Ю. С. БОГДАНОВ О. А. КАСТРИЦА

НАЧАЛА АНАЛИЗА в задачах и упражнениях

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
математических специальностей
университетов

Минск
«Вышэйшая школа»
1988

ББК 22.161я73
Б73
УДК 517(075.8)

Рецензенты: кафедра математического анализа Гродненского государственного университета; чл.-корр. АН СССР *Л. Д. Кудрявцев*

Б $\dfrac{1702050000-016}{М304(03)-88}$ 10—88

ISBN 5—339—00009—5

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании данного пособия авторы опирались на опыт преподавания математического анализа на факультете прикладной математики Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина.

Материал пособия разделен на три главы, соответствующие трем важнейшим разделам математического анализа: «Непрерывность», «Дифференцируемость», «Интегрирование».

Авторы пользуются в основном эвристическим методом. На базе минимума теоретических сведений (исходных понятий, определений) даются специальным образом подобранные задачи, подводящие читателя к формулировке и доказательству утверждений, которые в большинстве учебников приводятся как теоремы. В последующих задачах эти утверждения углубляются и обобщаются, а также намечаются пути для дальнейших исследований. При выборе терминологии и обозначений авторы отдавали предпочтение терминологии, принятой в средней школе.

В пособии использованы наиболее удачные задачи, помещенные в известных книгах, без прямых ссылок на них (задачники Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, Б. П. Демидовича, Я. И. Ривкинда, Н. А. Давыдова, П. П. Коровкина и В. М. Никольского, Ю. С. Очана, Н. Я. Виленкина и др.).

При самостоятельной работе с пособием полезно обращаться к ответам и указаниям, помещенным в конце книги. Задачи, к которым даны пояснения, отмечены звездочкой. Знак (!) в конце утверждения означает, что читателю следует самостоятельно убедиться в его истинности.

В качестве дополнительной справочной литературы рекомендуется использовать книги «Математический словарь средней школы» и «Математический словарь высшей школы» В. Т. Воднева, А. Ф. Наумовича и Н. Ф. Наумовича.

Можно сказать, что у книги есть «третий автор» — коллектив кафедры высшей математики Белорусского государственного университета. В пособии широко использованы как общие установки, разработанные на кафедре, так и многочисленные конкретные замечания сотрудников кафедры.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам книги — чл.-корр. АН СССР Л. Д. Кудрявцеву и коллективу кафедры математического анализа Гродненского государственного университета — за ценные и принципиальные замечания и советы, побудившие существенно переработать содержание и структуру книги.

Пособие адресовано в первую очередь студентам математических специальностей университетов для использования как на учебных занятиях, так и при самостоятельном изучении математического анализа. Авторы надеются, что оно окажется полезным и преподавателям.

Все отзывы и пожелания, направленные на улучшение пособия, просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbf{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел
$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел
$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел
$\mathbf{R}_0$ — множество неотрицательных действительных чисел
$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел
$\mathbf{D}$ — множество десятичных дробей
$\{x\}$ — конечное или бесконечное множество, состоящее из элементов x, в частности $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$ и $\{x_1, x_2\} = \{x_1\}$ при $x_1 = x_2$
$\{x \mid P\}$ — множество элементов x, удовлетворяющих условию P
$\varnothing$ — пустое множество
$A \cap B$ — пересечение множеств A и B
$A \cup B$ — объединение множеств A и B
$A \setminus B$ — разность множеств (множество элементов из A, не принадлежащих B)
$a \in A$ — a является элементом множества A
$a \notin A$ — a не является элементом множества A
$B \subset A$ — B является подмножеством множества A
$\forall$ — квантор общности ($\forall x\ \mathrm{P}(x)$ означает: «для каждого x истинно утверждение $\mathrm{P}(x)$»)
$\exists$ — квантор существования ($\exists x\ \mathrm{P}(x)$ означает: «существует x, для которого истинно утверждение $\mathrm{P}(x)$»)
$\neg P$ — отрицание утверждения P (утверждение, противоположное утверждению P)
$P \Rightarrow Q$ — знак следования («из P следует Q»)
$P \Leftrightarrow Q$ — знак равносильности («утверждения P и Q равносильны»)
$f: X \to Y$ — отображение f множества X в множество Y
$f: x \in X \mapsto y \in Y$ — отображение f переводит элемент x множества X в элемент y множества Y
$E_y = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ — множество значений функции f
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ — образ множества A при отображении f
$\min A$ — наименьшее число в множестве A
$\max A$ — наибольшее число в множестве A
$\sup A$ — точная верхняя граница множества A
$\inf A$ — точная нижняя граница множества A

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ — объединение множеств $A_1, A_2, \ldots$

$\bigcup\limits_{P} A$ — объединение множеств, удовлетворяющих условию P

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ — пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots$

$n!$ — $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ («n-факториал»)

$n!!$ — произведение натуральных чисел одинаковой с n четности, не превосходящих n

C_n^m — число сочетаний из n элементов по m a

$|a, b|$ — промежуток с концами a и b

$[a, b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с концами a и b

$]a, b[$ — интервал (открытый промежуток) с концами a и b

$]a, b]$, $[a, b[$ — полуинтервалы с концами a и b

(a_n) — последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ с n-м членом a_n

$\{a_n\}$ — множество значений, которые принимают члены последовательности (a_n)

(a_{k_n}) — подпоследовательность последовательности (a_n), причем $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$

$a_n \to a$ — a_n стремится к a

a_∞ — предел последовательности (a_n)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — предел последовательности (a_n)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ — верхний предел последовательности (a_n)

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ — нижний предел последовательности (a_n)

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ с k-м членом a_k

$E(x) = [x]$ — целая часть числа x

$|x|$ — модуль числа x

$\sup\limits_{X} f(x)$ — точная верхняя граница множества значений функции f, принимаемых на множестве X

$\inf\limits_{X} f(x)$ — точная нижняя граница множества значений функции f, принимаемых на множестве X

$f(x_0 - 0)$ — левосторонний предел функции f в точке x_0

$f(x_0 + 0)$ — правосторонний предел функции f в точке x_0

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in U}} f(x)$ — предел вдоль множества U функции f в точке x_0

$V_a^b(f)$ — полная вариация функции f на $[a, b]$

C_I — множество функций, непрерывных на промежутке I

C_I^n — множество функций, имеющих на промежутке I непрерывную производную порядка n

C_I^∞ — множество функций, имеющих на промежутке I производные всех порядков

$f'_+(x_0)$ — правосторонняя производная функции f в точке x_0

$f'_-(x_0)$ — левосторонняя производная функции f в точке x_0

$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции f на промежутке $[a, b]$

$(S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ — интеграл Стилтьеса от функции f по функции g на промежутке $[a, b]$

$(L)\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл Лебега от функции f на промежутке $[a, b]$

$D(x)$ — функция Дирихле

$1(x)$ — функция Хевисайда

1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1.1. Числа и числовые множества

В средней школе введены множества натуральных, рациональных и действительных чисел, а также указаны основные действия над элементами этих множеств. Для дальнейшего развития анализа необходимо несколько уточнить и углубить соответствующие понятия, построения и определения.

