные переходы являются источником шумов. Уровень шумов, определяемый спонтанным излучением, согласно (2.58) в диапазоне сверхвысоких частот намного меньше, чем в оптическом.

Коэффициент квантового усиления можно выразить через коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения (2.58):

$$\alpha_{yc}(\omega) = \frac{\pi c^2}{4\omega^2} A_{nm} g(\omega) \left( N_n - \frac{g_n}{g_m} N_m \right). \quad (8.3)$$

В случае активного магнетика, определяя  $\alpha_{yc}$  по формуле, аналогичной (8.1)

$$\alpha = \frac{\omega \mu''}{2cn}$$

и формуле (2.63), получаем то же выражение (8.2).

В реальной активной среде наряду с усилением распространяющегося поля наблюдаются потери за счет рассеяния на неоднородностях среды, резонансного поглощения, обусловленного наличием других уровней, частота перехода между которыми равна частоте рабочего перехода  $\omega_{nm}$ , и т. д. Характеризуя эти потери коэффициентом потерь  $\alpha_{пот}$  и учитывая их при распространении электромагнитной волны в активной среде, получаем

$$E_m(x) = E_m \cdot e^{(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})x}.$$

Для усиления электромагнитного поля в активной среде необходимо, чтобы коэффициент квантового усиления был не только больше нуля, но и больше коэффициента потерь активной среды, т. е.

$$\alpha_{yc} > \alpha_{пот},$$

иначе говоря, мощность излучения должна превышать мощность потерь:

$$P_{изл} > P_{пот}$$

(это выражение иногда называют *условием усиления*).

Коэффициент усиления  $\alpha_{yc}$  характеризует усиление на единицу длины и остается постоянным при небольших напряженностях распространяющегося поля. При увеличении напряженности поля по мере его распространения коэффициент усиления среды уменьшается, так как согласно (8.2)  $\alpha_{yc}$  зависит от инверсной населенности. При увеличении напряженности распространяющегося поля увеличивается вероятность индуцированных переходов (см. (2.57)) и населенность уровней выравнивается. При некоторой предельной напряженности распространяющегося поля  $E_{m\text{ пред}}(x)$  наступает насыщение и усиление прекращается, амплитуда распространяющегося поля не изменяется (рис. 8.1). Уменьшение  $\alpha_{yc}$  с

ростом амплитуды поля  $E_m$  ограничивает максимальное значение напряженности поля  $E_{m \text{ пред}}$ , которое может быть получено в процессе усиления. В той части активной среды, где напряженность поля равна предельному значению, усиления нет, так как режим среды близок к режиму полного насыщения. Напряженность поля достигает предельного значения при прохождении в среде некоторого критического пути  $l_{\text{кр}}$ . Использование пути распространения длиной, больше критической, нецелесообразно, так как энергия источника расходуется для возбуждения области, соответствующей  $l > l_{\text{кр}}$ , а распространяющееся значение поля в этой области не возрастает. Зависимости  $\alpha_{\text{ус}}$  и  $E_m(x)$  от расстояния, пройденного волной в среде, приведены на рис. 8.2. Область I соответствует малым значениям напряженности поля, при которых инверсная населенность практически не изменяется и коэффициент  $\alpha_{\text{ус}}$  постоянен. Поскольку значение  $\alpha_{\text{ус}}$  обычно мало, то при постоянном коэффициенте  $\alpha_{\text{ус}}$  в этой области

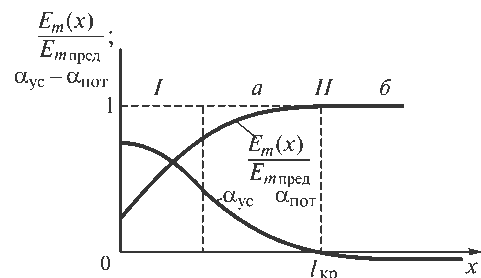
$$E_m(x) = [1 + (\alpha_{\text{ус}} - \alpha_{\text{пот}})x]E_m(0),$$

т. е. область I является областью линейного режима усиления.

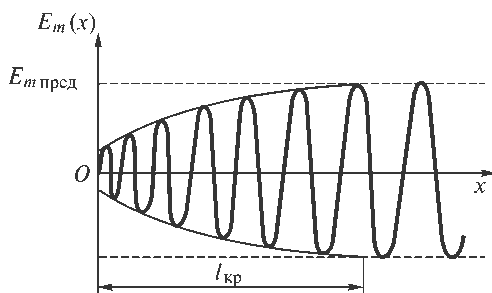
В области II можно выделить две подобласти. В области II.a равным приращениям пройденного расстояния соответствуют все меньшие приращения напряженности поля — это область нелинейного режима усиления. При  $l = l_{\text{кр}}$  амплитуда поля достигает предельного значения и при дальнейшем распространении не увеличивается. Область II.б — это область полного насыщения.

Усиление в активной среде можно характеризовать коэффициентом усиления по мощности  $G$ . Если  $l$  — расстояние, которое проходит волна в активной среде, и излучение по всей длине происходит равномерно, то

$$G = e^{2(\alpha_{\text{ус}} - \alpha_{\text{пот}})l}.$$



**Рис. 8.2.** Зависимость коэффициента усиления  $\alpha_{\text{ус}} - \alpha_{\text{пот}}$  и амплитуды распространяющегося поля от расстояния, пройденного волной в активной среде



**Рис. 8.1.** Усиление в активной среде

В радиодиапазоне  $\alpha_{\text{ус}} \approx 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ , а величиной  $\alpha_{\text{пот}}$  можно пренебречь. Для усиления поля в 100 раз необходимо, чтобы волна прошла расстояние, равное 5 м, что на практике нереально. Эффективную длину можно увеличить за счет многократного прохождения волной одного и того же пути в активной среде (положительная обратная связь). Обратная связь осуществляется с помощью

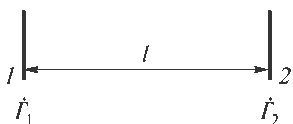


Рис. 8.3. К условию самовозбуждения активного резонатора

резонатора. Усиление, использующее положительную обратную связь, называется регенеративным.

**Активный резонатор.** Резонатор, который частично или полностью заполнен активной средой и в котором происходит усиление или генерирование электромагнитных колебаний за счет взаимодействия поля со средой при многократном отражении от зеркал, называется *активным*.

При достаточно сильной обратной связи при отсутствии внешнего сигнала возможно усиление случайного спонтанного излучения, и если мощность излучения активных частиц достаточна для компенсации потерь и отвода энергии из резонатора, то условие генерирования имеет вид

$$P_{\text{изл}} > P_{\Sigma},$$

где  $P_{\Sigma}$  — сумма мощности потерь и мощности, излучаемой во внешнее пространство.

Если энергия излучения активных частиц превышает потери в резонаторе, но меньше полных потерь, включающих потери на излучение во внешнее пространство, т. е.

$$P_{\text{пот}} < P_{\text{изл}} < P_{\Sigma},$$

то генерирование не возникает, однако волна, взаимодействуя с активной средой, усилится и выйдет из резонатора с большей амплитудой. Происходит регенеративное усиление.

Усиление среды определяется инверсной населенностью, которая, в свою очередь, зависит от мощности источника возбуждения. Наименьшие значения мощности источника возбуждения и коэффициента квантового усиления, при которых начинается усиление внешнего сигнала или генерирование, называются *пороговыми*. При этих значениях происходит компенсация собственных потерь резонатора в случае регенеративного усиления и полных потерь в случае генерирования.

Рассмотрим открытый резонатор, полностью заполненный активной средой в режиме генерирования (рис. 8.3). Поле в резонаторе можно рассматривать как результат многократного отражения волны от зеркал 1 и 2. Пусть амплитуда напряженности волны у зеркала 1 равна  $E_{m0}(0)$ . У зеркала 2 после однократного прохождения резонатора и отражения от этого зеркала комплексная амплитуда волны

$$\dot{E}_{m0}(l) = \dot{\Gamma}_2 E_{m0}(0) \cdot e^{(\alpha_{\text{ус}} - \alpha_{\text{пот}})l} \cdot e^{j\beta l},$$

где  $\dot{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \cdot e^{j\varphi_2}$  — коэффициент отражения от зеркала 2, учитывающий потери на излучение и фазовый сдвиг при отражении;  $\alpha_{\text{пот}}$  — коэффициент собственных потерь резонатора;  $\alpha_{\text{ус}}$  — коэффициент квантового усиления активной среды;  $\beta = 2\pi/\lambda_p$  — фазовая постоянная.

Вторично к зеркалу 1 волна подойдет с комплексной амплитудой

$$\dot{E}_m(0) = \dot{\Gamma}_2 \dot{E}_{m0}(0) \cdot e^{2(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})l} \cdot e^{j2\beta l}$$

и, отразившись от этого зеркала, пойдет обратно с амплитудой

$$\dot{E}'_{m0}(0) = \dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 \dot{E}_{m0}(0) \cdot e^{2(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})l} \cdot e^{j2\beta l},$$

где  $\dot{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cdot e^{j\varphi_1}$  — коэффициент отражения от зеркала 1.

Волна будет самоподдерживающейся, если

$$\dot{E}_{m0} = \dot{E}'_{m0},$$

т. е. выполняется условие существования стационарного режима

$$\dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 \cdot e^{2(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})l} \cdot e^{j2\beta l} = 1,$$

или

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \cdot e^{2(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})l} \cdot e^{j(2\beta l + \varphi_1 + \varphi_2)} = 1.$$

Отсюда получаем два самостоятельных условия существования стационарного режима:

- условие баланса фаз

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} 2l + \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi q \quad (q = 0, 1, 2, \dots);$$

- условие баланса амплитуд

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \cdot e^{2(\alpha_{yc} - \alpha_{пот})l} = 1.$$

Условие баланса фаз означает, что в стационарном режиме волна, пройдя в резонаторе путь  $2l$  и отразившись от каждого зеркала, получает фазовый сдвиг, кратный  $2\pi$ . Согласно формуле (6.40) это условие выполняется для всех резонансных частот и условие стационарного режима сводится к условию баланса амплитуд.

В последнем уравнении экспоненциальный член  $e^{2\alpha_{yc}l}$  характеризует индуцированное излучение, остальные члены определяют потери в резонаторе. Отсюда следует, что стационарные колебания будут существовать, если индуцированное излучение компенсирует все потери в резонаторе. Наименьшее, или пороговое, значение коэффициента усиления

$$\alpha_{yc.пор} = \alpha_{пот} + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{\Gamma_1 \Gamma_2}.$$

Резонатор возбуждётся, если коэффициент усиления активной среды больше порогового значения коэффициента усиления или равен ему:

$$\alpha_{yc} \geq \alpha_{пот} + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (8.4)$$

это условие называется *условием самовозбуждения*.

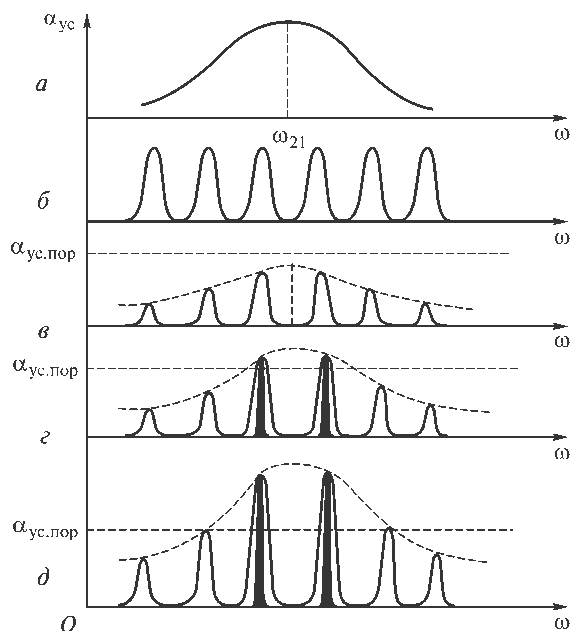


Рис. 8.4. Спектр излучения:

*a* — контур усиления; *б* — резонансные пики продольных типов колебаний; *в* — малая инверсная населенность; *г* — условие баланса амплитуд выполняется для середины контура усиления; *д* — большая инверсная населенность

Пороговое значение  $\alpha_{\text{ус.пор}}$  обеспечивается согласно (8.3) при некоторой пороговой населенности  $\Delta N_{\text{пор}}$ . Если инверсная населенность превышает пороговое значение, то наблюдается нарастание интенсивности колебаний. При этом за счет увеличения числа индуцированных переходов инверсная населенность будет уменьшаться до тех пор, пока не достигнет порогового значения  $\Delta N_{\text{пор}}$ , при котором обеспечивается стационарный режим.

Согласно выражению (8.4), чем больше коэффициенты отражения и длина активной среды, тем легче выполняется условие генерирования. Но коэффициенты  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  оба принципиально не могут равняться единице; по крайней мере одно из зеркал должно быть полупрозрачным для вывода излучения. Длина активной среды не может быть сколь угодно большой не только из-за технологических трудностей, но и из-за увеличения дифракционных потерь.

Количество типов колебаний, которые одновременно возникают в активном резонаторе, ограничивается контуром усиления (рис. 8.4, *a*), определяемым формулой (8.3). Высота этого контура определяется инверсной населенностью, ширина — шириной линии излучения рабочего перехода. Ширина линии рабочего перехода (контура усиления) больше, чем расстояние между резонансными частотами продольных типов колебаний, а так как частоты поперечных колебаний различны, то на ширине линии рабочего перехода укладываются частоты

нескольких поперечных колебаний с соответствующими наборами продольных типов колебаний, сдвинутых относительно друг друга. Для упрощения на рис. 8.4, б приведены резонансные пики только продольных типов основного колебания  $T_{00}$ . При малой инверсной населенности и  $\alpha_{yc} < \alpha_{yc,пор}$  (рис. 8.4 в) ни для одной из резонансных частот не выполняется условие баланса амплитуд и генерирование не возникает ни на одном из типов колебаний. С увеличением инверсной населенности усиление активной среды возрастает (рис. 8.4, з) и условие баланса амплитуд выполняется для одной или нескольких частот. При дальнейшем увеличении инверсной населенности число генерируемых частот увеличивается (рис. 8.4, д). Начинается генерирование не только продольных типов основного колебания, но и поперечных, добротность резонатора для которых незначительно отличается от добротности для основного колебания. В результате спектр излучения состоит из продольных типов основного колебания  $T_{00}$  и группирующихся около них по частоте продольных типов поперечных колебаний (рис. 8.5). Расстояние между частотами продольных типов основного колебания составляет сотни мегагерц, ширина диапазона частот, в котором группируются продольные типы различных поперечных колебаний, — единицы мегагерц.

На формирование спектра излучения большое влияние оказывает пространственная модуляция инверсной населенности. Если до начала генерирования инверсная населенность примерно постоянна во всем объеме активной среды, то появление любого типа колебаний приводит к модуляции инверсной населенности. Пусть в резонаторе существует, например, один продольный тип основного колебания  $T_{00}$ . Распределение интенсивности поля для этого типа колебаний вдоль оси резонатора и в поперечном сечении приведено на рис. 8.6. Чем больше интенсивность, тем больше индуцированных переходов, и там, где интенсивность поля для данного типа больше, инверсная населенность будет меньше. В результате условия возникновения для другого типа колебаний будут лучше, чем для существующего, и он возникает. После возникновения другого типа колебаний, распределение поля которого не совпадает с существующим ранее, вновь изменяется распределение инверсной населенности и вновь возникает новый тип колебаний. Происходит перескок типов колебаний. Пространственная модуляция инверсной населенности создает условия для появления высших типов колебаний, несмотря на то что дифракционные потери для этих типов больше, чем для основного колебания.

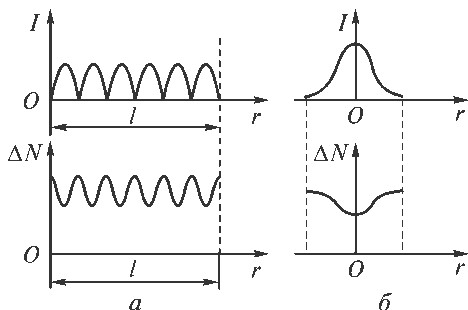


Рис. 8.6. Распределение интенсивности и инверсной населенности в случае основного колебания  $T_{00}$ :

$a$  — по длине резонатора;  $b$  — в поперечном направлении

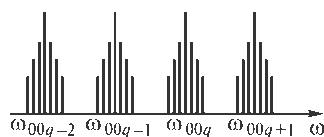


Рис. 8.5. Спектр излучения активного резонатора

Действительно, согласно рис. 8.6, б инверсная населенность, а следовательно, и усиление на периферии среды при наличии основного колебания больше, чем в центре, что создает условия для возникновения колебания  $T_{10}$ .

Теоретическая ширина спектральной линии работающего типа колебаний должна быть меньше ширины резонансной кривой того же типа колебаний в пассивном резонаторе, так как усиление в центре резонансной кривой больше, чем на ее краях. Однако практически ширина спектральной линии излучения вследствие нестабильности резонатора, обусловленной механическими и тепловыми воздействиями оказывается значительно больше теоретической.

Для работы лазера в режиме регенеративного усиления должно выполняться условие

$$\alpha_{\text{пот}} < \alpha_{\text{ус}} < \alpha_{\text{пот}} + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{\Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (8.5)$$

В этом случае пороговый уровень возбуждения определяется собственными потерями резонатора  $\alpha_{\text{пот}}$ . Степень превышения мощности возбуждения над пороговым значением определяет коэффициент усиления. Усиление возможно при мощностях возбуждения, не превышающих пороговое значение генерирования (самовозбуждения).

## 8.2. Усиление бегущей волны

Распространение электромагнитной волны в активной квантовой среде можно рассматривать с позиций классической теории электромагнитного поля, так как, во-первых, имеем дело с взаимодействием поля с веществом и, во-вторых, излучение или поглощение энергии определяется большим числом фотонов, когда классическое приближение достаточно точно. При этом активная среда рассматривается как квантовый ансамбль частиц (см. § П.9) и в целом теория является полуклассической.

Характеризуя потери в активной среде распределенной проводимостью  $\sigma$ , с учетом отсутствия свободных зарядов согласно (1.18) получим

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (8.6)$$

Обычно активная среда представляет собой совокупность двух компонент: основы, состоящей из частиц, не принимающих участия в излучательных переходах, и частиц активатора, определяющих излучение. При этом вектор поляризации удобно представить в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}^a,$$

где  $\mathbf{P}'$  — вектор поляризации среды без учета частиц активатора;  $\mathbf{P}^a$  — вектор поляризации, связанный с частицами активатора.



В соответствии с формулой (1.7)

$$\mathbf{P}' = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_a \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (8.7)$$

где  $\varepsilon_a$  — диэлектрическая проницаемость среды без учета частиц активатора.

Подставляя (8.7) в (8.6), получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_a} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2}. \quad (8.8)$$

Здесь  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$  — скорость распространения электромагнитной волны в среде

без учета частиц активатора.

Зависимость поляризации  $\mathbf{P}^a$  от поля определим квантовомеханическим путем. Активную компоненту будем рассматривать как совокупность квантовомеханических систем с двумя энергетическими уровнями  $W_1$  и  $W_2$  ( $W_1 < W_2$ ), считая, что другие уровни достаточно далеко удалены от этих двух и не взаимодействуют с ними.

Стационарные состояния 1 и 2 описываются волновыми функциями вида

$$\psi_{01} e^{j \frac{W_1 t}{\hbar}} \text{ и } \psi_{02} e^{j \frac{W_2 t}{\hbar}},$$

которые являются решениями уравнения (П.108). Под действием электрического поля  $\mathbf{E}$  системы переходят в нестационарные состояния, описываемые уравнением (П. 135)

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{U}(t)]\psi, \quad (8.9)$$

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан без учета взаимодействия, а

$$\hat{U}(t) = -\mathbf{p}_e \mathbf{E}$$

— оператор возмущения при взаимодействии поля  $\mathbf{E}$  с частицей, электрический дипольный момент которой  $\mathbf{p}_e$ .

Решение (8.9) будем искать в виде волновой функции  $\psi(t)$ , зависящей от времени. Эту волновую функцию, пренебрегая взаимодействием с другими уровнями, можно представить в виде

$$\psi(t) = a(t)\psi_{01} + b(t)\psi_{02}. \quad (8.10)$$

Подставляя (8.10) в (8.9) с учетом (П.136), получаем

$$-j\hbar \left( \frac{da}{dt} \psi_{01} + \frac{db}{dt} \psi_{02} \right) = W_1 a \psi_{01} + W_2 b \psi_{02} - \mathbf{p}_e \mathbf{E} a \psi_{01} - \mathbf{p}_e \mathbf{E} b \psi_{02}. \quad (8.11)$$

Умножая правую и левую части уравнения (8.11) на  $\psi_{01}^*$  и интегрируя по конфигурационному пространству частицы, т. е. совокупности координат, опре-

деляющих положение частицы в пространстве, с учетом ортогональности волновых функций (П.111) получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{j}{\hbar} (W_1 a - \mathbf{p}_e \mathbf{E} b). \quad (8.12)$$

Аналогично, умножая (8.11) на  $\psi_{02}^*$  и интегрируя, получаем

$$\frac{db}{dt} = \frac{j}{\hbar} (W_2 b - \mathbf{p}_e \mathbf{E} a). \quad (8.13)$$

Элемент матрицы дипольного момента частицы (П.132) равен

$$p_e = p_{12} = \int_V \psi_{01}^* p_e \psi_{02} dV = p_{12}^*.$$

Согласно (П.141) матрица плотности имеет вид

$$[\rho_{ik}] = \begin{bmatrix} aa^* & ab^* \\ a^*b & bb^* \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Здесь недиагональные элементы определяют дипольный момент, диагональные — вероятность населенности уровней.

Среднее значение вектора поляризации  $\mathbf{P}^a$  определяется выражением

$$\mathbf{P}^a = \tilde{\mathbf{p}}_e N,$$

где  $N$  — число частиц активатора в единице объема;  $\tilde{\mathbf{p}}_e$  — средний дипольный момент частицы. Для простоты будем считать, что у матрицы дипольного момента отличны от нуля только недиагональные элементы (см. (П.132)), т. е.  $p_{12} = p_{21} = p_e$ . Тогда согласно (П.142) и с учетом (8.14) получим

$$\mathbf{P}^a = (ab^* + a^*b)\mathbf{p}_e N. \quad (8.15)$$

Продифференцируем это выражение по времени

$$\frac{d\mathbf{P}^a}{dt} = \left( \frac{da}{dt} b^* + a \frac{db^*}{dt} + \frac{da^*}{dt} b + a^* \frac{db}{dt} \right) \mathbf{p}_e N$$

и преобразуем этот результат с учетом (8.12) и (8.13). Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}^a}{dt} &= \frac{j}{\hbar} (W_1 ab^* - \mathbf{p}_e \mathbf{E} |b|^2 - W_2 ab^* + \mathbf{p}_e \mathbf{E} |a|^2 - W_1 a^* b + \mathbf{p}_e \mathbf{E} |b|^2 + \\ &+ W_2 a^* b - \mathbf{p}_e \mathbf{E} |a|^2) \mathbf{p}_e N = j \left( \frac{W_1 - W_2}{\hbar} ab^* + \frac{|a|^2 - |b|^2}{\hbar} \mathbf{p}_e \mathbf{E} - \frac{W_1 - W_2}{\hbar} a^* b - \right. \\ &\left. - \frac{|a|^2 - |b|^2}{\hbar} \mathbf{p}_e \mathbf{E} \right) \mathbf{p}_e N = -j\omega_{21} (ab^* - a^*b) \mathbf{p}_e N, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где  $\omega_{21} = \frac{W_2 - W_1}{\hbar}$  — частота перехода.

Вторая производная поляризации

$$\frac{d^2 \mathbf{P}^a}{dt^2} = -j\omega_{21} \left( \frac{da}{dt} b^* + a \frac{db^*}{dt} - \frac{da^*}{dt} b - a^* \frac{db}{dt} \right) \mathbf{p}_e N$$

или с учетом (8.12) и (8.13)

$$\frac{d^2 \mathbf{P}^a}{dt^2} = -\omega_{21}^2 (ab^* + a^*b) \mathbf{p}_e N + \frac{2\omega_{21}}{\hbar} (|a|^2 - |b|^2) N E p_e^2. \quad (8.17)$$

Согласно физическому смыслу элементов матрицы плотности величина

$$(|b|^2 - |a|^2) N = \Delta N' \quad (8.18)$$

представляет собой разность населенностей верхнего и нижнего уровней при наличии электромагнитного поля.

С учетом (8.15) и (8.18) выражение (8.17) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{P}^a}{dt^2} = -\omega_{21}^2 \mathbf{P}^a + \frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N' E p_e^2. \quad (8.19)$$

Производная по времени выражения (8.18) имеет вид

$$\frac{d\Delta N'}{dt} = \left( \frac{db}{dt} b^* + b \frac{db^*}{dt} - \frac{da}{dt} a^* - a \frac{da^*}{dt} \right) N,$$

или с учетом (8.12) и (8.13)

$$\frac{d\Delta N'}{dt} = -\frac{2j}{\hbar} (ab^* - a^*b) \mathbf{p}_e E N.$$

Сравнивая последнее выражение с (8.16), получаем

$$\frac{d\Delta N'}{dt} = \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{P}^a}{dt}. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.19) и (8.20) описывают изменения поляризации  $\mathbf{P}^a$  и разности населенностей уровней  $\Delta N'$  под действием электромагнитного поля. Однако причиной этих изменений является не только электромагнитное поле, но и релаксационные процессы, действие которых определяется функциями распределения (2.65) и (2.66):

• для  $\Delta N'$

$$f_1(\tau) = \frac{1}{T_1} \cdot e^{-\tau/T_1};$$

• для  $\mathbf{P}^a$

$$f_1(\tau) = \frac{1}{T_1} \cdot e^{-\tau/T_1},$$

Обычно в твердых диэлектриках релаксация инверсной населенности, определяемая временем продольной релаксации  $T_1$ , происходит значительно медленнее, чем релаксация поляризации, определяемая временем поперечной релаксации  $T_2$  ( $T_2 \ll T_1$ ). Это объясняется тем, что релаксация поляризации связана с изменением фазы волновой функции частицы, а релаксация населенности — с изменением ее энергии. В газах при низком давлении  $T_1 \approx T_2$ .

Вследствие релаксации частицы, принимающие участие в процессе усиления в данный момент времени  $t$ , имеют различное время  $\tau$  взаимодействия с полем. Выделяя из полной производной по времени  $t$  производную по времени  $\tau$ , получаем

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_{1,2}} \quad (8.21)$$

и

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_{1,2}} \right)^2. \quad (8.22)$$

Согласно (П.123) средние макроскопические значения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= \int_0^t \mathbf{P}^a(\tau, t) f_2(\tau) d\tau - \mathbf{P}_0^a; \\ \Delta N' &= \int_0^t \Delta N'(\tau, t) f_1(\tau) d\tau - \Delta N_0, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где  $\mathbf{P}_0^a$  и  $\Delta N_0$  — начальные значения, которые имеют величины  $\mathbf{P}^a$  и  $\Delta N'$  до начала процесса усиления (при  $\tau = 0$ ). Обычно  $\mathbf{P}_0^a = 0$ .

Величина  $\Delta N_0$  определяет усиление среды. Среда усиливает, если она находится в состоянии инверсной населенности, которая создается с помощью стороннего источника возбуждения. Эту населенность при отсутствии распространяющегося поля  $\mathbf{E}$  можно представить выражением

$$\Delta N_0 = \left( |b^0|^2 - |a^0|^2 \right) N.$$

Здесь  $|a^0|^2 = \rho_{11}^0$ ,  $|b^0|^2 = \rho_{22}^0$  — диагональные элементы матрицы плотности при отсутствии поля  $\mathbf{E}$ .

Усредняя выражения (8.19) и (8.20), с учетом (8.21) и (8.22) согласно (8.23) получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \omega_{21}^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) \mathbf{P}^a = -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} (\Delta N' + \Delta N_0) \mathbf{E} p_e^2;$$

$$\frac{\partial \Delta N'}{\partial t} + \frac{\Delta N'}{T_1} = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}^a}{T_2} \right).$$

Обозначая

$$\Delta N = \Delta N' + \Delta N_0$$

разность населенностей уровней, определяемую источником возбуждения и полем  $\mathbf{E}$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \omega_{21}^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) \mathbf{P}^a = -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N \mathbf{E} p_e^2;$$

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}^a}{T_2} \right).$$

Согласно последнему уравнению скорость изменения разности населенностей уровней зависит от напряженности распространяющегося поля  $\mathbf{E}$ . Вместе с уравнением (8.8) эти уравнения образуют замкнутую систему

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_a} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \omega_{21}^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) \mathbf{P}^a = -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N \mathbf{E} p_e^2; \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}^a}{T_2} \right).$$

Система уравнений (8.24) вместе с начальными условиями определяет распространение усиливаемого поля в активной среде. Если поле представляет собой плоскую волну линейной поляризации, распространяющуюся в направлении оси  $x$ , то уравнения (8.24) можно представить в скалярном виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_a} \frac{\partial^2 P^a}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 P^a}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P^a}{\partial t} + \omega_{21}^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) P^a = -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N E p_e^2; \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} E \left( \frac{\partial P^a}{\partial t} + \frac{P^a}{T_2} \right).$$

Практически любой электромагнитный процесс характеризуется спектром частот. Если напряженность поля  $\mathbf{E}$  и поляризация  $\mathbf{P}^a$  описываются абсолютно интегрируемыми функциями, то согласно преобразованию Фурье

$$\dot{E}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x, \omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega,$$

$$\dot{S}(x, \omega) = \int_0^{\infty} \dot{E}(x, t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Аналогичный вид имеют преобразования для поляризации  $\mathbf{P}^a$ .

Введя среднюю частоту спектра  $\omega_0$ , получим

$$\dot{E}(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x, \omega) \cdot e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega = \dot{E}_m(x, t) \cdot e^{j\omega_0 t},$$

где

$$\dot{E}_m(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x, \omega) \cdot e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega$$

— комплексная амплитуда, изменяющаяся во времени и в пространстве.

В общем случае

$$\dot{E}_m(x, t) = E_m(x, t) \cdot e^{j\varphi(x, t)}.$$

Монохроматическое поле частотой  $\omega_0$  определяется выражением

$$\dot{E}(x, t) = \dot{E}_m(x) \cdot e^{j\omega_0 t},$$

где  $\dot{E}_m(x)$  — комплексная амплитуда, не зависящая от времени.

Излучение в диапазоне сверхвысоких частот характеризуется очень узким спектром частот  $\Delta\omega$ . Отношение  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$  и комплексная амплитуда  $\dot{E}_m(x, t)$

медленно изменяются во времени по сравнению с  $e^{j\omega_0 t}$ . Такое поле называется квазимонохроматическим. Излучение в оптическом диапазоне характеризуется достаточно широким спектром частот  $\Delta\omega$ , однако отношение  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ , и это из-

лучение также можно рассматривать как квазимонохроматическое.

При распространении поля в усиливающей среде изменения амплитуд и фаз волны поля и волны поляризации малы на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода. Поэтому для решения системы (8.25) можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд и фаз (см. (П.94)):

$$E = E_m(t, x) \cos[\omega t - kx + \varphi(t, x)] = E_m \cos \Phi;$$

$$P^a = P_m^a(t, x) \cos[\omega t - kx + \psi(t, x)] = P_m^a \cos \Psi,$$

где  $E_m(t, x)$ ,  $P_m^a(t, x)$ ,  $\Phi(t, x)$ ,  $\Psi(t, x)$  — медленно меняющиеся во времени и в пространстве функции;  $\Phi = \omega t - kx + \varphi$ ;  $\Psi = \omega t - kx + \psi$ ;  $k = \omega/v$ .

Вычислим производные  $\frac{\partial E}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial P^a}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 P^a}{\partial t^2}$ , пренебрегая вследствие малости членами, содержащими вторые производные амплитуд и фаз и произведения их первых производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial E_m}{\partial t} \cos \Phi - \left( \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) E_m \sin \Phi; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -2\omega \frac{\partial E_m}{\partial t} \sin \Phi - \omega \left( \omega + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) E_m \cos \Phi; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= 2k \frac{\partial E_m}{\partial t} \sin \Phi - k \left( k - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) E_m \cos \Phi; \\ \frac{\partial P^a}{\partial t} &= \frac{\partial P_m^a}{\partial t} \cos \Psi - \left( \omega + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \sin \Psi; \\ \frac{\partial^2 P^a}{\partial t^2} &= -2\omega \frac{\partial P_m^a}{\partial t} \sin \Psi - \omega \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \cos \Psi.\end{aligned}$$

Подставим полученные значения в (8.25):

$$\begin{aligned}\left[ -2\omega \frac{\partial E_m}{\partial t} - 2\omega v \frac{\partial E_m}{\partial x} - \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \left( \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) E_m \right] \sin \Phi - \left[ -2\omega \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) E_m - \right. \\ \left. - \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \frac{\partial E_m}{\partial t} \right] \cos \Phi = 2 \frac{\omega}{\varepsilon_a} \frac{\partial P_m^a}{\partial t} \sin \Psi + \frac{\omega}{\varepsilon_a} \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \cos \Psi; \\ \left[ -2\omega \frac{\partial P_m^a}{\partial t} - \frac{2}{T_2} \left( \omega + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \right] \sin \Psi + \left[ -\omega \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P_m^a}{\partial t} + \right. \\ \left. + \omega_{21}^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) P_m^a \right] \cos \Psi = -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N p_e^2 E_m \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta H - \Delta N_0}{T_1} = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} E_m \cos \Phi \left[ \left( \frac{\partial P_m^a}{\partial t} + \frac{P_m^a}{T_2} \right) \cos \Psi - \left( \omega + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \sin \Psi \right].\end{aligned}$$

Учитывая тригонометрические соотношения

$$\begin{aligned}\Psi &= \Phi + (\psi - \varphi); \quad \Phi = \Psi + (\varphi - \psi); \\ \cos \Psi &= \cos(\psi - \varphi) \cos \Phi - \sin(\psi - \varphi) \sin \Phi; \\ \sin \Psi &= \cos(\psi - \varphi) \sin \Phi + \sin(\psi - \varphi) \cos \Phi; \\ \cos \Phi &= \cos(\psi - \varphi) \cos \Psi + \sin(\psi - \varphi) \sin \Psi; \\ \sin \Phi &= \cos(\psi - \varphi) \sin \Psi - \sin(\psi - \varphi) \cos \Psi; \\ 2 \sin \Phi \cos \Phi &= \sin 2\Phi; \quad \cos^2 \Phi = \frac{1 + \cos 2\Phi}{2}\end{aligned}\tag{8.25a}$$

и приравнявая друг к другу коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях и свободные члены, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} + v \frac{\partial E_m}{\partial x} + \frac{\sigma}{2\omega \epsilon_a} \left( \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) E_m &= -\frac{1}{\epsilon_a} \left[ \frac{\partial P_m^a}{\partial t} \cos(\psi - \varphi) - \frac{1}{2} \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \sin(\psi - \varphi) \right]; \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) E_m - \frac{\sigma}{2\epsilon_a \omega} \frac{\partial E_m}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_a} \left[ \frac{\partial P_m^a}{\partial t} \sin(\psi - \varphi) + \frac{1}{2} \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \cos(\psi - \varphi) \right]; \\ \frac{\partial P_m^a}{\partial t} + \frac{1}{\omega T_2} \left( \omega + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a &= \frac{\omega_{21}}{\hbar \omega} \Delta N p_e^2 E_m \sin(\psi - \varphi); \\ \frac{1}{2} \left( \omega + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a - \frac{1}{\omega T_2} \frac{\partial P_m^a}{\partial t} - \frac{\omega_{21}^2}{2\omega} \left( 1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2} \right) P_m^a &= \frac{\omega_{21}}{\omega \hbar} \Delta N p_e^2 E_m \cos(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= \frac{E_m}{\hbar \omega_{21}} \left[ \left( \frac{\partial P_m^a}{\partial t} + \frac{P_m^a}{T_2} \right) \cos(\psi - \varphi) - \left( \omega + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) P_m^a \sin(\psi - \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку в оптическом и СВЧ-диапазоне выполняются условия

$$\omega \gg \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \omega \gg \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \omega P_m^a \gg \frac{\partial P_m^a}{\partial t}; \quad \omega E_m \gg \frac{\partial E_m}{\partial t}; \quad \frac{1}{T_2} \ll \omega,$$

частота распространяющегося поля должна быть близка к частоте квантового перехода:

$$\omega \approx \omega_{21}.$$

Для диэлектрических сред с малыми потерями постоянная затухания согласна (2.45)

$$\alpha_n = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_a} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_3}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a v},$$

с учетом этого выражения получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} + v \frac{\partial E_m}{\partial x} + v \alpha_n E_m &= \frac{\omega}{2\epsilon_a} P_m^a \sin(\psi - \varphi); \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) E_m &= -\frac{\omega}{2\epsilon_a} P_m^a \cos(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial P_m^a}{\partial t} + \frac{P_m^a}{T_2} &= \frac{p_e^2}{\hbar} \Delta N E_m \sin(\psi - \varphi); \\ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\omega - \omega_{21}) \right] P_m^a &= \frac{p_e^2}{\hbar} \Delta N E_m \cos(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{1}{\hbar} P_m^a E_m \sin(\psi - \varphi). \end{aligned} \tag{8.26}$$



Решение этой системы уравнений позволяет определить амплитуды и фазы поляризации и напряженности поля, а также значение инверсной населенности.

В оптическом диапазоне ширина линии излучения рабочего квантового перехода достаточно велика, т. е.

$$\frac{P_m^a}{T_2} \gg \frac{\partial P_m^a}{\partial t}, \quad (8.27)$$

и уравнения (8.26) можно упростить.

Согласно третьему уравнению системы (8.26), с учетом (8.27)

$$P_m^a = \frac{P_e^2}{\hbar} T_2 \Delta N E_m \sin(\psi - \varphi). \quad (8.28)$$

Подставляя (8.28) в (8.26), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} + v \frac{\partial E_m}{\partial x} + v \alpha_n E_m &= \frac{\omega}{2\varepsilon_a \hbar} p_e^2 T_2 \Delta N E_m \sin^2(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\omega}{2\varepsilon_a \hbar} p_e^2 T_2 \Delta N \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\omega - \omega_{21}) &= \frac{1}{T_2} \operatorname{ctg}(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{P_e^2}{\hbar^2} T_2 \Delta N E_m^2 \sin^2(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (8.29)$$

В стационарном режиме

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \Delta N}{\partial t} = 0,$$

и система уравнений (8.29) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial x} + \alpha_n E_m &= \frac{\omega}{2\varepsilon_a \hbar v} p_e^2 T_2 \Delta N E_m \sin^2(\psi - \varphi); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\omega}{2\varepsilon_a \hbar v} p_e^2 T_2 \Delta N \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi); \\ \operatorname{ctg}(\psi - \varphi) &= T_2(\omega - \omega_{21}); \\ \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{P_e^2}{\hbar^2} T_2 \Delta N E_m^2 \sin^2(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Согласно третьему уравнению системы (8.30) получаем

$$\begin{aligned}\sin(\psi - \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2}}; \\ \cos(\psi - \varphi) &= \frac{T_2(\omega - \omega_{21})}{\sqrt{1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2}}.\end{aligned}\quad (8.31)$$

С учетом (8.31) систему уравнений (8.30) запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_m}{\partial x} + \alpha_n E_m &= \frac{\omega p_e^2 T_2 \Delta N E_m}{2 \varepsilon_a \hbar \nu [1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2]}; \\ \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{p_e^2 T_2 \Delta N E_m^2}{\hbar^2 [1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2]}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\omega p_e^2 T_2 \Delta N (\omega - \omega_{21})}{2 \varepsilon_a \hbar \nu [1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2]}.\end{aligned}\quad (8.32)$$

Решение первого уравнения системы (8.32) определяет изменение амплитуды поля при распространении в среде:

$$E_m = E_{m0} \cdot e^{(\alpha_{yc} - \alpha_{\text{пот}})x},$$

где

$$\alpha_{yc} = \frac{\omega p_e^2 T_2 \Delta N}{2 \varepsilon_a \hbar \nu [1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2]}\quad (8.33)$$

— коэффициент квантового усиления.

Согласно выражению (8.33) коэффициент квантового усиления возрастает с увеличением дипольного момента  $p_e$  и плотности инверсной населенности  $\Delta N$ , так как при этом увеличивается число излучающих частиц. Коэффициент квантового усиления зависит от частоты поля и имеет резонансный характер (рис. 8.7). Чем ближе частота  $\omega$  к частоте квантового перехода  $\omega_{21}$ , тем больше коэффициент квантового усиления. Ширина резонансной кривой равна  $2/T_2$ . Согласно второму уравнению (8.32) стационарная инверсная населенность

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{p_e^2 T_1 T_2}{\hbar^2 [1 + T_2^2(\omega - \omega_{21})^2]} E_m^2},\quad (8.34)$$

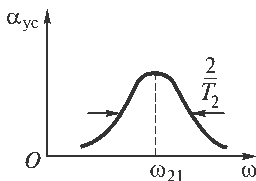


Рис. 8.7. Контур усиления

т. е. зависит от начальной инверсной населенности  $\Delta N_0$ , которая создается сторонним источником возбуждения. По мере распространения волны в активной среде  $E_m^2$  увеличивается, а инверсная населенность  $\Delta N$  уменьшается, квантовый коэффициент усиления  $\alpha_{yc} \rightarrow 0$  и происходит насыщение.

