

Г.Б.Двайт

ТАБЛИЦЫ
ИНТЕГРАЛОВ
И ДРУГИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ФОРМУЛЫ





TABLES OF INTEGRALS
AND OTHER
MATHEMATICAL DATA

HERBERT BRISTOL DWIGHT
FOURTH EDITION

NEW YORK
THE MACMILLAN COMPANY
1961

Г. Б. ДВАЙТ

ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Перевод с английского
Н. В. ЛЕВИ

Под редакцией
К. А. СЕМЕНДЯЕВА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

517.2(03)
Д22
УДК 517.3(083.3)

Таблицы интегралов и другие математические формулы Г. Б. Двайт

Книга содержит весьма подробные таблицы неопределенных и определенных интегралов, а также большое число других математических формул: разложения в ряды, тригонометрические и другие тождества, справочный материал по специальным функциям.

В книге учтены все дополнения и исправления, внесенные в четвертое американское издание, и исправлены замеченные опечатки.

Г. Б. Двайт

Таблицы интегралов и другие математические формулы.
М., 1977 г., 228 стр. с илл.

Редактор *Г. Я. Пирогова*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *А. Д. Халанская*.

Печать с матриц. Подписано к печати 21.04.1977 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 14.
Условн. печ. л. 14. Уч.-изд. л. 10,31. Тираж 100 000 (1-й завод 40 000) экз.
Цена книги 70 коп. Заказ № 277.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-7, Ленинский проспект, 15.

Союзполиграфпрём при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Отпечатано в Ленинградской типографии № 6. 193 144, г. Ленинград, С.-144, ул. Монзенко, 10 с матриц ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова, Москва, Ж-54, Валовая, 28

СОДЕРЖАНИЕ

№№
пунктов

Предисловие редактора	6
I 1. Алгебраические функции	7
60. Алгебраические функции — Производные	21
80. Рациональные алгебраические функции — Интегралы	22
180. Иррациональные алгебраические функции — Интегралы	40
II 400. Тригонометрические функции	70
427. Тригонометрические функции — Производные	82
429. Тригонометрические функции — Интегралы	83
III 500. Обратные тригонометрические функции	103
512. Обратные тригонометрические функции — Производные	105
515. Обратные тригонометрические функции — Интегралы	106
IV 550. Показательные функции	115
563. Показательные функции — Производные	116
565. Показательные функции — Интегралы	116
V 585. Интегралы вероятности	119
VI 600. Логарифмические функции	120
610. Логарифмические функции — Интегралы	123
VII 650. Гиперболические функции	130
667. Гиперболические функции — Производные	133
670. Гиперболические функции — Интегралы	134
VIII 700. Обратные гиперболические функции	141
728. Обратные гиперболические функции — Производные	143
730. Обратные гиперболические функции — Интегралы	144
IX 750. Эллиптические функции	151
768. Эллиптические функции — Производные	153
770. Эллиптические функции — Интегралы	153
X 800. Бесселевы функции	161
835. Бесселевы функции — Интегралы	177
XI 840. Сферические многочлены (многочлены Лежандра)	178
XII 850. Определенные интегралы	180
Литература	223

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Таблицы Двайта представляют собой довольно обширные таблицы неопределенных интегралов, к которым добавлено еще много разнообразных формул (разложения в ряды, тождественные соотношения, определенные интегралы и т. п.).

В Советском Союзе таблицы Двайта были выпущены Издательством иностранной литературы в 1948 г. на английском языке фотомеханическим способом. В настоящем издании текст переведен на русский язык, американские обозначения заменены принятыми в СССР. Перевод сделан с четвертого американского издания (1961 г.).

Список литературы составлен заново, в основном из книг на русском языке. В ссылках в тексте число в квадратных скобках означает номер в списке литературы на стр. 223—224. Однако ссылки на литературу, преимущественно учебную, относящуюся к отдельным формулам, в настоящем издании опущены, так же как в издании 1948 г. Кроме того, исключены числовые таблицы, составленные не очень логично, помещение которых в настоящем справочнике недостаточно оправдано.

К. Семендяев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$1. \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{n!}{(n-r)! r!} x^r + \dots$$

Здесь и далее всюду полагаем $0! = 1$. Если n — целое положительное число, то выражение состоит из конечного числа членов. В противном случае ряд сходится при $x^2 < 1$; причем, если $n > 0$, то ряд сходится также при $x^2 = 1$.

2. Коэффициент при x^r в 1 обозначается $\binom{n}{r}$ или C_r^n .

Величины этих коэффициентов даются в следующей таблице.

Таблица биномиальных коэффициентов C_r^n .

$r \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Сумма двух соседних чисел в любой строке равна числу, находящемуся в следующей строке под правым слагаемым.
 Подробную таблицу см. [26].

$$3. \quad (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + (-1)^r \frac{n!}{(n-r)! r!} x^r + \dots$$

(См. примечание к 1.)

$$4. \quad (a \pm x)^n = a^n \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n.$$

$$4.2. \quad (1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2.$$

$$4.3. \quad (1 \pm x)^3 = 1 \pm 3x + 3x^2 \pm x^3.$$

$$4.4. \quad (1 \pm x)^4 = 1 \pm 4x + 6x^2 \pm 4x^3 + x^4,$$

и так далее, используя коэффициенты из таблицы 2.

$$5.1. \quad (1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \pm \dots, \quad [x^2 \leq 1].$$

$$5.2. \quad (1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \\ - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \dots, \quad [x^2 \leq 1].$$

$$5.3. \quad (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \\ - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots, \quad [x^2 \leq 1].$$

$$5.4. \quad (1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \\ + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^5 + \dots, \quad [x^2 \leq 1].$$

$$5.5. \quad (1 \pm x)^{5/2} = 1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \\ - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^5 - \dots, \quad [x^2 \leq 1].$$

$$6. \quad (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \\ + \dots + (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}x^r + \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$7. \quad (1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \\ + \dots + \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}x^r + \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$8. \quad (a \pm x)^{-n} = a^{-n} \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^{-n}.$$

$$9.01. \quad (1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \\ + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.02. \quad (1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 \mp \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \\ + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.03. \quad (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \\ + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.04. \quad (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.05. \quad (1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3.5}{2.4}x^2 \mp \frac{3.5.7}{2.4.6}x^3 + \\ + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.06. \quad (1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.07. \quad (1 \pm x)^{-5/2} = 1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5.7}{2.4}x^2 \mp \frac{5.7.9}{2.4.6}x^3 + \\ + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}x^4 \mp \dots, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.08. \quad (1 \pm x)^{-3} = 1 \mp \frac{1}{1.2} \{2.3x \mp 3.4x^2 + 4.5x^3 \mp \\ \mp 5.6x^4 + \dots\}, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.09. \quad (1 \pm x)^{-4} = 1 \mp \frac{1}{1.2.3} \{2.3.4x \mp 3.4.5x^2 + 4.5.6x^3 \mp \\ \mp 5.6.7x^4 + \dots\}, \quad [x^2 < 1].$$

$$9.10. \quad (1 \pm x)^{-5} = 1 \mp \frac{1}{1.2.3.4} \{2.3.4.5x \mp 3.4.5.6x^2 + \\ + 4.5.6.7x^3 \mp 5.6.7.8x^4 + \dots\}, \quad [x^2 < 1].$$

10.	2! =	2	1/2! =	0,5
	3! =	6	1/3! =	0,16666 66667
	4! =	24	1/4! =	0,04166 66667
	5! =	120	1/5! =	0,00833 33333
	6! =	720	1/6! =	0,00138 88889
	7! =	5040	1/7! =	0,19841 26984 · 10 ⁻³
	8! =	40320	1/8! =	0,24801 58730 · 10 ⁻⁴
	9! =	362880	1/9! =	0,27557 31922 · 10 ⁻⁵
	10! =	3628800	1/10! =	0,27557 31922 · 10 ⁻⁶
	11! =	399 16800	1/11! =	0,25052 10839 · 10 ⁻⁷
	12! =	4790 01600	1/12! =	0,20876 75699 · 10 ⁻⁸

Более подробную таблицу см. [18].

11.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Эта формула позволяет получать приближенные значения $n!$ при больших n . Результат получается с избытком в 0,7% для $n=12$ и 0,4% для $n=20$ (см. также 851.4 и 850.4).

12.	n	2^n	n	2^n	n	2^{-n}	
	2	4	15	32 768	2	0,25	
	3	8	16	65 536	3	0,125	
	4	16	17	131 072	4	0,0625	
	5	32	18	262 144	5	0,03125	
	6	64	19	524 288	6	0,015625	
	7	128	20	1 048 576	7	0,78125	$\cdot 10^{-3}$
	8	256	21	2 097 152	8	0,39062 5	$\cdot 10^{-3}$
	9	512	22	4 194 304	9	0,19531 25	$\cdot 10^{-3}$
	10	1 024	23	8 388 608	10	0,97656 25	$\cdot 10^{-3}$
	11	2 048	24	16 777 216	11	0,48828 125	$\cdot 10^{-3}$
	12	4 096	25	33 554 432	12	0,24414 0625	$\cdot 10^{-3}$
	13	8 192	26	67 108 864	13	0,12207 03125	$\cdot 10^{-3}$
	14	16 384	27	134 217 728	14	0,61035 15625	$\cdot 10^{-4}$

15.1. $(a + b + c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

15.2. $(a + b - c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca.$

15.3. $(a - b - c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$

16. $(a + b + c + d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$

17. $(a + b + c)^3 \equiv a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2).$

20.1. $a + x \equiv (a^2 - x^2) / (a - x).$

20.11. $1 + x \equiv (1 - x^2) / (1 - x).$

20.2. $a^2 + ax + x^2 \equiv (a^3 - x^3) / (a - x).$

20.3. $a^3 + a^2x + ax^2 + x^3 \equiv (a^4 - x^4) / (a - x) \equiv (a^2 + x^2)(a + x).$

20.4. $a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4 \equiv (a^5 - x^5) / (a - x).$

20.5. $a^5 + a^4x + a^3x^2 + a^2x^3 + ax^4 + x^5 \equiv (a^6 - x^6) / (a - x) \equiv (a^3 + x^3)(a^2 + ax + x^2).$

21.1. $a - x \equiv (a^2 - x^2) / (a + x).$

21.2. $a^2 - ax + x^2 \equiv (a^3 + x^3) / (a + x).$

$$21.3. \quad a^3 - a^2x + ax^2 - x^3 \equiv (a^4 - x^4) / (a + x) \equiv \\ \equiv (a^2 + x^2)(a - x).$$

$$21.4. \quad a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4 \equiv (a^5 + x^5) / (a + x).$$

$$21.5. \quad a^5 - a^4x + a^3x^2 - a^2x^3 + ax^4 - x^5 \equiv \\ \equiv (a^6 - x^6) / (a + x) \equiv (a^3 - x^3)(a^2 - ax + x^2).$$

$$22. \quad a^4 + a^2x^2 + x^4 \equiv (a^6 - x^6) / (a^2 - x^2) \equiv \\ \equiv (a^2 + ax + x^2)(a^2 - ax + x^2).$$

$$22.1. \quad a^4 - a^2x^2 + x^4 \equiv (a^6 + x^6) / (a^2 + x^2).$$

$$23. \quad a^4 + x^4 \equiv (a^2 + x^2)^2 - 2a^2x^2 \equiv \\ \equiv (a^2 + ax\sqrt{2} + x^2)(a^2 - ax\sqrt{2} + x^2).$$

25. *Арифметическая прогрессия первого порядка* (с постоянными первыми разностями) из n членов

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + \{a + (n - 1)d\} \equiv \\ \equiv na + \frac{1}{2}n(n - 1)d \equiv \\ \equiv \frac{n}{2}(1\text{-й член} + n\text{-й член}).$$

26. *Геометрическая прогрессия* из n членов

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \equiv a(1 - r^n) / (1 - r) \equiv \\ \equiv a(r^n - 1) / (r - 1).$$

26.1. Если $r^2 < 1$, предел суммы бесконечного числа членов будет $a / (1 - r)$.

27. Обратные величины членов арифметической прогрессии первого порядка образуют (по определению) *гармоническую прогрессию*. Так,

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a+d}, \quad \frac{1}{a+2d}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a+(n-1)d}$$

есть гармоническая прогрессия.

28.1. *Средняя арифметическая* n величин:

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n).$$

28.2. *Средняя геометрическая* n величин:

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{1/n}.$$

28.3. H — *средняя гармоническая* n величин определяется следующим образом:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

28.4. Средняя арифметическая некоторого числа положительных величин больше или равна их средней геометрической, которая в свою очередь больше или равна их средней гармонической.

29. *Арифметическая прогрессия k -го порядка (k -е разности постоянны).*

Последовательность: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$.

Первые разности: $d_1, d_2, d_3, \dots$,

где $d_1' = u_2 - u_1, d_2' = u_3 - u_2$ и т. д.

Вторые разности: $d_1'', d_2'', d_3'', \dots$,

где $d_1'' = d_2' - d_1'$ и т. д.

Сумма n членов последовательности равна

$$\frac{n!}{(n-1)!1!} u_1 + \frac{n!}{(n-2)!2!} d_1 + \frac{n!}{(n-3)!3!} d_1' + \dots$$

29.01. Если таблица функции u_n дана для равноотстоящих значений аргумента с интервалом h , а именно $f(a) = u_1, f(a+h) = u_2, f(a+2h) = u_3$ и т. д., то

$$f(a+ph) = u_1 + p d_1' + \frac{p(p-1)}{2!} d_1'' + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} d_1''' + \dots,$$

где $p \leq 1$, а d_1', d_1'', d_1''' и т. д. даны в **29**. Коэффициенты при d_1', d_1'', d_1''' и т. д. называются *интерполяционными коэффициентами Грегори—Ньютона*.

Численные значения этих коэффициентов см. [25].

29.1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2} (n+1).$

29.2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) =$
 $= \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1).$

29.3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4} (n+1)^2 =$
 $= \frac{n^2}{4} (n^2 + 2n + 1).$

29.4. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 =$
 $= \frac{n}{30} (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) =$
 $= \frac{n}{30} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).$

$$29.9. \quad \sum_{u=1}^n u^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{B_1}{2!} p n^{p-1} - \\ - \frac{B_2}{4!} p(p-1)(p-2) n^{p-2} + \dots,$$

отбрасывая члены с n^0 и последующие. Величины $B_1, B_2, \dots$ см. 45.

Приведенные формулы можно использовать для нахождения суммы рядов, n -й член которых выражается через n, n^2, n^3 и т. д.

$$30.1. \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

$$30.2. \quad 1 + 8 + 16 + 24 + 32 + \dots + 8(n-1) = (2n-1)^2.$$

$$33.1. \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

$$33.2. \quad 1 + ax + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + \dots = \\ = 1 + \frac{ax + (b-a)x^2}{(1-x)^2}.$$

$$33.3. \quad 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

$$33.4. \quad 1 + 3^2x + 5^2x^2 + 7^2x^3 + \dots = \frac{1+6x+x^2}{(1-x)^3}.$$

$$35. \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx \\ [a, b > 0].$$

$$35.1. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}. \quad [\text{См. 120 и 48.31.}]$$

$$35.2. \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right). \\ [\text{См. 165.01.}]$$

$$35.3. \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 \right). \\ [\text{См. 165.11.}]$$

$$35.4. \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots = \\ = \frac{1}{4\sqrt{2}} \{ \pi + 2 \ln(\sqrt{2} + 1) \}. \quad [\text{См. 170.}]$$

38. Степенной ряд для $f(h)$ имеет вид:

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

(Ряд Маклоренъ.)

$$38.1. \quad f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

где при некотором значении θ , заключенном между 0 и 1,

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\theta h), \text{ или } \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta h).$$

$$39. \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

(Ряд Тейлора.)

$$39.1. \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

где при некотором значении θ , заключенном между 0 и 1,

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h), \text{ или } \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(x + \theta h).$$

$$40. \quad f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left\{ h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ h^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right\} + \\ + \frac{1}{3!} \left\{ h^3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ \left. + k^3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} \right\} + \dots + R_n,$$

где при некоторых значениях θ_1 и θ_2 , заключенных между 0 и 1,

$$R_n = \frac{1}{n!} \left\{ h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nh^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2!} h^{n-2} k^2 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right\} f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k).$$

42.1. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

42.2. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

42.3. Число делится на 2^n , если число, составленное из n его последних цифр, делится на 2^n .

Числа Бернулли и числа Эйлера

45.	Числа Бернулли	$\lg B_n$	Числа Эйлера	$\lg E_n$
	$B_1 = \frac{1}{6}$	1,221 8487	$E_1 = 1$	0
	$B_2 = \frac{1}{30}$	2,522 8787	$E_2 = 5$	0,698 9700
	$B_3 = \frac{1}{42}$	2,376 7507	$E_3 = 61$	1,785 3298
	$B_4 = \frac{1}{30}$	2,522 8787	$E_4 = 1\,385$	3,141 4498
	$B_5 = \frac{5}{66}$	2,879 4261	$E_5 = 50\,521$	4,703 4719
	$B_6 = \frac{691}{2730}$	1,403 3154	$E_6 = 2\,702\,765$	6,431 8083
	$B_7 = \frac{7}{6}$	0,066 9468	$E_7 = 199\,360\,981$	8,299 6402
	$B_8 = \frac{3617}{510}$	0,850 7783		
	$B_9 = \frac{43\,867}{798}$	1,740 1350		
	$B_{10} = \frac{174\,611}{330}$	2,723 5577		
	$B_{11} = \frac{854\,513}{138}$	3,791 8396		

Существуют различные обозначения для чисел Бернулли и Эйлера. Принятые здесь обозначения определяются формулами 47.1 и 47.4.

$$46.1. \quad E_n = \frac{(2n)!}{(2n-2)! \, 2!} E_{n-1} - \frac{(2n)!}{(2n-4)! \, 4!} E_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1},$$

принимая $0! = 1$ и $E_0 = 1$.

$$46.2. \quad B_n = \frac{2n}{2^{2n} (2^{2n} - 1)} \left[\frac{(2n-1)!}{(2n-2)! \, 1!} E_{n-1} - \frac{(2n-1)!}{(2n-4)! \, 3!} E_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \right].$$

$$47.1. \quad B_n = \frac{(2n)!}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right].$$

$$47.2. \quad B_n = \frac{(2n)!}{\pi^{2n} (2^{2n-1} - 1)} \left[1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right].$$

$$47.3. \quad B_n = \frac{2(2n)!}{\pi^{2n} (2^{2n} - 1)} \left[1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots \right].$$

$$47.4. \quad E_n = \frac{2^{2n+2} (2n)!}{\pi^{2n+1}} \left[1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \dots \right].$$

$$48.001. \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty.$$

$$48.002. \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \pi^2 B_1 = \frac{\pi^2}{6} = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= \zeta(2) = 1,64493\ 40668.$$

$$48.003. \quad 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = \zeta(3) = 1,20205\ 69032.$$

$$48.004. \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{3} B_2 = \frac{\pi^4}{90} = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= \zeta(4) = 1,08232\ 32337.$$

$$48.005. \quad 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \dots = \zeta(5) = 1,03692\ 77551.$$

$$48.006. \quad 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{2\pi^6}{4^6} B_3 = \frac{\pi^6}{945} = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= \zeta(6) = 1,01734\ 30620.$$

$$48.007. \quad 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \dots = \zeta(7) = 1,00834\ 92774.$$

$$48.008. \quad 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{\pi^8}{315} B_4 = \frac{\pi^8}{9450} = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= \zeta(8) = 1,00407\ 73562.$$

$$48.08. \quad 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_n$$

$$[n - \text{целое, положительное}]. \quad (\text{См. 45, 47.1.})$$

$$48.09. \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots = \zeta(p), \text{ дзета-функция Римана.}$$

Таблицу численных значений этой функции см. [16].

$$48.11. \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \infty.$$

$$48.12. \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{3\pi^2}{4} B_1 = \frac{\pi^2}{8}. \quad (\text{См. 45.})$$

$$48.13. \quad 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{7}{8} \zeta(3) = 1,05179\ 97903.$$

(См. 48.09.)

$$48.14. \quad 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{5\pi^4}{16} B_2 = \frac{\pi^4}{96} = \frac{15}{16} \zeta(4) = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= 1,01467\,80316.$$

$$48.18. \quad 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_n. \quad (\text{См. 45, 47.3.})$$

$$48.19. \quad 1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \zeta(p). \quad (\text{См. 48.09.})$$

$$48.21. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2. \quad (\text{См. 601.01.})$$

$$48.22. \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{2} B_1 = \frac{\pi^2}{12}. \quad (\text{См. 45.})$$

$$48.23. \quad 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \zeta(3) = 0,90154\,26774. \quad (\text{См. 48.09.})$$

$$48.24. \quad 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{(2^4-1)\pi^4}{4!} B_2 = \frac{7\pi^4}{720} = \quad (\text{См. 45.})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \zeta(4) = 0,94703\,28295.$$

$$48.28. \quad 1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} B_n. \quad (\text{См. 45, 47.2.})$$

$$48.29. \quad 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p). \quad (\text{См. 48.09.})$$

(Для $p=1$ см. 48.21.)

$$48.31. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} E_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Согласно 46.1 } E_0=1.)$$

$$48.32. \quad 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G = 0,91596\,55942.$$

$$48.33. \quad 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} E_1 = \frac{\pi^3}{32}. \quad (\text{См. 45.})$$

$$48.34. \quad 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots = 0,98894\,455.$$

$$48.36. \quad 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots = 0,99868\,522.$$

$$48.38. \quad 1 - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7^6} + \dots = 0,999850.$$

$$48.39. \quad 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \dots = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n)!} E_n. \quad [\text{См. 45, 47.4.}]$$

Обращение рядов

50. Пусть известен ряд
 $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \dots, \quad [a \neq 0],$

тогда коэффициентами ряда

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \dots$$

будут

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a^2}, \quad C = \frac{1}{a^3}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^4}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^5}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^6}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - \\ - 28a^2bc^2 - 42b^5),$$

$$G = \frac{1}{a^7}(8a^4bf + 8a^4ce + 4a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + \\ + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c).$$

Степени $S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \dots$

$$51.1. \quad S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + \\ + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \dots$$

$$51.2. \quad S^{1/2} = a^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \left(\frac{1}{2} \frac{c}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} \right) x^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{d}{a} - \frac{1}{4} \frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{e}{a} - \frac{1}{4} \frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16} \frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

$$51.3. \quad S^{-1/2} = a^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \left(\frac{3}{8} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{a} \right) x^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4} \frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{a} - \frac{5}{16} \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4} \frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{e}{a} - \frac{15}{16} \frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128} \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

$$51.4. \quad S^{-1} = a^{-1} \left[1 - \frac{b}{a} x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right) x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3 \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

$$51.5. \quad S^{-2} = a^{-2} \left[1 - 2 \frac{b}{a} x + \left(3 \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{c}{a} \right) x^2 + \right. \\ \left. + \left(6 \frac{bc}{a^2} - 2 \frac{d}{a} - 4 \frac{b^3}{a^3} \right) x^3 + \right. \\ \left. + \left(6 \frac{bd}{a^2} + 3 \frac{c^2}{a^2} - 2 \frac{e}{a} - 12 \frac{b^2c}{a^3} + 5 \frac{b^4}{a^4} \right) x^4 + \dots \right].$$

Корни квадратного уравнения

55.1. Корни $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Чтобы избежать потери точности при вычитании, следует пользоваться той из двух формул, которая требует арифметического сложения

55.2. Если один из корней α вычислен точно, то

$$\beta = -\alpha - \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{c}{a\alpha}.$$

Квадратные корни из комплексных чисел

$$58.1. \quad \sqrt{x+iy} = \pm \left[\sqrt{\frac{r+x}{2}} + i \sqrt{\frac{r-x}{2}} \right].$$

$$58.2. \quad \sqrt{x-iy} = \pm \left[\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i \sqrt{\frac{r-x}{2}} \right].$$

Здесь x может быть положительным или отрицательным, y — положительно,

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = \sqrt{-1}.$$

Квадратные корни из $(r+x)/2$ и $(r-x)/2$ следует считать положительными.

58.3. Другой метод — представить $x+iy$ в форме

$$re^{i(\theta + 2\pi k)} \quad (\text{см. 604.05}),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, а k — целое число или 0. Тогда

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{re^{i\theta}} = \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

59.1. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2p} & a_{2q} \end{vmatrix} \equiv a_{1p} a_{2q} - a_{2p} a_{1q}.$$

59.2. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} \equiv a_{1p} \begin{vmatrix} a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} - a_{1q} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3r} \end{vmatrix} + a_{1r} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2q} \\ a_{3p} & a_{3q} \end{vmatrix} \equiv \\ \equiv a_{1p} (a_{2q} a_{3r} - a_{3q} a_{2r}) - a_{1q} (a_{2p} a_{3r} - a_{3p} a_{2r}) + \\ + a_{1r} (a_{2p} a_{3q} - a_{3p} a_{2q}).$$

59.3. Если дана система трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{1p}x + a_{1q}y + a_{1r}z &= u \\ a_{2p}x + a_{2q}y + a_{2r}z &= v, \\ a_{3p}x + a_{3q}y + a_{3r}z &= w, \end{aligned}$$

TO

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} u & a_{1q} & a_{1r} \\ v & a_{2q} & a_{2r} \\ w & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & u & a_{1r} \\ a_{2p} & v & a_{2r} \\ a_{3p} & w & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & u \\ a_{2p} & a_{2q} & v \\ a_{3p} & a_{3q} & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Корни системы линейных уравнений с большим числом неизвестных, если число уравнений равно числу неизвестных, выражаются аналогичными формулами, если знаменатель отличен от нуля.

Алгебраические функции — Производные

$$60. \quad \frac{d(au)}{dx} = a \frac{du}{dx}, \quad \text{где } a — \text{постоянная.}$$

$$61. \quad \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

$$62. \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

$$63. \quad \frac{d(uvw)}{dx} = uv \frac{dw}{dx} + vw \frac{du}{dx} + wu \frac{dv}{dx}.$$

$$64. \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

$$64.1. \quad \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$64.2. \quad \frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$64.3. \quad \frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-(n+1)}.$$

$$65. \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$66. \quad \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad 67. \quad \frac{d^2f(u)}{dx^2} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2f(u)}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

$$68. \quad \frac{d^n(uv)}{dx^n} = v \frac{d^n u}{dx^n} + n \frac{dv}{dx} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \\ + \dots + \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{d^k v}{dx^k} \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} + \dots + \frac{u d^n v}{dx^n}$$

$$69.1. \quad \frac{d}{dq} \int_p^q f(x) dx = f(q) \quad (p — \text{постоянно}).$$

$$69.2. \quad \frac{d}{dp} \int_p^q f(x) dx = -f(p) \quad (q — \text{постоянно}).$$

$$69.3. \quad \frac{d}{dc} \int_p^q f(x, c) dx = \int_p^q \frac{\partial}{\partial c} f(x, c) dx + f(q, c) \frac{dq}{dc} - f(p, c) \frac{dp}{dc}.$$

$$72. \quad \text{Если } \varphi(a) = 0 \text{ и } \psi(a) = 0, \text{ или если } \varphi(a) = \infty \text{ и } \psi(a) = \infty, \\ \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Если также $\varphi'(a) = 0$ и $\psi'(a) = 0$, или если $\varphi'(a) = \infty$ и $\psi'(a) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)} \text{ и т. д. *)}.$$

*) Более точную формулировку см., например, [1]. (Прим ред.)

72. 1. Если функция имеет вид $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$, то ее нужно алгебраическим или каким-либо другим преобразованием привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

72. 2. Если функция имеет вид 0^0 , ∞^0 или 1^∞ , то ее надо сначала логарифмированием привести к виду $0 \cdot \infty$, а затем к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

79. Общая формула интегрирования по частям

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

или

$$\int u \, dv = uv - \int v \frac{du}{dv} \, dv.$$

Рациональные алгебраические функции — Интегралы *)

Интегралы, содержащие x^a

80. $\int dx = x.$ **81.2.** $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}.$

81. 1. $\int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$ **81.9.** $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [n \neq -1].$

82. 1. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|. \text{ (См. примечание перед 600.)}$

В этом случае нельзя интегрировать от отрицательного значения x до положительного. При отрицательном x надо взять $\ln |x|$, поскольку $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$ войдет в постоянную интегрирования (см 409.03). (См. рисунок на стр 23).

82. 2. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$ **82.3.** $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}.$

82. 4. $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}.$ **82.5.** $\int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4}.$

82. 9. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \quad [n \neq 1].$

*) Здесь и далее произвольная постоянная интегрирования опускается.

Интегралы, содержащие $X = a + bx$

$$83. \int (a + bx)^n dx = \frac{1}{b} \int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{b(n+1)} \quad [n \neq -1].$$

84. 1. $\int x^m (a + bx)^n dx$ можно интегрировать почленно после разложения $(a + bx)^n$ по формуле бинома Ньютона, если n целое положительное.

84. 2. Когда m целое положительное и если $m < n$ или n дробное, может быть, лучше использовать формулу

$$\int x^m X^n dx = \frac{1}{b^{m+1}} \int (X - a)^m X^n dX$$

и разложить $(X - a)^m$ по формуле бинома Ньютона.

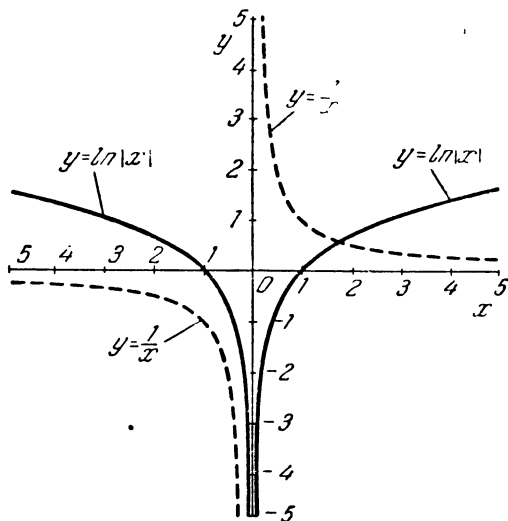


Рис. 82.1. Графики функций $y = 1/x$ (пунктирная линия) и $y = \ln|x|$ (сплошная линия).

85. Интегрирование рациональных дробей — см. соответствующий раздел в учебниках интегрального исчисления.

89. Общая формула для 90—95:

$$\int \frac{x^m dx}{X^n} = \frac{1}{b^{m+1}} \int \frac{(X-a)^m dX}{X^n} = \frac{1}{b^{m+1}} \left[\sum_{s=0}^m \frac{m!(-a)^s X^{m-n-s+1}}{(m-s)!s!(m-n-s+1)!} \right],$$

за исключением $m - n - s + 1 = 0$. В этом случае соответствующий член заменяется $\ln|X|$.

ций член суммы в квадратных скобках должен быть заменен на

$$\frac{m! (-a)^{m-n+1}}{(m-n+1)! (n-1)!} \ln |X|.$$

Все буквы означают действительные величины. При наличии $\ln |X|$ нельзя интегрировать на интервале, содержащем точку $X=0$. Если X — отрицательная величина, то надо брать $\ln |X|$, так как $\ln(-1) \equiv (2k+1)\pi i$ войдет в постоянную интегрирования.

$$90. \quad \int \frac{dx}{X^n} = \frac{-1}{(n-1)bX^{n-1}} \quad [n \neq 1].$$

$$90.1. \quad \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{b} \ln |X|. \quad [\text{См. примечание к 89}].$$

$$90.2. \quad \int \frac{dx}{X^2} = -\frac{1}{bX}. \quad 90.3. \quad \int \frac{dx}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}.$$

$$90.4. \quad \int \frac{dx}{X^4} = -\frac{1}{3bX^3}. \quad 90.5. \quad \int \frac{dx}{X^5} = -\frac{1}{4bX^4}.$$

$$91. \quad \int \frac{x dx}{X^n} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$91.1. \quad \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{b^2} [X - a \ln |X|].$$

$$91.2. \quad \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln |X| + \frac{a}{X} \right].$$

$$91.3. \quad \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{X} + \frac{a}{2X^2} \right].$$

$$91.4. \quad \int \frac{x dx}{X^4} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{a}{3X^3} \right].$$

$$91.5. \quad \int \frac{x dx}{X^5} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{a}{4X^4} \right].$$

$$92. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$92.1. \quad \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{X^2}{2} - 2aX + a^2 \ln |X| \right].$$

Другое выражение, отличающееся на постоянную:

$$\frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln |a + bx|.$$

$$92.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{b^3} \left[X - 2a \ln |X| - \frac{a^2}{X} \right].$$

$$92.3. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{b^3} \left[\ln |X| + \frac{2a}{X} - \frac{a^2}{2X^2} \right].$$

$$92.4. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^4} = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{1}{X} + \frac{2a}{2X^2} - \frac{a^2}{3X^3} \right].$$

$$92.5. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^5} = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{2a}{3X^3} - \frac{a^2}{4X^4} \right].$$

$$92.6. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^6} = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{2a}{4X^4} - \frac{a^2}{5X^5} \right].$$

$$92.7. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^7} = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{2a}{5X^5} - \frac{a^2}{6X^6} \right].$$

$$93. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3a}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3a^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^3}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

$$93.1. \quad \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{3aX^2}{2} + 3a^2X - a^3 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$93.2. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{X^2}{2} - 3aX + 3a^2 \ln |X| + \frac{a^3}{X} \right].$$

$$93.3. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{b^4} \left[X - 3a \ln |X| - \frac{3a^2}{X} + \frac{a^3}{2X^2} \right].$$

$$93.4. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{b^4} \left[\ln |X| + \frac{3a}{X} - \frac{3a^2}{2X^2} + \frac{a^3}{3X^3} \right].$$

$$93.5. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^5} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{X} + \frac{3a}{2X^2} - \frac{3a^2}{3X^3} + \frac{a^3}{4X^4} \right].$$

$$93.6. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^6} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{3X^3} - \frac{3a^2}{4X^4} + \frac{a^3}{5X^5} \right].$$

$$93.7. \quad \int \frac{x^3 dx}{X^7} = \frac{1}{b^4} \left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{3a}{4X^4} - \frac{3a^2}{5X^5} + \frac{a^3}{6X^6} \right].$$

$$94. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^n} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{-1}{(n-5)X^{n-5}} + \frac{4a}{(n-4)X^{n-4}} - \frac{6a^2}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{4a^3}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{a^4}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

$$94.1. \quad \int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^5}{4} - \frac{4aX^3}{3} + \frac{6a^2X^2}{2} - 4a^3X + a^4 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^5}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$94.2. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^2} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{4aX^2}{2} + 6a^2X - 4a^3 \ln |X| - \frac{a^4}{X} \right].$$

$$94.3. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^3} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{X^2}{2} - 4aX + 6a^2 \ln |X| + \frac{4a^3}{X} - \frac{a^4}{2X^2} \right].$$

$$94.4. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^4} = \frac{1}{b^5} \left[X - 4a \ln |X| - \frac{6a^2}{X} + \frac{4a^3}{2X^2} - \frac{a^4}{3X^3} \right].$$

$$94.5. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^5} = \frac{1}{b^5} \left[\ln |X| + \frac{4a}{X} - \frac{6a^2}{2X^2} + \frac{4a^3}{3X^3} - \frac{a^4}{4X^4} \right].$$

$$94.6. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^6} = \frac{1}{b^5} \left[-\frac{1}{X} + \frac{4a}{2X^2} - \frac{6a^2}{3X^3} + \frac{4a^3}{4X^4} - \frac{a^4}{5X^5} \right].$$

$$94.7. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^7} = \frac{1}{b^5} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{4a}{3X^3} - \frac{6a^2}{4X^4} + \frac{4a^3}{5X^5} - \frac{a^4}{6X^6} \right].$$

$$95. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^n} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{-1}{(n-6)X^{n-5}} + \frac{5a}{(n-5)X^{n-4}} - \right. \\ \left. - \frac{10a^2}{(n-4)X^{n-3}} + \frac{10a^3}{(n-3)X^{n-2}} - \right. \\ \left. - \frac{5a^4}{(n-2)X^{n-1}} + \frac{a^4}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

$$95.1. \quad \int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^6}{5} - \frac{5aX^4}{4} + \frac{10a^2X^3}{3} - \frac{10a^3X^2}{2} + 5a^4X - a^5 \ln |X| \right] = \\ = \frac{x^6}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6} \ln |a + bx| + \text{const.}$$

$$95.2. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^2} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^4}{4} - \frac{5aX^3}{3} + \frac{10a^2X^2}{2} - 10a^3X + 5a^4 \ln |X| + \frac{a^5}{X} \right].$$

$$95.3. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^3} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^3}{3} - \frac{5aX^2}{2} + 10a^2X - 10a^3 \ln |X| - \frac{5a^4}{X} + \frac{a^5}{2X^2} \right].$$

$$95.4. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^4} = \frac{1}{b^6} \left[\frac{X^2}{2} - 5aX + 10a^2 \ln |X| + \frac{10a^3}{X} - \frac{5a^4}{2X^2} + \frac{a^5}{3X^3} \right].$$

$$95.5. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^5} = \frac{1}{b^6} \left[X - 5a \ln |X| - \frac{10a^2}{X} + \frac{10a^3}{2X^2} - \frac{5a^4}{3X^3} + \frac{a^5}{4X^4} \right].$$

$$95.6. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^6} = \frac{1}{b^6} \left[\ln |X| + \frac{5a}{X} - \frac{10a^2}{2X^2} + \frac{10a^3}{3X^3} - \frac{5a^4}{4X^4} + \frac{a^5}{5X^5} \right].$$

$$95.7. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^7} = \frac{1}{b^6} \left[-\frac{1}{X} + \frac{5a}{2X^2} - \frac{10a^2}{3X^3} + \frac{10a^3}{4X^4} - \frac{5a^4}{5X^5} + \frac{a^5}{6X^6} \right].$$

$$95.8. \quad \int \frac{x^5 dx}{X^8} = \frac{1}{b^6} \left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{5a}{3X^3} - \frac{10a^2}{4X^4} + \frac{10a^3}{5X^5} - \frac{5a^4}{6X^6} + \frac{a^5}{7X^7} \right].$$

100. Общая формула для 101—105

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m X^n} &= \frac{-1}{a^{m+n-1}} \int \frac{\left(\frac{X}{x} - b\right)^{m+n-2}}{\left(\frac{X}{x}\right)^n} d\left(\frac{X}{x}\right) = \\ &= \frac{-1}{a^{m+n-1}} \left[\sum_{s=0}^{m+n-2} \frac{(m+n-2)! X^{m-s-1} (-b)^s}{(m+n-s-2)! s! (m-s-1)! x^{m-s-1}} \right], \end{aligned}$$

кроме $m-s-1=0$, когда соответствующий член в квадратных скобках заменяется на

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} (-b)^{m-1} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.1. \quad \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.2. \quad \int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{a^2} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{bx}{X} \right].$$

$$101.3. \quad \int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{a^3} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{2bx}{X} - \frac{b^2 x^2}{2X^2} \right].$$

$$101.4. \quad \int \frac{dx}{xX^4} = -\frac{1}{a^4} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{3bx}{X} - \frac{3b^2 x^2}{2X^2} + \frac{b^3 x^3}{3X^3} \right].$$

$$101.5. \quad \int \frac{dx}{xX^5} = -\frac{1}{a^5} \left[\ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{4bx}{X} - \frac{6b^2 x^2}{2X^2} + \frac{4b^3 x^3}{3X^3} - \frac{b^4 x^4}{4X^4} \right].$$

Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

$$101.92. \quad \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.93. \quad \int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{2aX^2} + \frac{1}{a^2 X} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.94. \quad \int \frac{dx}{xX^4} = \frac{1}{3aX^3} + \frac{1}{2a^2 X^2} + \frac{1}{a^3 X} - \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$101.95. \quad \int \frac{dx}{xX^5} = \frac{1}{4aX^4} + \frac{1}{3a^2 X^3} + \frac{1}{2a^3 X^2} + \frac{1}{a^4 X} - \frac{1}{a^5} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$102.1. \quad \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{X}{x} - b \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.2. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X}{x} - 2b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{b^2 x}{X} \right].$$

На этой странице $X=a+bx$.

$$102.3. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X}{x} - 3b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{3b^2 x}{X} + \frac{b^3 x^2}{2X^2} \right].$$

$$102.4. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^4} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X}{x} - 4b \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{6b^2 x}{X} + \frac{4b^3 x^2}{2X^2} - \frac{b^4 x^3}{3X^3} \right].$$

Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

$$102.91. \quad \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

$$102.92. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -b \left[\frac{1}{a^2 X} + \frac{1}{a^2 bx} - \frac{2}{a^2} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.93. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -b \left[\frac{1}{2a^2 X^2} + \frac{2}{a^3 X} + \frac{1}{a^3 bx} - \frac{3}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$102.94. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^4} = -b \left[\frac{1}{3a^2 X^3} + \frac{2}{2a^3 X^2} + \frac{3}{a^4 X} + \frac{1}{a^4 bx} - \frac{4}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right].$$

$$103.1. \quad \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{2bX}{x} + b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right] = \\ = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \text{const.}$$

$$103.2. \quad \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{3bX}{x} + 3b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{b^3 x}{X} \right].$$

$$103.3. \quad \int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{X^2}{2x^2} - \frac{4bX}{x} + 6b^2 \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \frac{4b^3 x}{X} - \frac{b^4 x^2}{2X^2} \right].$$

$$104.1. \quad \int \frac{dx}{x^4 X} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X^3}{3x^3} - \frac{3bX^2}{2x^2} + \frac{3b^2 X}{x} - b^3 \ln \left| \frac{X}{x} \right| \right] = \\ = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2 x^2} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b^3}{a^4} \ln \left| \frac{X}{x} \right| + \text{const.}$$

$$104.2. \quad \int \frac{dx}{x^4 X^2} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{X^3}{3x^3} - \frac{4bX^2}{2x^2} + \frac{6b^2 X}{x} - 4b^3 \ln \left| \frac{X}{x} \right| - \frac{b^4 x}{X} \right].$$

$$105.1. \quad \int \frac{dx}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2 x^3} - \frac{b^2}{2a^3 x^2} + \frac{b^3}{a^4 x} - \frac{b^4}{a^5} \ln \left| \frac{X}{x} \right|.$$

Интегралы, содержащие линейные множители

$$110. \quad \int \frac{(a+x) dx}{(c+x)} = x + (a-c) \ln |c+x|.$$

$$110.1. \quad \int \frac{(a+fx) dx}{(c+gx)} = \frac{fx}{g} + \frac{ag-cf}{g^2} \ln |c+gx|.$$

$$111. \quad \int \frac{dx}{(a+x)(c+x)} = \frac{1}{a-c} \ln \left| \frac{c+x}{a+x} \right| \quad [a \neq c]$$

Если $a=c$, см. 90.2.

$$111.1. \quad \int \frac{dx}{(a+fx)(c+gx)} = \frac{1}{ag-cf} \ln \left| \frac{c+gx}{a+fx} \right| \quad [ag \neq cf].$$

Если $ag=cf$, см. 90.2.

$$111.2. \quad \int \frac{x dx}{(a+x)(c+x)} = \frac{1}{(a-c)} \{a \ln |a+x| - c \ln |c+x|\}.$$

$$112. \quad \int \frac{dx}{(a+x)(c+x)^2} = \frac{1}{(c-a)(c+x)} + \frac{1}{(c-a)^2} \ln \left| \frac{a+x}{c+x} \right|.$$

$$112.1. \quad \int \frac{x dx}{(a+x)(c+x)^2} = \frac{c}{(a-c)(c+x)} - \frac{a}{(a-c)^2} \ln \left| \frac{a+x}{c+x} \right|.$$

$$112.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a+x)(c+x)^2} = \frac{c^2}{(c-a)(c+x)} + \frac{a^2}{(c-a)^2} \ln |a+x| + \\ + \frac{c^2-2ac}{(c-a)^2} \ln |c+x|.$$

$$113. \quad \int \frac{dx}{(a+x)^2(c+x)^2} = \frac{-1}{(a-c)^2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{c+x} \right) + \frac{2}{(a-c)^3} \ln \left| \frac{a+x}{c+x} \right|.$$

$$113.1. \quad \int \frac{x dx}{(a+x)^2(c+x)^2} = \frac{1}{(a-c)^2} \left(\frac{a}{a+x} + \frac{c}{c+x} \right) + \frac{a+c}{(a-c)^3} \ln \left| \frac{a+x}{c+x} \right|.$$

$$113.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a+x)^2(c+x)^2} = \frac{-1}{(a-c)^2} \left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{c^2}{c+x} \right) + \frac{2ac}{(a-c)^3} \ln \left| \frac{a+x}{c+x} \right|.$$

Интегралы, содержащие $X = a^2 + x^2$

$$120. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \text{ (см. рисунок на стр. 30).}$$

$$120.01. \quad \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$120.1. \quad \int \frac{dx}{X} = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$120.2. \quad \int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$120.3. \quad \int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$120.4. \quad \int \frac{dx}{X^4} = \frac{x}{6a^2X^3} + \frac{5x}{24a^4X^2} + \frac{5x}{16a^6X} + \frac{5}{16a^7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$120.9. \quad \int \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2+b^2x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^n}.$$

121. Интегралы вида

$$\int \frac{x^{2m+1} dx}{(a^2 \pm x^2)^n}$$

подстановкой $x^2 = z$ приводятся к

$$\frac{1}{2} \int \frac{z^m dz}{(a^2 \pm z)^n},$$

о которых см. 89—105 (для m положительного, отрицательного или равного 0).