Множество **N** состоит из *натуральных чисел* (номеров), используемых для определения количества элементов в (конечном) множестве и для упорядочения этих элементов. Наиболее распространенная запись номеров основана на позиционно-разрядном принципе с привлечением десяти базовых цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, т. е. на использовании десятичной системы счисления. Такая запись компактна, с ее помощью легко строятся алгоритмы сравнения, сложения и перемножения действительных чисел (все эти действия выполнимы в **N**). Кроме десятичной системы счисления, в настоящее время широко используется двоичная система с базовыми цифрами 0 и 1. Римская система (I, II, III, IV,...) записи чисел применяется в специальных целях, например при классификации (V разряд) и маркировке (IX глава). Существуют и другие системы счисления и изображения чисел.

Множество **Z** *целых чисел* состоит из номеров, нуля и чисел, противоположных номерам ($n\in\mathbf{N}$, $m=(-n)$, $m\in\mathbf{Z}$, $n+m=0$). В множестве **Z** выполнимы операции сравнения, сложения, вычитания и умножения (с привлечением известного правила знаков). Если на числовой прямой выбрать начальную точку 0 и направление (чаще всего «слева направо» или «снизу вверх»), то целые числа дают градуировку (через единицу) этой прямой, а прямая с нанесенными на ней целыми числами превращается в шкалу, бесконечную в обе стороны.

Множество целых чисел **Z**, пополненное множеством отношений $\{p/q\}$, где p, $q\in\mathbf{Z}$, причем $q\neq 0$, образует множество **Q** *рациональных чисел*. Отношения p/q и p'/q' считают равными (представляющими одно и то же рациональное число r), если $pq'=p'q$. Таким образом, у каждого рационального числа $r=p/q$ имеется бесконечно много изображений $r=(mp)/(mq)$, $m\in\mathbf{Z}$, $m\neq 0$, что позволяет, в частности, два числа r, $r'\in\mathbf{Q}$ изобразить в виде дробей с одинаковыми знаменателями. В множестве **Q** выполнимы операции сравнения, сложения, вычитания, умножения и деления (т. е. все так называемые арифметические операции) над его элементами, кроме деления на нуль. Элементу $r\in\mathbf{Q}$ на числовой прямой отвечает точка M, такая, что отрезок OM соизмерим с отрезком, длина которого принята за единицу (длина OM, таким образом, равна r при $r\geqslant 0$ и $-r$ при $r<0$, т. е. всегда равна $|r|$).

Если рациональное число можно представить в виде дроби, знаменателем которой служит степень 10, то такое число называют *десятичным*. Множество всех десятичных чисел обозначают **D**. Для десятичных чисел используется либо основная запись:

$$\frac{103}{1000}=0{,}103;\quad \frac{103}{10}=10{,}3;\quad \frac{-2211}{10}=-221{,}1,$$

либо (особенно часто в естествознании) приведенная запись:

$$0{,}103=1{,}03\cdot 10^{-1};\quad -221{,}1=-2{,}211\cdot 10^{2}.$$

Десятичные точки на числовой прямой образуют десятичную шкалу, с помощью которой, в частности, можно производить измерение длин отрезков с любой наперед заданной степенью точности. Десятичные числа используются при вычислениях, в том числе приближенных.

1.1. $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{D}\subset\mathbf{Q}$; $\mathbf{N}\neq\mathbf{Z}\neq\mathbf{D}\neq\mathbf{Q}$ (!).

Если применить обычное правило деления одного целого числа на другое (не останавливаясь и при нулевом промежуточном остатке), то каждому рациональному числу можно сопоставить бесконечную десятичную дробь. При каждом представлении $r\in\mathbf{Q}$ в виде отношения сопоставимая бесконечная десятичная дробь оказывается одной и той же, к тому же периодической (делитель фиксирован, остатки принимают конечное число значений и поэтому должны хоть однажды повториться, что ведет к появлению периодичности в разложении).

1.2. $103/3=34{,}33\ldots=34,(3)$; $-103/2=-51{,}500\ldots=$ $=-51{,}5(0)$ (!).

Воспользовавшись правилом вычисления суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, можно получить алгоритм сведения каждой периодической бесконечной десятичной дроби к рациональному числу.

1.3. $3{,}4(3)=3\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots=3\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\times$ $\times\frac{1}{1-1/10}=3\frac{4}{10}+\frac{1}{30}=3\frac{13}{30}$ (!).

Каждому недесятичному рациональному числу отвечает одно единственное разложение в периодическую десятичную дробь.

1.4. Число 0,25 можно представить в виде бесконечной десятичной дроби двумя способами:

1) $0{,}25=0{,}2500\ldots0\ldots$ (!); 2) $0{,}25=0{,}2499\ldots9\ldots$ (!).

1.5. Любое число $a\in\mathbf{D}$, $a\neq 0$, представимо в виде бесконечной десятичной дроби двумя способами (!).

Иногда во избежание двузначности представления $r\in\mathbf{D}$ десятичные числа переводят в некоторую «правильную» форму» (например, с нулями в периоде), что, однако, может привести к осложнениям, так как в построенной каким-нибудь способом бесконечной дроби нужно отыскивать десятичный период и преобразовывать дробь к правильной форме. Для изображения десятичных чисел в виде бесконечных десятичных дробей ниже допускаем дроби как с нулем, так и с девяткой в периоде.

В дальнейшем используются символы математической логики $\exists$, $\forall$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

Для построения утверждения $\neg P$, противоположного утверждению P, применяют *правило Де Моргана:* если в формальной записи утверждения P содержатся символы $\exists$, $\forall$ и условие B, то для построения утверждения $\neg P$ в утверждении P символ $\exists$ заменяют символом $\forall$, символ $\forall$ — символом $\exists$ и условие B — условием $\neg B$. Например, $\neg(\exists a\ P)=\forall a \neg P$, т. е. отрицанием утверждения «существует a со свойством P» является утверждение «все a не обладают свойством P».