Подставляя (8.34) в (8.33), получаем

$$\alpha_{\text{ус}} = \frac{\omega p_e^2 T_2 \Delta N_0}{2\varepsilon_a v \left\{ \hbar [1 + T_2^2 (\omega - \omega_{21})^2] + \frac{1}{\hbar} p_e^2 T_1 T_2 E_m^2 \right\}}. \quad (8.35)$$

Волна, распространяясь в активной среде, усиливается при условии

$$\alpha_{\text{ус}} > \alpha_{\text{пот}}. \quad (8.36)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы начальная инверсная населенность превышала пороговое значение, которое определяется из условий

$$\alpha_{\text{ус}} = \alpha_{\text{пот}}; \quad E_m = E_{m0},$$

и потери в среде компенсируются излучением частиц.

Согласно (8.35) пороговая инверсная населенность

$$\Delta N_{0\text{пор}} = 2\varepsilon_a v \alpha_{\text{п}} \left\{ \frac{\hbar}{\omega p_e^2 T_2} [1 + T_2^2 (\omega - \omega_{21})^2] + \frac{T_1}{\omega \hbar} E_{m0}^2 \right\},$$

т. е. пороговое значение начальной плотности инверсной населенности уменьшается с увеличением дипольного момента  $p_e$ , так как мощность излучения частиц растет с увеличением  $p_e$  и уменьшением расстройки относительно частоты перехода  $\omega_{21}$ .

Переходя в уравнениях (8.29) с учетом (8.31) к интенсивностям, с которыми обычно оперируют в оптическом диапазоне, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} + v \frac{\partial J}{\partial x} &= v [\sigma(\omega) \Delta N - 2\alpha_{\text{пот}}] J; \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -2\sigma(\omega) J \Delta N; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= (\omega_{21} - \omega) \frac{T_2}{2} v \sigma(\omega) \Delta N, \end{aligned} \quad (8.37)$$

где

$$J = \frac{\varepsilon_a v}{2\hbar\omega_{21}} E_m^2$$

— средняя плотность мощности излучения (фотонов/(м<sup>2</sup>·с)), интенсивность;

$$\sigma(\omega) = \frac{T_2 \omega_{21} p_e^2}{\varepsilon_a \hbar v [1 + (\omega - \omega_{21})^2 T_2^2]}$$

— сечение радиационного перехода на частоте  $\omega$ , определяемое отношением мощности, поглощенной одной частицей, к мощности падающего излучения на единицу площади.

Первое уравнение системы (8.37) описывает изменение интенсивности поля при его распространении. Первый член правой части этого уравнения определяет увеличение интенсивности распространяющегося поля за счет индуцированного излучения, второй член — уменьшение интенсивности за счет потерь.

Второе уравнение системы (8.37) определяет изменение разности населенностей уровней в единицу времени. Член  $\frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1}$  характеризует уменьшение

разности населенностей уровней за счет релаксационных процессов и ее увеличение в результате возбуждения внешним источником. Член  $2\sigma(\omega)J\Delta N$  характеризует уменьшение разности населенностей за счет индуцированного излучения. Появление множителя 2 в правой части уравнения объясняется тем, что в двухуровневой системе излучение происходит при переходе одной частицы с верхнего уровня на нижний. При этом населенность верхнего уровня уменьшается на единицу, а нижнего увеличивается на единицу. В результате разность населенностей при таком переходе изменяется на 2.

Третье уравнение системы (8.37) определяет изменение фазы в процессе распространения волны.

Часто пользуются только двумя первыми уравнениями системы (8.37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} + v \frac{\partial J}{\partial x} &= v[\sigma(\omega)\Delta N - 2\alpha_{\text{пот}}]J; \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -2\sigma(\omega)J\Delta N, \end{aligned} \quad (8.38)$$

которые называются кинетическими или скоростными, так как они характеризуют скорость передачи энергии от среды полю по мере распространения волны.

В стационарном режиме

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial \Delta N}{\partial t} = 0,$$

и уравнения (8.38) принимают вид

$$\frac{\partial J}{\partial x} = [\sigma(\omega)\Delta N - 2\alpha_{\text{пот}}]J; \quad (8.39)$$

$$\frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} = -2\sigma(\omega)J\Delta N. \quad (8.40)$$

Решение уравнения (8.39)

$$J = J_0 e^{[\sigma(\omega)\Delta N - 2\alpha_{\text{пот}}]x}$$

определяет усиление интенсивности волны при распространении в активной среде. Усиление происходит, если показатель степени этого выражения положителен, т. е.

$$\alpha_{\text{пот}} < \frac{\sigma(\omega)\Delta N}{2},$$

что соответствует условию (8.36).

Согласно уравнению (8.40) стационарное значение инверсной населенности

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + 2\sigma(\omega)T_1 J}, \quad (8.41)$$

т. е. инверсная населенность, создаваемая источником возбуждения, уменьшается при увеличении интенсивности усиливаемой волны. При очень большой интенсивности инверсная населенность стремится к нулю (насыщение).

Пороговое значение начальной инверсной населенности

$$\Delta N_{0 \text{ пор}} = 2\alpha_{\text{пот}} \left[ \frac{1}{\sigma(\omega)} + 2T_1 J_0 \right], \quad (8.42)$$

где  $J_0$  — начальное значение интенсивности поля.

При небольших значениях начальной интенсивности распространяющейся в среде волны и такой длине пройденного пути, при которой значение интенсивности усиливаемой волны намного меньше предельного значения при насыщении, инверсная населенность  $\Delta N$  и коэффициент усиления  $\alpha_{\text{ус}}$  согласно (8.34) и (8.35) практически постоянны. При прохождении волной участков одинаковой длины она усиливается одинаково (линейный режим).

При больших значениях начальной интенсивности или достаточно большой длине пути, пройденного усиливаемой волной в активной среде, индуцированное излучение настолько велико, что инверсная населенность  $\Delta N$  согласно (8.34) и коэффициент квантового усиления  $\alpha_{\text{ус}}$  согласно (8.35) уменьшаются. При прохождении равных участков пути усиление становится все меньше и меньше (нелинейный режим) и при достижении предельного значения интенсивности волны усиление прекращается (насыщение).

Распространение импульсного сигнала в активной среде зависит от его начальной интенсивности (рис. 8.8, а). В линейном режиме при малой интенсивно-

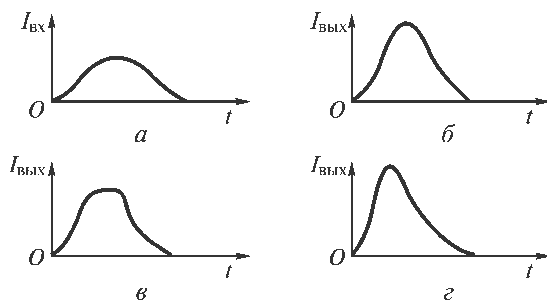
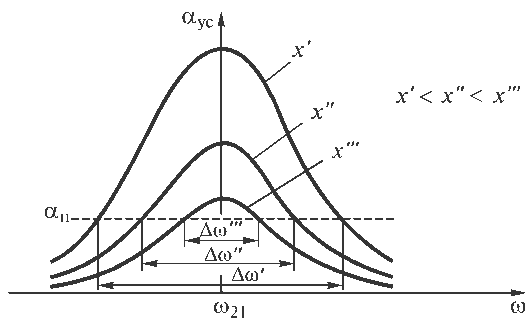


Рис. 8.8. Распространение импульса в активной среде:

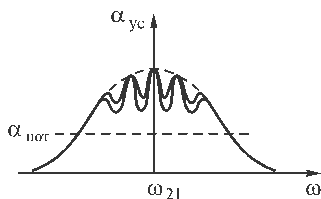
а — импульс на входе в активную среду; б — линейный режим; в — импульс, прошедший расстояние  $l > l_{\text{кр}}$  при малой входной интенсивности; г — при большой входной интенсивности и  $l > l_{\text{кр}}$



**Рис. 8.9.** Сужение спектра при распространении поля в активной среде с однородно уширенной линией излучения

сти на входе в активную среду и длине пройденного в активной среде пути, меньшей критического значения, при которой интенсивность распространяющегося сигнала достигает предельного значения, импульс проходит этот путь без искажений (рис. 8.8, б). Если пройденный путь больше критического, то эффекты насыщения проявляются и при малой начальной интенсивности. В режиме насыщения различные части импульса усиливаются неодинаково. Передняя часть импульса снижает инверсную населенность при распространении, и усиление остальной части импульса становится меньше. Поэтому передний фронт импульса становится круче, а вершина более плоской (рис. 8.8, в). При увеличении начальной интенсивности импульса эти эффекты проявляются резче, импульс обостряется (рис. 8.8, г).

При распространении электромагнитного поля в активной среде происходит изменение его спектрального состава. По мере распространения поля увеличивается его интенсивность, что приводит к увеличению индуцированных переходов и уменьшению инверсной населенности, а следовательно, согласно (8.33) и к уменьшению коэффициента усиления  $\alpha_{yc}$ . При однородном уширении линии излучения (см. § П.17) увеличение интенсивности распространяющейся волны приводит к пропорциональному уменьшению усиления для всех частот (рис. 8.9). У волны, прошедшей небольшое расстояние  $x'$ , интенсивность будет небольшой, инверсная населенность уменьшится незначительно и коэффициент усиления среды  $\alpha'_{yc}$  будет значительным. При этом усили-



**Рис. 8.10.** Изменение контура неоднородно уширенной линии при усилении электромагнитного поля

ваются спектральные составляющие в полосе  $\Delta\omega'$ . При увеличении пройденного расстояния до  $x''$  коэффициент усиления уменьшится до  $\alpha''_{yc}$  и усиление будет наблюдаться в меньшей полосе  $\Delta\omega''$ , т. е. произойдет монохроматизация излучения.

При неоднородно уширенной линии излучения (см. § П.17) взаимодействие распространяющегося поля происходит не со всеми частицами среды, а лишь с теми из них, в контуры линий излучения кото-

рых попадают спектральные составляющие поля (рис. 8.10). При увеличении пути, проходимого волной в среде, провалы углубляются, инверсная населенность и коэффициент усиления уменьшаются, уменьшается число спектральных составляющих поля и излучение монохроматизируется.

### 8.3. Усиление в резонаторе

Потери в резонаторе, заполненном активной средой, определяют распределенной проводимостью  $\sigma$ . Эта величина характеризует потери в активной среде, стенках или зеркалах резонатора и потери на излучение из резонатора. В этом случае электромагнитное поле в резонаторе, как и в случае усиления бегущей волны в активной среде, определяется первым уравнением системы (8.24)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_a} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2}. \quad (8.43)$$

Однако решение этого уравнения следует искать в виде пространственных стоячих волн. Учитывая, что в резонаторах оптического и СВЧ-диапазона поле зависит от продольной координаты и слабо зависит от поперечных координат, решение можно представить в виде

$$\mathbf{E}(x_3, t) = \sum \mathbf{E}_n(t) \sin k_n x_3, \quad (8.44)$$

где  $n$  — номер типа колебаний;  $k_n = n\pi/L$  — продольное волновое число  $n$ -го типа колебаний;  $L$  — длина резонатора.

Подставляя (8.44) в (8.43), получаем

$$\sum \sin k_n x_3 \left[ \frac{d^2 \mathbf{E}_n(t)}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \frac{d\mathbf{E}_n(t)}{dt} + v^2 k_n^2 \mathbf{E}_n(t) \right] = -\frac{1}{\epsilon_a} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^a(x_3, t)}{\partial t^2}.$$

Умножая правую и левую части этого уравнения на  $\sin k_n x_3$  и усредняя по длине резонатора, получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_n(t)}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \frac{d\mathbf{E}_n(t)}{dt} + v^2 k_n^2 \mathbf{E}_n(t) = -\frac{1}{\epsilon_a} \frac{d^2 \mathbf{P}_n^a(t)}{dt^2}, \quad (8.45)$$

где

$$\mathbf{P}_n^a(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \mathbf{P}^a(x_3, t) \sin k_n x_3 dx_3.$$

Собственные колебания резонатора при наличии потерь характеризуются комплексными величинами

$$\dot{\omega}_{nc} = \omega_n + j \frac{\omega}{2Q_n},$$

где

$$Q_n = \frac{\varepsilon'_a(\omega_n)}{\varepsilon''_a(\omega_n)} = \frac{\varepsilon'_a(\omega_n)\omega_n}{\sigma(\omega_n)} \quad (8.46)$$

— добротность  $n$ -го типа колебаний;

$$\omega_n = k_n v \quad (8.47)$$

— резонансная частота  $n$ -го типа колебаний;

$$\omega_{nc} = \omega_n \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_n^2}} \quad (8.48)$$

— собственная частота  $n$ -го типа колебаний.

Подставляя (8.46) и (8.47) в (8.45), получаем уравнение, которое вместе со вторым и третьим уравнениями системы (8.24) образует систему уравнений для исследования усиления в резонаторе с активной средой:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{E}_n(t)}{dt^2} + \frac{\omega_n}{Q_n} \frac{d\mathbf{E}_n(t)}{dt} + \omega_n^2 \mathbf{E}_n(t) &= -\frac{1}{\varepsilon_a} \frac{d^2 \mathbf{P}_n^a(t)}{dt^2}; \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}^a}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \omega_{21}^2 \left(1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2}\right) \mathbf{P}^a &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N E p_e^2; \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= \frac{2}{\hbar \omega_{21}} \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{P}^a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}^a}{T_2} \right), \end{aligned} \quad (8.49)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(x_3, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(t) \sin k_n x_3; \\ \mathbf{P}_n^a(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L \mathbf{P}^a(x_3, t) \sin k_n x_3 dx_3. \end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда в резонаторе возбуждается только один тип колебаний с линейной поляризацией поля  $\mathbf{E}$ , направление векторов напряженности поля  $\mathbf{E}$  и поляризации совпадает, распределения напряженности поля, поляризации и инверсной населенности по длине резонатора равномерные. В этом случае систему уравнений (8.49) можно переписать в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{\omega_p}{Q_p} \frac{dE}{dt} + \omega_p^2 E &= -\frac{1}{\varepsilon_a} \frac{d^2 P^a}{dt^2}; \\ \frac{d^2 P^a}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{dP^a}{dt} + \omega_{21}^2 \left(1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2}\right) P^a &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \Delta N E p_e^2; \\ \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= \frac{2}{\hbar \omega_{21}} E \left( \frac{dP^a}{dt} + \frac{P^a}{T_2} \right), \end{aligned} \quad (8.50)$$



где  $\omega_p$  и  $Q_p$  — резонансная частота и добротность резонатора для выделенного единственного типа колебаний.

Уравнения (8.50) описывают колебания поля в резонаторе с частотой  $\omega_p$  и колебания поляризации с частотой квантового перехода  $\omega_{21}$ . Эти колебания можно рассматривать как колебания в двух связанных системах. Поэтому если значения  $\omega_p$  и  $\omega_{21}$  не равны, но близки друг к другу, то в резонаторе устанавливаются колебания с некоторой промежуточной частотой  $\omega$  (затягивание частоты).

Представим электрическое поле  $E$  и поляризацию  $P^a$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\dot{E}_m(t) \cdot e^{j\omega t} + \dot{E}_m^*(t) \cdot e^{-j\omega t}}{2}; \\ P^a &= \frac{\dot{P}_m^a(t) \cdot e^{j\omega t} + \dot{P}_m^{a*}(t) \cdot e^{-j\omega t}}{2}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

где  $\dot{E}_m(t)$  и  $\dot{P}_m^a(t)$  — медленно меняющиеся во времени комплексные амплитуды.

Величина

$$\omega_{21} \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_{21}^2 T_2^2}} = \omega_{\pi}, \quad (8.52)$$

входящая во второе уравнение системы (8.50), представляет собой собственную частоту линии излучения. Действительно, величина  $2/T_2$  определяет ширину линии излучения,  $\omega_{21}$  — резонансная частота и

$$Q_{\pi} = \frac{\omega_{21} T_2}{2}$$

— добротность линии излучения.

Отсюда аналогично (8.48) находим

$$\omega_{\pi} = \omega_{21} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{\pi}^2}}.$$

Подставляя (8.51) в уравнения для поля и поляризации системы (8.50), с учетом (8.52) получаем

$$\left[ (\omega^2 - \omega_{\pi}^2)(\omega^2 - \omega_p^2) - \frac{2\omega^2 \omega_p}{T_2 Q_p} \right] - j \left[ \frac{\omega \omega_p}{Q_p} (\omega^2 - \omega_{\pi}^2) + \frac{2\omega}{T_2} (\omega^2 - \omega_p^2) \right] = -\frac{2\omega_{21} \omega^2}{\hbar \epsilon_a} \Delta N p_e^2.$$

Поскольку правая часть полученного уравнения является действительной величиной, то мнимая часть должна быть равна нулю, откуда

$$\frac{\omega_p}{Q_p} (\omega^2 - \omega_{\pi}^2) + \frac{2}{T_2} (\omega^2 - \omega_p^2) = 0$$

или, так как  $\omega \approx \omega_{\pi} \approx \omega_{21}$  и  $\omega \approx \omega_p$ , то

$$(\omega - \omega_{21}) \approx \frac{2}{T_2} \frac{Q_p}{\omega_p} (\omega_p - \omega) = \frac{\Delta\omega_n}{\Delta\omega_p} (\omega_p - \omega). \quad (8.53)$$

Величина  $\frac{2}{T_2} = \Delta\omega_n$  определяет ширину линии излучения, а  $\frac{\omega_p}{Q_p} = \Delta\omega_p$  —

ширину резонансной кривой резонатора. В зависимости от соотношения ширины полос резонатора  $\Delta\omega_p$  и линии излучения  $\Delta\omega_n$  частота  $\omega$  расположена ближе к частоте перехода  $\omega_{21}$  или к резонансной частоте  $\omega_p$ . При регенеративном усилении частоту усиливаемого поля, а при генерировании собственную частоту резонатора подстраивают под частоту линии рабочего перехода.

Применяя метод медленно меняющихся амплитуд и фаз, решение системы (8.50) будем искать в виде

$$\begin{aligned} E &= E_m(t) \cos[\omega_n t + \varphi(t)] = E_m \cos \Phi; \\ P^a &= P_m^a(t) \cos[\omega_n t + \psi(t)] = P_m^a \cos \Psi, \end{aligned}$$

где  $E_m(t)$ ,  $P_m^a(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  — медленно меняющиеся во времени амплитуды и фазы;  $\Phi = \omega_n t + \varphi(t)$ ;  $\Psi = \omega_n t + \psi(t)$ .

Вычислим производные  $\frac{dE}{dt}$ ,  $\frac{d^2 E}{dt^2}$ ,  $\frac{dP^a}{dt}$ ,  $\frac{d^2 P^a}{dt^2}$ , пренебрегая вследствие малости членами, содержащими вторые производные амплитуд и фаз и произведения их первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dE_m}{dt} \cos \Phi - \left( \omega_n + \frac{d\varphi}{dt} \right) E_m \sin \Phi; \\ \frac{d^2 E}{dt^2} &= -2\omega_n \frac{dE_m}{dt} \sin \Phi - \omega_n \left( \omega_n + 2 \frac{d\varphi}{dt} \right) E_m \cos \Phi; \\ \frac{dP^a}{dt} &= \frac{dP_m^a}{dt} \cos \Psi - \left( \omega_n + \frac{d\psi}{dt} \right) P_m^a \sin \Psi; \\ \frac{d^2 P^a}{dt^2} &= -2\omega_n \frac{dP_m^a}{dt} \sin \Psi - \omega_n \left( \omega_n + 2 \frac{d\psi}{dt} \right) P_m^a \cos \Psi. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в (8.50) и пренебрегая малыми членами, получаем

$$\begin{aligned} \left[ (\omega_p^2 - \omega_n^2) - 2\omega_n \frac{d\varphi}{dt} \right] E_m \cos \Phi - \left( 2\omega_n \frac{dE_m}{dt} + \frac{\omega_n \omega_p}{Q_p} E_m \right) \sin \Phi &= \frac{\omega_n^2 P_m^a}{\epsilon_a} \cos \Psi; \\ -2\omega_n \frac{d\psi}{dt} P_m^a \cos \Psi - 2\omega_n \left( \frac{dP_m^a}{dt} + \frac{1}{T_2} P_m^a \right) \sin \Psi &= -\frac{2\omega_n}{\hbar} \Delta N p_c^2 E_m \cos \Phi; \\ \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{2}{\hbar \omega_{21}} E_m P_m^a \cos \Phi \sin \Psi. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Учитывая в (8.54) тригонометрические соотношения (8.25а) и приравнивая коэффициенты при соответствующих косинусах, синусах и свободные члены, получаем

$$\begin{aligned}
 \left[ (\omega_p^2 - \omega_n^2) - 2\omega_n \frac{d\varphi}{dt} \right] E_m &= \frac{\omega_n^2 P_m^a}{\varepsilon_a} \cos(\psi - \varphi); \\
 2 \frac{dE_m}{dt} + \frac{\omega_p}{Q_p} E_m &= \frac{\omega_n P_m^a}{\varepsilon_a} \sin(\psi - \varphi); \\
 P_m^a \frac{d\psi}{dt} &= \frac{P_e^2}{\hbar} \Delta N E_m \cos(\psi - \varphi); \\
 \frac{dP_m^a}{dt} + \frac{1}{T_2} P_m^a &= \frac{P_e^2}{\hbar} \Delta N E_m \sin(\psi - \varphi); \\
 \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{E_m P_m^a}{\hbar} \sin(\psi - \varphi).
 \end{aligned} \tag{8.55}$$

Поскольку  $\omega_n \approx \omega_p$ , то

$$\frac{\omega_p^2 - \omega_n^2}{2\omega_n} = \frac{(\omega_p - \omega_n)(\omega_p + \omega_n)}{2\omega_n} \approx \omega_p - \omega_n.$$

Учитывая это соотношение в первом уравнении системы (8.55), перепишем систему в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_m}{dt} &= -\frac{\omega_p}{2Q_p} E_m + \frac{\omega_n}{2\varepsilon_a} P_m^a \sin(\psi - \varphi); \\
 \frac{dP_m^a}{dt} &= -\frac{1}{T_2} P_m^a + \frac{P_e^2}{\hbar} \Delta N E_m \sin(\psi - \varphi); \\
 \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{E_m P_m^a}{\hbar} \sin(\psi - \varphi); \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= (\omega_p - \omega_n) - \frac{\omega_n}{2\varepsilon_a} \frac{P_m^a}{E_m} \cos(\psi - \varphi); \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{P_e^2}{\hbar} \Delta N \frac{E_m}{P_m^a} \cos(\psi - \varphi).
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

Система (8.56) описывает как стационарные, так и нестационарные процессы. В этих уравнениях поле и инверсная населенность усреднены и не зависят от координат. Учет пространственных вариаций поля и инверсной населенности значительно усложняет задачу, результаты же незначительно отличаются от результатов, полученных при пространственном усреднении.

Для оптического диапазона уравнения можно упростить, учитывая, что ширина линии излучения  $\Delta\omega_{\text{л}}$  намного больше ширины резонансного пика  $\Delta\omega_{\text{р}}$  и

$$\frac{P_m^a}{T_2} \gg \frac{dP_m^a}{dt}.$$

При этом согласно второму уравнению системы (8.56)

$$P_m^a = \frac{P_e^2}{\hbar} T_2 \Delta N E_m \sin(\psi - \varphi),$$

и систему (8.56) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= -\frac{\omega_{\text{р}}}{2Q_{\text{р}}} E_m + \frac{\omega_{\text{л}} P_e^2}{2\hbar \epsilon_a} T_2 \Delta N E_m \sin^2(\psi - \varphi); \\ \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{P_e^2}{\hbar^2} T_2 \Delta N E_m^2 \sin^2(\psi - \varphi); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= (\omega_{\text{р}} - \omega_{\text{л}}) - \frac{\omega_{\text{л}} P_e^2}{2\hbar \epsilon_a} T_2 \Delta N \cos(\psi - \varphi) \sin(\psi - \varphi); \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{T_2} \text{ctg}(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (8.57)$$

Скоростные, или кинетические, уравнения, аналогичные (8.38), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} + \frac{\omega_{\text{р}}}{Q_{\text{р}}} J &= \nu \sigma(\omega) \Delta N J; \\ \frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -2\sigma(\omega) J \Delta N, \end{aligned} \quad (8.58)$$

где

$$J = \frac{\epsilon_a \nu}{2\hbar \omega_{21}} E_m^2$$

— интенсивность излучения;

$$\sigma(\omega) = \frac{T_2 \omega_{21} P_e^2}{\epsilon_a \hbar \nu [1 + (\omega - \omega_{21})^2 T_2^2]}$$

— сечение радиационного перехода.

Первое уравнение системы (8.58) описывает изменение интенсивности колебаний в резонаторе во времени. Здесь величина  $\frac{\omega_{\text{р}}}{Q_{\text{р}}} J$  характеризует умень-

шение интенсивности за счет потерь в резонаторе;  $\nu \sigma(\omega) \Delta N J$  — увеличение интенсивности за счет индуцированного излучения. Влиянием спонтанного излучения ввиду его малости пренебрегаем.

Второе уравнение (8.58) описывает изменение разности населенностей уровней во времени. Здесь слагаемое

$$\frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1}$$

характеризует уменьшение инверсной населенности за счет релаксационных процессов и ее увеличение за счет источника возбуждения. Член  $2\sigma(\omega) J \Delta N$  определяет уменьшение инверсной населенности за счет индуцированного излучения. Множитель «2» появляется вследствие того, что в двухуровневой системе при переходе одной частицы с верхнего уровня на нижний и излучении одного фотона разность населенностей уровней изменяется на 2.

Кинетические, или скоростные, уравнения (8.58) в отличие от (8.57) не определяют изменение фазы поля и поэтому не используются для описания различных нестационарных процессов.

При работе в стационарном режиме

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

и система уравнений (8.57) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_p}{2Q_p} E_m + \frac{\omega_n P_e^2}{2\hbar \epsilon_a} T_2 \Delta N E_m \sin^2(\psi - \varphi) &= 0; \\ \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -\frac{P_e^2}{\hbar^2} T_2 \Delta N E_m^2 \sin^2(\psi - \varphi); \\ (\omega_p - \omega_n) - \frac{\omega_p P_e^2}{2\hbar \epsilon_a} T_2 \Delta N \cos(\psi - \varphi) \sin(\psi - \varphi) &= 0; \\ \frac{1}{T_2} \operatorname{ctg}(\psi - \varphi) &= 0. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Согласно последнему уравнению системы (8.59)

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

т. е. поляризация опережает поле по фазе на  $\pi/2$  и энергия от среды передается полю. При этом уравнения системы (8.59) имеют вид

$$-\frac{\omega_p}{2Q_p} + \frac{\omega_n p_e^2}{2\hbar\epsilon_a} T_2 \Delta N = 0;$$

$$\frac{\Delta N_0 - \Delta N}{T_1} = \frac{p_e^2}{\hbar^2} T_2 \Delta N E_m^2; \quad (8.60)$$

$$\omega_p - \omega_n = 0.$$

Отсюда в стационарном режиме

$$\Delta N = \frac{\hbar\epsilon_a}{Q_p p_e^2 T_2}; \quad (8.61)$$

$$E_m^2 = \frac{\hbar Q_p}{T_1 \epsilon_a} \left( \Delta N_0 - \frac{\hbar\epsilon_a}{Q_p p_e^2 T_2} \right). \quad (8.62)$$

При генерировании амплитуда  $E_m$  отлична от нуля, что в соответствии с (8.62) возможно при условии

$$\Delta N_0 \geq \frac{\hbar\epsilon_a}{Q_p p_e^2 T_2}.$$

Знак равенства в этом выражении соответствует пороговой инверсной населенности. Таким образом, пороговая инверсная населенность

$$\Delta N_{0 \text{ пор}} = \frac{\hbar\epsilon_a}{Q_p p_e^2 T_2}. \quad (8.63)$$

Подставляя (8.63) в (8.62), получаем окончательное выражение для амплитуды поля в резонаторе:

$$E_m^2 = \frac{\hbar Q_p}{T_1 \epsilon_a} (\Delta N_0 - \Delta N_{0 \text{ пор}}). \quad (8.64)$$

Согласно выражению (8.64), чем больше добротность резонатора и превышение значения инверсной населенности, создаваемой источником возбуждения, порогового значения, тем больше амплитуда поля в резонаторе.

Стационарное значение разности населенностей в резонаторе согласно (8.61) и (8.63) равно пороговому значению:

$$\Delta N = \Delta N_{0 \text{ пор}}.$$

Пороговая инверсная населенность создается при пороговой мощности источника возбуждения. Казалось бы, что при мощности возбуждения больше по-

роговой значение инверсной населенности  $\Delta N$  должно превышать пороговое значение  $\Delta N_{0\text{пор}}$ ; однако этого не происходит, так как при увеличении мощности возбуждения возрастает число частиц в единицу времени, покидающих верхний уровень. При этом инверсная населенность поддерживается на постоянном уровне  $\Delta N_{0\text{пор}}$ , а энергия, запасаемая резонатором, и мощность на выходе увеличиваются.

Для стационарного режима

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d\Delta N}{dt} = 0$$

и кинетические уравнения (8.58) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p}{Q_p} J &= \nu \sigma(\omega) \Delta N J; \\ \frac{\Delta N - \Delta N_0}{T_1} &= -2\sigma(\omega) J \Delta N. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Отсюда стационарное значение инверсной населенности

$$\Delta N_{\text{стац}} = \frac{\omega_p}{Q_p \nu \sigma(\omega)}, \quad (8.66)$$

а интенсивности излучения

$$J_{\text{стац}} = \frac{1}{2\sigma(\omega)T_1} (\Delta \tilde{N}_0 - 1), \quad (8.67)$$

где  $\Delta \tilde{N}_0 = \frac{\Delta N_0}{\Delta N_{\text{стац}}}$  — начальная нормированная инверсная населенность, создаваемая источником возбуждения.

Кинетические уравнения (8.58) удобно представить в нормированных величинах:

$$\Delta \tilde{N} = \frac{\Delta N}{\Delta N_{\text{стац}}}; \quad \Delta \tilde{N}_0 = \frac{\Delta N_0}{\Delta N_{\text{стац}}}; \quad \tilde{J} = \frac{J}{J_{\text{стац}}},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}}{dt} + \frac{\omega_p}{Q_p} \tilde{J} &= \frac{\omega_p}{Q_p} \tilde{J} \Delta \tilde{N}; \\ \frac{d\Delta \tilde{N}}{dt} + \frac{\Delta \tilde{N} - \Delta \tilde{N}_0}{T_1} &= -\frac{\Delta \tilde{N}_0 - 1}{T_1} \tilde{J} \Delta \tilde{N}. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Здесь  $\Delta\tilde{N}$  — нормированная инверсная населенность в единице объема;  $\tilde{J}$  — нормированная интенсивность излучения;  $T_1$  — время жизни возбужденных состояний при наличии источника возбуждения.

Уравнения (8.68) справедливы, если ширина линии излучения намного больше ширины резонансной кривой резонатора. Эти уравнения пригодны для случая однородно уширенной линии. В них не учтено спонтанное излучение, которое сравнимо с индуцированным излучением лишь в начальный момент генерирования. В стационарном режиме интенсивность индуцированного излучения на много порядков превышает спонтанное.

Запишем уравнения (8.68) для стационарного режима:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p}{Q_p} \tilde{J}(1 - \Delta\tilde{N}) &= 0; \\ \frac{\Delta\tilde{N} - \Delta\tilde{N}_0}{T_1} + \frac{\Delta\tilde{N}_0 - 1}{T_1} \tilde{J} \Delta\tilde{N} &= 0. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что эти уравнения имеют два решения

$$\Delta\tilde{N} = \tilde{J} = 1; \quad (8.69)$$

$$\Delta\tilde{N} = \Delta\tilde{N}_0; \quad \tilde{J} = 0. \quad (8.70)$$

Решение (8.70) соответствует отсутствию колебаний ( $\tilde{J} = 0$ ), поэтому устойчивым стационарным колебаниям соответствует только решение (8.69). Исследуем на устойчивость решение (8.69) (см. § П.18). Зададим малые отклонения от стационарного значения:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(t) &= 1 + \delta i(t); \\ \Delta\tilde{N}(t) &= 1 + \delta n(t), \end{aligned} \quad (8.71)$$

где  $\delta \ll 1$ . Подставляя (8.71) в (8.68) и ограничиваясь членами первого порядка малости по  $\delta$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{\omega_p}{Q_p} n; \\ \frac{dn}{dt} + \frac{\Delta\tilde{N}_0}{T_1} n &= \frac{1 - \Delta\tilde{N}_0}{T_1} i. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$k^2 + \frac{\Delta\tilde{N}_0}{T_1} k - \frac{\omega_p}{Q_p T_1} (1 - \Delta\tilde{N}_0) = 0.$$

Корни этого уравнения



$$k_{1,2} = -\frac{\Delta\tilde{N}_0}{2T_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\tilde{N}_0}{2T_1}\right)^2 + \frac{\omega_p}{Q_p T_1}(1 - \Delta\tilde{N}_0)}$$

имеют отрицательные действительные части при

$$\Delta\tilde{N}_0 > 1, \quad (8.72)$$

следовательно, выражение (8.72) является условием существования стационарных колебаний в резонаторе.

Аналогично можно показать, что решение (8.70), соответствующее отсутствию колебаний, устойчиво при

$$\Delta\tilde{N}_0 < 1.$$

Условие

$$\Delta\tilde{N}_0 = 1$$

является пороговым, так как при  $\Delta\tilde{N}_0 > 1$  колебания существуют, а при  $\Delta\tilde{N}_0 < 1$  отсутствуют.

Согласно (8.66)

$$\Delta N_{0 \text{ пор}} = \frac{\omega_p}{Q_p \sigma(\omega) v}.$$

Роль источника возбуждения сводится к поддержанию в среде достаточно высокой начальной инверсной населенности, чтобы выполнялось условие (8.72). Если источник возбуждения перестает работать, населенность уровней стремится к тепловому равновесию  $\Delta N_{\text{равн}}$  с постоянной времени  $T_1$ . При переходе одной частицы с верхнего уровня на нижний и излучении кванта энергии  $\hbar\omega_{21}$  разность населенностей уровней изменяется на 2. Эти переходы происходят и при работе источника возбуждения, действие которого сводится к компенсации убыли частиц, связанной с этими переходами. Плотность мощности возбуждения, требуемая для поддержания инверсной населенности  $\Delta N_0$  в единице объема активной среды,

$$P_{\text{возб}} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2} \left( \frac{\Delta N_0 - \Delta N_{\text{равн}}}{T_1} \right).$$

Отсюда найдем пороговую плотность мощности возбуждения

$$P_{\text{пор.возб}} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2} \left( \frac{\Delta N_{0 \text{ пор}} - \Delta N_{\text{равн}}}{T_1} \right). \quad (8.73)$$

Для вывода излучения из резонатора зеркала изготавливают полупрозрачными. За счет неполного отражения от зеркал происходит уменьшение энергии, запасенной в резонаторе, которое характеризуется выражением

$$w(t) = w(0) \cdot e^{-t/\tau_3}, \quad (8.74)$$

где  $w(t)$  — плотность энергии, запасенной в резонаторе;  $w(0)$  — плотность энергии в момент времени  $t = 0$ ;  $\tau_3$  — время релаксации энергии за счет неполного отражения от зеркал.

Условие существования стационарного режима — это условие баланса амплитуд (см. § 8.1)

$$\Gamma_1 \Gamma_2 e^{2(\alpha_{\text{yc}} - \alpha_{\text{н}})l} = 1. \quad (8.75)$$

При однократном отражении электромагнитной волны от каждого зеркала амплитуда уменьшается, но это уменьшение компенсируется усилением в активной среде при прохождении волной расстояния, равного удвоенной длине резонатора.

Время прохождения волной расстояния, равного двум длинам резонатора,

$$t = \frac{2l}{v},$$

где  $l$  — длина резонатора;  $v$  — скорость распространения электромагнитной волны. Уменьшение запасенной энергии в результате неполного отражения от зеркал согласно (8.74) и (8.75) определяется выражением

$$\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 = e^{-2l/(v\tau_3)},$$

откуда время релаксации энергии

$$\tau_3 = -\frac{l}{v \ln \Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (8.76)$$

Мощность излучения, приходящаяся на единицу объема активной среды, в соответствии с (8.74) равна

$$P_{\text{изл}} = -\frac{dw}{dt} = -\frac{w(0)}{\tau_3}.$$

В стационарном режиме

$$w = \frac{\hbar \omega_{21} J_{\text{стац}}}{v},$$

или с учетом (8.67)

$$w = \frac{\hbar \omega_{21}}{2\sigma(\omega) T_1 v} (\Delta \tilde{N}_0 - 1),$$

и мощность излучения (отнесенная к единице объема активной среды)

$$P_{\text{изл}} = \frac{\hbar \omega_{21}}{2\sigma(\omega) T_1 v \tau_3} (\Delta \tilde{N}_0 - 1).$$

Условие работы резонатора в режиме регенеративного усиления определяется выражением (8.5). Введение положительной обратной связи приводит к повышению коэффициента усиления и уменьшению полосы пропускания.

#### 8.4. Электромагнитная волна в электронном потоке

При взаимодействии электромагнитного поля с электронным потоком, если поток тормозится полем, энергия поля увеличивается. Монохроматическое поле будет тормозить электроны только в течение той половины периода, в которой направление электрической составляющей совпадает с направлением движения электронов. При этом поле усиливается за счет излучения электронов.

Если поток электронов непрерывен, то часть электронов тормозится высокочастотным полем, а часть ускоряется. В этом случае поток разбивается на группы (рис. 8.11). Процесс группировки электронов зависит от соотношения скорости электронов  $v_0$  и фазовой скорости  $v_\phi$  электромагнитной волны. Если бы электроны не взаимодействовали с полем и  $v_0 = v_\phi$  (рис. 8.11, а), то они синхронно перемещались бы с полем и все время находились в точках с одним и тем же значением напряженности и направлением электрической составляющей поля бегущей волны (пунктирные прямые на рис. 8.11, а). При взаимодействии с полем электроны, находящиеся в области тормозящего поля, тормозятся и отстают от бегущей волны. Электроны, находящиеся в области ускоряющего поля, ускоряются и опережают волну. В результате электроны образуют сгустки в области, где продольное поле  $E$  равно нулю. При дальнейшем движении сгустков электронов скорость их остается неизменной, электроны и поле не взаимодействуют.

Как уже было показано (см. § 2.5), усиление электромагнитного поля при взаимодействии с потоком электронов происходит при условии  $v_0 > v_\phi$ . Действительно, если  $v_0 > v_\phi$  (рис. 8.11, б), то при отсутствии взаимодействия электронов с полем они опережают волну (пунктирные прямые на рис. 8.11, б). При взаимодействии с волной электроны, находящиеся в ускоряющем поле, ускоряются и перемещаются в область тормозящего поля. Таким образом, электроны группируются в области тормозящего поля и отдают свою энергию распространяющемуся полю.

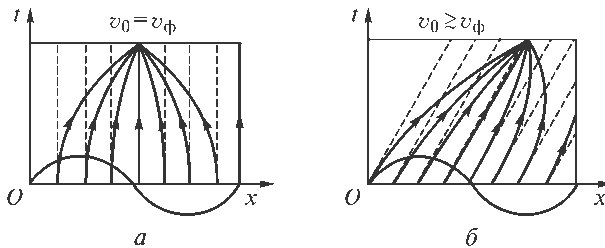


Рис. 8.11. Группировка электронов в сгустки в поле бегущей волны:

а — группировка в области поля  $E = 0$ ; б — группировка в области максимального тормозящего поля  $E$

Поскольку скорость электронов в процессе взаимодействия с полем уменьшается, то ступок по мере движения отстает от волны. Различие скоростей  $v_0$  и  $v_\phi$  должно быть таким, чтобы за время движения в пространстве взаимодействия электронов с полем ступок не вышел из области тормозящего поля.

Для эффективного взаимодействия ступка электронов с полем необходимо, чтобы фаза распространяющегося поля в месте нахождения ступка соответствовала максимальному значению тормозящего поля в любой момент времени. Условие постоянства фазы высокочастотного поля по отношению к электронным ступкам означает, что фазовая скорость  $v_\phi$  волны должна быть приблизительно равна скорости электронов  $v_0$ . Условие

$$v_0 \geq v_\phi$$

называют условием волнового синхронизма электронов и бегущей волны. Поскольку скорость электронов в практических устройствах намного меньше скорости света, то для выполнения условия синхронизма используются замедляющие системы.

Электронные ступки должны занимать как можно меньше места в пространстве, и частота их следования должна равняться частоте поля. Однако на практике не удастся получить ступки идеальной формы, изображенной на рис. 8.12. В промежутках между ступками плотность потока электронов хотя и меньше, чем в ступках, но не равна нулю. Получение возможно более коротких, близких к прямоугольной форме ступков — одна из проблем электроники сверхвысоких частот. Требование, чтобы протяженность каждого ступка электронов  $\Delta x$  в направлении движения электронов была намного меньше половины длины волны, ограничивает возможности создания генераторов и усилителей в коротковолновой части СВЧ-диапазона.

Для обеспечения свободного движения электронного потока создается вакуум с давлением менее  $10^{-4}$  Па.

Процессы усиления и генерирования в СВЧ-диапазоне согласно (1.17) описываются волновым уравнением

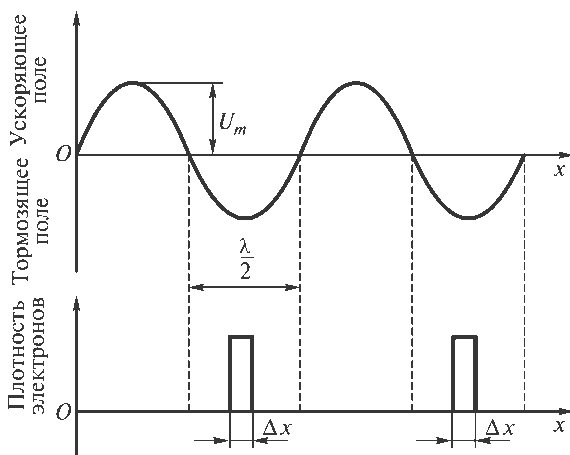


Рис. 8.12. Распределение высокочастотного поля и ступков электронов в пространстве

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (8.77)$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{кон}} = \rho \mathbf{v}_0$  — конвекционный ток (ток переноса);  $\rho$  — объемная плотность зарядов.