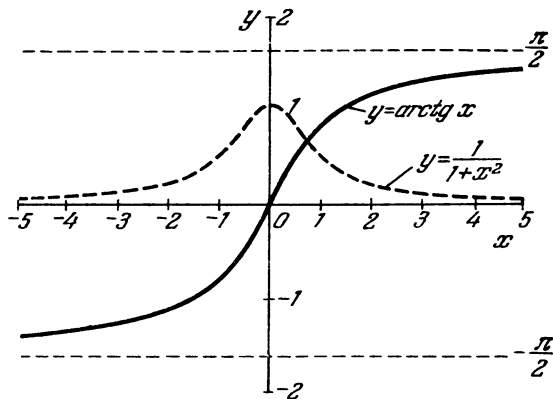


Рис. 120. Графики функций $y = \frac{1}{1+x^2}$ (пунктирная линия) и $y = \operatorname{arctg} x$ (сплошная линия).

$$121.1. \quad \int \frac{x dx}{X} = \int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$121.2. \quad \int \frac{x dx}{X^2} = -\frac{1}{2X}. \quad 121.3. \quad \int \frac{x dx}{X^3} = -\frac{1}{4X^2}.$$

$$121.4. \quad \int \frac{x dx}{X^4} = -\frac{1}{6X^3}.$$

$$121.9. \quad \int \frac{x dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2nX^n} \quad [n \neq 0].$$

$$122.1. \quad \int \frac{x^2 dx}{X} = x - a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$122.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^2} = -\frac{x}{2X} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$122.3. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^3} = -\frac{x}{4X^2} + \frac{x}{8a^2X} + \frac{1}{8a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$122.4. \int \frac{x^2 dx}{X^4} = -\frac{x}{6X^3} + \frac{x}{24a^2 X^2} + \frac{x}{16a^4 X} + \frac{1}{16a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$122.9. \int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \frac{-x}{2nX^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}.$$

$$123.1. \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln X.$$

$$123.2. \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln X.$$

$$123.3. \int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$$

$$123.4. \int \frac{x^3 dx}{X^4} = -\frac{1}{4X^2} + \frac{a^2}{6X^3}.$$

$$123.9. \int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n} \quad [n > 1].$$

$$124.1. \int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$124.2. \int \frac{x^4 dx}{X^2} = x + \frac{a^2 x}{2X} - \frac{3a}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$124.3. \int \frac{x^4 dx}{X^3} = \frac{a^2 x}{4X^2} - \frac{5x}{8X} + \frac{3}{8a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$124.4. \int \frac{x^4 dx}{X^4} = \frac{a^2 x}{6X^3} - \frac{7x}{24X^2} + \frac{x}{16a^2 X} + \frac{1}{16a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$125.1. \int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{x^4}{4} - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4}{2} \ln X.$$

$$125.2. \int \frac{x^5 dx}{X^2} = \frac{x^3}{2} - \frac{a^4}{2X} - a^3 \ln X.$$

$$125.3. \int \frac{x^5 dx}{X^3} = \frac{a^2}{X} - \frac{a^4}{4X^2} + \frac{1}{2} \ln X.$$

$$125.4. \int \frac{x^5 dx}{X^4} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{2X^2} - \frac{a^4}{6X^3}.$$

$$125.9. \int \frac{x^5 dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^2}{(n-1)X^{n-1}} - \frac{a^4}{2nX^n} \quad [n > 2].$$

$$126.1. \int \frac{x^6 dx}{X} = \frac{x^5}{5} - \frac{a^2 x^3}{3} + a^4 x - a^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$127.1. \int \frac{x^7 dx}{X} = \frac{x^6}{6} - \frac{a^2 x^4}{4} + \frac{a^4 x^2}{2} - \frac{a^6}{2} \ln X.$$

$$128.1. \int \frac{x^8 dx}{X} = \frac{x^7}{7} - \frac{a^2 x^5}{5} + \frac{a^4 x^3}{3} - a^6 x + a^7 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

На этой странице $X = a^2 + x^2$.

$$131.1. \quad \int \frac{dx}{xX} = \int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{a^2 + x^2}.$$

$$131.2. \quad \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$131.3. \quad \int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$131.4. \quad \int \frac{dx}{xX^4} = \frac{1}{6a^2X^3} + \frac{1}{4a^4X^2} + \frac{1}{2a^6X} + \frac{1}{2a^8} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$132.1. \quad \int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$132.2. \quad \int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4X} - \frac{3}{2a^6} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$132.3. \quad \int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x}{4a^4X^2} - \frac{7x}{8a^6X} - \frac{15}{8a^7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$133.1. \quad \int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$133.2. \quad \int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4X} - \frac{1}{a^6} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$133.3. \quad \int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} - \frac{1}{a^6X} - \frac{1}{4a^4X^2} - \frac{3}{2a^8} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$134.1. \quad \int \frac{dx}{x^4X} = -\frac{1}{3a^2x^3} + \frac{1}{a^4x} + \frac{1}{a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$134.2. \quad \int \frac{dx}{x^4X^2} = -\frac{1}{3a^4x^3} + \frac{2}{a^6x} + \frac{x}{2a^6X} + \frac{5}{2a^7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$135.1. \quad \int \frac{dx}{x^5X} = -\frac{1}{4a^2x^4} + \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$135.2. \quad \int \frac{dx}{x^5X^2} = -\frac{1}{4a^4x^4} + \frac{1}{a^6x^2} + \frac{1}{2a^6X} + \frac{3}{2a^8} \ln \frac{x^2}{X}.$$

$$136. \quad \int \frac{dx}{(f+gx)(a^2+x^2)} = \frac{1}{(f^2+a^2g^2)} \left[g \ln |f+gx| - \right. \\ \left. - \frac{g}{2} \ln (a^2+x^2) + \frac{f}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right]$$

Интегралы, содержащие $X = a^2 - x^2$

$$140. \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|. \quad (\text{См. примечание к 140.1.})$$

Функция $1/(1-x^2)$ и интеграл от нее могут быть определены и для отрицательных значений x . См. рис. 140.

$$140.01. \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \int -\frac{dx}{1-x^2}. \quad [\text{См. 140.}]$$

$$140.02. \quad \int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right|.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{a+bx}{a-bx} = \frac{1}{ab} \operatorname{Arth} \frac{bx}{a} \quad [b^2x^2 < a^2],$$

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{bx+a}{bx-a} = \frac{1}{ab} \operatorname{Arcth} \frac{bx}{a} \quad [b^2x^2 > a^2].$$

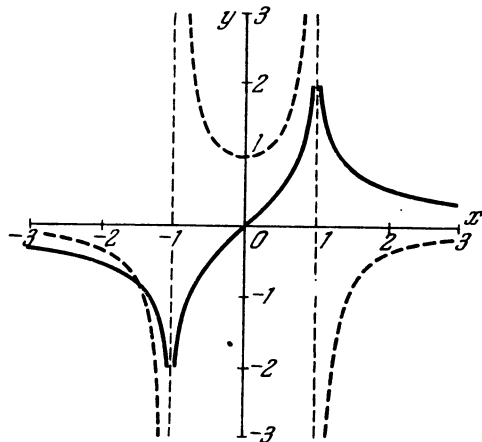


Рис. 140. Графики функций $y = \frac{1}{1-x^2}$ (пунктирная линия) и $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ (сплошная линия).

$$140.1. \quad \int \frac{dx}{X} = \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|. \quad [\text{См. замечание к 140.02.}]$$

$$140.2. \quad \int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$140.3. \quad \int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{16a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$140.4. \quad \int \frac{dx}{X^4} = \frac{x}{6a^2X^3} + \frac{5x}{24a^4X^2} + \frac{5x}{16a^4X} + \frac{5}{32a^7} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$140.9. \quad \int \frac{dx}{(a^2 - b^2x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2 - b^2x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(a^2 - b^2x^2)^n}.$$

$$141.1. \quad \int \frac{x dx}{X} = \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln |a^2 - x^2|.$$

$$141.2. \quad \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{1}{2X}. \quad 141.3. \quad \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{4X^2}.$$

$$141.4. \quad \int \frac{x dx}{X^4} = \frac{1}{6X^3}. \quad 141.9. \quad \int \frac{x dx}{X^{n+1}} = \frac{1}{2nX^n} \quad [n \neq 0].$$

$$142.1. \quad \int \frac{x^2 dx}{X} = -x + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$142.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{x}{2X} - \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$142.3. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{x}{4X^2} - \frac{x}{8a^2X} - \frac{1}{16a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$142.4. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^4} = \frac{x}{6X^3} - \frac{x}{24a^2X^2} - \frac{x}{16a^4X} - \frac{1}{32a^5} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$142.9. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2nX^n} - \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}.$$

$$143.1. \quad \int \frac{x^2 dx}{X} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |X|.$$

$$143.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln |X|.$$

$$143.3. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}. \quad 143.4. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^4} = -\frac{1}{4X^2} + \frac{a^2}{6X^3}.$$

$$143.9. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n} \quad [n > 1].$$

$$144.1. \quad \int \frac{x^4 dx}{X} = -\frac{x^3}{3} - a^2x + \frac{a^3}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$144.2. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^2} = x + \frac{a^2x}{2X} - \frac{3a}{4} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$144.3. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^3} = \frac{a^2x}{4X^2} - \frac{5x}{8X} + \frac{3}{16a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$144.4. \quad \int \frac{x^4 dx}{X^4} = \frac{a^2x}{6X^3} - \frac{7x}{24X^2} + \frac{x}{16a^2X} + \frac{1}{32a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$145.1. \quad \int \frac{x^4 dx}{X} = -\frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^4}{2} \ln |X|.$$

- 145.2. $\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2X} + a^2 \ln |X|.$
- 145.3. $\int \frac{x^5 dx}{X^3} = -\frac{a^2}{X} + \frac{a^4}{4X^2} - \frac{1}{2} \ln |X|.$
- 145.4. $\int \frac{x^5 dx}{X^4} = \frac{1}{2X} - \frac{a^2}{2X^2} + \frac{a^4}{6X^3}.$
- 145.9. $\int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = \frac{1}{2(n-2)X^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^4}{2nX^n} \quad [n > 2].$
- 146.1. $\int \frac{x^5 dx}{X} = -\frac{x^4}{5} - \frac{a^2 x^2}{3} - a^4 x + \frac{a^5}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 147.1. $\int \frac{x^7 dx}{X} = -\frac{x^6}{6} - \frac{a^2 x^4}{4} - \frac{a^4 x^2}{2} - \frac{a^6}{2} \ln |X|.$
- 148.1. $\int \frac{x^9 dx}{X} = -\frac{x^8}{8} - \frac{a^2 x^6}{6} - \frac{a^4 x^4}{4} - a^6 x + \frac{a^7}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 151.1. $\int \frac{dx}{xX} = \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right|.$
- 151.2. $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^4} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 151.3. $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2 X^2} + \frac{1}{2a^4 X} + \frac{1}{2a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 151.4. $\int \frac{dx}{xX^4} = \frac{1}{6a^2 X^3} + \frac{1}{4a^4 X^2} + \frac{1}{2a^6 X} + \frac{1}{2a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 152.1. $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 152.2. $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^4 x} + \frac{x}{2a^4 X} + \frac{3}{4a^5} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 152.3. $\int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^6 x} + \frac{x}{4a^4 X^2} + \frac{7x}{8a^6 X} + \frac{15}{16a^7} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 153.1. $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^4} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 153.2. $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{1}{2a^4 X} + \frac{1}{a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 153.3. $\int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{2a^6 x^2} + \frac{1}{a^6 X} + \frac{1}{4a^4 X^2} + \frac{3}{2a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$
- 154.1. $\int \frac{dx}{x^4 X} = -\frac{1}{3a^2 x^3} - \frac{1}{a^4 x} + \frac{1}{2a^5} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$
- 154.2. $\int \frac{dx}{x^4 X^2} = -\frac{1}{3a^4 x^3} - \frac{2}{a^6 x} + \frac{x}{2a^6 X} + \frac{5}{4a^7} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$

$$155.1. \int \frac{dx}{x^5 X} = -\frac{1}{4a^2 x^4} - \frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{1}{2a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$$

$$155.2. \int \frac{dx}{x^5 X^2} = -\frac{1}{4a^4 x^4} - \frac{1}{a^6 x^2} + \frac{1}{2a^6 X} + \frac{3}{2a^6} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right|.$$

В 155.1 и 155.2 $X = a^2 - x^2$.

$$156. \int \frac{dx}{(f+gx)(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2 g^2 - f^2} \left[g \ln |f+gx| - \right. \\ \left. - \frac{g}{2} \ln |a^2 - x^2| - \frac{f}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right].$$

Интегралы, содержащие $X = ax^2 + bx + c$

$$160.01. \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad [4ac > b^2],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| \quad [b^2 > 4ac],$$

$$= \frac{1}{a(p-q)} \ln \left| \frac{x-p}{x-q} \right| \quad [b^2 > 4ac],$$

где p и q — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Arth} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \quad [b^2 > 4ac, (2ax+b)^2 < b^2 - 4ac],$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Arcth} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \quad [b^2 > 4ac, (2ax+b)^2 > b^2 - 4ac],$$

$$= -\frac{2}{2ax+b} \quad [b^2 = 4ac].$$

(Положить $2ax+b = z$.)

$$160.02. \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)X} + \frac{2a}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. 160.01.}]$$

$$160.03. \int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{2(4ac-b^2)X^2} + \frac{3a(2ax+b)}{(4ac-b^2)^2 X} + \\ + \frac{6a^2}{(4ac-b^2)^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. 160.01.}]$$

$$160.09. \int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$160.11. \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln |X| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. 160.01.}]$$

$$160.12. \int \frac{x dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)X} - \frac{b}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. 160.01.}]$$

$$160.19. \int \frac{x dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$160.21. \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln|X| + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. } 160.01.]$$

$$160.22. \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)X} + \frac{2c}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. } 160.01.]$$

$$160.27. \int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{m-2} dx}{X} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{m-1} dx}{X}.$$

$$160.28. \int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \\ + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2} dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{X^n} \\ [m \neq 2n-1].$$

160.29. При $m = 2n-1$

$$\int \frac{x^{2n-1} dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{X^n}.$$

$$161.11. \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{x^2}{X} \right| - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. } 160.01.]$$

$$161.19. \int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}}.$$

$$161.21. \int \frac{dx}{x^2 X} = \frac{b}{2c^2} \ln \left| \frac{X}{x^2} \right| - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{X}. \quad [\text{См. } 160.01.]$$

$$161.29. \int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)c x^{m-1} X^{n-1}} - \\ - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2} X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1} X^n} \quad [m > 1].$$

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$

$$165.01. \int \frac{dx}{a^3 + x^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a+x)^2}{a^2 - ax + x^2} + \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a \sqrt{3}}.$$

$$165.02. \int \frac{dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3 + x^3)} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{a^3 + x^3}.$$

$$165.11. \int \frac{x dx}{a^3 + x^3} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 - ax + x^2}{(a+x)^3} + \frac{1}{a \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a \sqrt{3}}.$$

$$165.12. \int \frac{x dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3 + x^3)} + \frac{1}{3a^3} \int \frac{x dx}{a^3 + x^3}.$$

$$165.21. \int \frac{x^2 dx}{a^3 + x^3} = \frac{1}{3} \ln|a^3 + x^3|.$$

- 165.22. $\int \frac{x^2 dx}{(a^3 + x^3)^2} = -\frac{1}{3(a^3 + x^3)}.$
- 165.31. $\int \frac{x^3 dx}{a^3 + x^3} = x - a^3 \int \frac{dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.01.}]$
- 165.32. $\int \frac{x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{-x}{3(a^3 + x^3)} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.01.}]$
- 165.41. $\int \frac{x^4 dx}{a^3 + x^3} = \frac{x^2}{2} - a^3 \int \frac{x dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.11.}]$
- 165.42. $\int \frac{x^4 dx}{(a^3 + x^3)^2} = -\frac{x^2}{3(a^3 + x^3)} + \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.11.}]$
- 165.51. $\int \frac{x^5 dx}{a^3 + x^3} = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \ln |a^3 + x^3|.$
- 165.52. $\int \frac{x^5 dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{a^3}{3(a^3 + x^3)} + \frac{1}{3} \ln |a^3 + x^3|.$
- 166.11. $\int \frac{dx}{x(a^3 + x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{x^3}{a^3 + x^3} \right|.$
- 166.12. $\int \frac{dx}{x(a^3 + x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3 + x^3)} + \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{x^3}{a^3 + x^3} \right|.$
- 166.21. $\int \frac{dx}{x^2(a^3 + x^3)} = -\frac{1}{a^3 x} - \frac{1}{a^3} \int \frac{x dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.11.}]$
- 166.22. $\int \frac{dx}{x^2(a^3 + x^3)^2} = -\frac{1}{a^6 x} - \frac{x^2}{3a^6(a^3 + x^3)} -$
 $-\frac{4}{3a^6} \int \frac{x dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.11.}]$
- 166.31. $\int \frac{dx}{x^3(a^3 + x^3)} = -\frac{1}{2a^3 x^2} - \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.01.}]$
- 166.32. $\int \frac{dx}{x^3(a^3 + x^3)^2} = -\frac{1}{2a^6 x^2} - \frac{x}{3a^6(a^3 + x^3)} -$
 $-\frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{a^3 + x^3}. \quad [\text{См. 165.01.}]$
- 166.41. $\int \frac{dx}{x^4(a^3 + x^3)} = -\frac{1}{3a^3 x^3} + \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{a^3 + x^3}{x^3} \right|.$
- 166.42. $\int \frac{dx}{x^4(a^3 + x^3)^2} = -\frac{1}{3a^6 x^3} - \frac{1}{3a^6(a^3 + x^3)} + \frac{2}{3a^3} \ln \left| \frac{a^3 + x^3}{x^3} \right|.$
- 168.01. $\int \frac{dx}{a^3 - x^3} = \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^2 + ax + x^2}{(a-x)^2} + \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a \sqrt{3}}.$
- 168.02. $\int \frac{dx}{(a^3 - x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3 - x^3)} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{a^3 - x^3}. \quad [\text{См. 168.01.}]$

$$168.11. \quad \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 + ax + x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}.$$

$$168.12. \quad \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x^2}{3a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{3a^2} \int \frac{x dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.11.}]$$

$$168.21. \quad \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{3} \ln |a^2 - x^2|.$$

$$168.22. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{3(a^2 - x^2)}.$$

$$168.31. \quad \int \frac{x^3 dx}{a^2 - x^2} = -x + a^2 \int \frac{dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.01.}]$$

$$168.32. \quad \int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{3(a^2 - x^2)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.01.}]$$

$$168.41. \quad \int \frac{x^4 dx}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{2} + a^2 \int \frac{x dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.11.}]$$

$$168.42. \quad \int \frac{x^4 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x^2}{3(a^2 - x^2)} - \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.11.}]$$

$$168.51. \quad \int \frac{x^5 dx}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{3} \ln |a^2 - x^2|.$$

$$168.52. \quad \int \frac{x^5 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{a^2}{3(a^2 - x^2)} + \frac{1}{3} \ln |a^2 - x^2|.$$

$$169.11. \quad \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)} = \frac{1}{3a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right|.$$

$$169.12. \quad \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{3a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{3a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right|.$$

$$169.21. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{a^2} \int \frac{x dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.11.}]$$

$$169.22. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{x^2}{3a^2(a^2 - x^2)} + \frac{4}{3a^2} \int \frac{x dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.11.}]$$

$$169.31. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.01.}]$$

$$169.32. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2} = -\frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{x}{3a^2(a^2 - x^2)} + \frac{5}{3a^2} \int \frac{dx}{a^2 - x^2}. \quad [\text{См. 168.01.}]$$

$$169.41. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{3a^2 x^2} + \frac{1}{3a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right|.$$

$$169.42. \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2} = -\frac{1}{3a^2 x^2} + \frac{1}{3a^2(a^2 - x^2)} + \frac{2}{3a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right|.$$

Интегралы, содержащие $a^4 \pm x^4$

170. $\int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3 \sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax \sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax \sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a^3 \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax \sqrt{2}}{a^2 - x^2}.$
- 170.1. $\int \frac{x dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}.$
- 170.2. $\int \frac{x^2 dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a \sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax \sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax \sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax \sqrt{2}}{a^2 - x^2}.$
- 170.3. $\int \frac{x^3 dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln(a^4 + x^4).$
171. $\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$
- 171.1. $\int \frac{x dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} \right|.$
- 171.2. $\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$
- 171.3. $\int \frac{x^3 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln |a^4 - x^4|.$
173. $\int \frac{dx}{x(a + bx^m)} = \frac{1}{am} \ln \left| \frac{x^m}{a + bx^m} \right|.$

Иррациональные алгебраические функции—Интегралы

Интегралы, содержащие $x^{1/2}$

180. $\int x^{p/2} dx = \frac{2}{p+2} x^{(p+2)/2},$
- 180.1. $\int x^{1/2} dx = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}.$
- 180.3. $\int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2}.$ 180.5. $\int x^{5/2} dx = \frac{2}{7} x^{7/2}.$
181. $\int \frac{dx}{x^{p/2}} = -\frac{2}{(p-2) x^{(p-2)/2}}.$
- 181.1. $\int \frac{dx}{x^{1/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2}.$ 181.3. $\int \frac{dx}{x^{3/2}} = -\frac{2}{x^{1/2}}.$
- 181.5. $\int \frac{dx}{x^{5/2}} = -\frac{2}{3x^{3/2}}.$ 181.7. $\int \frac{dx}{x^{7/2}} = -\frac{2}{5x^{5/2}}.$

$$185.11. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{a^2 + b^2 x} = \frac{2x^{1/2}}{b^2} - \frac{2a}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$185.13. \quad \int \frac{x^{3/2} dx}{a^2 + b^2 x} = \frac{2}{3} \frac{x^{3/2}}{b^2} - \frac{2a^2 x^{1/2}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$185.21. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{(a^2 + b^2 x)^2} = -\frac{x^{1/2}}{b^2 (a^2 + b^2 x)} + \frac{1}{ab^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$185.23. \quad \int \frac{x^{3/2} dx}{(a^2 + b^2 x)^2} = \frac{2x^{3/2}}{b^2 (a^2 + b^2 x)} + \frac{3a^2 x^{1/2}}{b^4 (a^2 + b^2 x)} - \frac{3a}{b^5} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$186.11. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x) x^{1/2}} = \frac{2}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$186.13. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x) x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2 x^{1/2}} - \frac{2b}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$186.21. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x)^2 x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2 (a^2 + b^2 x)} + \frac{1}{a^3 b} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$186.23. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x)^2 x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2 (a^2 + b^2 x) x^{1/2}} - \frac{3b^2 x^{1/2}}{a^4 (a^2 + b^2 x)} - \\ - \frac{3b}{a^5} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}.$$

$$187.11. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{a^2 - b^2 x} = -\frac{2x^{1/2}}{b^2} + \frac{a}{b^3} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$187.13. \quad \int \frac{x^{3/2} dx}{a^2 - b^2 x} = -\frac{2}{3} \frac{x^{3/2}}{b^2} - \frac{2a^2 x^{1/2}}{b^4} + \frac{a^3}{b^5} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$187.21. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{(a^2 - b^2 x)^2} = \frac{x^{1/2}}{b^2 (a^2 - b^2 x)} - \frac{1}{2ab^3} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$187.23. \quad \int \frac{x^{3/2} dx}{(a^2 - b^2 x)^2} = \frac{3a^2 x^{1/2} - 2b^2 x^{3/2}}{b^4 (a^2 - b^2 x)} - \frac{3a}{2b^5} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$188.11. \quad \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x) x^{1/2}} = \frac{1}{ab} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$188.13. \quad \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x) x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2 x^{1/2}} + \frac{b}{a^3} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$188.21. \quad \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x)^2 x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2 (a^2 - b^2 x)} + \frac{1}{2a^3 b} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$188.23. \quad \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x)^2 x^{3/2}} = \frac{-2}{a^2 (a^2 - b^2 x) x^{1/2}} + \frac{3b^2 x^{1/2}}{a^4 (a^2 - b^2 x)} + \frac{3b}{2a^3} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|.$$

$$189.1. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{a^4 + x^2} = \frac{-1}{2a \sqrt{2}} \ln \frac{x + a \sqrt{2x} + a^2}{x - a \sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a \sqrt{2x}}{a^2 - x}.$$

$$189.2. \quad \int \frac{dx}{(a^4 + x^2) x^{1/2}} = \frac{1}{2a^3 \sqrt{2}} \ln \frac{x + a \sqrt{2x} + a^2}{x - a \sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a \sqrt{2x}}{a^2 - x}.$$

$$189.3. \quad \int \frac{x^{1/2} dx}{a^4 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x^{1/2}}{a - x^{1/2}} \right| - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x^{1/2}}{a}.$$

$$189.4. \quad \int \frac{dx}{(a^4 - x^2) x^{1/2}} = \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a + x^{1/2}}{a - x^{1/2}} \right| + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x^{1/2}}{a}.$$

Интегралы, содержащие $X^{1/2} = (a + bx)^{1/2}$

$$190. \quad \int \frac{x^q dx}{X^{p/2}} = \frac{1}{b^{q+1}} \int \frac{(X-a)^q dX}{X^{p/2}} \quad [q > 0].$$

При целом положительном q разложить числитель по формуле бинома Ньютона.

$$191. \quad \int \frac{dx}{X^{p/2}} = \frac{-2}{(p-2) b X^{(p-2)/2}}. \quad 191.01. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{b} X^{1/2}.$$

$$191.03. \quad \int \frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{-2}{b \lambda^{1/2}}. \quad 191.05. \quad \int \frac{dx}{X^{5/2}} = \frac{-2}{3b X^{3/2}}.$$

$$191.1. \quad \int \frac{x dx}{X^{p/2}} = \frac{2}{b^2} \left[\frac{-1}{(p-4) X^{(p-4)/2}} + \frac{a}{(p-2) X^{(p-2)/2}} \right].$$

$$191.11. \quad \int \frac{x dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{b^2} \left(\frac{X^{3/2}}{3} - a X^{1/2} \right).$$

$$191.13. \quad \int \frac{x dx}{X^{3/2}} = \frac{2}{b^2} \left(X^{1/2} + \frac{a}{X^{1/2}} \right).$$

$$191.15. \quad \int \frac{x dx}{X^{5/2}} = \frac{2}{b^2} \left(\frac{-1}{X^{1/2}} + \frac{a}{3X^{3/2}} \right).$$

$$191.17. \quad \int \frac{x dx}{X^{7/2}} = \frac{2}{b^2} \left(\frac{-1}{3X^{3/2}} + \frac{a}{5X^{5/2}} \right).$$

$$191.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{p/2}} = \frac{2}{b^3} \left[\frac{-1}{(p-6) X^{(p-6)/2}} + \frac{2a}{(p-4) X^{(p-4)/2}} - \frac{a^2}{(p-2) X^{(p-2)/2}} \right]$$

$$191.21. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{b^3} \left(\frac{X^{5/2}}{5} - \frac{2aX^{3/2}}{3} + a^2 X^{1/2} \right).$$

$$191.23. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{3/2}} = \frac{2}{b^3} \left(\frac{X^{3/2}}{3} - 2aX^{1/2} - \frac{a^2}{X^{1/2}} \right).$$

$$191.25. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{5/2}} = \frac{2}{b^3} \left(X^{1/2} + \frac{2a}{X^{1/2}} - \frac{a^2}{3X^{3/2}} \right).$$

$$191.27. \quad \int \frac{x^2 dx}{X^{7/2}} = \frac{2}{b^3} \left(\frac{-1}{X^{1/2}} + \frac{2a}{3X^{3/2}} - \frac{a^2}{5X^{5/2}} \right).$$

$$192.1. \quad \int \frac{dx}{xX^{p/2}} = \frac{2}{(p-2)aX^{(p-2)/2}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{xX^{(p-2)/2}} \quad [p > 1].$$

$$192.11. \quad \int \frac{dx}{xX^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}} \ln \left| \frac{X^{1/2} - a^{1/2}}{X^{1/2} + a^{1/2}} \right| \quad [a > 0, X > 0],$$

$$= -\frac{2}{a^{1/2}} \operatorname{Arth} \frac{X^{1/2}}{a^{1/2}} \quad [a > X > 0],$$

$$= -\frac{2}{a^{1/2}} \operatorname{Arcth} \frac{X^{1/2}}{a^{1/2}} \quad [X > a > 0],$$

$$= \frac{2}{(-a)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{X^{1/2}}{(-a)^{1/2}} \quad [a < 0, X > 0].$$

(Положить $X^{1/2} = z$. См. 120.1 и 140.1.)

$$192.13. \quad \int \frac{dx}{xX^{3/2}} = \frac{2}{aX^{1/2}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.15. \quad \int \frac{dx}{xX^{5/2}} = \frac{2}{3aX^{3/2}} + \frac{2}{a^2 X^{1/2}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.17. \quad \int \frac{dx}{xX^{7/2}} = \frac{2}{5aX^{5/2}} + \frac{2}{3a^2 X^{3/2}} + \frac{2}{a^3 X^{1/2}} + \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.2. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^{p/2}} = \frac{-1}{axX^{(p-2)/2}} - \frac{pb}{2a} \int \frac{dx}{xX^{p/2}}.$$

$$192.21. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^{1/2}} = \frac{-X^{1/2}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.23. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^{3/2}} = \frac{-1}{axX^{1/2}} - \frac{3b}{a^2 X^{1/2}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.25. \quad \int \frac{dx}{x^2 X^{5/2}} = \frac{-1}{ax X^{3/2}} - \frac{5b}{3a^2 X^{3/2}} - \frac{5b}{a^3 X^{1/2}} - \frac{5b}{2a^3} \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$192.9. \quad \int \frac{dx}{x^p X^{1/2}} = \frac{-X^{1/2}}{(p-1)ax^{p-1}} - \frac{(2p-3)b}{(2p-2)a} \int \frac{dx}{x^{p-1} X^{1/2}}.$$

$$193. \quad \int X^{p/2} dx = \frac{2X^{(p+2)/2}}{(p+2)b}.$$

$$193.01. \quad \int X^{1/2} dx = \frac{2X^{3/2}}{3b}. \quad 193.03. \quad \int X^{3/2} dx = \frac{2X^{5/2}}{5b}.$$

$$193.1. \quad \int x X^{p/2} dx = \frac{2}{b^2} \left(\frac{X^{(p+4)/2}}{p+4} - \frac{aX^{(p+2)/2}}{p+2} \right).$$

$$193.11. \quad \int x X^{1/2} dx = \frac{2}{b^2} \left(\frac{X^{5/2}}{5} - \frac{aX^{3/2}}{3} \right).$$

$$193.13. \quad \int x X^{3/2} dx = \frac{2}{b^2} \left(\frac{X^{7/2}}{7} - \frac{aX^{5/2}}{5} \right).$$

$$193.2. \quad \int x^2 X^{p/2} dx = \frac{2}{b^3} \left(\frac{X^{(p+6)/2}}{p+6} - \frac{2aX^{(p+4)/2}}{p+4} + \frac{a^2 X^{(p+2)/2}}{p+2} \right).$$

$$193.21. \quad \int x^2 X^{1/2} dx = \frac{2}{b^3} \left(\frac{X^{7/2}}{7} - \frac{2aX^{5/2}}{5} + \frac{a^2 X^{3/2}}{3} \right).$$

$$194.1. \quad \int \frac{X^{p/2} dx}{x} = \frac{2X^{p/2}}{p} + a \int \frac{X^{(p-2)/2} dx}{x}.$$

$$194.11. \quad \int \frac{X^{1/2} dx}{x} = 2X^{1/2} + a \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$194.13. \quad \int \frac{X^{3/2} dx}{x} = \frac{2X^{3/2}}{3} + 2aX^{1/2} + a^2 \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$194.15. \quad \int \frac{X^{5/2} dx}{x} = \frac{2X^{5/2}}{5} + \frac{2aX^{3/2}}{3} + 2a^2 X^{1/2} + a^3 \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$194.2. \quad \int \frac{X^{p/2} dx}{x^2} = -\frac{X^{(p+2)/2}}{ax} + \frac{pb}{2a} \int \frac{X^{p/2} dx}{x}.$$

$$194.21. \quad \int \frac{X^{1/2} dx}{x^2} = -\frac{X^{1/2}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

$$194.31. \quad \int \frac{X^{3/2} dx}{x^2} = -\frac{(2a+bx) X^{1/2}}{4ax^2} - \frac{b^2}{8a} \int \frac{dx}{x X^{1/2}}. \quad [\text{См. 192.11.}]$$

Интегралы, содержащие $X^{1/2} = (a + bx)^{1/2}$ и $U^{1/2} = (f + gx)^{1/2}$ Здесь всюду $k = ag - bf$.

$$\begin{aligned}
 195.01. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}} &= \frac{2}{\sqrt{-bg}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-gX}{bU}} & \begin{cases} b > 0 \\ g < 0 \end{cases}, \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{-bg}} \operatorname{arcsin} \frac{2bgx + ag + bf}{bf - ag} & \begin{cases} b > 0 \\ g < 0 \end{cases}, \\
 &= \frac{2}{\sqrt{bg}} \ln \{ \sqrt{bgX} + b\sqrt{U} \} & [bg > 0].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 195.02. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}U} &= \frac{2}{\sqrt{-kg}} \operatorname{arctg} \frac{gX^{1/2}}{\sqrt{-kg}} & [kg < 0], \\
 &= \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln \left| \frac{gX^{1/2} - \sqrt{kg}}{gX^{1/2} + \sqrt{kg}} \right| & [kg > 0].
 \end{aligned}$$

$$195.03. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{3/2}} = -\frac{2X^{1/2}}{kU^{1/2}}.$$

$$195.04. \quad \int \frac{U^{1/2}dx}{X^{1/2}} = \frac{X^{1/2}U^{1/2}}{b} - \frac{k}{2b} \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}. \quad [\text{См. 195.01.}]$$

$$195.09. \quad \int \frac{U^n dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{(2n+1)b} \left(X^{1/2}U^n - nk \int \frac{U^{n-1}dx}{X^{1/2}} \right).$$

$$196.01. \quad \int X^{1/2}U^{1/2}dx = \frac{k+2bU}{4bg} X^{1/2}U^{1/2} - \frac{k^2}{8bg} \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}. \quad [\text{См. 195.01.}]$$

$$196.02. \quad \int \frac{x dx}{X^{1/2}U^{1/2}} = \frac{X^{1/2}U^{1/2}}{bg} - \frac{ag+bf}{2bg} \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}. \quad [\text{См. 195.01.}]$$

$$196.03. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}U^n} = -\frac{1}{(n-1)k} \left\{ \frac{X^{1/2}}{U^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2} \right) b \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{n-1}} \right\}.$$

$$196.04. \quad \int X^{1/2}U^n dx = \frac{1}{(2n+3)g} \left(2X^{1/2}U^{n+1} + k \int \frac{U^n dx}{X^{1/2}} \right). \quad [\text{См. 195.09.}]$$

$$196.05. \quad \int \frac{X^{1/2}dx}{U^n} = \frac{1}{(n-1)g} \left(-\frac{X^{1/2}}{U^{n-1}} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{X^{1/2}U^{n-1}} \right). \quad [\text{См. 196.03.}]$$

$$197. \quad \int \frac{f(x^2) dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \int f\left(\frac{au^2}{1-bu^2}\right) \frac{du}{(1-bu^2)},$$

$$\text{где } u = \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Интегралы, содержащие $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$

$$200.01. \quad \int \frac{dx}{r} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + r|.$$

Заметим, что

$$\ln \left| \frac{x+r}{a} \right| = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r+x}{r-x} \right|.$$

Надо брать положительные значения r и a .

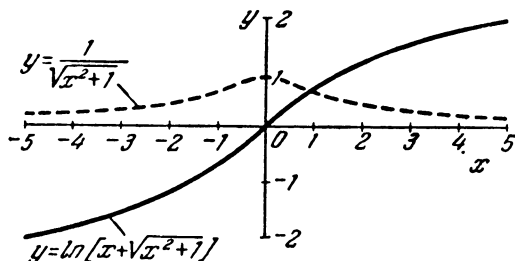


Рис. 200.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (пунктирная линия) и $y = \ln |x + \sqrt{x^2+1}|$ (сплошная линия).

$$200.03. \quad \int \frac{dx}{r^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{r}.$$

$$200.05. \quad \int \frac{dx}{r^5} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{r} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} \right].$$

$$200.07. \quad \int \frac{dx}{r^7} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{r} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} \right].$$

$$200.09. \quad \int \frac{dx}{r^9} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{x}{r} - \frac{3}{3} \frac{x^3}{r^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} \right].$$

$$200.11. \quad \int \frac{dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{x}{r} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{r^3} + \frac{6}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{r^9} \right].$$

$$200.13. \quad \int \frac{dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{x}{r} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{r^3} + \frac{10}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{10}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{5}{9} \frac{x^9}{r^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} \right].$$

$$200.15. \quad \int \frac{dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^{14}} \left[\frac{x}{r} - \frac{6}{3} \frac{x^3}{r^3} + \frac{15}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{20}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{15}{9} \frac{x^9}{r^9} - \frac{6}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{r^{13}} \right].$$

Интегралы 200.03—200.15 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{x^2 + a^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{a \, dz}{(1 - z^2)^{3/2}}.$$

- 201.01. $\int \frac{x dx}{r} = r.$ 201.03. $\int \frac{x dx}{r^2} = -\frac{1}{r}.$
- 201.05. $\int \frac{x dx}{r^3} = -\frac{1}{3r^2}.$ 201.07. $\int \frac{x dx}{r^5} = -\frac{1}{5r^4}.$
- 201.9. $\int \frac{x dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-1)r^{2p-1}}.$
- 202.01. $\int \frac{x^2 dx}{r} = \frac{xr}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x+r|. \text{ (См. замечание в 200.01.)}$
- 202.03. $\int \frac{x^2 dx}{r^3} = -\frac{x}{r} + \ln|x+r|.$
- 202.05. $\int \frac{x^2 dx}{r^5} = \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{r^3}.$
- 202.07. $\int \frac{x^2 dx}{r^7} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} \right].$
- 202.09. $\int \frac{x^2 dx}{r^9} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{r^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} \right].$
- 202.11. $\int \frac{x^2 dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{5} \frac{x^5}{r^5} + \frac{3}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{r^9} \right].$
- 202.13. $\int \frac{x^2 dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} - \frac{4}{5} \frac{x^5}{r^5} + \frac{6}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{4}{9} \frac{x^9}{r^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} \right].$
- 202.15. $\int \frac{x^2 dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} - \frac{5}{5} \frac{x^5}{r^5} + \frac{10}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{10}{9} \frac{x^9}{r^9} + \right.$
 $\left. + \frac{5}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{r^{13}} \right].$
- 203.01. $\int \frac{x^3 dx}{r} = \frac{r^3}{3} - a^2 r.$
- 203.03. $\int \frac{x^3 dx}{r^3} = r + \frac{a^2}{r}.$
- 203.05. $\int \frac{x^3 dx}{r^5} = -\frac{1}{r} + \frac{a^2}{3r^3}.$
- 203.07. $\int \frac{x^3 dx}{r^7} = -\frac{1}{3r^3} + \frac{a^2}{5r^5}.$
- 203.9. $\int \frac{x^3 dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)r^{2p-3}} + \frac{a^2}{(2p-1)r^{2p-1}}.$
- 204.01. $\int \frac{x^4 dx}{r} = \frac{x^2 r}{4} - \frac{3}{8} a^2 x r + \frac{3}{8} a^4 \ln|x+r|.$
 (См. замечание в 200.01.)

$$204.03. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^3} = \frac{xr}{2} + \frac{a^2 x}{r} - \frac{3}{2} a^2 \ln |x+r|.$$

$$204.05. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^5} = -\frac{x}{r} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} + \ln |x+r|.$$

$$204.07. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^7} = \frac{1}{5a^2} \frac{x^5}{r^5}.$$

$$204.09. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^9} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} \right].$$

$$204.11. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{2}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{r^9} \right].$$

$$204.13. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{3}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{3}{9} \frac{x^9}{r^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} \right].$$

$$204.15. \quad \int \frac{x^4 dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{r^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{r^7} + \frac{6}{9} \frac{x^9}{r^9} - \frac{4}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{r^{13}} \right].$$

$$205.01. \quad \int \frac{x^5 dx}{r} = \frac{r^5}{5} - \frac{2}{3} a^2 r^3 + a^4 r.$$

$$205.03. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^3} = \frac{r^3}{3} - 2a^2 r - \frac{a^4}{r}.$$

$$205.05. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^5} = r + \frac{2a^2}{r} - \frac{a^4}{3r^3}.$$

$$205.07. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^7} = -\frac{1}{r} + \frac{2a^2}{3r^3} - \frac{a^4}{5r^5}.$$

$$205.9. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-5)r^{2p-5}} + \frac{2a^2}{(2p-3)r^{2p-3}} - \frac{a^4}{(2p-1)r^{2p-1}}.$$

$$206.01. \quad \int \frac{x^5 dx}{r} = \frac{x^5 r}{6} - \frac{5}{24} a^2 x^3 r + \frac{5}{16} a^4 x r - \frac{5}{16} a^5 \ln |x+r|.$$

(См. замечание в 200.01.)

$$206.03. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^3} = \frac{x^3}{4r} - \frac{5}{8} \frac{a^2 x^3}{r} - \frac{15}{8} \frac{a^4 x}{r} + \frac{15}{8} a^4 \ln |x+r|.$$

$$206.05. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^5} = \frac{x^3}{2r^3} + \frac{10}{3} \frac{a^2 x^3}{r^3} + \frac{5}{2} \frac{a^4 x}{r^3} - \frac{5}{2} a^2 \ln |x+r|.$$

$$206.07. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^7} = -\frac{23}{15} \frac{x^3}{r^5} - \frac{7}{3} \frac{a^2 x^3}{r^5} - \frac{a^4 x}{r^5} + \ln |x+r|.$$

$$206.09. \quad \int \frac{x^5 dx}{r^9} = \frac{1}{7a^2} \frac{x^7}{r^7}.$$

$$206.11. \quad \int \frac{x^9 dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{r^9} \right].$$

$$206.13. \quad \int \frac{x^8 dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{2}{9} \frac{x^9}{r^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} \right].$$

$$206.15. \quad \int \frac{x^6 dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{r^7} - \frac{3}{9} \frac{x^9}{r^9} + \frac{3}{11} \frac{x^{11}}{r^{11}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{r^{13}} \right].$$

$$207.01. \quad \int \frac{x^7 dx}{r} = \frac{1}{7} r^7 - \frac{3}{5} a^2 r^5 + \frac{3}{3} a^4 r^3 - a^6 r.$$

$$207.03. \quad \int \frac{x^7 dx}{r^3} = \frac{1}{5} r^5 - \frac{3}{3} a^2 r^3 + 3a^4 r + \frac{a^6}{r}.$$

$$207.05. \quad \int \frac{x^7 dx}{r^5} = \frac{1}{3} r^3 - 3a^2 r - \frac{3a^4}{r} + \frac{a^6}{3r^3}.$$

$$207.07. \quad \int \frac{x^7 dx}{r^7} = r + \frac{3a^2}{r} - \frac{3a^4}{3r^3} + \frac{a^6}{5r^5}.$$

$$207.9. \quad \int \frac{x^7 dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)r^{2p-7}} + \frac{3a^2}{(2p-5)r^{2p-5}} - \\ - \frac{3a^4}{(2p-3)r^{2p-3}} + \frac{a^6}{(2p-1)r^{2p-1}}.$$

$$221.01. \quad \int \frac{dx}{xr} = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|. \quad (\text{См. рисунок на стр. 50}).$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right| = -\frac{1}{a} \operatorname{Arsch} \left| \frac{x}{a} \right| = -\frac{1}{a} \operatorname{Arsh} \left| \frac{a}{x} \right| = \\ = -\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right).$$

Надо брать положительные значения a и r .

$$221.03. \quad \int \frac{dx}{xr^3} = \frac{1}{a^2 r} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$221.05. \quad \int \frac{dx}{xr^5} = \frac{1}{3a^2 r^3} + \frac{1}{a^4 r} - \frac{1}{a^5} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$221.07. \quad \int \frac{dx}{xr^7} = \frac{1}{5a^2 r^5} + \frac{1}{3a^4 r^3} + \frac{1}{a^6 r} - \frac{1}{a^7} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$221.09. \quad \int \frac{dx}{xr^9} = \frac{1}{7a^2 r^7} + \frac{1}{5a^4 r^5} + \frac{1}{3a^6 r^3} + \frac{1}{a^8 r} - \frac{1}{a^9} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$222.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 r} = -\frac{r}{a^2 x}.$$

$$222.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 r^3} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{r}{x} + \frac{x}{r} \right).$$

$$222.05. \quad \int \frac{dx}{x^2 r^5} = -\frac{1}{a^5} \left(\frac{r}{x} + \frac{2x}{r} - \frac{x^2}{3r^3} \right).$$

$$222.07. \quad \int \frac{dx}{x^2 r^7} = -\frac{1}{a^7} \left(\frac{r}{x} + \frac{3x}{r} - \frac{3x^2}{3r^3} + \frac{x^3}{5r^5} \right).$$

$$222.09. \quad \int \frac{dx}{x^2 r^9} = -\frac{1}{a^9} \left(\frac{r}{x} + \frac{4x}{r} - \frac{6x^2}{3r^3} + \frac{4x^3}{5r^5} - \frac{x^4}{7r^7} \right).$$