Как было отмечено выше, рациональные числа можно изображать периодическими бесконечными десятичными дробями, причем для десятичных чисел имеется по два изображения.

Универсальным средством для изображения действительных чисел, в частности иррациональных (нерациональных), являются *бесконечные десятичные дроби* (в том числе непериодические), т. е. выражения α вида

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots,$$

где $\alpha_0=m\in\mathbf{Z}$, $\alpha_n\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\forall n\in\mathbf{N}$, причем знак числа m определяет знак дроби α (при $m=0$ символ α_0 принимает одно из двух значений ± 0). Две дроби $\alpha=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\alpha'=\alpha'_0,\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n\ldots$ тождественны или совпадают, $\alpha\equiv\alpha'$, если $\alpha_0=\alpha'_0$, $\alpha_n=\alpha'_n$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Если α и α' — изображения в виде бесконечных десятичных дробей двух недесятичных чисел a и a', то $a=a'\Leftrightarrow\alpha=\alpha'$. Если же $a=a'$ и одно из этих чисел десятичное (а следовательно, десятичное и второе), их изображения α и α' могут быть различными (см. упражнения 1.4, 1.5). Таким образом, всегда $\alpha\equiv\alpha'\Rightarrow a=a'$, но обратное утверждение неверно.

Наряду с бесконечной дробью α рассмотрим ее усечение $a_n=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, которое представляет собой число (десятичное), являющееся приближением соответствующего α числа a с n знаками после запятой. Иногда рассматривают *приближения по недостатку* $\underline{a}_n$ и *по избытку* $\overline{a}_n$:

$$\alpha_0\geqslant 0\Rightarrow \underline{a}_n=a_n,\quad \overline{a}_n=a_n+10^{-n};$$

$$\alpha_0<0\Rightarrow \underline{a}_n=a_n-10^{-n},\quad \overline{a}_n=a_n.$$

1.6. Пусть α' и α — два представления числа 0,25 в виде бесконечных десятичных дробей (см. упражнение 1.4). Тогда $|a'_n-a_n|\leqslant 10^{-n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$ (!).

1.7. Сформулировать и доказать утверждения, аналогичные утверждению 1.6, для $\underline{a}'_n$, $\underline{a}_n$ и $\overline{a}'_n$, $\overline{a}_n$.

1.8. $a=b\Leftrightarrow\overline{a}_n=\overline{b}_n$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$ (!).

1.9. Пусть $b=0{,}137682$, $a=0{,}13767928$. Тогда $a_n\leqslant b_n$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$ (!).

1.10. Если $a_k=b_k$, то $a_n=b_n$ $\forall n<k$ (!).

1.11. Если $a_k<b_k$, то $a_n\leqslant b_n$ $\forall n<k$ (!).

1.12. Если $a_k<b_k$, то $a_n<b_n$ $\forall n>k$ (!).

Пусть $a_n \leqslant b_n \; \forall n$ и $a \neq b$. Тогда $a < b$.

1.13. Из утверждений 1.11 и 1.12 следует, что если $a_m < b_m$ для некоторого $m \in \mathbf{N}_0$ и $a \neq b$, то $a < b$ (!).

1.14. Если для $\forall m \in \mathbf{R} \; \exists k \in \mathbf{N}$, $k > m$, такое, что $a_k = b_k$, то $a = b$ (!).

1.15. Пусть $\exists m \in \mathbf{N}$, такое, что $a_l + 10^{-l} = b_l \; \forall l \geqslant m$. Тогда $a = b$ (!).

1.16. Используя метод от противного, из утверждений 1.13—1.15 получаем: если $a < b$, то $\exists \, l \in \mathbf{N}$, такое, что $a_l + 10^{-l} < b_l$ (!).

1.17. Используя результаты 1.11 и 1.12, показать, что если $a_l + 10^{-l} < b_l$ для какого-либо l, то $a < b$.

Таким образом, результаты 1.16 и 1.17 дают *критерий различия чисел*: $a < b \Leftrightarrow \exists \, l \in \mathbf{N}$, такое, что $a_l + 10^{-l} < b_l$.

Значение этого критерия состоит в том, что он охватывает как десятичные, так и недесятичные числа, не различая эти случаи.

1.18*. Пусть k, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\sqrt[k]{n} \in \mathbf{N} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ (!).

1.19*. Доказать, что $10^x \neq 2 \; \forall x \in \mathbf{Q}$.

1.20. Имеет ли уравнение $3^x = 2$ решение в $\mathbf{Q}$?

1.21. Число 0,10110111011110... иррационально (!).

1.22. Число 0,123456789101112... иррационально (!).

Пусть B_n — множество, содержащее n элементов. Если каким-либо образом упорядочить (пронумеровать) его элементы, получим множество, называемое *перестановкой из n элементов* (B_n может быть и не числовым множеством). Различные перестановки различаются только порядком элементов.

1.23. Сколько есть способов для выбора двух первых элементов перестановки множества B_n?

1.24. Число P_n перестановок n элементов равно $n!$ (!).

Всякое подмножество множества B_n, содержащее m элементов, называют *сочетанием m элементов из n*. Число сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m.

1.25. Все перестановки n элементов можно получить следующим образом: выбирают произвольное сочетание m элементов из n, строят перестановку этих m элементов, строят перестановку $n-m$ оставшихся элементов. Указанным способом не получится дважды одна и та же перестановка, и все перестановки будут получены. Учитывая результат 1.24, имеем: $n! = C_n^m m! \, (n-m)!$ (!).

1.26. Из формулы 1.25 следует $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ (!).

1.27. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (!).

1.28. $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ (!).

1.29. $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (!).

1.30. По индукции, используя результаты 1.28 и 1.29, можно доказать формулу, которую называют *биномом Ньютона:*

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, a^{n-m}\, b^m \text{ (!)}.$$

1.31.* Число всех подмножеств множества B_n равно 2^n (!).

1.32.* Число всех подмножеств A_n, содержащих четное число элементов, равно числу всех его подмножеств, содержащих нечетное число элементов (!).

Бесконечное множество P называют *счетным,* если его элементы можно перенумеровать, т. е. каждому элементу из P сопоставить число из $\mathbf{N}$, причем различным элементам из P соответствуют различные числа из $\mathbf{N}$.

1.33. Множество $\mathbf{Z}$ счетно (!).

1.34. Каждое число $p/q \in \mathbf{Q}$, $p/q > 0$, $p, q \in \mathbf{Z}$, запишем в таблицу в столбец с номером p и в строку с номером q. Показать, что $\mathbf{Q}$ счетно.

1.35. Множество $\mathbf{D}$ счетно (!).