Правая часть уравнения (8.77) определяется уравнением движения электронов

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\{\mathbf{E} + \mu_0[\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]\}. \quad (8.78)$$

Напряженности электрического и магнитного полей в выражении (8.78) могут иметь как постоянные, так и переменные составляющие. Однако практически учитывают переменную составляющую только электрического поля, так как при  $v_0 \ll c$  действие на электрон магнитной составляющей поля намного меньше, чем электрической.

В системах, где происходит взаимодействие поля с потоком электронов, возбуждаются E-поля, т. е. имеющие продольную составляющую электрического поля. Таким образом, в линейном приближении уравнение (8.78) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E_3,$$

где  $E_3$  — продольная составляющая электрического поля, совпадающая с направлением движения электронов.

Система уравнений (8.77) и (8.78) должна быть дополнена граничными условиями для электрического и магнитного полей и начальными условиями — значениями начальных скоростей электронов на фиксированных поверхностях.

Кроме основных уравнений (8.77) и (8.78) важную роль при анализе работы электронных приборов сверхвысоких частот играет уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Взаимодействие высокочастотного электромагнитного поля с электронным потоком лежит в основе работы лампы бегущей волны (ЛБВ), клистронов и магнетронов.

## Вопросы

1. По мере распространения электромагнитной волны в активной среде характер усиления ее изменяется. На какие три области по характеру изменения амплитуды поля можно разделить среду?
2. Что характерно для области насыщения?

3. Назовите условия усиления бегущей волны, регенеративного усиления и генерирования.
4. Какие величины называются пороговыми? Что это за величины?
5. Назовите два условия, определяющие возможность существования стационарного режима в активном резонаторе.
6. От чего зависит число типов колебаний резонатора, выходящих в излучение?
7. Дайте определение понятию «естественная ширина линии излучения».
8. Что влияет на действительную ширину линии излучения?
9. Какая линия излучения называется однородно уширенной, а какая — неоднородно уширенной?
10. Почему изменяется форма импульса по мере распространения в активной среде?
11. Почему изменяется спектр электромагнитного поля по мере распространения в активной среде?
12. Назовите условия наиболее эффективного взаимодействия электромагнитной волны с потоком электронов, в результате чего происходит усиление электромагнитного поля?

### Задачи

1. Определите оптимальный коэффициент отражения зеркал активного резонатора, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Коэффициент усиления на проход  $\alpha_{\text{ус}} = 0,1 \text{ см}^{-1}$ , коэффициент потерь на проход  $\alpha_{\text{пот}} = 0,01 \text{ см}^{-1}$ , длина резонатора  $l = 10 \text{ см}$ . Резонатор полностью заполнен активной средой.
2. Определите коэффициент квантового усиления  $\alpha_{\text{ус.пор}}$ , необходимый для возникновения процесса генерирования в резонаторе длиной 10 см, образованном зеркалами с коэффициентами отражения  $\Gamma_1 = 1$  и  $\Gamma_2 = 0,9$  и полностью заполненным активной средой. Потерями в среде и зеркалах (за исключением потерь на излучение) пренебречь.
3. Активная среда, полностью заполняющая резонатор, характеризуется коэффициентами квантового усиления  $\alpha_{\text{ус}}$  и потерь  $\alpha_{\text{пот}}$ . Коэффициенты отражения  $\Gamma$  зеркал, образующих резонатор, одинаковые. Определите отношение излучаемой мощности к мощности потерь в активной среде. Покажите, что при длине резонатора, большей некоторого критического значения, излучение прекращается.
4. Исследуйте стационарный режим активного резонатора с одним возбуждаемым типом колебаний на устойчивость, считая, что частота линии излучения и собственная частота резонатора совпадают.

## 9. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

### 9.1. Уравнения длинной линии

Во многих практически важных случаях, когда волноводы используются для передачи энергии от генератора к нагрузке, нет необходимости в определении электромагнитного поля в каждой точке объема волновода с помощью уравнений Максвелла и удовлетворения граничным условиям. Для инженерных расчетов можно воспользоваться более простыми методами теории электрических цепей с распределенными параметрами. Основными величинами этой теории являются интегральные характеристики электромагнитного поля (ток и напряжение).

Рассмотрим двухпроводную линию, образованную двумя цилиндрическими проводниками, близко расположенными друг от друга (рис. 9.1) на расстоянии  $d$

$$d \ll \lambda,$$

длиной

$$l \gg \lambda,$$

где  $\lambda$  — длина волны распространяющегося электромагнитного поля. Такую линию называют длинной линией.

Ток в разных сечениях линии в один и тот же момент времени различен, электрическая и магнитная энергия непрерывно распределены вдоль линии.

Наличие тока в проводниках связано с магнитным полем, и линию в терминах теории цепей можно характеризовать некоторой индуктивностью. Подобно конденсатору, линия способна запасать энергию электрического поля, что определяется ее емкостью. Проводники линии обладают активным сопротивлением. В связи с неидеальностью окружающей среды между проводами возникает ток утечки, который определяется проводимостью среды.

Длинную линию характеризуют погонные параметры (параметры, отнесенные к единице длины): индуктивность  $L_0$  (Гн/м), емкость  $C_0$  (Ф/м), сопротивление  $R_0$  (Ом/м) и проводимость  $G_0$  (См/м) между проводами. Линию называют однородной, если ее погонные

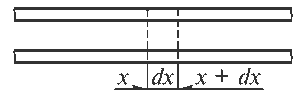


Рис. 9.1. Двухпроводная линия

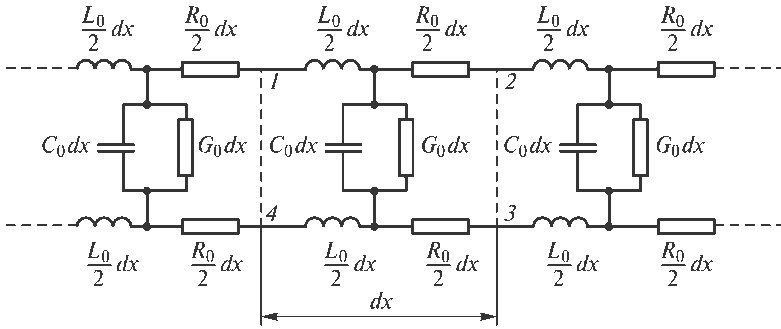


Рис. 9.2. Эквивалентная схема двухпроводной линии

параметры одинаковы по всей длине. Значения погонных параметров зависят от конфигурации проводников в поперечном сечении и свойств среды. Они рассчитываются методами теории электромагнитного поля или определяются экспериментально путем измерений. Эквивалентная схема линии приведена на рис. 9.2.

Каждый участок линии  $dx$  характеризуется сопротивлением  $R_0 dx$ , емкостью  $C_0 dx$ , индуктивностью  $L_0 dx$ , проводимостью  $G_0 dx$ . На протяжении малого участка  $dx$  ток считаем неизменным.

Изменение напряжения вдоль линии определим с помощью интегрального уравнения (II') и рис. 9.2:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (9.1)$$

Контур  $L$  состоит из отрезков проводов 1—2 и 4—3 (см. рис. 9.2)

$$\int_{1-2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{1-2} \mathbf{J} d\mathbf{l} = \frac{iR_0}{2} dx; \quad \int_{3-4} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{iR_0}{2} dx$$

и отрезков 4—1 и 2—3, соединяющих провода по кратчайшей прямой в поперечных сечениях  $x$  и  $x + dx$ ,

$$\int_{2-3} \mathbf{E} d\mathbf{l} = u(x + dx) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad \int_{4-1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -u(x),$$

где  $u(x)$  и  $u(x + dx)$  — напряжения между проводами соответственно в сечении  $x$  и  $x + dx$ .

Таким образом,

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + iR_0 dx. \quad (9.2)$$

Магнитный поток  $\Phi$ , проходящий через площадку, ограниченную контуром  $L$ , равен



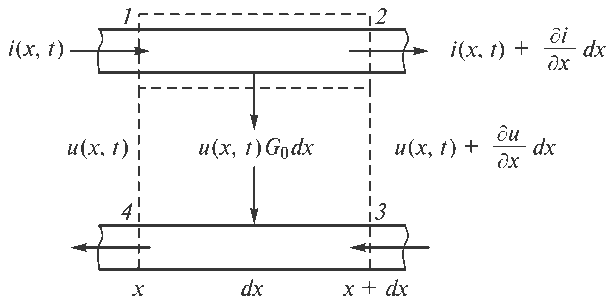


Рис. 9.3. К выводу телеграфных уравнений

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_0 dx = L_0 i dx. \quad (9.3)$$

Здесь  $\Phi_0$  — магнитный поток, приходящийся на единицу длины линии. Он состоит из потока между проводами и потока внутри проводов.

Подставляя выражения (9.2) и (9.3) в уравнение (9.1), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0, \quad (9.4)$$

т. е. напряжение между проводами вдоль линии изменяется вследствие падения напряжения из-за индуктивности и активного сопротивления проводов.

Изменение тока вдоль линии определим с помощью уравнения непрерывности в интегральной форме (V') (см. § 1.5)

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \quad (9.5)$$

применив его к элементу объема, обозначенному на рис. 9.3 пунктирной линией.

Левая часть уравнения (9.5) представляет собой сумму интегралов по поперечным сечениям  $x$ ,  $x + dx$  и боковой поверхности участка провода длиной  $dx$ . На протяжении малого участка линии  $dx$  напряжение считаем неизменным:

$$\begin{aligned} \int_{S(x+dx)} \mathbf{J} d\mathbf{S} &= i(x+dx) = i(x) + \frac{\partial i}{\partial x} dx; \\ \int_{S(x)} \mathbf{J} d\mathbf{S} &= -i(x); \\ \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{J} d\mathbf{S} &= u(x, t) G_0 dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = \frac{\partial i}{\partial x} dx + u(x, t) G_0 dt. \quad (9.6)$$

Правая часть уравнения (9.5) связана с изменением заряда в межпроводной емкости участка линии длиной  $dx$ , что также влияет на различие токов  $i(x)$  и  $i(x + dx)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial C_0 dx u(x, t)}{\partial t} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx. \quad (9.7)$$

Подставляя выражения (9.6) и (9.7) в уравнение (9.5), получаем

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + u G_0 = 0, \quad (9.8)$$

т. е. ток изменяется вдоль линии вследствие тока утечки и заряда межпроводной емкости линии.

Уравнения (9.4) и (9.8) образуют систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i &= 0; \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 u &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

описывающую электромагнитный процесс в пространстве и во времени. Их вывел английский физик В. Томсон в середине XIX в. при изучении электромагнитных процессов в кабельных линиях телеграфной связи. Поэтому их называют телеграфными уравнениями.

Уравнения (9.9) и эквивалентная схема (см. рис. 9.2) непосредственно относятся к ленточной линии и коаксиальному волноводу при близко расположенных проводниках и распространении электромагнитного поля, имеющего только поперечные составляющие (Т-волна).

При гармоническом источнике возбуждения электромагнитного поля в линии уравнения (9.9) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} &= 0; \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} + (G_0 + j\omega C_0) \dot{U} &= 0, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где  $\dot{U}$ ,  $\dot{I}$  — действующие значения напряжения и тока соответственно.

Продифференцировав первое уравнение системы (9.10) по  $x$  и подставив значение  $\frac{\partial \dot{I}}{\partial x}$  из второго уравнения системы, получим

$$\frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} - (j\omega L_0 + R_0)(j\omega C_0 + G_0)\dot{U} = 0.$$

Аналогично, продифференцировав второе уравнение системы (9.19) по  $x$  и подставив значение  $\frac{\partial \dot{U}}{\partial x}$  из первого уравнения системы, получим

$$\frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} - (j\omega C_0 + G_0)(j\omega L_0 + R_0)\dot{I} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} + k_0^2 \dot{U} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} + k_0^2 \dot{I} &= 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Здесь

$$k_0 = \pm \omega \sqrt{\left(L_0 - j \frac{R_0}{\omega}\right) \left(C_0 - j \frac{G_0}{\omega}\right)} \quad (9.12)$$

— постоянная распространения.

Общее решение системы уравнений (9.11) представляется в виде двух волн, распространяющихся вдоль линии в противоположных направлениях,

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{jk_0 x}; \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x} + \dot{I}_{\text{отр}} e^{jk_0 x} \end{aligned} \quad (9.13)$$

или, поскольку  $k_0 = \beta - j\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-\alpha x} e^{-\beta x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{\alpha x} e^{\beta x}; \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{-\alpha x} e^{-\beta x} + \dot{I}_{\text{отр}} e^{\alpha x} e^{\beta x}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где  $\dot{U}_{\text{пад}}$ ,  $\dot{U}_{\text{отр}}$ ,  $\dot{I}_{\text{пад}}$ ,  $\dot{I}_{\text{отр}}$  — произвольные комплексные постоянные;  $\alpha$  — постоянная затухания, характеризует ослабление на единицу длины,  $\text{м}^{-1}$ ;  $\beta$  — фазовая постоянная, характеризует изменение фазы на единицу длины,  $\text{м}^{-1}$ .

Первые слагаемые в выражениях (9.14) для линий с потерями ( $\alpha \neq 0$ ) представляют собой волну, распространяющуюся вдоль линии в сторону возрастания  $x$  (от источника к нагрузке) с затуханием. Это — падающая, или прямая, волна. Вторые слагаемые представляют собой волну, возрастающую по амплитуде с увеличением  $x$  (с приближением к концу линии). Это — отраженная, или обратная, волна.

Отношение комплексного действующего значения напряжения к комплексному действующему значению тока падающей волны определяет волновое, или характеристическое, сопротивление линии

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{\dot{I}_{\text{пад}}(x)}.$$

Считая, что отраженной от конца линии волны нет, т. е.

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\text{пад}}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x}; \\ \dot{I}_{\text{пад}}(x) &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x},\end{aligned}\tag{9.15}$$

подставляя выражения (9.15) в уравнения (9.10) с учетом (9.12), получаем

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \frac{R_0 + j\omega L_0}{jk_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}.\tag{9.16}$$

Отношение комплексного действующего значения напряжения к комплексному действующему значению тока отраженной волны имеет вид

$$\frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{\dot{I}_{\text{отр}}(x)} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{отр}}} = \frac{R_0 + j\omega L_0}{-jk_0} = -\sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = -Z_0.\tag{9.17}$$

Таким образом, решения (9.13) системы уравнений (9.11) с учетом выражений (9.16) и (9.17) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{jk_0 x}; \\ \dot{I}(x) &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} e^{-jk_0 x} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_0} e^{jk_0 x}.\end{aligned}\tag{9.18}$$

Чтобы определить постоянную затухания  $\alpha$  и фазовую постоянную  $\beta$ , возведем постоянную распространения  $k_0$  (см. (9.12)) в квадрат и, выделяя действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \left( L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2} \right); \\ 2\alpha\beta &= \omega^2 \left( \frac{R_0 C_0}{\omega} + \frac{G_0 L_0}{\omega} \right).\end{aligned}\tag{9.19}$$

Отсюда

$$\beta = \pm \omega \sqrt{\frac{\left( L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2} \right) + \sqrt{\left( L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{C_0 R_0}{\omega} + \frac{G_0 L_0}{\omega} \right)^2}}{2}};\tag{9.20}$$

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{-\left(L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2}\right) + \sqrt{\left(L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{C_0 R_0}{\omega} + \frac{G_0 L_0}{\omega}\right)^2}}{2}}. \quad (9.21)$$

Из второго уравнения системы (9.19) следует, что  $\beta$  и  $\alpha$  имеют одинаковые знаки. Знак «+» соответствует распространению волны в положительном направлении оси  $x$  с затухающей амплитудой, а знак «-» — в направлении отрицательных значений  $x$  с затухающей амплитудой.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$$

зависит от частоты, т. е. линия обладает дисперсией. Сложный сигнал, передаваемый линией, искажается.

Однако если выполняется условие

$$L_0 G_0 = R_0 C_0,$$

то согласно (9.20)

$$\beta = \pm \omega \sqrt{\frac{\left(L_0 C_0 - \frac{G_0 R_0}{\omega^2}\right) + \left(L_0 C_0 + \frac{G_0 R_0}{\omega^2}\right)}{2}} = \pm \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

и фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

не зависит от частоты.

Постоянная затухания  $\alpha$  согласно (9.21) определяется выражением

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{-\left(L_0 C_0 - \frac{R_0 G_0}{\omega^2}\right) + \left(L_0 C_0 + \frac{R_0 G_0}{\omega^2}\right)}{2}} = \sqrt{R_0 G_0},$$

т. е. также не зависит от частоты.

Таким образом, и в линии с потерями сигнал ослабляется, но не искажается, так как все составляющие спектра распространяются вдоль линии с одинаковыми фазовыми скоростями и затуханием.

Волновое сопротивление линии согласно (9.16)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Рассмотрим случаи, реализуемые на практике.

**Линия без потерь.** При идеальной изоляции между проводниками ( $G_0 = 0$ ) и отсутствии в них потерь ( $R_0 = 0$ ), как и следовало ожидать согласно выражениям (9.21) и (9.20)

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (9.22)$$

т. е. не зависит от частоты.

На первый взгляд кажется, что, уменьшая значения  $L_0$  и  $C_0$ , можно получить фазовую скорость сколь угодно большой. Однако это не так. При уменьшении значения  $L_0$  за счет сближения проводов (при снижении магнитного потока, ограниченного линией) емкость  $C_0$  увеличивается.

Волновое сопротивление линии согласно (9.16)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

т. е. волновое сопротивление линии без потерь имеет характер активного сопротивления, и волны тока и напряжения, распространяющиеся в одном направлении, совпадают по фазе.

Погонная емкость  $C_0$  двухпроводной линии

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_a}{\ln(d/r)},$$

где  $d$  — расстояние между проводниками;  $r$  — радиус провода;  $\epsilon_a$  — диэлектрическая проницаемость среды.

Погонная индуктивность двухпроводной линии

$$L_0 = \frac{\mu_a}{\pi} \ln \frac{d}{r}.$$

Здесь  $\mu_a$  — магнитная проницаемость среды.

Таким образом,

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}},$$

т. е. фазовая скорость определяется лишь параметрами среды, в которой распространяется электромагнитное поле.

Волновое сопротивление линии

$$Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \ln \frac{d}{r},$$

т. е. определяется параметрами среды и геометрией линии.

**Линия с малыми потерями.** В линиях с малыми потерями

$$R_0 \ll \omega L_0; \quad G_0 \ll \omega C_0.$$

Эти условия на практике выполняются в диапазоне сверхвысоких частот.

Пользуясь приближенной формулой

$$(1+a)^2 \approx 1 + \frac{a}{2},$$

Когда значение  $a$  малó, пренебрегая членом, содержащим в знаменателе  $\omega^4$ , из (9.20) и (9.21) получаем

$$\begin{aligned} \beta &= \pm \omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{G_0 R_0}{L_0 C_0 \omega^2} + 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_0^2}{\omega^2 L_0^2} + \frac{G_0^2}{\omega^2 C_0^2} \right)}{2}} = \\ &= \pm \omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{\omega L_0} - \frac{G_0}{\omega C_0} \right)^2}{2}} \approx \pm \omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{8 \omega^2} \left( \frac{R_0}{L_0} - \frac{G_0}{C_0} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{\frac{\frac{G_0 R_0}{\omega L_0 C_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{R_0^2}{\omega^2 L_0^2} + \frac{G_0^2}{\omega^2 C_0^2} \right)}{2}} = \\ &= \pm \frac{\omega \sqrt{L_0 C_0}}{2} \left( \frac{R_0}{\omega L_0} + \frac{G_0}{\omega C_0} \right) = \pm \frac{1}{2} \left( R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right), \end{aligned} \quad (9.24)$$

т. е. постоянная затухания  $\alpha$  от частоты практически не зависит.

Если проводимость среды мала, то

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}.$$

Воспользовавшись приближенной формулой

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$$

при малом значении  $a$  и выражением (9.23), определим фазовую скорость:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \left[ 1 - \frac{1}{8 \omega^2} \left( \frac{R_0}{L_0} - \frac{G_0}{C_0} \right)^2 \right],$$

следовательно, фазовая скорость зависит от частоты и с ростом частоты увеличивается.

При малом затухании согласно формуле (9.16) и приближенным формулам

$$(1-a)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{a}{2} \text{ и } (1-a)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{a}{2}$$

волновое сопротивление будет равно

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \sqrt{\frac{1 - j \frac{R_0}{\omega L_0}}{1 - j \frac{G_0}{\omega C_0}}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \left[ 1 - j \left( \frac{R_0}{2\omega L_0} - \frac{G_0}{2\omega C_0} \right) \right].$$

Таким образом, и при малых потерях при распространении вдоль линии некогерентный сигнал будет искажаться.

В отличие от рассмотренных линий поперечные размеры волноводов сравнимы с длиной волны, и в общем случае электромагнитное поле представляет собой сумму бесконечного числа типов. Однако на практике поперечные размеры и возбуждение волноводов таковы, что распространяется только основной тип волны. В этом случае волновод можно представить эквивалентной схемой (см. рис. 9.2), отождествив поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей с напряжением и током. Если в волноводе распространяется несколько типов волн, то каждому типу будут соответствовать своя эквивалентная схема, свой ток и свое напряжение.

## 9.2. Отражения от конца линии. Коэффициент отражения

В общем случае решения (9.13) волновых уравнений (9.11) представляются в виде двух волн, распространяющихся вдоль линии в противоположных направлениях. Причиной возникновения волны, бегущей к источнику, является отражение. Волна может отражаться от конца замкнутой или разомкнутой линии, или от конца линии, нагруженной на сопротивление.

Пусть линия нагружена на сопротивление  $Z_H$ . Целесообразно конец линии совместить с началом координат  $x = 0$  и отсчитывать расстояния вдоль линии в направлении от нагрузки к источнику энергии, т.е. в направлении отрицательных значений координаты  $x$  (рис. 9.4). В этом случае решения (9.13) будет иметь вид



Рис. 9.4. Линия, нагруженная на сопротивление  $Z_H$



$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{jk_0 x'} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{-jk_0 x'}; \\ \dot{i}(x') &= \frac{1}{Z_0} \left( \dot{U}_{\text{пад}} e^{jk_0 x'} - \dot{U}_{\text{отр}} e^{-jk_0 x'} \right) \end{aligned} \quad (9.25)$$

или, поскольку

$$\dot{k}_0 = \beta - j\alpha,$$

то

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{\alpha x'} e^{j\beta x'} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{-\alpha x'} e^{-j\beta x'}; \\ \dot{i}(x') &= \dot{i}_{\text{пад}} e^{\alpha x'} e^{j\beta x'} + \dot{i}_{\text{отр}} e^{-\alpha x'} e^{-j\beta x'}. \end{aligned}$$

Первые слагаемые представляют собой падающие волны. По мере удаления от источника (значение  $x'$  уменьшается) амплитуды волн тока и напряжения уменьшаются по экспоненте. Вторые слагаемые представляют собой отраженные волны. По мере приближения к источнику (с возрастанием значения  $x'$ ) амплитуды волн уменьшаются.

Отражения в линии характеризуются коэффициентами отражения по напряжению или току. Коэффициент отражения по напряжению в сечении линии  $x'$  определяется отношением комплексных действующих значений напряжений отраженной и падающей волн:

$$\Gamma_u(x') = \frac{\dot{U}_{\text{отр}} e^{-jk_0 x'}}{\dot{U}_{\text{пад}} e^{jk_0 x'}} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} e^{-j2k_0 x'} = \Gamma_u e^{-j2k_0 x'}, \quad (9.26)$$

где  $\Gamma_u = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \Gamma_u(x=0)$  — коэффициент отражения по напряжению при  $x=0$ .

Коэффициент отражения по току в сечении линии  $x'$  определяется отношением комплексных действующих значений тока отраженной и падающей волн:

$$\Gamma_i(x') = \frac{\dot{i}_{\text{отр}} e^{-jk_0 x'}}{\dot{i}_{\text{пад}} e^{jk_0 x'}} = \frac{\dot{i}_{\text{отр}}}{\dot{i}_{\text{пад}}} e^{-j2k_0 x'} = \Gamma_i e^{-j2k_0 x'}.$$

Здесь  $\Gamma_i = \frac{\dot{i}_{\text{отр}}}{\dot{i}_{\text{пад}}} = \Gamma_i(x=0)$  — коэффициент отражения по току при  $x=0$ .

Согласно решению для тока (9.25)

$$\Gamma_i(x') = -\frac{\dot{U}_{\text{отр}} e^{-jk_0 x'}}{\dot{U}_{\text{пад}} e^{jk_0 x'}} = -\Gamma_u e^{-j2k_0 x'}.$$

Сравнивая последнее выражение с (9.26), получаем

$$\Gamma_u(x') = -\Gamma_i(x'); \quad \Gamma_u = -\Gamma_i.$$

На практике обычно используют коэффициент отражения по напряжению и нижний индекс «и» опускают:

$$\Gamma(x') = \Gamma e^{-j2kx'} = \Gamma e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}.$$

Коэффициент отражения  $\Gamma$  — комплексная величина:

$$\Gamma = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}} e^{j\varphi}, \quad (9.27)$$

где  $\varphi$  — изменение фазы волны при отражении.

Учитывая комплексный характер коэффициента отражения  $\Gamma(x')$ , его можно представить в виде

$$\Gamma(x') = |\Gamma(x')| e^{j\psi}.$$

Здесь

$$|\Gamma(x')| = |\Gamma| e^{-2\alpha x'}; \quad \psi = \varphi - 2\beta x'.$$

На конце линии согласно (9.25)

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}; \\ \dot{I}(0) &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}). \end{aligned}$$

Сопротивление нагрузки

$$Z_{\text{н}} = -\frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = Z_0 \frac{\dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}.$$

Отсюда

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{н}} - Z_0}{Z_{\text{н}} + Z_0}, \quad (9.28)$$

т. е. коэффициент отражения  $\Gamma$  зависит только от соотношения между сопротивлением нагрузки  $Z_{\text{н}}$  и волновым сопротивлением  $Z_0$ .

Учитывая, что

$$\Gamma = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}},$$

решения (9.25) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}} (e^{jk_0 x'} + \Gamma e^{-jk_0 x'}); \\ \dot{I}(x') &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} (e^{jk_0 x'} - \Gamma e^{-jk_0 x'}). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Если потерями в линии можно пренебречь ( $\alpha = 0$ ), то решения (9.29) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}}(e^{j\beta x'} + \Gamma e^{-j\beta x'}); \\ \dot{i}(x') &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0}(e^{j\beta x'} - \Gamma e^{-j\beta x'}).\end{aligned}\quad (9.30)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

**Линия без потерь короткозамкнутая на конце.** В этом случае

$$Z_{\text{н}} = 0.$$

Согласно (9.28)

$$\Gamma = -1,$$

и решения (9.30) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}}(e^{j\beta x'} - e^{-j\beta x'}) = j2\dot{U}_{\text{пад}} \sin \beta x'; \\ \dot{i}(x') &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0}(e^{j\beta x'} + e^{-j\beta x'}) = 2\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} \cos \beta x'\end{aligned}$$

или, поскольку  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то

$$\begin{aligned}\dot{U}(x') &= j2\dot{U}_{\text{пад}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{i}(x') &= 2\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'.\end{aligned}\quad (9.31)$$

В полученных выражениях (9.31) нет множителя распространения. Результирующее напряжение и ток образуют стоячие волны. Точки максимумов (пучности) и минимумов (узлы) с течением времени не меняют своего положения.

Положения узлов напряжения и пучностей тока определяются из условий

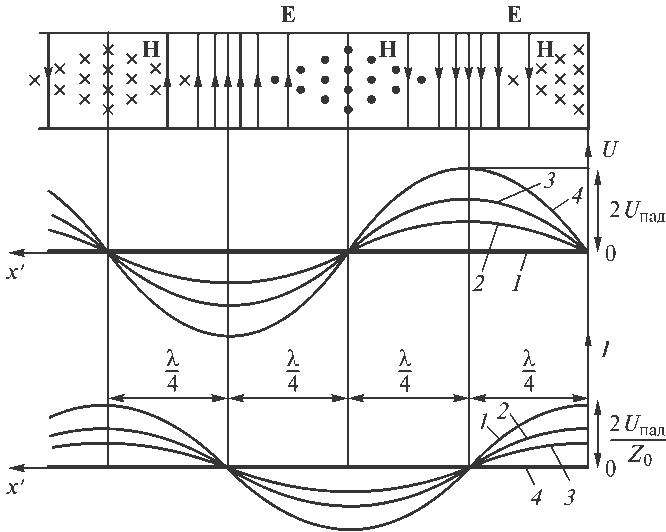
$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0 \quad \text{и} \quad \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1,$$

откуда  $\frac{2\pi}{\lambda} x' = n\pi$  и  $x' = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Положения пучностей напряжения и узлов тока определяются из условий

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1 \quad \text{и} \quad \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0,$$

откуда  $\frac{2\pi}{\lambda} x' = (2m-1)\frac{\pi}{2}$  и  $x' = (2m-1)\frac{\lambda}{4}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).



**Рис. 9.5.** Распределения тока и напряженности магнитного поля, напряжения и напряженности электрического поля вдоль короткозамкнутой линии без потерь (кривые тока и напряжения, соответствующие определенному моменту времени, обозначены одной и той же цифрой — 1, 2, 3, 4)

На рис. 9.5 представлены отрезок короткозамкнутой линии и распределения вдоль этой линии тока и напряженности магнитного поля, напряжения и напряженности электрического поля. Зависимости тока и напряжения от времени представлены кривыми, каждая из которых соответствует определенному моменту времени. Когда напряжение во всех сечениях  $x'$  линии достигает максимума (кривая 4), ток во всех точках линии равен нулю (кривая 1). Вся энергия поля заключена только в электрическом поле. Когда напряжение во всех сечениях  $x'$  линии равно нулю (кривая 1), ток во всех точках линии (кривая 1) достигает максимума. Вся энергия электромагнитного поля сосредоточена в магнитном поле. В плоскостях, перпендикулярных линии и проходящих через узлы тока или напряжения, во все моменты времени напряженность магнитного или электрического поля равна нулю. Следовательно, вектор Пойнтинга

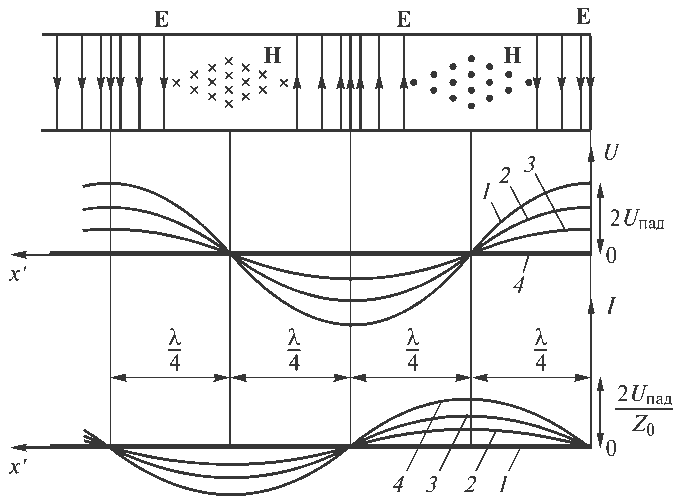
$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = 0$$

и движения энергии вдоль линии нет. Происходит лишь колебание энергии в четвертьволновых отрезках линии, расположенных между этими плоскостями. Электрическая энергия переходит в магнитную и обратно.

В волноводе короткое замыкание осуществляется с помощью металлической перегородки, имеющей хороший контакт с его стенками и перпендикулярной оси волновода.

**Линия без потерь, разомкнутая на конце.** В этом случае

$$Z_{\text{н}} = \infty.$$



**Рис. 9.6.** Распределения тока и напряженности магнитного поля, напряжения и напряженности электрического поля вдоль разомкнутой линии без потерь (кривые тока и напряжения, обозначенные одной и той же цифрой (1, 2, 3, 4), соответствуют одному и тому же моменту времени)

Согласно (9.28) коэффициент отражения

$$\Gamma = 1,$$

и выражения (9.30) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} (e^{j\beta x'} + e^{-j\beta x'}) = 2\dot{U}_{\text{пад}} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I}(x) &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} (e^{j\beta x'} - e^{-j\beta x'}) = j \frac{2\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x', \end{aligned} \tag{9.32}$$

т. е., как и в предыдущем случае, в линии устанавливается стоячая волна.

На рис. 9.6 представлены отрезок линии, разомкнутый на конце, и распределения вдоль линии тока и напряженности магнитного поля, напряжения и напряженности электрического поля. Картина аналогична предыдущему случаю. Отличие заключается лишь в том, что на конце линии будет пучность напряжения и узел тока.

В случаях двухпроводной и коаксиальной линий, работающих на Т-волне, режим холостого хода осуществляется при разрыве проводов. Волноводы же при открытом конце излучают в пространство значительную часть мощности падающей волны. Отражение от открытого конца невелико. В этом отличие волноводов, поперечные размеры которых сравнимы с длиной волны, от обычных двухпроводных линий.

Линия без потерь, нагруженная на конденсатор емкостью  $C$  (рис. 9.7). В этом случае

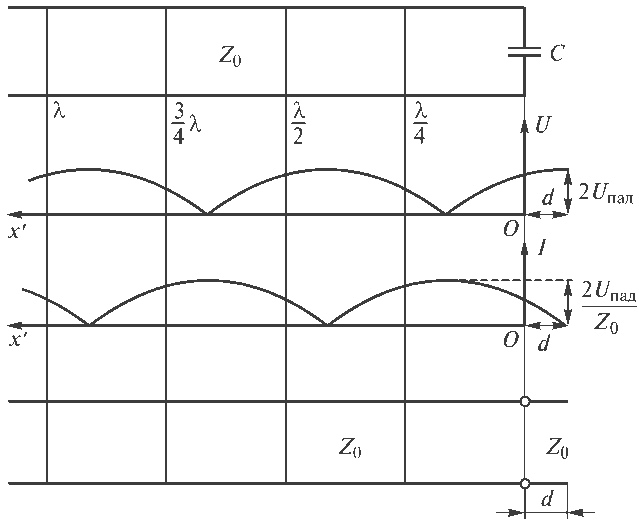


Рис. 9.7. Распределения тока и напряжения вдоль линии, нагруженной на конденсатор емкости  $C$

$$Z_{\text{н}} = \frac{1}{j\omega C}$$

и

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = e^{-j\varphi},$$

где

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \omega C Z_0.$$

Согласно (9.30)

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}} (e^{j\beta x'} + e^{-j\varphi} e^{-j\beta x'}) = \dot{U}_{\text{пад}} \left( e^{-j\frac{\varphi}{2}} e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\beta x'} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\beta x'} \right) = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \left[ e^{j\left(\beta x' + \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta x' + \frac{\varphi}{2}\right)} \right] = 2\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cos\left(\beta x' + \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x' + d); \end{aligned}$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} (e^{j\beta x'} - e^{-j\varphi} e^{-j\beta x'}) = j \frac{2\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x' + d).$$

Полученные выражения аналогичны формулам (9.32), определяющим стоя-

чую волну в линии, разомкнутой на конце, но максимумы и минимумы напряжения и тока смещены вправо на расстояние  $d$ , равное

$$d = \frac{\varphi\lambda}{4\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega CZ_0. \quad (9.33)$$

Положения пучностей напряжения и узлов тока определяются условиями

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x' + d) = \pm 1 \text{ и } \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x' + d) = 0,$$

откуда

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x' + d) = n\pi$$

или

$$x' + d = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Максимум напряжения и узел тока находятся не в точке  $x' = 0$ , а в точке  $x' = -d$ , т. е. линия как бы удлинена на отрезок  $d$ .

Иначе, подключение к линии отрезка длиной

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega CZ_0,$$

разомкнутого на конце, эквивалентно подключению конденсатора емкостью  $C$ .

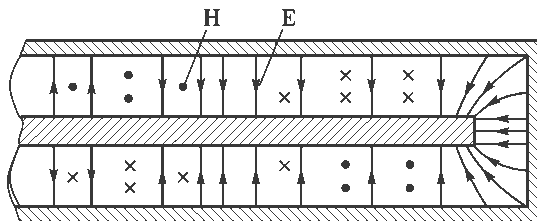
Этот режим работы возможен в коаксиальном волноводе, работающем на основной поперечной Т-волне с сосредоточенной емкостью в виде зазора между заглушкой внешнего цилиндра и торцом внутреннего проводника (рис. 9.8).

**Линия без потерь, нагруженная на индуктивность  $L$ .** Если линия нагружена на индуктивность  $L$ , т. е.

$$Z_{\text{н}} = j\omega L,$$

то коэффициент отражения

$$\Gamma = \frac{j\omega L - Z_0}{j\omega L + Z_0} = -e^{-\varphi},$$



**Рис. 9.8.** Коаксиальный волновод, нагруженный на емкость, при работе на основной Т-волне

где

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{Z_0}.$$

Подставив полученное значение коэффициента отражения в выражения (9.30), получим

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_{\text{пад}} (e^{j\beta x'} - e^{-j\varphi} e^{-j\beta x'}) = j2\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \sin\left(\beta x' + \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} (e^{j\beta x'} + e^{-j\varphi} e^{-j\beta x'}) = 2 \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cos\left(\beta x' + \frac{\varphi}{2}\right),$$

или

$$\dot{U}(x') = j2\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x' + d);$$

$$\dot{I}(x') = 2 \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x' + d).$$

Здесь

$$d = \frac{\varphi\lambda}{4\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{Z_0}.$$

Положения узлов напряжения и пучностей тока определяются условиями

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda}(x' + d) = 0 \text{ и } \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x' + d) = \pm 1.$$

Отсюда

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x' + d) = n\pi$$

или

$$x' + d = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

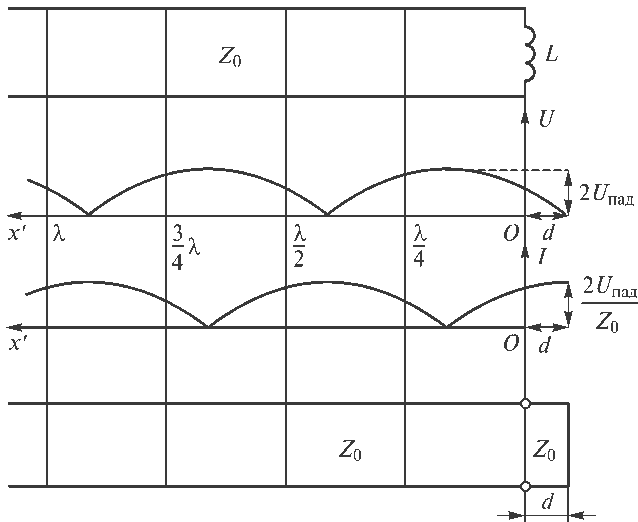
Таким образом, наблюдается картина такая же, как и в случае линии, замкнутой на конце, но максимум тока расположен не в точке  $x' = 0$ , а в точке  $x' = -d$ , т.е. линия как бы удлинена на отрезок  $d$  (рис. 9.9).

**Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление, равное волновому.** В этом случае

$$Z_n = Z_0.$$

Тогда коэффициент отражения  $\Gamma$  согласно (9.28) равен нулю и решения (9.30) принимают вид





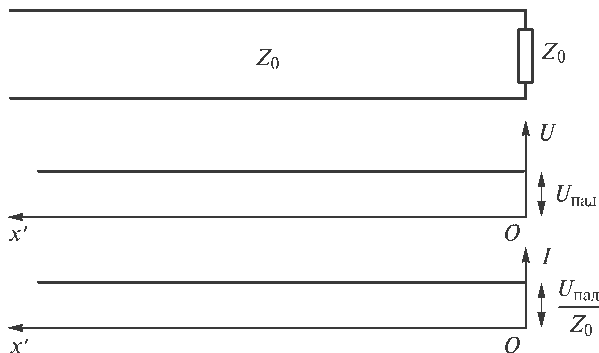
**Рис. 9.9.** Распределения тока и напряжения вдоль линии, нагруженной на индуктивность  $L$

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_{\text{пад}} e^{j\beta x'};$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} e^{j\beta x'},$$

т. е. в линии существует только одна бегущая волна, распространяющаяся от источника к нагрузке. В этом случае говорят, что линия согласована с нагрузкой (рис. 9.10).

Теоретически режим чисто бегущей волны может быть получен в бесконечно длинном волноводе. На практике в качестве согласованной нагрузки применяют компактные волноводные поглотители, целиком поглощающие падающую волну и не дающие отраженной волны. Эти устройства содержат поглощающие элементы, в которых энергия электромагнитного поля превращается в тепловую.



**Рис. 9.10.** Распределения тока и напряжения вдоль линии, нагруженной на активное сопротивление, равное волновому

**Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление, не равное волновому.** В этом случае наблюдается частичное отражение и амплитуда отраженной волны меньше падающей. Отражение волны напряжения происходит в фазе с падающей волной, если

$$R > Z_0,$$

и в противофазе, если

$$R < Z_0.$$

В этих случаях выражения (9.30) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_{\text{пад}}(e^{j\beta x'} \pm \Gamma e^{-j\beta x'}) = \dot{U}_{\text{пад}}(e^{j\beta x'} \pm \Gamma e^{-j\beta x'} + \Gamma e^{j\beta x'} - \Gamma e^{j\beta x'}) = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}}[(1 \mp \Gamma)e^{j\beta x'} \pm 2\Gamma \cos \beta x']; \\ \dot{I}(x') &= \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0} [(1 \pm \Gamma)e^{j\beta x'} \mp 2\Gamma \cos \beta x']. \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует случаю  $R > Z_0$ , а нижний —  $R < Z_0$ .