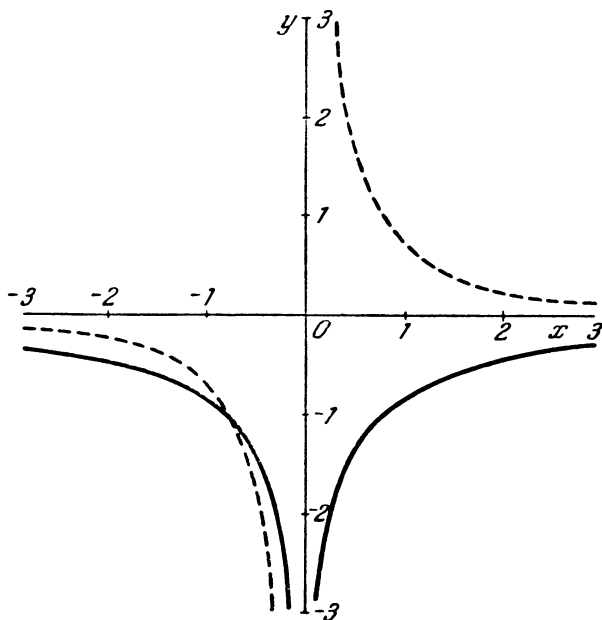


Рис. 221.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(пунктирная линия) и $y = -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right|$
(сплошная линия).

$$223.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 r} = -\frac{r}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

Как и в 221.01 имеем

$$\ln \left| \frac{a+r}{x} \right| = \operatorname{Arcsch} \left| \frac{x}{a} \right| = \operatorname{Arsh} \left| \frac{a}{x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r+a}{r-a} \right|.$$

$$223.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 r^3} = -\frac{1}{2a^2 x^2 r} - \frac{3}{2a^4 r} + \frac{3}{2a^2} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$223.05. \quad \int \frac{dx}{x^3 r^3} = -\frac{1}{2a^2 x^2 r^3} - \frac{5}{6a^4 r^3} - \frac{5}{2a^6 r} + \frac{5}{2a^7} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$224.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 r} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{r}{x} - \frac{r^3}{3x^3} \right).$$

$$224.03. \quad \int \frac{dx}{x^4 r^3} = \frac{1}{a^6} \left(\frac{x}{r} + \frac{2r}{x} - \frac{r^3}{3x^3} \right).$$

$$224.05. \quad \int \frac{dx}{x^3 r^3} = \frac{1}{a^3} \left(-\frac{x^3}{3r^3} + \frac{3x}{r} + \frac{3r}{x} - \frac{r^3}{3x^3} \right).$$

В 222 и 224 положим

$$z^2 = \frac{x^2}{r^2};$$

тогда

$$dx = \frac{a dz}{(1-z^2)^{3/2}}.$$

$$225.01. \quad \int \frac{dx}{x^3 r} = -\frac{r}{4a^2 x^4} + \frac{3}{8} \frac{r}{a^4 x^2} - \frac{3}{8a^5} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$225.03. \quad \int \frac{dx}{x^5 r^3} = -\frac{1}{4a^2 x^4 r} + \frac{5}{8a^4 x^2 r} + \frac{15}{8a^6 r} - \frac{15}{8a^7} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$226.01. \quad \int \frac{dx}{x^6 r} = \frac{1}{a^6} \left(-\frac{r}{x} + \frac{2r^3}{3x^3} - \frac{r^5}{5x^5} \right).$$

$$226.03. \quad \int \frac{dx}{x^6 r^3} = \frac{1}{a^3} \left(-\frac{x}{r} - \frac{3r}{x} + \frac{3r^3}{3x^3} - \frac{r^5}{5x^5} \right).$$

$$230.01. \quad \int r dx = \frac{xr}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |x+r|.$$

Как и в 200.01, имеем

$$\ln \left| \frac{x+r}{a} \right| = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \operatorname{Arsh} \frac{a}{x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r+x}{r-x} \right|.$$

$$230.03. \quad \int r^3 dx = \frac{1}{4} xr^3 + \frac{3}{8} a^2 xr + \frac{3}{8} a^4 \ln |x+r|.$$

$$230.05. \quad \int r^5 dx = \frac{1}{6} xr^5 + \frac{5}{24} a^2 xr^3 + \frac{5}{16} a^4 xr + \frac{5}{16} a^6 \ln |x+r|.$$

$$231.01. \quad \int xr dx = \frac{r^3}{3}.$$

$$231.03. \quad \int xr^3 dx = \frac{r^5}{5}.$$

$$231.9. \quad \int xr^{2p+1} dx = \frac{r^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$232.01. \quad \int x^2 r dx = \frac{xr^3}{4} - \frac{a^2 xr}{8} - \frac{a^4}{8} \ln |x+r|.$$

$$232.03. \quad \int x^2 r^3 dx = \frac{xr^5}{6} - \frac{a^2 xr^3}{24} - \frac{a^4 xr}{16} - \frac{a^6}{16} \ln|x+r|.$$

$$233.01. \quad \int x^3 r dx = \frac{r^5}{5} - \frac{a^2 r^3}{3}.$$

$$233.03. \quad \int x^3 r^3 dx = \frac{r^7}{7} - \frac{a^2 r^5}{5}.$$

$$233.9. \quad \int x^3 r^{2p+1} dx = \frac{r^{2p+5}}{2p+5} - \frac{a^2 r^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$234.01. \quad \int x^4 r dx = \frac{x^2 r^3}{6} - \frac{a^2 xr^3}{8} + \frac{a^4 xr}{16} + \frac{a^6}{16} \ln|x+r|.$$

Как и в 200.01, имеем

$$\ln \left| \frac{x+r}{a} \right| = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \operatorname{Arcsch} \frac{a}{x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r+x}{r-x} \right|.$$

$$234.03. \quad \int x^4 r^3 dx = \frac{x^2 r^5}{8} - \frac{a^2 xr^5}{16} + \frac{a^4 xr^3}{64} + \frac{3}{128} a^6 xr + \\ + \frac{3}{128} a^6 \ln|x+r|.$$

$$235.01. \quad \int x^5 r dx = \frac{r^7}{7} - \frac{2a^2 r^5}{5} + \frac{a^4 r^3}{3}.$$

$$235.03. \quad \int x^5 r^3 dx = \frac{r^9}{9} - \frac{2a^2 r^7}{7} + \frac{a^4 r^5}{5}.$$

$$235.9. \quad \int x^5 r^{2p+1} dx = \frac{r^{2p+7}}{2p+7} - \frac{2a^2 r^{2p+5}}{2p+5} + \frac{a^4 r^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$241.01. \quad \int \frac{r dx}{x} = r - a \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|. \quad (\text{См. замечание в 221.01.})$$

$$241.03. \quad \int \frac{r^3 dx}{x} = \frac{r^3}{3} + a^2 r - a^4 \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$241.05. \quad \int \frac{r^5 dx}{x} = \frac{r^5}{5} + \frac{a^2 r^3}{3} + a^4 r - a^6 \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$241.07. \quad \int \frac{r^7 dx}{x} = \frac{r^7}{7} + \frac{a^2 r^5}{5} + \frac{a^4 r^3}{3} + a^6 r - a^8 \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|.$$

$$242.01. \quad \int \frac{r dx}{x^2} = -\frac{r}{x} + \ln|x+r|. \quad (\text{См. замечание в 200.01.})$$

$$242.03. \quad \int \frac{r^3 dx}{x^2} = -\frac{r^3}{x} + \frac{3}{2} xr + \frac{3}{2} a^2 \ln|x+r|.$$

$$242.05. \quad \int \frac{r^5 dx}{x^2} = -\frac{r^5}{x} + \frac{5}{4} xr^3 + \frac{15}{8} a^2 xr + \frac{15}{8} a^4 \ln|x+r|.$$

- 243.01. $\int \frac{r dx}{x^2} = -\frac{r}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$. (См. замечание в 221.01.)
- 243.03. $\int \frac{r^3 dx}{x^2} = -\frac{r^3}{2x^2} + \frac{3}{2}r - \frac{3}{2}a \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$.
- 243.05. $\int \frac{r^5 dx}{x^2} = -\frac{r^5}{2x^2} + \frac{5}{6}r^3 + \frac{5}{2}a^2r - \frac{5}{2}a^3 \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$.
- 244.01. $\int \frac{r dx}{x^4} = -\frac{r^3}{3a^2x^3}$.
- 244.03. $\int \frac{r^3 dx}{x^4} = -\frac{r^3}{3x^3} - \frac{r}{x} + \ln |x+r|$. (См. замечание в 200.01.)
- 244.05. $\int \frac{r^5 dx}{x^4} = -\frac{a^2r^3}{3x^3} - \frac{2a^2r}{x} + \frac{xr}{2} + \frac{5}{2}a^2 \ln |x+r|$.
- 245.01. $\int \frac{r dx}{x^5} = -\frac{r}{4x^4} - \frac{r}{8a^2x^2} + \frac{1}{8a^3} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$.
- 245.03. $\int \frac{r^3 dx}{x^5} = -\frac{r^3}{4x^4} - \frac{3}{8} \frac{r^3}{a^2x^2} + \frac{3}{8} \frac{r}{a^2} - \frac{3}{8a} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$.
- 246.01. $\int \frac{r dx}{x^6} = \frac{r^3}{5a^2x^3} \left(\frac{2}{3a^2} - \frac{1}{x^2} \right)$.
- 246.03. $\int \frac{r^3 dx}{x^6} = -\frac{r^5}{5a^2x^3}$.
- 247.01. $\int \frac{r dx}{x^7} = -\frac{r}{6x^6} - \frac{r}{24a^2x^4} + \frac{r}{16a^4x^2} - \frac{1}{16a^5} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$.
- 248.01. $\int \frac{r dx}{x^8} = \frac{r^3}{7a^2x^3} \left(-\frac{1}{x^4} + \frac{4}{5a^2x^2} - \frac{8}{15a^4} \right)$.

Интегралы, содержащие $s = (x^2 - a^2)^{1/2}$

- 260.01. $\int \frac{dx}{s} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x+s|$,
 $[x^2 > a^2]$ (см. рисунок на стр. 54).

Заметим, что $\ln \left| \frac{x+s}{a} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+s}{x-s} \right) = \text{Arch} \left| \frac{x}{a} \right|$.

Для положительных значений x надо брать положительное значение $\text{Arch} \left| \frac{x}{a} \right|$, для отрицательных — отрицательное. s надо всегда считать положительным.

- 260.03. $\int \frac{dx}{s^2} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{s}$.

$$260.05. \quad \int \frac{dx}{s^6} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} \right].$$

$$260.07. \quad \int \frac{dx}{s^7} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{s} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right].$$

$$260.09. \quad \int \frac{dx}{s^9} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{x}{s} - \frac{3}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right].$$

$$260.11. \quad \int \frac{dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{x}{s} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{6}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

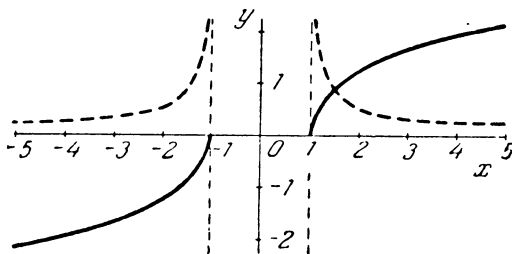


Рис. 260.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (пунктирная линия) и $y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$ (сплошная линия).

$$260.13. \quad \int \frac{dx}{s^{13}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{x}{s} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{10}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{10}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{5}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$260.15. \quad \int \frac{dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{14}} \left[\frac{x}{s} - \frac{6}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{15}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{20}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{15}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{6}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

Интегралы 260.03—260.15 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{x^2 - a^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{-adz}{(z^2 - 1)^{3/2}}.$$

$$261.01. \quad \int \frac{x dx}{s} = s. \quad 261.03. \quad \int \frac{x dx}{s^3} = -\frac{1}{s}.$$

$$261.05. \quad \int \frac{x dx}{s^5} = -\frac{1}{3s^3}. \quad 261.07. \quad \int \frac{x dx}{s^7} = -\frac{1}{5s^5}.$$

$$261.9. \quad \int \frac{x dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$262.01. \quad \int \frac{x^2 dx}{s} = \frac{xs}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + s|. \quad (\text{См. замечание в 260.01.})$$

$$262.03. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^3} = -\frac{x}{s} + \ln |x + s|.$$

$$262.05. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^5} = -\frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{s^3}.$$

$$262.07. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^7} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^5} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right].$$

$$262.09. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^9} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^7} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{s^7} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right].$$

$$262.11. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^9} - \frac{3}{5} \frac{x^5}{s^9} + \frac{3}{7} \frac{x^7}{s^9} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

$$262.13. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^{11}} - \frac{4}{5} \frac{x^5}{s^{11}} + \frac{6}{7} \frac{x^7}{s^{11}} - \frac{4}{9} \frac{x^9}{s^{11}} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$262.15. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{s^{13}} - \frac{5}{5} \frac{x^5}{s^{13}} + \frac{10}{7} \frac{x^7}{s^{13}} - \frac{10}{9} \frac{x^9}{s^{13}} + \right. \\ \left. + \frac{5}{11} \frac{x^{11}}{s^{13}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$263.01. \quad \int \frac{x^3 dx}{s} = \frac{s^3}{3} + a^2 s.$$

$$263.03. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^3} = s - \frac{a^2}{s}.$$

$$263.05. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^5} = -\frac{1}{s} - \frac{a^2}{3s^3}.$$

$$263.9. \quad \int \frac{x^3 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^2}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$264.01. \quad \int \frac{x^4 dx}{s} = \frac{x^2 s}{4} + \frac{3}{8} a^2 x s + \frac{3}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

(См. замечание в 260.01.)

$$264.03. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^3} = \frac{x s}{2} - \frac{a^2 x}{s} + \frac{3}{2} a^2 \ln |x + s|.$$

$$264.05. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^5} = -\frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} + \ln |x + s|.$$

$$264.07. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^7} = -\frac{1}{5a^2} \frac{x^4}{s^5}.$$

$$264.09. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^9} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{5} \frac{x^4}{s^7} - \frac{1}{7} \frac{x^6}{s^7} \right].$$

$$264.11. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{5} \frac{x^4}{s^9} - \frac{2}{7} \frac{x^6}{s^9} + \frac{1}{9} \frac{x^8}{s^9} \right].$$

$$264.13. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^{13}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{3}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{3}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$264.15. \quad \int \frac{x^4 dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7} \frac{x^7}{s^7} + \frac{6}{9} \frac{x^9}{s^9} - \frac{4}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$265.01. \quad \int \frac{x^5 dx}{s} = \frac{s^5}{5} + \frac{2}{3} a^2 s^3 + a^4 s.$$

$$265.03. \quad \int \frac{x^5 dx}{s^3} = \frac{s^3}{3} + 2a^2 s - \frac{a^4}{s}.$$

$$265.05. \quad \int \frac{x^5 dx}{s^5} = s - \frac{2a^2}{s} - \frac{a^4}{3s^3}.$$

$$265.07. \quad \int \frac{x^5 dx}{s^7} = -\frac{1}{s} - \frac{2a^2}{3s^3} - \frac{a^4}{5s^5}.$$

$$265.9. \quad \int \frac{x^5 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-5)s^{2p-5}} - \frac{2a^2}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^4}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

$$266.01. \quad \int \frac{x^6 dx}{s} = \frac{x^6 s}{6} + \frac{5}{24} a^2 x^4 s + \frac{5}{16} a^4 x s + \frac{5}{16} a^6 \ln |x + s|.$$

(См. замечание в 260.01.)

$$266.03. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^3} = \frac{x^6}{4s} + \frac{5}{8} \frac{a^2 x^4}{s} - \frac{15}{8} \frac{a^4 x^2}{s} + \frac{15}{8} a^6 \ln |x + s|.$$

$$266.05. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^5} = \frac{x^6}{2s^3} - \frac{10}{3} \frac{a^2 x^4}{s^3} + \frac{5}{2} \frac{a^4 x^2}{s^3} + \frac{5}{2} a^6 \ln |x + s|.$$

$$266.07. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^7} = -\frac{23}{15} \frac{x^6}{s^5} + \frac{7}{3} \frac{a^2 x^4}{s^5} - \frac{a^4 x^2}{s^5} + \ln |x + s|.$$

$$266.09. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^9} = -\frac{1}{7a^2} \frac{x^7}{s^7}.$$

$$266.11. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{1}{9} \frac{x^9}{s^9} \right].$$

$$266.13. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{2}{9} \frac{x^9}{s^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} \right].$$

$$266.15. \quad \int \frac{x^6 dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} - \frac{3}{9} \frac{x^9}{s^9} + \frac{3}{11} \frac{x^{11}}{s^{11}} - \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{s^{13}} \right].$$

$$267.01. \quad \int \frac{x^7 dx}{s} = \frac{1}{7} s^7 + \frac{3}{5} a^2 s^5 + \frac{3}{3} a^4 s^3 + a^6 s.$$

$$267.03. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^3} = \frac{1}{5} s^5 + \frac{3}{3} a^2 s^3 + 3a^4 s - \frac{a^6}{s}.$$

$$267.05. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^5} = \frac{1}{3} s^3 + 3a^2 s - \frac{3a^4}{s} - \frac{a^6}{3s^3}.$$

$$267.07. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^7} = s - \frac{3a^2}{s} - \frac{3a^4}{3s^3} - \frac{a^6}{5s^5}.$$

$$267.9. \quad \int \frac{x^7 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)s^{2p-1}} - \frac{3a^2}{(2p-5)s^{2p-3}} - \frac{3a^4}{(2p-3)s^{2p-5}} - \frac{a^6}{(2p-1)s^{2p-7}}.$$

$$281.01. \quad \int \frac{dx}{xs} = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| = \frac{1}{a} \operatorname{arccsc} \left| \frac{x}{a} \right| \quad [x^2 > a^2].$$

$$281.03. \quad \int \frac{dx}{xs^3} = -\frac{1}{a^2 s} - \frac{1}{a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

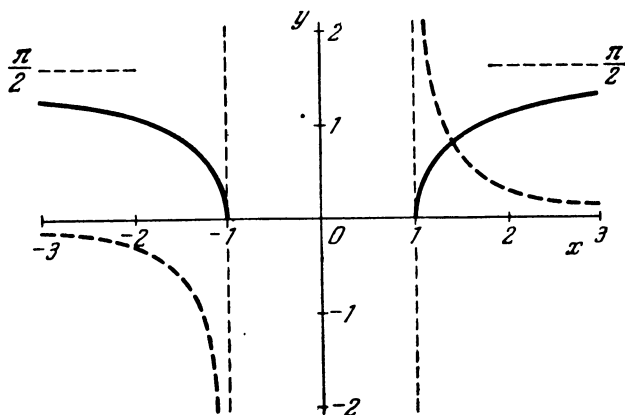


Рис. 281.01. Графики функций $y = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ (пунктирная линия) и $y = \arccos \left| \frac{1}{x} \right|$ (сплошная линия).

$$281.05. \quad \int \frac{dx}{xs^5} = -\frac{1}{3a^2 s^3} + \frac{1}{a^2 s} + \frac{1}{a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$281.07. \quad \int \frac{dx}{xs^7} = -\frac{1}{5a^2 s^5} + \frac{1}{3a^2 s^3} - \frac{1}{a^2 s} - \frac{1}{a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$281.09. \quad \int \frac{dx}{xs^9} = -\frac{1}{7a^2 s^7} + \frac{1}{5a^2 s^5} - \frac{1}{3a^2 s^3} + \frac{1}{a^2 s} + \frac{1}{a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$282.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 s} = \frac{s}{a^2 x}.$$

$$282.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^3} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{s}{x} + \frac{x}{s} \right).$$

$$282.05. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{s}{x} + \frac{2x}{s} - \frac{x^2}{3s^2} \right).$$

$$282.07. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{s}{x} + \frac{3x}{s} - \frac{3x^2}{3s^2} + \frac{x^3}{5s^2} \right).$$

$$282.09. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = \frac{1}{a^{10}} \left(\frac{s}{x} + \frac{4x}{s} - \frac{6x^2}{3s^2} + \frac{4x^3}{5s^2} - \frac{x^4}{7s^2} \right).$$

$$283.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 s} = \frac{s}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

(См. замечание к 281.01.)

$$283.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = \frac{1}{2a^2 x^2 s} - \frac{3}{2a^4 s} - \frac{3}{2a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$283.05. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = \frac{1}{2a^2 x^2 s^2} - \frac{5}{6a^4 s^2} + \frac{5}{2a^2 s} + \frac{5}{2a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$284.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 s} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{s}{x} - \frac{s^2}{3x^2} \right).$$

$$284.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{x}{s} + \frac{2s}{x} - \frac{s^2}{3x^2} \right).$$

$$284.05. \quad \int \frac{dx}{x^2 s^2} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{x^2}{3s^2} + \frac{3x}{s} + \frac{3s}{x} - \frac{s^2}{3x^2} \right).$$

Интегралы 282 и 284 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{s^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{-a dz}{(z^2 - 1)^{3/2}}.$$

$$290.01. \quad \int s dx = \frac{xs}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + s|. \quad (\text{См. замечание к 260.01.})$$

$$290.03. \quad \int s^2 dx = \frac{1}{4} xs^2 - \frac{3}{8} a^2 xs + \frac{5}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

$$290.05. \quad \int s^3 dx = \frac{1}{6} xs^3 - \frac{5}{24} a^2 xs^2 + \frac{5}{16} a^4 xs - \frac{5}{16} a^6 \ln |x + s|.$$

$$291.01. \quad \int xs dx = \frac{s^2}{3}. \quad 291.03. \quad \int xs^2 dx = \frac{s^3}{5}.$$

$$291.9. \quad \int xs^{2p+1} dx = \frac{s^{2p+2}}{2p+3}.$$

$$292.01. \quad \int x^2 s dx = \frac{xs^2}{4} + \frac{a^2 xs}{8} - \frac{a^4}{8} \ln |x + s|.$$

(См. замечание к 260.01.)

$$292.03. \quad \int x^2 s^2 dx = \frac{xs^2}{6} + \frac{a^2 xs^2}{24} - \frac{a^4 xs}{16} + \frac{a^6}{16} \ln |x + s|.$$

$$293.01. \quad \int x^3 s \, dx = \frac{s^5}{5} + \frac{a^2 s^3}{3}. \quad 293.03. \quad \int x^3 s^3 \, dx = \frac{s^7}{7} + \frac{a^2 s^5}{5}.$$

$$293.9. \quad \int x^3 s^{2p+1} \, dx = \frac{s^{2p+3}}{2p+3} + \frac{a^2 s^{2p+1}}{2p+3}.$$

$$294.01. \quad \int x^4 s \, dx = \frac{x^3 s^3}{6} + \frac{a^2 x s^3}{8} + \frac{a^4 x s}{16} - \frac{a^6}{16} \ln |x + s|.$$

(См. замечание к 260.01.)

$$294.03. \quad \int x^4 s^3 \, dx = \frac{x^3 s^5}{8} + \frac{a^2 x s^5}{16} + \frac{a^4 x s^3}{64} - \frac{3}{128} a^6 x s + \frac{3}{128} a^6 \ln |x + s|.$$

$$295.01. \quad \int x^5 s \, dx = \frac{s^7}{7} + \frac{2a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3}.$$

$$295.03. \quad \int x^5 s^3 \, dx = \frac{s^9}{9} + \frac{2a^2 s^7}{7} + \frac{a^4 s^5}{5}.$$

$$295.9. \quad \int x^5 s^{2p+1} \, dx = \frac{s^{2p+3}}{2p+3} + \frac{2a^2 s^{2p+1}}{2p+3} + \frac{a^4 s^{2p-1}}{2p+3}.$$

$$301.01. \quad \int \frac{s \, dx}{x} = s - a \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.03. \quad \int \frac{s^3 \, dx}{x} = \frac{s^3}{3} - a^2 s + a^3 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.05. \quad \int \frac{s^5 \, dx}{x} = \frac{s^5}{5} - \frac{a^2 s^3}{3} + a^4 s - a^5 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$301.07. \quad \int \frac{s^7 \, dx}{x} = \frac{s^7}{7} - \frac{a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3} - a^6 s + a^7 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$302.01. \quad \int \frac{s \, dx}{x^2} = -\frac{s}{x} + \ln |x + s|. \quad (\text{См. замечание к 260.01.})$$

$$302.03. \quad \int \frac{s^3 \, dx}{x^2} = -\frac{s^3}{x} + \frac{3}{2} x s - \frac{3}{2} a^2 \ln |x + s|.$$

$$302.05. \quad \int \frac{s^5 \, dx}{x^2} = -\frac{s^5}{x} + \frac{5}{4} x s^3 - \frac{15}{8} a^2 x s + \frac{15}{8} a^4 \ln |x + s|.$$

$$303.01. \quad \int \frac{s \, dx}{x^3} = -\frac{s}{2x^2} + \frac{1}{2a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$303.03. \quad \int \frac{s^3 \, dx}{x^3} = -\frac{s^3}{2x^2} + \frac{3s}{2} - \frac{3}{2} a \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$303.05. \quad \int \frac{s^5 \, dx}{x^3} = -\frac{s^5}{2x^2} + \frac{5}{6} s^3 - \frac{5}{2} a^2 s + \frac{5}{2} a^3 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$304.01. \quad \int \frac{s \, dx}{x^4} = \frac{s^3}{3a^2 x^2}.$$

$$304.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^4} = -\frac{s^3}{3x^3} - \frac{s}{x} + \ln|x+s|. \quad (\text{См. замечание к } 260.01.)$$

$$304.05. \quad \int \frac{s^5 dx}{x^4} = \frac{a^2 s^3}{3x^3} + \frac{2a^2 s}{x} + \frac{xs}{2} - \frac{5}{2} a^2 \ln|x+s|.$$

$$305.01. \quad \int \frac{s dx}{x^4} = -\frac{s}{4x^4} + \frac{s}{8a^2 x^2} + \frac{1}{8a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$305.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^5} = -\frac{s^3}{4x^4} + \frac{3}{8} \frac{s^3}{a^2 x^2} - \frac{3}{8} \frac{s}{a^2} + \frac{3}{8a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$306.01. \quad \int \frac{s dx}{x^6} = \frac{s^3}{5a^2 x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3a^2} \right).$$

$$306.03. \quad \int \frac{s^3 dx}{x^6} = \frac{s^5}{5a^2 x^5}.$$

$$307.01. \quad \int \frac{s dx}{x^7} = -\frac{s}{6x^6} + \frac{s}{24a^2 x^4} + \frac{s}{16a^4 x^2} + \frac{1}{16a^5} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|.$$

$$308.01. \quad \int \frac{s dx}{x^8} = \frac{s^3}{7a^2 x^5} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{4}{5a^2 x^2} + \frac{8}{15a^4} \right).$$

Интегралы, содержащие $t = (a^2 - x^2)^{1/2}$

$$320.01. \quad \int \frac{dx}{t} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad [x^2 < a^2].$$

Надо брать положительные значения t и a .

$$320.03. \quad \int \frac{dx}{t^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{t}. \quad 320.05. \quad \int \frac{dx}{t^5} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{t} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} \right].$$

$$320.07. \quad \int \frac{dx}{t^7} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{t} + \frac{2}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} \right].$$

$$320.09. \quad \int \frac{dx}{t^9} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{x}{t} + \frac{3}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} \right].$$

$$320.11. \quad \int \frac{dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{x}{t} + \frac{4}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{6}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{4}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{t^9} \right].$$

$$320.13. \quad \int \frac{dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{x}{t} + \frac{5}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{10}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{10}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{5}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} \right].$$

$$320.15. \quad \int \frac{dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{14}} \left[\frac{x}{t} + \frac{6}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{15}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{20}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{15}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{6}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{t^{13}} \right].$$

Интегралы 320.03—320.15 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}; \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{a dz}{(1+z^2)^{3/2}}.$$

$$321.01. \int \frac{x dx}{t} = -t.$$

$$321.03. \int \frac{x dx}{t^3} = \frac{1}{t}.$$

$$321.05. \int \frac{x dx}{t^5} = \frac{1}{3t^3}.$$

$$321.07. \int \frac{x dx}{t^7} = \frac{1}{5t^5}.$$

$$321.9 \quad \int \frac{x dx}{t^{2p+1}} = \frac{1}{(2p-1)t^{2p-1}}.$$

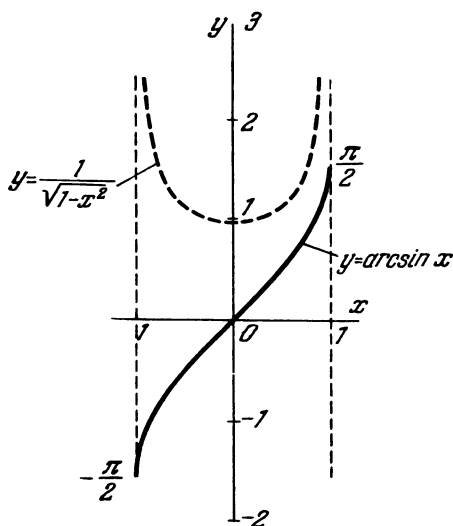


Рис. 320.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (пунктирная линия) и $y = \arcsin x$ (сплошная линия).

$$322.01. \int \frac{x^2 dx}{t} = -\frac{xt}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$322.03. \int \frac{x^2 dx}{t^3} = \frac{x}{t} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$322.05. \int \frac{x^2 dx}{t^5} = \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{t^3}.$$

$$322.07. \int \frac{x^2 dx}{t^7} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} \right].$$

$$322.09. \int \frac{x^2 dx}{t^9} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} \right].$$

$$322.11. \int \frac{x^2 dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{3}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{t^9} \right].$$

$$322.13. \int \frac{x^2 dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{4}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{6}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{4}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} \right].$$

$$322.15. \int \frac{x^3 dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{12}} \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \frac{5}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{10}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{10}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{5}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{t^{13}} \right].$$

$$323.01. \int \frac{x^3 dx}{t} = \frac{t^3}{3} - a^2 t. \quad 323.03. \int \frac{x^3 dx}{t^3} = t + \frac{a^2}{t}.$$

$$323.05. \int \frac{x^3 dx}{t^3} = -\frac{1}{t} + \frac{a^2}{3t^3}.$$

$$323.9. \int \frac{x^3 dx}{t^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)t^{2p-3}} + \frac{a^2}{(2p-1)t^{2p-1}}.$$

$$324.01. \int \frac{x^4 dx}{t} = -\frac{x^3 t}{4} - \frac{3}{8} a^2 x t + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$324.03. \int \frac{x^4 dx}{t^3} = \frac{x t}{2} + \frac{a^2 x}{t} - \frac{3}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$324.05. \int \frac{x^4 dx}{t^5} = -\frac{x}{t} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{t^3} + \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$324.07. \int \frac{x^4 dx}{t^7} = \frac{1}{5a^2} \frac{x^5}{t^5}. \quad 324.09. \int \frac{x^4 dx}{t^9} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} \right].$$

$$324.11. \int \frac{x^4 dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{2}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{t^9} \right].$$

$$324.13. \int \frac{x^4 dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{3}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{3}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} \right].$$

$$324.15. \int \frac{x^4 dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{10}} \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{t^5} + \frac{4}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{6}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{4}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{t^{13}} \right].$$

$$325.01. \int \frac{x^5 dx}{t} = -\frac{t^5}{5} + \frac{2a^2 t^3}{3} - a^4 t.$$

$$325.03. \int \frac{x^5 dx}{t^3} = -\frac{t^3}{3} + 2a^2 t + \frac{a^4}{t}.$$

$$325.05. \int \frac{x^5 dx}{t^5} = -t - \frac{2a^2}{t} + \frac{a^4}{3t^3}. \quad 325.07. \int \frac{x^5 dx}{t^7} = \frac{1}{t} - \frac{2a^2}{3t^3} + \frac{a^4}{5t^5}.$$

$$325.9. \int \frac{x^5 dx}{t^{2p+1}} = \frac{1}{(2p-5)t^{2p-5}} - \frac{2a^2}{(2p-3)t^{2p-3}} + \frac{a^4}{(2p-1)t^{2p-1}}.$$

$$326.01. \int \frac{x^6 dx}{t} = -\frac{x^5 t}{6} - \frac{5}{24} a^2 x^3 t - \frac{5}{16} a^4 x t + \frac{5}{16} a^6 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$326.03. \int \frac{x^6 dx}{t^3} = -\frac{x^5}{4t} - \frac{5}{8} \frac{a^2 x^3}{t} + \frac{15}{8} \frac{a^4 x}{t} - \frac{15}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$326.05. \int \frac{x^6 dx}{t^5} = -\frac{x^5}{2t^3} + \frac{10}{3} \frac{a^2 x^3}{t^3} - \frac{5}{2} \frac{a^4 x}{t^3} + \frac{5}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$326.07. \int \frac{x^6 dx}{t^7} = \frac{23}{15} \frac{x^5}{t^6} - \frac{7}{3} \frac{a^2 x^3}{t^5} + \frac{a^4 x}{t^4} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$326.09. \int \frac{x^6 dx}{t^8} = \frac{1}{7a^2} \frac{x^7}{t^7}. \quad 326.11. \int \frac{x^6 dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9} \frac{x^9}{t^9} \right].$$

$$326.13. \int \frac{x^6 dx}{t^{12}} = \frac{1}{a^6} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{2}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} \right].$$

$$326.15. \int \frac{x^6 dx}{t^{15}} = \\ = \frac{1}{a^8} \left[\frac{1}{7} \frac{x^7}{t^7} + \frac{3}{9} \frac{x^9}{t^9} + \frac{3}{11} \frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13} \frac{x^{13}}{t^{13}} \right].$$

$$327.01. \int \frac{x^7 dx}{t} = \frac{1}{7} t^7 - \frac{3}{5} a^2 t^5 + \frac{3}{3} a^4 t^3 - a^6 t.$$

$$327.03. \int \frac{x^7 dx}{t^3} = \frac{1}{5} t^5 - \frac{3}{3} a^2 t^3 + 3a^4 t + \frac{a^6}{t}.$$

$$327.05. \int \frac{x^7 dx}{t^5} = \frac{1}{3} t^3 - 3a^2 t - \frac{3a^4}{t} + \frac{a^6}{3t^3}.$$

$$327.07. \int \frac{x^7 dx}{t^7} = t + \frac{3a^2}{t} - \frac{3a^4}{3t^3} + \frac{a^6}{5t^5}.$$

$$327.9. \int \frac{x^7 dx}{t^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)t^{2p-7}} + \\ + \frac{3a^2}{(2p-5)t^{2p-5}} - \frac{3a^4}{(2p-3)t^{2p-3}} + \\ + \frac{a^6}{(2p-1)t^{2p-1}}.$$

$$341.01. \int \frac{dx}{xt} = \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right| \\ [x^2 < a^2].$$

Замечим, что

$$-\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right| = -\frac{1}{a} \operatorname{Arsch} \left| \frac{x}{a} \right| = \\ = -\frac{1}{a} \operatorname{Arch} \left| \frac{a}{x} \right| = -\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+t}{a-t} \right).$$

Надо брать положительные значения Arsch , Arch , a и t .

$$341.03. \int \frac{dx}{xt^3} = \frac{1}{a^2 t} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$341.05. \int \frac{dx}{xt^5} = \frac{1}{3a^2 t^3} + \frac{1}{a^4 t} - \frac{1}{a^6} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

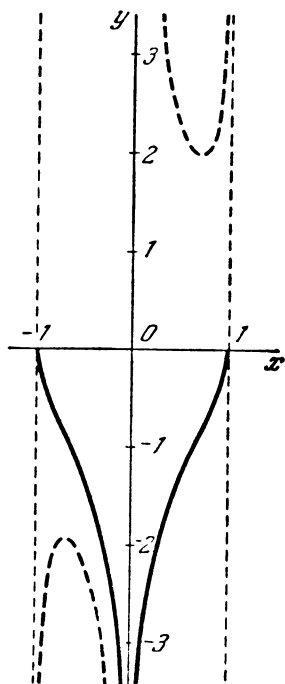


Рис. 341.01. Графики функций $y = \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}}$ (пунктирная линия) и $y = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$ (сплошная линия).

$$341.07. \quad \int \frac{dx}{xt^7} = \frac{1}{5a^2t^5} + \frac{1}{3a^4t^3} + \frac{1}{a^6t} - \frac{1}{a^7} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$341.09. \quad \int \frac{dx}{xt^9} = \frac{1}{7a^2t^7} + \frac{1}{5a^4t^5} + \frac{1}{3a^6t^3} + \frac{1}{a^8t} - \frac{1}{a^9} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$342.01. \quad \int \frac{dx}{x^2t} = -\frac{t}{a^2x}.$$

$$342.03. \quad \int \frac{dx}{x^2t^3} = \frac{1}{a^4} \left(-\frac{t}{x} + \frac{x}{t} \right).$$

$$342.05. \quad \int \frac{dx}{x^2t^5} = \frac{1}{a^6} \left(-\frac{t}{x} + \frac{2x}{t} + \frac{x^3}{3t^3} \right).$$

$$342.07. \quad \int \frac{dx}{x^2t^7} = \frac{1}{a^8} \left(-\frac{t}{x} + \frac{3x}{t} + \frac{3x^3}{3t^3} + \frac{x^5}{5t^5} \right).$$

$$342.09. \quad \int \frac{dx}{x^2t^9} = \frac{1}{a^{10}} \left(-\frac{t}{x} + \frac{4x}{t} + \frac{6x^3}{3t^3} + \frac{4x^5}{5t^5} + \frac{x^7}{7t^7} \right).$$

$$343.01. \quad \int \frac{dx}{x^3t} = -\frac{t}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|. \quad [\text{См. } 341.01.]$$

$$343.03. \quad \int \frac{dx}{x^3t^3} = -\frac{1}{2a^2x^2t} + \frac{3}{2a^4t} - \frac{3}{2a^5} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$343.05. \quad \int \frac{dx}{x^3t^5} = -\frac{1}{2a^2x^2t^3} + \frac{5}{6a^4t^3} + \frac{5}{2a^6t} - \frac{5}{2a^7} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$344.01. \quad \int \frac{dx}{x^4t} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{t}{x} + \frac{t^3}{3x^3} \right).$$

$$344.03. \quad \int \frac{dx}{x^4t^3} = -\frac{1}{a^6} \left(-\frac{x}{t} + \frac{2t}{x} + \frac{t^3}{3x^3} \right).$$

$$344.05. \quad \int \frac{dx}{x^4t^5} = -\frac{1}{a^8} \left(-\frac{x^3}{3t^3} - \frac{3x}{t} + \frac{3t}{x} + \frac{t^3}{3x^3} \right).$$

Интегралы 342 и 344 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{t^2}, \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{a \, dz}{(1+z^2)^{1/2}}.$$

$$345.01. \quad \int \frac{dx}{x^5t} = -\left[\frac{t}{4a^2x^4} + \frac{3}{8} \frac{t}{a^4x^2} + \frac{3}{8a^5} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right| \right].$$

$$345.03. \quad \int \frac{dx}{x^5t^3} = -\left[\frac{1}{4a^2x^4t} + \frac{5}{8a^4x^2t} - \frac{15}{8a^6t} + \frac{15}{8a^7} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right| \right].$$

$$346.01. \quad \int \frac{dx}{x^2 t} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{t}{x} + \frac{2t^3}{3x^3} + \frac{t^5}{5x^5} \right).$$

$$346.03. \quad \int \frac{dx}{x^2 t^3} = -\frac{1}{a^3} \left(-\frac{x}{t} + \frac{3t}{x} + \frac{3t^3}{3x^3} + \frac{t^5}{5x^5} \right).$$

$$350.01. \quad \int t dx = \frac{xt}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$350.03. \quad \int t^3 dx = \frac{xt^3}{4} + \frac{3}{8} a^2 xt + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$350.05. \quad \int t^5 dx = \frac{xt^5}{6} + \frac{5}{24} a^2 xt^3 + \frac{5}{16} a^4 xt + \frac{5}{16} a^6 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$351.01. \quad \int xt dx = -\frac{t^3}{3}. \quad 351.03. \quad \int xt^3 dx = -\frac{t^5}{5}.$$

$$351.9. \quad \int xt^{2p+1} dx = -\frac{t^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$352.01. \quad \int x^2 t dx = -\frac{xt^3}{4} + \frac{a^2 xt}{8} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$352.03. \quad \int x^2 t^3 dx = -\frac{xt^5}{6} + \frac{a^2 xt^3}{24} + \frac{a^4 xt}{16} + \frac{a^6}{16} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$353.01. \quad \int x^3 t dx = \frac{t^5}{5} - \frac{a^2 t^3}{3}. \quad 353.03. \quad \int x^3 t^3 dx = \frac{t^7}{7} - \frac{a^2 t^5}{5}.$$

$$353.9. \quad \int x^3 t^{2p+1} dx = \frac{t^{2p+3}}{2p+5} - \frac{a^2 t^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$354.01. \quad \int x^4 t dx = -\frac{x^3 t^3}{6} - \frac{a^2 x t^3}{8} + \frac{a^4 x t}{16} + \frac{a^6}{16} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$354.03. \quad \int x^4 t^3 dx = -\frac{x^3 t^5}{8} - \frac{a^2 x t^5}{16} + \frac{a^4 x t^3}{64} + \frac{3}{128} a^6 xt + \frac{3}{128} a^8 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$355.01. \quad \int x^5 t dx = -\frac{t^7}{7} + \frac{2a^2 t^5}{5} - \frac{a^4 t^3}{3}.$$

$$355.03. \quad \int x^5 t^3 dx = -\frac{t^9}{9} + \frac{2a^2 t^7}{7} - \frac{a^4 t^5}{5}.$$

$$355.9. \quad \int x^5 t^{2p+1} dx = -\frac{t^{2p+3}}{2p+7} + \frac{2a^2 t^{2p+3}}{2p+5} - \frac{a^4 t^{2p+3}}{2p+3}.$$

$$361.01. \quad \int \frac{t dx}{x} = t - a \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|. \quad (\text{См. замечание к } 341.01.)$$

$$361.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x} = \frac{t^3}{3} + a^2 t - a^3 \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

На этой странице $t = (a^2 - x^2)^{1/2}$.

$$361.05. \quad \int \frac{t^5 dx}{x} = \frac{t^5}{5} + \frac{a^2 t^3}{3} + a^4 t - a^5 \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$361.07. \quad \int \frac{t^7 dx}{x} = \frac{t^7}{7} + \frac{a^2 t^5}{5} + \frac{a^4 t^3}{3} + a^6 t - a^7 \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$362.01. \quad \int \frac{t dx}{x^2} = -\frac{t}{x} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$362.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^2} = -\frac{t^3}{x} - \frac{3}{2} xt - \frac{3}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$362.05. \quad \int \frac{t^5 dx}{x^2} = -\frac{t^5}{x} - \frac{5}{4} xt^3 - \frac{15}{8} a^2 xt - \frac{15}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$363.01. \quad \int \frac{t dx}{x^3} = -\frac{t}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|. \quad (\text{См. замечание к } 341.01.)$$

$$363.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^3} = -\frac{t^3}{2x^2} - \frac{3t}{2} + \frac{3a}{2} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$363.05. \quad \int \frac{t^5 dx}{x^3} = -\frac{t^5}{2x^2} - \frac{5}{6} t^3 - \frac{5}{2} a^2 t + \frac{5}{2} a^3 \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$364.01. \quad \int \frac{t dx}{x^4} = -\frac{t^3}{3a^2 x^3}.$$

$$364.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^4} = -\frac{t^3}{3x^3} + \frac{t}{x} + \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$364.05. \quad \int \frac{t^5 dx}{x^4} = -\frac{a^2 t^3}{3x^3} + \frac{2a^2 t}{x} + \frac{xt}{2} + \frac{5}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$365.01. \quad \int \frac{t dx}{x^5} = -\frac{t}{4x^4} + \frac{t}{8a^2 x^3} + \frac{1}{8a^3} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$365.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^5} = -\frac{t^3}{4x^4} + \frac{3}{8} \frac{t^2}{a^2 x^3} + \frac{3}{8} \frac{t}{a^2} - \frac{3}{8a} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$366.01. \quad \int \frac{t dx}{x^6} = -\frac{t^3}{5a^2 x^5} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3a^2} \right).$$

$$366.03. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^6} = -\frac{t^5}{5a^2 x^5}.$$

$$367.01. \quad \int \frac{t dx}{x^7} = -\frac{t}{6x^6} + \frac{t}{24a^2 x^4} + \frac{t}{16a^4 x^2} + \frac{1}{16a^5} \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|.$$

$$368.01. \quad \int \frac{t^3 dx}{x^8} = -\frac{t^5}{7a^2 x^7} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{4}{5a^2 x^2} + \frac{8}{15a^4} \right).$$

Интегралы от биномиальных дифференциалов.
Формулы приведения

$$370. \quad \int x^m (ax^n + b)^p dx = \\ = \frac{1}{m+np+1} \left[x^{m+1} u^p + npb \int x^m u^{p-1} dx \right].$$

$$371. \quad \int x^m (ax^n + b)^p dx = \\ = \frac{1}{bn(p+1)} \left[-x^{m+1} u^{p+1} + (m+n+np+1) \int x^m u^{p+1} dx \right].$$

$$372. \quad \int x^m (ax^n + b)^p dx = \\ = \frac{1}{(m+1)b} \left[x^{m+1} u^{p+1} - a(m+n+np+1) \int x^{m+n} u^p dx \right].$$

$$373. \quad \int x^m (ax^n + b)^p dx = \\ = \frac{1}{a(m+np+1)} \left[x^{m-n+1} u^{p+1} - (m-n+1)b \int x^{m-n} u^p dx \right].$$

Здесь $u = ax^n + b$ и a, b, p, m, n могут быть любыми, лишь бы не обращались в нуль знаменатели при последовательном применении формулы.