1.36. Если A и B — счетные множества, то $A \cup B$ — также счетно (!).

1.37. Пусть A_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — счетные множества Тогда:

1) при каждом $n \in \mathbf{N}$ множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ счетно (!);

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ — счетное множество (!).

1.38. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\} \subset \mathbf{R}_0$ — какое-либо счетное множество, $x_k = p_k, \varkappa_{k1}\varkappa_{k2} \ldots \varkappa_{kn} \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ Обозначим $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Построим число $a = p_1, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, где $\alpha_i = \begin{cases} 2, & \varkappa_{ii} \in B; \\ 7, & \varkappa_{ii} \in A. \end{cases}$ Используя критерии различия чисел, показать, что $a \notin X$.

1.39. Из результата 1.38 следует, что $\mathbf{R}_0$ (а значит, и $\mathbf{R}$) несчетно (!).

1.40. Будет ли счетным множество $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}_0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$?

1.41. Будет ли счетным множество иррациональных чисел $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$?

Действительные числа изображают точками на прямой (*числовой прямой*). При этом числа называют также точками.

Множество $I\subset\mathbf{R}$ называют *промежутком*, если $\forall x_1, x_2\in I$ и $\forall x$, $x_1<x<x_2\Rightarrow x\in I$. Часто используют промежутки следующих видов:

$]a, b[=\{x|a<x<b\}$ — *открытый промежуток*, или *интервал;*

$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ — *замкнутый промежуток*, или *отрезок;*

$]a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ $[a, b[=\{x|a\leqslant x<b\}$ — *полуинтервалы.*

Всякий интервал $]\alpha, \beta[$, содержащий точку x_0, будем называть *окрестностью точки* x_0.

Точку x_0 называют *граничной точкой множества* X, если в любой ее окрестности есть точки из X и точки, не принадлежащие X. Если существует окрестность U точки x_0, такая, что $U\subset X$, то x_0 называют *внутренней точкой множества* X.

1.42. Пусть I_1 и I_2 — два промежутка. В каком случае $I_1\cup I_2$ будет промежутком?

1.43. При каком условии будет отрезком:

1) $[a_1, b_1]\cup[a_2, b_2]$; 2) $[a_1, b_1]\cap[a_2, b_2]$?

1.44. Пусть $A=[a_1, b_1]\cup]a_2, b_2[$ и $B=[a_1, b_1]\cap]a_2, b_2[$. Какие из этих множеств могут быть:

1) отрезками; 2) интервалами?

1.45. Если I_1 и I_2 — окрестности точки x_0, то $I_1\cap I_2$ и $I_1\cup I_2$ — также окрестности точки x_0(!).

Число $M\in\mathbf{R}$ называют *верхней границей множества* $X\subset\mathbf{R}$, если $\forall x\in X\Rightarrow x\leqslant M$. При этом говорят, что X ограничено сверху. Число $m\in\mathbf{R}$ называют *нижней границей множества* X, если X ограничено снизу числом m, т. е. если $\forall x\in X\Rightarrow x\geqslant m$. Если множество X ограничено сверху и снизу, то его называют *ограниченным.*

1.46. Если X — *конечное множество* (т. е. X содержит конечное число элементов), то X ограничено (!).

1.47. Отрезок, интервал и полуинтервалы — ограниченные множества (!).

1.48. Привести пример неограниченного промежутка.

1.49. Если A и B — ограниченные множества, то $A\cup B$ и $A\cap B$ также ограничены (!).

1.50. Будут ли ограниченными множества $A\cup B$ и $A\cap B$, если:

1) одно из множеств A, B не ограничено;

2) A и B не ограничены?

1.51. Являются ли ограниченными множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ в случае, если все A_i, $i=1, 2, \ldots$:

1) ограничены; 2) не ограничены?

1.52. Выяснить, какие из следующих множеств ограничены:

1) множество всех десятичных приближений по избытку числа a;

2) множество всех верхних границ данного ограниченного множества A;

3) множество площадей n-угольников, вписанных в круг радиусом r.

Из неограниченных множеств, с которыми мы будем встречаться, можно выделить промежутки:

$$[a, +\infty[= \{x \mid x \geqslant a\}; \quad]a, +\infty[= \{x \mid x > a\};$$

$$]-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}; \quad]-\infty, b[= \{x \mid x < b\}; \quad]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}.$$

1.53.* Пусть $A \subset \mathbf{R}$ — ограниченное множество и $l \in \mathbf{N}$. Множество $A_l = \{\underline{a}_l \mid a \in A\}$ десятичных приближений по недостатку чисел из A конечно (!).

Если множество A имеет наименьшую верхнюю границу, ее называют *точной верхней границей* или *верхней гранью* A. Наибольшую нижнюю границу A (если она существует) называют *точной нижней границей* или *нижней гранью*. Верхнюю грань A обозначают $\sup A$ (*супрéмум* A), нижнюю грань — $\inf A$ (*инфúмум* A).

1.54. Если A — конечное множество, то $\sup A = \max A$, $\inf A = \min A$ (!).

1.55. Убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) $\sup [a, b] = b$; 2) $\inf]a, b] = a$;

3) $\sup [a, b] \cup [c, d] = \max \{b, d\}$;

4) если $[a, b] \cap]c, d[\neq \varnothing$, то $\inf [a, b] \cap]c, d[= \max \{a, c\}$.

1.56. $\sup A = a \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \leqslant a; \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A, \text{ такое, что } x > a - \varepsilon \text{ (!)}. \end{cases}$

1.57. $\inf A = b \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \geqslant b; \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A, \text{ такое, что } x < b + \varepsilon \text{ (!)}. \end{cases}$

1.58. Пусть $A \subset \mathbf{R}$ — такое, что $\sup A$ и $\inf A$ существуют. Обозначим $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Тогда $\sup(-A) = -\inf A$; $\inf(-A) = -\sup A$ (!).

1.59. Пусть $A \neq \varnothing$ и ограничено, $A_n = \{\underline{a}_n \mid a \in A\}$ (A_n — множество приближений по недостатку порядка n чисел из A). Из задач 1.53 и 1.54 следует, что $\exists \underline{s}_n = \sup A$, причем $\exists a \in A$, такое, что $\underline{a}_n = \underline{s}_n$ (!).

1.60. Если $\exists x_0 \geqslant 0$, $x_0 \in A$, то $\underline{s}_{n+1} - \underline{s}_n < 10^{-n}$ (!).

1.61. Отсюда следует, что $\exists s \in \mathbf{R}$, такое, что при любом $n \in \mathbf{N}$ число $\underline{s_n}$ является десятичным приближением по недостатку числа s (!).