Смысл этого преобразования состоит в том, что результирующее напряжение и ток представляются в виде суммы бегущей и стоячей волн (смешанные волны). Значения результирующего напряжения и тока зависят от координаты  $x'$ :

$$\begin{aligned} U(x') &= U_{\text{пад}} \sqrt{(1 \pm \Gamma)^2 \cos^2 \beta x' + (1 \mp \Gamma)^2 \sin^2 \beta x'} = \\ &= U_{\text{пад}} \sqrt{1 + \Gamma^2 \pm 2\Gamma \cos 2\beta x'}; \\ I(x') &= \frac{U_{\text{пад}}}{Z_0} \sqrt{1 + \Gamma^2 \mp 2\Gamma \cos 2\beta x'}. \end{aligned}$$

Положения максимумов напряжения и минимумов тока при  $R > Z_0$  определяются условием

$$\cos 2\beta x' = 1.$$

Отсюда

$$2\beta x' = 2\pi n$$

или

$$x' = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

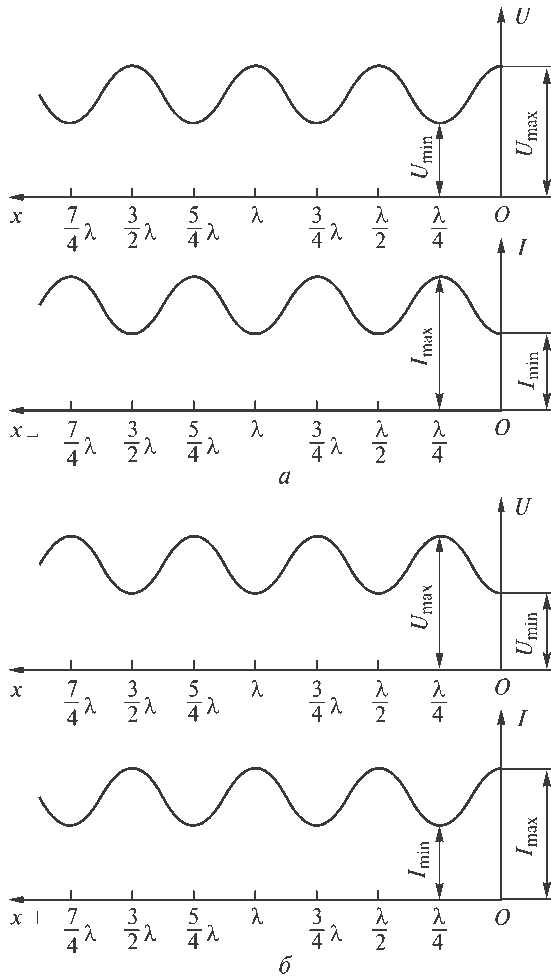
Положения минимумов напряжения и максимумов тока при  $R < Z_0$  определяется условием

$$\cos 2\beta x' = -1.$$

Отсюда

$$\beta x' = \pi n$$

или



**Рис. 9.11.** Распределения тока и напряжения вдоль линии, нагруженной на активное сопротивление, не равное волновому:

$a$  —  $R > Z_0$ ;  $b$  —  $R < Z_0$

$$x' = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Наименьшее значение равно разности значений падающей и отраженной волн, максимальное — сумме этих значений. Напряжение на конце линии при  $R > Z_0$  максимально, а ток — минимален; при  $R < Z_0$  — наоборот. Расстояние между максимумами или минимумами равно  $\frac{\lambda}{2}$  (рис. 9.11).

О качестве согласования линии с нагрузкой можно судить по «волнистости» кривой распределения значений напряжения или тока вдоль линии, характери-

зубой коэффициентом стоячей волны по напряжению, равным отношению максимального значения напряжения к минимальному:

$$K_{с.в.н} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отр}}|}{|\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отр}}|}.$$

При отсутствии потерь модуль коэффициента отражения в любом сечении линии согласно (9.26) равен модулю коэффициента отражения на нагрузке

$$K_{с.в.н} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

В режиме стоячих волн этот коэффициент равен бесконечности, в режиме бегущей волны — единице, в промежуточном режиме смешанных волн  $K_{с.в.н} > 1$ .

Величина, обратная  $K_{с.в.н}$ , называется коэффициентом бегущей волны по напряжению. Он равен

$$K_{б.в.н} = \frac{1}{K_{с.в.н}} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|}, \quad 0 \leq K_{б.в.н} \leq 1.$$

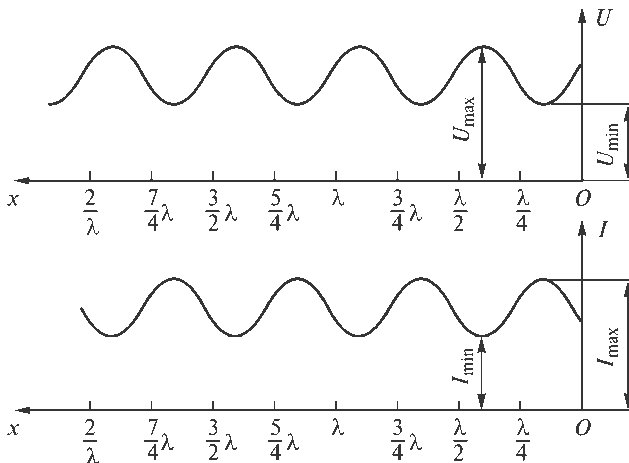
**Линия без потерь, нагруженная на комплексное сопротивление.** Если линия нагружена на комплексное сопротивление, т.е.

$$Z_{\text{н}} = R \pm jX,$$

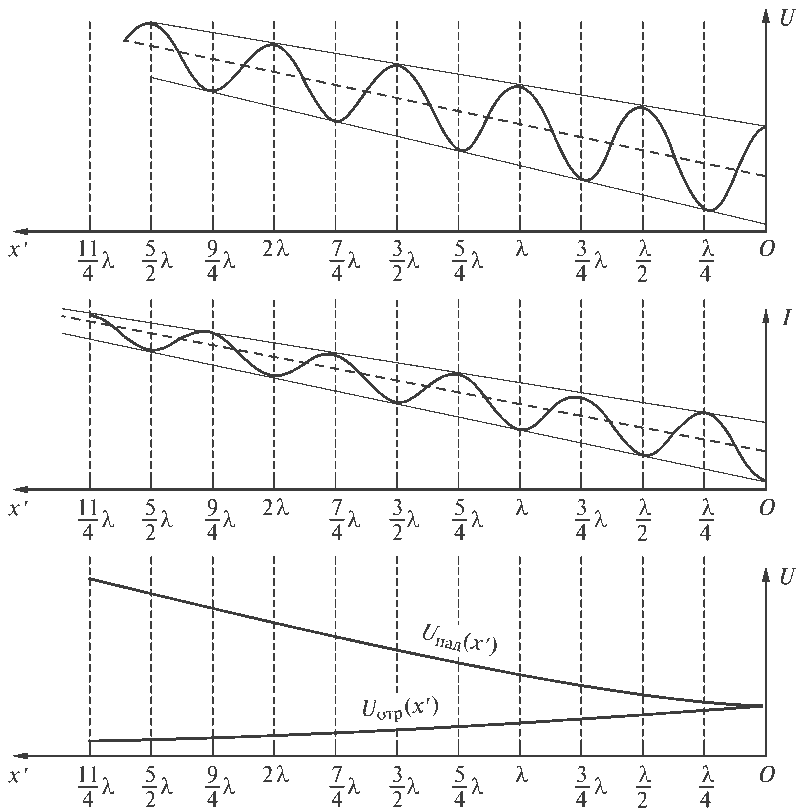
то

$$\Gamma = \frac{(R - Z_0) \pm jX}{(R + Z_0) \pm jX} = |\Gamma| e^{-j\varphi}.$$

Этот случай совпадает с предыдущим по характеру распределения напряжения и тока вдоль линии, но максимумы относительно конца линии будут смеще-



**Рис. 9.12.** Распределения тока и напряжения вдоль линии, нагруженной на комплексное сопротивление



**Рис. 9.13.** Распределения тока и напряжения вдоль линии с потерями, разомкнутой на конце

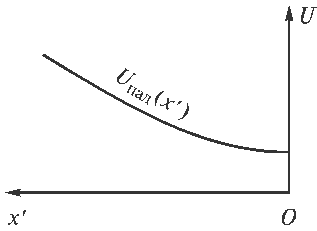
ны, так как падающая и отраженная волны на конце линии сдвинуты по фазе на угол, не равный нулю или  $\pi$  (рис. 9.12).

Рассмотрим особенности волновых процессов в линии с учетом потерь. В этом случае напряжение и ток вдоль линии определяются выражениями (9.25):

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_{\text{пад}}(e^{\alpha x'} e^{j\beta x'} + \Gamma e^{-\alpha x'} e^{-j\beta x'});$$

$$\dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_0}(e^{\alpha x'} e^{j\beta x'} - \Gamma e^{-\alpha x'} e^{-j\beta x'}).$$

Из этих соотношений следует, что амплитуды падающей и отраженной волн непрерывно меняются вдоль линии по экспоненте. На больших расстояниях от конца линии отраженная волна значительно слабее падающей, и режим в этой части линии близок к режиму бегущей волны. В линиях, замкнутых и разомкнутых на конце, падающая и отраженная волны при  $x' = 0$  примерно одинаковы по амплитуде и режим близок к режиму стоячей волны. При удалении от конца линии «волнистость» кривой распределения значений тока или напряжения



**Рис. 9.14.** Распределение напряжения вдоль линии с потерями, нагруженной на волновое сопротивление

уменьшается, коэффициент бегущей волны приближается к единице (рис. 9.13).

При нагрузке линии на волновое сопротивление в линии наблюдается режим бегущей волны, амплитуда которой уменьшается по экспоненте по мере приближения к концу линии (рис. 9.14).

### 9.3. Входное сопротивление и согласование линий

Линия длиной  $l$  нагружена на сопротивление  $Z_H$ . Волновое сопротивление линии  $Z_0$ . Совместим начало линии с координатой  $x = 0$ , конец — с координатой  $x = l$  (рис. 9.15).

Распределения напряжения и тока вдоль линии определяются выражениями (9.18):

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{jk_0 x}; \\ \dot{I}(x) &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{\text{пад}} e^{-jk_0 x} - \dot{U}_{\text{отр}} e^{jk_0 x}).\end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$Z_{\text{вх}} = Z(x=0) = \frac{\dot{U}(x=0)}{\dot{I}(x=0)} = Z_0 \frac{1 + \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}}}{1 - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}}}$$

Отношение

$$\frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \Gamma(x=0)$$

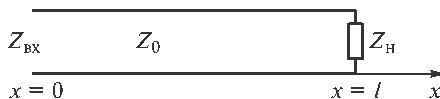
— коэффициент отражения в начале линии.

Коэффициент отражения на нагрузке с учетом (9.28) имеет вид

$$\Gamma(x=l) = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} e^{j2k_0 l} = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0},$$

откуда

$$\Gamma(x=0) = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} e^{-j2k_0 l}$$



**Рис. 9.15.** К определению входного сопротивления линии

и входное сопротивление линии

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{1 + \frac{Z_{\text{н}} - Z_0}{Z_{\text{н}} + Z_0} e^{-j2k_0 l}}{1 - \frac{Z_{\text{н}} - Z_0}{Z_{\text{н}} + Z_0} e^{-j2k_0 l}}.$$

После несложных преобразований имеем

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{(Z_{\text{н}} + Z_0) e^{jk_0 l} + (Z_{\text{н}} - Z_0) e^{-jk_0 l}}{(Z_{\text{н}} + Z_0) e^{jk_0 l} - (Z_{\text{н}} - Z_0) e^{-jk_0 l}},$$

или

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{Z_{\text{н}} \cos k_0 l + jZ_0 \sin k_0 l}{Z_0 \cos k_0 l + jZ_{\text{н}} \sin k_0 l} = Z_0 \frac{Z_{\text{н}} + jZ_0 \operatorname{tg} k_0 l}{Z_0 + jZ_{\text{н}} \operatorname{tg} k_0 l}.$$

Пренебрегая потерями в линии, получаем

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{Z_{\text{н}} + jZ_0 \operatorname{tg} \beta l}{Z_0 + jZ_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta l} = Z_0 \frac{Z_{\text{н}} + jZ_0 \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}{Z_0 + jZ_{\text{н}} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}, \quad (9.34)$$

т. е. входное сопротивление определяется сопротивлением нагрузки, волновым сопротивлением линии и ее длиной.

Если линия нагружена на сопротивление, равное волновому, т.е.

$$Z_{\text{н}} = Z_0,$$

то входное сопротивление согласно (9.34) равно волновому при любой длине линии. В линии распространяется только бегущая волна и отражения нет.

Если длина линии составляет нечетное число четвертей длин волн, а именно

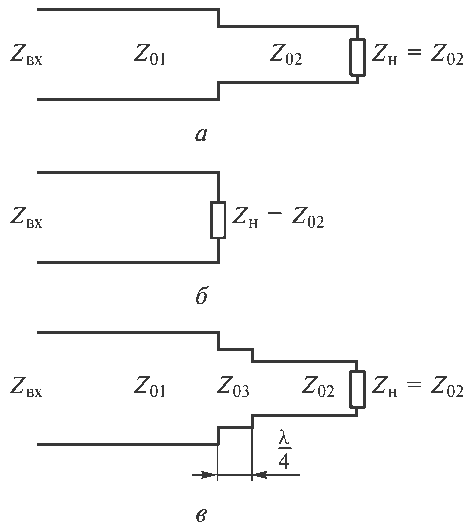
$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

то

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \operatorname{tg}(2n + 1) \frac{\pi}{2} = \pm \infty$$

и согласно (9.34)

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_0^2}{Z_{\text{н}}}, \quad (9.35)$$



**Рис. 9.16.** Согласование двух линий с разными волновыми сопротивлениями с помощью четвертьволнового трансформатора:

*a* — схема соединения линий; *б* — эквивалентная схема; *в* — включение согласующего четвертьволнового трансформатора

т. е. линия трансформирует нагрузку. Это свойство четвертьволнового трансформатора используется для согласования линий с разными волновыми сопротивлениями.

Пусть две линии с разными волновыми сопротивлениями  $Z_{01}$  и  $Z_{02}$  включены последовательно (рис. 9.16) и вторая линия согласована с нагрузкой, т. е. нагружена на сопротивление  $Z_H = Z_{02}$ . Тогда при любой длине второй линии ее входное сопротивление будет равно  $Z_{02}$  и первая линия будет вести себя так, как если бы она была нагружена на сопротивление  $Z_{02}$ . В месте соединения линий будет наблюдаться отражение, и коэффициент отражения будет равен

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}.$$

Обе линии можно согласовать, если включить между ними четвертьволновый трансформатор, волновое сопротивление которого  $Z_{03}$  подбирается так, чтобы его входное сопротивление было равно волновому сопротивлению  $Z_{01}$ , т. е. согласно (9.35)

$$Z_{01} = \frac{Z_{03}^2}{Z_{02}}.$$

Отсюда

$$Z_{03} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}.$$



Если линия нагружена на активное сопротивление  $R_H$ , не равное волновому сопротивлению линии  $Z_0$  (рис. 9.17), то нагрузку с линией также можно согласовать с помощью четвертьволнового трансформатора с волновым сопротивлением

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} R_H}.$$

В линии до трансформатора будет бегущая волна, в четвертьволновом трансформаторе — смешанные волны. Смешанные волны образуются от сложения падающей волны с волной, отраженной от нагрузки  $R_H$ . В линию отраженная волна не попадает, так как она компенсируется на входе трансформатора его отраженной волной.

Если длина линии равна целому числу полу-волн, т.е.

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \operatorname{tg} n\pi = 0,$$

то ее входное сопротивление согласно (9.34) равно сопротивлению нагрузки

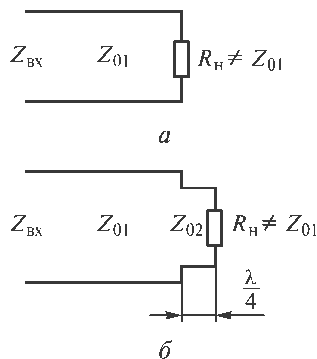
$$Z_{\text{вх}} = Z_H.$$

Удлинение или укорочение линии на отрезок длиной, равной целому числу полуволн, не изменяет ее входного сопротивления.

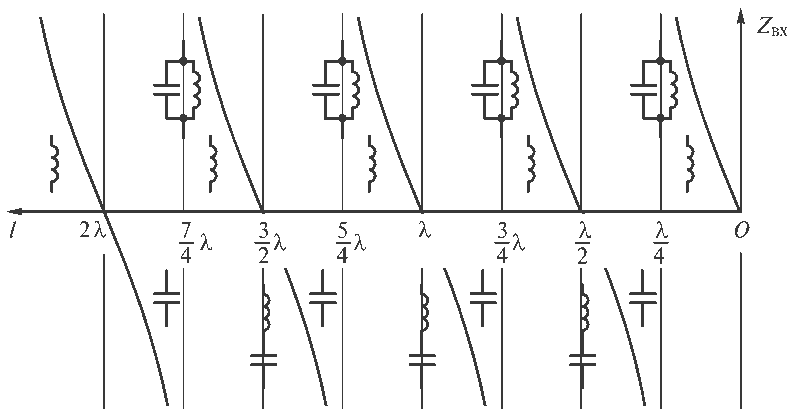
Рассмотрим линию, короткозамкнутую на конце (рис. 9.18),

$$Z_H = 0.$$

Входное сопротивление такой линии согласно (9.34)



**Рис. 9.17.** Согласование линии с нагрузкой с помощью четвертьволнового трансформатора: *a* — схема соединения; *б* — четвертьволновый согласующий трансформатор



**Рис. 9.18.** Зависимость входного сопротивления короткозамкнутой линии без потерь от ее длины

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}. \quad (9.36)$$

При достаточно малой длине линии ( $l \ll \lambda$ )

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Такой отрезок линии эквивалентен индуктивности. При дальнейшем увеличении длины отрезка линии индуктивность растет, и при  $l = \frac{\lambda}{4}$  аргумент тангенса равен  $\frac{\pi}{2}$  и  $Z_{\text{вх}} = \infty$ . При дальнейшем увеличении длины  $l$  от  $\frac{\lambda}{4}$  до  $\frac{\lambda}{2}$  тангенс меняет знак и изменяется от  $-\infty$  до 0. Линия эквивалентна емкости. Далее цикличность повторяется. В окрестности точек, соответствующих  $l = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $Z_{\text{вх}} = 0$  и частотные свойства линии соответствуют последовательному контуру без потерь; в окрестности точек  $l = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )  $Z_{\text{вх}} = \infty$  — параллельному контуру без потерь.

Входное сопротивление линии, разомкнутой на конце ( $Z_{\text{н}} = \infty$ ) согласно (9.34) равно

$$Z_{\text{вх}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} l. \quad (9.37)$$

При длине линии  $l$ , изменяющейся от 0 до  $\frac{\lambda}{4}$ , входное сопротивление имеет емкостный характер, при длине  $l$ , изменяющейся от  $\frac{\lambda}{4}$  до  $\frac{\lambda}{2}$ , — индуктивный характер и т. д. В окрестности точек, соответствующих  $l = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ),  $Z_{\text{вх}} = 0$  и линия ведет себя как последовательный контур без потерь, а в окрестности точек, соответствующих  $l = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), — как параллельный контур без потерь (рис. 9.19).

Короткозамкнутые и разомкнутые линии (шлейфы) можно использовать для согласования линии с волновым сопротивлением  $Z_0$  и комплексной нагрузкой  $Z_{\text{н}} = R \pm jX$  (рис. 9.20). В этом случае удобнее пользоваться проводимостями, которые при параллельном соединении складываются.

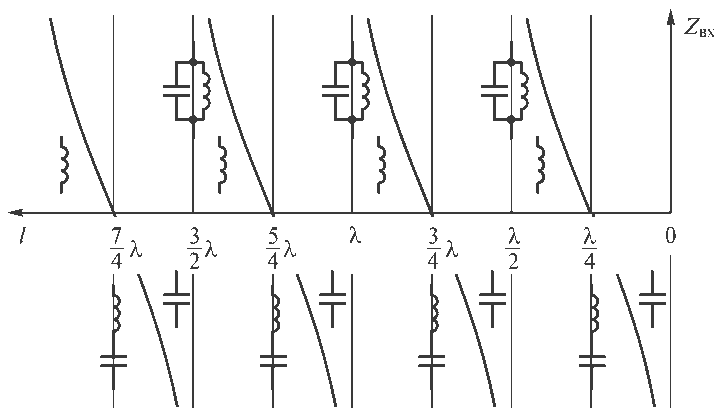


Рис. 9.19. Зависимость входного сопротивления разомкнутой линии без потерь от ее длины

Волновая проводимость линии

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0},$$

проводимость нагрузки

$$Y_H = \frac{1}{Z_H} = g_H \mp jb_H.$$

Входное сопротивление и соответственно входная проводимость согласно выражению (9.34) зависят от расстояния  $l'$  и нагрузки  $Z_H$ . Это расстояние подбирается так, чтобы активная часть входной проводимости равнялась волновой проводимости линии  $Y_0$ :

$$Y'_{вх} = Y_0 \mp jb'_{вх},$$

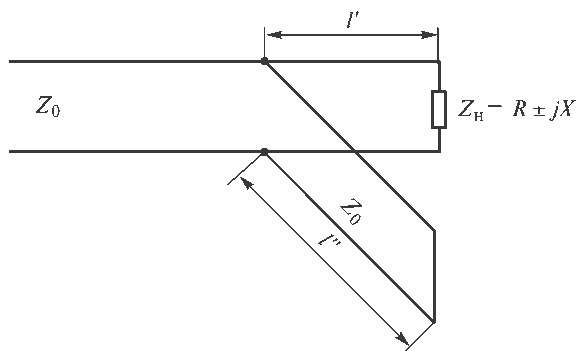


Рис. 9.20. Согласование линии, нагруженной на комплексное сопротивление, с помощью короткозамкнутого шлейфа

где реактивная составляющая  $b'_{\text{вх}}$  имеет некоторое значение.

Реактивная часть проводимости компенсируется подбором длины  $l''$  короткозамкнутого шлейфа

$$Y''_{\text{вх}} = -j \frac{\text{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} l''}{Z_0} = \pm j b''_{\text{вх}} = \pm j b'_{\text{вх}}.$$

Результирующая проводимость в месте подключения шлейфа

$$Y_{\text{вх}} = Y'_{\text{вх}} + Y''_{\text{вх}} = Y_0 \pm j(\mp b'_{\text{вх}} \pm b'_{\text{вх}}) = Y_0,$$

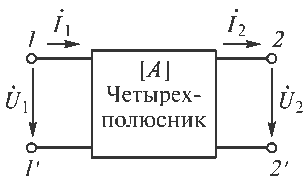
и линия между источником и точками подключения шлейфа согласована. В этой части линии имеет место бегущая волна, отраженной волны нет, в шлейфе — стоячая волна, между шлейфом и нагрузкой — смешанная. Стремятся к тому, чтобы шлейф был подключен как можно ближе к нагрузке, чтобы несогласованный участок был как можно короче.

В режиме согласованной нагрузки увеличивается мощность, передаваемая от источника в нагрузку, уменьшается опасность электрического пробоя.

#### 9.4. Матрицы передачи и рассеяния

Любую электрическую схему можно представить как соединение четырехполюсников. Четырехполюсник — система, имеющая четыре доступных вывода (пару входных 1 и 1' и пару выходных 2 и 2' зажимов). Четырехполюсник называется пассивным, если он не содержит в себе источников энергии; симметричным — если перемена места его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, частью которой этот четырехполюсник является; взаимным — если выполняется теорема взаимности, т. е. отношение напряжения на входе к току на выходе не зависит от того, какая из двух пар зажимов является входной и какая — выходной.

Работа четырехполюсника как звена некоторой сложной цепи полностью определяется соотношениями между входными током и напряжением  $\dot{I}_1$  и  $\dot{U}_1$  и выходными током и напряжением  $\dot{I}_2$  и  $\dot{U}_2$ :



$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, \end{aligned} \quad (9.38)$$

где индексы «1» и «2» относятся соответственно к входу и выходу четырехполюсника. За положительное направление токов и напряжений выбраны направления, указанные на рис. 9.21.

Рис. 9.21. Четырехполюсник

Коэффициенты уравнений (9.38) определяются следующими отношениями:

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_2=0}$$

— величина, обратная коэффициенту передачи по напряжению при разомкнутых выходных зажимах;

$$A_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

— сопротивление передачи от входа к выходу при замкнутых выходных зажимах;

$$A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_2=0}$$

— проводимость передачи от входа к выходу при разомкнутых выходных зажимах;

$$A_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}$$

— величина, обратная коэффициенту передачи по току при замкнутых выходных зажимах.

В матричной форме эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (9.39)$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = [A]$$

называется матрицей передачи.

Если четырехполюсник взаимный, то

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Если четырехполюсник симметричный, то

$$A_{11} = A_{22}.$$

Матрица передачи используется при каскадном соединении четырехполюсников, наиболее распространенном в радиотехнических устройствах. При таком соединении ток и напряжение на выходе предыдущего четырехполюсника являются входными током и напряжением для последующего.

Рассмотрим каскадное соединение двух четырехполюсников (рис. 9.22). При таком соединении

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1; & \dot{U}'_2 &= \dot{U}''_1; & \dot{U}''_2 &= \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1; & \dot{I}'_2 &= \dot{I}''_1; & \dot{I}''_2 &= \dot{I}_2. \end{aligned}$$

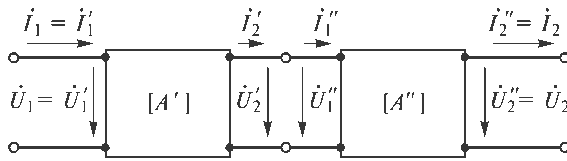


Рис. 9.22. Каскадное соединение четырехполосников

Согласно уравнению (9.39)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{i}_1' \end{bmatrix} = [A'] \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{i}_2' \end{bmatrix} = [A'] \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{i}_1'' \end{bmatrix} = \\ &= [A'] [A''] \begin{bmatrix} \dot{U}_2'' \\ \dot{i}_2'' \end{bmatrix} = [A'] [A''] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что матрица передачи каскадного соединения четырехполосников равна произведению матриц передачи четырехполосников, входящих в это соединение:

$$[A] = [A'] [A'']. \quad (9.40)$$

Отметим, что перемножать матрицы надо в соответствующем порядке, так как коммутативный закон к произведению матриц неприменим, т.е.

$$[A'] [A''] \neq [A''] [A'].$$

Определим матрицу передачи отрезка линии без потерь длиной  $l$  (рис. 9.23). Для этого составим уравнения вида (9.38), связывающие напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{i}_1$  на входе четырехполосника с напряжением  $\dot{U}_2$  и током  $\dot{i}_2$  на выходе. За положительные направления токов и напряжений принимаются направления, указанные на рис. 9.21.

Как следует из уравнений (9.13),

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta x} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta x}; \\ \dot{i}(x) &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta x} - \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta x}). \end{aligned}$$

На входе четырехполосника, т.е. при  $x = 0$ ,

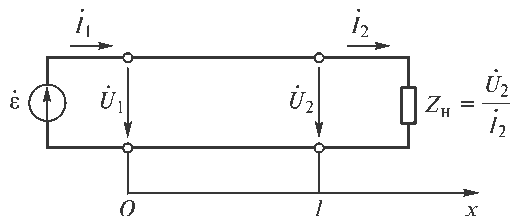


Рис. 9.23. Отрезок линии передачи

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U}(x=0) &= \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}(x=0) &= \frac{1}{Z_0}(\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}), \end{aligned} \quad (9.41)$$

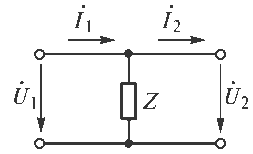


Рис. 9.24. Параллельное комплексное сопротивление

на выходе, т. е. при  $x = l$ ,

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \dot{U}(x=l) &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta l} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta l}; \\ \dot{I}_2 = \dot{I}(x=l) &= \frac{1}{Z_0}(\dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta l} - \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta l}). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Из уравнений (9.42) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta l} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2); \\ \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta l} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_0 \dot{I}_2). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Подставляя (9.43) в (9.41), получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2) e^{j\beta l} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_0 \dot{I}_2) e^{-j\beta l}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{Z_0} \left[ \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2) e^{j\beta l} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_0 \dot{I}_2) e^{-j\beta l} \right]. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos \beta l + j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta l; \\ \dot{I}_1 &= j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta l + \dot{I}_2 \cos \beta l \end{aligned} \quad (9.44)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_0 \sin \beta l \\ j \frac{\sin \beta l}{Z_0} & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрицу передачи четырехполосника (рис. 9.24) находим аналогичным путем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_0} + \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (9.38), получаем

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.45)$$

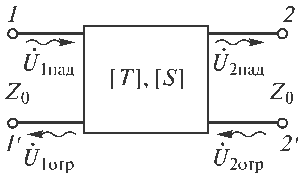


Рис. 9.25. К введению волновых матриц

На сверхвысоких частотах (3...30 ГГц) традиционные методы измерения тока и напряжения не пригодны. Измерения связаны с падающими и отраженными волнами (коэффициент отражения, коэффициент передачи), а методы расчета — с волновыми матрицами, связывающими падающие и отраженные волны. Элементы этих матриц связаны с коэффициентами отражения и передачи и позволяют сопоставить расчетные данные с эксперимен-

тальными характеристиками.

Рассмотрим четырехполюсник в волновой трактовке, представленный на рис. 9.25, где  $\dot{U}_{1\text{пад}}$ ,  $\dot{U}_{2\text{пад}}$  и  $\dot{U}_{1\text{отр}}$ ,  $\dot{U}_{2\text{отр}}$  соответственно падающие и отраженные волны на входе и выходе четырехполюсника, а  $Z_0$  — волновое сопротивление подводящих линий.

Напряжение и ток на входе четырехполюсника равны

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{U}_{1\text{отр}}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{Z_0}(\dot{U}_{1\text{пад}} - \dot{U}_{1\text{отр}}), \end{aligned} \quad (9.46)$$

на выходе

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{1}{Z_0}(\dot{U}_{2\text{пад}} - \dot{U}_{2\text{отр}}). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Подставляя (9.46) и (9.47) в (9.38), складывая и вычитая, получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{пад}} &= T_{11}\dot{U}_{2\text{пад}} + T_{12}\dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{U}_{1\text{отр}} &= T_{21}\dot{U}_{2\text{пад}} + T_{22}\dot{U}_{2\text{отр}} \end{aligned} \quad (9.48)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{пад}} \\ \dot{U}_{1\text{отр}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{U}_{2\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{bmatrix},$$

где  $[T]$  — волновая матрица передачи

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21}Z_0 + A_{22} & A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21}Z_0 - A_{22} \\ A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21}Z_0 - A_{22} & A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21}Z_0 + A_{22} \end{bmatrix}. \quad (9.49)$$

Элементы волновой матрицы передачи определяются соотношениями



$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{\dot{U}_{1\text{пад}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{отр}} = 0 \text{ (при согласованном выходе);} \\
 T_{12} &= \frac{\dot{U}_{1\text{пад}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{пад}} = 0 \text{ (при обратном направлении передачи);} \\
 T_{21} &= \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{отр}} = 0 \text{ (при согласованном выходе);} \\
 T_{22} &= \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{пад}} = 0 \text{ (при обратном направлении передачи).}
 \end{aligned} \tag{9.50}$$

Из уравнений (9.48) с учетом соотношений (9.50) получим следующие характеристики четырехполюсника:

- коэффициент передачи по напряжению в прямом направлении при согласованном выходе ( $\dot{U}_{2\text{отр}} = 0$ )

$$K_{u1} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = \frac{1}{T_{11}}; \tag{9.51}$$

- коэффициент передачи по напряжению в обратном направлении при согласованном входе ( $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$ )

$$K_{u2} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} = T_{22} - \frac{T_{21}T_{12}}{T_{11}}; \tag{9.52}$$

- коэффициент отражения на входе при согласованном выходе ( $\dot{U}_{2\text{отр}} = 0$ )

$$\Gamma_1 = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = \frac{T_{21}}{T_{11}}; \tag{9.53}$$

- коэффициент отражения на выходе при согласованном входе ( $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$ ), т. е. при обратном направлении передачи,

$$\Gamma_2 = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} = -\frac{T_{12}}{T_{11}}. \tag{9.54}$$

Если четырехполюсник взаимный, то  $K_{u1} = K_{u2}$  и согласно (9.51) и (9.52)

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1.$$

Если четырехполюсник симметричный, то  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  и согласно (9.53) и (9.54)

$$T_{12} = -T_{21}.$$

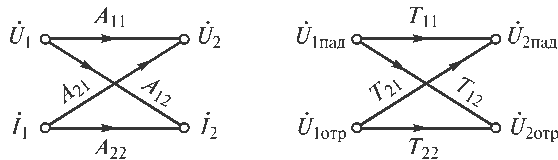


Рис. 9.26. Линейные графы матриц передачи

При каскадном соединении четырехполусников, если волновые сопротивления подводящих линий одинаковы, волновая матрица передачи соединения равна произведению волновых матриц четырехполусников, входящих в это соединение.

Уравнения (9.48) можно представить графически с помощью ориентированной таблицы — линейного графа (рис. 9.26). Если два или большее число четырехполусников включено каскадно, то граф системы находится путем соединения графов отдельных четырехполусников (рис. 9.27).

Элементы матрицы передачи каскадного соединения четырехполусников определяются как сумма произведений участков всех возможных путей между соответствующими узлами графов.

Так, в случае соединения двух четырехполусников элементы волновой матрицы передачи соответственно равны

$$\begin{aligned} T_{11} &= T'_{11}T''_{11} + T'_{12}T''_{21}; & T_{21} &= T'_{21}T''_{11} + T'_{22}T''_{21}; \\ T_{12} &= T'_{11}T''_{12} + T'_{12}T''_{22}; & T_{22} &= T'_{21}T''_{12} + T'_{22}T''_{22}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются элементы матрицы передачи  $[A]$  каскадного соединения четырехполусников.

Разрешая уравнения (9.48) относительно  $\dot{U}_{1отр}$  и  $\dot{U}_{2пад}$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1отр} &= S_{11}\dot{U}_{1пад} + S_{12}\dot{U}_{2отр}; \\ \dot{U}_{2пад} &= S_{21}\dot{U}_{1пад} + S_{22}\dot{U}_{2отр} \end{aligned} \quad (9.55)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1отр} \\ \dot{U}_{2пад} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1пад} \\ \dot{U}_{2отр} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \dot{U}_{1пад} \\ \dot{U}_{2отр} \end{bmatrix},$$

где  $[S]$  — волновая матрица рассеяния, связывающая волны, расходящиеся от четырехполусника и сходящиеся к нему (рассеянные волны).

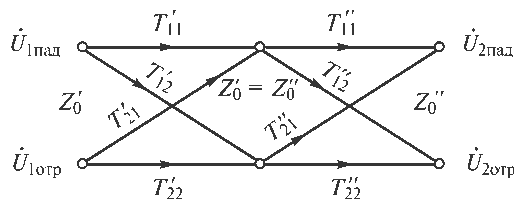


Рис. 9.27. К определению волновой матрицы передачи каскадного соединения двух четырехполусников

Элементы этой матрицы определяются следующими отношениями:

$$S_{11} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = \Gamma_1$$

— коэффициент отражения на входе четырехполосника при согласованном выходе ( $\dot{U}_{2\text{отр}} = 0$ );

$$S_{12} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} = K_{u2}$$

— коэффициент передачи по напряжению от выхода к входу при согласованном входе ( $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$ );

$$S_{21} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = K_{u1}$$

— коэффициент передачи по напряжению от входа к выходу при согласованном выходе ( $\dot{U}_{2\text{отр}} = 0$ );

$$S_{22} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{\dot{U}_{2\text{отр}}} = \Gamma_2$$

— коэффициент отражения на выходе четырехполосника при согласованном входе ( $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$ ).

В случае взаимного четырехполосника  $K_{u1} = K_{u2}$  и

$$S_{12} = S_{21}.$$

В случае симметричного четырехполосника  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  и

$$S_{11} = S_{22}.$$

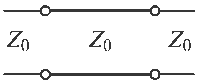
Элементы матрицы рассеяния непосредственно связаны с экспериментальными характеристиками четырехполосника: с коэффициентами отражения на входе и выходе и с коэффициентами передачи по напряжению в прямом и обратном направлениях.

Связь между элементами матрицы рассеяния и волновой матрицей передачи получаем, преобразуя уравнения (9.48) к виду (9.55) и наоборот:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{21}}{T_{11}} & \frac{|T|}{T_{11}} \\ 1 & -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

и

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & -\frac{|S|}{S_{21}} \end{bmatrix}, \quad (9.57)$$



**Рис. 9.28.** Отрезок линии в однородном тракте передачи

где  $|T| = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$ ,  $|S| = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$ .

Определим волновую матрицу передачи отрезка линии длиной  $l$  (рис. 9.28). Из уравнения (9.13) имеем:

при  $x = 0$

$$\dot{U}_{1\text{пад}} = \dot{U}_{\text{пад}}; \quad \dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{U}_{\text{отр}},$$

при  $x = l$

$$\dot{U}_{2\text{пад}} = \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta l}; \quad \dot{U}_{2\text{отр}} = \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta l}.$$

Приводя к виду уравнений (9.48), получаем

$$\dot{U}_{1\text{пад}} = \dot{U}_{2\text{пад}} e^{j\beta l};$$

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{U}_{2\text{отр}} e^{-j\beta l}.$$

Отсюда волновая матрица передачи

$$[T] = \begin{bmatrix} e^{j\beta l} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta l} \end{bmatrix}. \quad (9.58)$$

Аналогично находим матрицу рассеяния. При  $x = 0$

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{U}_{\text{отр}}; \quad \dot{U}_{1\text{пад}} = \dot{U}_{\text{пад}},$$

при  $x = l$

$$\dot{U}_{2\text{отр}} = \dot{U}_{\text{отр}} e^{j\beta l}; \quad \dot{U}_{2\text{пад}} = \dot{U}_{\text{пад}} e^{-j\beta l}.$$

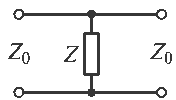
Сравнивая с уравнениями (9.55), получаем

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{U}_{2\text{отр}} e^{-j\beta l};$$

$$\dot{U}_{2\text{пад}} = \dot{U}_{1\text{пад}} e^{j\beta l}.$$

Отсюда матрица рассеяния

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{j\beta l} & 0 \end{bmatrix}.$$



**Рис. 9.29.** Параллельное сопротивление с одинаковыми подводящими линиями

Волновую матрицу передачи четырехполюсника, приведенного на рис. 9.29, получим с помощью переходной формулы (9.49), определяющей связь матрицы передачи с волновой матрицей передачи

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\tilde{Y}}{2} & \frac{\tilde{Y}}{2} \\ -\frac{\tilde{Y}}{2} & 1 - \frac{\tilde{Y}}{2} \end{bmatrix}, \quad (9.59)$$

где  $\tilde{Y} = \frac{Y}{Y_0}$  — нормированная проводимость;  $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$  —

волновая проводимость подводящих линий.

Матрицу рассеяния четырехполюсника определим согласно переходной формуле (9.56):

$$[S] = \frac{1}{2 + \tilde{Y}} \begin{bmatrix} -\tilde{Y} & 2 \\ 2 & -\tilde{Y} \end{bmatrix}.$$

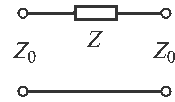
Аналогичным образом найдем волновые матрицы передачи и рассеяния четырехполюсника, представляющего собой последовательное сопротивление (рис. 9.30):

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\tilde{Z}}{2} & -\frac{\tilde{Z}}{2} \\ \frac{\tilde{Z}}{2} & 1 - \frac{\tilde{Z}}{2} \end{bmatrix}$$

и

$$[S] = \frac{1}{2 + \tilde{Z}} \begin{bmatrix} \tilde{Z} & 2 \\ 2 & \tilde{Z} \end{bmatrix},$$

где  $\tilde{Z} = \frac{Z}{Z_0}$  — нормированное сопротивление;  $Z_0$  — волновое сопротивление подводящих линий.



**Рис. 9.30.** Последовательное сопротивление с одинаковыми подводящими линиями

### 9.5. Резонансные системы

В § 9.2 рассматривались линии конечной длины в режиме стоячих волн. При соответствующих условиях эти линии ведут себя как колебательные контуры с сосредоточенными параметрами.

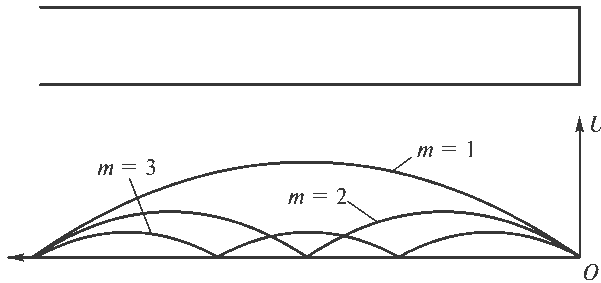
Линия короткозамкнутая на конце (см. рис. 9.5 и 9.18) эквивалентна последовательному контуру, если ее длина  $l$  равна целому числу полуволен, т.е.

$$l_p = m \frac{\lambda_p}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $\lambda_p$  — резонансная длина волны.