Интегралы, содержащие $X^{1/2} = (ax^2 + bx + c)^{1/2}$

$$380.001. \quad \int \frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}} \ln |2(aX)^{1/2} + 2ax + b| \quad [a > 0], \\ = \frac{1}{a^{1/2}} \operatorname{Arsh} \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)^{1/2}} \quad \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ 4ac > b^2 \end{array} \right], \\ = \frac{1}{a^{1/2}} \ln |2ax+b| \quad [a > 0, \quad b^2 = 4ac, \quad 2ax+b > 0], \\ = -\frac{1}{a^{1/2}} \ln |2ax+b| \quad [a > 0, \quad b^2 = 4ac, \quad 2ax+b < 0], \\ = \frac{-1}{(-a)^{1/2}} \arcsin \frac{(2ax+b)}{(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \left[\begin{array}{l} a < 0, \quad b^2 > 4ac, \\ |2ax+b| < (b^2-4ac)^{1/2} \end{array} \right].$$

$$380.003. \quad \int \frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{4ax+2b}{(4ac-b^2)X^{1/2}}.$$

$$380.005. \quad \int \frac{dx}{X^{5/2}} = \frac{4ax+2b}{3(4ac-b^2)X^{1/2}} \left(\frac{1}{X} + \frac{8a}{4ac-b^2} \right).$$

$$380.009. \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{4ax+2b}{(2n-1)(4ac-b^2)X^{(2n-1)/2}} + \\ + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

$$380.011. \int \frac{x dx}{X^{1/2}} = \frac{X^{1/2}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{1/2}}. \quad [\text{См. } 380.001.]$$

$$380.013. \int \frac{x dx}{X^{3/2}} = -\frac{2bx+4c}{(4ac-b^2)X^{1/2}}.$$

$$380.019. \int \frac{x dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}.$$

$$380.021. \int \frac{x^2 dx}{X^{1/2}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)X^{1/2} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{X^{1/2}}. \quad [\text{См. } 380.001.]$$

$$380.111. \int \frac{dx}{xX^{1/2}} = -\frac{1}{c^{1/2}} \ln \left| \frac{2(cX)^{1/2}}{x} + \frac{2c}{x} + b \right| \quad [c > 0], \\ = -\frac{1}{c^{1/2}} \operatorname{Arsh} \frac{bx+2c}{|x|(4ac-b^2)^{1/2}} \quad \left[\begin{array}{l} c > 0, \\ 4ac > b^2 \end{array} \right], \\ = -\frac{1}{c^{1/2}} \ln \left| \frac{bx+2c}{x} \right| \quad [c > 0, \quad b^2 = 4ac, \quad bx+2c > 0], \\ = \frac{1}{c^{1/2}} \ln \left| \frac{bx+2c}{x} \right| \quad [c > 0, \quad b^2 = 4ac, \quad bx+2c < 0], \\ = \frac{1}{(-c)^{1/2}} \arcsin \frac{bx+2c}{|x|(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \left[\begin{array}{l} c < 0, \\ b^2 > 4ac \end{array} \right].$$

$$380.119. \int \frac{dx}{xX^{(2n+1)/2}} = \frac{1}{(2n-1)cX^{(2n-1)/2}} + \\ + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}.$$

$$380.121. \int \frac{dx}{x^2 X^{1/2}} = -\frac{X^{1/2}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \quad [\text{См. } 380.111.]$$

$$380.201. \int X^{1/2} dx = \frac{2ax+b}{4a} X^{1/2} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{X^{1/2}}. \quad [\text{См. } 380.001.]$$

$$380.209. \int X^{(2n+1)/2} dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \\ + \frac{(4ac-b^2)(2n+1)}{8a(n+1)} \int X^{(2n-1)/2} dx.$$

$$380.211. \int xX^{1/2} dx = \frac{X^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} X^{1/2} - \\ - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2} \int \frac{dx}{X^{1/2}}. \quad [\text{См. } 380.001.]$$

$$380.219. \int x X^{(2n+1)/2} dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a} \int X^{(2n+1)/2} dx.$$

$$380.311. \int \frac{X^{1/2} dx}{x} = X^{1/2} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{X^{1/2}} + c \int \frac{dx}{x X^{1/2}}.$$

[См. 380.001 и 380.111.]

$$380.319. \int \frac{X^{(2n+1)/2} dx}{x} = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2} \int X^{(2n-1)/2} dx + c \int \frac{X^{(2n-1)/2} dx}{x}.$$

$$380.321. \int \frac{X^{1/2} dx}{x^2} = -\frac{X^{1/2}}{x} + a \int \frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x X^{1/2}}.$$

[См. 380.001 и 380.111.]

$$383.1. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx)^{1/2}} = -\frac{2}{bx} (ax^2 + bx)^{1/2}.$$

$$383.2. \int \frac{dx}{(2ax - x^2)^{1/2}} = \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$383.3. \int \frac{x dx}{(2ax - x^2)^{1/2}} = -(2ax - x^2)^{1/2} + a \arcsin \left(\frac{x-a}{a} \right).$$

$$383.4. \int (2ax - x^2)^{1/2} dx = \frac{x-a}{2} (2ax - x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$384.1. \int \frac{dx}{x(x^n + a^2)^{1/2}} = -\frac{2}{na} \ln \left| \frac{a + (x^n + a^2)^{1/2}}{x^{n/2}} \right|.$$

$$384.2. \int \frac{dx}{x(x^n - a^2)^{1/2}} = \frac{2}{na} \arccos \left| \frac{a}{x^{n/2}} \right|.$$

$$384.3. \int \frac{x^{1/2} dx}{(a^3 - x^3)^{1/2}} = \frac{2}{3} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)^{3/2}.$$

$$387. \int \frac{dx}{(ax^2 + b) \sqrt{fx^2 + g}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{ag - bf}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{ag - bf}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g}} \quad [ag > bf],$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{b} \sqrt{bf - ag}} \ln \left| \frac{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g} + x \sqrt{bf - ag}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g} - x \sqrt{bf - ag}} \right| \quad [bf > ag].$$

II.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- 400.01. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$
400.02. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$
400.03. $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$
400.04. $\operatorname{tg} A = \sin A / \cos A.$
400.05. $\operatorname{ctg} A = \cos A / \sin A = 1 / \operatorname{tg} A.$
400.06. $\sec A = 1 / \cos A.$
400.07. $\csc A = 1 / \sin A.$
400.08. $\sin(-A) = -\sin A.$
400.09. $\cos(-A) = \cos A.$
400.10. $\operatorname{tg}(-A) = -\operatorname{tg} A.$
400.11. $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1.$
400.12. $\sec A = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$
400.13. $\operatorname{tg} A = \sqrt{\sec^2 A - 1}.$
400.14. $\csc^2 A - \operatorname{ctg}^2 A = 1.$
400.15. $\csc A = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 A}.$
400.16. $\operatorname{ctg} A = \sqrt{\csc^2 A - 1}.$

Заметим, что для действительных значений A знак вышеуказанных радикалов зависит от того, в какой четверти находится угол A .

- 401.01. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$
401.02. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$
401.03. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$
401.04. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

$$401.05. \quad 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B).$$

$$401.06. \quad 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B).$$

$$401.07. \quad 2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B).$$

$$401.08. \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

$$401.09. \quad \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$$

$$401.10. \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

$$401.11. \quad \cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}.$$

$$401.12. \quad \sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B).$$

$$401.13. \quad \cos^2 A - \cos^2 B = \sin(A+B) \sin(B-A).$$

$$401.14. \quad \cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A.$$

$$401.15. \quad \sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A = \frac{1}{\sin^2 A \cos^2 A}.$$

$$401.2. \quad p \cos A + q \sin A = r \sin(A+\theta),$$

где

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \sin \theta = p/r, \quad \cos \theta = q/r$$

или

$$p \cos A + q \sin A = r \cos(A-\varphi),$$

где

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos \varphi = p/r, \quad \sin \varphi = q/r.$$

Заметим, что p и q могут быть положительными и отрицательными.

$$402.01. \quad \sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \\ + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C.$$

$$402.02. \quad \cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \\ - \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C.$$

$$402.03. \quad 4 \sin A \sin B \sin C = \sin(A+B-C) + \sin(B+C-A) + \\ + \sin(C+A-B) - \sin(A+B+C).$$

$$402.04. \quad 4 \sin A \cos B \cos C = \sin(A+B-C) - \sin(B+C-A) + \\ + \sin(C+A-B) + \sin(A+B+C).$$

$$402.05. \quad 4 \sin A \sin B \cos C = -\cos(A+B-C) + \cos(B+C-A) + \\ + \cos(C+A-B) - \cos(A+B+C).$$

$$402.06. \quad 4 \cos A \cos B \cos C = \cos(A+B-C) + \cos(B+C-A) + \\ + \cos(C+A-B) + \cos(A+B+C).$$

$$403.02. \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$$

$$403.03. \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

$$403.04. \quad \sin 4A = \cos A (4 \sin A - 8 \sin^3 A).$$

$$403.05. \quad \sin 5A = 5 \sin A - 20 \sin^3 A + 16 \sin^5 A.$$

$$403.06. \quad \sin 6A = \cos A (6 \sin A - 32 \sin^3 A + 32 \sin^5 A).$$

$$403.07. \quad \sin 7A = 7 \sin A - 56 \sin^3 A + 112 \sin^5 A - 64 \sin^7 A.$$

403.10. Для целого положительного четного n

$$\begin{aligned} \sin nA = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cos A \left[2^{n-1} \sin^{n-1} A - \frac{(n-2)}{1!} 2^{n-3} \sin^{n-3} A + \right. \\ \left. + \frac{(n-3)(n-4)}{2!} 2^{n-5} \sin^{n-5} A - \right. \\ \left. - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!} 2^{n-7} \sin^{n-7} A + \dots \right], \end{aligned}$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.11. Другой ряд:

$$\begin{aligned} \sin nA = n \cos A \left[\sin A - \frac{(n^2-2^2)}{3!} \sin^3 A + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \sin^5 A - \right. \\ \left. - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{7!} \sin^7 A + \dots \right] \\ [n \text{ четное и } > 0]. \end{aligned}$$

403.12. Для нечетного целого $n > 1$

$$\begin{aligned} \sin nA = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[2^{n-1} \sin^n A - \frac{n}{1!} 2^{n-3} \sin^{n-2} A + \right. \\ \left. + \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-5} \sin^{n-4} A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} 2^{n-7} \sin^{n-6} A + \right. \\ \left. + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!} 2^{n-9} \sin^{n-8} A - \dots \right], \end{aligned}$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.13. Другой ряд:

$$\begin{aligned} \sin nA = n \sin A - \frac{n(n^2-1^2)}{3!} \sin^3 A + \\ + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} \sin^5 A - \dots \\ [n \text{ нечетное и } > 0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 403.22 \quad \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{tg} A}. \end{aligned}$$

$$403.23. \quad \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

$$403.24. \quad \cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1.$$

$$403.25. \quad \cos 5A = 16 \cos^5 A - 20 \cos^3 A + 5 \cos A.$$

$$403.26. \quad \cos 6A = 32 \cos^6 A - 48 \cos^4 A + 18 \cos^2 A - 1.$$

$$403.27. \quad \cos 7A = 64 \cos^7 A - 112 \cos^5 A + 56 \cos^3 A - 7 \cos A.$$

$$\begin{aligned} 403.3. \quad \cos nA &= 2^{n-1} \cos^n A - \frac{n}{1!} 2^{n-2} \cos^{n-2} A + \\ &+ \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-4} \cos^{n-4} A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} 2^{n-7} \cos^{n-6} A + \\ &+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!} 2^{n-9} \cos^{n-8} A - \dots \end{aligned}$$

Формула обрывается, когда коэффициент обращается в нуль (n целое и $n > 2$).

$$403.4. \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)}. \quad 403.5. \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)}.$$

$$404.12. \quad \sin^2 A = \frac{1}{2}(-\cos 2A + 1).$$

$$404.13. \quad \sin^3 A = \frac{1}{4}(-\sin 3A + 3 \sin A).$$

$$404.14. \quad \sin^4 A = \frac{1}{8} \left(\cos 4A - 4 \cos 2A + \frac{6}{2} \right).$$

$$404.15. \quad \sin^5 A = \frac{1}{16} (\sin 5A - 5 \sin 3A + 10 \sin A).$$

$$404.16. \quad \sin^6 A = \frac{1}{32} \left(-\cos 6A + 6 \cos 4A - 15 \cos 2A + \frac{20}{2} \right).$$

$$404.17. \quad \sin^7 A = \frac{1}{64} (-\sin 7A + 7 \sin 5A - 21 \sin 3A + 35 \sin A).$$

$$404.22. \quad \cos^2 A = \frac{1}{2} (\cos 2A + 1).$$

$$404.23. \quad \cos^3 A = \frac{1}{4} (\cos 3A + 3 \cos A).$$

$$404.24. \quad \cos^4 A = \frac{1}{8} \left(\cos 4A + 4 \cos 2A + \frac{6}{2} \right).$$

$$404.25. \quad \cos^5 A = \frac{1}{16} (\cos 5A + 5 \cos 3A + 10 \cos A).$$

$$404.26. \quad \cos^6 A = \frac{1}{32} \left(\cos 6A + 6 \cos 4A + 15 \cos 2A + \frac{20}{2} \right).$$

$$404.27. \quad \cos^7 A = \frac{1}{64} (\cos 7A + 7 \cos 5A + 21 \cos 3A + 35 \cos A).$$

(Очевидно, 404 можно продолжить, используя биномиальные коэффициенты.)

$$405.01. \quad \operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}.$$

$$405.02. \quad \operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}.$$

$$405.03. \quad \operatorname{ctg}(A+B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \frac{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}.$$

$$405.04. \quad \operatorname{ctg}(A-B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}.$$

$$405.05. \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}. \quad 405.06. \quad \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}.$$

$$405.07. \quad \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}.$$

$$405.08. \quad \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B}.$$

$$405.09. \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\cos(A-B)}{\cos A \sin B}.$$

$$405.10. \quad \operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\cos(A+B)}{\sin A \cos B}.$$

$$406.02. \quad \operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A} = \frac{2 \operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg}^2 A - 1} = \frac{2}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}.$$

$$406.03. \quad \operatorname{tg} 3A = \frac{3 \operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 A}.$$

$$406.04. \quad \operatorname{tg} 4A = \frac{4 \operatorname{tg} A - 4 \operatorname{tg}^3 A}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^4 A}.$$

$$406.12. \quad \operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2 \operatorname{ctg} A} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{2 \operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{2}.$$

$$406.13. \quad \operatorname{ctg} 3A = \frac{\operatorname{ctg}^3 A - 3 \operatorname{ctg} A}{3 \operatorname{ctg}^2 A - 1}.$$

$$406.14. \quad \operatorname{ctg} 4A = \frac{\operatorname{ctg}^4 A - 6 \operatorname{ctg}^2 A + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 A - 4 \operatorname{ctg} A}.$$

$$406.2. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

$$406.3. \quad \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}.$$

$$407. \quad \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ.$$

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ.$$

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos 72^\circ.$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

$$\sin 36^\circ = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \cos 54^\circ.$$

$$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$$

$$\sin 54^\circ = \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos 36^\circ.$$

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$$

$$\sin 72^\circ = \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \cos 18^\circ.$$

$$\sin 75^\circ = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \cos 15^\circ.$$

$$\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \cos 0^\circ.$$

$$\sin 120^\circ = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 240^\circ = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 120^\circ = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \cos 240^\circ = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin 180^\circ = \sin \pi = 0, \quad \sin 270^\circ = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

$$\cos 180^\circ = \cos \pi = -1, \quad \cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

$$408.01. \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \text{ где } i = +\sqrt{-1}.$$

Заметим, что в электротехнической литературе вместо i часто употребляется j .

$$408.02. \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}).$$

$$408.03. \quad \operatorname{tg} x = -i \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \right) = -i \left(\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} \right).$$

$$408.04. \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (\text{Формула Эйлера.})$$

$$408.05. \quad e^{z+ix} = e^z (\cos x + i \sin x).$$

$$408.06. \quad a^{z+ix} = a^z [\cos (x \ln a) + i \sin (x \ln a)].$$

$$408.07. \quad (\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx. \\ (\text{Формула Муавра.})$$

$$408.08. \quad (\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos nx - i \sin nx.$$

$$408.09. \quad (\cos x + i \sin x)^{-1} = \cos x - i \sin x.$$

$$408.10. \quad \sin (ix) = i \operatorname{sh} x.$$

$$408.11. \quad \cos (ix) = \operatorname{ch} x.$$

$$408.12. \quad \operatorname{tg} (ix) = i \operatorname{th} x.$$

$$408.13. \quad \operatorname{ctg} (ix) = -i \operatorname{cth} x.$$

$$408.14. \quad \sec (ix) = \operatorname{sech} x.$$

$$408.15. \quad \csc (ix) = -i \operatorname{csch} x.$$

$$408.16. \quad \sin (x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y.$$

$$408.17. \quad \cos (x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$408.18. \quad \operatorname{tg} (x \pm iy) = \frac{\sin 2x \pm i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

$$408.19. \quad \operatorname{ctg} (x \pm iy) = \frac{\sin 2x \mp i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$$

$$409.01. \quad ce^{ix} = ce^{i(x+2k\pi)}, \text{ где } k \text{ — целое число или нуль,} \\ = c (\cos x + i \sin x).$$

$$409.02. \quad 1 = e^{0+2k\pi i} = \cos 0 + i \sin 0. \\ \text{Заметим, что} \\ \cos 2k\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1.$$

$$409.03. \quad -1 = e^{0+(2k+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi. \\ \text{Заметим, что}$$

$$\ln (-1) = (2k+1)\pi i.$$

$$409.04. \quad \sqrt[n]{1} = e^{2k\pi i/n}. \text{ Эта величина может принять два различных значения в зависимости от того, четно или нечетно } k. \\ \text{Этими значениями будут соответственно} \\ e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad e^{(2r+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \\ \text{где } r \text{ — целое число или нуль.}$$

409.05. $\sqrt{-1} = e^{(2r+1)\pi i/2}$. Этот квадратный корень имеет два значения в зависимости от того, чётно или нечётно r ; эти значения соответственно

$$\cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i, \quad \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i.$$

409.06. $\sqrt[3]{1} = e^{2k\pi i/3}$. Этот корень имеет три различных значения:

$$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$e^{(2r\pi + 2\pi/3)i} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega,$$

$$e^{(2r\pi + 4\pi/3)i} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2.$$

409.07. $\sqrt[4]{1} = e^{2k\pi i/4}$. Этот корень имеет четыре различных значения:

$$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$e^{(2r\pi + 2\pi/4)i} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i,$$

$$e^{(2r\pi + 4\pi/4)i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$e^{(2r\pi + 6\pi/4)i} = \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i.$$

(См. 409.04 и 05.)

409.08. $\sqrt{i} = e^{(4s+1)\pi i/4}$ (получается из 409.05 при $r=2s$). Этот корень имеет два значения

$$e^{\pi i/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (s \text{ чётно}),$$

$$e^{5\pi i/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \quad (s \text{ нечётно}).$$

409.09. $\sqrt[n]{1} = e^{2k\pi i/n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$

принимает n различных значений, соответствующих различным значениям k . Уравнение $\omega^n = 1$ имеет n различных корней:

$$\omega_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \omega_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_2 = \cos 2 \left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin 2 \left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad \dots, \quad \omega_k = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_{n-1} = \cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + i \sin (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

Заметим, что согласно 408.07

$$\omega_2 = \omega_1^2, \quad \omega_3 = \omega_1^3, \quad \omega_k = \omega_1^k, \quad \omega_0 = \omega_1^n.$$

409.10. Все n корней n -й степени из какого-либо числа могут быть получены из любого корня умножением этого корня на n корней из единицы, которые указаны в 409.09.

410. Формулы для плоского треугольника. Пусть a , b и c — стороны, противолежащие углам A , B и C .

$$410.01. \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$410.02. \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$410.03. \quad a = b \cos C + c \cos B.$$

$$410.04. \quad A + B + C = \pi \text{ радианов} = 180^\circ.$$

$$410.05. \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$410.06. \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

$$410.07. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$410.08. \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

410.09. Чтобы найти c по a , b и C при помощи таблиц логарифмов тригонометрических функций, положим

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \text{ тогда } c = (a-b) \cos \frac{C}{2} \sec \eta.$$

410.10. Площадь треугольника

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$$

410.11. Если $C = 90^\circ$, то $c^2 = a^2 + b^2$. Чтобы найти $c \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$ при помощи таблиц логарифмов, положим $\operatorname{tg} \eta = \frac{b}{a}$, тогда $c = a \sec \eta$.

Это оказывается полезным в разных случаях.

410.12 В плоском треугольнике

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln b - \left(\frac{c}{b} \cos A + \frac{c^2}{2b^2} \cos 2A + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{c^n}{nb^n} \cos nA + \dots \right) \quad [c < b], \\ &= \ln c - \left(\frac{b}{c} \cos A + \frac{b^2}{2c^2} \cos 2A + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{b^n}{nc^n} \cos nA + \dots \right) \quad [b < c]. \end{aligned}$$

[См. 418.]

Р я д ы

$$415.01. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$415.02. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$415.03. \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots \\ \dots + \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \end{aligned} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right].$$

[См. 45].

$$415.04. \quad \begin{aligned} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots \\ \dots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} - \dots \end{aligned} \quad [x^2 < \pi^2].$$

[См. 45].

$$415.05. \quad \begin{aligned} \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{277}{8064} x^8 + \dots \\ \dots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right].$$

[См. 45].

$$415.06. \quad \begin{aligned} \csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15120} x^5 + \frac{127}{604800} x^7 + \dots \\ \dots + \frac{2(2^{2n-1} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \end{aligned} \quad [x^2 < \pi^2].$$

[См. 45].

$$415.07. \quad \begin{aligned} \sin(\theta + x) = \sin \theta + x \cos \theta - \frac{x^2 \sin \theta}{2!} - \\ - \frac{x^3 \cos \theta}{3!} + \frac{x^4 \sin \theta}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$$415.08. \quad \begin{aligned} \cos(\theta + x) = \cos \theta - x \sin \theta - \frac{x^2 \cos \theta}{2!} + \\ + \frac{x^3 \sin \theta}{3!} + \frac{x^4 \cos \theta}{4!} - \dots \end{aligned}$$

$$416.01. \quad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \quad [0 < x < \pi].$$

$$416.02. \quad \text{Постоянная } c = \frac{4c}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \right. \\ \left. + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \quad [0 < x < \pi].$$

$$416.03. \quad c = \frac{4c}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{a} + \dots \right) \quad [0 < x < a].$$

$$416.04. \quad \frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \quad \left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right].$$

$$416.05. \quad \text{Постоянная } c = \frac{4c}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right) \\ \left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right].$$

$$416.06. \quad c = \frac{4c}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{a} - \frac{1}{7} \cos \frac{7\pi x}{a} + \dots \right) \\ \left[-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \right].$$

$$416.07. \quad x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad [-\pi < x < \pi].$$

$$416.08. \quad x = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \\ [0 < x < 2\pi].$$

$$416.09. \quad x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right) \\ \left[-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right].$$

$$416.10. \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \\ [0 \leq x \leq \pi].$$

$$416.11. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right) \\ [-\pi \leq x \leq \pi].$$

$$416.12. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} - \right. \\ \left. - \frac{\cos 7x}{7^3} + \dots \right) \quad \left[-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right].$$

$$416.13. \quad x^3 - \pi^2 x = \\ = -12 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \frac{\sin 4x}{4^3} + \dots \right) \\ [-\pi \leq x \leq \pi].$$

$$416.14. \quad \sin x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right) \\ \left[-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right].$$

$$416.15. \quad \cos x = \frac{8}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} \sin 4x + \frac{3}{5 \cdot 7} \sin 6x + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \sin 2nx + \dots \right\} \\ [0 < x < \pi].$$

$$416.16. \quad \sin ax = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right\}, \\ \text{где } a - \text{ не целое число} \quad [-\pi < x < \pi].$$

$$416.17. \quad \cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2 - a^2} + \frac{\cos x}{1^2 - a^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right\}, \\ \text{где } a - \text{ не целое число.} \quad [-\pi \leq x \leq \pi].$$

$$417.1. \quad \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 1 + \frac{1}{\sin \theta} (a \sin 2\theta + a^2 \sin 3\theta + \\ + a^3 \sin 4\theta + \dots) \quad [a^2 < 1].$$

$$417.2. \quad \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 1 + 2(a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots) \\ [a^2 < 1].$$

$$417.3. \quad \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots \\ [a^2 < 1].$$

$$417.4. \quad \frac{\sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sin \theta + a \sin 2\theta + a^2 \sin 3\theta + \dots \quad [a^2 < 1].$$

$$418. \quad \ln(1 - 2a \cos \theta + a^2) = \\ = -2 \left(a \cos \theta + \frac{a^2}{2} \cos 2\theta + \frac{a^3}{3} \cos 3\theta + \dots \right) [a^2 < 1], \\ = 2 \ln |a| - 2 \left(\frac{\cos \theta}{a} + \frac{\cos 2\theta}{2a^2} + \frac{\cos 3\theta}{3a^3} + \dots \right) [a^2 > 1].$$

$$419.1. \quad e^{ax} \sin bx = \frac{rx \sin \theta}{1!} + \frac{r^2 x^2 \sin 2\theta}{2!} + \frac{r^3 x^3 \sin 3\theta}{3!} + \dots, \\ \text{где } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta \text{ и } b = r \sin \theta.$$

$$419.2. \quad e^{ax} \cos bx = 1 + \frac{rx \cos \theta}{1!} + \frac{r^2 x^2 \cos 2\theta}{2!} + \frac{r^3 x^3 \cos 3\theta}{3!} + \dots,$$

где r и θ те же, что и в 419.1.

$$420.1. \quad \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$420.2. \quad \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$420.3. \quad \sin \alpha + \sin (\alpha + \delta) + \sin (\alpha + 2\delta) + \dots \\ \dots + \sin \{\alpha + (n-1)\delta\} = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \delta \right) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

$$420.4. \quad \cos \alpha + \cos (\alpha + \delta) + \cos (\alpha + 2\delta) + \dots \\ \dots + \cos \{\alpha + (n-1)\delta\} = \frac{\cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \delta \right) \sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

421. Если $\sin \theta = x \sin (\theta + \alpha)$, то

$$\theta + r\pi = x \sin \alpha + \frac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{3} x^3 \sin 3\alpha + \dots \quad [x^2 < 1],$$

где r — целое число.

$$422.1. \quad \sin \theta = \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2^2 \pi^2} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{3^2 \pi^2} \right) \dots \quad [\theta^2 < \infty].$$

$$422.2. \quad \cos \theta = \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{4\theta^2}{3^2 \pi^2} \right) \left(1 - \frac{4\theta^2}{5^2 \pi^2} \right) \dots \quad [\theta^2 < \infty].$$

См. также 818.1—818.4.

Тригонометрические функции — Производные

$$427.1. \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

$$427.4. \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\operatorname{csc}^2 x.$$

$$427.2. \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

$$427.5. \quad \frac{d \sec x}{dx} = \sec x \operatorname{tg} x.$$

$$427.3. \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x.$$

$$427.6. \quad \frac{d \operatorname{csc} x}{dx} = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x.$$

Тригонометрические функции — Интегралы

При вычислении определенных интегралов часто бывает полезно строить график подынтегральной функции. Некоторые кривые, такие как график тангенса, имеют точки разрыва. Вообще, интегрирование не должно производиться в пределах, между которыми имеется точка разрыва.

429. Подстановки:

	u	du	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	dx
(1)	$\sin x$	$\cos x \, dx$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$	$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
(2)	$\cos x$	$-\sin x \, dx$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\arccos u$	$-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
(3)	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x \, dx$	$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	u	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{du}{1+u^2}$
(4)	$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x \, dx$	$\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\frac{1}{u}$	$\sqrt{u^2-1}$	$\operatorname{arcsec} u$	$\frac{du}{u \sqrt{u^2-1}}$
(5)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx$	$\frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{1-u^2}{1+u^2}$	$\frac{2u}{1-u^2}$	$2 \operatorname{arctg} u$	$\frac{2du}{1+u^2}$

$\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ можно заменить соответственно на $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\sin x}$.

- Примечание. а) $\int F(\sin x) \cos x \, dx$, — использовать (1);
 б) $\int F(\cos x) \sin x \, dx$, — использовать (2);
 в) $\int F(\operatorname{tg} x) \sec^2 x \, dx$, — использовать (3).

Из таблицы следует выбрать подходящую подстановку для замены тригонометрических функций алгебраическими и обратно. Так, например, если встречаются только $\operatorname{tg} x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, следует применять (3).

Интегралы, содержащие $\sin x$

$$430.10. \quad \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$430.101. \quad \int \sin(a + bx) \, dx = -\frac{1}{b} \cos(a + bx).$$

$$430.102. \quad \int \sin \frac{x}{a} \, dx = -a \cos \frac{x}{a}.$$

$$430.11. \quad \int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x.$$

$$430.12. \quad \int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$$

$$430.13. \quad \int x^3 \sin x \, dx = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x.$$

$$430.14. \quad \int x^4 \sin x \, dx = (4x^3 - 24x) \sin x - (x^4 - 12x^2 + 24) \cos x.$$

$$430.15. \quad \int x^5 \sin x \, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120) \sin x - \\ - (x^5 - 20x^3 + 120x) \cos x.$$

$$430.16. \quad \int x^6 \sin x \, dx = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \sin x - \\ - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \cos x.$$

$$430.19. \quad \int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx.$$

[См. 440.]

$$430.20. \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

$$430.21. \quad \int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}.$$

$$430.22. \quad \int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}.$$

$$430.23. \quad \int x^3 \sin^2 x \, dx = \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8} \right) \sin 2x - \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16} \right) \cos 2x.$$

$$430.30. \quad \int \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x.$$

$$430.31. \quad \int x \sin^3 x \, dx = \frac{x \cos 3x}{12} - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{3}{4} \sin x.$$

(Выражая $\sin^3 x$ согласно 404.13.)

$$430.40. \quad \int \sin^4 x \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

$$430.50. \quad \int \sin^5 x \, dx = -\frac{5 \cos x}{8} + \frac{5 \cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}.$$

$$430.60. \quad \int \sin^6 x \, dx = \frac{5x}{16} - \frac{15 \sin 2x}{64} + \frac{3 \sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}.$$

$$430.70. \quad \int \sin^7 x \, dx = -\frac{35 \cos x}{64} + \frac{7 \cos 3x}{64} - \frac{7 \cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}.$$

(Интегрируя выражения из 404.)

$$431.11. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x} = \text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Таблицу численных значений этой функции см. [22].

$$431.12. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$431.13. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^3} = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 431.11.}]$$

$$431.14. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^4} = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \frac{1}{6} \int \frac{\cos x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$431.19. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{x^m} = -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{\cos x \, dx}{x^{m-1}}.$$

$$431.21. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x \, d(2x)}{2x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$431.31. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{x} = \frac{3}{4} \int \frac{\sin x \, dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{\sin 3x \, d(3x)}{3x}. \quad [\text{См. 431.11.}]$$

$$431.9. \quad \int \frac{\sin^n x \, dx}{x^n}. \quad \text{Выразить } \sin^n x \text{ согласно 404 и интегрировать почленно согласно 431.1 и 441.1.}$$

$$\begin{aligned} 432.10. \quad \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \csc x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \ln |\csc x - \operatorname{ctg} x| = \\ &= \lambda \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{лямбда-функция}). \quad [\text{См. 641 и 603.6.}] \end{aligned}$$

См. рисунок на стр. 86.

$$\begin{aligned} 432.11. \quad \int \frac{x \, dx}{\sin x} &= x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127x^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots \\ &\dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \dots \quad [\text{См. 45.}] \end{aligned}$$

$$432.12. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sin x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3!} + \frac{7x^6}{3 \cdot 6 \cdot 5!} + \frac{31x^8}{3 \cdot 8 \cdot 7!} + \frac{127x^{10}}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8!} + \dots$$

$$\dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+2)(2n)!} B_n x^{2n+2} + \dots \quad [\text{См. 45.}]$$

432.19. $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$. Разложить $\frac{1}{\sin x}$ согласно 415.06, умножить на x^m и интегрировать $[m > 0]$.

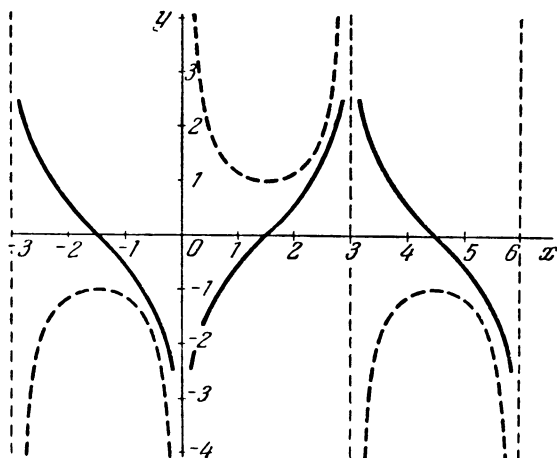


Рис. 432.10. Графики функций $y = \csc x$ (пунктирная линия) и $y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$ (сплошная линия).

$$432.20. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x.$$

$$432.21. \quad \int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$$

$$432.30. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$432.31. \quad \int \frac{x dx}{\sin^3 x} = -\frac{x \cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sin x}. \quad [\text{См. 432.11.}]$$

$$432.40. \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$$

$$432.41. \quad \int \frac{x dx}{\sin^4 x} = -\frac{x \cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{6 \sin^2 x} - \frac{2}{3} x \operatorname{ctg} x + \frac{2}{3} \ln |\sin x|.$$

$$432.50. \quad \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$432.60. \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5 \sin^5 x} - \frac{4 \cos x}{15 \sin^3 x} - \frac{8}{15} \operatorname{ctg} x.$$

$$432.90. \quad \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \csc^n x \, dx = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \quad [n > 1].$$

$$432.91. \quad \int \frac{x \, dx}{\sin^n x} = -\frac{x \cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{1}{(n-1)(n-2) \sin^{n-2} x} + \\ + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x \, dx}{\sin^{n-2} x} \quad [n > 2].$$

$$433.01. \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$433.02. \quad \int \frac{dx}{1 - \sin x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$433.03. \quad \int \frac{x \, dx}{1 + \sin x} = -x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$433.04. \quad \int \frac{x \, dx}{1 - \sin x} = x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$433.05. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x} = x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$433.06. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \sin x} = -x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$433.07. \quad \int \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$433.08. \quad \int \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$434.01. \quad \int \frac{dx}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.02. \quad \int \frac{dx}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.03. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.04. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1 - \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$434.05. \quad \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{2 \sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{3 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x + 1} \right). \quad [\text{См. 436.6.}]$$

$$434.06. \quad \int \frac{dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x. \quad [\text{См. } 442.20.]$$

$$435. \quad \int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \\ [m^2 \neq n^2. \text{ Если } m^2 = n^2, \text{ то см. } 430.20.]$$

$$436.00. \quad \int \frac{dx}{a + b \sin x} = \\ = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad [a^2 > b^2], \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| \quad [b^2 > a^2], \\ = \frac{-2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \left[b^2 > a^2, \left| a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b \right| < \sqrt{b^2 - a^2} \right], \\ = \frac{-2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arcth} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \left[b^2 > a^2, \left| a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b \right| > \sqrt{b^2 - a^2} \right].$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность (если $b^2 > a^2$) при $x = \pi + (-1)^n \arcsin \left(-\frac{a}{b} \right)$.

$$436.01. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{a + b \sin x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.02. \quad \int \frac{dx}{\sin x (a + b \sin x)} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.03. \quad \int \frac{dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{b \cos x}{(a^2 - b^2)(a + b \sin x)} + \frac{a}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$436.04. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{a \cos x}{(b^2 - a^2)(a + b \sin x)} + \frac{b}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x}. \\ [\text{К } 436.01 - 436.04 \text{ см. } 436.00.]$$

$$436.5. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} x}{a}.$$

436.6. Когда $a = b = 1$,

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x).$$

Другое выражение, отличающееся на константу, дано в 434.05.

$$\begin{aligned} 436.7. \quad \int \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} &= \frac{1}{a \sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} x}{a} \quad [a^2 > b^2], \\ &= \frac{1}{2a \sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} x + a}{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} x - a} \right| \quad [b^2 > a^2]. \end{aligned}$$

Если $b^2 = a^2$, см. 434.06.

$$437.1. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \arcsin \frac{m \cos x}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

$$437.2. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \ln |m \cos x + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}|.$$

$$\begin{aligned} 437.3. \quad \int (\sin x) \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} \, dx &= \\ &= -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} - \frac{1 + m^2}{2m} \arcsin \frac{m \cos x}{\sqrt{1 + m^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 437.4. \quad \int (\sin x) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} \, dx &= -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} - \\ &- \frac{1 - m^2}{2m} \ln |m \cos x + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}|. \end{aligned}$$

Интегралы, содержащие $\cos x$

$$440.10. \quad \int \cos x \, dx = \sin x.$$

$$440.101. \quad \int \cos(a + bx) \, dx = \frac{1}{b} \sin(a + bx).$$

$$440.102. \quad \int \cos \frac{x}{a} \, dx = a \sin \frac{x}{a}.$$

$$440.11. \quad \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x.$$

$$440.12. \quad \int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x.$$

$$440.13. \quad \int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x.$$

$$440.14. \quad \int x^4 \cos x \, dx = (4x^3 - 24x) \cos x + (x^4 - 12x^2 + 24) \sin x.$$

$$440.15. \quad \int x^5 \cos x \, dx = \\ = (5x^4 - 60x^3 + 120) \cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x) \sin x.$$

$$440.16. \quad \int x^6 \cos x \, dx = (6x^5 - 120x^4 + 720x) \cos x + \\ + (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \sin x.$$

$$440.19. \quad \int x^m \cos x \, dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x \, dx. \quad [\text{См. 430.}]$$

$$440.20. \quad \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

$$440.21. \quad \int x \cos^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}.$$

$$440.22. \quad \int x^2 \cos^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2x + \frac{x \cos 2x}{4}.$$

$$440.23. \quad \int x^3 \cos^2 x \, dx = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8} \right) \sin 2x + \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16} \right) \cos 2x.$$

$$440.30. \quad \int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$$

$$440.31. \quad \int x \cos^3 x \, dx = \frac{x \sin 3x}{12} + \frac{\cos 3x}{36} + \frac{3}{4} x \sin x + \frac{3}{4} \cos x. \\ (\cos^3 x \text{ выражается согласно 404.23.})$$

$$440.40. \quad \int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

$$440.50. \quad \int \cos^5 x \, dx = \frac{5 \sin x}{8} + \frac{5 \sin 3x}{48} + \frac{\sin 5x}{80}.$$

$$440.60. \quad \int \cos^6 x \, dx = \frac{5x}{16} + \frac{15 \sin 2x}{64} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192}.$$

$$440.70. \quad \int \cos^7 x \, dx = \frac{35 \sin x}{64} + \frac{7 \sin 3x}{64} + \frac{7 \sin 5x}{320} + \frac{\sin 7x}{448}. \\ (\text{Интегрируется выражение из 404.})$$

$$441.11. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{x} = \ln |x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots \\ \text{Таблицу численных значений см. [22].}$$

$$441.12. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{x^2} = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 431.11.}]$$

$$441.13. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{x^3} = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$441.14. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{x^4} = -\frac{\cos x}{3x^3} + \frac{\sin x}{6x^2} + \frac{\cos x}{6x} + \frac{1}{6} \int \frac{\sin x \, dx}{x}. \quad [\text{См. 431.11.}]$$

$$441.19. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{\sin x \, dx}{x^{m-1}}.$$

$$441.21. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x \, d(2x)}{2x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$441.31. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{x} = \frac{3}{4} \int \frac{\cos x \, dx}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{\cos 3x \, d(3x)}{3x}. \quad [\text{См. 441.11.}]$$

$$441.9. \quad \int \frac{\cos^n x \, dx}{x^m}.$$

Выразить $\cos^n x$ согласно 404 и интегрировать почленно согласно 441.1.

$$442.10. \quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \sec x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|, \\ &= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \\ &= \lambda(x) \text{ (лямбда-функция)}. \end{aligned} \quad [\text{См. 640.}]$$

$$442.11. \quad \begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\cos x} &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61x^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385x^{10}}{10 \cdot 8!} + \dots \\ &\dots + \frac{E_n x^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \end{aligned} \quad [\text{См. 45.}]$$

$$442.12. \quad \begin{aligned} \int \frac{x^2 \, dx}{\cos x} &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{5x^7}{7 \cdot 4!} + \frac{61x^9}{9 \cdot 6!} + \frac{1385x^{11}}{11 \cdot 8!} + \dots \\ &\dots + \frac{E_{n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-2)!} + \dots \end{aligned} \quad [\text{См. 45.}]$$

$$442.19. \quad \int \frac{x^m \, dx}{\cos x}. \text{ Разложить } \frac{1}{\cos x} \text{ согласно 415.05, умножить на } x^m \text{ и интегрировать } [m \neq 0].$$

$$442.20. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x.$$

$$442.21. \quad \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|.$$

$$442.30. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$442.31. \quad \int \frac{x \, dx}{\cos^3 x} = \frac{x \sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2} \int \frac{x \, dx}{\cos x}. \quad [\text{См. 442.11.}]$$

$$442.40. \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}.$$

$$442.41. \quad \int \frac{x dx}{\cos^3 x} = \frac{x \sin x}{3 \cos^2 x} - \frac{1}{6 \cos^2 x} + \frac{2}{3} x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \ln |\cos x|.$$

$$442.50. \quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$442.60. \quad \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4 \sin x}{15 \cos^3 x} + \frac{8}{15} \operatorname{tg} x.$$

$$442.90. \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x dx = \\ = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad [n > 1].$$

$$442.91. \quad \int \frac{x dx}{\cos^n x} = \frac{x \sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{1}{(n-1)(n-2) \cos^{n-2} x} + \\ + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\cos^{n-2} x} \quad [n > 2].$$

$$443.01. \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$443.02. \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$443.03. \quad \int \frac{x dx}{1 + \cos x} = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

$$443.04. \quad \int \frac{x dx}{1 - \cos x} = -x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

$$443.05. \quad \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} = x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$443.06. \quad \int \frac{\cos x dx}{1 - \cos x} = -x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$443.07. \quad \int \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$443.08. \quad \int \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$444.01. \quad \int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$444.02. \quad \int \frac{dx}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$444.03. \quad \int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$444.04. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$444.05. \quad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{1 - 3 \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \right). \quad [\text{См } 446.6.]$$

$$444.06. \quad \int \frac{dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x. \quad [\text{См. } 432.20.]$$

$$445. \quad \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \\ [m^2 \neq n^2. \text{ Если } m^2 = n^2, \text{ то см. } 440.20.]$$

$$446.00. \quad \int \frac{dx}{a + b \cos x} = \\ = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad [a^2 > b^2], \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b^2 - a^2}}{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b^2 - a^2}} \right| \quad [b^2 > a^2], \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arth} \frac{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \left[b^2 > a^2, \left| (b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| < \sqrt{b^2 - a^2} \right], \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Arcth} \frac{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \left[b^2 > a^2, \left| (b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| > \sqrt{b^2 - a^2} \right].$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность (если $b^2 > a^2$) при $x = 2\pi \pm \arccos \left(-\frac{a}{b} \right)$.

$$446.01. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{a + b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

$$446.02. \quad \int \frac{dx}{(a + b \cos x) \cos x} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

$$446.03. \quad \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{b \sin x}{(b^2 - a^2)(a + b \cos x)} - \frac{a}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

$$446.04. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{a \sin x}{(a^2 - b^2)(a + b \cos x)} - \frac{b}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

[К 446.01—446.04 см. 446.00.]

$$446.2. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 - 2ab \cos x} = \frac{2}{|a^2 - b^2|} \operatorname{arctg} \left[\left| \frac{a+b}{a-b} \right| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] \quad [a \neq b].$$

[См. 446.00.]

$$446.5. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad [a > 0].$$

$$446.6. \quad \text{При } a = b = 1$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right).$$

Другое выражение, отличающееся на константу, дается в 444.05.

$$446.7. \quad \int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad [a^2 > b^2, a > 0],$$

$$= \frac{1}{2a \sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} x - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} x + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| \quad [b^2 > a^2, a > 0].$$

Если $b^2 = a^2$, см. 444.06.