1.62. $\forall x \in A \Rightarrow x \leqslant s$ (!).

1.63. Пусть $b < s$. Используя критерий различия чисел и результат 1.59, показать, что $\exists y \in A$, такое, что $y > b$.

1.64. Из утверждений 1.62, 1.63 и 1.56 следует, что $s = \sup A$ (!).

1.65. Пусть в задаче 1.59 все числа из A отрицательны. Изучить множества $\overline{A}_n = \{\overline{a}_n \mid a \in A\}$ и показать, что существует $\sup A$.

1.66. В задаче 1.59 ограниченность A можно заменить ограниченностью сверху (!).

1.67. Итак, всякое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань (!). Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань (!).

Утверждения 1.67 называют *теоремой о гранях.*

1.68. Пусть $a,\ b \in \mathbf{R}$.

1. Множество $\{\underline{a}_n + \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничено (!).
2. Существует $\sup \{\underline{a}_n + \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}$ (!).

Суммой чисел $a,\ b \in \mathbf{R}$ называют число

$$a + b = \sup \{\underline{a}_n + \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

1.69. Пусть $a,\ b \in \mathbf{R}_0$.

1. Множество $\{\underline{a}_n \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничено (!).
2. $\sup \{\underline{a}_n \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}$ (!).

Результат 1.69 позволяет определить произведение двух неотрицательных чисел a и b, полагая $ab = \sup \{\underline{a}_n \underline{b}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Если $b < 0$, $a \geqslant 0$, то полагают $ab = -a(-b)$; если $a < 0$, $b < 0$, то $ab = (-a)(-b)$.

1.70. Определить a/b для $a,\ b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

1.71. Доказать следующие свойства арифметических операций, определенных над числами из $\mathbf{R}$:

1) $a + b = b + a$; 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$; 3) $ab = ba$; 4) $(ab)c = a(bc)$; 5) $(a + b)c = ac + bc$.

1.72*. Проверить справедливость следующих утверждений, считая A ограниченным множеством:

1) $A \subset \mathbf{N} \Rightarrow \sup A \in \mathbf{N}$; 2) $A \subset \mathbf{Z} \Rightarrow \inf A \in \mathbf{Z}$;
3) $A \subset \mathbf{Q} \Rightarrow \sup A \in \mathbf{Q}$.

1.73*. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}_0$, $A \subset \mathbf{R}$ и $\alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}$.

1. Если A ограничено, то $\sup \alpha A = \alpha \sup A$ (!).

2. Чему равняется $\sup \alpha A$, если $\alpha \in \mathbf{R}$?

1.74. Пусть A, $B \subset \mathbf{R}_0$ — ограниченные множества. Обозначим $AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}$, $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$. Тогда:

1) $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$ (!); 2) найти $\inf AB$;
3) $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$ (!); 4) найти $\sup (A + B)$;
5) $\sup (A - B) = \sup A - \inf B$ (!) (см. задачу 1.58).

1.75. Выполнить упражнение 1.74 пп. 2, 4, считая, что A, $B \subset \mathbf{R}$ и ограничены.

1.76. Привести пример множества A, для которого $\inf A \geqslant \sup A$.

1.77. Пусть задана бесконечная система отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

1. $\exists\, a = \sup\limits_{k \in \mathbf{N}} a_k$ (!). 2. $\exists\, b = \inf\limits_{k \in \mathbf{N}} b_k$ (!).

3. $a \leqslant b$ (!). 4. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \varnothing$ (!).

Для неограниченного сверху множества A полагают $\sup A = +\infty$. Если A не ограничено снизу, то полагают $\inf A = -\infty$.

Говорят, что множество A *замкнуто относительно операции* $*$, если $\forall a,\ b \in A \Rightarrow a * b \in A$. Множество $\mathbf{R}$ замкнуто относительно арифметических операций (см. задачи 1.68—1.70).

1.2. Числовые последовательности

Отображением множества X в множество Y называют закон f, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in Y$. Обозначают это так: $f\colon X \to Y$ или $f\colon x \mapsto y = f(x)$. Элемент y называют *образом элемента* x, а элемент x — *прообразом элемента* y. Будем рассматривать в основном отображения вида $f\colon A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, называемые функциями.

В этом параграфе будем предполагать, что $A = \mathbf{N}$ или $A = \mathbf{N}_0$, считая, что $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ упорядочены по возрастанию. Значение $f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, обозначают a_n. Тогда для каждого значения a_n функции f существует последующее значение $a_{n+1} = f(n+1)$. Такую функцию называют *числовой последовательностью* и обозначают (a_n), указывая в скобках элемент с номером n, т. е. образ числа $n \in \mathbf{N}$. Множество всех элементов последовательности (a_n) обозначают $\{a_n\}$.

1.78. Рассмотрим последовательность $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, ..., $\alpha_n = 1/n$, ...

1. $\exists\, \varkappa_1 \in \mathbf{N}$, такое, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant \varkappa_1 \Rightarrow |\alpha_k| \leqslant 0{,}01$ (!).
2. $\exists\, \varkappa_2 \in \mathbf{N}$, такое, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant \varkappa_2 \Rightarrow |\alpha_k| \leqslant 0{,}001$ (!).
3. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \varkappa_\varepsilon \in \mathbf{N}$, такое, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant \varkappa_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_k| \leqslant \varepsilon$ (!).

1.79. Рассмотрим последовательность (α_n), $\alpha_n=(-1)^{n+1}/n^2$. Для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\nu_\varepsilon\in\mathbf{R}$, такое, что $\forall k\in\mathbf{N}$, $k\geqslant\nu_\varepsilon\Rightarrow|\alpha_k|\leqslant\varepsilon$ (!).

Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\nu_\varepsilon$, такое, что $\forall n\geqslant\nu_\varepsilon\Rightarrow|\alpha_n|\leqslant\varepsilon$. В этом случае будем писать: $\alpha_n = o(1)$. Множество всех бесконечно малых последовательностей обозначим M.

1.80. Если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\nu_\varepsilon$, такое, что $\forall n\geqslant\nu_\varepsilon\Rightarrow|\alpha_n|\leqslant 2\varepsilon$, то $(\alpha_n)\in$ M (!).

1.81. Если $\exists m\in\mathbf{R}_0$, такое, что для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\nu_\varepsilon$, $\forall n\geqslant\nu_\varepsilon\Rightarrow|\alpha_n|\leqslant m\varepsilon$, то $(\alpha_n)\in$ M (!).

Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если множество $\{a_n\}$ ограничено. В этом случае будем писать: $a_n = O(1)$.

1.82.* Любая последовательность из M ограничена (!).

1.83.* Найти $\sup \bigcup\limits_{(\alpha_n)\in \mathrm{M}} \{\alpha_n\}$.

Для последовательностей (a_n) и (b_n) можно определить их сумму (a_n+b_n), разность (a_n-b_n), произведение (a_nb_n), произведение (λa_n) последовательности (a_n) на число $\lambda\in\mathbf{R}$. Если $b_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$, можно определить частное (a_n/b_n). (В дальнейшем явное указание $b_n\neq 0$ часто опускаем.)

1.84. Множество M замкнуто относительно операций сложения, умножения и умножения на число $\lambda\in\mathbf{R}$ (!).

1.85. Если $a_n=O(1)$ и $\alpha_n=o(1)$, то $a_n\alpha_n=o(1)$ (!).

1.86. Пусть (α_n), $(\beta_n)\in$ M, $0\notin\{\beta_n\}$. Можно ли утверждать, что $(\alpha_n/\beta_n)\in$ M?

1.87.* Найти число λ, такое, что для любой последовательности (a_n) выполняется условие $(\lambda a_n)\in$ M.

1.88. $\forall p$, $q\in\mathbf{R}$ и $\forall(\alpha_n)$, $(\beta_n)\in \mathrm{M}\Rightarrow(p\alpha_n+q\beta_n)\in$ M (!).

1.89. Если $\alpha_n=o(1)$ и $\alpha_n=\alpha$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$, то $\alpha=0$ (!).

1.90.* В M существует единственная арифметическая прогрессия. Какая?

1.91.* В каком случае геометрическая прогрессия принадлежит M?

Последовательность (b_n) называется *подпоследовательностью* последовательности (a_n), если $b_n=a_{q_n}$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$, где $q_n\in\mathbf{N}_0$, $q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots$ В частности, если $b_n=a_{p+n}$ $\forall n$, где $p\geqslant 0$ — фиксированное число, то (b_n) называется *остатком последовательности* (a_n).

1.92. Из последовательности $(1/n)$ выбрать какую-нибудь подпоследовательность. Показать для $(1/n)$, что все ее подпоследовательности принадлежат M.

1.93. Если $(\alpha_n)\in$M, то любая ее подпоследовательность принадлежит M (!).

1.94. Пусть задана последовательность 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, ..., n, $1/(n+1)$, ...

1. Выбрать какую-либо бесконечно малую ее подпоследовательность.

2. Все ли ее подпоследовательности будут бесконечно малыми?

3. Эта последовательность содержит бесконечное множество подпоследовательностей из М (!).

1.95.* Можно ли утверждать, что последовательность, содержащая подпоследовательность из М, содержит бесконечное множество подпоследовательностей из М?

1.96. Показать, что для последовательности $a_1 = 1$, $a_2 = -4$, $a_3 = 9$, $a_4 = -16$, ...:

1) $\exists k_1 \in \mathbf{N}$, такой, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant k_1 \Rightarrow |a_k| \geqslant 1000$;

2) $\exists k_2 \in \mathbf{N}$, такой, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant k_2 \Rightarrow |a_k| \geqslant 10^6$;

3) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu_\varepsilon \in \mathbf{R}$, такой, что $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow |a_k| \geqslant \varepsilon$.

1.97. Утверждения 1.96 выполняются для последовательности (a_n), $a_n = 2^{n-1}$ (!).

Последовательность (A_n) называется *бесконечно большой*, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$, такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |A_n| \geqslant \varepsilon$. Множество всех бесконечно больших последовательностей будем обозначать В.

1.98.* Замкнуто ли В относительно арифметических операций?

1.99.* Пусть $(A_n) \in$ В и $a_n = O(1)$. Верно ли, что $(A_n a_n) \in$ В?

1.100. Если $(A_n) \in$ В, то и любая ее подпоследовательность принадлежит В (!).

1.101. Пусть $(A_n) \in$ В и $0 \notin \{A_n\}$. Показать, что $\alpha_n = 1/A_n = o(1)$.

1.102. Пусть $(\alpha_n) \in$ М и $0 \notin \{\alpha_n\}$. Тогда $(1/\alpha_n) \in$ В (!).

Если для $(A_n) \in$ В $\exists N$, такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow A_n > 0$, то говорят, что A_n стремится к $+\infty$; если же $\exists N$, такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow A_n < 0$, то A_n стремится к $-\infty$ (пишут: $A_n \to +\infty$, $A_n \to -\infty$).

1.103. Построить примеры последовательностей, которые стремятся:

1) к $+\infty$; 2) к $-\infty$.

1.104. Верно ли утверждение: если (A_n) не ограничена и $\{A_n\} \subset \mathbf{R}_0$, то $A_n \to +\infty$?

1.105. Если $A_n \to +\infty$, то любая подпоследовательность (A_n) стремится к $+\infty$ (!).

1.106. Рассмотрим последовательность (a_n), $a_n = (2n^2 + 1)/n^2$.

1. Существует число $a \in \mathbf{R}$, удовлетворяющее условию: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon$, такое, что $\forall n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \varepsilon$ (!).

2. Показать, что a_n представимо в виде $a_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n = o(1)$.

Последовательность (a_n) называется *сходящейся*, если существуют число $a \in \mathbf{R}$ и последовательность $(\alpha_n) \in M$, такие, что $a_n = a + \alpha_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Число a называют *пределом* последовательности (a_n). Этот факт будем записывать следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$, или $a_\infty = a$.

1.107. Если $\alpha_n = o(1)$, то $\alpha_\infty = 0$ (!).

1.108. Если для последовательности (a_n) $\exists M \in \mathbf{R}_0$, такое, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon$, обладающее свойством: $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |a_n - a| \leqslant M\varepsilon$, то $a_n \to a$ (!).

1.109. Построить примеры последовательностей, для которых a_∞ равно:

1) -1; 2) 3; 3) a.

1.110. Если (a_n) сходится к a, то (a_{n+1}) также сходится к a (!).

1.111. Если (a_n) сходится к a, то $\forall p \in \mathbf{N}$ (a_{n+p}) сходится к a (!).

1.112. Поведение последовательности (сходимость, предел) не изменится, если изменить конечное число ее элементов (!).

Последовательность называется *расходящейся*, если она не сходится.

1.113. Используя правило Де Моргана, утверждение о том, что (a_n) не стремится к a, можно записать следующим образом: $\exists \varepsilon > 0$, такое, что для $\forall \nu_\varepsilon \ \exists n \geqslant \nu_\varepsilon$, для которого $|a_n - a| > \varepsilon$ (!).