Входное сопротивление короткозамкнутой линии согласно (9.34)

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(l)}{\dot{I}(l)} = jZ_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l_p$$



**Рис. 9.31.** Типы колебаний в линии, короткозамкнутой на конце, при последовательном резонансе

и при  $l_p = m \frac{\lambda_p}{2}$  равно нулю. В окрестности резонанса частотные свойства линии аналогичны частотным свойствам последовательного контура.

При заданной длине линии  $l$  в ней может возникнуть множество типов колебаний с дискретными длинами волн

$$\lambda_{pm} = \frac{2l}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

и соответственно с разными резонансными частотами

$$f_{pm} = \frac{v}{\lambda_{pm}} = \frac{vm}{2l_p} = \frac{m}{2l_p \sqrt{L_0 C_0}}.$$

На рис. 9.31 представлены три типа колебаний, соответствующие  $m = 1, 2, 3$ .

Линия, короткозамкнутая на конце, эквивалентна параллельному контуру, если ее длина равна нечетному числу четвертей длин волн

$$l_p = (2n - 1) \frac{\lambda_p}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Входное сопротивление такой линии равно бесконечности. Вблизи резонанса частотные свойства линии аналогичны свойствам параллельного контура.

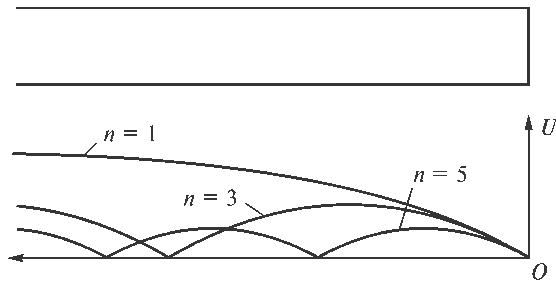
При заданной длине  $l$  линия обладает множеством резонансных частот

$$f_{pn} = \frac{v}{\lambda_{pn}} = \frac{v(2n - 1)}{4l_p} = (2n - 1) \frac{1}{4l_p \sqrt{L_0 C_0}},$$

соответствующих различным типам колебаний (рис. 9.32).

Аналогичные результаты можно получить и для разомкнутых на конце отрезков линий (см. рис. 9.6 и 9.19). Входное сопротивление такой линии согласно (9.34)

$$Z_{вх} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}$$



**Рис. 9.32.** Типы колебаний в линии, короткозамкнутой на конце, при параллельном резонансе

и при длине линии, равной нечетному числу четвертей длин волн, равно нулю, т. е. линия эквивалентна последовательному контуру, а при длине, равной целому числу полуволн, входное сопротивление равно бесконечности, т. е. линия эквивалентна параллельному контуру.

Резонансными свойствами обладают отрезки линий с сосредоточенными емкостями или индуктивностями на конце (см. рис. 9.7 и 9.9). Так, если на конце линии подключен конденсатор, что эквивалентно удлинению линии на отрезок  $d$ , определяемый формулой (9.33), то система будет вести себя как последовательный контур при условии, что на отрезке  $l + d$  укладывается нечетное число четвертей длин волн:

$$(2n - 1) \frac{\lambda}{4} = l + d = l + \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega CZ_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

При этом входное сопротивление будет равно нулю.

Если частота или длина волны задана, то можно определить длину линии  $l$ . Если задана длина линии  $l$ , то можно определить резонансные длины волн возможных типов колебаний, решив трансцендентное уравнение

$$(2n - 1) \frac{\lambda_p}{4} = l + \frac{\lambda_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\lambda_p} v CZ_0. \tag{9.60}$$

Вводя новую переменную

$$y = \frac{2\pi}{\lambda_p},$$

представим уравнение (9.60) в виде

$$\frac{\pi(2n - 1)}{2y} = l + \frac{1}{y} \operatorname{arctg} y v CZ_0$$

или

$$\frac{\pi(2n - 1)}{2} - ly = \operatorname{arctg} y v CZ_0.$$

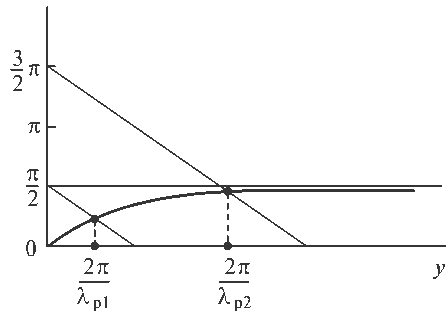


Рис. 9.33. К определению резонансных длин волн в линии, замкнутой на конденсатор

Решения уравнения находятся по точкам пересечения прямой, определяемой левой частью уравнения, и кривой, определяемой правой частью (рис. 9.33).

В СВЧ-диапазоне в качестве резонансных систем используют отрезки волноводов с неоднородностями на концах (диафрагмы или штыри).

Диафрагма представляет собой тонкую металлическую перегородку, расположенную в плоскости, перпендикулярной оси волновода и частично перекрывающую его поперечное сечение. Потерями в диафрагме можно пренебречь и рассматривать ее как параллельную реактивную проводимость. В непосредственной близости от диафрагмы в волноводе могут существовать поля высших типов волн, быстро затухающих по мере удаления от диафрагмы. При достаточном расстоянии между диафрагмами влиянием этих полей можно пренебречь и при расчетах использовать волновые матрицы.

Если диафрагма помещена в прямоугольный волновод, в котором распространяется основная волна  $H_{10}$  и края диафрагмы параллельны электрическому полю (рис. 9.34, а), то такая диафрагма концентрирует магнитное поле и эквивалентна параллельной индуктивности. Если края диафрагмы перпендикулярны электрическому полю (рис. 9.34, б), то она концентрирует электрическое поле и эквивалентна параллельной емкости.

Пусть резонатор образован с помощью двух одинаковых емкостных диафрагм и включен в тракт между согласованными генератором и нагрузкой (рис. 9.35). Нормированная проводимость диафрагм положительна и равна

$$\tilde{b} = \frac{b}{Y_0},$$

где  $Y_0$  — волновая проводимость волновода.

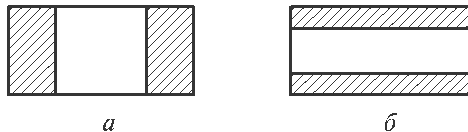


Рис. 9.34. Диафрагмы в прямоугольном волноводе, работающем на основной волне  $H_{10}$ : а — эквивалентная индуктивной проводимости; б — эквивалентная емкостной проводимости



Пренебрегая потерями и рассматривая резонатор как каскадное соединение трех четырехполюсников, используя волновые матрицы передачи (9.58) и (9.59), получаем

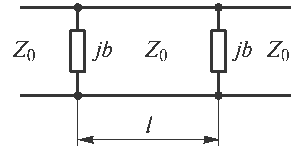


Рис. 9.35. К расчету волнового резонатора

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 + j\frac{\tilde{b}}{2} & j\frac{\tilde{b}}{2} \\ -j\frac{\tilde{b}}{2} & 1 - j\frac{\tilde{b}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\beta l} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + j\frac{\tilde{b}}{2} & j\frac{\tilde{b}}{2} \\ -j\frac{\tilde{b}}{2} & 1 - j\frac{\tilde{b}}{2} \end{bmatrix}.$$

Для полной характеристики резонатора без потерь достаточно определить

$$T_{11} = \left(1 + j\frac{\tilde{b}}{2}\right)^2 e^{j\beta l} + \frac{\tilde{b}^2}{4} e^{-j\beta l}.$$

Используя формулу Эйлера, получаем

$$T_{11} = (\cos \beta l - \tilde{b} \sin \beta l) + j \left( \tilde{b} \cos \beta l + \sin \beta l - \frac{\tilde{b}^2}{2} \sin \beta l \right).$$

Коэффициент передачи по мощности

$$K_P = \frac{P_n}{P_r} = \frac{1}{|T_{11}|^2},$$

где  $P_n$  — мощность, проходящая в нагрузку;  $P_r$  — мощность генератора;

$$|T_{11}|^2 = 1 + \tilde{b}^2 \left( \cos \beta l - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l \right)^2.$$

Окончательно, получаем

$$K_P = \frac{P_n}{P_r} = \frac{1}{1 + a^2},$$

где  $a = \tilde{b} \left( \cos \beta l - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l \right)$  — расстройка.

При резонансе отражения от двух диафрагм взаимно уничтожаются. Вся мощность от генератора поступает в нагрузку. До резонатора имеет место бегущая волна, в резонаторе — стоячая, между резонатором и нагрузкой — бегущая. Следовательно при резонансе

$$P_r = P_n; \quad K_P = 1; \quad \cos \beta l_p - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l_p = 0$$

и

$$\operatorname{tg} \beta l_p = \frac{2}{\tilde{b}},$$

или

$$\frac{2\pi l_p}{\Lambda} = n\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{\tilde{b}},$$

где  $\Lambda$  — длина волны в волноводе.

Отсюда резонансная длина

$$l_p = \frac{n\Lambda}{2} + \frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2}{\tilde{b}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Если  $\tilde{b} = \infty$ , т. е. диафрагма превращается в сплошную перегородку, то наименьшая возможная резонансная длина

$$l_{p \min} = \frac{\Lambda}{2}.$$

Если диафрагма эквивалентна емкостной (положительной) проводимости, изменяющейся в пределах  $\infty > \tilde{b} > 0$ , то минимальная резонансная длина

$$\frac{\Lambda}{2} < l_{p \min} < \frac{3}{4}\Lambda.$$

Если диафрагма эквивалентна индуктивной (отрицательной) проводимости, изменяющейся в пределах  $-\infty < \tilde{b} < 0$ , то минимальная резонансная длина удовлетворяет условию

$$\frac{\Lambda}{4} < l_{p \min} < \frac{\Lambda}{2}.$$

Таким образом, емкостные диафрагмы увеличивают резонансную длину, а индуктивные — уменьшают.

## Вопросы

1. Как опытным путем определить постоянную распространения и волновое сопротивление линии?
2. Чему равна фазовая скорость для воздушной линии без потерь?
3. При каких условиях в линии возникают стоячие волны?
4. При каком сопротивлении нагрузки в линии нет отраженных волн?
5. Чему равен коэффициент отражения по напряжению от конца линии? Как зависит этот коэффициент от сопротивления нагрузки и волнового сопротивления линии?
6. Какая матрица называется матрицей рассеяния? Каков физический смысл элементов этой матрицы?

7. Как определить волновую матрицу передачи  $[T]$  каскадного соединения двух четырехполосников, волновые матрицы передачи которых известны?
8. Что называется коэффициентом бегущей волны и коэффициентом стоячей волны?
9. Что называется четвертьволновым трансформатором? Каково его назначение?
10. Будет ли передаваться энергия по линии без потерь, замкнутой на реактивное сопротивление?
11. Чему равно входное сопротивление линии без потерь, длина которой равна нечетному числу четвертей длин волн, если конец ее разомкнут, короткозамкнут, нагружен на активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии, на емкость, на индуктивность?
12. Чему равно входное сопротивление линии без потерь, длина которой равна целому числу полуволн, если конец ее разомкнут, короткозамкнут, нагружен на активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии, на емкость, на индуктивность?

### Задачи

1. Определите погонные параметры  $R_0$ ,  $G_0$ ,  $C_0$  и  $L_0$  коаксиального кабеля. Радиус внутреннего проводника кабеля  $a_1 = 1$  мм, наружной оплетки  $a_2 = 5$  мм и  $a_3 = 6$  мм, проводимость проводника  $\sigma_{\text{пров}} = 5,6 \cdot 10^7$  См/м, проводимость заполняющего диэлектрика  $\sigma_{\text{диэл}} = 10^{-14}$  См/м, его диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 2$ .
2. Линия без потерь разомкнута на конце. Напряжение на входе линии  $U_1 = 60$  В, волновое сопротивление 600 Ом, длина 100 км, фазовая постоянная  $\beta = 0,01$  км $^{-1}$ . Определите напряжение в конце линии, а ток в ее начале.
3. Источник синусоидальной ЭДС частотой 100 МГц подключен к разомкнутой на конце линии без потерь длиной 40 м. Волновое сопротивление линии 200 Ом, напряжение на разомкнутом конце 80 В. Найдите входное сопротивление, напряжение и ток на входе линии.
4. Источник ЭДС частотой 100 МГц подключен к линии без потерь, короткозамкнутой на конце, длиной 75 м и волновым сопротивлением 100 Ом. Определите ток в закорачивающей перемычке.
5. На конце линии с волновым сопротивлением 600 Ом включена индуктивность 2 мкГн. Частота источника ЭДС 100 МГц. Определите, на каком расстоянии от конца линии находится ближайший узел напряжения.
6. Линия длиной 120 м и волновым сопротивлением 50 Ом нагружена на сопротивление  $Z_{\text{н}} = 100 + j100$  Ом. Определите входное сопротивление и коэффициент стоячей волны на частоте 125 МГц.
7. Линия без потерь замкнута на индуктивность. Длина линии 15 м, ее волновое сопротивление 500 Ом, частота питающего напряжения 7,5 МГц. Подберите индуктивность нагрузки так, чтобы цепь оказалась эквивалентной последовательному контуру, настроенному на резонанс.

## Приложение

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

При исследовании электромагнитных процессов в средах основным математическим аппаратом являются тензорный и векторный анализы.

Изучение электромагнитных процессов в движущихся средах основано на специальной теории относительности и четырехмерном представлении характеристик электромагнитного поля и среды.

Теория функций комплексного переменного лежит в основе символического метода, используемого при исследовании электромагнитных процессов в линейных и нелинейных средах.

При исследовании электромагнитных процессов в линейных и нелинейных безграничных средах и при решении краевых задач в ограниченных средах используются специальные уравнения и функции математической физики.

### П.1. Преобразование координат. Тензоры

Обозначим оси прямоугольной правой декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда расстояние  $\Delta l$  между двумя точками в этой системе

$$\Delta l^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2,$$

где  $\Delta x_i$  — соответствующая разность координат точек ( $i = 1, 2, 3$ ).

Расстояние  $\Delta l$  называется интервалом, а его значение — длиной интервала.

При переходе от одной системы координат к другой абсциссы и ординаты точек изменяются. Такой переход называется *преобразованием координат*; оно может заключаться в изменении начала координат, повороте координатных осей или в одновременном повороте осей и переносе начала координат.

Если при преобразовании координат меняются абсциссы и ординаты точек, но не меняются расстояния между этими точками, то пространство называется *евклидовым*.

Величины, не зависящие от преобразования координат, называются *инвариантными*. Для евклидова пространства свойство инвариантности выполняется и в случае бесконечно малого интервала

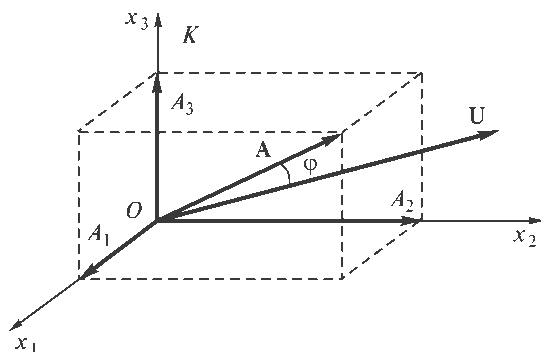


Рис. П.1. Разложение вектора  $\mathbf{A}$  на составляющие по координатным осям

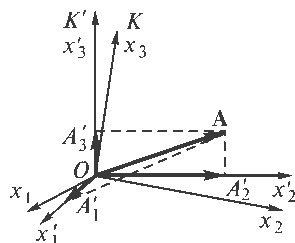


Рис. П.2. Переход от системы  $K$  к системе  $K'$

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2.$$

Рассмотрим вектор  $\mathbf{A}$  в прямоугольной системе координат  $K(O, x_1, x_2, x_3)$ . Обозначим составляющие вектора в этой системе через  $A_1, A_2, A_3$  (рис. П.1). Составляющие того же вектора в системе  $K'(O, x'_1, x'_2, x'_3)$  обозначим соответственно через  $A'_1, A'_2, A'_3$  (рис. П.2). Связь между составляющими вектора в обеих системах определяют следующие выражения:

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_3); \\ A'_2 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_3); \\ A'_3 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты (единичные векторы) системы  $K$ ;  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  — орты системы  $K'$ .

Для упрощения выражений (П.1) косинусы девяти углов, образованных осями системы  $K$  с осями системы  $K'$  (направляющие косинусы), обозначим согласно табл. П.1.

Таблица П.1

| Орты системы $K'$  | Орты системы $K$ |                |                |
|--|------------------|----------------|----------------|
|  | $\mathbf{e}_1$   | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}'_1$  | $\alpha_{11}$    | $\alpha_{12}$  | $\alpha_{13}$  |
| $\mathbf{e}'_2$  | $\alpha_{21}$    | $\alpha_{22}$  | $\alpha_{23}$  |
| $\mathbf{e}'_3$  | $\alpha_{31}$    | $\alpha_{32}$  | $\alpha_{33}$  |
| Примечание. $\alpha_{ik} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$ . |                  |                |                |

Перепишем выражения (П.1) в сокращенной форме:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3; \\ A'_2 &= \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3; \\ A'_3 &= \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3, \end{aligned}$$

или еще короче

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} A_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Согласно правилу Эйнштейна о суммировании знак  $\Sigma$  можно опустить, так как индекс, встречающийся в произведении дважды, означает суммирование от 1 до 3.

Окончательно имеем

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k. \quad (\text{П.2})$$

Согласно этому выражению, можно дать такое определение вектора. *Вектором* в трехмерном пространстве называется совокупность трех величин, которые преобразуются при повороте системы координат согласно формуле (П.2).

Вектор есть частный случай тензора — тензор первого ранга (скаляр-тензор нулевого ранга). Далее будем пользоваться тензорами второго ранга, которые можно представить как совокупность трех векторов — тензоров первого ранга. Через векторы тензор второго ранга преобразуется по закону, аналогичному (П.2), а так как каждый вектор преобразуется по закону (П.2), то преобразование тензора при повороте координат определяется формулой

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь двойной индекс в произведении означает суммирование ( $l$  и  $m$ ). Ранг тензора определяется числом индексов ( $T_{ik}$  — тензор второго ранга). Число компонент тензора в трехмерном пространстве равно  $3^r$  (где  $r$  — ранг тензора).

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

— тензор второго ранга в трехмерном пространстве;  
в четырехмерном пространстве  $4^r$

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}$$

— тензор второго ранга в четырехмерном пространстве.

Тензором второго ранга в трехмерном пространстве называется совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте системы координат согласно формуле (П.3).

Тензором второго ранга в четырехмерном пространстве называется совокупность шестнадцати величин, преобразующихся при повороте системы координат согласно формуле (П.3).

Тензор второго ранга называется симметричным, если

$$T_{ik} = T_{ki},$$

т. е. когда равны компоненты, симметричные относительно главной диагонали. В трехмерном пространстве такой тензор определяется шестью величинами:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Тензор называется антисимметричным, если

$$T_{ik} = -T_{ki},$$

т. е. компоненты на главной диагонали равны нулю, а симметричные относительно главной диагонали компоненты равны друг другу с противоположным знаком. В трехмерном пространстве такой тензор определяется тремя величинами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -T_{12} & -T_{13} \\ T_{12} & 0 & -T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор называется самосопряженным, или эрмитовым, если

$$T_{ik} = T_{ki}^*.$$

В трехмерном пространстве этот тензор определяется шестью величинами. На главной диагонали тензора стоят действительные величины, так как только такие величины сами себе сопряжены, т.е.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12}^* & T_{13}^* \\ T_{12} & T_{22} & T_{23}^* \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

*Суммой двух тензоров* второго ранга ( $A_{ik}$ ) и ( $B_{ik}$ ) называется тензор ( $C_{ik}$ ) того же ранга, компоненты которого равны сумме компонент слагаемых тензоров:

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}.$$

Складывать можно любое число тензоров, но только одинакового ранга.

Произведением двух тензоров  $(A_{ik})$  и  $(B_{lm})$  называется тензор  $(C_{iklm})$ , компоненты которого равны произведению компонент перемноженных тензоров:

$$C_{iklm} = A_{ik}B_{lm}.$$

Перемножать можно любое число тензоров любых рангов. Ранг произведения тензоров равен сумме рангов перемножаемых тензоров. Произведение двух тензоров некоммутативно:

$$(A_{ik})(B_{lm}) \neq (B_{lm})(A_{ik}).$$

Свертыванием тензоров называется суммирование по двум индексам. Полагая два индекса тензора одинаковыми, т. е. суммируя по этим индексам, получаем из тензора ранга  $r$  тензор ранга  $r - 2$ . Например,  $(T_{ik})$  — тензор второго ранга;  $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$  — скаляр. Свертывать можно несколько раз.

Взаимным свертыванием или свертыванием произведения тензоров называется свертывание по индексам, принадлежащим различным тензорам.

Перемножая два тензора рангов  $r$  и  $s$ , получим тензор ранга  $r + s$ . Свертывая по индексам, принадлежащим различным тензорам, получим тензор ранга  $r + s - 2$ . Например,  $B_i$  — вектор;  $(\mu_{ik})$  — тензор второго ранга;  $H_i$  — вектор;  $\mu_{ik}H_k = B_i$  — вектор.

## П.2. Векторный анализ

Скалярное произведение двух векторов — скаляр и определяется выражением

$$(\mathbf{AB}) = AB \cos(\mathbf{AB}).$$

При перестановке векторов имеем

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$$

Скалярное произведение двух векторов представляет собой взаимное свертывание двух тензоров первого ранга:

$$(\mathbf{AB}) = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

Векторное произведение векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — вектор, перпендикулярный этим векторам и по абсолютной величине равный площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

В декартовой системе координат

$$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(A_2 B_3 - B_2 A_3) + \mathbf{e}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3(A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Абсолютная величина векторного произведения

$$|[\mathbf{AB}]| = AB \sin(\mathbf{AB}).$$



Направление вектора  $[\mathbf{AB}]$  определяется из условия образования правой системы с векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Векторное произведение некоммукативно, т.е.

$$[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}].$$

*Смешанное, или векторно-скалярное, произведение* трех векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  — скаляр; оно численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$(\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

При перестановке векторов имеем

$$(\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = (\mathbf{B}[\mathbf{CA}]) = (\mathbf{C}[\mathbf{AB}]) = -(\mathbf{B}[\mathbf{AC}]) = -(\mathbf{C}[\mathbf{BA}]) = -(\mathbf{A}[\mathbf{CB}]).$$

*Двойное векторное произведение* векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  определяется выражением

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \quad (\text{П.4})$$

*Тензорное поле* — область пространства, в каждой точке которого задано значение некоторой тензорной величины. В зависимости от ранга тензора поле называется скалярным (тензорное поле нулевого ранга), векторным (тензорное поле первого ранга) или тензорным ранга  $r$  (тензорное поле ранга  $r$ ).

Если поле зависит не только от координат, но и от времени, то оно называется нестационарным, если поле от времени не зависит, то оно называется стационарным.

*Скалярное поле* — область пространства, каждая точка которого характеризуется некоторым значением скаляра. Поскольку каждая точка определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , то поле определяется скалярной функцией

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_i).$$

Примером скалярного поля является поле температур.

Если поле зависит от времени, то

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x_i, t).$$

Точки поля, характеризующиеся одним и тем же значением  $\varphi(x_i)$ , образуют поверхности, называемые поверхностями равного уровня или эквипотенциальными поверхностями:

$$\varphi(x_i) = \text{const} = c.$$

Задавая различные значения  $c$ , получаем семейство поверхностей, распределение которых в пространстве характеризует скалярное поле.

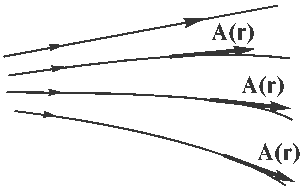


Рис. П.3. Графическое представление векторного поля

Вектор, численно равный  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  и направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания скаляра  $\varphi$ , называется градиентом скаляра:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}_0,$$

где  $\mathbf{n}_0$  — орт внешней нормали, направление наиболее быстрого возрастания скаляра  $\varphi$ . Градиент  $\varphi$  можно записать через проекции на оси координат следующим образом:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$$

Или

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi,$$

(П.5)

где

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

— оператор Гамильтона («набла»), который можно рассматривать как вектор. Под оператором Гамильтона понимается совокупность математических действий, в данном случае дифференцирование. Сам по себе оператор Гамильтона ничего не означает, он имеет смысл, будучи применимым к какой-либо величине.

Градиент является дифференциальной характеристикой скалярного поля.

Проекции оператора Гамильтона на оси координат имеют вид

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

*Векторное поле* — область пространства, каждая точка которого характеризуется некоторым значением вектора (рис. П.3)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x_i)$$

или

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(x_i, t).$$

Примерами векторных полей являются электрическое, магнитное и гравитационное поля. Поле градиента скалярного поля также является векторным.

*Векторное поле* графически характеризуется векторными, или силовыми, линиями. Векторной, или силовой, линией называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением векторного поля. Векторные

линии характеризуют не только направление, но и величину поля. Плотность их больше там, где величина поля больше (см. рис. П.3).

Дифференциальными характеристиками векторного поля являются: дивергенция, или расходимость, вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = \nabla_i A_i = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}; \quad (\text{П.6})$$

ротор, или вихрь, вектора

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Производные второго порядка:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla \nabla \varphi) = \Delta \varphi, \quad (\text{П.8})$$

где  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  — оператор Лапласа в декартовой системе координат (лапласиан),

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla \nabla \varphi] = 0; \quad (\text{П.9})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\nabla [\nabla \mathbf{A}]) = 0; \quad (\text{П.10})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}; \quad (\text{П.11})$$

$$\operatorname{grad}(\varphi \psi) = \nabla(\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi;$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = (\nabla(\varphi \mathbf{A})) = \varphi(\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \varphi) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi; \quad (\text{П.12})$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = [\nabla \varphi \mathbf{A}] = \varphi [\nabla \mathbf{A}] + [\nabla \varphi \mathbf{A}] = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\operatorname{grad} \varphi \mathbf{A}]; \quad (\text{П.13})$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}_c \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{A} \mathbf{B}_c).$$

Здесь индекс «с» означает, что величина с этим индексом при взятии производной считается постоянной.

Согласно формуле (П.4)

$$[\mathbf{A}[\mathbf{B} \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \mathbf{B});$$

$$\nabla(\mathbf{A}_c \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \nabla) + [\mathbf{A}[\nabla \mathbf{B}]];$$

$$\nabla(\mathbf{A} \mathbf{B}_c) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \nabla) + [\mathbf{B}[\nabla \mathbf{A}]].$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A}]; \quad (\text{П.14})$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{A} \mathbf{B}] = (\nabla[\mathbf{A} \mathbf{B}]) = \mathbf{B}[\nabla \mathbf{A}] - \mathbf{A}[\nabla \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (\text{П.15})$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{A} \mathbf{B}] = [\nabla[\mathbf{A} \mathbf{B}]] = [\nabla[\mathbf{A}_c \mathbf{B}]] + [\nabla[\mathbf{A} \mathbf{B}_c]].$$

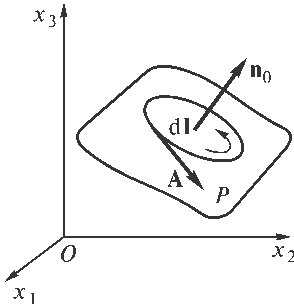


Рис. П.4. К определению циркуляции вектора

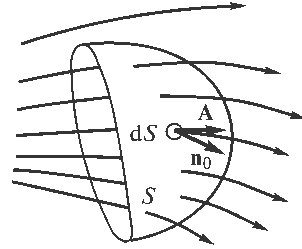


Рис. П.5. К определению потока вектора через поверхность  $S$

Воспользовавшись формулой (П.4), получим

$$\begin{aligned} [\nabla[A_c B]] &= A_c (\nabla B) - B (\nabla A_c) = A \operatorname{div} B - (A \nabla) B; \\ [\nabla[AB_c]] &= A (\nabla B_c) - B_c (\nabla A) = (B \nabla) A - B \operatorname{div} A \end{aligned}$$

и окончательно

$$\operatorname{rot}[AB] = (B \nabla) A - (A \nabla) B + A \operatorname{div} B - B \operatorname{div} A. \quad (\text{П.16})$$

**Циркуляция и поток вектора.** Криволинейным интегралом векторной функции  $A(\mathbf{r})$  называется интеграл от скалярного произведения вида

$$\int_L A \, dl, \quad (\text{П.17})$$

где  $L$  — кривая (путь интегрирования);  $dl$  — направленный элемент кривой. Выражение (П.17) является скалярным и представляет работу векторного поля  $A$  вдоль кривой  $L$ .

Если контур  $L$  замкнутый (рис. П.4), то интеграл, взятый по замкнутому контуру  $L$ , называется *циркуляцией вектора*; записывается в виде

$$\oint_L A \, dl.$$

Если одно из направлений нормали  $n_0$  принять за положительное, то за положительное направление обхода контура  $L$  принимается правое вращение по отношению к этому направлению нормали.

*Потоком  $N$  вектора  $A$  через поверхность  $S$*  (рис. П.5) называется поверхностный интеграл от скалярного произведения

$$N = \int_S A \, dS = \int_S A_n \, dS,$$

где  $S$  — поверхность интегрирования;  $d\mathbf{S}$  — направленный элемент поверхности, направление которого совпадает с направлением внешней нормали к поверхности, а величина его равна  $dS$ , т. е.

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS.$$

Поток вектора — скалярная величина, характеризующая число силовых линий, пронизывающих поверхность.

Если поверхность замкнутая, то

$$N = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_S A_n dS_n.$$

**Теорема Стокса.** Циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по замкнутому контуру равна потоку  $\text{rot } \mathbf{A}$  через поверхность  $S$ , опирающуюся на этот контур:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S}, \quad (\text{П.18})$$

или

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS.$$

где  $\text{rot}_n \mathbf{A}$  — проекция  $\text{rot } \mathbf{A}$  на направление нормали  $\mathbf{n}_0$  к поверхности  $S$ .

Если поверхность  $\Delta S$  столь мала, что во всех ее точках  $\text{rot}_n \mathbf{A}$  можно считать постоянным, то

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \approx \text{rot}_n \mathbf{A} \Delta S.$$

В пределе при  $\Delta S \rightarrow 0$

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta S}. \quad (\text{П.19})$$

Вектор всегда больше своей проекции. Проекция  $\text{rot}_n \mathbf{A}$  будет наибольшей, когда  $\mathbf{n}_0$  совпадает с  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Очевидно, что  $\text{rot } \mathbf{A}$  направлен по нормали к плоскости, в которой циркуляция вектора максимальна. Модуль вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  в данной точке поля равен пределу отношения циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по границе площадки, проходящей через эту точку и совпадающей с плоскостью, где циркуляция максимальна, к величине площадки, когда она стягивается в эту точку.

**Теорема Остроградского — Гаусса.** Поток вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен интегралу от  $\text{div } \mathbf{A}$ , взятому по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью, т. е.

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV. \quad (\text{П.20})$$

Если объем  $\Delta V$  так мал, что  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в любой точке можно считать постоянной, то

$$\oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} \approx \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta V.$$

В пределе

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{П.21})$$

Дивергенция вектора  $\mathbf{A}$  в данной точке равна пределу отношения потока вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность  $S$ , содержащую внутри себя эту точку, к объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , когда она стягивается в точку.

Дивергенция — скалярная величина, характеризующая интенсивность источников или стоков поля. Те точки поля, где  $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$ , называются стоками поля, векторные линии сходятся к этим точкам; те точки поля, где  $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$ , называются источниками поля, векторные линии расходятся из этих точек. Если  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , то поле не имеет ни источников, ни стоков.

**Классификация векторных полей.** *Потенциальное поле* — это безвихревое поле, для которого

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{П.22})$$

При этом

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{П.23})$$

поскольку согласно (П.9)

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Функция  $\varphi$  называется потенциальной функцией или потенциалом поля. Потенциал поля определяется неоднозначно, так как

$$\operatorname{grad}(\varphi + c) = \operatorname{grad} \varphi.$$

Знак « $-$ » в (П.23) взят потому, что линии поля  $\mathbf{E}$  направлены в сторону убывания потенциала.

В потенциальном поле

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0,$$

и, следовательно, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi \neq 0.$$

Поскольку  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , то согласно теореме Стокса

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0.$$

Физически это означает, что работа вдоль замкнутого контура в потенциальном поле равна нулю.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \neq 0,$$

т. е. поток вектора через замкнутую поверхность не равен нулю.

*Соленоидальное поле* — поле, в котором нет источников и стоков:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{П.24})$$

Соленоидальное поле можно характеризовать векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (\text{П.25})$$

поскольку согласно (П.10)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Векторный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \mathbf{A} \neq 0.$$

Поскольку  $\operatorname{rot} \mathbf{A} \neq 0$ , то в соответствии с теоремой Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \neq 0,$$

т. е. в соленоидальном поле работа вдоль замкнутого контура не равна нулю.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

т. е. поток вектора  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность равен нулю. Из этого следует, что линии поля вектора  $\mathbf{B}$  или замкнуты, или уходят в бесконечность.

При условии

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{C} = 0$$

поле вектора  $\mathbf{C}$  является безвихревым, не имеет источников и стоков. Такое поле называется лапласовым и характеризуется одновременно векторным и скалярным потенциалами:

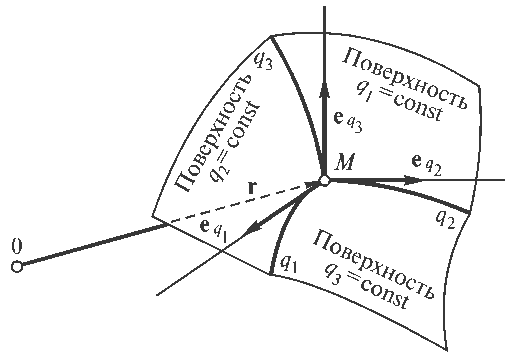
$$\mathbf{C} = -\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

которые согласно (П.8) и (П.11) при условии  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta \varphi = 0; \quad \Delta \mathbf{A} = 0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

**Дифференцирование в криволинейных ортогональных координатах.** Положение точки  $M$  в пространстве определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , координаты которого  $q_1, q_2, q_3$  зависят от принятой системы координат. Положение точки в пространстве можно однозначно определить пересечением трех поверхностей (рис. П.6), которые называются координатными. Пересечение двух поверхно-



**Рис. П.6.** Координатные поверхности, линии и оси ортогональной криволинейной системы координат

стей дает линию, называемую координатной; значения двух координат на этой линии постоянны, а третьей — меняется. Координаты точки  $q_1, q_2, q_3$  называются криволинейными.

Наиболее распространены ортогональные криволинейные системы, в которых касательные к координатным линиям в каждой точке пересекаются под прямыми углами. Эти касательные называются координатными осями; направление их меняется от точки к точке.

В общем случае координаты точки в обобщенной криволинейной системе связаны с координатами прямоугольной декартовой системы уравнениями

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, x_2, x_3); \\ q_2 &= q_2(x_1, x_2, x_3); \\ q_3 &= q_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

и наоборот

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3); \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3); \\ x_3 &= x_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

В криволинейной системе координат изменение координаты  $q_i$  на  $dq_i$  приводит к перемещению  $dl_i$  вдоль координатной линии:

$$dl_i = h_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{П.26})$$

где  $h_i$  зависят от вида координат и называются коэффициентами Ламэ (повторение индекса не означает суммирования). Действительно, элемент длины  $dl_i$  координатной линии

$$dl_1 = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad (q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}),$$

где



$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1; \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1; \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1.$$

Отсюда

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2} \cdot dq_1 = h_1 dq_1.$$

Аналогично

$$dl_2 = h_2 dq_2; \quad dl_3 = h_3 dq_3.$$

На основании этого коэффициенты Ламэ можно записать в виде

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (\text{П.27})$$

Интервал между двумя точками

$$dl = \sqrt{h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2}. \quad (\text{П.28})$$

Элементы координатной поверхности:

$$\begin{aligned} ds_1 &= dl_2 dl_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3; \\ ds_2 &= dl_1 dl_3 = h_1 h_3 dq_1 dq_3; \\ ds_3 &= dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

Элемент объема

$$dV = ds_1 dl_1 = ds_2 dl_2 = ds_3 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{П.30})$$

С помощью полученных соотношений проведем дифференцирование в криволинейной системе координат. В соответствии с выражениями (П.5) и (П.26) получим

$$\begin{aligned} \text{grad}_1 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}; \\ \text{grad}_2 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}; \\ \text{grad}_3 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

С учетом равенства (П.21)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]. \quad (\text{П.32})$$

В соответствии с формулой (П.19)

$$\begin{aligned} \text{rot}_1 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_3} \right]; \\ \text{rot}_2 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_1} \right]; \\ \text{rot}_3 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

Согласно выражениям (П.8), (П.31) и (П.32)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{П.34})$$

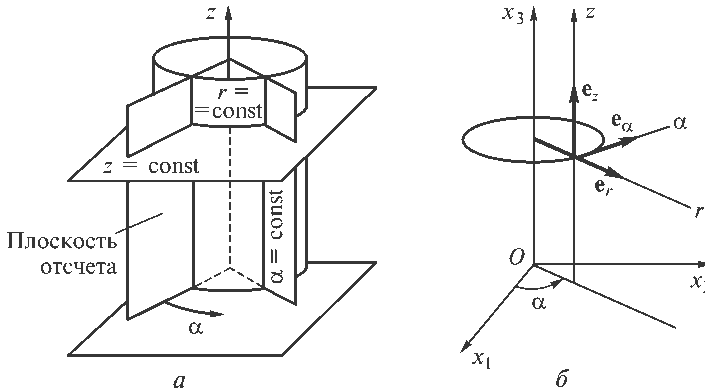
Выражения (П.31)—(П.34), переписанные для цилиндрической и сферической систем координат, широко применяют в теории электромагнитного поля.

**Цилиндрическая система координат** (рис. П.7). Координатные поверхности в цилиндрической системе координат: плоскости ( $z = \text{const}$ ), круговые цилиндры ( $r = \text{const}$ ) и полуплоскости ( $\alpha = \text{const}$ ), проходящие через ось  $z$  под углом  $\alpha$  к фиксированной полуплоскости. Координатные линии в этой же системе координат прямые ( $r = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ ) и окружности ( $r = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ ). Направления координатных осей определяются ортами  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_z$ . В цилиндрической системе  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \alpha$  и  $q_3 = z$ .

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:  $x_1 = r \cos \alpha$ ,  $x_2 = r \sin \alpha$  и  $x_3 = z$ .

Коэффициенты Ламэ:  $h_r = 1$ ,  $h_\alpha = r$ ,  $h_z = 1$ .

Согласно формулам (П.31)—(П.34)



**Рис. П.7.** Цилиндрическая система координат:

$a$  — координатные поверхности;  $b$  — координатные линии, оси и их орты

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z; \quad (\text{П.35})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П.36})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z; \quad (\text{П.37})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.38})$$

Согласно (П.11)

$$\Delta \mathbf{A} = \left( \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_r + \left( \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha + \Delta A_z \mathbf{e}_z. \quad (\text{П.39})$$

Здесь  $\Delta A_r$ ,  $\Delta A_\alpha$  и  $\Delta A_z$  — лапласианы скалярных величин, определяемые по формуле (П.38).

**Сферическая система координат** (рис. П.8). Координатными поверхностями в сферической системе координат являются сферы радиусом  $r$ , конусы с углом раствора  $2\vartheta$  и полушпоскости, проходящие через ось  $z$  под углом  $\alpha$  к фиксированной полушпоскости; координатными линиями являются окружности ( $r = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$  и  $r = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$ ) и прямые ( $\alpha = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$ ). Направления координатных осей определяются ортами  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$ . В этой системе координат  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \vartheta$  и  $q_3 = \alpha$ .

Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:  $x_1 = r \sin \vartheta \cos \alpha$ ,  $x_2 = r \sin \vartheta \sin \alpha$ ,  $x_3 = r \cos \vartheta$ .

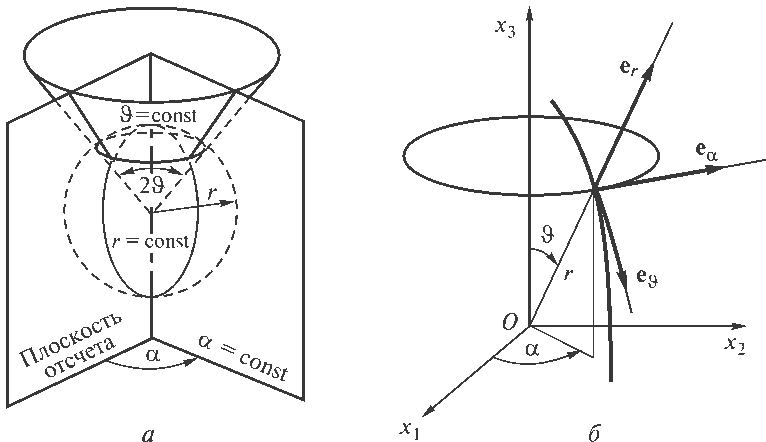


Рис. П.8. Сферическая система координат:

$a$  — координатные поверхности;  $b$  — координатные оси и их орты

Коэффициенты Ламэ:  $h_r = 1$ ,  $h_\vartheta = r$ ,  $h_\alpha = r \sin \vartheta$ .

В соответствии с формулами (П.31)—(П.34)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha; \quad (\text{П.40})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \quad (\text{П.41})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\ + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\alpha; \end{aligned} \quad (\text{П.42})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (\text{П.43})$$

В соответствии с формулой (П.11)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = \left[ \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \\ + \left[ \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\ + \left[ \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

Здесь  $\Delta A_r$ ,  $\Delta A_\alpha$  и  $\Delta A_\vartheta$  — лапласианы скалярных величин, определяемые по формуле (П.43).