Интегралы, содержащие $\sin x$ и $\cos x$

$$450.11. \quad \int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} + \text{const.},$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4} + \text{const.}$$

$$450.12. \quad \int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}.$$

$$450.13. \quad \int \sin x \cos^3 x \, dx = -\frac{\cos^4 x}{4}.$$

$$450.19. \quad \int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

$$450.21. \quad \int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3}.$$

$$450.22. \quad \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right).$$

$$450.23. \quad \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15} \sin^3 x.$$

$$450.31. \quad \int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4}.$$

$$450.81. \quad \int \sin^m x \cos x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \quad [m \neq -1].$$

(При $m = -1$ см. 453.11.)

$$450.9. \quad \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx &= \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx, \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx \\ &[m \neq -n; \text{ см. 480.9}]. \end{aligned} \quad [\text{См. также 461.}]$$

$$451.11. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$451.12. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$451.13. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$451.14. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$451.15. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} = \frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$451.19. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^{n-2} x} \quad [n \neq 1].$$

$$451.21. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$451.22. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

$$451.23. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$451.24. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3 \sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3} \operatorname{ctg} 2x.$$

$$451.31. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$451.32. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$451.33. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = -\frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x} + 2 \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$451.41. \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \frac{3 \cos^2 x - 4}{3 \sin^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$451.91. \quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos x} = -\frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos x} \quad [m \neq 1].$$

$$451.92. \quad \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^n x} = 2^{n-1} \int \frac{d(2x)}{\sin^n(2x)}. \quad [\text{См. 432.}]$$

$$451.93. \quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} =$$

$$= \frac{1}{(n-1) \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} \quad [n > 1],$$

$$= -\frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} \quad [m > 1].$$

$$452.11. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x|. \quad [\text{См. 480.1.}]$$

$$452.12. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

$$452.13. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \text{const.}$$

$$452.14. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x}.$$

$$452.19. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} \quad [n \neq 1].$$

$$452.21. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos x} = -\sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$452.22. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x. \quad [\text{См. 480.2.}]$$

$$452.23. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$452.24. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x.$$

$$452.29. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad [n \neq 1].$$

$$452.31. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\cos x|.$$

$$452.32. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^2 x} = \cos x + \sec x.$$

$$452.33. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^3 x} = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x|. \quad [\text{См. 480.3.}]$$

$$452.34. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}.$$

$$452.35. \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x} + \text{const.}$$

$$452.39. \quad \int \frac{\sin^n x \, dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{1}{(n-3) \cos^{n-3} x} \quad [n \neq 1 \text{ или } 3].$$

$$452.41. \quad \int \frac{\sin^4 x \, dx}{\cos x} = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$452.7. \quad \int \frac{\sin^{n-2} x \, dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} \quad [n \neq 1].$$

$$452.8. \quad \int \frac{\sin^n x \, dx}{\cos^n x} = \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \quad [n \neq 1; \text{ см. 480.9}].$$

$$452.9. \quad \int \frac{\sin^m x \, dx}{\cos^n x} =$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x \, dx}{\cos^{n-2} x} \quad [n \neq 1],$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n) \cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin^{m-2} x \, dx}{\cos^n x} \quad [m \neq n],$$

$$= \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin^{m-2} x \, dx}{\cos^{n-2} x} \quad [n \neq 1].$$

$$453.11. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x|. \quad [\text{См. 490.1.}]$$

$$453.12. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} = -\operatorname{csc} x.$$

$$453.13. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2 \sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \text{const.}$$

$$453.14. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3 \sin^3 x}.$$

$$453.19. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} x} \quad [n \neq 1].$$

$$453.21. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin x} = \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$453.22. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x - x. \quad [\text{См. 490.2.}]$$

$$453.23. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$453.24. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x.$$

$$453.29. \quad \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \quad [n \neq 1],$$

$$453.31. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{2} + \ln |\sin x|.$$

$$453.32. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^2 x} = -\sin x - \csc x.$$

$$453.33. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^3 x} = \int \operatorname{ctg}^3 x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x|. \quad [\text{См. 490.3.}]$$

$$453.34. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x}.$$

$$453.35. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x = \frac{1}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x} + \text{const.}$$

$$453.39. \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^n x} = \frac{1}{(n-3) \sin^{n-2} x} - \frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} x} \quad [n \neq 1 \text{ или } 3].$$

$$453.41. \quad \int \frac{\cos^4 x \, dx}{\sin x} = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$453.7. \quad \int \frac{\cos^{n-2} x \, dx}{\sin^n x} = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} \quad [n \neq 1].$$

$$453.8. \quad \int \frac{\cos^n x \, dx}{\sin^n x} = \int \operatorname{ctg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx \quad [n \neq 1; \text{ см. 490.9}].$$

$$453.9. \quad \int \frac{\cos^n x \, dx}{\sin^m x} =$$

$$= -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n x \, dx}{\sin^{m-2} x} \quad [m \neq 1],$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m) \sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cos^{n-2} x \, dx}{\sin^m x} \quad [m \neq n],$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2} x \, dx}{\sin^{m-2} x} \quad [m \neq 1].$$

$$454.01. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos x} = -\ln(1 + \cos x).$$

$$454.02. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos x} = \ln(1 - \cos x).$$

$$454.03. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x} = \ln(1 + \sin x).$$

$$454.04. \quad \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin x} = -\ln(1 - \sin x).$$

$$454.05. \quad \int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2(1 + \cos x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$454.06. \int \frac{dx}{\sin x (1 - \cos x)} = -\frac{1}{2(1 - \cos x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$454.07. \int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin x)} = -\frac{1}{2(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$454.08. \int \frac{dx}{\cos x (1 - \sin x)} = \frac{1}{2(1 - \sin x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$454.09. \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x (1 + \cos x)} = \ln \left| \frac{1 + \cos x}{\cos x} \right|.$$

$$454.10. \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x (1 - \cos x)} = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\cos x} \right|.$$

$$454.11. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x (1 + \sin x)} = -\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\sin x} \right|.$$

$$454.12. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x (1 - \sin x)} = -\ln \left| \frac{1 - \sin x}{\sin x} \right|.$$

$$454.13. \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{1}{2(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$454.14. \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x (1 - \sin x)} = \frac{1}{2(1 - \sin x)} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$454.15. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x (1 + \cos x)} = -\frac{1}{2(1 + \cos x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$454.16. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x (1 - \cos x)} = -\frac{1}{2(1 - \cos x)} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$455.01. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|.$$

$$455.02. \int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right|.$$

$$455.03. \int \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x|. \quad [\text{См. 482.2 и 492.1.}]$$

$$455.04. \int \frac{\sin x \, dx}{\sin x - \cos x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x|. \quad [\text{См. 482.2 и 492.1.}]$$

$$455.05. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x|. \quad [\text{См. 482.1 и 492.2.}]$$

$$455.06. \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x - \cos x} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x|.$$

[См. 482.1 и 492.2.]

$$455.07. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$455.08. \quad \int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$455.09. \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x \pm \sin x} = \pm \ln \left| 1 \pm \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$456.1. \quad \int \frac{dx}{b \cos x + c \sin x} = \frac{1}{r} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \theta}{2} \right|,$$

где $r = \sqrt{b^2 + c^2}$, $\sin \theta = b/r$, $\cos \theta = c/r$.

[См. 401.2 и 432.10.]

$$456.2. \quad \int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} = \int \frac{d(x + \theta)}{a + r \sin(x + \theta)},$$

где r и θ даны в 456.1.

[См. 436.00.]

$$460.1. \quad \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right).$$

[См. 436.5.]

$$460.2. \quad \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b \operatorname{tg} x + a}{b \operatorname{tg} x - a} \right|.$$

[См. 436.7.]

461. $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Если одно из чисел m или n нечетное целое положительное, то следует сделать подстановку

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{и} \quad \sin x dx = -d \cos x$$

или

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{и} \quad \cos x dx = d \sin x.$$

Если оба числа m и n четные целые положительные, то следует сделать подстановки

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

и

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Получив аналогичные выражения, но с аргументом $2x$ вместо x , преобразовать их далее подобным же образом.

См. также 450.9.

$$465. \quad \int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} \\ [m^2 \neq n^2]. \quad [\text{При } m^2 = n^2 \text{ см. 450.11.}]$$

$$470.1. \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{m} \ln(m \sin x + \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}).$$

$$470.2. \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{m} \operatorname{arcsin}(m \sin x).$$

$$470.3. \quad \int (\cos x) \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} \, dx = \\ = \frac{\sin x}{2} \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} + \frac{1}{2m} \ln (m \sin x + \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}).$$

$$470.4. \quad \int (\cos x) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} \, dx = \\ = \frac{\sin x}{2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x} + \frac{1}{2m} \arcsin (m \sin x).$$

$$475.1. \quad \int f(x, \sin x) \, dx = - \int f\left(\frac{\pi}{2} - y, \cos y\right) dy, \\ \text{где } y = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$475.2. \quad \int f(x, \cos x) \, dx = - \int f\left(\frac{\pi}{2} - y, \sin y\right) dy, \\ \text{где } y = \frac{\pi}{2} - x.$$

Интегралы, содержащие $\operatorname{tg} x$

$$480.1. \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x|. \quad [\text{См. 452.11 и 603.4.}]$$

$$480.2. \quad \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x. \quad [\text{См. 452.22.}]$$

$$480.3. \quad \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x|. \quad [\text{См. 452.33.}]$$

$$480.4. \quad \int \operatorname{tg}^4 x \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$$

$$480.9. \quad \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \quad [n \neq 1; \text{ см. 452.8}].$$

$$481.1. \quad \int x \operatorname{tg} x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{2}{105} x^7 + \frac{17}{2835} x^9 + \\ + \frac{62}{11 \cdot 2835} x^{11} + \dots + \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \\ \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 415.03 и 45} \right].$$

$$481.2. \quad \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{x} = x + \frac{x^3}{9} + \frac{2}{75} x^5 + \frac{17}{2205} x^7 + \\ + \frac{62}{9 \cdot 2835} x^9 + \dots + \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n-1)(2n)!} x^{2n-1} + \dots \\ \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 415.03 и 45} \right].$$

$$482.1. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|. \\ [\text{См. 455.05 и 455.06.}]$$

$$482.2. \quad \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|. \\ \text{[См. 455.03, 455.04 и 492.1.]}$$

$$483. \quad \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x \, dx}{a \cos x + b \sin x} = \\ = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|).$$

Интегралы, содержащие $\operatorname{ctg} x$

$$490.1. \quad \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x|. \quad \text{[См. 453.11 и 603.1.]}$$

$$490.2. \quad \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x - x. \quad \text{[См. 453.22.]}$$

$$490.3. \quad \int \operatorname{ctg}^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x|. \quad \text{[См. 453.33.]}$$

$$490.4. \quad \int \operatorname{ctg}^4 x \, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x.$$

$$490.9. \quad \int \operatorname{ctg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx \quad [n \neq 1; \text{ см. 453.8}].$$

$$491.1. \quad \int x \operatorname{ctg} x \, dx = x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^5}{225} - \frac{2x^7}{6615} - \\ - \frac{x^9}{9 \cdot 4725} - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots \quad \text{[См. 415.04 и 45.]}$$

$$491.2. \quad \int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{x} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{135} - \frac{2x^5}{4725} - \\ - \frac{x^7}{7 \cdot 4725} - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n-1)(2n)!} x^{2n-1} - \dots \quad \text{[См. 415.04 и 45.]}$$

$$492.1. \quad \int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\operatorname{tg} x \pm 1}. \quad \text{[См. 482.2.]}$$

$$492.2. \quad \int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1}. \quad \text{[См. 482.1.]}$$

$$493. \quad \int \frac{dx}{a + b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\sin x \, dx}{a \sin x + b \cos x} = \\ = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax - b \ln |a \sin x + b \cos x|).$$

III.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

500. Приведенные ниже формулы относятся к главным значениям обратных тригонометрических функций: для $\arcsin x$ и $\arctg x$ в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, для $\arccos x$ и $\operatorname{arccctg} x$ от 0 до π . Интегрируя эти функции, следует выбирать пределы таким образом, чтобы между ними не было точек разрыва. Полезно предварительно построить график подынтегральной функции, так как он может состоять из нескольких ветвей.

$$501. \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и последующим интегрированием его.)

$$502. \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) \quad [x^2 < 1].$$

$$503. \quad \operatorname{arccsc} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 x^7} + \dots \quad [x^2 > 1].$$

$$504. \quad \operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 x^7} + \dots \right) \quad [x^2 > 1].$$

$$505.1. \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{1+x^2}$ и последующим интегрированием его.)

$$505.2. \quad \arctg x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \quad [x > 1].$$

$$505.3. \quad \arctg x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \quad [x < -1].$$

$$505.4. \quad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^3 + \dots \right] \quad [x^2 < \infty].$$

$$506.1. \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \quad [x^2 < 1].$$

$$506.2. \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots \quad [x > 1].$$

$$506.3. \quad \operatorname{arcctg} x = \pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots \quad [x < -1].$$

$$507.10. \quad \operatorname{Arcsin}(x \pm iy) = n\pi + (-1)^n \operatorname{arcsin} \frac{2x}{p+q} \pm \\ \pm i(-1)^n \operatorname{Arch} \frac{p+q}{2}.$$

Значения p и q см. 507.11 и 507.12.

Величина $i = \sqrt{-1}$, а n — целое число или 0. Величина x может быть положительна или отрицательна, а y — положительна.

$$507.11. \quad \text{Здесь обозначено } p = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}.$$

$$507.12. \quad \text{Здесь обозначено } q = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}.$$

Заметим, что при $y = 0$ и $x > 1$, $q = x - 1$ и $p + q = 2x$.
При $y = 0$ и $x < 1$ $q = 1 - x$ и $p + q = 2$.
Иначе:

$$507.13a. \quad \operatorname{Arcsin} A = -i \ln (\pm \sqrt{1-A^2} + iA) + 2k\pi$$

или

$$507.13b. \quad \operatorname{Arcsin} A = i \ln (\pm \sqrt{1-A^2} - iA) + 2k\pi,$$

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. 58, а о логарифме см. 604. Выражения 507.13a и 507.13b тождественны. Из них следует выбрать то, в котором не происходит потери точности при вычитании.

$$507.20. \quad \operatorname{Arccos}(x + iy) = \pm \left(\operatorname{arccos} \frac{2x}{p+q} + 2k\pi - i \operatorname{Arch} \frac{p+q}{2} \right).$$

$$507.21. \quad \operatorname{Arccos}(x - iy) = \pm \left(\operatorname{arccos} \frac{2x}{p+q} + 2k\pi + i \operatorname{Arch} \frac{p+q}{2} \right),$$

где y положительно. Здесь берется положительное значение $\operatorname{Arch} \frac{p+q}{2}$. Значения p и q см. 507.11 и 507.12.

Иначе:

$$507.22a. \operatorname{Arccos} A = \mp i \ln (A + \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi$$

или

$$507.22b. \operatorname{Arccos} A = \pm i \ln (A - \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi,$$

где A может быть комплексной величиной. См. примечание к 507.13.

$$507.30. \operatorname{Arctg} (x + iy) = \frac{1}{2} \left[(2k + 1) \pi - \operatorname{arctg} \frac{1+y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1-y}{x} \right] + \\ + \frac{i}{4} \ln \frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2}.$$

Иначе:

$$507.31. \operatorname{Arctg} (x + iy) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2-y^2} + k\pi + \frac{i}{4} \ln \frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2},$$

где k — целое число или ноль; $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2-y^2}$ берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

$$507.32. \operatorname{Arctg} (x + iy) = \frac{i}{2} \ln \frac{1+y-ix}{1-y+ix} + 2k\pi. \quad [\text{См. 604.}]$$

$$508. \text{ Для малых значений } \operatorname{arccos} x, \\ \operatorname{arccos} x = \left[2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{45}(1-x)^3 + \frac{1}{35}(1-x)^4 + \dots \right]^{1/2}.$$

Последним членом можно практически пренебречь. Численное значение квадратного корня можно брать из подробных таблиц квадратных корней (см., например, [18]).

Обратные тригонометрические функции — Производные

$$512.1. \frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$512.2. \frac{d}{dx} \arccos \frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$512.3. \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

$$512.4. \frac{d}{dx} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}.$$

$$512.5. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} = \frac{a}{x \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right].$$

$$512.6. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} = \frac{-a}{x \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].$$

$$512.7. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} = \frac{a}{x \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].$$

$$512.8. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} = \frac{-a}{x \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right].$$

($a > 0$ всюду, кроме 512.3 и 512.4.)

Обратные тригонометрические функции — Интегралы ($a > 0$)

$$515. \quad \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$516. \quad \int \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2 dx = x \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$517.1. \quad \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.2. \quad \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.3. \quad \int x^3 \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \\ + \frac{1}{32} (2x^3 + 3xa^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.4. \quad \int x^4 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \arcsin \frac{x}{a} + \\ + \frac{1}{75} (3x^4 + 4x^2a^2 + 8a^4) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.5. \quad \int x^5 \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5a^6}{96} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \\ + \frac{1}{288} (8x^5 + 10x^3a^2 + 15xa^4) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.6. \quad \int x^6 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^7}{7} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{245} (5x^6 + 6x^4a^2 + \\ + 8x^2a^4 + 16a^6) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$517.9. \quad \int x^n \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [n \neq -1].$$

[См. 321 — 327.]

$$518.1. \quad \int \frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots [x^2 < a^2].$$

$$518.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \arcsin \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$518.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \arcsin \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2x^2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2 x}.$$

$$518.4. \quad \int \frac{1}{x^4} \arcsin \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{3x^3} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{6a^2 x^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$518.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \arcsin \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2}} \quad [n \neq 1] \quad [\text{См. 341—346.}]$$

$$520. \quad \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$521. \quad \int \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^2 dx = x \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2 - x^2} \arccos \frac{x}{a}.$$

$$522.1. \quad \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.2. \quad \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.3. \quad \int x^3 \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{32} (2x^3 + 3xa^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.4. \quad \int x^4 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{75} (3x^4 + 4x^2 a^2 + 8a^4) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.5. \quad \int x^5 \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5a^4}{96} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{288} (8x^5 + 10x^3 a^2 + 15xa^4) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.6. \quad \int x^6 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^7}{7} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{245} (5x^6 + 6x^4 a^2 + 8x^2 a^4 + 16a^6) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$522.9. \quad \int x^n \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [n \neq -1]. \quad [\text{См. 321—327.}]$$

$$523.1. \quad \int \frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{\pi}{2} \ln |x| - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} - \dots [x^2 < a^2].$$

$$523.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \arccos \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$523.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \arccos \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2x^2} \arccos \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2 x}.$$

$$523.4. \quad \int \frac{1}{x^4} \arccos \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{3x^3} \arccos \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{6a^2 x^2} + \\ + \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

$$523.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \arccos \frac{x}{a} - \\ - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2}} \quad [n \neq 1]. \quad [\text{См. 341—346.}]$$

$$525. \quad \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$$

$$525.1. \quad \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$$

$$525.2. \quad \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$$

$$525.3. \quad \int x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} (x^4 - a^4) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3 x}{4}.$$

$$525.4. \quad \int x^4 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^4}{20} + \frac{a^3 x^2}{10} - \frac{a^5}{10} \ln (a^2 + x^2).$$

$$525.5. \quad \int x^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{6} (x^6 + a^6) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^5}{30} + \frac{a^3 x^3}{18} - \frac{a^5 x}{6}.$$

$$525.6. \quad \int x^6 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^7}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^6}{42} + \frac{a^3 x^4}{28} - \frac{a^5 x^2}{14} + \\ + \frac{a^7}{14} \ln (a^2 + x^2).$$

$$525.9. \quad \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{a^2 + x^2} \quad [n \neq -1]. \\ [\text{См. 121—128.}]$$

$$\begin{aligned}
 526.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} - \frac{x^7}{7^2 a^7} + \dots \quad [x^2 < a^2], \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln |x| + \frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2 x^3} + \frac{a^5}{5^2 x^5} - \frac{a^7}{7^2 x^7} + \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right], \\
 &= -\frac{\pi}{2} \ln |x| + \frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2 x^3} + \frac{a^5}{5^2 x^5} - \frac{a^7}{7^2 x^7} + \dots \quad \left[\frac{x}{a} < -1 \right].
 \end{aligned}$$

$$526.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$526.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

$$526.4. \quad \int \frac{1}{x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^2} + \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$526.5. \quad \int \frac{1}{x^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} + \frac{1}{4a^5 x}.$$

$$\begin{aligned}
 526.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \\
 &\quad [n \neq 1]. \quad [\text{См. 131—135.}]
 \end{aligned}$$

$$528. \quad \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$528.1. \quad \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

$$528.2. \quad \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2).$$

$$528.3. \quad \int x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} (x^4 - a^4) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} - \frac{a^3 x}{4}.$$

$$528.4. \quad \int x^4 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^4}{20} - \frac{a^3 x^2}{10} + \frac{a^5}{10} \ln(a^2 + x^2).$$

$$528.5. \quad \int x^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{6} (x^6 + a^6) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^5}{30} - \frac{a^3 x^3}{18} + \frac{a^5 x}{6}.$$

$$\begin{aligned}
 528.6. \quad \int x^6 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^7}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^6}{42} - \frac{a^3 x^4}{28} + \\
 &\quad + \frac{a^5 x^2}{14} - \frac{a^7}{14} \ln(a^2 + x^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 528.9. \quad \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{a^2 + x^2} \quad [n \neq -1]. \\
 &\quad [\text{См. 121—128.}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 529.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= \frac{\pi}{2} \ln |x| - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \dots \\
 &\quad [x^2 < a^2], \\
 &= -\frac{a}{x} + \frac{a^3}{3^2 x^3} - \frac{a^5}{5^2 x^5} + \frac{a^7}{7^2 x^7} - \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right], \\
 &= \pi \ln |x| - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3^2 x^3} - \frac{a^5}{5^2 x^5} + \frac{a^7}{7^2 x^7} - \dots \\
 &\quad \left[\frac{x}{a} < -1 \right].
 \end{aligned}$$

$$529.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$529.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2ax} + \frac{1}{a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$529.4. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{6ax^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 529.5. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{4x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{12ax^3} - \\
 &\quad - \frac{1}{4a^3 x} - \frac{1}{4a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 529.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \\
 &\quad - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \quad [n \neq 1]. \quad [\text{См. 131—135.}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 531. \quad \int \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 531.1. \quad \int x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 531.2. \quad \int x^2 \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \\
 &- \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 531.9. \quad \int x^n \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], [n \neq -1], \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right], \\
 &\quad [n \neq -1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 532.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \frac{\pi}{2} \ln |x| + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{2 \cdot 3 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3a^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5x^5} + \\
 &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5a^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7x^7} + \dots \quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 532.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{x} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{x} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 532.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{4ax^2} + \frac{1}{4a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{4ax^2} - \frac{1}{4a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 532.4. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{(2x^2 + a^2)}{9a^3 x^3} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{(2x^2 + a^2)}{9a^3 x^3} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 532.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right] [n \neq 1], \\
 &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \right], [n \neq 1].
 \end{aligned}$$

В формулах 531—532.9, $x^2 > a^2$.

$$\begin{aligned}
 534. \quad \int \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= x \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|, \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= x \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 534.1. \quad \int x \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 534.2. \quad \int x^3 \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 534.9. \quad \int x^n \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \quad [n \neq -1], \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right], \quad [n \neq -1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 535.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= - \left(\frac{a}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{a^5}{x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{a^7}{x^7} + \dots \right) \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} x < \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 535.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{x} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{x} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 535.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{4ax^2} - \frac{1}{4a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{4ax^2} + \frac{1}{4a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 535.4. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{(2x^2 + a^2)}{9a^3 x^3} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{(2x^2 + a^2)}{9a^3 x^3} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 535.9. \quad \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0 \right], [n \neq 1], \\
 &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right], [n \neq 1].
 \end{aligned}$$

В формулах 534—535.9 $x^2 > a^2$.

IV.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

$$550. \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$550.1. \quad a^x = e^{x \ln a} = \\ = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$550.2. \quad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$551. \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \frac{B_4 x^8}{8!} + \dots \\ [x^2 < 4\pi^2; \text{ см. 45}].$$

$$552.1. \quad e^{\sin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{3u^4}{4!} - \frac{8u^5}{5!} - \frac{3u^6}{6!} + \frac{56u^7}{7!} + \dots \quad [u^2 < \infty].$$

$$552.2. \quad e^{\cos u} = e \left[1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{4u^4}{4!} - \frac{31u^6}{6!} + \dots \right] \quad [u^2 < \infty].$$

$$552.3. \quad e^{\lg u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{3u^3}{3!} + \frac{9u^4}{4!} + \frac{37u^5}{5!} + \dots \quad \left[u^2 < \frac{\pi^2}{4} \right].$$

$$552.4. \quad e^{\arcsin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{2u^3}{3!} + \frac{5u^4}{4!} + \dots \quad [u^2 < 1].$$

$$552.5. \quad e^{\operatorname{arctg} u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} - \frac{7u^4}{4!} + \frac{5u^5}{5!} + \dots \quad [u^2 < 1].$$

Общий член этого ряда $u_n = \frac{a_n u^n}{n!}$, где

$$552.6. \quad e^{-x^2} + e^{-2^2 x^2} + e^{-3^2 x^2} + \dots = \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} \left[\frac{1}{2} + e^{-\pi^2/x^2} + e^{-2^2 \pi^2/x^2} + e^{-3^2 \pi^2/x^2} + \dots \right].$$

Второй ряд может сходиться быстрее первого.

$$553. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \text{ для любого } n.$$

Показательные функции — Производные

$$563. \quad \frac{de^x}{dx} = e^x. \quad 563.1. \quad \frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}. \quad 563.2. \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a.$$

$$563.3. \quad \frac{da^{cx}}{dx} = ca^{cx} \ln a. \quad 563.4. \quad \frac{da^y}{dx} = a^y (\ln a) \frac{dy}{dx},$$

где a — константа.

$$563.5. \quad \frac{du^y}{dx} = yu^{y-1} \frac{du}{dx} + u^y (\ln u) \frac{dy}{dx}.$$

$$563.6. \quad \frac{dx^y}{dx} = yx^{y-1} + x^y (\ln x) \frac{dy}{dx}.$$

$$563.7. \quad \frac{dx^x}{dx} = x^x (1 + \ln x).$$

Показательные функции — Интегралы

$$565. \quad \int e^x dx = e^x. \quad 565.1. \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$565.2. \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \quad 565.3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

$$566. \quad \int f(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{f(z) dz}{z},$$

где $z = e^{ax}$. Заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{и} \quad a^{cx} = e^{cx \ln a}.$$

$$567.1. \quad \int x e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right].$$

$$567.2. \quad \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right].$$

$$567.3. \quad \int x^3 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right].$$

$$567.8. \quad \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$567.9. \quad \int x^n e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{n! x}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \right] \quad [n \geq 0].$$

$$568.1. \quad \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \\ = \ln |x| + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2 x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3 x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{a^n x^n}{n \cdot n!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

568.11. Для $\int \frac{c^x dx}{x}$ следует заметить, что $c^x = e^{x \ln c}$.

$$568.2. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^2} = -\frac{e^{ax}}{x} + a \int \frac{e^{ax} dx}{x}. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$568.3. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^3} = -\frac{e^{ax}}{2x^2} - \frac{ae^{ax}}{2x} + \frac{a^2}{2} \int \frac{e^{ax} dx}{x}. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$568.8. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax} dx}{x^{n-1}} \quad [n > 1].$$

$$568.9. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{ae^{ax}}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \dots \\ \dots - \frac{a^{n-2}e^{ax}}{(n-1)!x} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \int \frac{e^{ax} dx}{x} \\ [n > 1]. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

$$569. \quad \int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) = \ln \frac{e^x}{1+e^x}.$$

$$569.1. \quad \int \frac{dx}{a+be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap} \ln |a+be^{px}|.$$

$$570. \quad \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$570.1. \quad \int \frac{xe^{ax} dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$$

$$575.1. \quad \int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x).$$

$$575.2. \quad \int e^{ax} \sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \left(a \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \frac{2}{a} \right).$$

$$575.3. \quad \int e^{ax} \sin^3 x dx = \\ = \frac{e^{ax}}{a^2+9} \left[a \sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + \frac{6(a \sin x - \cos x)}{a^2+1} \right].$$

$$575.9. \quad \int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2+n^2} (a \sin x - n \cos x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx.$$

$$576.1. \quad \int e^{ax} \cos x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \cos x + \sin x).$$

$$576.2. \quad \int e^{ax} \cos^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \left(a \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \frac{2}{a} \right).$$

$$576.3. \quad \int e^{ax} \cos^3 x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 9} \left[a \cos^3 x + 3 \sin x \cos^2 x + \right. \\ \left. + \frac{6(a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1} \right].$$

$$576.9. \quad \int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx.$$

$$577.1. \quad \int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx).$$

$$577.2. \quad \int e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \cos nx + n \sin nx).$$

V.

ИНТЕГРАЛЫ ВЕРОЯТНОСТИ

585. Интеграл вероятности $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt = \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}} =$
[см. 590]

$$= x \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \right] \quad [x^2 < \infty].$$

586. Для больших значений x можно пользоваться следующим асимптотическим рядом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt &\approx \\ &\approx 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{e^{-x^2/2}}{x} \left[1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{x^8} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Ошибка окажется меньше последнего взятого члена.

590. Иногда интегралом вероятности называют функцию

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{2! \cdot 5} - \frac{x^6}{3! \cdot 7} + \dots \right] \quad [x^2 < \infty]. \end{aligned}$$

591. $\operatorname{erf} x \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{x \sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots \right].$

592. Другой вид того же ряда:

$$\operatorname{erf} x \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{x \sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{2!}{1! (2x)^2} + \frac{4!}{2! (2x)^4} - \frac{6!}{3! (2x)^6} + \dots \right];$$

Ошибка оказывается меньше последнего взятого члена.

Таблицы значений интеграла вероятности см. [196].

VI.

ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этих алгебраических выражениях $\ln$ обозначает натуральный, или Неперов, логарифм, а $\lg$ — десятичный логарифм.

$$600. \quad \ln a = 2,3026 \lg a. \quad 600.1. \quad \lg a = 0,43429 \ln a.$$

$$601. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad [-1 < x \leq 1].$$

При $x=1$ отсюда получается известный ряд:

$$601.01. \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$601.1. \quad \ln(1-x) = - \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right] \quad [-1 \leq x < 1].$$

$$601.2. \quad \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right], \\ = 2 \operatorname{Arth} x \quad [x^2 < 1]. \quad [\text{См. 708.}]$$

$$601.3. \quad \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \right], \\ = 2 \operatorname{Arcth} x \quad [x^2 > 1]. \quad [\text{См. 709.}]$$

$$601.4. \quad \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \\ = 2 \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \dots \right] \quad [(2x+1)^2 > 1].$$

$$601.41. \quad \ln(x+a) = \ln x + 2 \left[\frac{a}{2x+a} + \frac{a^3}{3(2x+a)^3} + \frac{a^5}{5(2x+a)^5} + \dots \right] \\ [a^2 < (2x+a)^2].$$

$$601.5. \quad \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \\ [0 < x \leq 2].$$

$$601.6. \quad \ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots \quad \left[x > \frac{1}{2} \right].$$

$$601.7. \quad \ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right] \quad [x > 0].$$

$$\begin{aligned} 602.1. \quad \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right) &= \\ &= \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots \quad [x^2 < a^2], \\ &= \ln \frac{2x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{a^6}{x^6} - \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right], \\ &= -\ln \left| \frac{2x}{a} \right| - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{a^6}{x^6} + \dots \quad \left[\frac{x}{a} < -1 \right], \\ &= \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \operatorname{Arcsch} \frac{a}{x}. \quad [\text{См. 706.}] \end{aligned}$$

$$602.2. \quad \ln \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} - \frac{x}{a} \right) = -\ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right).$$

Ряд из 602.1 умножить на -1 .

$$\begin{aligned} 602.3. \quad \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) &= \ln \frac{2x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} - \\ &- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{a^6}{x^6} - \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right]. \quad [\text{См. 260.01 и 707.}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 602.4. \quad \ln \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) &= \\ &= -\ln \frac{2x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{a^6}{x^6} + \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right], \\ &= -\ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right). \quad [\text{См. 602.3 и 707.}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 602.5. \quad \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right) &= \\ &= \frac{a}{x} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{a^5}{x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \frac{a^7}{x^7} + \dots \quad [x^2 > a^2], \\ &= \ln \frac{2a}{x} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{x^6}{a^6} - \dots \quad \left[\frac{a}{x} > 1 \right], \\ &= -\ln \left| \frac{2a}{x} \right| - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{x^4}{a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{x^6}{a^6} + \dots \quad \left[\frac{a}{x} < -1 \right], \\ &= \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} = \operatorname{Arsh} \frac{a}{x}. \quad [\text{См. 602.1 и 711.}] \end{aligned}$$

$$602.6. \quad \ln \left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} - \frac{a}{x} \right) = -\ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right).$$

Ряд из 602.5 умножить на -1 .

$$602.7. \quad \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} \right) = \\ = \ln \frac{2a}{x} - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{x^4}{a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{x^6}{a^6} - \dots \quad \left[\frac{a}{x} > 1 \right].$$

$$602.8. \quad \ln \left(\frac{a}{x} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} \right) = \\ = -\ln \frac{2a}{x} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{x^6}{a^6} + \dots \quad \left[\frac{a}{x} > 1 \right], \\ = -\ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} \right). \quad [\text{См. 710.}]$$

$$603.1. \quad \ln |\sin x| = \ln |x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n (2n)!} - \dots \\ [x^2 < \pi^2].$$

(Интегрируя 415.04. См. 490.1 и 45.)

$$603.2. \quad \ln |\sin x| = -\ln 2 - \cos 2x - \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 6x}{3} - \dots \\ [0 < x^2 < \pi^2].$$

$$603.3. \quad \ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n (2n)!} - \dots \\ \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right]. \quad (\text{Интегрируя 415.03. См. 489.1 и 45.})$$

$$603.4. \quad \ln |\cos x| = -\ln 2 + \cos 2x - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 6x}{3} - \dots \\ [0 < x^2 < \pi^2/4].$$

$$603.5. \quad \ln \cos x = \\ = -\frac{1}{2} \left[\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^8 x}{4} + \dots \right] \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right].$$

$$603.6. \quad \ln |\operatorname{tg} x| = \ln |x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7}{90} x^4 + \frac{62}{2835} x^6 + \dots \\ \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n (2n)!} + \dots \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right]. \\ [\text{См. 415.06, 432.10 и 45.}]$$

$$604. \quad \ln(x+iy) = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \text{ где } r = \sqrt{x^2+y^2}, \cos \theta = x/r, \\ \sin \theta = y/r, k - \text{целое число или } 0, r - \text{положительно,} \\ i = \sqrt{-1}.$$

$$604.05. \quad x+iy = re^{i(\theta+2\pi k)} \quad [\theta \text{ в радианах}]. \quad [\text{См. 604.}]$$

$$604.1. \quad \ln(-1) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i. \quad [\text{См. 499.03.}]$$

$$605. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0. \quad [\text{См. 72.}]$$

Логарифмические функции — Интегралы

Здесь всюду x и a положительны (если нет особой оговорки).

$$610. \quad \int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

$$610.01. \quad \int \ln(ax) \, dx = x \ln(ax) - x.$$

$$610.1. \quad \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

$$610.2. \quad \int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}.$$

$$610.3. \quad \int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16}.$$

$$610.9. \quad \int x^p \ln(ax) \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(ax) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} \quad [p \neq -1].$$

$$611.1. \quad \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

$$611.11. \quad \int \frac{\ln(ax)}{x} \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \ln(ax) \right\}^2.$$

$$611.2. \quad \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}. \quad 611.3. \quad \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$$

$$611.9. \quad \int \frac{\ln(ax)}{x^p} \, dx = -\frac{\ln(ax)}{(p-1)x^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)^2 x^{p-1}} \quad [p \neq 1].$$

$$612. \quad \int (\ln x)^2 \, dx = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$$

$$612.1. \quad \int x (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}.$$

$$612.2. \quad \int x^2 (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27}.$$

$$612.9. \quad \int x^p (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^2 - \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^2} \ln x + \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^3} \quad [p \neq -1].$$

$$613.1. \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^3}{3}.$$

$$613.2. \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x^2} \, dx = -\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}.$$

$$613.3. \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x^3} \, dx = -\frac{(\ln x)^2}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$$

$$613.9. \quad \int \frac{(\ln x)^2 dx}{x^p} = -\frac{(\ln x)^2}{(p-1)x^{p-1}} - \frac{2 \ln x}{(p-1)^2 x^{p-1}} - \frac{2}{(p-1)^3 x^{p-1}} \quad [p \neq 1].$$

$$614. \quad \int (\ln x)^3 dx = x (\ln x)^3 - 3x (\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x.$$

$$615. \quad \int (\ln x)^q dx = x (\ln x)^q - q \int (\ln x)^{q-1} dx \quad [q \neq -1].$$

$$616.1. \quad \int \frac{(\ln x)^q dx}{x} = \frac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} \quad [q \neq -1].$$

$$616.2. \quad \int x^p (\ln x)^q dx = \frac{x^{p+1} (\ln x)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1} \int x^p (\ln x)^{q-1} dx \quad [p, q \neq -1].$$

$$616.3. \quad \int \frac{(\ln x)^q dx}{x^p} = \frac{-(\ln x)^q}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{q}{p-1} \int \frac{(\ln x)^{q-1} dx}{x^p} \quad [p, -q \neq 1].$$

$$617. \quad \int \frac{dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$617.1. \quad \int \frac{x dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + 2 \ln x + \frac{(2 \ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2 \ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$617.2. \quad \int \frac{x^2 dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + 3 \ln x + \frac{(3 \ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(3 \ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$617.9. \quad \int \frac{x^p dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + (p+1) \ln x + \frac{(p+1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(p+1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$\left[= \int \frac{e^y dy}{y}, \text{ где } y = (p+1) \ln x; \text{ см. } 568.1 \right].$$

$$618.1. \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x|.$$

$$618.2. \quad \int \frac{dx}{x^2 \ln x} = \ln |\ln x| - \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$618.3. \quad \int \frac{dx}{x^3 \ln x} = \ln |\ln x| - 2 \ln x + \frac{(2 \ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2 \ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$618.9. \quad \int \frac{dx}{x^p \ln x} = \ln |\ln x| - (p-1) \ln x + \frac{(p-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(p-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$619.1. \quad \int \frac{dx}{x (\ln x)^q} = \frac{-1}{(q-1) (\ln x)^{q-1}} \quad [q \neq 1].$$

$$619.2. \quad \int \frac{x^p dx}{(\ln x)^q} = \frac{-x^{p+1}}{(q-1) (\ln x)^{q-1}} + \frac{p+1}{q-1} \int \frac{x^p dx}{(\ln x)^{q-1}} \quad [q \neq 1].$$

$$619.3. \quad \int \frac{dx}{x^p (\ln x)^q} = \frac{-1}{x^{p-1} (q-1) (\ln x)^{q-1}} - \frac{p-1}{q-1} \int \frac{dx}{x^p (\ln x)^{q-1}} \quad [q \neq 1].$$

$$620. \quad \int \ln(a+bx) dx = \frac{a+bx}{b} \ln(a+bx) - x.$$

$$620.1. \quad \int x \ln(a+bx) dx = \frac{b^2 x^2 - a^2}{2b^2} \ln(a+bx) + \frac{ax}{2b} - \frac{x^2}{4}.$$

$$621.1. \quad \int \frac{\ln(a+bx) dx}{x} =$$

$$= (\ln a) \ln x + \frac{bx}{a} - \frac{b^2 x^2}{2a^2} + \frac{b^3 x^3}{3a^3} - \frac{b^4 x^4}{4a^4} + \dots \quad [b^2 x^2 < a^2],$$

$$= \frac{(\ln bx)^2}{2} - \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2b^2 x^2} - \frac{a^3}{3b^3 x^3} + \frac{a^4}{4b^4 x^4} - \dots \quad [b^2 x^2 > a^2].$$

$$621.2. \quad \int \frac{\ln(a+bx) dx}{x^2} = \frac{b}{a} \ln x - \left(\frac{1}{x} + \frac{b}{a} \right) \ln(a+bx).$$

$$621.9. \quad \int \frac{\ln(a+bx) dx}{x^p} = -\frac{\ln(a+bx)}{(p-1)x^{p-1}} + \int \frac{b dx}{(p-1)(a+bx)x^{p-1}}$$

[p \neq 1]. [См. 101—105.]

$$622. \quad \int \frac{\ln x dx}{a+bx} = \frac{(\ln x) \ln(a+bx)}{b} - \int \frac{\ln(a+bx) dx}{bx}. \quad [\text{См. 621.1.}]$$

$$623. \quad \int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$623.1. \quad \int x \ln(x^2+a^2) dx = \frac{1}{2} \left[(x^2+a^2) \ln(x^2+a^2) - x^2 \right].$$

$$623.2. \quad \int x^3 \ln(x^2+a^2) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[x^3 \ln(x^2+a^2) - \frac{2}{3} x^3 + 2xa^2 - 2a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$

$$623.3. \quad \int x^5 \ln(x^2+a^2) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left[(x^4-a^4) \ln(x^2+a^2) - \frac{x^4}{2} + x^2 a^2 \right].$$

$$623.4. \quad \int x^6 \ln(x^2+a^2) dx = \frac{1}{5} \left[x^5 \ln(x^2+a^2) - \frac{2}{5} x^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} x^3 a^2 - 2xa^4 + 2a^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$

$$623.5. \quad \int x^6 \ln(x^2+a^2) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \left[(x^6+a^6) \ln(x^2+a^2) - \frac{x^6}{3} + \frac{x^4 a^2}{2} - x^2 a^4 \right].$$

$$623.6. \quad \int x^5 \ln(x^2 + a^2) dx = \frac{1}{7} \left[x^7 \ln(x^2 + a^2) - \frac{2}{7} x^7 + \right. \\ \left. + \frac{2}{5} x^5 a^2 - \frac{2}{3} x^3 a^4 + 2x a^6 - 2a^7 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$

$$623.7. \quad \int x^7 \ln(x^2 + a^2) dx = \frac{1}{8} \left[(x^8 - a^8) \ln(x^2 + a^2) - \right. \\ \left. - \frac{x^8}{4} + \frac{x^6 a^2}{3} - \frac{x^4 a^4}{2} + x^2 a^6 \right].$$

$$624. \quad \int \ln|x^2 - a^2| dx = x \ln|x^2 - a^2| - 2x + a \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|.$$

$$624.1. \quad \int x \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{2} [(x^2 - a^2) \ln|x^2 - a^2| - x^2].$$

$$624.2. \quad \int x^2 \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{3} \left[x^3 \ln|x^2 - a^2| - \frac{2}{3} x^3 - \right. \\ \left. - 2x a^2 + a^3 \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right].$$

$$624.3. \quad \int x^3 \ln|x^2 - a^2| dx = \\ = \frac{1}{4} \left[(x^4 - a^4) \ln|x^2 - a^2| - \frac{x^4}{2} - x^2 a^2 \right].$$

$$624.4. \quad \int x^4 \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{5} \left[x^5 \ln|x^2 - a^2| - \frac{2}{5} x^5 - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} x^3 a^2 - 2x a^4 + a^5 \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right].$$

$$624.5. \quad \int x^5 \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{6} \left[(x^6 - a^6) \ln|x^2 - a^2| - \right. \\ \left. - \frac{x^6}{3} - \frac{x^4 a^2}{2} - x^2 a^4 \right].$$

$$624.6. \quad \int x^6 \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{7} \left[x^7 \ln|x^2 - a^2| - \frac{2}{7} x^7 - \right. \\ \left. - \frac{2}{5} x^5 a^2 - \frac{2}{3} x^3 a^4 - 2x a^6 + a^7 \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right].$$

$$624.7. \quad \int x^7 \ln|x^2 - a^2| dx = \frac{1}{8} \left[(x^8 - a^8) \ln|x^2 - a^2| - \right. \\ \left. - \frac{x^8}{4} - \frac{x^6 a^2}{3} - \frac{x^4 a^4}{2} - x^2 a^6 \right].$$

Эти же выражения могут применяться к интегралам типа

$$\int x^p \ln(a^2 - x^2) dx.$$

Интегралы, содержащие $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$

Здесь всюду $r > 0$

$$625. \quad \int \ln(x+r) dx = x \ln(x+r) - r. \quad [\text{См. 730.}]$$

$$625.1. \quad \int x \ln(x+r) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right) \ln(x+r) - \frac{xr}{4}. \quad [\text{См. 730.1.}]$$

$$625.2. \quad \int x^2 \ln(x+r) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x+r) - \frac{r^3}{9} + \frac{a^2 r}{3}. \quad [\text{См. 730.2.}]$$

$$625.3. \quad \int x^3 \ln(x+r) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right) \ln(x+r) - \frac{x^2 r}{16} + \frac{3}{32} a^2 x r. \\ [\text{См. 730.3.}]$$

$$625.4. \quad \int x^4 \ln(x+r) dx = \frac{x^5}{5} \ln(x+r) - \frac{r^5}{25} + \frac{2}{15} a^2 r^3 - \frac{a^4 r}{5}. \\ [\text{См. 730.4.}]$$

$$625.9. \quad \int x^p \ln(x+r) dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x+r) - \frac{1}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{r} \\ [p \neq -1]. \quad [\text{См. 201.01—207.01 и 730.9.}]$$

$$626.1. \quad \int \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right) dx = \\ = \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots \quad [x^2 < a^2]. \\ = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2^3} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{a^4}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{a^6}{x^6} + \dots \quad [x/a > 1]. \\ = -\frac{1}{2} \left(\ln \left|\frac{2x}{a}\right|\right)^2 + \frac{1}{2^3} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{a^6}{x^6} - \dots \\ [x/a < -1]. \quad [\text{См. 731.1.}]$$

$$626.2. \quad \int \frac{\ln(x+r)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+r)}{x} - \frac{1}{a} \ln \left|\frac{a+r}{x}\right|, \text{ где } r = (x^2 + a^2)^{1/2}. \\ [\text{См. 731.2.}]$$

$$626.3. \quad \int \frac{\ln(x+r)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+r)}{2x^2} - \frac{r}{2a^2 x}. \quad [\text{См. 731.3.}]$$

$$626.9. \quad \int \frac{\ln(x+r)}{x^p} dx = -\frac{\ln(x+r)}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1} r} \quad [p \neq 1]. \\ [\text{См. 221.01—226.01 и 731.9.}]$$

Интегралы, содержащие $s = (x^2 - a^2)^{1/2}$

Здесь всюду $s > 0$.

$$627. \quad \int \ln(x+s) dx = x \ln(x+s) - s. \quad [\text{См. 732.}]$$

$$627.1. \quad \int x \ln(x+s) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \ln(x+s) - \frac{xs}{4}. \quad [\text{См. 732.1.}]$$

$$627.2. \quad \int x^2 \ln(x+s) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x+s) - \frac{s^2}{9} - \frac{a^2 s}{3}. \quad [\text{См. 732.2.}]$$

$$627.3. \quad \int x^3 \ln(x+s) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32} \right) \ln(x+s) - \\ - \frac{x^2 s}{16} - \frac{3}{32} a^2 x s. \quad [\text{См. 732.3.}]$$

$$627.4. \quad \int x^4 \ln(x+s) dx = \frac{x^5}{5} \ln(x+s) - \frac{s^3}{25} - \frac{2}{15} a^2 s^2 - \frac{a^4 s}{5}. \\ [\text{См. 732.4.}]$$

$$627.9. \quad \int x^p \ln(x+s) dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x+s) - \frac{1}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{s} \quad [p \neq -1]. \\ [\text{См. 261.01—267.01 и 732.9.}]$$

$$628.1. \quad \int \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{1}{2^3} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{a^4}{x^4} + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{a^6}{x^6} + \dots \quad [x/a > 1]. \quad [\text{См. 733.1.}]$$

$$628.2. \quad \int \frac{\ln(x+s)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+s)}{x} + \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| \\ [0 < \operatorname{arcsec} |x/a| < \pi/2]. \quad [\text{См. 733.2.}]$$

$$628.3. \quad \int \frac{\ln(x+s)}{x^3} dx = -\frac{\ln(x+s)}{2x^2} + \frac{s}{2a^2 x}. \quad [\text{См. 733.3.}]$$

$$628.9. \quad \int \frac{\ln(x+s)}{x^p} dx = -\frac{\ln(x+s)}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1}s} \quad [p \neq 1]. \\ [\text{См. 281.01—284.01 и 733.9.}]$$

$$630.1. \quad \int \ln \sin x dx = x \ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \\ - \frac{x^7}{19845} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \dots \quad [0 < x < \pi]. \\ [\text{См. 45.}] \quad [\text{Интегрируя 603.1.}] \\ = -x \ln 2 - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{2 \cdot 2^2} - \frac{\sin 6x}{2 \cdot 3^2} - \dots \\ [0 < x < \pi]. \quad [\text{Интегрируя 603.2.}]$$

$$639.2. \quad \int \ln \cos x \, dx = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{60} - \frac{x^6}{315} - \frac{17x^8}{22680} - \dots -$$

$$-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots \quad [x^2 < \pi^2/4]. \quad [\text{См. 45.}]$$

[Интегрируя 603.3.]

$$= -x \ln 2 + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{2 \cdot 2^2} + \frac{\sin 6x}{2 \cdot 3^2} - \dots$$

[$x^2 < \pi^2/4$]. [Интегрируя 603.4.]

$$630.3. \quad \int \ln \operatorname{tg} x \, dx = x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} +$$

$$+ \frac{62x^7}{19845} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$$

[$0 < x < \pi/2$]. [См. 45.] [Интегрируя 603.6.]

$$631.1. \quad \int \sin \ln x \, dx = \frac{1}{2} x \sin \ln x - \frac{1}{2} x \cos \ln x.$$

$$631.2. \quad \int \cos \ln x \, dx = \frac{1}{2} x \sin \ln x + \frac{1}{2} x \cos \ln x.$$

$$632. \quad \int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx. \quad [\text{См. 568.1.}]$$

Лямбда-функция и гудерманиан

$$640. \quad \text{Если } x = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \ln (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta), \text{ то } \theta \text{ называют}$$

гудерманианом x : $\theta = \operatorname{gd} x = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2}$.

$$641.*) \quad x = \operatorname{gd}^{-1} \theta = \lambda(\theta) \text{ — лямбда-функция.}$$

$$642.1. \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \theta. \quad 642.2. \quad \operatorname{ch} x = \sec \theta.$$

$$642.3. \quad \operatorname{th} x = \sin \theta. \quad 642.4. \quad \operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

$$642.5. \quad \frac{d \operatorname{gd} x}{dx} = \operatorname{sech} x. \quad 642.6. \quad \frac{d \operatorname{gd}^{-1} x}{dx} = \sec x \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right].$$

Если имеется таблица θ в зависимости от x , то можно находить гиперболические функции по таблице тригонометрических.