1.114. Показать, что последовательность (a_n), $a_n = (-1)^n$, расходится.

1.115. Построить пример расходящейся последовательности из положительных членов.

1.116. Последовательность из задачи 1.114 содержит две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам (!).

1.117. Построить последовательность, которая имеет подпоследовательности, сходящиеся к трем разным пределам.

1.118. Построить пример последовательности, которая имеет бесконечное множество подпоследовательностей, сходящихся к разным пределам.

1.119. Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы все ее подпоследовательности сходились к одному пределу (!).

Если A_n стремится к ∞ ($+\infty$ или $-\infty$), будем писать: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = -\infty$) и говорить, что предел последовательности (A_n) равен ∞ (соответственно $+\infty$, $-\infty$).

1.120. Привести пример последовательности, содержащей подпоследовательности с пределами $+\infty$ и $-\infty$.

1.121. Если у последовательности (a_n) подпоследовательности (a_{2n}) и (a_{2n+1}) сходятся к одному пределу, то (a_n) сходится (!).

1.122.* Если (a_{2n}) и (a_{2n+1}) имеют разные пределы, то (a_{3n}) расходится (!).

1.123.* Если (a_{2n}), (a_{2n+1}) и (a_{3n}) сходятся, то они имеют один и тот же предел и (a_n) также сходится (!).

1.124.* Всякая сходящаяся последовательность ограничена (!).

1.125. Обратное утверждение — любая ограниченная последовательность сходится — неверно (!).

1.126.* Последовательность (a_n) ограничена, $A \leqslant a_n \leqslant B$. При любом разбиении отрезка $[A, B]$ точкой C на части только один из отрезков $[A, C]$, $[C, B]$ содержит бесконечное множество элементов из $\{a_n\}$. Доказать, что (a_n) сходится.

1.127.* Верно ли обратное утверждение: если последовательность (a_n) сходится, то при любом разбиении отрезка $[A, B]$ на части точкой C только один из отрезков $[A, C]$, $[C, B]$ содержит бесконечное множество элементов из $\{a_n\}$?

1.128. Пусть $a_n \to a$ и $a > 0$. Тогда все a_n, за исключением разве лишь конечного числа, положительны (!).

1.129. Последовательности (a_n) и (b_n) сходятся. Если $a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $a_\infty \leqslant b_\infty$ (!).

1.130. Пусть $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, (a_n) и (b_n) сходятся. Можно ли утверждать, что $a_\infty < b_\infty$?

1.131. Если $A < B$ и для последовательности (a_n) $A \leqslant a_\infty \leqslant B$, то все элементы a_n, за исключением разве лишь конечного числа, заключены между A и B (!).

1.132. Пусть $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Если $b_\infty = c_\infty$, то (a_n) сходится (!).

1.133. Таким образом, из утверждений 1.129 и 1.132 следует *лемма о сжатой последовательности:* если $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $b_n \to d$, $c_n \to d$, то $a_n \to d$ (!).

1.134. Пусть последовательность (u_n) обладает следующим свойством: $\exists p \in \mathbf{N}$ и $\exists k \in]0, 1[$, такие, что $\forall n \geqslant p$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow |u_{n+1}| \leqslant k |u_n|$.

1. Доказать сходимость последовательности (k^n).

2. Доказать сходимость последовательности $(|u_n|)$. Каков ее предел?

3. Сходится ли (u_n)?

1.135.* Доказать сходимость последовательности (u_n), определенной по правилу: $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.

1.136.* Предположим, что (u_n) обладает следующим свойством: $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n) = l$, $l \in]0, 1[$. Показать, что $u_n \to 0$.

1.137. Если $a_n \to a$, $b_n \to b$, то:

1) $a_n + b_n \to a + b$ (!); 2) $a_n b_n \to ab$ (!);

3) если $b \neq 0$, $0 \notin \{b_n\}$, то $a_n/b_n \to a/b$ (!).

1.138. Обобщая утверждения 1.137, можно сказать, что предел арифметической комбинации сходящихся последовательностей равен такой же комбинации их пределов (в предположении, что такие комбинации имеют смысл).

1.139. Может ли сходиться сумма двух расходящихся последовательностей?

1.140. Может ли сходиться произведение двух расходящихся последовательностей?

1.141. Может ли расходиться частное двух сходящихся последовательностей?

1.142.* Пусть (x_n) — некоторая последовательность и $y_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Если (x_n) сходится, то (y_n) сходится, причем $x_\infty = y_\infty$ (!).

1.143. Пусть $(a_n) \in \mathrm{M}$ и (b_n) — ограниченная последовательность. Если $c_n = \dfrac{1}{n+1}(a_0 b_n + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0)$, то $(c_n) \in \mathrm{M}$ (!).

1.144. Обобщив утверждение 1.143, показать, что если $a_n \to a$, $b_n \to b$, то $c_n \to ab$.

1.145.* Последовательность (a_n^2) сходится. Сформулировать необходимые и достаточные условия сходимости последовательности (a_n).

1.146. Верно ли утверждение: если $a_n \in \mathbf{Q}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $a_\infty \in \mathbf{Q}$?

1.147. Верно ли утверждение: если $a_n \in \mathbf{Q}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и (a_n) ограничена, то $\inf\{a_n\} \in \mathbf{Q}$ и $\sup\{a_n\} \in \mathbf{Q}$?

1.3. Существование предела последовательности

Последовательность (a_n) называют *возрастающей*, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, и *убывающей*, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Если неравенства строгие, то последовательность называют соответственно *строго возрастающей* и *строго убывающей*. Все эти последовательности называют *монотонными (строго монотонными)*.

1.148.* Последовательность (a_n) возрастающая. Являются ли монотонными последовательности $(-a_n)$, $(1/a_n)$, (a_n^2)?

1.149.* Последовательность (a_n) немонотонная. Могут ли быть монотонными последовательности $(-a_n)$, $(1/a_n)$, (a_n^2)?

1.150. Доказать, что последовательность $(na+b)$ монотонна при $\forall a$, $b \in \mathbf{R}$. Изучить характер монотонности.

1.151. Последовательность (a_n) монотонная. Доказать, что последовательность (Aa_n+B) монотонна $\forall A$, $B \in \mathbf{R}$.

1.152. Если (a_n) возрастает и сходится, то $a_\infty = \sup\{a_n\}$ (!).

1.153. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению 1.152, для убывающей последовательности.

1.154.* Любая ограниченная монотонная последовательность сходится (!).