### П.3. Специальная теория относительности

Специальная теория относительности создана А. Эйнштейном в 1905 г. Эта теория возникла при попытке согласовать между собой экспериментальные данные, относящиеся к электродинамике движущихся сред и связанные с неудачными опытами Майкельсона по обнаружению движения Земли относительно эфира (опыт Майкельсона). При этом Эйнштейну пришлось выйти из рамок электродинамики и создать общую физическую теорию.

**Принцип относительности Эйнштейна.** Для описания события необходимо связать его с определенной системой отсчета, т. е. необходимо указать, в каком месте и в какое время оно происходит. Место определяется координатами, время — часами.

Системы координат, в которых движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью, называются *инерциальными*. Если две системы координат движутся относительно друг друга равно-

мерно и прямолинейно и одна из них является инерциальной, то и другая является инерциальной. Если тело покоится в одной инерциальной системе координат, то оно может двигаться в другой инерциальной системе, двигаться с иной скоростью в третьей, но ни в одной инерциальной системе тело не будет двигаться с ускорением.

Принцип относительности заключается в том, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время, в различных инерциальных системах имеет один и тот же вид. (Уравнения, сохраняющие форму при координатных преобразованиях, называются ковариантными.)

В теории поля предполагается, что возмущение поля в некоторой точке распространяется с конечной скоростью. Максимальная скорость распространения возмущения одинакова во всех инерциальных системах и равна скорости света в вакууме ( $c = 2,99792 \cdot 10^8$  м/с).

Принципом относительности Эйнштейна является объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения возмущения. Из этого принципа следует относительность одновременности событий.

Указание места и времени совершения события имеет смысл, когда даны численные значения координат места и времени как результат вполне определенных и принципиально выполнимых измерений, которые осуществляются с помощью обычных координатных масштабов и часов. Часы расставляются в исследуемые точки и в начало координат и регулируются следующим образом: из начала координат посылается сигнал к регулируемым часам, находящимся на расстоянии  $l$  от начала координат. Наблюдатель, находящийся у этих часов, ставит время  $t = l/c$  в момент получения светового сигнала.

При этих условиях два события, происходящие в разных точках системы, считаются одновременными, если часы, находящиеся в этих точках, показывают для этих событий одинаковое время. Однако эти события в другой системе будут неодновременными.

Действительно, рассмотрим две системы координат  $K$  и  $K'$ , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью  $u$  (рис. П.9). Причем система  $K'$  движется относительно  $K$  вправо, вдоль оси  $x_1$ .

Пусть из некоторой точки  $A$  на оси  $x'_1$  системы  $K'$  посылаются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. В системе  $K'$  скорость сигнала равна  $c$  и в точки  $B$  и  $C$ , равноудаленные от точки  $A$ , сигнал приходит одновременно. Однако эти события (приход сигнала в точки  $B$  и  $C$ ), с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе  $K$ , не будут одновременными, так как согласно принципу относительности скорость сигнала в системе  $K$  будет также равна  $c$ , но точка  $B$  при движении системы  $K'$  движется навстречу сигналу, а точка  $C$  — по направлению от сигнала и, следовательно, в точку  $B$  сигнал приходит раньше, чем в точку  $C$ .

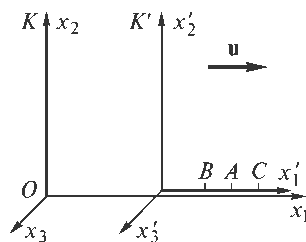


Рис. П.9. Перемещение системы координат  $K'$  в положительном направлении оси  $x_1$  со скоростью  $u$

**Интервал.** В декартовой системе координат расстояние между двумя точками

$$\Delta l^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2,$$

где  $\Delta x_i$  — соответствующая разность координат точек ( $i = 1, 2, 3$ ). Расстояние это называется интервалом, а величина  $\Delta l$  — длиной интервала.

При переходе от одной системы координат к другой абсциссы и ординаты точек изменяются, а расстояние остается тем же. Величины, не меняющиеся при преобразовании координат, называются инвариантными. Свойство инвариантности выполняется и в случае бесконечно малого интервала

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2.$$

Событие определяется тремя координатами и временем, поэтому удобно пользоваться четырехмерным пространством, в котором три измерения — пространственные, а четвертое — время. Всякое событие изображается точкой, определяемой координатами  $x_1, x_2, x_3, t$  в системе  $K$  и  $x'_1, x'_2, x'_3, t'$  в системе  $K'$ .

Пусть одно событие состоит в том, что из точки с координатами  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$  в системе  $K$  в момент времени  $t^{(1)}$  отправляется сигнал со скоростью света  $c$ . Второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$  в момент времени  $t^{(2)}$ . Расстояние  $\Delta l$ , пройденное сигналом, определяется, с одной стороны, выражением

$$\Delta l^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2,$$

где  $\Delta x_i$  — соответствующая разность координат, а с другой стороны, выражением

$$\Delta l^2 = c^2 \Delta t^2.$$

Таким образом, зависимость между координатами обоих событий в системе  $K$  имеет вид

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2 = 0.$$

Поскольку скорость света в обеих системах одинакова, то в системе  $K'$

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0.$$

Аналогично трехмерному евклидову пространству величину, определяемую отношением

$$\Delta S^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2,$$

называют интервалом между двумя событиями.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то

$$dS^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 - c^2 dt^2. \quad (\text{П.45})$$

Аналогично определяется интервал и в системе  $K'$ . Очевидно, что интервал является инвариантом, так как определяющая его разность остается равной нулю при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$ . Однако эта разность может быть и не равной нулю, если речь идет не об отправлении и получении сигнала, а о других событиях, но она по-прежнему остается инвариантом.

Обозначим

$$x_4 = jct,$$

тогда выражение (П.45) перепишем в следующем виде:

$$dS^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2. \quad (\text{П.46})$$

Поэтому, рассматривая четырехмерное пространство, будем характеризовать событие координатами  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). В этом случае  $\Delta S^2$  можно истолковать как квадрат расстояния между точками  $x_i^{(1)}$  и  $x_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), а  $dS^2$  — как квадрат элемента длины в четырехмерном пространстве.

Только в евклидовой геометрии интервал равен сумме квадратов разностей координат и поэтому интервал  $dS^2$  (П.46) можно рассматривать как инвариант четырехмерной евклидовой геометрии.

**Преобразования Лоренца.** Рассмотрим две системы, движущиеся друг относительно друга со скоростью  $u$ , так что ось  $x_1$  все время совпадает с осью  $x'_1$  и в начальный момент  $t = 0$  начало координат одной системы совпадает с началом координат другой (см. рис. П.9). С точки зрения классической механики время события абсолютно, т. е. не зависит от системы координат, и связь между координатами в системе  $K'$  и  $K$  определяется выражениями

$$x'_1 = x_1 - ut; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3; \quad t' = t, \quad (\text{П.47})$$

называемыми преобразованием Галилея.

Согласно теории относительности эти преобразования можно заменить новыми линейными преобразованиями, основанными на инвариантности скорости света и не предполагающими время абсолютным. Эти преобразования не должны выделять одну инерциальную систему относительно другой и они являются линейными. Очевидно, что

$$x'_1 = a(x_1 - ut); \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3; \quad t' = bt + gx_1 \quad (\text{П.48})$$

(в силу симметрии  $t'$  от  $x_2$  и  $x_3$  не зависит).

Найдем коэффициенты преобразования  $a$ ,  $b$  и  $g$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  из начала координат системы  $K$ , которое в этот момент совпадает с началом координат системы  $K'$ , излучается сферическая электромагнитная волна. Скорость ее распространения равна  $c$  и одинакова во всех направлениях. Тогда распространение фронта волны в системе  $K$  можно записать в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2, \quad (\text{П.49})$$

а в системе  $K'$  — в виде

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 t'^2. \quad (\text{П.50})$$

Подставляя (П.48) в (П.50) и группируя подобные члены, получаем

$$(c^2 b^2 - u^2 a^2) t^2 = (a^2 - c^2 g^2) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(ua^2 + c^2 bg) x_1 t.$$

Сравнивая полученное выражение с (П.49), получаем

$$c^2 b^2 - u^2 a^2 = c^2;$$

$$a^2 - c^2 g^2 = 1;$$

$$ua^2 + c^2 bg = 0.$$

Отсюда

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad (\text{П.51})$$

$$g = \frac{1 - b^2}{ub} = -\frac{bu}{c^2}.$$

Подставляя (П.51) в (П.48), получаем

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$x'_2 = x_2;$$

$$x'_3 = x_3; \quad (\text{П.52})$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Выражения (П.52) представляют собой *преобразования Лоренца*. Если относительная скорость систем  $K$  и  $K'$  мала по сравнению со скоростью света  $c$  ( $u \ll c$ ), то (П.52) переходят в формулы преобразования Галилея (П.47). Спра-



ведливость преобразований Лоренца можно проверить экспериментально только в том случае, когда  $(u/c)^2$  больше вероятной погрешности опыта.

Решая уравнения (П.52) относительно  $x_1, x_2, x_3, t$ , получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ x_2 &= x'_2; \\ x_3 &= x'_3; \\ t &= \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{П.53}$$

Выражения (П.53) получаются из (П.52) при изменении знака относительной скорости, так как система  $K$  движется со скоростью  $-u$  по отношению к системе  $K'$ . При  $u > c$  координаты  $x_1$  и  $t$  становятся мнимыми, следовательно, движение со скоростью, большей скорости света, невозможно.

#### Следствия из преобразований Лоренца.

1. Пусть в системе  $K$  покоится стержень, параллельный оси  $x_1$ . Длина его, измеренная в этой системе,

$$\Delta x_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)},$$

где  $x_1^{(2)}$  и  $x_1^{(1)}$  — координаты концов стержня, измеренные в системе  $K$ .

Найдем длину стержня в системе  $K'$ . Для этого определим координаты обоих концов стержня ( $x_1'^{(2)}$  и  $x_1'^{(1)}$ ) в этой системе в один и тот же момент времени  $t'$ . Согласно (П.53)

$$x_1^{(1)} = \frac{x_1'^{(1)} + ut'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad x_1^{(2)} = \frac{x_1'^{(2)} + ut'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Очевидно, что в системе  $K'$  длина стержня  $\Delta x'_1 = x_1'^{(2)} - x_1'^{(1)}$ . Вычитая  $x_1^{(1)}$  из  $x_1^{(2)}$ , получаем

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad \text{или} \quad \Delta x'_1 = \Delta x_1 \sqrt{1 - (u/c)^2}. \tag{П.54}$$

Таким образом, длина стержня в системе, в которой он движется, уменьшается в  $\sqrt{1 - (u/c)^2}$  раз. Этот эффект называется *лоренцовым сокращением*.

Собственной длиной стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Из выражения (П.54) следует, что это наибольшая длина.

При движении поперечные размеры тела не меняются, и, следовательно, объем тела при его движении сокращается по формуле

$$V = V_0 \sqrt{1 - (u/c)^2}, \quad (\text{П.55})$$

где  $V_0$  — собственный объем тела.

2. Пусть в системе  $K'$  покоятся часы. Рассмотрим два события, происшедших в одном и том же месте  $x'_1, x'_2, x'_3$  системы  $K'$ . Время в системе  $K'$  между этими событиями  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Найдем время  $\Delta t$ , которое прошло между этими событиями в системе отсчета  $K$ , относительно которой движется система  $K'$ . Из (П.53) находим

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Вычитая  $t_1$  из  $t_2$ , получаем

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad \text{или} \quad \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - (u/c)^2}.$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе  $K$ , ход часов, находящихся в движущейся системе  $K'$ , оказывается замедленным в  $\sqrt{1 - (u/c)^2}$  раз. Кроме того, наблюдаемые из системы  $K$  часы, размещенные в различных точках системы  $K'$ , будут показывать время в зависимости от их положения. Чем дальше по оси  $x'_1$  от начала координат  $K'$  расположены часы, тем более отстают их показания, с точки зрения наблюдателя системы  $K$ .

Рассмотрим ход часов, находящихся в системе  $K$ , с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе  $K'$ :

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}},$$

т. е. часы, находящиеся на положительной половине оси  $x_1$ , опережают часы, помещенные в начале координат. Временной интервал

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (u/c)^2}},$$

т. е. часы в системе  $K$ , с точки зрения наблюдателя системы  $K'$ , оказываются замедленными.

Время, которое показывают часы, движущиеся вместе с рассматриваемой системой, называется собственным временем.

**Четырехмерные вектор и тензор.** Радиус-вектором в четырехмерном пространстве, представляющем собой вектор, проведенный из начала координат в исследуемую точку, называется совокупность четырех величин  $x_i$ , преобразующихся при повороте системы координат в соответствии с формулой (П.2):

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k; \quad x_k = \alpha_{ki} x'_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Согласно преобразованию Лоренца (П.52), учитывая, что

$$x_4 = jct; \quad x'_4 = jct',$$

получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + j \frac{u}{c} x_4}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \\ x'_2 &= x_2; \\ x'_3 &= x_3; \\ x'_4 &= \frac{x_4 - j \frac{u}{c} x_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}. \end{aligned} \tag{П.56}$$

Отсюда матрица преобразования

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & 0 & 0 & \frac{j \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -j \frac{u}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{bmatrix}. \tag{П.57}$$

Для обратного преобразования

$$x_k = \alpha_{ki} x'_i.$$

Согласно преобразованию Лоренца (П.53)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{x'_1 - j \frac{u}{c} x'_4}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \\
 x_2 &= x'_2; \\
 x_3 &= x'_3; \\
 x_4 &= \frac{x'_4 + j \frac{u}{c} x'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}},
 \end{aligned}
 \tag{П.58}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$[\alpha_{ki}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & 0 & 0 & \frac{-j \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{j \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{bmatrix}.
 \tag{П.59}$$

*Вектором в четырехмерном пространстве называется совокупность четырех величин  $A_i$ , преобразующихся при повороте координат в соответствии с формулой (П.2):*

$$A_k = \alpha_{ki} A'_i.$$

При преобразовании Лоренца (П.53)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{A'_1 - j \frac{u}{c} A'_4}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \\
 A_2 &= A'_2; \\
 A_3 &= A'_3; \\
 A_4 &= \frac{A'_4 + j \frac{u}{c} A'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{П.60}$$

Легко показать, что квадраты векторов в четырехмерном пространстве и их скалярные произведения инвариантны, т. е.

$$A_i^2 = A_i'^2; \quad A_i B_i = A_i' B_i'.$$

*Тензором второго ранга* в четырехмерном пространстве называется совокупность шестнадцати величин, преобразующихся при повороте системы координат в соответствии с формулой (П.3):

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}.$$

При обратном преобразовании

$$T_{lm} = \alpha_{li} \alpha_{mk} T'_{ik}.$$

Учитывая матрицу преобразования Лоренца (П.59), элементы которой

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{34} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0,$$

получаем

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{T'_{11} - j \frac{u}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \frac{u^2}{c^2} T'_{44}}{1 - (u/c)^2} & \frac{T'_{12} - j \frac{u}{c} T'_{42}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & \frac{T'_{13} - j \frac{u}{c} T'_{43}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & \frac{T'_{14} + j \frac{u}{c} (T'_{11} - T'_{44}) + \frac{u^2}{c^2} T'_{41}}{1 - (u/c)^2} \\ \frac{T'_{21} - j \frac{u}{c} T'_{24}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & T'_{22} & T'_{23} & \frac{T'_{24} + j \frac{u}{c} T'_{21}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ \frac{T'_{31} - j \frac{u}{c} T'_{34}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & T'_{32} & T'_{33} & \frac{T'_{34} + j \frac{u}{c} T'_{31}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ \frac{T'_{41} + j \frac{u}{c} (T'_{11} - T'_{44}) + \frac{u^2}{c^2} T'_{14}}{1 - (u/c)^2} & \frac{T'_{42} + j \frac{u}{c} T'_{12}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & \frac{T'_{43} + j \frac{u}{c} T'_{13}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & \frac{T'_{44} + j \frac{u}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \frac{u^2}{c^2} T'_{11}}{1 - (u/c)^2} \end{pmatrix} \quad (\text{П.61})$$

При обратном преобразовании скорость  $u$  заменяется скоростью  $-u$ .

*Четырехмерным градиентом* называется вектор в четырехмерном пространстве, проекции которого на оси координат в соответствии с формулой (П.5) имеют вид

$$\text{Grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{П.62})$$

где  $\varphi$  — скалярная функция четырех переменных

$$\varphi = \varphi(x_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Формально четырехмерный градиент можно представить как произведение четырехмерного векторного пространственно-временного оператора

$$\square_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

аналогичного оператору Гамильтона (П.5) в трехмерном пространстве, на скаляр  $\varphi$ .

Четырехмерной дивергенцией, аналогично (П.6) называется скалярное произведение четырехмерного оператора  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и четырехмерного вектора  $A_i$ , в соответствии с формулой (П.6) она имеет вид

$$\text{Div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}. \quad (\text{П.63})$$

Приняв в формуле (П.63) в качестве вектора  $\mathbf{A}$  четырехмерный градиент (П.62), получим дифференциальное уравнение

$$\square^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2}, \quad (\text{П.64})$$

где оператор

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

называется оператором Даламбера; он аналогичен оператору Лапласа (П.8) в трехмерном пространстве.

Четырехмерным ротором называется антисимметричный тензор второго ранга

$$\text{Rot}_{ik} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \quad (\text{П.65})$$

Отсюда

$$\text{Rot}_{ii} \mathbf{A} = 0; \quad \text{Rot}_{ik} \mathbf{A} = -\text{Rot}_{ki} \mathbf{A}.$$

Пространственные компоненты ( $i, k = 1, 2, 3$ ) четырехмерного ротора совпадают с компонентами  $\text{rot } \mathbf{A}$  (П.7) в трехмерном пространстве.

## П.4. Функции комплексной переменной. Символический метод

Величина  $z = x + jy$  называется комплексной переменной. Здесь

$$\operatorname{Re} z = x$$

— действительная часть;

$$\operatorname{Im} z = y$$

— мнимая часть комплексного переменного  $z$ .

Комплексное число можно представить графически точкой  $M$  с координатами  $x, y$  на плоскости, которую называют плоскостью комплексного переменного, так как каждой точке этой плоскости соответствует комплексная переменная  $z$  (рис. П.10).

Комплексную переменную  $z = x + jy$ , как видно на рис. П.10, можно представить в виде

$$z = \rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi.$$

Согласно формуле Эйлера

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$$

и

$$z = \rho e^{j\varphi},$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  — модуль числа  $z$ ;  $\varphi$  — аргумент числа  $z$ .

Все вычисления с комплексными числами проводятся по обычным правилам алгебры.

Комплексные числа

$$z = x + jy \text{ и } z^* = x - jy$$

называются сопряженными. Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительные числа:

$$z + z^* = 2x; \quad zz^* = x^2 + y^2.$$

Дифференцирование комплексного числа  $z = \rho e^{j\varphi}$  по аргументу соответствует умножению на  $j$  или повороту отрезка  $OM$  на угол  $\pi/2$ , т. е.

$$\frac{dz}{d\varphi} = j\rho e^{j\varphi} = \rho e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Интегрирование  $z$  по аргументу соответствует умножению на  $-j$  или повороту отрезка  $OM$  на угол  $-\pi/2$ , т. е.

$$\int z d\varphi = -j\rho e^{j\varphi} = \rho e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

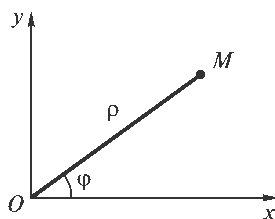


Рис. П.10. Плоскость комплексного переменного:

$y$  — мнимая ось;  $x$  — действительная ось

При изучении линейных электромагнитных процессов, изменяющихся во времени по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса), описывающие эти процессы уравнения, а следовательно, и их решения, значительно упрощаются при использовании символического метода. Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть некоторая электрическая величина (напряженность электромагнитного поля, ток или напряжение) изменяются по закону синуса или косинуса, т.е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{П.66})$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (\text{П.67})$$

Введем вектор, имеющий длину  $\mathbf{E}_m$  и вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  около начала координат (рис. П.11). В момент времени  $t = 0$  этот вектор образует с действительной осью  $\text{Re}$  угол  $\varphi$ , а в момент времени  $t \neq 0$  — угол  $\varphi' = \omega t + \varphi$ . Проекция вектора на действительную ось определяет мгновенное значение величины (П.66), а проекция на мнимую ось — мгновенное значение величины (П.67).

Таким образом, процесс, определяемый выражением (П.66) или (П.67), можно характеризовать комплексной величиной

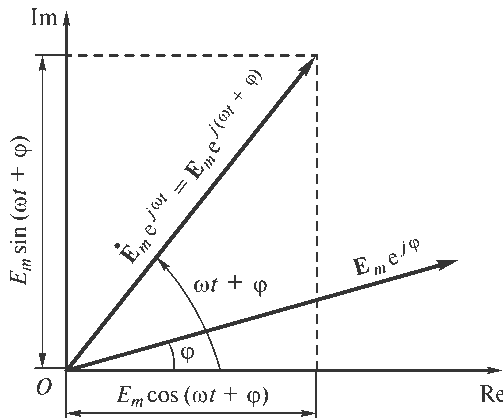
$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

или

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}, \quad (\text{П.67a})$$

где  $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{j\varphi}$  — комплексная амплитуда.

Линейные дифференциальные уравнения, переписанные в символической (комплексной) форме, имеют более простой вид, так как в этом случае первая производная величины  $E$  по времени соответствует умножению на  $j\omega$ , вторая — на  $-\omega^2$ :



**Рис. П.11.** Представление гармонического колебания с помощью вращающегося комплексного вектора



$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{E}}{\partial t} &= j\omega \dot{E}; \\ \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \dot{E},\end{aligned}\tag{П.67б}$$

а интегрирование по времени соответствует делению на  $j\omega$ :

$$\int \dot{E} dt = \frac{1}{j\omega} \dot{E}.\tag{П.67в}$$

Если комплексная величина удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению, то этому уравнению удовлетворяют ее действительная и мнимая части. Решив уравнение в комплексной форме и взяв от полученного результата действительную или мнимую часть, получим искомое решение.

Множитель  $e^{j\omega t}$ , характеризующий изменение процесса во времени, опускают, и тогда уравнение записывается для комплексных амплитуд.

Вместо комплексной амплитуды часто берут в  $\sqrt{2}$  раза меньшую величину — комплексное действующее значение

$$\dot{E}_d = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}.$$

Символический метод применим во всех случаях, когда векторы напряженности поля (или ток и напряжение) связаны линейной зависимостью, однако непосредственно он не применим для вычисления энергетических характеристик, которые определяются квадратами и произведениями значений напряженности полей, токов и напряжений.

К квадратичным соотношениям относятся:

$$w = \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} \text{ — плотность электромагнитной энергии;}$$

$p_{\text{пров}} = (\mathbf{J}\mathbf{E})$  — плотность мощности, связанная с взаимодействием поля с проводящей средой;

$p_{\text{пол}} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  — плотность мощности, связанная с процессами поляризации среды;

$p_{\text{нам}} = \mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$  — плотность мощности, связанная с процессами намагничивания среды;

$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  — вектор Пойнтинга.

Рассмотрим произведение  $AB$ , где

$$\begin{aligned}A &= A_m \cos(\omega t + \varphi_A); \\ B &= B_m \cos(\omega t + \varphi_B);\end{aligned}$$

или в символической форме

$$\begin{aligned}\dot{A} &= A_m e^{j(\omega t + \varphi_A)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}; \quad \dot{A}_m = A_m e^{j\varphi_A}; \\ \dot{B} &= B_m e^{j(\omega t + \varphi_B)} = \dot{B}_m e^{j\omega t}; \quad \dot{B}_m = B_m e^{j\varphi_B}.\end{aligned}$$

Комплексно-сопряженные значения

$$\begin{aligned}\dot{A}^* &= A_m e^{-j(\omega t + \varphi_A)} = \dot{A}_m^* e^{-j\omega t}; \quad \dot{A}_m^* = A_m e^{j\varphi_A}; \\ \dot{B}^* &= B_m e^{-j(\omega t + \varphi_B)} = \dot{B}_m^* e^{-j\omega t}; \quad \dot{B}_m^* = B_m e^{-j\varphi_B}.\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}AB &\neq \operatorname{Re} \dot{A}\dot{B} = \operatorname{Re} A_m B_m e^{j(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)} = \\ &= A_m B_m \cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B) \neq A_m \cos(\omega t + \varphi_A) B_m \cos(\omega t + \varphi_B); \\ AB &\neq \operatorname{Im} \dot{A}\dot{B}.\end{aligned}$$

Но поскольку сумма двух сопряженных величин является действительной величиной, а величины  $A$  и  $B$  можно представить в виде

$$A = \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2}; \quad B = \frac{\dot{B} + \dot{B}^*}{2}, \quad (\text{П.68})$$

то

$$AB = \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2} \frac{\dot{B} + \dot{B}^*}{2}.$$

Определим среднее значение произведения  $AB$ :

$$(AB)_0 = \frac{1}{T} \int_0^T AB \, dt.$$

Произведение  $AB$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}AB &= \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2} \frac{\dot{B} + \dot{B}^*}{2} = \frac{1}{4} (\dot{A}\dot{B}^* + \dot{A}^*\dot{B}) + \frac{1}{4} (\dot{A}\dot{B} + \dot{A}^*\dot{B}^*) = \\ &= \frac{1}{4} (A_m B_m e^{j(\varphi_A - \varphi_B)} + A_m B_m e^{-j(\varphi_A - \varphi_B)}) + \\ &+ \frac{1}{4} (A_m B_m e^{j(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)} + A_m B_m e^{-j(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)}) = \\ &= \frac{1}{2} A_m B_m \cos(\varphi_A - \varphi_B) + \frac{1}{2} A_m B_m \cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B).\end{aligned}$$

Первое слагаемое от времени не зависит, второе — зависит и при интегрировании обращается в нуль. Отсюда среднее значение

$$(AB)_0 = \frac{1}{2} A_m B_m \cos(\varphi_A - \varphi_B),$$

или

$$(AB)_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B}^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A}^* \dot{B} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A}_m \dot{B}_m^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A}_m^* \dot{B}_m. \quad (\text{П.69})$$

Определим среднее значение выражения

$$\left( A \frac{\partial B}{\partial t} \right)_0 = \frac{1}{T} \int_0^T A \frac{\partial B}{\partial t} dt.$$

Произведение  $A \frac{\partial B}{\partial t}$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2} \frac{\partial \dot{B} + \dot{B}^*}{2} = \frac{1}{4} j\omega (\dot{A}^* B - \dot{A} \dot{B}^*) + \frac{1}{4} j\omega (\dot{A} \dot{B} - \dot{A}^* \dot{B}^*) = \\ &= \frac{1}{4} j\omega (A_m B_m e^{j(\varphi_B - \varphi_A)} - A_m B_m e^{-j(\varphi_B - \varphi_A)}) + \\ &+ \frac{1}{4} j\omega (A_m B_m e^{j(2\omega t + \varphi_B + \varphi_A)} - A_m B_m e^{-j(2\omega t + \varphi_B + \varphi_A)}) = \\ &= -\frac{1}{2} \omega A_m B_m \sin(\varphi_B - \varphi_A) - \frac{1}{2} \omega A_m B_m \sin(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B). \end{aligned}$$

Среднее значение

$$\left( A \frac{\partial B}{\partial t} \right)_0 = -\frac{\omega}{2} A_m B_m \sin(\varphi_B - \varphi_A) = \frac{\omega}{2} A_m B_m \sin(\varphi_A - \varphi_B),$$

или

$$\left( A \frac{\partial B}{\partial t} \right)_0 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A}^* \dot{B} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A} \dot{B}^* = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A}_m^* \dot{B}_m = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A}_m \dot{B}_m^*. \quad (\text{П.70})$$

Если

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} A_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_A(n\omega)]; \\ B &= \sum_{n=0}^{\infty} B_m(n\omega) \cos[n\omega t - \varphi_B(n\omega)], \end{aligned}$$

то произведение

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{q,r=0}^{\infty} A_m(q\omega) B_m(r\omega) \cos[q\omega t - \varphi_A(q\omega)] \cos[r\omega t - \varphi_B(r\omega)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q,r=0}^{\infty} A_m(q\omega) B_m(r\omega) \{ \cos[(q+r)\omega t - \varphi_A(q\omega) - \varphi_B(r\omega)] + \\ &+ \cos[(q-r)\omega t - \varphi_A(q\omega) + \varphi_B(r\omega)] \}. \end{aligned}$$

При усреднении по времени отличными от нуля будут только слагаемые, не зависящие от времени, т. е. соответствующие  $q - r = 0$ , и

$$\begin{aligned} (AB)_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T AB \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} A_m(n\omega) B_m(n\omega) \cos[\varphi_B(n\omega) - \varphi_A(n\omega)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} A_m(n\omega) B_m(n\omega) \cos[\varphi_A(n\omega) - \varphi_B(n\omega)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A}_m(n\omega) \dot{B}_m^*(n\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A}_m^*(n\omega) \dot{B}_m(n\omega). \end{aligned} \quad (\text{П.71})$$

Аналогично среднее значение

$$\left( A \frac{\partial B}{\partial t} \right)_0 = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A}_m^*(n\omega) \dot{B}_m(n\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega}{2} \operatorname{Im} \dot{A}_m(n\omega) \dot{B}_m^*(n\omega). \quad (\text{П.72})$$

Таким образом, квадратичные соотношения также можно выразить через комплексные величины. При этом уравнения с квадратичными соотношениями значительно упрощаются, а следовательно, упрощаются и их решения.

## П.5. Специальные уравнения и их решения

Электромагнитные процессы в средах описываются векторными неоднородными уравнениями в частных производных вида

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\chi, \quad (\text{П.73})$$

называемыми *неоднородными волновыми уравнениями Даламбера*.

При решении векторные уравнения необходимо свести к независимым скалярным уравнениям для проекций векторов на координатные оси. Однако только в декартовой системе координат скалярное уравнение для каждой проекции будет иметь такой же вид, как и векторное. В криволинейной системе координат в проекцию лапласиана вектора на криволинейную ось будут входить проекции вектора как на данную, так и на другие оси. Исключение составляет цилиндрическая система, в которой согласно выражению (П.39) для составляющей  $z$  можно написать скалярное уравнение, совпадающее с векторным и не содержащее других проекций вектора.

Векторы напряженности электромагнитного поля часто можно выразить через вспомогательные функции  $F$ , например через электромагнитные потенциалы, удовлетворяющие скалярным волновым уравнениям вида

$$\Delta F - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\chi. \quad (\text{П.74})$$

В частности, уравнение вида (П.74) описывает электромагнитное поле, создаваемое источником (током или зарядом), характеризуемым величиной  $\chi$ .

Если пространство вокруг одного источника, сосредоточенного в малом объеме радиусом  $r_0$ , изотропно, то решение уравнения (П.74) следует искать как сферическо-симметричное, т. е.  $F = F(r)$ . Тогда для всех точек вне источника ( $\chi = 0$  при  $r > r_0$ ) уравнение (П.74) переходит в однородное волновое уравнение

$$\Delta F - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{П.75})$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$F(r, t) = \frac{f_1(t - r/v)}{r} + \frac{f_2(t + r/v)}{r}. \quad (\text{П.76})$$

Чтобы определить явный вид функций  $f_1$  и  $f_2$ , необходимо знать граничные и начальные условия. Первая функция  $f_1(t - r/v)$  (называемая запаздывающей) представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от источника со скоростью  $v$ . Вторая функция  $f_2(t + r/v)$  (называемая опережающей) представляет собой сферическую волну, сходящуюся из бесконечности к источнику с той же скоростью  $v$  (рис. П.12).

В случае точечного источника или в случае, когда все источники расположены в области  $r < r_0$ , волны, сходящиеся к этой области, не имеют физического смысла и  $f_2 = 0$ , вследствие чего решением (П.75) будет

$$F(r, t) = \frac{f_1(t - r/v)}{r} \quad \text{при } r > r_0. \quad (\text{П.77})$$

При  $r = r_0$  функция (П.77) вместе со своими производными должна плавно переходить в решение неоднородного уравнения с правой частью (П.74). Для предельного случая точечного источника ( $r_0 \rightarrow 0$ ) решение этого уравнения имеет вид

$$F(r, t) = \frac{\chi(t - r/v)}{4\pi r}. \quad (\text{П.78})$$

Учитывая принцип суперпозиции действия отдельных объемов источников, получаем

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\chi(t - r/v)}{r} dV. \quad (\text{П.79})$$

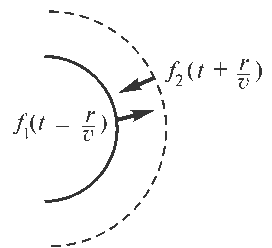


Рис. П.12. Сферические волны (к решению волнового уравнения)

В случае малости величины  $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$  по сравнению с другими членами уравнение Даламбера переходит в

уравнение Пуассона

$$\Delta F = \chi(t). \quad (\text{П.80})$$

Решение этого уравнения можно получить из (П.79), пренебрегая запаздыванием, т. е.

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi(t)}{r} dV.$$

Если  $F$  и  $\chi$  не зависят от времени, то решение уравнения Пуассона имеет вид

$$F(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi}{r} dV. \quad (\text{П.81})$$

При  $\chi = 0$  уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta F = 0. \quad (\text{П.82})$$

В частном случае монохроматического поля функцию  $F(r, t)$ , соответствующую напряженности или электромагнитным потенциалам, согласно (П.67а) можно представить в символическом виде

$$\dot{F}(r, t) = \dot{F}_m(r) e^{j\omega t},$$

а функцию  $\chi(t)$ , соответствующую плотности заряда или тока, — в виде

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\chi}_m e^{j\omega t}.$$

При этом уравнение (П.74) с учетом (П.67а) будет иметь вид

$$\Delta \dot{F} + k^2 \dot{F} = \dot{\chi}, \quad (\text{П.83})$$

где  $k = \omega/v$ .

Решение этого уравнения, соответствующее решению (П.79), имеет вид

$$\dot{F}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\chi}_m e^{j\omega(t-r/v)}}{r} dV. \quad (\text{П.84})$$

При  $\chi = 0$  уравнение (П.83) переходит в однородное волновое уравнение, называемое *уравнением Гельмгольца*:

$$\Delta \dot{F} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (\text{П.85})$$

При решении задач электродинамики уравнения в каждом конкретном случае записываются в той системе координат  $q_1, q_2, q_3$ , в которой граничные поверхности совпадают с координатными поверхностями. При этом согласно методу Фурье частные решения этих уравнений представляются в виде произведе-

ния трех функций, каждая из которых является функцией только одной переменной, т. е.

$$F = \xi(q_1)\eta(q_2)\zeta(q_3). \quad (\text{П.86})$$

Для каждой функции получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Постоянные интегрирования находят из удовлетворения граничным условиям.

Только в декартовой системе координат лапласиан от скаляра (П.8) и проекции векторного лапласиана (П.11) имеют один и тот же вид. В общем случае криволинейной системы координат это не так. Проекция векторного лапласиана на оси координат содержат не одну проекцию вектора и только в цилиндрической системе координат проекция векторного лапласиана на ось  $z$  будет содержать только одну  $z$ -проекцию вектора.

В цилиндрической системе координат уравнение Гельмгольца (П.85) для этой составляющей имеет вид

$$\Delta \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = 0,$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{A}_z = 0. \quad (\text{П.87})$$

Решение этого уравнения согласно методу Фурье представляется в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$\dot{A}_z = R(r)\Phi(\alpha)Z(z) = R\Phi Z. \quad (\text{П.88})$$

Подставляя (П.88) в (П.87) и разделив на (П.88), получаем

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (\text{П.89})$$

Величина  $k$  является постоянной величиной, независимой от  $r$ ,  $\alpha$  и  $z$ . При фиксированных значениях  $r$  и  $z$  первое и третье слагаемые в уравнении (П.89) будут постоянными и, следовательно,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \quad (\text{П.90})$$

где  $n$  — постоянная величина.

Решение этого уравнения

$$\Phi = A_1 e^{-jn\alpha} + A_2 e^{jn\alpha}.$$

Если  $n$  — действительная величина, то

$$\Phi = A_1 \cos n\alpha + A_2 \sin n\alpha.$$

Аналогично

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_0^2 \quad (\text{П.91})$$

и

$$Z = B_1 e^{-jk_0 z} + B_2 e^{jk_0 z}.$$

Если  $k_0$  — действительная величина, то

$$Z = B_1 \cos k_0 z + B_2 \sin k_0 z.$$

С учетом (П.90) и (П.91) уравнение (П.89) имеет вид

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \chi^2 = 0,$$

где  $\chi^2 = k^2 - k_0^2$ .

Обозначив  $\chi r = x$ , получим

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0$$

— уравнение Бесселя, решением которого является

$$R = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x),$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка (рис. П.13);  $N_n(x)$  — функция Неймана  $n$ -го порядка (рис. П.14).

Таким образом, решение (П.88) уравнения (П.87) имеет вид

$$\dot{A}_z = [C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)] [A_1 \cos n\alpha + A_2 \sin n\alpha] [B_1 \cos k_0 z + B_2 \sin k_0 z],$$

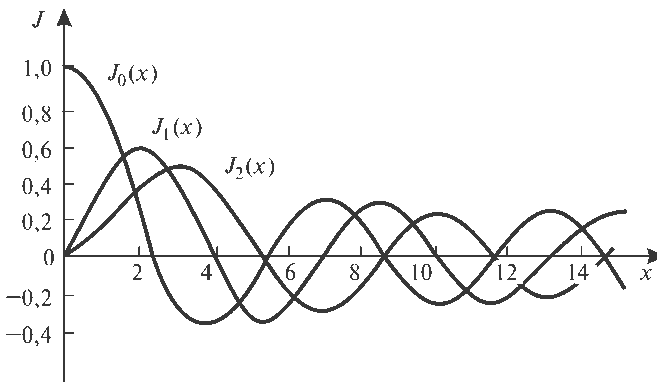


Рис. П.13. Графики функций Бесселя



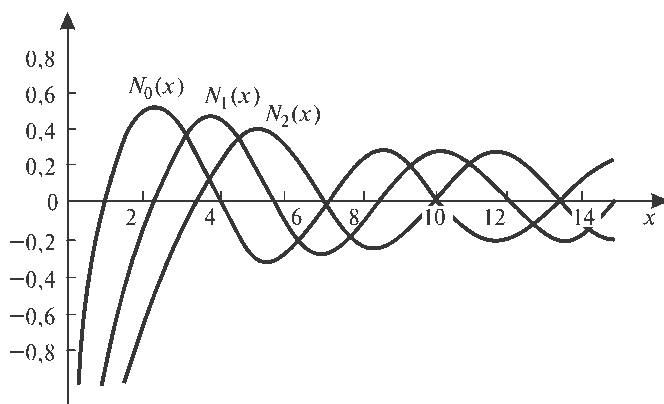


Рис. П.14. Графики функций Неймана

или

$$\dot{A}_z = [C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)] [A_1 \cos n\alpha + A_2 \sin n\alpha] \times \\ \times [B_1 e^{-jk_0 z} + B_2 e^{jk_0 z}].$$

Постоянные интегрирования находят из граничных условий. При  $x = 0$  ( $r = 0$ )  $J_0(0) = 1$ ,  $J_n(0) = 0$  при  $n \neq 0$ ;  $N_n(0) = -\infty$  при любом  $n$ . Поэтому, если в рассматриваемую область входит значение  $x = 0$  ( $r = 0$ ), а по физическому смыслу решение должно иметь конечное значение, то функция Неймана из решения исключается.

Значения  $A_{nm}$ -корней уравнения  $J_n(x) = 0$  и  $B_{nm}$ -корней уравнения  $J'_n(x) = 0$  приведены в табл. П.2 и П.3 соответственно. Штрих означает производную по аргументу  $x$ .

Таблица П.2

Корни  $A_{nm}$

| $m$ | $n = 0$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| 1   | 2,405   | 3,832   | 5,136   | 6,380   |
| 2   | 5,520   | 7,016   | 8,417   | 9,761   |
| 3   | 8,654   | 10,173  | 11,620  | 13,015  |
| 4   | 11,792  | 13,323  | 14,372  | 16,224  |

Таблица П.3

Корни  $B_{nm}$

| $m$ | $n = 0$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| 1   | 3,832   | 1,841   | 3,054   | 4,201   |
| 2   | 7,016   | 5,331   | 6,706   | 8,015   |
| 3   | 10,173  | 8,536   | 9,969   | 11,346  |
| 4   | 13,324  | 11,706  | 13,170  | 14,586  |

Способы решения нелинейных волновых уравнений более трудоемки, чем линейных. Если влияние нелинейности невелико, то можно найти приближенные аналитические решения. При значительной нелинейности решения находят численными или графическими методами. При этом используют численные значения параметров и начальных условий. Полученное решение справедливо лишь для одной определенной системы условий.

Решение, полученное в аналитической форме, удобно для исследования в широких пределах изменения параметров.

Наиболее результативным методом для исследования нелинейных электромагнитных процессов в установившемся режиме является *метод последовательных приближений (итерации)*. Этот метод заключается в нахождении по известному приближенному решению уравнения следующего более точного приближения. Метод можно применять, если последовательность полученных приближенных решений сходится.

Электромагнитный процесс в слабонелинейных средах можно описать уравнением вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + f(x) = F(t), \quad (\text{П.92})$$

где  $f(x)$  — малая по значению нелинейная функция переменной  $x$ . В линейном приближении это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F(t).$$

Допустим, что это уравнение имеет решение  $x_0$ . Это решение называется порождающим и может рассматриваться как приближенное решение нелинейного уравнения (П.92).

Подставляя решение  $x_0$  в выражение для функции  $f(x)$  в уравнение (П.92), получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F(t) - f(x_0).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим решение  $x_1$ , которое является решением нелинейного уравнения (П.92) в первом приближении:

$$x_1 = x_0 + \text{поправка.}$$

Следующее приближение получаем, подставляя в уравнение (П.92) первое приближение решения  $x_1$ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F(t) - f(x_1).$$

Полученное решение

$$x_2 = x_1 + \text{поправка}$$

является решением уравнения (П.92) во втором приближении.