*) gd^{-1} означает функцию, обратную гудерманиану.

VII.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$650.01. \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$650.02. \quad \begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} & [x > 0], \\ &= -\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} & [x < 0]. \end{aligned}$$

$$650.03. \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}. \quad 650.05. \quad \operatorname{sech} x = 1/\operatorname{ch} x.$$

$$650.04. \quad \operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x. \quad 650.06. \quad \operatorname{csch} x = 1/\operatorname{sh} x.$$

$$650.07. \quad \operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1.$$

$$650.08. \quad \operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1.$$

$$650.09. \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

$$650.10. \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$$

$$650.11. \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

$$651.01. \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

$$651.02. \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

$$651.03. \quad 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y).$$

$$651.04. \quad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y).$$

$$651.05. \quad 2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y).$$

$$651.06. \quad \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

$$651.07. \quad \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}.$$

$$651.08. \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

$$651.09. \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

$$651.10. \quad \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y) \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y.$$

$$651.11. \quad \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

$$651.12. \quad \operatorname{csch}^2 x - \operatorname{sech}^2 x = \operatorname{csch}^2 x \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$651.13. \quad (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx.$$

$$651.14. \quad \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$652.12. \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

$$652.13. \quad \operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x.$$

$$652.22. \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$$

$$652.23. \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x.$$

$$652.3. \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1).$$

$$652.4. \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1).$$

$$652.5. \quad \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)} \quad [x > 0],$$

$$= - \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)} \quad [x < 0].$$

$$652.6. \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + 1)}.$$

$$653.1. \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$653.2. \quad \operatorname{th} \left(\frac{x \pm y}{2} \right) = \frac{\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y}.$$

$$653.3. \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

$$653.4. \quad \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

$$653.5. \quad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}.$$

$$653.6. \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

$$653.7. \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}.$$

$$653.8. \quad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$654.1. \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\ln^{-1} x - \frac{1}{\ln^{-1} x} \right), \quad \text{где } \ln^{-1} x = e^x.$$

Такое обозначение напоминает, что значения этой величины могут быть получены обратной интерполяцией из таблицы натуральных логарифмов, чтобы не пользоваться рядом 550, медленно сходящимся при больших x . Обратную интерполяцию можно производить и по таблице десятичных логарифмов, если воспользоваться тождеством $\ln^{-1} x = = \lg^{-1} (0,4343 x)$.

$$654.2. \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\ln^{-1} x + \frac{1}{\ln^{-1} x} \right).$$

(См. примечание к 654.1.)

$$654.3. \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$654.4. \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x. \quad 654.5. \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

$$654.6. \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x. \quad 654.7. \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x.$$

$$654.8. \quad \operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg} x.$$

$$655.1. \quad \operatorname{sh}(x \pm iy) = \operatorname{sh} x \cos y \pm i \operatorname{ch} x \sin y.$$

$$655.2. \quad \operatorname{ch}(x \pm iy) = \operatorname{ch} x \cos y \pm i \operatorname{sh} x \sin y.$$

$$655.3. \quad \operatorname{th}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x \pm i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}.$$

$$655.4. \quad \operatorname{cth}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x \mp i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}.$$

$$656.1. \quad \operatorname{sh} 0 = 0. \quad 656.2. \quad \operatorname{ch} 0 = 1. \quad 656.3. \quad \operatorname{th} 0 = 0.$$

$$657.1. \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$657.2. \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x^2 < \infty].$$

$$657.3. \quad \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 - \\ - \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots$$

$$\left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 45} \right].$$

$$657.4. \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \\ \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots \quad [x^2 < \pi^2; \text{ см. 45}].$$

$$657.5. \quad \operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{4!} x^4 - \frac{61}{6!} x^6 + \frac{1385}{8!} x^8 - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n x^{2n} + \dots \quad [x^2 < \frac{\pi^2}{4}; \text{ см. 45}].$$

$$657.6. \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots \\ \dots + \frac{2(-1)^n (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \dots \quad [x^2 < \pi^2; \text{ см. 45}].$$

658.1. При x больших положительных

$$\operatorname{th} x = 1 - 2(e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \dots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

658.2. При x больших положительных

$$\operatorname{cth} x = 1 + 2(e^{-2x} + e^{-4x} + e^{-6x} + \dots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

658.3. При x больших положительных

$$\operatorname{sch} x = 2(e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \dots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{sch}(-x) = \operatorname{sch} x.$$

658.4. При x больших положительных

$$\operatorname{csch} x = 2(e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \dots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x.$$

Гиперболические функции — Производные

$$667.1. \quad \frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x. \quad 667.3. \quad \frac{d \operatorname{th} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x.$$

$$667.2. \quad \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x. \quad 667.4. \quad \frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

$$667.5. \quad \frac{d \operatorname{sech} x}{dx} = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x.$$

$$667.6. \quad \frac{d \operatorname{csch} x}{dx} = -\operatorname{csch} x \operatorname{cth} x.$$

Гиперболические функции — Интегралы

670. Интегралы, содержащие тригонометрические функции, часто можно преобразовать в соответствующие интегралы, содержащие гиперболические функции, заменяя x на ix и пользуясь формулами:

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x \text{ и т. д.}$$

[См. 408.10—15.]

Эта замена бывает полезна и в других видах формул.

Интегралы, содержащие $\operatorname{sh} x$

$$\mathbf{671.10.} \quad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x.$$

$$\mathbf{671.101.} \quad \int \operatorname{sh} \frac{x}{a} \, dx = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

$$\mathbf{671.11.} \quad \int x \operatorname{sh} x \, dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$\mathbf{671.12.} \quad \int x^2 \operatorname{sh} x \, dx = (x^2 + 2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x.$$

$$\mathbf{671.13.} \quad \int x^3 \operatorname{sh} x \, dx = (x^3 + 6x) \operatorname{ch} x - (3x^2 + 6) \operatorname{sh} x.$$

$$\mathbf{671.19.} \quad \int x^p \operatorname{sh} x \, dx = x^p \operatorname{ch} x - p \int x^{p-1} \operatorname{ch} x \, dx. \quad [\text{См. 677.1.}]$$

$$\mathbf{671.20.} \quad \int \operatorname{sh}^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2}.$$

$$\mathbf{671.21.} \quad \int x \operatorname{sh}^2 x \, dx = \frac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} - \frac{x^2}{4}.$$

$$\mathbf{671.30.} \quad \int \operatorname{sh}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x.$$

$$\mathbf{671.40.} \quad \int \operatorname{sh}^4 x \, dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{3x}{8}.$$

$$\mathbf{671.90.} \quad \int \operatorname{sh}^p x \, dx = \frac{1}{p} \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch} x - \frac{p-1}{p} \int \operatorname{sh}^{p-2} x \, dx.$$

$$\mathbf{672.11.} \quad \int \frac{\operatorname{sh} x}{x} \, dx = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

$$\mathbf{672.12.} \quad \int \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} \, dx = -\frac{\operatorname{sh} x}{x} + \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} \, dx. \quad [\text{См. 678.11.}]$$

$$\mathbf{672.21.} \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x} \, dx = -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} d(2x). \quad [\text{См. 678.11.}]$$

- 673.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \operatorname{csch} x dx = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| = -\frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}.$
- 673.11. $\int \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} - \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127x^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} - \dots$
 $\dots + (-1)^n \frac{2(2^{2n-1} - 1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \dots \quad |x^2| < \pi^2. \text{ См. 45].}$
- 673.19. $\int \frac{x^p dx}{\operatorname{sh} x}.$ Разложить $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ согласно 657.6, умножить на x^p и интегрировать $[p \neq 0].$
- 673.20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int \operatorname{csch}^2 x dx = -\operatorname{cth} x.$
- 673.21. $\int \frac{x dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -x \operatorname{cth} x + \ln |\operatorname{sh} x|.$
- 673.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = \int \operatorname{csch}^3 x dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$
- 673.40. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x} = \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}.$
- 673.90. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^p x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} - \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x} \quad [p > 1].$
675. $\int \operatorname{sh} mx \operatorname{sh} nx dx = \frac{\operatorname{sh} (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\operatorname{sh} (m-n)x}{2(m-n)}$
 $[m^2 \neq n^2; \text{ при } m^2 = n^2 \text{ см. 671.20}].$

Интегралы, содержащие $\operatorname{ch} x$

- 677.10. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x.$
- 677.101. $\int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$
- 677.11. $\int x \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$
- 677.12. $\int x^2 \operatorname{ch} x dx = (x^2 + 2) \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x.$
- 677.13. $\int x^3 \operatorname{ch} x dx = (x^3 + 6x) \operatorname{sh} x - (3x^2 + 6) \operatorname{ch} x.$
- 677.19. $\int x^p \operatorname{ch} x dx = x^p \operatorname{sh} x - p \int x^{p-1} \operatorname{sh} x dx. \quad [\text{См. 671.1.}]$
- 677.20. $\int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}.$

$$677.21. \quad \int x \operatorname{ch}^2 x \, dx = \frac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} + \frac{x^2}{4}.$$

$$677.30. \quad \int \operatorname{ch}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \operatorname{sh} x.$$

$$677.40. \quad \int \operatorname{ch}^4 x \, dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{3x}{8}.$$

$$677.90. \quad \int \operatorname{ch}^p x \, dx = \frac{1}{p} \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{p-1} x + \frac{p-1}{p} \int \operatorname{ch}^{p-2} x \, dx.$$

$$678.11. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} \, dx = \ln |x| + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

$$678.12. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} \, dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{x} + \int \frac{\operatorname{sh} x}{x} \, dx. \quad [\text{См. } 672.11.]$$

$$678.21. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^2 x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} \, d(2x). \quad [\text{См. } 678.11.]$$

$$679.10. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \operatorname{sech} x \, dx = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) = 2 \operatorname{arctg} e^x + \text{const.}$$

$$679.11. \quad \int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} - \frac{61x^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385x^{10}}{10 \cdot 8!} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n E_n}{(2n+2)(2n)!} x^{2n+2} + \dots \quad [x^2 < \frac{\pi^2}{4}, \text{ См. } 45].$$

$$679.19. \quad \int \frac{x^p dx}{\operatorname{ch} x}. \text{ Разложить } \frac{1}{\operatorname{ch} x} \text{ согласно } 657.5, \text{ умножить на } x^p \text{ и}$$

интегрировать [p ≠ 0].

$$679.20. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \operatorname{th} x.$$

$$679.21. \quad \int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x.$$

$$679.30. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x).$$

$$679.40. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x} = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3}.$$

$$679.90. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^p x} = \frac{\operatorname{sh} x}{(p-1) \operatorname{ch}^{p-1} x} + \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{p-2} x} \quad [p > 1].$$

$$681. \quad \int \operatorname{ch} mx \operatorname{ch} nx \, dx = \frac{\operatorname{sh} (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sh} (m-n)x}{2(m-n)}$$

[m² ≠ n²; при m² = n² см. 677.20.]

$$682.01. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

$$682.02. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1} = -\operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

$$682.03. \quad \int \frac{x dx}{\operatorname{ch} x + 1} = x \operatorname{th} \frac{x}{2} - 2 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{2}.$$

$$682.04. \quad \int \frac{x dx}{\operatorname{ch} x - 1} = -x \operatorname{cth} \frac{x}{2} + 2 \ln |\operatorname{sh} \frac{x}{2}|.$$

$$682.05. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch} x + 1} = x - \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

$$682.06. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch} x - 1} = x - \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

$$682.07. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) - \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

$$682.08. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x - 1)} = -\operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) - \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

$$682.09. \quad \int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x + 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}.$$

$$682.10. \quad \int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{cth}^3 \frac{x}{2}.$$

$$682.11. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arch} \left(\frac{3\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x + 1} \right),$$

для $x > 0$ берется положительное значение Arch , а для $x < 0$ — отрицательное.

$$682.12. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x. \quad [\text{См. } 673.20.]$$

Интегралы, содержащие $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$

$$685.11. \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} + \operatorname{const} = \frac{\operatorname{ch} 2x}{4} + \operatorname{const}.$$

$$685.12. \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx = \frac{\operatorname{ch}^4 x}{4}.$$

$$685.13. \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^5 x dx = \frac{\operatorname{ch}^6 x}{6}.$$

$$685.19. \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^p x dx = \frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{p+1} \quad [p \neq -1].$$

$$685.21. \quad \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}.$$

$$685.22. \quad \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8}.$$

$$685.31. \quad \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}.$$

$$685.91. \quad \int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch} x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x}{p+1} \quad [p \neq -1].$$

$$686.11. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln |\operatorname{th} x|.$$

$$686.12. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \ln |\operatorname{th} \frac{x}{2}|.$$

$$686.13. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \ln |\operatorname{th} x|.$$

$$686.19. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^p x} = \frac{1}{(p-1) \operatorname{ch}^{p-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{p-2} x} \quad [p \neq 1].$$

$$686.21. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x).$$

$$686.22. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = -2 \operatorname{cth} 2x.$$

$$686.31. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \ln |\operatorname{th} x|.$$

$$686.91. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^p x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{(p-1) \operatorname{sh}^{p-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x \operatorname{ch} x} \quad [p \neq 1].$$

$$687.11. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch} x} = \int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x. \quad [\text{См. } 691.01.]$$

$$687.12. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} = -\operatorname{sech} x.$$

$$687.13. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch}^3 x} = -\frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x} = -\frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + \text{const.}$$

$$687.19. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch}^p x} = -\frac{1}{(p-1) \operatorname{ch}^{p-1} x} \quad [p \neq 1].$$

$$687.21. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \, dx = \operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x).$$

$$687.22. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \int \operatorname{th}^2 x \, dx = x - \operatorname{th} x. \quad [\text{См. } 691.02.]$$

$$687.29. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^p x} \, dx = -\frac{\operatorname{sh} x}{(p-1) \operatorname{ch}^{p-1} x} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{p-2} x} \quad [p \neq 1].$$

$$687.31. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \, dx = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \ln \operatorname{ch} x.$$

$$687.32. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{ch} x + \operatorname{sech} x.$$

$$687.33. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int \operatorname{th}^3 x dx = -\frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + \ln \operatorname{ch} x. \quad [\text{См. } 691.03.]$$

$$687.34. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^4 x} dx = \frac{1}{3\operatorname{ch}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$687.39. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^p x} dx = \frac{1}{(p-1)\operatorname{ch}^{p-1} x} - \frac{1}{(p-3)\operatorname{ch}^{p-3} x} \quad [p \neq 1 \text{ или } 3].$$

$$687.7. \quad \int \frac{\operatorname{sh}^{p-2} x}{\operatorname{ch}^p x} dx = \frac{\operatorname{th}^{p-1} x}{p-1} \quad [p \neq 1].$$

$$688.11. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} dx = \int \operatorname{cth} x dx = \ln |\operatorname{sh} x|. \quad [\text{См. } 692.01.]$$

$$688.12. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} = -\operatorname{csch} x.$$

$$688.13. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \operatorname{const.}$$

$$688.19. \quad \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^p x} dx = -\frac{1}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} \quad [p \neq 1].$$

$$688.21. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x} dx = \operatorname{ch} x + \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$$

$$688.22. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \operatorname{cth}^2 x dx = x - \operatorname{cth} x \quad [\text{См. } 692.02.]$$

$$688.29. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^p x} dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x} \quad [p \neq 1].$$

$$688.31. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} + \ln |\operatorname{sh} x|.$$

$$688.32. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{sh} x - \operatorname{csch} x.$$

$$688.33. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = \int \operatorname{cth}^3 x dx = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \ln |\operatorname{sh} x|. \quad [\text{См. } 692.03.]$$

$$688.34. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^4 x} dx = -\frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$688.39. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^p x} dx = -\frac{1}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} - \frac{1}{(p-3)\operatorname{sh}^{p-3} x} \quad [p \neq 1 \text{ или } 3].$$

$$688.7. \quad \int \frac{\operatorname{ch}^{p-2} x}{\operatorname{sh}^p x} dx = -\frac{\operatorname{cth}^{p-1} x}{p-1} \quad [p \neq 1].$$

$$689.01. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \ln (\operatorname{ch} x + 1).$$

$$689.02. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{ch} x - 1} = \ln (\operatorname{ch} x - 1).$$

$$689.03. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x + 1)} = -\frac{1}{2 (\operatorname{ch} x + 1)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$$

$$689.04. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x - 1)} = \frac{1}{2 (\operatorname{ch} x - 1)} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$$

$$689.05. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1} \right).$$

$$689.06. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x - 1)} = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

$$689.07. \quad \int \operatorname{sh} mx \operatorname{ch} nx \, dx = \frac{\operatorname{ch} (m+n) x}{2 (m+n)} + \frac{\operatorname{ch} (m-n) x}{2 (m-n)} \\ [m^2 \neq n^2; \text{ при } m^2 = n^2 \text{ см. 685.11}].$$

Интегралы, содержащие $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$

$$691.01. \quad \int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x. \quad [\text{См. 687.11.}]$$

$$691.02. \quad \int \operatorname{th}^2 x \, dx = x - \operatorname{th} x. \quad [\text{См. 687.22.}]$$

$$691.03. \quad \int \operatorname{th}^3 x \, dx = -\frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + \ln \operatorname{ch} x. \quad [\text{См. 687.33.}]$$

$$691.09. \quad \int \operatorname{th}^p x \, dx = -\frac{\operatorname{th}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{th}^{p-2} x \, dx \quad [p \neq 1].$$

$$692.01. \quad \int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x|. \quad [\text{См. 688.11.}]$$

$$692.02. \quad \int \operatorname{cth}^2 x \, dx = x - \operatorname{cth} x. \quad [\text{См. 688.22.}]$$

$$692.03. \quad \int \operatorname{cth}^3 x \, dx = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \ln |\operatorname{sh} x|. \quad [\text{См. 688.33.}]$$

$$692.09. \quad \int \operatorname{cth}^p x \, dx = -\frac{\operatorname{cth}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{cth}^{p-2} x \, dx \quad [p \neq 1].$$

VIII.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$700. \quad \operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 + 1}.$$

При положительном x берется положительное значение Arch , при отрицательном x — его отрицательное значение.

$$700.1. \quad \begin{aligned} \operatorname{Arsh} x &= \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arcsch} \frac{1}{x} = \\ &= -\operatorname{Arsh}(-x) = \ln \{x + \sqrt{x^2 + 1}\}. \end{aligned}$$

[См. 602.1 и 706.]

$$701. \quad \begin{aligned} \operatorname{Arch} x &= \pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \pm \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \\ &= \operatorname{Arsech} \frac{1}{x} = \pm \ln \{x + \sqrt{x^2 - 1}\} \end{aligned}$$

[$x > 1$]. [См. 602.3 и 707.]

$$702. \quad \operatorname{Arth} x = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad [x^2 < 1]. \quad [\text{См. 708.}]$$

$$703. \quad \operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad [x^2 > 1]. \quad [\text{См. 709.}]$$

$$704. \quad \operatorname{Arsech} x = \pm \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) \quad [0 < x < 1]. \quad [\text{См. 710.}]$$

$$705. \quad \operatorname{Arcsch} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right). \quad [\text{См. 711.}]$$

$$706. \quad \begin{aligned} \operatorname{Arsh} x &= x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \quad [x^2 < 1], \\ &= \ln(2x) + \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \\ &= -\ln|2x| - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} + \dots \end{aligned}$$

[$x > 1$],

[$x < -1$]. [См. 602.1.]

$$707. \quad \operatorname{Arch} x = \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \right] \\ [x > 1]. \quad [\text{См. } 602.3 \text{ и } 602.4.]$$

$$708. \quad \operatorname{Arth} x = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad [x^2 < 1]. \quad [\text{См. } 601.2.]$$

$$709. \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad [x^2 > 1]. \quad [\text{См. } 601.3.]$$

$$710. \quad \operatorname{Arsech} x = \pm \left[\ln \frac{2}{x} - \frac{1}{2 \cdot 2} x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} x^6 - \dots \right] \\ [0 < x < 1]. \quad [\text{См. } 602.7 \text{ и } 602.8.]$$

$$711. \quad \operatorname{Arcsch} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7x^7} + \dots \quad [x^2 > 1], \\ = \ln \frac{2}{x} + \frac{1}{2 \cdot 2} x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} x^6 - \dots \\ [0 < x < 1], \\ = -\ln \left| \frac{2}{x} \right| - \frac{1}{2 \cdot 2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} x^6 + \dots \\ [-1 < x < 0]. \quad [\text{См. } 602.5.]$$

$$720. \quad \operatorname{Arsh}(\pm x + iy) = \pm (-1)^n \operatorname{Arch} \frac{s+t}{2} + \\ + i(-1)^n \arcsin \frac{2y}{s+t} + in\pi,$$

здесь берутся положительные значения $\operatorname{Arch} \frac{s+t}{2}$, n — целое число или 0, x положительно, y положительно или отрицательно.

Значения s и t см. 720.1 и 720.2.

$$720.1. \quad s = \sqrt{(1+y)^2 + x^2} \quad (\text{положительное значение корня}).$$

$$720.2. \quad t = \sqrt{(1-y)^2 + x^2} \quad (\text{положительное значение корня}).$$

Заметим, что при $x=0$ и $y>1$, $t=y-1$ и $s+t=2y$.
Если $x=0$ и $y<1$, $t=1-y$ и $s+t=2$.

Иначе:

$$720.3a. \quad \operatorname{Arsh} A = \ln(\pm \sqrt{1+A^2} + A) + i2k\pi \\ \text{или}$$

$$720.3b. \quad \operatorname{Arsh} A = -\ln(\pm \sqrt{1+A^2} - A) + i2k\pi,$$

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. 58 а о логарифме см. 604. Формулы 720.3a и 720.3b тождественны.

$$721.1. \quad \text{Arch}(x + iy) = \pm \left(\text{Arch} \frac{p+q}{2} + i \arccos \frac{2x}{p+q} + i2k\pi \right).$$

$$721.2. \quad \text{Arch}(x - iy) = \pm \left(\text{Arch} \frac{p+q}{2} - i \arccos \frac{2x}{p+q} + i2k\pi \right),$$

здесь надо брать положительное значение $\text{Arch} \frac{p+q}{2}$;

x положительно или отрицательно, y положительно.

$$721.3. \quad p = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \text{ (положительное значение корня).}$$

$$721.4. \quad q = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \text{ (положительное значение корня).}$$

Иначе:

$$721.5a. \quad \text{Arch } A = \pm \ln(A + \sqrt{A^2 - 1}) + i2k\pi$$

или

$$721.5b. \quad \text{Arch } A = \mp \ln(A - \sqrt{A^2 - 1}) + i2k\pi. \quad (\text{См. примечание к 720.3.})$$

$$722.1. \quad \text{Arth}(x + iy) = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} +$$

$$+ \frac{i}{2} \left\{ (2k+1)\pi - \arctg \frac{1+x}{y} - \arctg \frac{1-x}{y} \right\}.$$

Иначе:

$$722.2. \quad \text{Arth}(x + iy) = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{i}{2} \arctg \frac{2y}{1-x^2-y^2} + i\pi k,$$

где k есть нуль или целое число, а арктангенс берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

$$722.3. \quad \text{Arth}(x + iy) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x+iy}{1-x-iy}. \quad [\text{См. 604.}]$$

Обратные гиперболические функции — Производные

$$728.1. \quad \frac{d}{dx} \text{Arsh} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$728.2. \quad \frac{d}{dx} \text{Arch} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[\text{Arch} \frac{x}{a} > 0, \frac{x}{a} > 1 \right].$$

$$728.3. \quad \frac{d}{dx} \text{Arch} \frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \left[\text{Arch} \frac{x}{a} < 0, \frac{x}{a} > 1 \right].$$

$$728.4. \quad \frac{d}{dx} \text{Arth} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 - x^2} \quad [x^2 < a^2].$$

$$728.5. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 - x^2} \quad [x^2 > a^2].$$

$$728.6. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} = \frac{-a}{x \sqrt{a^2 - x^2}} \quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0, 0 < \frac{x}{a} < 1 \right].$$

$$728.7. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} = \frac{a}{x \sqrt{a^2 - x^2}} \quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0, 0 < \frac{x}{a} < 1 \right].$$

$$728.8. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} = \frac{-a}{x \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(Всюду, кроме 728.4 и 728.5, a должно быть положительным.)

Обратные гиперболические функции — Интегралы

Здесь всюду $a > 0$

$$730. \quad \int \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$730.1. \quad \int x \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$730.2. \quad \int x^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + \frac{2a^2 - x^2}{9} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$730.3. \quad \int x^3 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \\ = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^2}{32} \right) \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + \frac{3a^2x - 2x^3}{3^2} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$730.4. \quad \int x^4 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \\ = \frac{x^5}{5} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{8a^2 - 4a^2x^2 + 3x^4}{75} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

[См. 625 — 625.4.]

$$730.9. \quad \int x^p \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{1}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad [p \neq -1].$$

[См. 201.01 — 207.01 и 625.9.]

$$731.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = \\ = -\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{2x}{a} \right| \right)^2 + \frac{1}{2^2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} \frac{a^6}{x^6} - \dots \\ \left[\frac{x}{a} < -1 \right], \\ = \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots \quad [x^2 < a^2]. \\ = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a} \right)^2 - \frac{1}{2^2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} \frac{a^4}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} \frac{a^6}{x^6} + \dots \quad \left[\frac{x}{a} > 1 \right],$$

$$731.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|.$$

$$731.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2 x}.$$

[См. 626.1—626.3.]

$$731.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + \\ + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1} \sqrt{x^2 + a^2}} \quad [p \neq 1].$$

[См. 221.01—226.01 и 626.9.]

$$732. \quad \int \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\ = x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right].$$

$$732.1. \quad \int x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\ = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right].$$

$$732.2. \quad \int x^3 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{2a^2 + x^2}{9} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\ = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{2a^2 + x^2}{9} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right].$$

$$732.3. \quad \int x^5 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5a^2 x^4}{24} \right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{5a^4 x + 2x^3}{32} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\ = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5a^2 x^4}{24} \right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{5a^4 x + 2x^3}{32} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right].$$

$$\begin{aligned}
 732.4. \quad \int x^4 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= \frac{x^5}{5} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{8a^4 + 4a^2x^2 + 3x^4}{75} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= \frac{x^5}{5} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{8a^4 + 4a^2x^2 + 3x^4}{75} \sqrt{x^2 - a^2} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right]. \quad [\text{См. } 627-627.4.]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 732.9. \quad \int x^p \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{1}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0, \quad p \neq -1 \right], \\
 &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{1}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0, \quad p \neq -1 \right]. \quad [\text{См. } 261.01-267.01 \text{ и } 627.9.]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 733.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{1}{2^3} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{a^6}{x^6} + \dots \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= - \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{1}{2^3} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{a^6}{x^6} + \dots \right] \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 733.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{x} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0, \quad 0 < \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| < \frac{\pi}{2} \right], \\
 &= -\frac{1}{x} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| \\
 &\quad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0, \quad 0 < \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| < \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 733.3. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x} \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x} \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0 \right]. \quad [\text{См. 628.1—628.3.}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 733.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1} \sqrt{x^2 - a^2}} \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0, \quad p \neq 1 \right], \\
 &= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1} \sqrt{x^2 - a^2}} \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0, \quad p \neq 1 \right]. \quad [\text{См. 281.01—284.01 и 628.9.}]
 \end{aligned}$$

От 732 до 733.9 всюду $\frac{x}{a} > 1$.

$$734. \quad \int \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 - x^2).$$

$$734.1. \quad \int x \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^2 - a^2}{2} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

$$734.2. \quad \int x^2 \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 - x^2).$$

$$734.3. \quad \int x^3 \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^4 - a^4}{4} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3 x}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 734.9. \quad \int x^p \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{a}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{a^2 - x^2} \\
 &\quad [p \neq -1]. \quad [\text{См. 141.1—148.1.}]
 \end{aligned}$$

$$735.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} + \dots$$

$$735.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a^2 - x^2}{x^2} \right).$$

$$735.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} \right) \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

$$\begin{aligned}
 735.4. \quad \int \frac{1}{x^4} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^3} - \frac{1}{6a^3} \ln \left(\frac{a^2 - x^2}{x^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$735.5. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4} \right) \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} - \frac{1}{4a^3x}.$$

$$735.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \\ + \frac{a}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1}(a^2-x^2)} \quad [p \neq 1].$$

[См. 151.1—155.1.]

В 734—735.9 всюду $x^2 < a^2$.

$$736. \quad \int \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2 - a^2).$$

$$736.1. \quad \int x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^2 - a^2}{2} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

$$736.2. \quad \int x^2 \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x^2 - a^2).$$

$$736.3. \quad \int x^3 \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^4 - a^4}{4} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax^4}{12} + \frac{a^2x}{4}.$$

$$736.9. \quad \int x^p \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{a}{p+1} \int \frac{x^{p+1} dx}{a^2 - x^2} \\ [p \neq -1]. \quad [\text{См. 141.1—148.1.}]$$

$$737.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2x^3} - \frac{a^5}{5^2x^5} - \frac{a^7}{7^2x^7} - \dots$$

$$737.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} \right).$$

$$737.3. \quad \int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3} \right) \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

$$737.4. \quad \int \frac{1}{x^4} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \\ = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} \right).$$

$$737.5. \quad \int \frac{1}{x^5} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{x^5} \right) \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} - \frac{1}{4a^3x}.$$

$$737.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \\ + \frac{a}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1}(a^2-x^2)} \quad [p \neq 1].$$

[См. 151.1—155.1.]

В 736—737.9 всюду $x^2 > a^2$.

$$\begin{aligned}
 738. \quad \int \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= x \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + a \arcsin \frac{x}{a} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= x \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - a \arcsin \frac{x}{a} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 738.1. \quad \int x \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 738.2. \quad \int x^2 \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^3}{3} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - \frac{ax}{6} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^3}{6} \arcsin \frac{x}{a} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= \frac{x^3}{3} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + \frac{ax}{6} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^3}{6} \arcsin \frac{x}{a} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 738.9. \quad \int x^p \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + \frac{a}{p+1} \int \frac{x^p dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \quad p \neq -1 \right], \\
 &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - \frac{a}{p+1} \int \frac{x^p dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0, \quad p \neq -1 \right]. \\
 &\quad [\text{См. } 320.01-327.01.]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 739.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{a}{x} \right) \ln \frac{4a}{x} - \frac{1}{2^3} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{x^4}{a^4} - \\
 &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{x^6}{a^6} - \dots \quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{a}{x} \right) \ln \frac{4a}{x} + \frac{1}{2^3} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{x^6}{a^6} + \dots \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 739.2. \quad \int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= -\frac{1}{x} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0 \right], \\
 &= -\frac{1}{x} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 739.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} - \frac{a}{p-1} \int \frac{dx}{x^p \sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} > 0, \quad p \neq 1 \right], \\
 &= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arsech} \frac{x}{a} + \frac{a}{p-1} \int \frac{dx}{x^p \sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad \left[\operatorname{Arsech} \frac{x}{a} < 0, \quad p \neq 1 \right]. \quad [\text{См. } 342.01-346.01.]
 \end{aligned}$$

В 738—739.9 всюду $0 < x < a$.

$$740. \quad \int \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} + a \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}.$$

$$740.1. \quad \int x \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$\begin{aligned}
 740.9. \quad \int x^p \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} + \frac{a}{p+1} \int \frac{x^p dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
 &\quad [p \neq -1]. \quad [\text{См. } 200.01-207.01.]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 741.1. \quad \int \frac{1}{x} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} dx &= -\frac{a}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{a^5}{x^5} + \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{a^7}{x^7} - \dots \quad [x^2 > a^2], \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{a}{x} \right) \ln \frac{4a}{x} + \frac{1}{2^3} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{x^6}{a^6} - \dots \\
 &\quad [0 < x < a], \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a}{x} \right| \ln \left| \frac{4a}{x} \right| - \frac{1}{2^3} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \frac{x^4}{a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \frac{x^6}{a^6} + \dots \\
 &\quad [-a < x < 0].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 741.9. \quad \int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} dx &= \\
 &= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \operatorname{Arcsch} \frac{x}{a} - \frac{a}{p-1} \int \frac{dx}{x^p \sqrt{x^2 + a^2}} \\
 &\quad [p \neq 1]. \quad [\text{См. } 222.01-226.01.]
 \end{aligned}$$

В 740—741.9 всюду $a > 0$, $x > 0$ (кроме 741.1).

IX.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

750. Обозначим $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad [k^2 < 1],$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} \quad [x = \sin \varphi],$$

$= F(\varphi, k)$ (эллиптический интеграл первого рода, см. 770).

751.1. φ называется *амплитудой*, k — *модулем*.

751.2. $\varphi = \operatorname{am} u$.

751.3. $\sin \varphi = \operatorname{sn} u = x$. 751.4. $\cos \varphi = \operatorname{cn} u = \sqrt{1-x^2}$.

751.5. $\Delta \varphi$ или $\Delta(\varphi, k) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2 x^2}$.

751.6. $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tn} u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

751.7. *Дополнительный модуль* $k' = \sqrt{1-k^2}$.

752.*) $u = \operatorname{am}^{-1}(\varphi, k) = \operatorname{sn}^{-1}(x, k) = \operatorname{cn}^{-1}\{\sqrt{1-x^2}, k\} =$
 $= \operatorname{dn}^{-1}\{\sqrt{1-k^2 x^2}, k\} = \operatorname{tn}^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, k\right].$

753.1. $\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u$. 754.1. $\operatorname{am} 0 = 0$.

753.2. $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$. 754.2. $\operatorname{sn} 0 = 0$.

753.3. $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$. 754.3. $\operatorname{cn} 0 = 1$.

753.4. $\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$. 754.4. $\operatorname{dn} 0 = 1$.

753.5. $\operatorname{tn}(-u) = -\operatorname{tn} u$. 755.1. $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$.

*) Здесь показатель степени -1 применяется в смысле обратной функции. (Прим. ред.)

$$755.2. \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad 755.3. \quad \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = k'^2.$$

$$756.1. \quad \operatorname{sn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

$$756.2. \quad \operatorname{cn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

$$756.3. \quad \operatorname{dn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

$$756.4. \quad \operatorname{tn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v \pm \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 \mp \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}.$$

$$757.1. \quad \operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

$$757.2. \quad \operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} = \frac{2 \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} - 1.$$

$$757.3. \quad \operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} = \frac{2 \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} - 1.$$

$$757.4. \quad \operatorname{tn} 2u = \frac{2 \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}.$$

$$758.1. \quad \operatorname{sn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}.$$

$$758.2. \quad \operatorname{cn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}.$$

$$758.3. \quad \operatorname{dn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{cn} u}}.$$

$$759.1. \quad \operatorname{sn}(iu, k) = i \operatorname{tn}(u, k').$$

$$759.2. \quad \operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

$$759.3. \quad \operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

$$760.1. \quad \operatorname{sn} u = u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{u^5}{5!} - \\ - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$$760.2. \quad \operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{u^6}{6!} + \\ + (1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6) \frac{u^8}{8!} - \dots$$

$$\begin{aligned}
 760.3. \quad \operatorname{dn} u &= 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + (4 + k^2) k^2 \frac{u^4}{4!} - (16 + 44k^2 + k^4) k^2 \frac{u^6}{6!} + \\
 &\quad + (64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6) k^2 \frac{u^8}{8!} - \dots \\
 760.4. \quad \operatorname{am} u &= u - k^2 \frac{u^3}{3!} + (4 + k^2) k^2 \frac{u^5}{5!} - (16 + 44k^2 + k^4) k^2 \frac{u^7}{7!} + \\
 &\quad + (64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6) k^2 \frac{u^9}{9!} - \dots
 \end{aligned}$$

Эллиптические функции — Производные

$$\begin{aligned}
 768.1. \quad \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \\
 768.2. \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \\
 768.3. \quad \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.
 \end{aligned}$$

Эллиптические функции — Интегралы

770. Эллиптический интеграл первого рода

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad [k^2 < 1], \\
 &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} \quad [x = \sin \varphi]. \quad [\text{См. } 750.]
 \end{aligned}$$

771. Эллиптический интеграл второго рода

$$\begin{aligned}
 E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \\
 &= \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \quad [x = \sin \varphi].
 \end{aligned}$$

772. Эллиптический интеграл третьего рода

$$\begin{aligned}
 \Pi(\varphi, n, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} \quad [x = \sin \varphi].
 \end{aligned}$$

n называется *параметром*.

Таблицы значений эллиптических интегралов см. [27], [28].

Полные эллиптические интегралы

$$\begin{aligned}
 773.1. \quad K &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right) \\
 &\quad [k^2 < 1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 773.2. \quad K &= \frac{\pi}{2} (1+m) \left[1 + \frac{1^2}{2^2} m^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right], \\
 &\text{где } m = (1-k')/(1+k'). \\
 &\text{Этот ряд сходится быстрее, чем 773.1, поскольку } m^2 < k^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 773.3. \quad K &= \ln \frac{4}{k'} + \frac{1^2}{2^2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) k'^2 + \\
 &\quad + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) k'^4 + \\
 &\quad + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6} \right) k'^6 + \dots, \\
 &\text{где } k' = \sqrt{1-k^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 774.1. \quad E &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \dots \right) \\
 &\quad [k^2 < 1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 774.2. \quad E &= \frac{\pi}{2(1+m)} \left[1 + \frac{m^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right], \\
 &\text{где } m = (1-k')/(1+k'). \\
 &\text{Этот ряд сходится быстрее, чем 774.1, поскольку } m^2 < k^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 774.3. \quad E &= 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2} \right) k'^2 + \\
 &\quad + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) k'^4 + \\
 &\quad + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right) k'^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$775. \quad F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ = \frac{2\varphi}{\pi} K - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{2} A_2 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_4 k^4 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_6 k^6 + \dots \right),$$

где

$$A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi,$$

$$A_6 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \sin^2 \varphi + \frac{1}{6} \sin^4 \varphi,$$

$$A_8 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \sin^2 \varphi + \frac{7}{6 \cdot 8} \sin^4 \varphi + \frac{1}{8} \sin^6 \varphi,$$

а K находится по формуле 773 или из таблиц.

$$776. \quad F(\varphi, k) = \varphi + \frac{1}{2} v_2 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} v_4 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} v_6 k^6 + \dots,$$

где

$$v_{2n} = \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi. \quad [\text{См. 430.}]$$

$$777. \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \\ = \frac{2\varphi}{\pi} E + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{2} A_2 k^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} A_4 k^4 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_6 k^6 + \dots \right),$$

где $A_2, A_4, \dots$ те же, что и в формуле 775, а E может быть получено из формулы 774 или из таблиц.

$$780.1. \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+k'^2 x^2}} = \text{tn}^{-1}(x, k) * = F(\text{arctg } x, k) \\ [x > 0].$$

$$781.01. \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2}} = \frac{1}{a} \text{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b}, \frac{b}{a}\right) * = \frac{1}{a} F(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a} \right], \quad [0 < x < b < a].$$

*) Здесь через $\text{sn}^{-1}(x)$, $\text{tn}^{-1}(x)$ обозначены функции, обратные $\text{sn } x$ и $\text{tn } x$ (область изменения от 0 до K). (Прим. ред.)

781.02.
$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2} \sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \{K(k) - F(\varphi, k)\}$$

$$\left[\varphi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \right), k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right], [0 < b < x < a].$$

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ — полный эллиптический интеграл. Как обычно, интеграл от x_1 до x_2 получается как разность интегралов от b до x_2 и от b до x_1 .

781.03.
$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2} \sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \{K(k) - F(\varphi, k)\}$$

$$[\varphi = \arcsin(a/x), k = b/a], [0 < b < a < x].$$

781.04.
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{b^2+x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{x}{b}, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right\}^* = \frac{1}{a} F(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right], [0 < b < a; 0 < x].$$

781.05.
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{b^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \{K(k) - F(\varphi, k)\}$$

$$\left[\varphi = \arccos \frac{x}{b}, k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], [0 < x < b].$$

781.06.
$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \arccos \frac{b}{x}, k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], [0 < b < x; 0 < a].$$

781.11.
$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2}} = aF(\varphi, k) - aE(\varphi, k)$$

$$[\varphi = \arcsin(x/b), k = b/a], [0 < x < b < a].$$

781.12.
$$\int_b^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2} \sqrt{x^2-b^2}} = aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - aE(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}, k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right], [0 < b < x < a].$$

*) См. подстр. прим. на стр. 155.

$$781.13. \int_a^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2} \sqrt{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2} \sqrt{x^2-b^2}}{x} + \\ + aK(k) - aF(\varphi, k) - aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + aE(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{a}{x}, \quad k = \frac{b}{a} \right], \quad [0 < b < a < x].$$

$$781.14. \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{b^2+x^2}} = \frac{x \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} - aE(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right], \quad [0 < x; \quad 0 < b < a].$$

$$781.15. \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{b^2-x^2}} = \sqrt{a^2+b^2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k) \right] - \\ - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} [K(k) - F(\varphi, k)] \\ \left[\varphi = \arccos \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], \quad [0 < x < b].$$

$$781.16. \int_b^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{x^2-b^2}} = \\ = \frac{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{x^2-b^2}}{x} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\varphi, k) - \sqrt{a^2+b^2} E(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arccos \frac{b}{x}, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], \quad [0 < b < x; \quad 0 < a].$$

$$781.21. \int_0^x \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{b^2-x^2}} dx = aE(\varphi, k) \quad [0 < x < b < a], \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a} \right].$$

$$781.22. \int_0^x \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = aE(\varphi, k) - \frac{a^2-b^2}{a} F(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a} \right], \quad [0 < x < b < a].$$

$$781.23. \quad \int_0^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} dx = \frac{x \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} + aF(\varphi, k) - aE(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right] \quad [0 < x; 0 < b < a].$$

$$781.24. \quad \int_b^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{x^2-b^2}} dx = \\ = \frac{\sqrt{a^2+x^2} \sqrt{x^2-b^2}}{x} + \sqrt{a^2+b^2} \{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\} \\ \left[\varphi = \arccos \frac{b}{x}, k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] \quad [0 < b < x; 0 < a].$$

$$781.51. \quad \int_0^x \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2}} = \frac{x \sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2}}{3} + \\ + \frac{(2+k^2)b^3}{3k^3} F(\varphi, k) - \frac{2(1+k^2)b^3}{3k^3} E(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{x}{b}, k = \frac{b}{a} \right].$$

$$781.61. \quad \int_0^x \sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2} dx = \frac{x \sqrt{a^2-x^2} \sqrt{b^2-x^2}}{3} + \\ + \left(\frac{b^3}{3k} + \frac{2b^3}{3k^3} - a^3 \right) F(\varphi, k) + \left(a^3 + ab^2 - \frac{2b^3}{3k} - \frac{2b^3}{3k^3} \right) E(\varphi, k) \\ \left[\varphi = \arcsin \frac{x}{b}, k = \frac{b}{a} \right].$$

$$782.01. \quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \operatorname{sn}^2 u du = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} = \\ = \frac{1}{k^2} \{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\} \quad [x = \sin \varphi].$$

$$782.02. \quad \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \operatorname{cn}^2 u du = \int_0^x \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2 x^2}} dx = \\ = \frac{E(\varphi, k)}{k^2} - \frac{1-k^2}{k^2} F(\varphi, k) \quad [x = \sin \varphi].$$

$$782.03. \quad \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \operatorname{tn}^2 u \, du = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1-k^2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

$$782.04. \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{1-k^2} \operatorname{tg} \varphi + F(\varphi, k) - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

$$782.05. \quad \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + F(\varphi, k) - E(\varphi, k).$$

$$782.06. \quad \int_0^{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + \\ + F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k).$$

$$785.1. \quad \int \operatorname{sn} u \, du = -\frac{1}{k} \operatorname{Arch} \left(\frac{\operatorname{dn} u}{k'} \right).$$

$$785.2. \quad \int \operatorname{cn} u \, du = \frac{1}{k} \arccos (\operatorname{dn} u).$$

$$785.3. \quad \int \operatorname{dn} u \, du = \arcsin (\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u.$$

$$786.1. \quad \int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln \left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u} \right).$$

$$786.2. \quad \int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \left(\frac{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right).$$

$$786.3. \quad \int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'} \operatorname{arctg} \left(\frac{k' \operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u} \right).$$

$$787.1. \quad \int_0^u \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{1}{k^2} \{u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

$$787.2. \quad \int_0^u \operatorname{cn}^2 u \, du = \frac{1}{k^2} \{E(\operatorname{am} u, k) - k'^2 u\}.$$

$$787.3. \quad \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du = E(\operatorname{am} u, k).$$

$$787.4. \quad \int_0^u \operatorname{tn}^2 u \, du = \frac{1}{k'^2} \{\operatorname{dn} u \operatorname{tn} u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

$$788.1.*) \quad \int \operatorname{sn}^{-1} x \, dx = x \operatorname{sn}^{-1} x + \frac{1}{k} \operatorname{ch} \left[\frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{k'} \right].$$

$$788.2. \quad \int \operatorname{cn}^{-1} x \, dx = x \operatorname{cn}^{-1} x - \frac{1}{k} \arccos \sqrt{k'^2 + k^2 x^2}.$$

$$788.3. \quad \int \operatorname{dn}^{-1} x \, dx = x \operatorname{dn}^{-1} x - \arcsin \left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{k} \right].$$

$$789.1. \quad \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k} (E - K).$$

$$789.2. \quad \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - K \right).$$

*) См. подстр. прим. на стр. 151.

X.

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

800. Дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1du}{x dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Бесселева функция первого рода $J_n(x)$

Обозначим $\frac{d}{dx} J_n(x)$ через J'_n и т. д.

$$801.1. \quad xJ'_n = nJ_n - xJ_{n+1}. \quad 801.3. \quad 2nJ_n = xJ_{n-1} + xJ_{n+1}.$$

$$801.2. \quad xJ'_n = -nJ_n + xJ_{n-1}. \quad 801.4. \quad 2J_n = J_{n-1} - J_{n+1}.$$

$$801.5. \quad 4J''_n = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}.$$

$$801.6. \quad \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}.$$

$$801.7. \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n+1}.$$

$$801.82. \quad J_2 = \frac{2J_1}{x} - J_0.$$

$$801.83. \quad J_3 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1 - \frac{4J_0}{x}.$$

$$801.84. \quad J_4 = \left(1 - \frac{24}{x^2}\right)J_0 + \frac{8}{x} \left(\frac{6}{x^2} - 1\right)J_1.$$

$$801.85. \quad J_5 = \frac{12}{x} \left(1 - \frac{16}{x^2}\right)J_0 + \left(\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1\right)J_1.$$

$$801.90. \quad J'_0 = -J_1.$$

$$801.91. \quad J_1 = J_0 - \frac{J_1}{x}.$$

$$801.92. J_2' = \frac{2J_0}{x} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) J_1.$$

$$801.93. J_3' = \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 + \left(5 - \frac{24}{x^2}\right) \frac{J_1}{x}.$$

$$801.94. J_4' = \frac{8}{x} \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 - \left(\frac{192}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 1\right) J_1.$$

$$801.95. J_5' = \left(\frac{960}{x^4} - \frac{84}{x^2} + 1\right) J_0 - \left(\frac{1920}{x^4} - \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{J_1}{x}.$$

Таблицы $J_0(x)$ и $J_1(x)$ см. [10, 15; 17, 19з, 20].

$$802.1. J_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

$$802.21. J_1(x) = -J_0'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots$$

$$802.22. J_2(x) = \frac{x^2}{2^2 2!} - \frac{x^4}{2^4 1! 3!} + \frac{x^6}{2^6 2! 4!} - \frac{x^8}{2^8 3! 5!} + \dots$$

802.3. При n целом положительном

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2(n+1)(n+2)} - \dots \right].$$

802.4. При n целом

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

802.5. Если n — не целое положительное число, то в формуле 802.3 заменить $n!$ через $\Gamma(n)$. (См. 853.1.)

$$802.61. J_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2^3 1! 2!} + \frac{5x^4}{2^5 2! 3!} - \frac{7x^6}{2^7 3! 4!} + \dots$$

$$802.62. J_2'(x) = \frac{x}{4} - \frac{4x^3}{2^4 1! 3!} + \frac{6x^5}{2^6 2! 4!} - \frac{8x^7}{2^8 3! 5!} + \dots$$

$$802.69. J_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!} - \frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+2} 1! (n+1)!} + \\ + \frac{(n+4)x^{n+3}}{2^{n+4} 2! (n+2)!} - \frac{(n+6)x^{n+5}}{2^{n+6} 3! (n+3)!} + \dots$$

(n целое положительное).

Асимптотические ряды для больших
значений x

$$803.1. \quad J_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

где

$$803.11. \quad P_0(x) \approx 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! (8x)^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{6! (8x)^6} + \dots$$

$$803.12. \quad Q_0(x) \approx -\frac{1^2}{1! 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! (8x)^5} + \dots$$

Знак $\approx$ означает асимптотическое равенство.

$$803.2. \quad J_1(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_1(x) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - Q_1(x) \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \right],$$

где

$$803.21. \quad P_1(x) \approx 1 + \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2! (8x)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}{4! (8x)^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11 \cdot 13}{6! (8x)^6} - \dots$$

Начиная со второго члена знаки чередуются.

$$803.22. \quad Q_1(x) \approx \frac{1 \cdot 3}{1! 8x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3! (8x)^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11}{5! (8x)^5} - \dots$$

$$803.3. \quad J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_n(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ \left. - Q_n(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

где

$$803.31. \quad P_n(x) \approx 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} + \\ + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 - 7^2)}{4! (8x)^4} - \dots$$

$$803.32. \quad Q_n(x) \approx \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3! (8x)^3} + \dots$$

$$803.4. \quad J'_n(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_n^{(1)}(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + Q_n^{(1)}(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

где согласно 801.4

$$803.41. \quad P_n^{(1)}(x) \approx 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2! (8x)^2} + \\ + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 + 7 \times 9)}{4! (8x)^4} - \dots$$

$$803.42. Q_n^{(1)}(x) \approx \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1! 8x} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3! (8x)^3} + \dots$$

Закон образования следующих членов очевиден. Следует помнить, что приведенные здесь ряды для больших значений x являются асимптотическими, и существует предел точности, которую они могут дать.

$$804.01. J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x.$$

$$804.03. J_{\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

$$804.05. J_{\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x\right\}.$$

$$804.21. J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x.$$

$$804.23. J_{-\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right).$$

$$804.25. J_{-\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x\right\}.$$

Бесселева функция второго рода $Y_n(x)$

Некоторые авторы употребляют вместо $Y_n(x)$ обозначение $N_n(x)$.

$$805.1. xY'_n = nY - xY_{n+1}. \quad 805.2. xY'_n = -nY_n + xY_{n-1}.$$

$$805.3. 2nY_n = xY_{n-1} + xY_{n+1}. \quad 805.4. 2Y_n = Y_{n-1} - Y_{n+1}.$$

$$805.5. 4Y''_n = Y_{n-2} - 2Y_n + Y_{n+2}.$$

$$805.6. \frac{d}{dx}(x^n Y_n) = x^n Y_{n-1}.$$

$$805.7. \frac{d}{dx}(x^{-n} Y_n) = -x^{-n} Y_{n+1}.$$

$$805.82. Y_2 = \frac{2Y_1}{x} - Y_0. \quad 805.83. Y_3 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) Y_1 - \frac{4Y_0}{x}.$$

$$805.84. Y_4 = \left(1 - \frac{24}{x^2}\right) Y_0 + \frac{8}{x} \left(\frac{6}{x^2} - 1\right) Y_1.$$

$$805.85. Y_5 = \frac{12}{x} \left(1 - \frac{16}{x^2}\right) Y_0 + \left(\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1\right) Y_1.$$

$$805.90. Y_1' = -Y_1. \quad 805.91. Y_1' = Y_0 - \frac{Y_1}{x}.$$

$$805.92. Y_2' = \frac{2Y_0}{x} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) Y_1.$$

$$805.93. Y_3' = \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) Y_0 + \left(5 - \frac{24}{x^2}\right) \frac{Y_1}{x}.$$

$$805.94. Y_4' = \frac{8}{x} \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) Y_0 - \left(\frac{192}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 1\right) Y_1.$$

$$805.95. Y_5' = \left(\frac{960}{x^4} - \frac{84}{x^2} + 1\right) Y_0 - \left(\frac{1920}{x^6} - \frac{408}{x^4} + 13\right) \frac{Y_1}{x}.$$

Таблицы $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ см. [10, 15, 17].

$$806.1. Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(C + \ln \frac{x}{2}\right) J_0(x) + \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \\ - \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots, \\ \text{где } C - \text{эйлерова постоянная } 0,5772157. \text{ (См. 851.1.)}$$

$$806.2. Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(C + \ln \frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} \left\{2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p+1}\right\}.$$

$$806.3. Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \left(C + \ln \frac{x}{2}\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+p}\right),$$

где n целое положительное. При $p = 0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Асимптотические ряды для больших значений x

$$807.1. \quad Y_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

$$807.2. \quad Y_1(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_1(x) \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + Q_1(x) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \right].$$

$$807.3. \quad Y_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_n(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + Q_n(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad [\text{Ряды для } P \text{ и } Q \text{ см. } 803.]$$

$$807.4. \quad Y_n^*(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_n^{(1)}(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ \left. - Q_n^{(1)}(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ [P_n^{(1)}(x) \text{ и } Q_n^{(1)}(x) \text{ см. в } 803.41. \text{ и } 803.42.]$$

Бесселевы функции от мнимого аргумента первого рода $I_n(x)$

$$808.1. \quad xI_n' = nI_n + xI_{n+1}. \quad 808.3. \quad 2nI_n = xI_{n-1} - xI_{n+1}.$$

$$808.2. \quad xI_n' = -nI_n + xI_{n-1}. \quad 808.4. \quad 2I_n' = I_{n-1} + I_{n+1}.$$

$$808.5. \quad 4I_n'' = I_{n-2} + 2I_n + I_{n+2}.$$

$$808.6. \quad \frac{d}{dx}(x^n I_n) = x^n I_{n-1}. \quad 808.7. \quad \frac{d}{dx}(x^{-n} I_n) = x^{-n} I_{n+1}.$$

$$808.82. \quad I_2 = I_0 - \frac{2I_1}{x}.$$

$$808.83. \quad I_3 = \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{4I_0}{x}.$$

$$808.84. \quad I_4 = \left(\frac{24}{x^2} + 1\right) I_0 - \frac{8}{x} \left(\frac{6}{x^2} + 1\right) I_1.$$

$$808.85. \quad I_5 = \left(\frac{384}{x^4} + \frac{72}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{12}{x} \left(\frac{16}{x^2} + 1\right) I_0.$$

$$808.90. \quad I_0' = I_1.$$

$$808.91. \quad I_1' = I_0 - \frac{I_1}{x}.$$

$$808.92. \quad I_2' = I_1 \left(\frac{4}{x^2} + 1\right) - \frac{2I_0}{x}.$$

$$808.93. \quad I_3' = \left(\frac{12}{x^2} + 1\right) I_0 - \left(\frac{24}{x^2} + 5\right) \frac{I_1}{x}.$$

$$808.94. \quad I_4' = \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1 \right) I_1 - \frac{8}{x} \left(\frac{12}{x^2} + 1 \right) I_0.$$

$$808.95. \quad I_5' = \left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1 \right) I_0 - \left(\frac{1920}{x^4} + \frac{408}{x^2} + 13 \right) \frac{I_1}{x}.$$

Таблицы $I_0(x)$ и $I_1(x)$ см. [10, 15, 21].

$$809.1. \quad I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{1}{2} x \right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

$$809.2. \quad I_1(x) = i^{-1} J_1(ix) = I_0'(x) = \frac{1}{2} x + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \dots$$

809.3. При n целом положительном

$$\begin{aligned} I_n(x) &= i^{-n} J_n(ix) = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^n}{n!} \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^4}{1 \cdot 2(n+1)(n+2)} + \dots \right] = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^{n+2p}}{p!(n+p)!}. \end{aligned}$$

809.4. При n целом

$$I_{-n}(x) = I_n(x).$$

809.5. Если n не целое положительное, то надо в 809.3 заменить $n!$ на $\Gamma(n)$.

[См. 853.1]

Асимптотические ряды для больших значений x

$$811.1. \quad I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \frac{1^2}{118x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{21(8x)^2} + \dots \right].$$

$$811.2. \quad I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{118x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{21(8x)^2} - \dots \right].$$

$$\begin{aligned} 811.3. \quad I_n'(x) &\approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{4n^2 + 1 \times 3}{118x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{21(8x)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{31(8x)^3} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Члены ряда 811.3 те же, что и в рядах 803.41 и 803.42.

Бесселевы функции от мнимого аргумента второго рода $K_n(x)$

$$814.1. \quad xK'_n = nK_n - xK_{n+1}.$$

$$814.2. \quad xK'_n = -nK_n - xK_{n-1}.$$

$$814.3. \quad 2nK_n = xK_{n+1} - xK_{n-1}.$$

$$814.4. \quad 2K'_n = -K_{n-1} - K_{n+1}.$$

$$814.5. \quad 4K''_n = K_{n-2} + 2K_n + K_{n+2}.$$

$$814.6. \quad \frac{d}{dx}(x^n K_n) = -x^n K_{n-1}.$$

$$814.7. \quad \frac{d}{dx}(x^{-n} K_n) = -x^{-n} K_{n+1}.$$

$$814.82. \quad K_2 = K_0 + \frac{2K_1}{x}.$$

$$814.83. \quad K_3 = \frac{4K_0}{x} + \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) K_1.$$

$$814.84. \quad K_4 = \left(\frac{24}{x^2} + 1\right) K_0 + \frac{8}{x} \left(\frac{6}{x^2} + 1\right) K_1.$$

$$814.85. \quad K_5 = \frac{12}{x} \left(\frac{16}{x^2} + 1\right) K_0 + \left(\frac{384}{x^4} + \frac{72}{x^2} + 1\right) K_1.$$

$$814.90. \quad K'_0 = -K_1.$$

$$814.91. \quad K'_1 = -K_0 - \frac{K_1}{x}.$$

$$814.92. \quad K'_2 = -\frac{2K_0}{x} - \left(\frac{4}{x^2} + 1\right) K_1.$$

$$814.93. \quad K'_3 = -\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{24}{x^2} + 5\right) \frac{K_1}{x}.$$

$$814.94. \quad K'_4 = -\frac{8}{x} \left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1\right) K_1.$$

$$814.95. \quad K'_5 = -\left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{1920}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 13\right) \frac{K_1}{x}.$$

Таблицы $K_0(x)$ и $K_1(x)$ см. [10, 15, 17, 21].

$$815.1. \quad K_0(x) = -\left(C + \ln \frac{x}{2}\right) I_0(x) + \\ + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots, \\ \text{где } C = 0,5772157 - \text{эйлерова постоянная. (См. 851.1)}$$

$$815.2. \quad K_n(x) = (-1)^{n+1} \left(C + \ln \frac{x}{2}\right) I_n(x) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} + \\ + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+p}\right),$$

где n — целое положительное. При $p = 0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Следует заметить, что иногда, особенно в более ранней литературе по бесселевым функциям, буквой K обозначается совсем другое выражение.

$$815.3. \quad \text{При } n \text{ целом } K_{-n}(x) = K_n(x).$$

$$815.4. \quad \text{При } n \text{ нецелом } K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi n} \{I_{-n}(x) - I_n(x)\}.$$

Асимптотические ряды для больших значений x

816.1.

$$K_0(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left[1 - \frac{1^2}{1! 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} + \dots\right].$$

$$816.2. \quad K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} + \right. \\ \left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} + \dots\right].$$

$$816.3. \quad K'_n(x) \approx -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left[1 + \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1! 8x} + \right. \\ \left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2! (8x)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3! (8x)^3} + \dots\right].$$

[Из 814.4.]

Нетрудно видеть, как продолжить этот ряд.

Ф у н к ц и и Г а н к е л я

$$817.1. H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z). \quad 817.2. K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz).$$

$$817.3. H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z). \quad 817.4. H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z).$$

$$817.5. K_n(z) = \frac{\pi i}{2} e^{i n \pi / 2} H_n^{(1)}(iz).$$

Д л я л ю б ы х в н а ч е н и й x и φ :

$$818.1. \cos(x \sin \varphi) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi + \dots$$

$$818.2. \sin(x \sin \varphi) = 2J_1(x) \sin \varphi + 2J_3(x) \sin 3\varphi + 2J_5(x) \sin 5\varphi + \dots$$

$$818.3. \cos(x \cos \varphi) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi - \dots$$

$$818.4. \sin(x \cos \varphi) = 2J_1(x) \cos \varphi - 2J_3(x) \cos 3\varphi + 2J_5(x) \cos 5\varphi - \dots$$

Б е с с е л е в ы ф у н к ц и и о т а р г у м е н т а $xi\sqrt{i}$
п е р в о г о р о д а

$$820.1. \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x = J_0(xi\sqrt{i}) = I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber}_0 x + i \operatorname{bei}_0 x.$$

$$820.2. \operatorname{ber}' x = \frac{d}{dx} \operatorname{ber} x, \text{ и т. д.}$$

$$820.3. \operatorname{ber} x = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{(4!)^2} - \dots$$

$$820.4. \operatorname{bei} x = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{(5!)^2} - \dots$$

$$820.5. \operatorname{ber}' x = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{3!4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{11}}{5!6!} + \dots$$

$$820.6. \operatorname{bei}' x = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{2!3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{4!5!} - \dots$$

821.1. Для больших значений x

$$\operatorname{ber} x \approx \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right],$$

$$821.2. \quad \text{bei } x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right],$$

где

$$821.3. \quad L_0(x) \approx 1 + \frac{1^2}{1! 8x} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} \cos \frac{2\pi}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} \cos \frac{3\pi}{4} + \dots,$$

$$821.4. \quad M_0(x) \approx -\frac{1^2}{1! 8x} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} \sin \frac{2\pi}{4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} \sin \frac{3\pi}{4} - \dots$$

$$821.5. \quad \text{ber}' x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \right. \\ \left. - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

$$821.6. \quad \text{bei}' x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right],$$

где

$$821.7. \quad S_0(x) \approx 1 - \frac{1 \cdot 3}{1! 8x} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2! (8x)^2} \cos \frac{2\pi}{4} - \\ - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3! (8x)^3} \cos \frac{3\pi}{4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}{4! (8x)^4} \cos \frac{4\pi}{4} - \dots$$

$$821.8. \quad T_0(x) \approx \frac{1 \cdot 3}{1! 8x} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2! (8x)^2} \sin \frac{2\pi}{4} + \\ + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3! (8x)^3} \sin \frac{3\pi}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}{4! (8x)^4} \sin \frac{4\pi}{4} + \dots$$

822.1. При n целом положительном

$$\text{ber}_n x + i \text{bei}_n x = J_n(x/\sqrt{i}) = i^n I_n(x/\sqrt{i}).$$

$$822.2. \quad \text{ber}_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

$$822.3. \quad \text{bei}_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p+1} \left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

$$822.4. \operatorname{ber}'_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{n}{2} + p\right) \left(\frac{1}{2} x\right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

$$822.5. \operatorname{bei}'_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p+1} \left(\frac{n}{2} + p\right) \left(\frac{1}{2} x\right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

823.1. Для больших значений x , при целом положительном n :

$$\operatorname{ber}_n x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[L_n(x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) - M_n(x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$

$$823.2. \operatorname{bei}_n x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[M_n(x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) + L_n(x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right],$$

где

$$823.3. L_n(x) \approx 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} \cos \frac{2\pi}{4} - \dots$$

$$823.4. M_n(x) \approx \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} \sin \frac{\pi}{4} + \dots$$

$$823.5. \operatorname{ber}'_n x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[S_n(x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) - T_n(x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$

$$823.6. \operatorname{bei}'_n x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[T_n(x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) + S_n(x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right],$$

где

$$823.7. S_n(x) \approx 1 - \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1! 8x} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2! (8x)^2} \cos \frac{2\pi}{4} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3! (8x)^3} \cos \frac{3\pi}{4} + \dots$$

$$823.8. T_n(x) \approx \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1! 8x} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2! (8x)^2} \sin \frac{2\pi}{4} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3! (8x)^3} \sin \frac{3\pi}{4} - \dots$$

Бесселевы функции от аргумента $xi\sqrt{i}$
второго рода

$$824.1. \quad \ker x + i \operatorname{kei} x = K_0(x\sqrt{i}).$$

$$824.2. \quad \ker' x = \frac{d}{dx} \ker x, \text{ и т. д.}$$

$$824.3. \quad \ker x = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei} x -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^8}{(4!)^2} -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^{12}}{(6!)^2} + \dots,$$

где $C = 0,5772157$. (См. 851.1.)

$$824.4. \quad \operatorname{kei} x = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber} x +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^6}{(3!)^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^{10}}{(5!)^2} - \dots$$

$$824.5. \quad \ker' x = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{ber}' x - \frac{1}{x} \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}' x -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^3}{1! 2!} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^7}{3! 4!} - \dots$$

$$824.6. \quad \operatorname{kei}' x = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \operatorname{bei}' x - \frac{1}{x} \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}' x +$$

$$+ \frac{1}{2} x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^5}{2! 3!} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^9}{4! 5!} - \dots$$

825.1. Для больших значений x

$$\ker x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/V^2} \left[L_0(-x) \cos\left(\frac{x}{V^2} + \frac{\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + M_0(-x) \sin\left(\frac{x}{V^2} + \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

$$825.2. \quad \text{kei } x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/V^2} \left[M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{V^2} + \frac{\pi}{8}\right) - \right. \\ \left. - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{V^2} + \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

См. 821.3 и 821.4 с подстановкой $-x$ вместо x .

$$825.3. \quad \ker' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/V^2} \left[S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{V^2} - \frac{\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{V^2} - \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

$$825.4. \quad \text{kei}' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/V^2} \left[T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{V^2} - \frac{\pi}{8}\right) - \right. \\ \left. - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{V^2} - \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

См. 821.7 и 821.8 с подстановкой $-x$ вместо x .

826.1. При целом положительном n

$$\ker_n x + i \text{kei}_n x = i^{-n} K_n(x\sqrt{i}).$$

$$826.2. \quad \ker_n x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{ber}_n x + \frac{\pi}{4} \text{bei}_n x +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p} (n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) \times \\ \times \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 826.3. \quad \text{kei}_n x &= \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}_n x - \frac{\pi}{4} \text{ber}_n x + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p} (n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p-n} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4} - \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{1}{2} x \right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 826.4. \quad \text{ker}'_n x &= \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{ber}'_n x - \frac{\text{bei}_n x}{x} + \frac{\pi}{4} \text{bei}'_n x + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p} (2p-n) (n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p-n-1} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4} + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{(-1)^{n+p} (n+2p) \left(\frac{1}{2} x \right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \cos \frac{(n+2p)\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 826.5. \quad \text{kei}'_n x &= \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}'_n x - \frac{\text{bei}_n x}{x} - \frac{\pi}{4} \text{ber}'_n x + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p} (2p-n) (n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p-n-1} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4} - \\
 &- \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{(-1)^{n+p} (n+2p) \left(\frac{1}{2} x \right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \sin \frac{(n+2p)\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

827.1. Для больших значений x при целом положительном n :

$$\begin{aligned}
 \text{ker}_n x &= \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[L_n(-x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_n(-x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 827.2. \quad \text{kei}_n x &= \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[M_n(-x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - L_n(-x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

[См. 823.3 и 823.4.]

$$827.3. \quad \ker_n' x = - \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[S_n(-x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) + T_n(-x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$

$$827.4. \quad \operatorname{kei}_n' x = - \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[T_n(-x) \cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) - S_n(-x) \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \right) \right]. \quad [\text{См. 823.7 и 823.8.}]$$

Нужно заметить, что ряды для больших значений x — это асимптотические разложения, и степень точности, которую они дают, ограничена.

Рекуррентные формулы

$$828.1. \quad \operatorname{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}' x - \operatorname{bei}' x).$$

$$828.2. \quad \operatorname{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}' x + \operatorname{bei}' x).$$

$$828.3. \quad \operatorname{ber}_2 x = \frac{2 \operatorname{bei}' x}{x} - \operatorname{ber} x. \quad 828.4. \quad \operatorname{bei}_2 x = - \frac{2 \operatorname{ber}' x}{x} - \operatorname{bei} x.$$

$$828.5. \quad \operatorname{ber}_2' x = - \operatorname{ber}' x - \frac{2 \operatorname{ber}_2 x}{x}.$$

$$828.6. \quad \operatorname{bei}_2' x = - \operatorname{bei}' x - \frac{2 \operatorname{bei}_2 x}{x}.$$

$$829.1. \quad \operatorname{ber}_{n+1} x = - \frac{n\sqrt{2}}{x} (\operatorname{ber}_n x - \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{ber}_{n-1} x.$$

$$829.2. \quad \operatorname{bei}_{n+1} x = - \frac{n\sqrt{2}}{x} (\operatorname{ber}_n x + \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{bei}_{n-1} x.$$

$$829.3. \quad \operatorname{ber}_n' x = - \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n-1} x + \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n \operatorname{ber}_n x}{x}.$$

$$829.4. \quad \operatorname{bei}_n' x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n-1} x - \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n \operatorname{bei}_n x}{x}.$$

830. Формулы 828—829 годятся и для бесселевых функций второго рода, если заменить ber на $\ker$ и bei на kei .

Таблицы значений функций от аргумента $x/\sqrt{2}$ см. [8], [11], [16].

Бесселевы функции — Интегралы

$$835.1. \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x).$$

$$835.2. \int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x).$$

$$835.3. \int x^n I_{n-1}(x) dx = x^n I_n(x).$$

$$835.4. \int x^{-n} I_{n+1}(x) dx = x^{-n} I_n(x).$$

$$835.5. \int x^n K_{n-1}(x) dx = -x^n K_n(x).$$

$$835.6. \int x^{-n} K_{n+1}(x) dx = -x^{-n} K_n(x).$$

$$836.1. \int_0^x x \operatorname{ber} x dx = x \operatorname{bei}' x.$$

$$836.2. \int_0^x x \operatorname{bei} x dx = -x \operatorname{ber}' x.$$

$$836.3. \int_0^x x \operatorname{ker} x dx = x \operatorname{kei}' x.$$

$$836.4. \int_0^x x \operatorname{kei} x dx = -x \operatorname{ker}' x.$$

$$837.1. \int x (\operatorname{ber}_n^2 x + \operatorname{bei}_n^2 x) dx = x (\operatorname{ber}_n x \operatorname{bei}_n' x - \operatorname{bei}_n x \operatorname{ber}_n' x).$$

$$837.2. \int x (\operatorname{ber}_n'^2 x + \operatorname{bei}_n'^2 x) dx = x (\operatorname{ber}_n x \operatorname{ber}_n' x + \operatorname{bei}_n x \operatorname{bei}_n' x).$$

XI.

СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ (МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА)

840. $P_0(\mu) = 1.$

$$P_1(\mu) = \mu.$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1).$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu).$$

$$P_4(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4} (5 \cdot 7\mu^4 - 2 \cdot 3 \cdot 5\mu^2 + 1 \cdot 3).$$

$$P_5(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4} (7 \cdot 9\mu^5 - 2 \cdot 5 \cdot 7\mu^3 + 3 \cdot 5\mu).$$

$$P_6(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} (7 \cdot 9 \cdot 11\mu^6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\mu^4 + \\ + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\mu^2 - 1 \cdot 3 \cdot 5).$$

$$P_7(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} (9 \cdot 11 \cdot 13\mu^7 - 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11\mu^5 + \\ + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\mu^3 - 3 \cdot 5 \cdot 7\mu).$$

.....

Коэффициенты в скобках составлены из биномиальных коэффициентов, а затем других множителей.

841.
$$P_m(\mu) = \frac{(2m-1)(2m-3) \dots 1}{m!} \left[\mu^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)} \mu^{m-2} + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} \mu^{m-4} - \dots \right].$$

При нечетном m ряд кончается членом, содержащим μ , а при четном m — членом, не зависящим от μ .

842. $(m+1)P_{m+1}(\mu) = (2m+1)\mu P_m(\mu) - mP_{m-1}(\mu).$

843. $(\mu^2 - 1)P'_m(\mu) = m\mu P_m(\mu) - mP_{m-1}(\mu).$

844. Для больших значений m

$$P_m(\cos \theta) \approx \left(\frac{2}{m\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sin \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$844.1. \quad P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m.$$

$$844.2. \quad P_m(1) = 1.$$

$$844.3. \quad P_{2m}(-x) = P_{2m}(x).$$

$$844.4. \quad P_{2m+1}(-x) = -P_{2m+1}(x).$$

$$845. \quad \text{Первые производные } P'_m(\mu) = \frac{d}{d\mu} P_m(\mu).$$

$$P'_0(\mu) = 0.$$

$$P'_1(\mu) = 1.$$

$$P'_2(\mu) = 3\mu.$$

$$P'_3(\mu) = \frac{1}{2} (3 \cdot 5\mu^2 - 1 \cdot 3).$$

$$P'_4(\mu) = \frac{1}{2} (5 \cdot 7\mu^3 - 3 \cdot 5\mu).$$

$$P'_5(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4} (5 \cdot 7 \cdot 9\mu^4 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\mu^2 + 1 \cdot 3 \cdot 5).$$

$$P'_6(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4} (7 \cdot 9 \cdot 11\mu^5 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\mu^3 + 3 \cdot 5 \cdot 7\mu).$$

$$P'_7(\mu) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} (7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13\mu^6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11\mu^4 + \\ + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\mu^2 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7).$$

Коэффициенты в скобках составлены из биномиальных коэффициентов, а затем других множителей.

Таблицу значений многочленов Лежандра см. [16].

XII.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$850.1. \quad \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{n-1} dx = \Gamma(n).$$

$\Gamma(n)$ — гамма-функция. Интеграл имеет конечную величину при $n > 0$.

$$850.2. \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

$$850.3. \quad \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad [n \text{ не целое}].$$

$$850.4. \quad \Gamma(n) = (n-1)!; \text{ когда } n \text{ целое положительное.}$$

$$850.5. \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

$$850.6. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad 850.7. \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$850.8. \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-3)(2n-1) \sqrt{\pi}/2^n$$

(n целое положительное).

$$851.1. \quad \ln \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{S_2 x^2}{2} - \frac{S_3 x^3}{3} + \frac{S_4 x^4}{4} - \dots \quad [x' < 1],$$

где C — эйлерова постоянная:

$$C = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\ln p + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right] = 0,5772157$$

и

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots = \zeta(p). \quad [\text{См. 480.}]$$

$$851.2. \quad \ln \Gamma(1+x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x\pi}{\sin x\pi} - Cx - \frac{S_3 x^3}{3} - \frac{S_5 x^5}{5} - \dots \quad [x^2 < 1].$$

$$851.3. \quad \ln \Gamma(1+x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x\pi}{\sin x\pi} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \\ + (1-C)x - (S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - \dots$$

Для значений x больше чем $\frac{1}{2}$ использовать 850.2 и 850.3 и эти ряды.

$$851.4. \quad \Gamma(x+1) \approx x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \right. \\ \left. - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \dots \right].$$

Эта формула дает асимптотическое выражение для x , когда x — большое целое число. [См. 11.]

$$851.5. \quad \ln \Gamma(x+1) \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x + \\ + \frac{B_1}{1 \cdot 2x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4x^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6x^5} - \dots$$

[$B_1, B_2, \dots$ — числа Бернулли]. [См. 45 и 47.1.]

Это — асимптотический ряд Стирлинга. Абсолютная величина ошибки меньше, чем абсолютная величина первого отброшенного члена.

$$852.1. \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -C,$$

где $C = 0,5772157$, как в 851.1.

$$853.11. \quad \Pi(n) = \Gamma(n+1).$$

[См. 850.]

$\Pi(n)$ иногда называют *гауссовой функцией*.

$$853.12. \quad \text{При } n \text{ целом положительном } \Pi(n) = n!.$$

$$853.13. \quad \Pi(0) = 1.$$

$$853.21. \quad \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m, n) \text{ (бета-функция)} \\ [m, n > 0].$$

$$854.11. \quad \int_0^1 \frac{x^p dx}{1+x} = (-1)^p \left\{ \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^p}{p} \right\}$$

[$p = 1, 2, \dots$].

$$854.12. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{1+x^q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \dots \quad [p, q > 0].$$

[См. 35.]

$$854.21. \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$854.22. \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$855.11. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1-x)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad [0 < p < 1].$$

$$855.12. \quad \int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} \quad [-1 < p < 1].$$

$$855.13. \quad \int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^q + x^{-q}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q \cos \left(\frac{p}{q} \frac{\pi}{2} \right)} \quad [-q < p < q].$$

$$855.14. \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^q)^{1/q}} = \frac{\pi}{q \sin \frac{\pi}{q}} \quad [q > 1].$$

$$855.15. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^q)^{p/q}} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}} \quad [0 < p < q].$$

$$855.21. \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad [m, n > 0].$$

$$855.31. \quad \int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots m} \quad [m - \text{нечетное целое} > 1],$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m} \frac{\pi}{2} \quad [m - \text{четное положительное целое}],$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \quad [m - \text{произвольное} > -1].$$

[Положить $\sin x = y$ в 858.44 или 858.45.]

$$855.32. \int_0^1 x^m \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{m+2} \int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

[m — произвольное > -1]. [См. 855.31.]

$$855.33. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad [n > 0].$$

$$855.34. \int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad [m+1, n > 0].$$

$$855.41. \int_0^1 x^m (1-x^2)^p dx = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(p + \frac{m+3}{2}\right)} \quad [p+1, m+1 > 0].$$

$$855.42. \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1 + \frac{m+1}{n}\right)} \quad [p+1, m+1, n > 0].$$

$$855.51. \int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1} dx = a^{m+n-1} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad [a, m, n > 0].$$

$$856.01. \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^q} = \frac{\pi}{\sin q\pi} \quad [0 < q < 1].$$

Положить $q = 1 - p$. Тогда

$$856.02. \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi - p\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad [0 < p < 1].$$

$$856.03. \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

$$856.04. \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{a+x} = \frac{\pi a^{p-1}}{\sin p\pi} \quad [a > 0, 0 < p < 1].$$

$$856.05. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}} \quad [p > 1].$$

$$856.06. \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+ax)^2} = \frac{p\pi}{a^{p+1} \sin p\pi} \quad [a > 0, 0 < p < 1].$$

$$856.07. \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} \quad [-1 < p < 1].$$

$$856.08. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}} \quad [0 < p < q].$$

$$856.11. \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad [m, n > 0].$$

$$856.12. \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{a^n b^m \Gamma(m+n)} \quad [a, b, m, n > 0].$$

$$856.21. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2n^{2n-1}} \quad [a > 0; n=2, 3, \dots].$$

$$856.31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)} \quad [a, b > 0].$$

$$856.32. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(a^n+x^n)} = \frac{\pi}{4a^{n+1}} \quad [a > 0].$$

$$856.33. \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} \right) \frac{dx}{x} = 0.$$

$$857.01. \int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arccotg} \frac{b}{\sqrt{ac-b^2}} \quad [a, ac-b^2 > 0; \text{ см. 500.}]$$

$$857.02. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \quad [a, c, b\sqrt{c} + c\sqrt{a} > 0].$$

$$857.03. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{1}{a \sqrt{c} + b \sqrt{a}} \quad [a, c, a \sqrt{c} + b \sqrt{a} > 0].$$

$$857.11. \int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^4 + 2bx^2 + a} = \frac{\pi}{2 \sqrt{ch}},$$

$$\text{где } h = 2(b + \sqrt{ac}) \quad [a, c, h > 0]$$

$$858.1. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}. \quad 858.2. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$858.3. \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Среднее значение $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$ на любом интервале, концы которого кратны $\frac{\pi}{2}$, равно $\frac{1}{2}$.

$$858.41. \int_0^{\pi/2} \sin^2 mx dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 mx dx = \frac{\pi}{4} \quad [m = 1, 2, \dots].$$

$$858.42. \int_0^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_0^{\pi} \cos^2 mx dx = \frac{\pi}{2} \quad [m = 1, 2, \dots].$$

$$858.43. \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \pi \quad [m = 1, 2, \dots].$$

$$\begin{aligned} 858.44. \int_0^{\pi/2} \sin^p x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^p x dx = \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (p-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p} \quad [p - \text{нечетное целое число} \\ &\quad > 1], \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots p} \frac{\pi}{2} \quad [p - \text{четное целое положи-} \\ &\quad \text{тельное число}], \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)} \quad [p - \text{произвольное } > -1]. \end{aligned}$$

Полагая $m = 0$ в 858.502, получим тот же результат, что и в 858.44, несколько в другой форме.

$$858.45. \int_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x \, dx = \frac{\pi \Gamma(p+1)}{2^{p+1} \left\{ \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right\}^2} \quad [p > -1].$$

$$858.46. \int_0^{\pi} \sin^p x \, dx = \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)} \quad [p > -1],$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx.$$

[См. 858.44. Можно использовать также и 858.45.]

$$858.47. \int_0^{\pi} x \sin^p x \, dx = \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)} \quad [p > -1],$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx.$$

[См. 858.44. Можно использовать также и 858.45.]

$$858.48. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^p x \, dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} \quad [p^2 < 1].$$

$$858.491. \int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\sin x} = 2G = 2.0,9159656. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$858.492. \int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$858.493. \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \, dx}{\sin^2 x} = \pi \ln 2.$$

$$858.501. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \quad [m+1 > 0].$$

$$858.502. \int_0^{\pi/2} \cos^p x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)} \\ [p+1, p+m+2, p-m+2 > 0].$$

$$858.503. \int_0^{\pi} \sin^m x \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2^m} \sin \frac{m\pi}{2} \quad [m+1 > 0].$$

$$858.504. \int_0^{\pi} \sin^p x \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)} \\ [p+1, p+m+2, p-m+2 > 0].$$

$$858.505. \int_0^{\pi} \sin^m x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^m} \cos \frac{m\pi}{2} \quad [m+1 > 0].$$

$$858.506. \int_0^{\pi} \sin^p x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)} \\ [p+1, p+m+2, p-m+2 > 0].$$

$$858.511. \int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x \, dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!2}.$$

$$858.512. \int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2a) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2b-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a+2b+1)}.$$

$$858.513. \int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2b)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a+2b+1)}.$$

$$858.514. \int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b} x \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2b-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2a+2b)}.$$

В 858.511—514 a и b — целые положительные числа

$$858.515. \int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)} \\ [p \text{ и } q \text{ произвольные числа } > -1].$$

$$858.516. \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad [m \neq n],$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad [m = n]$$

[m и n — целые числа].

$$858.517. \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad [m \neq n],$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad [m = n]$$

[m и n — целые числа].

$$858.518. \int_0^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad [m = n],$$

$$= 0 \quad [m \neq n; (m+n) \text{ четно}],$$

$$= \frac{2m}{m^2 - n^2} \quad [m \neq n; (m+n) \text{ нечетно}]$$

[m и n — целые числа].

$$858.520. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a \sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

В формулах 858.520—858.535 $0 < a < 1$ и, следовательно, углы $\arcsin a$ и $\arccos a$ лежат в первом квадранте.

$$858.521. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-a \sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.522. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a \sin x} = \frac{\pi - 2 \arcsin a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{2 \arccos a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.523. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1-a \sin x} = \frac{\pi + 2 \arcsin a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.524. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 \pm a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

$$858.525. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 \pm a \sin x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 \pm a \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

$$858.530. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a \sin x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a \cos x)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} - \frac{a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.531. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a \sin x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a \cos x)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} + \frac{a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.532. \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+a \sin x)^2} = \frac{\pi - 2 \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} - \frac{2a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.533. \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-a \sin x)^2} = \frac{\pi + 2 \arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}} + \frac{2a}{1-a^2}.$$