Аналогично можно найти последующие приближения  $x_3, x_4, x_5$  и т. д.

Метод медленно меняющихся амплитуд и фаз применяется в тех случаях, когда заранее известно, что форма колебаний близка к синусоидальной. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (\text{П.93})$$

где  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  — функция, определяющая нелинейность и потери;  $\mu$  — безразмерный параметр, указывающий на малость нелинейности и потерь.

Решение уравнения (П.93) при  $\mu = 0$  представляет собой гармоническое колебание. Очевидно, что при малом  $\mu$  решение близко к гармоническому и его можно представить в виде

$$x = A_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A_m(t) \cos \Phi(t), \quad (\text{П.94})$$

где  $A_m(t)$  и  $\varphi(t)$  — соответственно амплитуда и фаза, медленно изменяющиеся во времени;  $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ .

Условие медленного изменения амплитуды и фазы заключается в том, что они мало изменяются за период колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$ , т. е.

$$\left| \frac{1}{A_m} \frac{dA_m}{dt} \right| \ll \omega_0; \quad \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll \omega_0. \quad (\text{П.95})$$

Производные величины  $x$  определяются выражениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA_m}{dt} \cos \Phi - \left( \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right) A_m \sin \Phi; \quad (\text{П.96})$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \left[ \frac{d^2 A_m}{dt^2} - \left( \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 A_m \right] \cos \Phi - \left[ 2 \left( \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{dA_m}{dt} + \frac{d^2 \varphi}{dt^2} A_m \right] \sin \Phi. \quad (\text{П.97})$$

Нелинейная функция  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  мала, что подчеркивается множителем  $\mu$  в уравнении (П.93). Поэтому среди слагаемых производной  $\frac{dx}{dt}$ , определяемой выражением (П.96), имеет значение лишь наибольшее слагаемое  $\omega_0 A_m \sin \Phi$  и

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f\left(A_m \cos \Phi, -\omega_0 A_m \sin \Phi\right)$$

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = P_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi) = P_m(t) \cos \Psi, \quad (\text{П.98})$$

где  $\Psi = \Phi + (\psi - \varphi)$ ;  $\psi - \varphi$  — фазовый сдвиг функции  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  относительно функции  $x(t)$ , определяемой (П.94).

Подставляя выражения (П.94), (П.97) и (П.98) в уравнение (П.93), пренебрегая вследствие их малости согласно условию (П.95) вторыми производными амплитуд и фаз, а также произведениями этих производных и учитывая соотношение

$$\cos \Psi = \cos(\psi - \varphi) \cos \Phi - \sin(\psi - \varphi) \sin \Phi,$$

получаем

$$2\omega_0 \frac{d\varphi}{dt} A_m \cos \Phi + 2\omega_0 \frac{dA_m}{dt} \sin \Phi = P_m [\cos(\psi - \varphi) \cos \Phi - \sin(\psi - \varphi) \sin \Phi]. \quad (\text{П.99})$$

Приравнявая коэффициенты при  $\cos \Phi$  и  $\sin \Phi$  в правой и левой частях уравнения (П.99), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{P_m \cos(\psi - \varphi)}{2\omega_0 A_m}; \\ \frac{dA_m}{dt} &= -\frac{P_m \sin(\psi - \varphi)}{2\omega_0}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти выражения по времени, определим амплитуду  $A_m(t)$  и фазу  $\varphi(t)$ . Затем подставим их значения в (П.94) и найдем решение уравнения (П.93).

## П.6. Энергетические уровни атомов и молекул

Согласно теории Бора атом или молекула не могут находиться в состояниях с произвольной энергией, они могут находиться лишь в некоторых дискретных состояниях, называемых устойчивыми или стационарными.

Энергетические уровни атомов водорода определяются выражением

$$W_n = -\frac{R}{n^2}, \quad (\text{П.100})$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число;  $R = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0}$  — постоянная Ридберга;

$m$  — масса электрона;  $e$  — заряд электрона;  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Согласно (П.100) энергия зависит только от главного квантового числа и отрицательна для всех устойчивых состояний. Состояние с самой низкой энергией

соответствует  $n = 1$  и движению электрона по самой близкой к ядру орбите. Это состояние называется основным или нормальным.

С увеличением значения  $n$  энергия растет и приближается к нулю, энергетические уровни сближаются (рис. П.15), орбиты движения электрона удаляются от ядра. Когда электрон удален от ядра на бесконечное расстояние ( $n = \infty$ ) и находится в покое, энергия атома предполагается равной нулю.

Электрон, удаленный от ядра, может находиться в движении, приближаться к ядру или удаляться от него. Кинетическая энергия двух частиц, приближающихся друг к другу или удаляющихся друг от друга, положительна и может принимать любые значения (не квантуется).

Поскольку электрон обладает некоторой массой и движется вокруг ядра, то это движение можно характеризовать  $l$  — орбитальным моментом количества движения электрона в атоме. Орбитальный момент квантуется и его можно определить по формуле

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar,$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$ ;  $l$  — орбитальное, или азимутальное квантовое число. При заданном значении  $n$  число  $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ .

Поскольку электрон кроме массы обладает и зарядом, то при его вращении вокруг ядра возникает магнитный орбитальный момент, противоположный по направлению механическому моменту. Отношение магнитного момента к механическому определяется величиной  $e/m$ , где  $e$  — заряд электрона;  $m$  — его масса. В магнитном поле магнитный момент и связанный с ним механический момент прецессируют вокруг направления магнитного поля. При этом угол прецессии (рис. П.16) имеет только определенные квантованные значения. Возможны лишь те углы, при которых проекция орбитального момента  $\mathbf{l}$  на направление поля имеет значение  $m_l \hbar$ , где  $m_l$  — магнитное квантовое число, которое при заданном значении  $l$  равно

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l.$$

Электрон вращается вокруг собственной оси и обладает собственным магнитным моментом и моментом количества движения  $\mathbf{s}$ , называемым спином. Этот момент квантуется и равен

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar,$$

где  $s$  — спиновое магнитное квантовое число. Отношение спинового магнитного момента к механическому равно  $e/(2m)$ .

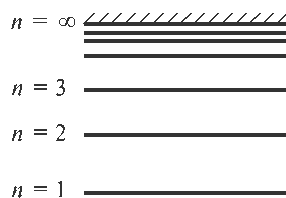


Рис. П.15. Энергетические уровни атома водорода и водородоподобных ионов

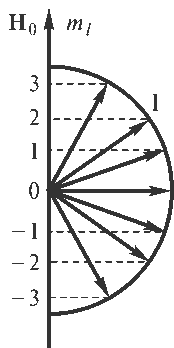


Рис. П.16. Пространственное квантование вектора  $\mathbf{l}$  в магнитном поле  $\mathbf{H}_0$

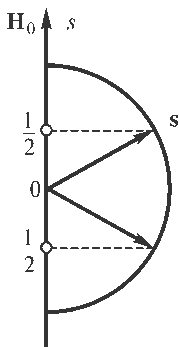


Рис. П.17. Пространственное квантование вектора  $s$  в магнитном поле  $H_0$

В магнитном поле спин электрона может ориентироваться лишь таким образом, что его проекция на направление поля (рис. П.17) равна  $s\hbar$ . Спиновое магнитное квантовое число имеет только два значения:

$$s = \pm \frac{1}{2}.$$

Квантовые числа  $n, l, m_l, s$  определяют устойчивые состояния атома. Но значение энергии  $W_n$  (П.100) зависит только от главного квантового числа  $n$ . Следовательно, одному и тому же уровню энергии соответствует несколько различных состояний атома. Состояния атома с одинаковой энергией называются вырожденными. Число состояний с одинаковой энергией называется степенью (кратностью) вырождения или статистическим весом.

Для атома водорода каждому значению энергии, определяемому числом  $n$ , соответствует

$$g = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$$

устойчивых состояний.

Обычно вырождение связано с симметрией. У атома водорода благодаря сферической симметрии внутриатомного электрического поля энергия не зависит от ориентаций орбитального и спинового моментов, что и приводит к вырождению энергетических уровней. Во внешнем магнитном поле  $H$  симметрия нарушается, атом приобретает добавочную энергию

$$\Delta W = Hm \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между направлениями магнитного момента  $m$  и внешнего магнитного поля  $H$ . В этом случае вырождение снимается. Уровни, соответствующие одному и тому же значению  $n$ , расщепляются. Состояния с разными магнитными квантовыми числами  $m_l$  соответствуют различной энергии.

Аналогичной схемой уровней энергии обладают водородоподобные ионы ( $He^+, Li^{2+}, Be^{3+}$  и др.), состоящие из ядра с зарядом  $Ze$  ( $Z$  — порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева) и одного электрона. При этом уровни энергии

$$W_n = -\frac{RZ^2}{n^2}.$$

В многоэлектронном атоме каждому отдельному электрону можно приписать те же квантовые числа, что и одному электрону, движущемуся в поле атомного ядра  $n, l, m_l, s$ . Это справедливо, так как действие всех других электронов можно заменить приближенно некоторым средним полем с центральной сим-

метрией. Но поскольку симметрия в этом случае все же нарушается, то энергия будет зависеть от значения не только  $n$ , но и  $l$ :

$$W_{n,l} = -\frac{RZ^2}{(n+a)^2},$$

где  $a = a(l)$  — поправка Ридберга, зависящая от орбитального квантового числа  $l$  и быстро стремящаяся к нулю с уменьшением значения  $l$ . Таким образом, при заданном значении  $n$  энергия увеличивается с ростом значения  $l$ .

Степень вырождения при заданных значениях  $n$  и  $l$

$$g_l = 2(2l + 1),$$

т. е. энергии  $W_{n,l}$  соответствует  $2(2l + 1)$  состояний.

Согласно *принципу Паули* не может быть двух электронов в одном и том же состоянии, т. е. никакие два электрона не могут характеризоваться одинаковым рядом квантовых чисел  $n, l, m_l, s$ . Электроны, имеющие определенные значения  $n$  и  $l$ , образуют электронную оболочку, которую заполняют  $2(2l + 1)$  электронов.

Электроны с  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  называют электронами  $s, p, d, f, \dots$ , а энергетические уровни соответственно обозначаются  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  и т. д., где цифра соответствует значению квантового числа  $n$ . Уровни с одинаковыми значениями  $n, l$ , но с разными значениями  $m_l, s$  можно считать вырожденными, если пренебречь взаимодействием электронов друг с другом и с магнитным полем, создаваемым орбитальным движением электрона и его спиновым магнитным моментом.

При последовательном заполнении электронами оболочек атома образуется основная, или нормальная, электронная конфигурация:

водород ( $Z = 1$ ) —  $1s$ ;

гелий ( $Z = 2$ ) —  $1s^2$ ;

аргон ( $Z = 18$ ) —  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

(степень определяет число электронов в оболочке,  $Z$  — порядковый номер элемента).

Согласно постулатам Бора энергия электрона при движении в пределах электронной оболочки не изменяется. Изменение энергии происходит при переходе электрона с одной электронной оболочки, соответствующей, например, уровню энергии  $W_1$ , на другую — с энергией  $W_2$ . Расстояние между электронными уровнями атома составляет  $1 \dots 2$  эВ.

При поглощении энергии один или несколько электронов переходят на более удаленные электронные оболочки, соответствующие более высоким уровням энергии. При этом образуются возбужденные электронные конфигурации. Например, для гелия конфигурация  $1s2p$  соответствует переходу одного электрона с уровня  $1s$  на уровень  $2p$ .

Каждый электрон в атоме обладает орбитальным моментом количества движения  $\mathbf{l}_k$  и спином  $\mathbf{s}_k$ . Векторная сумма орбитальных моментов отдельных электронов в атоме называется орбитальным моментом атома  $\mathbf{L}$ ; векторная сумма спинов всех электронов в атоме называется спиновым моментом атома  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^Z \mathbf{l}_k; \quad \mathbf{S} = \sum_{k=1}^Z \mathbf{s}_k,$$

где  $Z$  — порядковый номер элемента.

Поскольку векторная сумма моментов электронов заполненных оболочек атома равна нулю, то суммарные моменты  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  определяются соответственно суммой моментов  $\mathbf{l}_k$  и  $\mathbf{s}_k$  электронов незаполненных оболочек атома.

Поскольку моменты  $\mathbf{l}_k$  и  $\mathbf{s}_k$  отдельных электронов квантованы, то и результирующие моменты атомов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  также квантованы. Величина  $|\mathbf{L}|$  может принимать дискретные значения

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{L(L+1)} \cdot \hbar,$$

где  $L$  — целое число, значения которого лежат в пределах от  $\left| \sum_{k=1}^Z \mathbf{l}_k \right|_{\min}$  до  $\left| \sum_{k=1}^Z \mathbf{l}_k \right|_{\max}$ .

Аналогично

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S(S+1)} \cdot \hbar,$$

где  $S$  — целое число для четного числа электронов и полуцелое число для нечетного в тех же пределах.

Полный момент количества движения атома

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

также принимает только квантованные значения

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)} \cdot \hbar,$$

где  $J$  — целое число при четном числе электронов и полуцелое число при нечетном:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|.$$

При полном заполнении всех оболочек  $J = 0$ , степень вырождения уровня энергии при заданном значении  $J$  равна  $2(J+1)$ .

Если атом с полным моментом  $\mathbf{J}$  поместить в магнитное поле, то происходит пространственное квантование, и проекция  $\mathbf{J}$  на направление поля может принимать значения  $M_J \hbar$ , где  $M_J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В магнитном поле состояния с различными квантовыми числами  $M_J$  имеют различную энергию (эффект Зеемана), в электрическом поле различную энергию имеют состояния с различными значениями  $|M_J|$  (эффект Штарка).

Энергетические уровни молекул имеют более сложную схему, чем энергетические уровни атомов. В молекуле наряду с движением электронов относительно ядер возможно колебательное движение атомов относительно друг друга и вращательное движение молекулы как единого целого.



Полная энергия невозмущенной молекулы

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{кол}} + W_{\text{вр}},$$

где  $W_{\text{эл}}$ ,  $W_{\text{кол}}$ ,  $W_{\text{вр}}$  — соответственно электронная, колебательная и вращательная энергии.

Энергии внутримолекулярных колебаний и вращения квантованы. При этом  $W_{\text{эл}} \gg W_{\text{кол}} \gg W_{\text{вр}}$ . Поэтому к электронным уровням атомов добавляется последовательность колебательных энергетических уровней, заканчивающихся сверху границей, за которой начинается сплошной спектр, соответствующий распаду молекулы на части (диссоциация). К каждому колебательному уровню примыкает последовательность вращательных уровней.

Расстояние между электронными уровнями молекулы, как и в атоме, составляет 1...2 эВ. Электронные уровни молекулы расщепляются, так как любой атом молекулы находится в электрическом поле ее остальных атомов. Расщепление определяется эффектом Штарка.

У молекул, состоящих из большого числа атомов, большое число колебательных и вращательных энергетических уровней. В действительности уровни не являются бесконечно узкими, а имеют конечную ширину. Если расстояние между соседними уровнями меньше их ширины, то уровни сливаются в энергетические полосы.

В средах наблюдается взаимодействие частиц друг с другом. Газы ввиду слабого взаимодействия частиц имеют узкие энергетические полосы. В твердых и жидких средах отдельные атомы и молекулы могут находиться настолько близко друг к другу, что их внешние электронные оболочки перекрываются и взаимодействуют друг с другом. Это приводит к тому, что в твердых и жидких средах вместо узких полос образуются широкие энергетические зоны.

Населенность энергетического уровня определяется числом частиц  $N_i$  в единице объема вещества, находящихся на данном уровне, деленном на статистический вес  $g_i$ . Если вырождение отсутствует, то населенность определяется числом частиц в единице объема вещества, находящихся на данном энергетическом уровне.

При условии термодинамического равновесия населенность уровня определяется выражением

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{N_0 e^{-\frac{W_i}{kT}}}{\sum_i g_i e^{-\frac{W_i}{kT}}}, \quad (\text{П.101})$$

называемым *распределением Больцмана*. Здесь  $N_i$  — число частиц, находящихся на  $i$ -м уровне в единице объема вещества;  $g_i$  — статистический вес состояния  $i$ ;  $W_i$  — энергия, соответствующая уровню  $i$ ;  $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $N_0$  — полное число частиц, находящихся на всех уровнях в единице объема вещества;  $T$  — абсолютная температура. Суммирование проводится по всем уровням.

Согласно распределению Больцмана населенность уровней возрастает с повышением температуры  $T$ . Однако при любой температуре населенность верхних уровней меньше населенности нижних. При абсолютном нуле температуры ( $T = 0$  К) все частицы находятся на самом нижнем уровне (основное состояние).

Из распределения Больцмана следует соотношение между населенностями различных уровней

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}}.$$

Если вырождение отсутствует, то распределение Больцмана имеет вид

$$N_i = \frac{N_0 e^{-\frac{W_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{W_i}{kT}}}, \quad (\text{П.102})$$

а соотношение между населенностями различных уровней

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}}.$$

Система, подчиняющаяся распределению Больцмана, может только поглощать энергию, т. е. является пассивной.

## П.7. Квантовые переходы

Переход атома или молекулы из одного энергетического состояния, соответствующего определенному уровню энергии, в другое, соответствующее другому уровню, называется *квантовым переходом*. При переходе с более низкого на более высокий уровень система поглощает энергию, при переходе с более высокого на более низкий — отдает.

Различают излучательные и безызлучательные квантовые переходы. При безызлучательных переходах изменение энергии не связано с излучением, т. е. испусканием или поглощением фотонов. Энергия системы изменяется при взаимодействии с другими атомами или окружающей средой (взаимодействие с кристаллической решеткой, соударение атомов газа друг с другом и со стенками сосуда и т. д.). При излучательных переходах система излучает или поглощает электромагнитное излучение в виде квантов, энергия которых равна

$$\hbar\omega_{ik} = W_i - W_k.$$

Переходы атома или молекулы возможны лишь между определенными уровнями, удовлетворяющими правилам отбора.

Совокупность излучательных квантовых переходов с нижних уровней на верхние образует спектр поглощения, совокупность переходов с верхних уровней на нижние образует спектр излучения.

Спектры, соответствующие квантовым переходам между электронными уровнями, имеют вид отдельных спектральных линий и называются линейчатыми. Квантовые переходы между электронными уровнями, соответствующими внешним оболочкам, образуют спектры, лежащие в видимой и ультрафиолетовой областях. Переходы электронов из внешних оболочек в глубинные соответствуют рентгеновскому спектру.

У молекул наряду с большими изменениями энергии при квантовых переходах между электронными уровнями  $\Delta W_{\text{эл}}$  могут происходить меньшие изменения энергии при переходах между колебательными уровнями  $\Delta W_{\text{кол}}$  и еще меньшие при переходах между вращательными уровнями  $\Delta W_{\text{вр}}$ . Частота излучения или поглощения в этом случае равна

$$\omega = \frac{\Delta W_{\text{эл}} + \Delta W_{\text{кол}} + \Delta W_{\text{вр}}}{\hbar} = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{кол}} + \omega_{\text{вр}}.$$

Переходы, связанные с изменениями энергий  $W_{\text{эл}}$ ,  $W_{\text{кол}}$  и  $W_{\text{вр}}$ , образуют электронно-колебательно-вращательные спектры, лежащие в видимой и ультрафиолетовой областях. При  $\Delta W_{\text{эл}} = 0$ ,  $\Delta W_{\text{кол}} \neq 0$  и  $\Delta W_{\text{вр}} \neq 0$  образуются колебательно-вращательные спектры, лежащие в инфракрасной области. При  $\Delta W_{\text{эл}} = 0$ ,  $\Delta W_{\text{кол}} = 0$  и  $\Delta W_{\text{вр}} \neq 0$  — вращательные спектры, лежащие в далекой инфракрасной области и в области сантиметровых и миллиметровых волн (СВЧ-диапазон). СВЧ-диапазону соответствуют переходы между подуровнями, образующиеся при расщеплении уровней энергии в электрических (эффект Штарка) и в магнитных (эффект Зеемана) полях.

## П.8. Уравнение Шредингера

Согласно представлениям квантовой механики изменение энергии поля происходит не непрерывно, а квантами. Энергия поля излучается и поглощается в виде квантов. Энергия кванта

$$W = \hbar\omega,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ;  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка;  $\omega$  — круговая частота.

Импульс кванта

$$\mathbf{p} = \frac{W}{\mathbf{v}} = \hbar \frac{\omega}{\mathbf{v}} = \hbar \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости распространения.

Наряду с этим, частицы обладают волновыми свойствами. Движение внутри атома также является волновым и характеризуется волновой функцией, изменяющейся по периодическому закону в каждой точке пространства:

$$\psi(r, t) = \psi_0 e^{j(\omega t - kr)} = \psi_0 e^{j\left(\frac{W}{\hbar}t - \frac{pr}{\hbar}\right)} = \psi_0 e^{j\frac{W}{\hbar}t}. \quad (\text{П.103})$$

Здесь  $\psi_0$  — амплитуда, которая в случае движения материальной точки массы  $m$  зависит только от координат пространства.

Из (П.103) следует, что волновая функция является решением волнового уравнения

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0,$$

и, учитывая, что для свободной частицы

$$k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2mW_{\text{кин}}}{\hbar^2},$$

где  $m$  — масса частицы;  $W_{\text{кин}}$  — ее кинетическая энергия, получаем волновое уравнение

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}W_{\text{кин}}\psi = 0. \quad (\text{П.104})$$

Если частица находится под воздействием внешних сил, то ее кинетическая энергия

$$W_{\text{кин}} = W - U. \quad (\text{П.105})$$

Здесь  $W$  — полная энергия частицы;  $U = U(r)$  — потенциальная энергия частицы.

Подставляя (П.105) в (П.104), получаем уравнение Шредингера.

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0, \quad (\text{П.106})$$

решения которого (П.103) являются собственными волновыми функциями, характеризующими стационарные состояния системы (частицы или совокупности частиц). Дифференцируя (П.103) по времени, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = j\frac{W}{\hbar}\psi,$$

откуда следует, что

$$W\psi = -j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (\text{П.107})$$

Подставляя (П.107) в (П.106), получаем уравнение Шредингера в более общем виде:

$$j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - U\psi. \quad (\text{П.108})$$

Уравнение Шредингера линейное, и его решения удовлетворяют принципу суперпозиции, т. е. если волновые функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  являются решениями и характеризуют два состояния системы, то функция

$$\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2, \quad (\text{П.109})$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — некоторые постоянные, также является решением.

В общем случае

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n. \quad (\text{П.110})$$

Из решения уравнения Шредингера с учетом граничных условий следует, что полная энергия  $W$  может принимать лишь определенные отрицательные собственные значения  $W_n$ , которым соответствуют собственные волновые функции  $\psi_n$ . Эти значения  $W_n$  и  $\psi_n$  характеризуют стационарные состояния, соответствующие боровским орбитам. При переходе из одного стационарного состояния в другое энергия меняется скачком.

Физический смысл волновой функции (П.103) определяется выражением

$$\psi \psi^* = |\psi|^2 = |\psi_0|^2.$$

Функция  $\psi_0$  зависит только от координат пространства, и величина  $|\psi|^2$  представляет собой плотность вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в определенной точке пространства.

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям волнового уравнения, взаимно ортогональны, т. е.

$$\int_V \psi_i \psi_k^* dV = 0 \text{ при } i \neq k,$$

где  $i$  и  $k$  — индексы, определяющие два различных состояния. Интегрирование распространяется на все конфигурационное пространство.

Если собственные функции нормированы, то

$$\int_V \psi_i \psi_k^* dV = \delta_{ik}, \quad (\text{П.111})$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Из вероятностного характера волновой функции следует *принцип неопределенности Гейзенберга*, согласно которому нельзя одновременно точно определить координаты и импульс частицы, координаты и скорость, т. е.

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar;$$

$$\Delta x \Delta v \approx \frac{\hbar}{m},$$

а также

$$\Delta W \Delta t \approx \hbar,$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta W$  — неопределенность определения соответственно координаты, импульса, скорости и энергии частицы;  $\Delta t$  — неопределенность определения времени, в течение которого частица может иметь энергию  $W_0 \pm \Delta W$ .

Из последнего соотношения следует

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta W}$$

или

$$\Delta \omega \Delta t \approx 1. \quad (\text{П.112})$$

Чтобы получить сведения о системе, необходимо провести измерения, причем измерения могут дать значения, характеризующие лишь одну сторону процесса. Или получим набор значений, характеризующих положение частиц, или получим набор значений, характеризующих их импульсы. Создать условия, при которых одновременно можно провести точные измерения и тех и других значений, невозможно.

## П.9. Квантовые ансамбли

Совокупность одинаковых частиц, находящихся в одинаковых макроскопических условиях (температура, давление, внешнее поле и т. д.), называется квантовым ансамблем. Среднее значение любой величины, характеризующее состояние квантового ансамбля, называется средним по ансамблю. Эти средние значения характеризуют и поведение частиц, входящих в ансамбль. При этом состояние всей макроскопической системы в целом характеризуется средними значениями величин для ансамблей, входящих в ее состав.

Если состояние всех частиц, входящих в ансамбль, до измерения каких-либо величин описывается одной и той же волновой функцией  $\psi$ , то ансамбль называется чистым. При этом измерение какой-либо величины  $L$  может дать целый ряд значений  $L_1, L_2, L_3, L_4$  и т. д., и среднее по ансамблю значение

$$\tilde{L} = \sum_i \frac{n_i L_i}{n},$$

где  $n$  — число всех измерений;  $n_i$  — число измерений, дающих одинаковое значение  $L_i$ .

Каждому значению  $L_i$  соответствует собственная функция  $\psi_i$ , так как каждое измерение приводит систему к новому состоянию. Чтобы повторить измерение, необходимо вернуть систему в исходное состояние. При этом согласно принципу суперпозиции (П.110)

$$\hat{\Psi} = \sum_n \hat{a}_n \psi_n,$$

Комплексно сопряженная функция

$$\hat{\Psi}^* = \sum_m \hat{a}_m^* \psi_m^*,$$

плотность вероятности

$$\hat{\Psi} \hat{\Psi}^* = |\hat{\Psi}|^2 = \sum_n |\hat{a}_n \psi_n|^2 + \sum_{m \neq n} \sum_n \hat{a}_m^* \hat{a}_n \psi_m^* \psi_n.$$

Второе слагаемое в последнем выражении называется интерференционным, и в случае чистого ансамбля оно отлично от нуля.

Смешанным называется ансамбль, состоящий из групп, в каждой из которых состояние частиц характеризуется своей собственной функцией  $\psi_i$ , т. е. смешанный ансамбль представляет собой совокупность чистых ансамблей.

Плотность вероятности в случае смешанного ансамбля представляется суммой плотностей вероятностей всех чистых ансамблей

$$\sum_i |\psi_i|^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где  $n$  — число чистых ансамблей, входящих в сложный смешанный ансамбль. В этом случае интерференционный член равен нулю.

Состояние частиц, входящих в смешанный ансамбль, нельзя описать одной волновой функцией. Для описания состояния смешанного ансамбля используется сложная функция, называемая матрицей плотности.

## П.10. Операторы и их свойства

Оператором называется математическое понятие, обозначающее совокупность математических действий, устанавливающее соответствие между функциями.

В квантовой механике применяются линейные операторы, удовлетворяющие условию

$$\hat{L}[u_1(x) + u_2(x)] = \hat{L}u_1(x) + \hat{L}u_2(x), \tag{П.113}$$

где  $\hat{L}$  — оператор;  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  — функции, на которые действует оператор.

Действие оператора на сумму функций эквивалентно сумме результатов действия этого оператора на каждую функцию.

Действие алгебраической суммы операторов  $\hat{L}_1$  и  $\hat{L}_2$  на функцию эквивалентно алгебраической сумме результатов действий операторов на функцию:

$$(\hat{L}_1 \pm \hat{L}_2)u(x) = \hat{L}_1 u(x) \pm \hat{L}_2 u(x). \quad (\text{П.114})$$

Линейные операторы коммутативны, т. е.

$$\hat{L}_1 + \hat{L}_2 = \hat{L}_2 + \hat{L}_1,$$

и ассоциативны, т. е.

$$\hat{L}_1 + (\hat{L}_2 + \hat{L}_3) = (\hat{L}_1 + \hat{L}_2) + \hat{L}_3.$$

Произведение двух операторов удовлетворяет свойству ассоциативности, т. е.

$$(\hat{L}_1 \hat{L}_2)u(x) = \hat{L}_1(\hat{L}_2 u(x)),$$

и свойству дистрибутивности:

$$\hat{L}_1(\hat{L}_2 + \hat{L}_3) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 + \hat{L}_1 \hat{L}_3.$$

Свойство коммутативности для произведения в общем случае не имеет места:

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 \neq \hat{L}_2 \hat{L}_1.$$

Перестановочное соотношение для операторов  $L_1$  и  $L_2$  обозначается в виде

$$[\hat{L}_1 \hat{L}_2] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 - \hat{L}_2 \hat{L}_1,$$

откуда следует, что

$$[\hat{L}_1 \hat{L}_2] = -[\hat{L}_2 \hat{L}_1].$$

Линейный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\int u_1^*(x) \hat{L} u_2(x) dx = \int u_2(x) \hat{L}^* u_1^*(x) dx, \quad (\text{П.115})$$

называется самосопряженным или эрмитовым. Здесь  $u^*(x)$  — функция комплексно сопряженная с  $u(x)$ ;  $\hat{L}^*$  — оператор, комплексно сопряженный с оператором  $\hat{L}$ .

В квантовой механике применяются только эрмитовы операторы, так как только такие операторы могут изображать действительные физические величины.



В результате действия оператора на некоторую функцию в общем случае получаем новую функцию

$$\hat{L}u(x) = \varphi(x).$$

Однако для некоторых функций  $u(x)$  в результате действия оператора получим ту же функцию, умноженную на некоторое постоянное число:

$$\hat{L}u(x) = Lu(x). \quad (\text{П.116})$$

Число  $L$  называется собственным значением оператора  $\hat{L}$ , а функция  $u(x)$ , удовлетворяющая уравнению (П.16), называется собственной функцией оператора.

Если оператор является линейным дифференциальным оператором, то уравнение (П.116) будет линейным дифференциальным уравнением, имеющим при заданных граничных условиях ненулевые решения лишь при определенных значениях  $L$ , являющихся собственными значениями. Обычно имеется множество собственных значений и собственных функций. Совокупность всех собственных значений образует дискретный или сплошной спектр.

Собственные значения самосопряженного оператора всегда действительные. Собственные функции линейного самосопряженного оператора удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_V u_m^* u_n \, dV = 0 \text{ при } m \neq n.$$

Совокупность собственных функций  $u_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) образует полную систему, т. е. любая непрерывная функция, заданная на том же интервале, что и  $u_n$ , удовлетворяющая таким же граничным условиям, может быть представлена в виде ряда

$$\varphi = \sum_n a_n u_n, \quad (\text{П.117})$$

где

$$a_n = \int \varphi u_n^* \, dV.$$

Ряд (П.117) сходится, если интеграл  $\int_V |\varphi|^2 \, dV$  существует.

В квантовой механике операторы служат для аналитического описания физических величин. При этом значения физической величины, определяемые опытным путем, должны совпадать с собственным значением оператора. Поскольку физическое значение представляется действительным числом, то оператор, соответствующий ей, должен быть самосопряженным.

## П.11. Операторы энергии и импульса

Уравнение Шредингера (П.106) можно представить в следующем виде:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x_i) \right] \psi = W \psi,$$

т. е. воздействие оператора

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x_i) \right] \quad (\text{П.118})$$

на функцию  $\psi$  равносильно умножению ее на величину  $W$  — полную энергию системы. Таким образом, оператор (П.118) является оператором полной энергии, его называют также гамильтонианом и обозначают символом  $\hat{H}$ . В этом операторе удобно заменить функцию  $U(x_i)$  оператором потенциальной энергии  $\hat{U}(\hat{x}_i)$ :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}(\hat{x}_i).$$

При этом уравнение Шредингера для стационарных состояний принимает вид

$$\hat{H}\psi = W\psi \quad (\text{П.119})$$

или согласно (П.107) вид

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (\text{П.120})$$

Поскольку полная энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий, то согласно уравнению (П.120) оператор кинетической энергии

$$\hat{W}_{\text{кин}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta. \quad (\text{П.121})$$

С другой стороны,

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

и

$$\hat{W}_{\text{кин}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (\text{П.122})$$

где  $\hat{p}$  — оператор импульса.

Сравнивая формулы (П.121) и (П.122), получаем

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta,$$

или

$$\hat{p} = j\hbar\nabla,$$

или

$$\hat{p}_i = j\hbar \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где  $\hat{p}_i$  — проекция оператора  $\hat{p}$  на оси координат.

## П.12. Среднее значение. Матрицы

Среднее значение, или математическое ожидание, физической величины  $x$  определяется выражением

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{П.123})$$

где  $f(x)$  — плотность вероятности случайной непрерывной величины.

Если  $x$  — координата, то ее среднее значение

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi^*(x) \psi(x) dx,$$

где

$$f(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^* \psi.$$

Среднее значение функции  $F(x)$

$$\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* F(x) \psi dx. \quad (\text{П.124})$$

Среднее значение оператора  $\hat{L}$

$$L = \int_V \psi^* \hat{L} \psi dV, \quad (\text{П.125})$$

где интегрирование проводится по конфигурационному пространству, т. е. по совокупности координат, определяющих положение частицы и ее элементарных частей в пространстве.

Поскольку  $L$  действительная измеряемая величина, то

$$L = L^*,$$

а

$$L^* = \int_V \psi \hat{L}^* \psi^* dV, \quad (\text{П.126})$$

т. е. оператор должен удовлетворять условию (П.115).

Поскольку согласно формуле (П.110)

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n; \quad \Psi^* = \sum_m a_m^* \psi_m^*,$$

то, комбинируя попарно волновые функции  $\psi_n$  и  $\psi_m$ , получаем согласно (П.126) последовательность средних значений, в общем случае зависящих от времени:

$$L_{nm}(t) = \int_V \psi_m^* \hat{L} \psi_n dV = L_{mn}^*(t), \quad (\text{П.127})$$

которые можно представить в виде эрмитовой матрицы, рассматривая  $L_{nm}$  как элемент матрицы, где первый индекс относится к номеру строки, а второй — к номеру столбца:

$$[L(t)] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Алгебра операторов соответствует алгебре матриц. Переход от операторов к матрицам соответствует переходу от дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям.

### П.13. Матрица электрического дипольного момента

Элемент матрицы электрического дипольного момента, согласно (П.127) определяется выражением

$$p_{enm}(t) = \int_V \psi_m^* \hat{p}_e \psi_n dV, \quad (\text{П.128})$$

где  $\hat{p}_e$  — оператор дипольного момента, и интегрирование проводится по конфигурационному пространству частицы (атома или молекулы).

Движение электронов можно охарактеризовать вероятностью нахождения их в той или иной точке пространства. Совокупность этих точек можно рассматривать как электронное облако. Вероятность нахождения электронов в объеме  $dV$  при стационарном состоянии, характеризуемом волновой функцией  $\psi_n$ , определяется выражением

$$\psi_n^* \psi_n dV,$$

плотность заряда в данном объеме —

$$e \psi_n^* \psi_n,$$

а среднее значение дипольного момента, соответствующее диагональному элементу матрицы (П.128),

$$\mathbf{p}_{enn} = e \int_V \psi_n^* \psi_n \mathbf{r} dV = e \int_V \psi_n^* \mathbf{r} \psi_n dV, \quad (\text{П.129})$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат, где находится ядро атома или центр тяжести зарядов ядер молекулы, к произвольной точке электронного облака; интегрирование проводится по конфигурационному пространству частицы. При симметричном распределении электронного облака выражение (П.129) равно нулю, при несимметричном — постоянному значению. Действительно, в последнем случае, если  $\mathbf{r}$  не зависит от времени, то согласно (П.103) подынтегральное выражение в (П.129) от времени также не зависит.

Переходы между двумя уровнями  $m$  и  $n$  происходят в обе стороны, и с учетом формулы (П.103) можно записать

$$\begin{aligned} p_{e nm} &= e \int_V \psi_m^* \mathbf{r} \psi_n dV = e \int_V \psi_{0m}^* \mathbf{r} \psi_{0n} e^{j\omega_{nm}t} dV; \\ p_{e mn} &= e \int_V \psi_n^* \mathbf{r} \psi_m dV = e \int_V \psi_{0n}^* \mathbf{r} \psi_{0m} e^{-j\omega_{nm}t} dV, \end{aligned} \quad (\text{П.130})$$

где

$$\omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar}.$$

Недиагональные элементы матрицы (П.128) зависят от времени и определяют поглощение или излучение энергии частицей при соответствующих переходах.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{mn} &= \int_V \psi_{0m}^* \mathbf{r} \psi_{0n} dV; \\ \mathbf{r}_{nm} &= \mathbf{r}_{mn}^* = \int_V \psi_{0n}^* \mathbf{r} \psi_{0m} dV. \end{aligned}$$

Поскольку это действительные величины, то

$$r_{nm} = r_{mn} = \int_V \psi_m^* \hat{r} \psi_n dV,$$

и в общем случае электрический дипольный момент может быть представлен в виде эрмитовой матрицы

$$[p_e(t)] = \begin{bmatrix} p_{e 11} & p_{e 12} e^{j\omega_{12}t} & \dots & p_{e 1n} e^{j\omega_{1n}t} \\ p_{e 21} e^{j\omega_{21}t} & p_{e 22} & \dots & p_{e 2n} e^{j\omega_{2n}t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{e n1} e^{j\omega_{n1}t} & p_{e n2} e^{j\omega_{n2}t} & \dots & p_{e nn} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.131})$$

где  $p_{e ik} = p_{e ki}$ ;  $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ .

В случае квантовомеханической системы с двумя энергетическими уровнями, считая, что другие уровни достаточно далеко удалены от этих двух уравнений и не взаимодействуют с ними, матрицу дипольного момента запишем в виде

$$[p_e(t)] = \begin{bmatrix} p_{e11} & p_e e^{j\omega_{12}t} \\ p_e e^{j\omega_{21}t} & p_{e22} \end{bmatrix}$$

В большинстве случаев ввиду симметричности электронного облака дипольные моменты, соответствующие стационарным состояниям, равны нулю и

$$[p_e(t)] = \begin{bmatrix} 0 & p_e e^{j\omega_{12}t} \\ p_e e^{j\omega_{21}t} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.132})$$

### П.14. Матрица энергии

Согласно выражению (П.127) элементы матрицы энергии определяются выражением

$$H_{nm} = \int_V \psi_m^* \hat{H} \psi_n dV, \quad (\text{П.133})$$

где  $\hat{H}$  — оператор энергии, и интегрирование проводится по конфигурационному пространству.

Если оператор  $\hat{H}$  не зависит от времени, а согласно формуле (П.103)

$$\begin{aligned} \psi_m^* &= \psi_{0m}^* e^{-j\frac{W_m}{\hbar}t}; \\ \psi_n &= \psi_{0n} e^{j\frac{W_n}{\hbar}t}, \end{aligned}$$

то подынтегральное выражение (П.133) имеет вид

$$\psi_m^* \hat{H} \psi_n = \psi_{0m}^* \hat{H} \psi_{0n} e^{j\omega_{nm}t},$$

где

$$\omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar}.$$

При  $m = n$

$$\psi_n^* \hat{H} \psi_n = \psi_{0n}^* \hat{H} \psi_{0n}.$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы не зависят от времени и соответствуют стационарным состояниям, недиагональные — зависят от времени и соответствуют переходам системы из одного стационарного состояния в другое.

В случае квантовомеханической системы с двумя энергетическими уровнями  $W_1$  и  $W_2$  ( $W_1 < W_2$ ) стационарные состояния описываются волновыми функциями вида (П.103):

$$\psi_{01} e^{j\frac{W_1}{\hbar}t} \text{ и } \psi_{02} e^{j\frac{W_2}{\hbar}t}.$$

Подставляя эти волновые функции в уравнение (П.119), получаем

$$\hat{H}_0 \psi_{01} = W_1 \psi_{01}; \quad \hat{H}_0 \psi_{02} = W_2 \psi_{02}.$$

Здесь  $\hat{H}_0$  — гамильтониан невозмущенной системы (частицы), который согласно формуле (П.127) можно представить в виде матрицы. С учетом условия ортогональности (П.111) получаем

$$H_{011} = \int_V \psi_{01}^* \hat{H}_0 \psi_{01} dV = W_1;$$

$$H_{012} = \int_V \psi_{01}^* \hat{H}_0 \psi_{02} dV = 0;$$

$$H_{021} = \int_V \psi_{02}^* \hat{H}_0 \psi_{01} dV = 0;$$

$$H_{022} = \int_V \psi_{02}^* \hat{H}_0 \psi_{02} dV = W_2,$$

или

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.134})$$

Под воздействием поля излучения частиц  $\mathbf{E}$  система уже не будет находиться в стационарном состоянии. Состояние системы будет определяться уравнением (П.120):

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{U}(t)]\psi, \quad (\text{П.135})$$

где  $\hat{U}(t)$  — оператор возмущения.

При дипольном взаимодействии

$$U(t) = -\mathbf{p}_e \mathbf{E},$$

и уравнение (П.135) можно представить в виде

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 - \hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}}] \psi,$$

где  $[\hat{H}_0 - \hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}}]$  — гамильтониан возмущенной частицы.

Согласно (П.134) и (П.132)

$$[\hat{H}_0 - \hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}}] = \begin{bmatrix} W_1 & -\mathbf{p}_e \mathbf{E} \\ -\mathbf{p}_e \mathbf{E} & W_2 \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega_1 & -\frac{\mathbf{p}_e \mathbf{E}}{\hbar} \\ -\frac{\mathbf{p}_e \mathbf{E}}{\hbar} & \omega_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.136})$$

Частоты  $\omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar}$  также образуют матрицу

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & 0 & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

### П.15. Матрица плотности

Систему частиц можно разделить на группы, в каждой из которых частицы находятся в определенных энергетических состояниях с энергией  $W_i$ , характеризующихся волновыми функциями  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Статистический вес групп

$$g_i = \frac{N_i}{N},$$

где  $N_i$  — число частиц  $i$ -й группы;  $N$  — полное число частиц.

Очевидно, что

$$\sum_i g_i = 1.$$

Среднее значение некоторой величины  $p$  для всей системы равно

$$\tilde{p} = \sum_i g_i \tilde{p}_i, \quad (\text{П.137})$$

где  $\tilde{p}_i$  — среднее значение величины  $p$  для  $i$ -й группы согласно (П.124) определяется выражением

$$\tilde{p}_i = \int_V \psi_i^* p \psi_i dV. \quad (\text{П.138})$$

Функции  $\psi_i$  и  $\psi_i^*$  согласно (П.110) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_n a_n^{(i)} \psi_n; \\ \psi_i^* &= \sum_n a_n^{(i)*} \psi_n^*. \end{aligned} \quad (\text{П.139})$$

Подставляя (П.138) и (П.139) в (П.137), получаем

$$\tilde{p} = \sum_i g_i \sum_m \sum_n a_m^{(i)*} a_n^{(i)} p_{mn},$$

где  $p_{mn} = \int_V \psi_m^* p \psi_n dV$  — матричный элемент, или

$$\tilde{p} = \sum_{m,n} \rho_{mn} p_{mn}, \quad (\text{П.140})$$

где

$$\rho_{mn} = \sum_i g_i a_m^{(i)*} a_n^{(i)} \quad (\text{П.141})$$



— матричный элемент матрицы  $[\rho]$ , называемой статистической матрицей или матрицей плотности.

Диагональные элементы матрицы плотности  $\rho_{mm}$  определяют вероятность нахождения системы в данном состоянии  $\psi_m$ , поэтому эти элементы не бывают отрицательными и сумма всех диагональных элементов равна единице. Недиагональные элементы  $\rho_{mn}$  характеризуют квантовые переходы из состояния  $\psi_m$  в состояние  $\psi_n$  (с энергетического уровня  $m$  энергии на уровень  $n$ ). Поскольку среднее значение физической величины должно быть действительным, то матрица плотности является эрмитовой.

Выражение (П.140) можно представить также в виде

$$\tilde{\rho} = \sum_i (\rho\rho)_{kk}, \quad (\text{П.142})$$

т. е. среднее значение величины равно сумме диагональных элементов матрицы, представляющей собой произведение матриц  $[\rho]$  и  $[p]$ .

Если система изменяется во времени, то

$$\begin{aligned} \rho_{mn} &= \sum_i g_i a_m^{(i)*}(t) a_n^{(i)}(t); \\ \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} &= \sum_i g_i \left[ \frac{\partial a_m^{(i)*}}{\partial t} a_n^{(i)} + a_m^{(i)*} \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Величину  $\frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial t}$  определим с помощью уравнения (П.120):

$$\hat{H}\psi_i = -j\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \quad (\text{П.143})$$

где величину  $\psi_i$  представим в виде

$$\psi_i = \sum_n a_n^{(i)} \psi_n.$$

Здесь  $\psi_n$  — собственные функции оператора  $\hat{H}$ . Подставляя это разложение в выражение (П.143), умножая обе части на  $\psi_m^*$  и интегрируя, получаем

$$-j\hbar \frac{\partial a_m^{(i)}}{\partial t} = \sum_m H_{mn} a_n^{(i)}, \quad (\text{П.144})$$

где

$$H_{mn} = \int_V \psi_m^* \hat{H} \psi_n dV.$$

С учетом выражения (П.144) и эрмитовости матрицы энергии в формуле (П.143), а именно  $H_{mi} = H_{im}^*$ , получаем

$$-j\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = \sum_i (H_{mi} \rho_{in} - \rho_{mi} H_{in})$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{j}{\hbar} (H\rho - \rho H) = [H\rho] \quad (\text{П.145})$$

— закон изменения матрицы плотности  $[\rho]$  во времени. Здесь  $[H\rho]$  — квантовые скобки Пуассона.

## П.16. Вероятность перехода

Частица может находиться только в определенных энергетических состояниях. Под влиянием внешних воздействий она может переходить из одного состояния в другое.

Пусть в момент времени  $t < t_1$  частица находится в стационарном состоянии, определяемом волновой функцией  $\psi_{0m}(r) e^{j\frac{W_m t}{\hbar}}$ . В промежутке времени  $t_1 < t < t_2$  частица подвергается внешнему воздействию (возмущению) и переходит в новое стационарное состояние, характеризуемое волновой функцией  $\psi_{0n}(r) e^{j\frac{W_n t}{\hbar}}$ . Переход частицы из одного состояния в другое — вероятностный процесс. Уравнение Шредингера в данном случае имеет вид (П.120):

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{U}(t)]\psi, \quad (\text{П.146})$$

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан невозмущенной системы, а

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} U_n(t) & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t < t_1 \text{ и } t > t_2 \end{cases}$$

— оператор возмущения, характеризующий внешнее воздействие.

Уравнение Шредингера для невозмущенной системы имеет вид

$$-j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi;$$

его решение

$$\psi_t = \psi_{0l} e^{j\frac{W_l t}{\hbar}}. \quad (\text{П.147})$$

Решение уравнения (П.146) будем искать в виде линейной комбинации волновых функций (П.147):

$$\psi = \sum_l a_l(t) \psi_l = \sum_l a_l(t) \psi_{0l} e^{j\frac{W_l t}{\hbar}}, \quad (\text{П.148})$$

где  $a_l(t)$  — неизвестные функции времени.

Пусть  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \tau$ . Поскольку при  $t < 0$  частица находилась в стационарном состоянии  $m$ , т. е.

$$\psi|_{t < 0} = \psi_{0m} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}},$$

то

$$a_l(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } l = m, \\ 0 & \text{при } l \neq m. \end{cases}$$

При  $t > \tau$  система вновь переходит в стационарное состояние. При этом, согласно выражению (П.148)

$$\psi|_{t > \tau} = \sum_l a_l(\tau) \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}}. \quad (\text{П.149})$$

Здесь коэффициенты  $a_l(t) = a_l(\tau)$  постоянны при  $t > \tau$ .

Величина  $|a_l(\tau)|^2$  определяет вероятность нахождения системы в состоянии  $l$ . Вероятность нахождения системы в состоянии  $m$  при  $t < 0$  по условию равна единице, т. е.

$$|a_m(t)|^2 = |a_m(0)|^2 = 1.$$

Вероятность нахождения системы в состоянии  $n$  определяется величиной  $|a_n(\tau)|^2$ . Таким образом, вероятность перехода система из состояния  $m$  в состояние  $n$

$$P_{mn} = |a_n(\tau)|^2.$$

Подставляя выражение (П.149) в уравнение (П.146), получаем

$$\begin{aligned} & -j\hbar \sum_l \frac{da_l}{dt} \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}} + \sum_l a_l W_l \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}} = \\ & = \hat{H}_0 \sum_l a_l \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}} + \hat{U}_B(t) \sum_l a_l \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (\text{П.150})$$

Поскольку согласно уравнению (П.119)

$$\hat{H} \psi_{0l} = W_l \psi_{0l},$$

то

$$\sum_l a_l W_l \psi_{0l} e^{j \frac{W_l t}{\hbar}} = \sum_l a_l (\hat{H}_0 \psi_{0l}) e^{j \frac{W_l t}{\hbar}},$$

и выражение (П.150) переходит в равенство

$$-j\hbar \sum_l \frac{da_l}{dt} \psi_{0l} e^{j\frac{W_l}{\hbar}t} = \hat{U}_B \sum_l a_l \psi_{0l} e^{j\frac{W_l}{\hbar}t}.$$

Умножая обе части последнего равенства на  $\psi_{0n}^* e^{-j\frac{W_n}{\hbar}t}$  и интегрируя по конфигурационному пространству частицы, с учетом условия ортогональности (П.111) получаем

$$-j\hbar \frac{da_n}{dt} = \sum_l a_l U_{nl} e^{-j\omega_{nl}t}, \quad (\text{П.151})$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{nl} &= \frac{W_n - W_l}{\hbar}; \\ U_{nl} &= \int_V \psi_{0n}^* \hat{U}_n \psi_{0l} dV \end{aligned} \quad (\text{П.152})$$

— элементы матрицы энергии возмущения.

Начальные условия можно представить в виде

$$a_l(t) = \delta_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = m, \\ 0 & \text{при } l \neq m. \end{cases}$$

Уравнение (П.151) можно решить методом последовательных приближений (см. § П.5), полагая возмущение малым ( $U_B \rightarrow 0$ ). В качестве нулевого приближения определим коэффициенты  $a_l(t)$  из начальных условий

$$a_l^{(0)}(t) = \delta_{lm}.$$

Первое приближение найдем, используя нулевое приближение. Подставляя его в (П.151), получаем

$$-j\hbar \frac{da_n^{(1)}}{dt} = \sum_l a_l^{(0)} U_{nl}(t) e^{-j\omega_{nl}t} = U_{nm}(t) e^{-j\omega_{nm}t},$$

откуда

$$a_n^{(1)}(t) = -\frac{1}{j\hbar} \int_0^t U_{nm}(t') e^{-j\omega_{nm}t'} dt' + \delta_{nm}.$$

Ограничиваясь первым приближением, получаем

$$P_{mn}(\tau) = |a_n^{(1)}(\tau)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\tau U_{nm}(t) e^{-j\omega_{nm}t} dt \right|^2. \quad (\text{П.153})$$

Если при расчете окажется, что  $U_{nm} = 0$ , то соответствующий переход невозможен. Такой переход называется запрещенным.

Рассмотрим возмущение частицы электрическим полем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Если эквивалентный электрический дипольный момент частицы равен  $\mathbf{p}_e$ , то энергия ее взаимодействия с полем

$$U_B = -\mathbf{p}_e \mathbf{E}.$$

Пусть в момент  $t < 0$  частица находилась в состоянии с энергией  $W_m$ , а под влиянием возмущения переходит в состояние с энергией  $W_n$

$$\hat{U}_B = -\hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}}_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где  $\tau$  — время взаимодействия.

Согласно (П.152)

$$U_{nm} = \int_V \psi_{0n}^* \hat{\mathbf{p}}_e \hat{\mathbf{E}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \psi_{0m} dV.$$

Поскольку длина волны электромагнитного поля намного больше размеров конфигурационного объема частицы, то поле в пределах этого объема можно считать постоянным и

$$U_{nm} = - \left( \int_V \psi_{0n}^* \hat{\mathbf{p}}_e \psi_{0m} dV \right) \mathbf{E}_m \cos \omega t,$$

или

$$U_{nm} = -\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m \cos \omega t,$$

где  $\mathbf{p}_{e\,nm} = \int_V \psi_{0n}^* \hat{\mathbf{p}}_e \psi_{0m} dV$  — элемент матрицы электрического момента диполя.

Согласно (П.153)

$$P_{nm}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 \left| \frac{e^{j(\omega - \omega_{nm})\tau} - 1}{\omega - \omega_{nm}} - \frac{e^{-j(\omega - \omega_{nm})\tau} - 1}{\omega + \omega_{nm}} \right|^2. \quad (\text{П.154})$$

Значение первого слагаемого в выражении (П.154) быстро увеличивается при приближении значения частоты возмущающего поля  $\omega$  к значению частоты перехода  $\omega_{nm}$ . Практически переход возможен, если

$$\omega \approx \omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar}$$

или

$$W_n = W_m + \hbar\omega.$$

Таким образом, первый член в выражении (П.154) связан с переходом в состояние  $n$ , которое выше состояния  $m$  на величину энергии  $\hbar\omega = \hbar\omega_{nm}$ . При таком переходе энергия частицы увеличивается за счет поглощения энергии электромагнитного поля (резонансное поглощение). Значение второго слагаемого в выражении (П.154) быстро увеличивается при приближении значения частоты поля  $\omega$  к значению частоты  $-\omega_{nm}$ . Это слагаемое велико, если

$$\omega \approx -\omega_{nm} = \frac{W_m - W_n}{\hbar}$$

или

$$W_n = W_m - \hbar\omega.$$

Следовательно, второй член связан с переходом частицы на нижний уровень, при котором энергия частицы уменьшается на величину  $\hbar\omega$ , отдаваемую частицей полю (индуцированное излучение).

Вероятность перехода, связанная с поглощением, согласно выражению (П.154) равна

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{enm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{\omega - \omega_{nm}}{2} \tau}{(\omega - \omega_{nm})^2}; \quad (\text{П.155})$$

вероятность перехода, связанная с излучением,

$$P_{mn}^{\text{изл}}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{enm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{\omega + \omega_{nm}}{2} \tau}{(\omega + \omega_{nm})^2}. \quad (\text{П.156})$$

Очевидно, что вероятности переходов вверх и вниз одинаковы:

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = P_{mn}^{\text{изл}}(\tau). \quad (\text{П.157})$$

Рассмотрим переходы, связанные с поглощением. При достаточно большом значении  $\tau$  множитель

$$\frac{4 \sin^2 \frac{\omega - \omega_{nm}}{2} \tau}{(\omega - \omega_{nm})^2}$$

обладает свойством  $\delta$ -функции и его можно представить в виде

$$\frac{4 \sin^2 \frac{\omega - \omega_{nm}}{2} \tau}{(\omega - \omega_{nm})^2} = 2\pi\tau\delta(\omega - \omega_{nm}).$$

Подставляя этот результат в выражение (П.155), окончательно получаем

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 2\pi\tau\delta(\omega - \omega_{nm}), \quad (\text{П.158})$$

т. е. вероятность перехода обращается в бесконечность при резонансе  $\omega = \omega_{nm}$  и равна нулю при  $\omega \neq \omega_{nm}$ . В рассмотренном приближении энергетический уровень считается бесконечно узким. При учете ширины энергетического уровня  $P_{mn}^{\text{погл}}(\tau)$  будет максимальна при  $\omega = \omega_{nm}$ , но конечна. Согласно формуле (П.158) вероятность перехода пропорциональна времени взаимодействия поля с частицей.

Вероятность перехода в единицу времени получим, разделив выражение (П.158) на  $\tau$ :

$$P_{mn}^{\text{погл}} = \frac{P_{mn}^{\text{погл}}(\tau)}{\tau} = \left| \frac{\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 2\pi\delta(\omega - \omega_{nm}).$$

Если уровень  $m$  соответствует одному состоянию, а уровень  $n$  представляет собой полосу состояний, распределенных по энергии непрерывно или дискретно с очень малым расщеплением, то переходы с уровня  $m$  в полосу состояний  $n$  будут соответствовать энергиям, заключенным между  $W$  и  $W + dW$ . Если  $N(W)$  — плотность распределения состояний в зависимости от энергии, то

$$N(W) dW = N(W)\hbar d\omega$$

— число состояний в полосе  $n$ . Вероятность перехода из состояния  $m$  в полосу состояний  $n$

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \int \left| \frac{\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 2\pi\tau\delta(\omega - \omega_{nm}) N(W)\hbar d\omega.$$

Интегрируя по уровню  $n$ , т. е. по узкому спектру частот в области  $\omega \approx \omega_{nm}$ , получаем

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m|^2 N(W)\tau. \quad (\text{П.159})$$

При этом вероятность перехода в единицу времени

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathbf{p}_{e\,nm} \mathbf{E}_m|^2 N(W). \quad (\text{П.160})$$

## П.17. Ширина спектральной линии

Поскольку энергетические уровни не являются бесконечно узкими, а имеют конечную ширину, то излучение или поглощение при переходах происходит в

некотором интервале частот, т. е. спектральная линия имеет конечную ширину, а форма ее количественно характеризуется функцией, называемой фактором.

Конечная ширина энергетических уровней связана с конечностью времени жизни частицы на энергетическом уровне  $\Delta t$ . Соответствующая ширина спектральной линии, определяемая как полоса частот  $\Delta\omega$ , на границах которой интенсивность излучения или поглощения уменьшается в 2 раза по сравнению с максимальной, называется естественной шириной линии. Естественная ширина линии определяет тот предел, меньше которого ширина спектральной линии быть не может.

Согласно квантовой механике естественная ширина спектральной линии  $\Delta\omega$  и время жизни частицы на энергетическом уровне  $\Delta t$  связаны соотношением неопределенностей (П.112)

$$\Delta\omega\Delta t \approx 1.$$

Конечность времени жизни частицы на энергетическом уровне учитывается затуханием волновой функции. В этом случае  $m$  — состояние частицы — характеризуется волновой функцией

$$\Psi_m = \Psi_{m0} e^{-\frac{\gamma_m t}{2}} e^{j\frac{W_m t}{\hbar}}.$$

Вероятность перехода с уровня  $m$  на уровень  $n$  определится выражением, аналогичным (П.153), где  $e^{-j\omega_{nm}t}$  заменяется на  $e^{-j\omega'_{nm}t}$ :

$$\omega'_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar} + j\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2} = \omega_{nm} + j\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}.$$

Аналогично (П.154)

$$P_{mn}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{enm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 \left| \frac{e^{j(\omega - \omega'_{nm})\tau} - 1}{\omega - \omega'_{nm}} - \frac{e^{-j(\omega - \omega'_{nm})\tau} - 1}{\omega + \omega'_{nm}} \right|^2.$$

Рассмотрим первое слагаемое, характеризующее поглощение, полагая  $\tau \gg \frac{1}{\gamma_n + \gamma_m}$  (установившийся режим). При этом

$$P_{mn}^{\text{погл}}(\tau) = \left| \frac{\mathbf{p}_{enm} \mathbf{E}_m}{\hbar} \right|^2 \frac{1}{(\omega - \omega_{nm})^2 + \left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right)^2}.$$

Множитель

$$\frac{1}{(\omega - \omega_{nm})^2 + \left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right)^2}$$



определяет форму линии поглощения (рис. П.18), связанную с конечностью времени жизни частицы на энергетических уровнях и называемую *лоренцевой* (то же будет и для линии излучения).

Обозначим

$$\gamma = \frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}$$

и, учитывая условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = 1,$$

получим форм-фактор лоренцевой линии в виде

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_{nm})^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (\text{П.161})$$

или

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_{nm})^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}, \quad (\text{П.162})$$

где  $\Delta\omega = \gamma$  — естественная ширина линии. Форма линии симметрична.

Естественная ширина линии определяет тот предел, меньше которого ширина спектральной линии быть не может. В СВЧ-диапазоне естественная ширина линии составляет  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  Гц, в оптическом — около  $10^9$  Гц.

Наблюдаемые спектральные линии могут являться суперпозицией нескольких неразрешенных спектральных линий — это *неоднородно уширенная линия*. Если такой суперпозиции нет и частица излучает или поглощает энергию в пределах всей спектральной линии, то линию называют *однородно уширенной*. Естественная ширина линии является однородно уширенной.

В действительности ширина спектральной линии гораздо больше естественной ширины. В газах уширение происходит за счет эффекта Доплера. Частицы газа находятся в хаотическом тепловом движении. Излучение частицы, движущееся со скоростью  $v$ , вследствие эффекта Доплера смещено по частоте на ве-

личину  $\omega_0 \frac{v}{c}$ , где  $\omega_0$  — частота неподвижного из-

лучателя;  $c$  — скорость света. Поскольку частицы движутся с различными скоростями, то частотные сдвиги излучения разных частиц различны. Доплеровский сдвиг частоты пропорционален частоте перехода, и уширение линии наиболее значительно в оптическом диапазоне. На ширину линии влияют

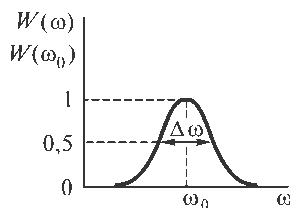


Рис. П.18. Лоренцева форма спектральной линии



переменные  $x_i$  удаляются от исходных равновесных значений, то систему называют *неустойчивой*. Неустойчивой называют систему, в которой возмущения нарастают даже по истечении довольно долгого времени. Если при возмущении переменные  $x_i$  не удаляются от исходных равновесных значений и не возвращаются к ним, то систему называют *безразлично устойчивой*.

Исследуем стационарные решения  $x_{is}$  на устойчивость, задавая малые отклонения  $\delta x_i$ . Подставляя  $x_{is} + \delta x_i$  в систему уравнений (П.163) при условии (П.164), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= f_1(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n, x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\delta x_n}{dt} &= f_n(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n, x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}). \end{aligned}$$

Раскладывая нелинейные функции в ряд Тейлора в окрестности точек равновесия и удерживая первый линейный член, получаем линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= C_{11}\delta x_1 + C_{12}\delta x_2 + \dots + C_{1n}\delta x_n; \\ \frac{d\delta x_2}{dt} &= C_{21}\delta x_1 + C_{22}\delta x_2 + \dots + C_{2n}\delta x_n; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\delta x_n}{dt} &= C_{n1}\delta x_1 + C_{n2}\delta x_2 + \dots + C_{nn}\delta x_n, \end{aligned} \tag{П.165}$$

где  $C_{ni}$  — постоянные, зависящие от  $x_{is}$ .

Естественно предположить для  $\delta x_i$  экспоненциальную зависимость от времени вида  $e^{\alpha t}$ , т. е.

$$\delta x_i = A_i e^{\alpha t}, \tag{П.166}$$

где  $A_i$  — постоянные, определяемые начальными условиями.

Подставляя (П.166) в (П.165), получаем

$$\begin{aligned} \alpha A_1 &= C_{11}A_1 + C_{12}A_2 + \dots + C_{1n}A_n; \\ \alpha A_2 &= C_{21}A_1 + C_{22}A_2 + \dots + C_{2n}A_n; \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha A_n &= C_{n1}A_1 + C_{n2}A_2 + \dots + C_{nn}A_n. \end{aligned} \tag{П.167}$$

Для того, чтобы все  $A_i$  не равнялись тождественно нулю, необходимо, чтобы определитель системы (П.167) был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \alpha & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} - \alpha & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

или

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + \dots + C_{n-1} \alpha = 0. \quad (\text{П.168})$$

Корни уравнения (П.168) определяют поведение системы. Если действительная часть хотя бы одного корня положительна, то система неустойчива; любое отклонение в такой системе с течением времени возрастает. Если действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, а действительные части остальных корней отрицательны, то система безразлично устойчива. Если действительные части всех корней отрицательны, то система устойчива.

## Список рекомендуемой литературы

1. *Баскаков С. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высш. шк., 1992.
2. *Боголюбов В. Н., Ескин А. В., Карбовский С. Б.* Управляемые ферритовые устройства СВЧ. М.: Сов. радио, 1972.
3. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Колесников П. М.* Введение в нелинейную электродинамику. Минск: Наука и техника, 1971.
5. *Кугушев А. М., Голубева Н. С.* Основы радиоэлектроники. Нелинейные электромагнитные процессы. М.: Энергия, 1972.
6. *Кугушев А. М., Голубева Н. С., Митрохин В.Н.* Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
8. *Лебедев Н. В.* Техника и приборы СВЧ / Под ред. Н. Д. Девяткова. М.: Высш. шк., 1970.
9. *Машковцев Е. И., Цибизов К. Н., Емелин Б. Ф.* Теория волноводов. М.: Наука, 1966.
10. *Ниганов В.А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П.* Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн. М.: Радио и связь, 2002.
11. *Ниганов В.А.И., Осипов О. В., Раевский С. Б., Яровой Г. П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005.
12. *Нефедов Е. И.* Открытые коаксиальные резонансные структуры. М.: Наука. 1982.
13. *Сазонов Д. М., Гридин А. Н., Мишустин Б. А.* Устройства СВЧ / Под ред. Д.М. Сазонова. М.: Высш. шк., 1981.
14. *Фельсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. В 2 т. М.: Мир, 1978.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ансамбли квантовые 455, 457
- Баланс амплитуд 327  
– фаз 327
- Вектор Герца 38  
– Пойнтинга 28
- Вектор-потенциал четырехмерный 46
- Вентиль 300  
– на смещении поля 310  
– резонансный 306  
– – коаксиальный 308  
– – на круглом волноводе 306  
– – – прямоугольном волноводе 307  
– – – полосковой линии 318  
– – – спиральной линии 320  
– фарадеевский 301
- Вероятность индуцированного излучения 472  
– – поглощения 472
- Волна необыкновенная 143  
– неоднородная 148, 156, 163, 168  
– обыкновенная 143  
– однородная 148  
– отраженная 150, 365  
– падающая 150, 151, 365  
– плоская 78, 144  
– поверхностная 167  
– прошедшая 150
- Волны между параллельными плоскостями 185  
– – – – виды волн 188, 192, 193  
– – – – дисперсия 191
- Волновод биконический 236, 244  
– диафрагмированный 220  
– диэлектрический 223  
– квазипирамидальный 236, 244  
– клиновидный 236, 249  
– коаксиальный 215, 217
- Волновод коаксиальный конический 236, 242  
– конический 236, 243  
– Н-образный 207  
– П-образный 207  
– прямоугольный 193, 197, 206  
– радиальный 236, 250  
– секторальный 236, 250  
– с замедленной фазовой скоростью направляемых волн 220  
– содержащий намагниченный феррит 256  
– спиральный 231  
– сферический 236, 245  
– цилиндрический 209, 212, 214
- Вращение плоскости поляризации 140, 302
- Время релаксации 14, 93
- Входное сопротивление линии 384, 385, 387
- Гиратор 299
- Диамагнетик 15
- Диафрагма 402
- Диполь Герца 70-74  
– электрический 13  
– магнитный 15
- Диэлектрик 13
- Длина волны в среде 76  
– – – волноводе 189
- Добротность резонатора обыкновенного 279  
– – открытого 294
- Закон Ампера 17  
– Кулона 18  
– Ома 12, 13, 22  
– Снеллиуса 152  
– – модифицированный 159  
– Фарадея 18
- Излучение индуцированное 88

- Излучение спонтанное 88  
 Инвариантность заряда 45  
 Индукция поля магнитного 11, 15  
 -- электрического 11, 14  
 Интервал когерентности 105
- Коэффициент бегущей волны** 173, 382  
 – квантового усиления 323, 324, 340  
 – – – пороговый 327  
 – отражения по магнитному полю 154  
 – – – напряжению 371, 372  
 – – – электрическому полю 153  
 – прохождения по магнитному полю 154  
 – – – электрическому полю 153  
 – стоячей волны 382  
 – Эйнштейна для индуцированного излучения 89  
 – – – – поглощения 89  
 – – – спонтанного излучения 89
- Линия поверхностной волны** 223, 227  
 – полосковая 231  
 – с диэлектрическим покрытием 231  
 – спектральная, естественная ширина 474, 475  
 – – неоднородно уширенная 475  
 – – однородно уширенная 475  
 Лучепреломление двойное 144
- Магнетик** 15  
 Магнитодиэлектрик 137  
 Матрица передачи 391, 393  
 – – волновая 394, 395, 398, 399  
 – плотности 467  
 – рассеяния 396–399  
 – электрического дипольного момента 462  
 – энергии 464  
 Метод медленно меняющихся амплитуд и фаз 445  
 – последовательных приближений 444  
 – символический 56, 434  
 – Фурье 441  
 Модулятор 301  
 – амплитудный 301  
 – быстродействующий 316  
 Мост 313
- двойной Т-образный 314  
 – щелевой 313
- Намагниченность среды** 15  
**Напряженность поля магнитного** 11  
 – – электрического 11  
**Населенность инверсная** 341, 343  
 – – пороговая 341, 343, 353, 355  
 – уровня 90, 451
- Оператор энергии** 460  
 – импульса 460  
**Отражение полное** 165
- Парамагнетик** 15, 16, 122  
**Переходы квантовые безызлучательные** 87, 452  
 – – излучательные 87, 452  
 – плавные 254  
 – ступенчатые 254  
 – – с максимально плоской характеристикой 252  
 – компенсированные экспоненциальные 255
- Плазма** 112  
 – в магнитном поле 144  
**Плоскость падения** 150  
 – поляризации 119  
**Плотность тока** 12  
**Поле в медленно движущейся среде** 51  
 – квазистационарное 40  
 – нестационарное 11, 40  
 – потенциальное 416  
 – соленоидальное 417  
 – статическое 42  
 – стационарное 41  
 – электростатическое 42  
**Поляризация поля** 119  
 – – круговая 120  
 – – линейная 119  
 – – – вертикальная 150  
 – – – горизонтальная 150  
 – – эллиптическая 121  
**Поляризация среды** 13, 14  
 – – ионная 14, 107  
 – – ориентационная 14, 108  
 – – электронная 14, 96  
**Постоянная магнитная** 12

- Постоянная распространения 61, 78  
 – – длинной линии 365–370  
 – электрическая 12  
 Потенциал векторный 12, 417  
 – запаздывающий 39  
 – скалярный 12, 416  
 Поток вектора 414  
 Постулаты Бора 446, 449  
 Преобразования Лоренца 425, 427  
 Принцип неопределенности 458  
 – относительности Эйнштейна 423  
 – Паули 449  
 – суперпозиции 22  
 Провод 228  
 – конечной проводимости 228  
 – с диэлектрическим покрытием 229  
 Проводимость 12  
 Проницаемость диэлектрическая 14  
 – магнитная 15  
 Прохождение полное 164  
 Процесс линейный 22  
 – нелинейный 23, 24  
 – параметрический 24
- Распределение Больцмана 91, 451**  
 Резонанс парамагнитный 129  
 – ферромагнитный 132  
 Резонатор волноводный 403  
 – объемный прямоугольный 271, 275  
 – – цилиндрический 277, 278  
 – открытый конфокальный 291  
 – – плоский 283  
 Релаксация спин-решеточная 125  
 – спин-спиновая 125
- Самоканализация энергии 109**  
 Самофокусировка 109  
 Сегнетоэлектрик 15, 108  
 Система координат инерциальная 422  
 – – криволинейная 418  
 – – сферическая 421  
 – – цилиндрическая 420  
 Скорость групповая 81  
 – фазовая 75, 79, 81, 367  
 – согласования линий 386, 387, 388  
 Среда активная 85, 92  
 – диэлектрическая 13, 14
- Среда квантовая двухуровневая 87  
 – линейная 16, 17, 22  
 – нелинейная 16, 17, 23  
 – парамагнитная 14, 16  
 – параметрическая 24  
 – пассивная 85  
 – ферромагнитная 16, 130  
 – – в магнитном поле 137  
 – – – – при подмагничивании поперечном  
 141–141  
 – – – – – продольном 138–141  
 Стержень гофрированный 229
- Тензор 408**  
 – индукции 48  
 – напряженности 48  
 – поляризации 51  
 – эрмитов 409  
**Теорема Гаусса 20**  
 – Остроградского — Гаусса 415  
 – Стокса 415  
 – Умова — Пойнтинга 28–32, 66  
 Ток намагниченности 33, 34  
 – поляризации 19  
 – проводимости 12, 13  
 – смещения 19
- Угол Брюстера 164**  
 – отражения 150  
 – падения 149  
 – поляризации 119  
 – преломления 150  
**Уравнение Бесселя 210, 216, 442**  
 – волновое для вектора Герца 38, 63  
 – – – векторного и скалярного потенциа-  
 лов 36, 37, 62  
 – – – движущихся сред 46  
 – – – диэлектрика 96  
 – – – магнетика 122  
 – – – напряженностей поля 33–36, 61  
 – – – плазмы 112  
 – Шредингера 454  
**Уравнения Гельмгольца 74, 77**  
 – длинной линии 364, 370  
 – Максвелла 21, 52, 59, 60, 61  
 – – для движущихся сред 43–45  
 – – – поля квазистационарного 40



Уравнения Максвелла для поля магнито-статического 42

- монохроматического 60, 61
- стационарного 41
- электростатического 42
- непрерывности 21, 22
- скоростные 342, 350, 353
- состояния среды 17
- электромагнитного поля интегральные 19, 20

Уровни энергии атомов 446

- молекул 450

Условия волнового синхронизма 106, 163, 358

- генерирования 326
- граничные 24–27, 63, 181
- самовозбуждения 327
- усиления 324
- регенеративного 326, 330

Фазовращатель 304

- невзаимный 308
- Рефина — Спенсера 316
- на круглом волноводе с ферритовым вкладышем круглого сечения 310

Фазовращатель на прямоугольном волноводе 309

- с поперечно намагниченной ферритовой пластиной 309
- с ферритовым тороидом 309
- с ферритовой трубкой 310
- управляемый, продольным магнитным полем 304

Формулы Френеля 153, 154

Функция волновая 454

Циркулятор 299

- волноводный типа Y 312
- на полосковой линии 318
- фазовый 314

Циркуляция вектора 414

Частота квантового перехода 453

- резонансная 277, 278

Четвертьволновый трансформатор 386

Число Френеля 290

Эффект Доплера 176

- Зеемана 129, 132, 450, 453
- поверхностный 178
- Штарка 451, 453

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Предисловие .....  | 5   |
| Основные обозначения .....   | 6   |
| Общие математические обозначения .....   | 9   |
| Символы математических операций .....  | 10  |
| 1. Основные характеристики и уравнения электромагнитного поля и среды .....  | 11  |
| 1.1. Характеристики поля .....   | 11  |
| 1.2. Характеристики среды .....  | 12  |
| 1.3. Интегральные уравнения электромагнитного поля .....   | 17  |
| 1.4. Дифференциальные уравнения электромагнитного поля .....   | 20  |
| 1.5. Уравнения непрерывности (закон сохранения заряда) .....   | 21  |
| 1.6. Линейные, нелинейные и параметрические электромагнитные процессы в средах .....   | 22  |
| 1.7. Граничные условия .....   | 24  |
| 1.8. Теорема Умова — Пойнтинга .....   | 28  |
| 1.9. Уравнения электромагнитного поля в частных производных второго порядка<br>(волновые уравнения) .....                                    | 33  |
| 1.10. Классификация электромагнитных полей .....   | 40  |
| 1.11. Электродинамика движущихся сред .....  | 43  |
| 1.12. Уравнение непрерывности преобразования тока и заряда .....   | 43  |
| 1.13. Волновые уравнения для движущихся сред .....   | 46  |
| 1.14. Тензоры электромагнитного поля .....   | 47  |
| 1.15. Тензор поляризации .....   | 51  |
| 1.16. Уравнения для «медленно» движущихся сред .....   | 51  |
| 1.17. Уравнения Максвелла для движущихся сред .....  | 52  |
| Вопросы .....  | 53  |
| Задачи .....   | 54  |
| 2. Электромагнитное поле монохроматического источника в неограниченной среде .....   | 56  |
| 2.1. Основные уравнения .....  | 56  |
| 2.2. Энергетические соотношения и теорема Умова — Пойнтинга в комплексном<br>виде .....  | 64  |
| 2.3. Излучение электромагнитных волн. Электрический диполь Герца .....   | 70  |
| 2.4. Плоская однородная монохроматическая волна в неограниченной однородной<br>изотропной линейной среде. Фазовая и групповая скорости ..... | 74  |
| 2.5. Пассивные и активные среды .....  | 84  |
| Вопросы .....  | 94  |
| Задачи .....   | 95  |
| 3. Нелинейные процессы в пассивных средах .....  | 96  |
| 3.1. Распространение электромагнитного поля в безграничных диэлектрических<br>средах .....   | 96  |
| 3.2. Самофокусировка и самоканализация энергии электромагнитного поля .....  | 109 |
| 3.3. Распространение электромагнитного поля в безграничной изотропной плазме .....   | 112 |
| 3.4. Поляризация электромагнитных волн .....   | 119 |
| 3.5. Распространение электромагнитного поля в безграничной магнитной среде .....   | 122 |
| 3.6. Распространение электромагнитного поля в безграничных анизотропных средах .....   | 137 |
| Вопросы .....  | 146 |
| Задачи .....   | 146 |
| 4. Электромагнитное поле монохроматического источника в ограниченных средах .....  | 148 |
| 4.1. Наклонное падение электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух<br>сред. Формулы Френеля .....                                 | 148 |
| 4.2. Полное прохождение электромагнитного поля при наклонном падении на<br>границу раздела линейных сред без потерь. Угол Брюстера .....     | 163 |
| 4.3. Полное отражение электромагнитного поля от границы раздела двух линейных<br>сред без потерь .....                                       | 165 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.4. Нормальное падение электромагнитного поля на границу раздела двух сред .....                            | 169 |
| 4.5. Нормальное падение электромагнитного поля на движущуюся плоскость<br>раздела. Эффект Доплера .....      | 175 |
| 4.6. Пондермоторные силы (давление) электромагнитной волны .....   | 177 |
| 4.7. Поверхностный эффект .....  | 178 |
| Вопросы .....  | 182 |
| Задачи .....   | 182 |
| 5. Волноводы .....   | 184 |
| 5.1. Направляющие системы .....  | 184 |
| 5.2. Электромагнитные волны между проводящими параллельными плоскостями .....                                | 185 |
| 5.3. Прямоугольный волновод. $H_{mnp}$ -волны .....  | 193 |
| 5.4. Поле $H_{10}$ в прямоугольном волноводе .....   | 199 |
| 5.5. Прямоугольный волновод. $E_{mnp}$ -волны .....  | 204 |
| 5.6. П- и Н-образные волноводы .....   | 207 |
| 5.7. Волновод круглого сечения .....   | 209 |
| 5.8. Коаксиальный волновод (кабель) .....  | 215 |
| 5.9. Волноводы с замедленной фазовой скоростью направляемых волн .....                                       | 220 |
| 5.10. Неоднородные волноводы .....   | 235 |
| 5.11. Ступенчатые и плавные переходы .....   | 251 |
| 5.12. Волноводы, содержащие намагниченные ферриты .....  | 260 |
| Вопросы .....  | 268 |
| Задачи .....   | 269 |
| 6. Резонаторы .....  | 271 |
| 6.1. Объемные резонаторы .....   | 271 |
| 6.2. Открытые резонаторы .....   | 281 |
| Вопросы .....  | 297 |
| Задачи .....   | 297 |
| 7. Ферритовые устройства сверхвысоких частот .....   | 299 |
| 7.1. Волноводные устройства, использующие эффект Фарадея .....   | 299 |
| 7.2. Волноводные устройства, использующие явление взаимного поглощения при<br>ферромагнитном резонансе ..... | 306 |
| 7.3. Волноводные устройства, использующие различия в структурах полей прямой и<br>обратной волн .....        | 308 |
| 7.4. Y-циркулятор .....  | 312 |
| 7.5. Фазовые циркуляторы .....   | 313 |
| 7.6. Взаимные ферритовые устройства .....  | 316 |
| 7.7. Ферритовые устройства на основе полосковых линий и периодических структур ...                           | 318 |
| 7.8. Особенности ферритовых устройств миллиметрового диапазона волн .....                                    | 321 |
| Вопросы .....  | 321 |
| 8. Взаимодействие электромагнитного поля с активной средой. Усиление и генерирование .....                   | 323 |
| 8.1. Распространение электромагнитной волны в активной среде. Условия усиления и<br>генерирования .....      | 323 |
| 8.2. Усиление бегущей волны .....  | 330 |
| 8.3. Усиление в резонаторе .....   | 345 |
| 8.4. Электромагнитная волна в электронном потоке .....   | 357 |
| Вопросы .....  | 359 |
| Задачи .....   | 360 |
| 9. Цепи с распределенными параметрами (длинные линии) .....  | 361 |
| 9.1. Уравнения длинной линии .....   | 361 |
| 9.2. Отражения от конца линии. Коэффициент отражения .....   | 370 |
| 9.3. Входное сопротивление и согласование линий .....  | 384 |
| 9.4. Матрицы передачи и рассеяния .....  | 390 |

|  |     |
|--|-----|
| 9.5. Резонансные системы.....                                  | 399 |
| Вопросы .....  | 404 |
| Задачи.....  | 405 |
| Приложение. Математические и физические дополнения.....        | 406 |
| П.1. Преобразование координат. Тензоры .....                   | 406 |
| П.2. Векторный анализ .....                                    | 410 |
| П.3. Специальная теория относительности.....                   | 422 |
| П.4. Функции комплексной переменной. Символический метод ..... | 432 |
| П.5. Специальные уравнения и их решения.....                   | 438 |
| П.6. Энергетические уровни атомов и молекул.....               | 446 |
| П.7. Квантовые переходы .....                                  | 452 |
| П.8. Уравнение Шредингера .....                                | 453 |
| П.9. Квантовые ансамбли .....                                  | 456 |
| П.10. Операторы и их свойства.....                             | 457 |
| П.11. Операторы энергии и импульса .....                       | 460 |
| П.12. Среднее значение. Матрицы.....                           | 461 |
| П.13. Матрица электрического дипольного момента.....           | 462 |
| П.14. Матрица энергии .....                                    | 464 |
| П.15. Матрица плотности .....                                  | 466 |
| П.16. Вероятность перехода.....                                | 468 |
| П.17. Ширина спектральной линии .....                          | 473 |
| П.18. Устойчивость стационарных решений .....                  | 476 |
| Список рекомендуемой литературы.....                           | 479 |
| Предметный указатель .....                                     | 480 |

*Учебное издание*

**Голубева Нина Сергеевна  
Митрохин Владимир Николаевич**

## **ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ**

Редактор *Н.Е. Овчеренко*  
Художник *Н.Г. Столярова*  
Корректор *Е.В. Авалова*  
Компьютерная верстка *С.Ч. Соколовского*

Оригинал-макет подготовлен в издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.09.2004 г.

Подписано в печать 02.03.06. Формат 70×100/16. Печать офсетная.  
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 39,65. Уч.-изд. л. 37,89.  
Тираж 2000 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.