[См. примечание к 858.520.]

$$858.534. \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \cos x)^2} = \frac{\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$$

$$858.535. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \sin x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 \pm a \cos x)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$$

$$858.536. \int_0^{\pi} \frac{\cos mx \, dx}{1+a \cos x} = \frac{\pi (\sqrt{1-a^2}-1)^m}{a^m \sqrt{1-a^2}} \quad [0 < a < 1; m = 0, 1, 2, \dots].$$

$$858.537. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} = \frac{1}{ab} \quad [a, b > 0].$$

$$858.540. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

$$858.541. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-a^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \quad [a^2 < 1].$$

$$858.542. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a^2 \sin^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{2+a^2}{(1+a^2)^{3/2}}.$$

$$858.543. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2 \sin^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{2-a^2}{(1-a^2)^{3/2}} \quad [a^2 < 1].$$

$$858.544. \int_0^{\pi} \frac{x \sin mx \, dx}{1 + \cos^2 mx} = \frac{\pi^2}{4m^2} \quad [m > 0].$$

$$858.545. \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \cos \varphi \sin x} = \frac{\pi \varphi}{\sin \varphi}.$$

$$858.546. \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \quad [a, a^2 - b^2 > 0].$$

$$858.550. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \quad [ab > 0].$$

$$858.551. \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{ab} \quad [ab > 0].$$

$$858.552. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\pi}{2a(a+b)} \quad [a, b > 0].$$

$$858.553. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2b(a+b)} \quad [a, b > 0].$$

$$858.554. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 + b^3}{a^3 b^3} \quad [ab > 0].$$

$$858.555. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b} \quad [ab > 0].$$

$$858.556. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3} \quad [ab > 0].$$

$$858.560. \int_0^{\infty} \sin(a^2 x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{2}} \quad [a > 0].$$

$$858.561. \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi x^2}{2} dx = \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi x^2}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

[Интегралы Френеля.]

$$858.562. \int_0^{\infty} \sin(x^p) dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \sin \frac{\pi}{2p} \quad [p > 1].$$

$$858.563. \int_0^{\infty} \cos(x^p) dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cos \frac{\pi}{2p} \quad [p > 1].$$

$$858.564. \int_0^{\infty} \sin a^2 x^2 \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m^2}{4a^3}\right) \quad [a > 0].$$

$$858.565. \int_0^{\infty} \cos a^2 x^2 \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m^2}{4a^3}\right) \quad [a > 0].$$

$$858.601. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \text{ или } -\frac{\pi}{2} \text{ в зависимости от того,}$$

будет ли m положительным, нулем или отрицательным.

$$858.611. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx - \cos nx}{x} dx = \ln \frac{n}{m} \quad [m, n > 0].$$

$$858.621. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \text{ или } -\frac{\pi}{2} \text{ в зависимости от того,}$$

будет ли m положительным, нулем или отрицательным.

$$858.630. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 mx}{x} dx = \infty.$$

$$858.631. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx - \sin^2 nx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{m}{n} \quad [m, n \neq 0].$$

$$858.632. \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{n}{m} \quad [m, n \neq 0].$$

$$858.641. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 mx}{x} dx = \frac{\pi}{4} \quad [m > 0].$$

$$858.649. \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2p+1} mx}{x} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p)} \frac{\pi}{2} \\ [p = 1, 2, 3, \dots; m > 0].$$

$$858.650. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2} dx = \infty.$$

$$858.651. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} dx = (n - m) \frac{\pi}{2} \quad [n > m > 0].$$

$$858.652. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = |m| \frac{\pi}{2}. \quad [\text{См. 858.711}]$$

$$858.653. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 mx}{x^2} dx = \frac{3}{4} m \ln 3.$$

$$858.654. \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 mx}{x^2} dx = |m| \frac{\pi}{4}.$$

$$858.659. \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2p} mx}{x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p-2)} \frac{|m| \pi}{2} \quad [p = 2, 3, 4, \dots].$$

$$858.661. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 mx}{x^3} dx = \frac{3}{8} m^2 \pi \quad [m > 0].$$

$$858.701. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \cos nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad [m > n > 0],$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad [m = n > 0],$$

$$= 0 \quad [n > m > 0].$$

$$858.702. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \sin nx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{m+n}{m-n} \quad [m > n > 0].$$

$$858.703. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx \cos nx}{x} dx = \infty.$$

$$858.704. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{4} \quad [2a > m > 0],$$

$$= \frac{\pi}{8} \quad [2a = m > 0],$$

$$= 0 \quad [m > 2a > 0].$$

$$858.711. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \sin nx}{x^2} dx = \frac{m\pi}{2} \quad [n \geq m > 0],$$

$$= \frac{n\pi}{2} \quad [m \geq n > 0].$$

$$858.712. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x^2} dx = \frac{m+2a}{4} \ln |m+2a| +$$

$$+ \frac{m-2a}{4} \ln |m-2a| - \frac{m}{2} \ln m \quad [m > 0].$$

$$858.713. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax \cos mx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{m}{2} \right) \quad \left[a > \frac{m}{2} > 0 \right],$$

$$= 0 \quad \left[\frac{m}{2} \geq a \geq 0 \right].$$

$$858.721. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos mx}{x^2} dx = \frac{\pi |m|}{2}.$$

$$858.731. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x^3} dx = \frac{\pi am}{2} - \frac{\pi m^2}{8} \quad \left[a \geq \frac{m}{2} > 0 \right],$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} \quad \left[\frac{m}{2} \geq a > 0 \right].$$

$$858.801. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} \quad [m > 0].$$

$$858.802. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x \sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi m} \quad [m > 0].$$

$$858.811. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x^p} dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \Gamma(p)} \quad [0 < p < 2; m > 0].$$

К тому же численному результату приводит другая формула:

$$858.812. \int_0^{\infty} x^{q-1} \sin mx dx = \frac{\Gamma(q)}{m^q} \sin \frac{q\pi}{2}. \quad [0 < q^2 < 1; m > 0].$$

Для q , близкого к нулю и равного нулю, пользоваться формулами 858.601 или 858.811.

$$858.813. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^p} dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2 \cos \frac{p\pi}{2} \Gamma(p)} \quad [0 < p < 1; m > 0].$$

К тому же численному результату приводит другая формула:

$$858.814. \int_0^{\infty} x^{q-1} \cos mx dx = \frac{\Gamma(q)}{m^q} \cos \frac{q\pi}{2} \quad [0 < q < 1; m > 0].$$

$$858.821. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \cos nx}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{m+n}} + \frac{1}{\sqrt{m-n}} \right\} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad [m > n > 0],$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{m+n}} - \frac{1}{\sqrt{n-m}} \right\} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad [n > m > 0].$$

$$858.822. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x \sqrt{x}} dx = \sqrt{m\pi} \quad [m > 0].$$

$$858.823. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 mx}{\sqrt{x}} dx = \frac{(3\sqrt{3}-1)}{4} \sqrt{\frac{\pi}{6m}} \quad [m > 0].$$

$$858.824. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 mx}{x \sqrt{x}} dx = \frac{(3-\sqrt{3})}{4} \sqrt{2m\pi} \quad [m > 0].$$

$$858.831. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$858.832. \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2m} (1 - e^{-am}) \quad [a, m > 0]$$

$$858.841. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = K(k) \quad [0 < k < 1].$$

$$858.842. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{x \sqrt{1 - k^2 \cos^2 x}} = K(k) \quad [0 < k < 1].$$

$$858.843. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x \, dx}{x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} \{E(k) - (1 - k^2) K(k)\} \quad [0 < k < 1].$$

Для 858.841—843. См. 773,1, 774,1.

$$859.001. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad [a > 0; m \geq 0].$$

$$859.002. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{4a} (1 - e^{-2ma}) \quad [a > 0; m \geq 0].$$

$$859.003. \int_0^{\infty} \frac{\cos' mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{4a} (1 + e^{-2ma}) \quad [a > 0; m \geq 0].$$

$$859.004. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad [a \geq 0; m > 0].$$

$$859.005. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(a^2 + x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-ma}) \quad [a > 0; m \geq 0].$$

$$859.006. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \sin nx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \operatorname{sh} na \quad [a > 0; m \geq n \geq 0].$$

$$859.007. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx \cos nx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \operatorname{ch} na \quad [a > 0; m \geq n \geq 0].$$

$$859.008. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx \cos nx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \operatorname{ch} na \quad [a > 0; m > n > 0].$$

$$= -\frac{\pi}{2} e^{-na} \operatorname{sh} ma \quad [a > 0; n > m > 0].$$

$$859.011. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad [a, m > 0].$$

$$859.012. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad [a, m > 0].$$

$$859.013. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos mx}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad [a, m > 0].$$

$$859.014. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^4} \left(1 - \frac{2 + ma}{2} e^{-ma} \right) \quad [a, m > 0].$$

$$859.021. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \left(\frac{e^{-mb}}{b} - \frac{e^{-ma}}{a} \right) \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} \\ [a, b, m > 0; a \neq b].$$

$$859.022. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \left(\frac{e^{-mb} - e^{-ma}}{a^2 - b^2} \right) \frac{\pi}{2} \\ [a, b, m > 0; a \neq b].$$

$$859.031. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi e^{-ma}}{8a^3} (\sin ma + \cos ma).$$

$$859.032. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^4 + 4a^4)} dx = \frac{\pi}{8a^4} (1 - e^{-ma} \cos ma).$$

$$859.033. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{4a^2} e^{-ma} \sin ma.$$

$$859.034. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos mx}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{4a} e^{-ma} (\cos ma - \sin ma).$$

$$859.035. \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin mx}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \cos ma.$$

Для 859.031—035 $a, m > 0$.

$$859.041. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = K_0(ma). \text{ [См. 815.1.] } [ma > 0].$$

$$859.042. \int_0^1 \frac{\cos mx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} J_0(m).$$

$$859.043. \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{a \pm b \cos x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} K\left(\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) \quad [0 < b < a].$$

$$\left[\frac{2b}{a+b} = k^2 = \sin^2 \theta. \text{ См. 773.1.}\right]$$

$$859.100. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2a \sin x + a^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2a \cos x + a^2} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|} = \frac{\arccos \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

[См. примечание к 859.112.]

$$859.101. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - 2a \sin x + a^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

[См. примечание к 859.112.]

$$859.111. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2a \sin x + a^2} = \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|} = \frac{2 \arccos \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

[См. примечание к 859.112.]

$$859.112. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \sin x + a^2} = \frac{\pi + 2 \arcsin \frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

В 859.100—112 $a > 0$; $a \neq 1$; $\arcsin$ и $\arccos$ везде в первом квадранте.

$$859.113. \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \pm 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{|a^2 - b^2|} \quad [a^2 \neq b^2].$$

$$859.121. \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{2}{a} \operatorname{Arth} a = \frac{1}{a} \ln \frac{1+a}{1-a} \quad [a^2 < 1],$$

$$= \frac{2}{a} \operatorname{Arcth} a = \frac{1}{a} \ln \frac{a+1}{a-1} \quad [a^2 > 1].$$

$$859.122. \int_0^{\pi} \frac{\cos mx \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\pi a^m}{1 - a^2} \quad [a^2 < 1; m = 0, 1, 2, \dots],$$

$$= \frac{\pi}{a^m (a^2 - 1)} \quad [a^2 > 1; m = 0, 1, 2, \dots].$$

$$859.123. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\pi}{a} \ln(1 + a) \quad [a^2 \leq 1],$$

$$= \frac{\pi}{a} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad [a^2 \geq 1].$$

$$859.124. \int_0^{\pi} \frac{(a - b \cos x) \, dx}{a^2 - 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{a} \quad [a > b > 0],$$

$$= 0 \quad [b > a > 0].$$

$$859.131. \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{a^2 - 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{2a^2} \quad [a > b > 0],$$

$$= \frac{\pi}{2b^2} \quad [b > a > 0].$$

$$859.132. \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right) \quad [a^2 < 1],$$

$$= \frac{\pi}{2a^2} \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \right) \quad [a^2 > 1].$$

$$859.141. \int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\pi a^{m-1}}{2} \quad [a^2 < 1; m = 1, 2, 3, \dots],$$

$$= \frac{\pi}{2a^{m+1}} \quad [a^2 > 1; m = 1, 2, 3, \dots].$$

$$859.142. \int_0^{\pi} \frac{\cos x \cos mx \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\pi a^{m-1}}{2} \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right) [a^2 < 1; m = 1, 2, 3, \dots],$$

$$= \frac{\pi}{2a^{m+1}} \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \right) [a^2 > 1; m = 1, 2, 3, \dots].$$

$$859.151. \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{a^2 - 2ab \cos x + b^2}} = \frac{2}{a} \quad [a > b > 0],$$

$$= \frac{2}{b} \quad [b > a > 0].$$

$$859.161. \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x \cos \varphi + x^2} = \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} \quad [-\pi < \varphi < \pi].$$

При $\varphi = 0$:

$$859.162. \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x + x^2} = \frac{1}{2}. \quad [\text{См. 90.2.}]$$

$$859.163. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + 2x \cos \varphi + x^2} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \quad [-\pi < \varphi < \pi].$$

При $\varphi = 0$:

$$859.164. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + 2x + x^2} = 1. \quad [\text{См. 90.2.}]$$

$$859.165. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 - 2x^2 \cos \varphi + x^4} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\varphi}{2}} \quad [0 < \varphi < \pi].$$

$$859.166. \int_0^{\infty} \frac{x^p \, dx}{1 + 2x \cos \varphi + x^2} = \frac{\pi \sin p\varphi}{\sin p\pi \sin \varphi} \quad [0 < p < 1; 0 < \varphi < \pi].$$

$$860.01. \int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a} \quad [a > 0]. \quad 860.02. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a^2} \quad [a > 0].$$

$$860.03. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \, dx = \frac{2}{a^3} \quad [a > 0].$$

$$860.04. \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-ax} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a \sqrt{a}} \quad [a > 0].$$

$$860.05. \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-ax} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \quad [a > 0].$$

$$860.06. \int_0^{\infty} x^{p-\frac{1}{2}} e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+\frac{1}{2}}} \\ [a > 0; p = 1, 2, \dots]. \text{ [См. 860.07, второй вид ответа]}$$

$$860.07. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad [a > 0; n = 1, 2, \dots], \\ = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad [a > 0; n+1 > 0].$$

$$860.11. \int_0^{\infty} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad [r > 0].$$

$$860.12. \int_0^{\infty} x e^{-r^2 x^2} dx = \frac{1}{2r^2}.$$

$$860.13. \int_0^{\infty} x^2 e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4r^3} \quad [r > 0].$$

$$860.15. \int_0^{\infty} x^{2a+1} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{a!}{2r^{2a+2}} \quad [r > 0; a = 1, 2, \dots].$$

$$860.16. \int_0^{\infty} x^{2a} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a-1)}{2^{a+1} r^{2a+1}} \sqrt{\pi} \quad [r > 0; a = 1, 2, \dots].$$

$$860.17. \int_0^{\infty} x^n e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2r^{n+1}} \quad [n+1, r > 0] \\ (\text{положив } m = 2 \text{ в 860.19}).$$

$$860.18. \int_0^{\infty} e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \quad [r, m > 0] \\ (\text{положив } n = 0 \text{ в 860.19}).$$

$$860.19. \int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \quad [n+1, r, m > 0].$$

Все предыдущие формулы 860 могут быть получены из этой при соответствующих значениях n , r и m .

$$860.21. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx = \infty.$$

$$860.22. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad [a, b > 0].$$

$$860.23. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^c} - e^{-bx^c}}{x} dx = \frac{1}{c} \ln \frac{b}{a} \quad [a, b, c > 0].$$

$$860.24. \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} dx = \sqrt{a\pi} \quad [a > 0].$$

$$860.25. \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab} \quad [a, b > 0].$$

$$860.30. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{ax} - 1} = \infty \quad [a > 0].$$

$$860.31. \int_0^{\infty} \frac{x \zeta x}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^2}{6a^3} \quad [a > 0].$$

$$860.32. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{ax} - 1} = \frac{2\zeta(3)}{a^3} = \frac{[2.1, 202057]}{a^3} \quad [a > 0].$$

[См. 48.003.]

$$860.33. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^4}{15a^4} \quad [a > 0].$$

$$860.37. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{e^{ax} - 1} = \frac{(2n-1)!}{a^{2n}} \zeta(2n) = \frac{2^{2n-2} \pi^{2n}}{na^{2n}} B_n$$

$[a > 0; n = 1, 2, \dots].$ [См. 45.]

$$860.38. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{e^{ax} - 1}. \quad [\text{См. 860.39.}]$$

$$860.39. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{e^{ax} - 1} = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \left[1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \right] = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \zeta(p)$$

[$a > 0, p > 1$; p не обязательно целое число]. [См. 48.09.]

Таблицу ζ -функции Римана, содержащую и дробные значения аргумента p , см. [16].

$$860.40. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\ln 2}{a} \quad [a > 0]. \quad [\text{См. } 601.01.]$$

$$860.41. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad [a > 0]. \quad [\text{См. } 48.22.]$$

$$860.42. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{ax} + 1} = \frac{2!}{a^3} \frac{3}{4} \zeta(3) = \frac{3 \cdot 1,202057}{2a^3} \quad [a > 0].$$

[См. 48.003 и 48.23.]

$$860.43. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^{ax} + 1} = \frac{7}{120} \frac{\pi^4}{a^4} \quad [a > 0].$$

$$860.47. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{e^{ax} + 1} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \frac{\pi^{2n}}{a^{2n}} B_n \quad [a > 0; n = 1, 2, \dots].$$

[См. 45 и 48.28.]

$$860.48. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{e^{ax} + 1}. \quad [\text{См. } 860.49.]$$

$$860.49. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \left(1 - \frac{2}{2^p} \right) \zeta(p)$$

[$a, p > 0$; p не обязательно целое число].
[См. 48.29.] [Для $p = 1$ см. 860.40.]

$$860.500. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{e^{ax} - e^{-ax}} = \infty.$$

$$860.501. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^2}{4a^2} \quad [a > 0].$$

$$860.502. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{sh} ax} = 2(2!) \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \right) / a^3,$$

$$= \frac{7}{2a^3} \zeta(3), = 4 \cdot 1,05180 / a^3. \quad [\text{См. 48.13.}]$$

$$860.503. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^4}{8a^4} \quad [a > 0].$$

$$860.504. \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{93}{2} \cdot 1,03693 / a^5.$$

$$860.507. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^{2n} (2^{2n} - 1)}{2na^{2n}} B_n \quad [a > 0; n = 1, 2, \dots].$$

[См. 45 и 48.18.]

$$860.508. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{sh} ax} \quad [\text{См. 860.509.}]$$

$$860.509. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{2\Gamma(p)}{a^p} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p)$$

[$a > 0; p > 1; p$ не обязательно целое число].
[См. 48.19.]

$$860.511. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \infty.$$

$$860.512. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^2}{6a^3} \quad [a > 0].$$

$$860.513. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{3}{2} \cdot 1,202057 / a^4. \quad [\text{См. 48.003.}]$$

$$860.514. \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^3}{30a^5} \quad [a > 0].$$

$$860.518. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^{2n}}{a^{2n+1}} B_n \quad [a > 0]. \quad [\text{См. 45.}]$$

$$860.519. \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1} a^{p+1}} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \right) = \\ = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1} a^{p+1}} \zeta(p)$$

[$a > 0$; $p > 1$; p не обязательно целое число]. [См. 48.09.]

$$860.530. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{\pi}{2a} \quad [a > 0]. \quad [\text{См. 679.10.}]$$

$$860.531. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{ch} ax} = 2G/a^2 = 2 \cdot 0,9159656/a^2. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$860.532. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{\pi^3}{8a^3} \quad [a > 0].$$

$$860.533. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\operatorname{ch} ax} = 12 \cdot 0,98894455/a^4. \quad [\text{См. 48.34.}]$$

$$860.534. \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{5}{32} \frac{\pi^5}{a^5} \quad [a > 0].$$

$$860.538. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{\pi^{2n+1}}{(2a)^{2n+1}} E_n \quad [a > 0; n = 0, 1, 2, \dots]. \quad [\text{См. 45.}]$$

$$860.539. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2\Gamma(p)}{a^p} \left(1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{7^p} + \dots \right) \quad [a, p > 0].$$

Для целых значений p см. 48.31—39. Для p нецелых сумму ряда приходится находить численно.

$$860.541. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\ln 2}{a^2}.$$

$$860.542. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\pi^2}{12a^3} \quad [a > 0].$$

$$860.543. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{9}{8} \cdot 1,202057/a^4 = \frac{9}{8} \frac{\zeta(3)}{a^4}.$$

$$860.544. \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{7}{240} \frac{\pi^4}{a^5} \quad [a > 0].$$

$$860.548. \int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{(2^{2n-1} - 1)}{2^{2n-1} a^{2n+1}} \pi^{2n} B_n \quad [a > 0; n = 1, 2, \dots].$$

[См. 45.]

$$860.549. \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\left(1 - \frac{2}{2^p}\right)}{2^{p-1}} \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \zeta(p) \quad [a > 0; p > 1].$$

При $p = 1$ см. 860.541. [См. 48.29.]

$$860.80. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin mx dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad [a > 0].$$

$$860.81. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \sin mx dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad [a > 0].$$

$$860.82. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \sin mx dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad [a > 0].$$

$$860.89. \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} \sin mx dx = \frac{\Gamma(p) \sin p\theta}{(a^2 + m^2)^{p/2}} \quad [p, a, m > 0],$$

где $\sin \theta = m/r$, $\cos \theta = a/r$, $r = (a^2 + m^2)^{1/2}$.

$$860.90. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad [a > 0].$$

$$860.91. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad [a > 0].$$

$$860.92. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos mx dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad [a > 0].$$

$$860.99. \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} \cos mx dx = \frac{\Gamma(p) \cos p\theta}{(a^2 + m^2)^{p/2}}$$

$[a, p > 0]$, определение θ см. в 860.89.

$$861.01. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \sin mx \, dx = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} \quad [a > 0].$$

$$861.02. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \cos mx \, dx = \infty.$$

$$861.03. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} (1 - \cos mx) \, dx = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{m^2}{a^2} \right) \quad [a > 0].$$

$$861.04. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} (\cos mx - \cos nx) \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + n^2}{a^2 + m^2} \quad [a > 0].$$

$$861.05. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2} \quad [a, b > 0].$$

$$861.06. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos^2 mx \, dx = \frac{a^2 + 2m^2}{a(a^2 + 4m^2)} \quad [a > 0].$$

$$861.10. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^2 mx \, dx = \frac{2m^2}{a(a^2 + 4m^2)} \quad [a > 0].$$

$$861.11. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{a^2} \right) \quad [a > 0].$$

$$861.12. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x^2} \sin^2 mx \, dx = m \operatorname{arctg} \frac{2m}{a} - \frac{a}{4} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{a^2} \right) \quad [a > 0].$$

$$861.13. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{2amn}{\{a^2 + (m-n)^2\} \{a^2 + (m+n)^2\}} \quad [a > 0].$$

$$861.14. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{\{a^2 + (m-n)^2\} \{a^2 + (m+n)^2\}} \quad [a > 0].$$

$$861.15. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{a(a^2 + m^2 + n^2)}{\{a^2 + (m-n)^2\} \{a^2 + (m+n)^2\}} \quad [a > 0].$$

$$861.16. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{4} \ln \frac{a^2 + (m+n)^2}{a^2 + (m-n)^2} \quad [a > 0].$$

$$861.20. \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos mx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad [a > 0].$$

$$861.21. \int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} \sin mx \, dx = \frac{m \sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad [a > 0].$$

$$861.22. \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 x^2}}{x} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{m}{2a} \right) \quad [a > 0].$$

[См. 590.] Таблицы см. [196].

$$861.31. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos mx \, dx = \frac{(a + \sqrt{a^2 + m^2})^{1/2} \sqrt{\pi}}{(a^2 + m^2)^{1/2} \sqrt{2}} \quad [a > 0].$$

$$861.32. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \sqrt{mx} \, dx = \frac{\sqrt{\pi m}}{2a \sqrt{a}} e^{-\frac{m}{4a}} \quad [a, m > 0].$$

$$861.33. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{mx} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{m}{4a}} \quad [a, m > 0].$$

$$861.41. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin (px + q) \, dx = \frac{a \sin q + p \cos q}{a^2 + p^2} \quad [a > 0].$$

$$861.42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos (px + q) \, dx = \frac{a \cos q - p \sin q}{a^2 + p^2} \quad [a > 0].$$

$$861.51. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$861.61. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{\operatorname{sh} ax} \, dx = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin mx}{e^{ax} - e^{-ax}} \, dx = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi m}{2a} \quad [a > 0].$$

$$861.62. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\operatorname{ch} ax} \, dx = \frac{\pi}{2a \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2a}} \quad [a > 0].$$

$$861.63. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx} dx = \frac{\pi}{2q} \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2q} \quad [-q < p < q; q > 0].$$

$$861.64. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} qx} dx = \frac{\pi}{2q \cos \frac{\pi p}{2q}} \quad [-q < p < q; q > 0].$$

$$861.65. \int_0^{\infty} \operatorname{th} qx \sin mx dx = \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi m}{2q}} \quad [q > 0].$$

$$861.66. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{\operatorname{th} qx} dx = \frac{\pi}{2q \operatorname{th} \frac{\pi m}{2q}} \quad [q > 0].$$

$$861.71. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \cos nx}{\operatorname{sh} ax} dx = \frac{\pi \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a}}{2a \left(\operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} + \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} \right)} \quad [a > 0].$$

$$861.72. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx \cos nx}{\operatorname{ch} ax} dx = \frac{\pi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2a}}{a \left(\operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} + \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} \right)} \quad [a > 0].$$

$$861.73. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\operatorname{ch} ax} dx = \frac{\pi m}{2a^2 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2a}} \quad [a > 0].$$

$$861.81. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{\operatorname{ch} ax} dx = \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi m}{2a}}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi m}{2a} \right)} \quad [a > 0].$$

$$861.82. \int_0^{\infty} \frac{x \cos mx}{\operatorname{sh} ax} dx = \frac{\pi^2}{4a^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi m}{2a} \right)} \quad [a > 0].$$

$$861.83. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} ax}{x} \cos mx dx = \ln \operatorname{cth} \frac{\pi m}{4a} \quad [a, m > 0].$$

$$862.01. \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sh} bx \, dx = \frac{b}{a^2 - b^2} \quad [a > b \geq 0].$$

$$862.02. \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{a}{a^2 - b^2} \quad [a > b \geq 0].$$

$$862.03. \int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} \operatorname{sh} bx \, dx = \frac{b \sqrt{\pi}}{4a^3} e^{\frac{b^2}{4a^2}} \quad [a > 0].$$

$$862.04. \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sh}(b \sqrt{x}) \, dx = \frac{b \sqrt{\pi}}{2a \sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad [a > 0].$$

$$862.11. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{ax} + 1} \, dx = \frac{1}{2m} - \frac{\pi}{2a \operatorname{sh}(\pi m/a)} \quad [a > m > 0].$$

$$862.12. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{ax} - 1} \, dx = \frac{\pi}{2a \operatorname{th}(\pi m/a)} - \frac{1}{2m} \quad [a > m > 0].$$

$$862.21. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} px}{e^{ax} + 1} \, dx = \frac{\pi}{2a \sin(\pi p/a)} - \frac{1}{2p} \quad [a > p > 0].$$

$$862.22. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} px}{e^{ax} - 1} \, dx = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2a \operatorname{tg}(\pi p/a)} \quad [a > p > 0].$$

$$862.31. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \, dx}{(1+x^2) \operatorname{sh} \pi x} = -\frac{m}{2e^m} + (\operatorname{sh} m) \ln(1+e^{-m}) \quad [m > 0].$$

$$862.32. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\pi x}{2}}{1+x^2} \sin mx \, dx = \frac{m}{e^m} - (\operatorname{sh} m) \ln(1-e^{-2m}) \quad [m > 0].$$

$$862.33. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx \, dx}{(1+x^2) \operatorname{th} \frac{\pi x}{2}} = -(\operatorname{sh} m) \ln \operatorname{th} \frac{m}{2} \quad [m > 0].$$

$$862.41. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx} \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2q} \frac{\sin \frac{p\pi}{q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \quad [-q \leq p \leq q; q > 0].$$

$$862.42. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} qx} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2q} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \\ [-q \leq p \leq q; q > 0].$$

$$862.43. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{ch} qx} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{q} \frac{\sin \frac{p\pi}{2q} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \\ [-q \leq p \leq q; q > 0].$$

$$862.44. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} qx} \cos mx \, dx = \frac{\pi}{q} \frac{\cos \frac{p\pi}{2q} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \\ [-q \leq p \leq q; q > 0].$$

$$863.01. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^q dx = \Gamma(q+1) \quad [q+1 > 0]. \quad [\text{См. 850.1.}]$$

$$863.02. \int_0^1 x^p \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{(p+1)^2} \quad [p+1 > 0].$$

$$863.03. \int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x} \right)^2 dx = \frac{2}{(p+1)^3} \quad [p+1 > 0].$$

$$863.04. \int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x} \right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}} \quad [p+1, q+1 > 0].$$

$$863.05. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{1/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$863.06. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1/2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$863.10. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$863.11. \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}.$$

$$863.12. \int_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}.$$

$$863.20. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$863.21. \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1+x} dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

$$863.22. \int_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1+x} dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4}.$$

$$863.30. \int_0^1 \frac{1+x}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

$$863.31. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$863.32. \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1-x^2} dx = \frac{\pi^2}{24}.$$

$$863.33. \int_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1-x^2} dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

$$863.34. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x^2} dx = G = 0,9159656. \text{ [См. 48.32.]}$$

$$863.35. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{(1+x)^2} dx = \ln 2.$$

$$863.36. \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{2\pi^2}{27}.$$

$$863.37. \int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{4\pi^2}{27}.$$

$$863.41. \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$863.42. \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \ln 2.$$

$$863.43. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right).$$

$$863.51. \int_0^1 \frac{x^p dx}{\ln x} = \infty.$$

$$863.52. \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x} dx = \ln \frac{p+1}{q+1} \quad [\mu+1, q+1 > 0].$$

$$863.53. \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x} x^r dx = \ln \frac{p+r+1}{q+r+1} \quad [\mu+r+1, q+r+1 > 0].$$

$$863.54. \int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\ln x} dx = \ln \frac{(p+q+1)}{(p+1)(q+1)} \quad [\mu+1, q+1, p+q+1 > 0].$$

$$863.55. \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{dx}{\ln x} = \ln \frac{2}{\pi}.$$

$$863.61. \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{16}.$$

$$863.71. \int_0^1 \ln(1-x) dx = -1. \quad 863.72. \int_0^1 x \ln(1-x) dx = -\frac{3}{4}.$$

$$863.73. \int_0^1 x^p \ln(1-x) dx = -\frac{1}{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} \frac{1}{n} \quad [p = 0, 1, 2, \dots].$$

$$863.74. \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

$$863.81. \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

$$863.82. \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{4}.$$

$$863.83. \int_0^1 x^{2p} \ln(1+x) dx = \frac{1}{2p+1} \left\{ 2 \ln 2 - \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} \\ [p = 0, 1, 2, \dots].$$

$$863.84. \int_0^1 x^{2p-1} \ln(1+x) dx = \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad [p = 1, 2, \dots].$$

$$863.85. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$863.91. \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

$$863.92. \int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx = 2 - 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

$$863.93. \int_0^1 x \ln x \ln(1-x) dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

$$863.94. \int_0^1 x \ln x \ln(1+x) dx = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}.$$

$$864.01. \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 - G = \frac{\pi}{8} \ln 2 - 0,9159656.$$

$$864.02. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

$$864.03. \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{1+x}{x} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 + G. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$864.04. \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 - G. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$864.11. \int_0^1 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = 2 \ln 2.$$

$$864.12. \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$864.21. \int_0^1 \frac{\ln(1-x^p)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6p} \quad [p > 0].$$

$$864.22. \int_0^1 \frac{\ln(1+x^p)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12p} \quad [p > 0].$$

$$864.31. \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2G - \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$864.32. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2G - \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$864.33. \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + (\ln 2)^2 \right\}.$$

$$864.41. \int_0^1 (1-x) e^{-x} \ln \frac{1}{x} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$864.51. \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi} \quad [0 < p < 1].$$

$$864.52. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi} \quad [0 < p < 1].$$

$$864.53. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$864.54. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a \quad [a > 0].$$

$$864.55. \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

$$864.61. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 + G. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$864.62. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln(1+ab) \quad [a, b > 0].$$

$$864.63. \int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln(a+b) \quad [a, b > 0].$$

$$864.71. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{2-p}} dx = \frac{\pi}{(1-p) \sin p\pi} \quad [0 < p < 1].$$

$$864.72. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{1+q}} dx = \frac{\pi}{q \sin \pi q} \quad [0 < q < 1].$$

$$864.73. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^p)}{x^q} dx = \frac{\pi}{(q-1) \sin \frac{\pi(q-1)}{p}} \quad [0 < q-1 < p].$$

$$864.74. \int_0^{\infty} \frac{\ln|x^p-1|}{x^q} dx = \frac{\pi}{(q-1) \operatorname{tg} \frac{\pi(q-1)}{p}} \quad [0 < q-1 < p].$$

$$865.01. \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{G}{2}. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.02. \int_0^{\pi/4} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{G}{2}. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.03. \int_0^{\pi/4} \ln \operatorname{tg} x \, dx = -G. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.04. \int_0^{\pi/4} \ln (1 + \operatorname{tg} x) \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

$$865.05. \int_0^{\pi/4} \ln (1 - \operatorname{tg} x) \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 - G. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.11. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$865.12. \int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x \, dx = 0.$$

$$865.21. \int_0^{\pi/2} (\sin x) \ln \sin x \, dx = \ln 2 - 1.$$

$$865.22. \int_0^{\pi/2} (\cos x) \ln \cos x \, dx = \ln 2 - 1.$$

$$865.23. \int_0^{\pi/2} (\cos x) \ln \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x) \ln \cos x \, dx = -1.$$

$$865.24. \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x) \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi^2}{24}.$$

$$865.25. \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x) \ln \sin x \, dx = \frac{\pi}{8} (1 - 2 \ln 2).$$

$$865.26. \int_0^{\pi/2} (\cos 2nx) \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{4n} \quad [n > 0].$$

$$865.27. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos x}{\sin x} dx = -\frac{\pi^2}{8}.$$

$$865.31. \int_0^{\pi/2} \ln(1 + \cos x) dx = 2G - \frac{\pi \ln 2}{2}. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.32. \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \cos x) dx = -2G - \frac{\pi \ln 2}{2}. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.33. \int_0^{\pi/2} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = G + \frac{\pi \ln 2}{4}. \quad [\text{См. 48.32.}]$$

$$865.34. \int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \sin^2 x) dx = \\ = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1+p}}{2} \quad [(1+p) \geq 0].$$

$$865.35. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{a+b}{2} \quad [a, b > 0].$$

$$865.36. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 x) dx = \pi \ln(a+b) \\ [a, b > 0].$$

$$865.37. \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{a+b \sin x}{a-b \sin x}\right) \frac{dx}{\sin x} = \\ = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{a+b \cos x}{a-b \cos x}\right) \frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \\ [b^2 \leq a^2].$$

$$865.41. \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2.$$

$$865.42. \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}.$$

$$865.43. \int_0^{\pi} \ln(1 \pm \cos x) dx = -\pi \ln 2.$$

$$865.44. \int_0^{\pi} \ln(a \pm b \cos x) dx = \pi \ln \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right\} \quad [a \geq b > 0].$$

$$865.45. \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \arcsin a \quad [0 < a < 1].$$

$$865.51. \int_0^1 (\cos mx) \ln x dx = -\frac{\text{Si}(m)}{m}. \quad [\text{См. 431.11.}]$$

Таблицы см. [22].

$$865.52. \int_0^1 x^{p-1} \sin(q \ln x) dx = \frac{-q}{p^2 + q^2} \quad [p > 0].$$

$$865.53. \int_0^1 x^{p-1} \cos(q \ln x) dx = \frac{p}{p^2 + q^2} \quad [p > 0].$$

$$865.54. \int_0^1 \frac{x^p \sin(q \ln x)}{\ln x} dx = \arctg \frac{q}{p+1} \quad [p+1 > 0].$$

$$865.61. \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \cos mx dx = \frac{\pi}{m} (1 - e^{-am}) \quad [a, m > 0].$$

$$865.62. \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2}\right) \cos mx dx = \frac{\pi}{m} (e^{-bm} - e^{-am}) \quad [a, b, m > 0].$$

$$865.63. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{\pi}{2} (\ln m + C) \quad [m > 0].$$

[См. 851.1.]

$$865.64. \int_0^{\infty} \frac{\ln(\sin^2 mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln\left(\frac{\text{sh } ma}{e^{ma}}\right) = \\ = \frac{\pi}{a} \ln\left(\frac{1 - e^{-2ma}}{2}\right) \quad [m, a > 0].$$

$$865.65. \int_0^{\infty} \frac{\ln(\cos^2 mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} ma}{e^{ma}}\right) \quad [m, a > 0].$$

$$865.66. \int_0^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{tg}^2 mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln \operatorname{th} ma \quad [m, a > 0].$$

$$865.71. \int_0^{\pi} \ln(1 \pm 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln a \quad [a > 1],$$

$$= 0 \quad [a^2 \leq 1].$$

$$865.72. \int_0^{\pi} \ln(a^2 \pm 2ab \cos x + b^2) dx = 2\pi \ln a \quad [a \geq b > 0],$$

$$= 2\pi \ln b \quad [b \geq a > 0].$$

$$865.73. \int_0^{2\pi} \ln(a^2 \pm 2ab \cos x + b^2) dx = 4\pi \ln a \quad [a \geq b > 0],$$

$$= 4\pi \ln b \quad [b \geq a > 0].$$

$$865.74. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) \cos mx dx = -\frac{\pi}{m} a^m$$

$$[0 < a < 1; \quad m = 1, 2, \dots].$$

$$865.75. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 \pm 2p \cos mx + p^2)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln(1 \pm pe^{-ma})$$

$$[0 < p \leq 1; \quad m, a > 0],$$

$$= \frac{\pi}{a} \ln(p \pm e^{-ma})$$

$$[p \geq 1; \quad m, a > 0].$$

$$865.81. \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{-x}) dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$865.82. \int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

$$865.83. \int_0^{\infty} \ln \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) dx = \int_0^{\infty} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

$$865.901. \int_0^{\infty} e^{-ax} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{a} (\ln a + C) \quad [a > 0]. \quad [\text{См. } 852.1.]$$

Относительно постоянной C см. 851.1. $C = 0,5772157$.

$$865.902. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{a^2} (\ln a - 1 + C) \quad [a > 0].$$

$$865.903. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{2}{a^3} \left(\ln a - \frac{3}{2} + C \right) \quad [a > 0].$$

$$865.904. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \ln \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} (\ln a + 2 \ln 2 + C) \quad [a > 0].$$

$$865.905. \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + px} - e^{-ax} \right) dx = \ln \frac{a}{p} + C \quad [a, p > 0].$$

$$865.906. \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + p^2 x^2} - e^{-ax} \right) dx = \ln \frac{a}{p} + C \quad [a, p > 0].$$

$$865.907. \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{xe} \right) dx = C.$$

$$865.908. \int_0^1 \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx = -C.$$

$$865.909. \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = C.$$

$$865.911. \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right) e^{-ax} \sin mx dx =$$

$$= \frac{1}{(a^2 + m^2)} \left\{ \frac{m}{2} \ln(a^2 + m^2) - a \operatorname{arctg} \frac{m}{a} + mC \right\}$$

$[m, a > 0]. \quad [\text{См. } 851.1.]$

$$865.912. \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right) e^{-ax} \cos mx \, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2 + m^2} \left\{ \frac{a}{2} \ln(a^2 + m^2) + m \operatorname{arctg} \frac{m}{a} + aC \right\}$$

[$m, a > 0$]. [См. 851.1.]

$$865.913. \int_0^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right) e^{-ax} \sin mx}{x} \, dx = \left\{ \frac{1}{2} \ln(a^2 + m^2) + C \right\} \operatorname{arctg} \frac{m}{a}$$

[$m, a > 0$]. [См. 851.1.]

Значительная доля интегралов в 850—865 может быть найдена в [6]. См. также [3]—[7].

$$866.01. \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi} \cos(x \cos \varphi) \, d\varphi = \pi J_0(x).$$

$$866.02. \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \, d\varphi = \pi J_n(x),$$

где n — нуль или целое положительное число.

(Интегралы Бесселя.)

$$866.03. \int_0^{\pi} e^{p \cos x} \, dx = \pi I_0(p), \text{ как в } 809.1.$$

Таблицы к 866 см. [20] и [21].

880. Правило Симпсона. Если известны значения $y = f(x)$ для равноотстоящих значений x с шагом h , то численное значение интеграла приближенно выражается формулой:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}],$$

где $h = x_1 - x_0$ — постоянная разность между соседними значениями x , т. е. $2nh = b - a$. Коэффициенты равны поочередно 4 или 2, как указано. Приближение обычно тем точнее, чем больше n . Таким методом можно получить численный результат, когда аналитическое выражение для интеграла не может быть найдено. Используя таблицу $f(x)$ и арифмометр, можно провести это вычисление без промежуточных записей.

881. Погрешность приведенной выше приближенной формулы равна

$$\frac{nh^5 f^{IV}(x)}{90} = \frac{(b-a)h^4 f^{IV}(x)}{180},$$

где для оценки величины $h^4 f^{IV}(x)$ может быть взята наибольшая четвертая разность в интервале (a, b) .

882. Другая формула, которая во многих случаях более точна, чем формула 880. По ней тоже можно производить вычисление на арифмометре без промежуточных записей:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx & \frac{h}{4,5} [1,4y_0 + 6,4y_1 + 2,4y_2 + 6,4y_3 + \\ & + 2,8y_4 + 6,4y_5 + 2,4y_6 + 6,4y_7 + 2,8y_8 + \dots \\ & \dots + 6,4y_{4n-3} + 2,4y_{4n-2} + 6,4y_{4n-1} + 1,4y_{4n}], \end{aligned}$$

где $4nh = b - a$.

ЛИТЕРАТУРА

А. Общие руководства и справочники

1. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—3, «Наука», 1970.
2. Араманович И. Г., Тутер Р. С. и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование), Серия «Справочная математическая библиотека» под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского, Физматгиз, 1961.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, перераб. при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина, «Наука», 1971.
4. Смолянский М. Л., Таблицы неопределенных интегралов, «Наука», 1971.
5. Гарди Г., Интегрирование элементарных функций, перев. с англ., ОНТИ, 1935.
6. Bierens de Haan D., Nouvelles tables d'intégrales définies, Edition, 1867, corrected, N. Y. Hafner, 1957.
7. Lindman C. F., Examen des Nouvelles tables d'intégrales définies, de Bierens de Haan, N. Y. Hafner, 1957.
8. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. I и II, Физматгиз, 1963.
9. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, изд. 2-е, перераб. и дополн., Физматгиз, 1963.
10. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2, ИЛ, 1949.
11. Грей Э. и Мэтьюс Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
12. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
13. Ахизер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, «Наука», 1970.
14. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, изд-во АН СССР, 1941.

Б. Таблицы

15. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. 3-е, Физматгиз, 1962.
16. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го нем. изд. под ред. Л. И. Седова, «Наука», 1977.
17. Хаяши К., Многочисленные таблицы круговых, гиперболических и других функций, изд-во ВЦ АН СССР, 1965.
18. Комри Л., Шестизначные таблицы Чемберса, Физматгиз, 1964.
19. Библиотека математических таблиц, изд-во ВЦ АН СССР.
 - а) Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла.
 - б) Таблицы вероятностных функций, т. 1 и 2.
 - в) Таблицы функций Бесселя дробного индекса $(J_\nu \text{ и } I_\nu \text{ для } \nu = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{4})$, т. 1 и 2.

- г) Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере.
- д) Таблицы натуральных логарифмов, т. 1 и 2.
- е) Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x , e^{-x}).
- ж) Таблицы обратных тригонометрических функций.
- з) Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса.
- и) Таблицы антилогарифмов 10^x .
- 20. Фаддеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя $J_n(x)$ целых номеров от 0 до 120, Гостехиздат, 1950.
- 21. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, изд-во АН СССР, 1950.
- 22. Таблицы интегрального синуса и косинуса, изд-во АН СССР, 1954.
- 23. Таблицы интегральной показательной функции, изд-во АН СССР, 1954.
- 24. Таблицы e^x и e^{-x} , изд-во АН СССР, 1955.
- 25. Кармазина Л. Н., Курочкина Л. В., Таблицы интерполяционных коэффициентов, изд-во АН СССР, 1956.
- 26. Table of binomial coefficients, Royal Society, Mathematical tables, Cambridge University Press, 1954.
- 27. Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1935.
- 28. Беляков В. Л., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, изд-во АН СССР, 1962.
- 29. Шулер М., Гебелейн Х., Таблицы эллиптических функций, изд-во ВЦ АН СССР, 1960.

Цена 70 коп.