Утверждение 1.154, называемое *теоремой об ограниченной монотонной последовательности*, оказывается в ряде случаев удобным для доказательства сходимости последовательностей.

1.155. Из задачи 1.112 следует, что теорема верна и для немонотонных последовательностей, имеющих монотонный остаток (!).

1.156.* Пусть (a_n) и (b_n) возрастают, $a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Тогда:

1) если (b_n) сходится, то (a_n) также сходится (!);

2) если (a_n) расходится, то (b_n) также расходится (!).

1.157. Доказать сходимость последовательности (a_n), если:

1) $a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, $|q| < 1$;

2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+2} + \dfrac{1}{2^3+3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n+n}$;

3) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

4) $a_n = 1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

1.158. Доказать утверждение 1.77.4, используя теорему 1.154.

1.159. Сравнить разложения по формулам Ньютона для $(1+1/n)^n$ и $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ и показать, что слагаемые первого разложения не превосходят слагаемых второго разложения, стоящих на тех же местах, считая слева направо.

1.160. Используя результаты 1.154, 1.157.4 и 1.159, доказать сходимость последовательности (a_n), $a_n = (1+1/n)^n$.

Предел этой последовательности называют *натуральным основанием логарифма* и обозначают e:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n, \qquad e = 2{,}71828\ldots$$

Логарифм числа x по основанию e называют *натуральным логарифмом* x и обозначают $\ln x$.

1.161. Пусть $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n\cdot n!}$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Последовательность (v_n) убывает (!).
2. Показать, что $u_p < v_q$ $\forall\, p,\ q \in \mathbf{N}$.
3. Показать, что (v_n) сходится. Сравнить пределы последовательностей (u_n) и (v_n).

1.162.* Доказать сходимость последовательности (w_n), $w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$.

1.163. Пусть (a_n) — возрастающая, (b_n) — убывающая последовательности, удовлетворяющие следующему условию: $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $b_n - a_n \to 0$. Показать, что существует единственная точка α, такая, что $\alpha \in [a_n, b_n]$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

1.164.* Две последовательности (a_n) и (b_n) определены заданием чисел a_0 и b_0, $0 < b_0 < a_0$, по следующему правилу:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

1. Показать, что (a_n) и (b_n) строго монотонны.
2. Последовательности (a_n) и (b_n) сходятся и их пределы равны (!).
3. Найти пределы последовательностей (a_n) и (b_n).

1.165.* Доказать сходимость и равенство пределов последовательностей (u_n) и (v_n), определенных по следующему правилу: $u_0, v_0 \in \mathbf{R}$, $0 < u_0 < v_0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.166.* Последовательность (a_n) ограничена и $2a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Показать, что $a_{n+1} - a_n \to 0$.

1.167.* Доказать сходимость и вычислить предел последовательности (a_n), если:

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 2) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^3} \sin n^4}{n+1}$;

3) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; 4) $a_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$, $a \geqslant 0$;

5) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$; 6) $a_0 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}$;

7) $a_0 = \sqrt{c}$, $a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}$;

8) $a_n = (1 + 1/n)^{n+5}$.

1.168.* Пусть $a, b > 0$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{-n} + b^{-n})^{-1/n}$.

1.169. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и $m_1, m_2, \ldots, m_p$ — положительные числа. Показать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{p} m_i a_i^n\right)^{1/n} = \max\{a_i\}; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{p} m_i a_i^{-n}\right)^{-1/n} = \min\{a_i\}.$$

1.170. Если (a_n) монотонна, то и любая ее подпоследовательность монотонна (!).

1.171. Если (a_n) ограничена, то и любая ее подпоследовательность ограничена (!).

1.172. Верно ли утверждение, обратное утверждению 1.171?

1.173. Если любой остаток последовательности (a_n) имеет наибольший элемент, то (a_n) имеет убывающую подпоследовательность (!).

1.174. Если (a_n) не имеет наибольшего элемента, то и любой ее остаток не имеет наибольшего элемента (!).

1.175. Пусть у (a_n) есть остаток, не имеющий наибольшего элемента (это предположение является отрицанием предположения задачи 1.173). Показать, что (a_n) содержит строго возрастающую подпоследовательность.

1.176. Используя результаты 1.173—1.175, можно получить *теорему о существовании монотонной подпоследова-*

тельности: любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность (!).

1.177. Отсюда, применяя утверждения 1.154 и 1.171, получаем результат, называемый *принципом выбора:* всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность (!).

1.178. Можно ли выбрать сходящуюся подпоследовательность из неограниченной последовательности?

1.179. Построить пример последовательности (a_n), имеющей немонотонную сходящуюся подпоследовательность.

1.180. Пусть дана последовательность (a_n), $a_n=(n+1)/n$.

1. Найти предел a_n.
2. $\exists\,\lambda_1$, такое, что $\forall\, n,\ m\geqslant\lambda_1\Rightarrow|a_n-a_m|\leqslant 0{,}01$ (!).
3. $\exists\,\lambda_2$, такое, что $\forall\, n,\ m\geqslant\lambda_2\Rightarrow|a_n-a_m|\leqslant 0{,}0001$ (!).
4. $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\lambda_\varepsilon$, такое, что $\forall\, n,\ m\Rightarrow\lambda_\varepsilon\Rightarrow|a_n-a_m|\leqslant\varepsilon$ (!).

Условие 1.180.4 для последовательности (a_n) называют *условием Коши.* Последовательности, для которых выполнено условие Коши, называют *фундаментальными.*

1.181. Если $\exists\, M\in\mathbf{R}_0$, такое, что для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\lambda_\varepsilon$, обладающее свойством: $\forall\, n,\ m\geqslant\lambda_\varepsilon\Rightarrow|a_n-a_m|\leqslant M\varepsilon$, то (a_n) — фундаментальная последовательность (!).

1.182. Последовательность 1, —1, 1, —1,... не является фундаментальной (!).

1.183. Привести примеры последовательностей, не являющихся фундаментальными.

1.184. Привести пример фундаментальной последовательности.

1.185. Фундаментальная последовательность ограничена (!).

1.186.* Сходящаяся последовательность фундаментальна (!).

1.187.* Из любой фундаментальной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (!).

1.188. Пусть (a_n) — фундаментальная последовательность и a — предел ее сходящейся подпоследовательности. Тогда $a_n\to a$ (!).

1.189. Таким образом, всякая фундаментальная последовательность сходится. Вместе с утверждением 1.186 это дает *критерий Коши сходимости последовательности:* для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

1.190. Пусть (a_n) имеет ненулевой предел (конечный или бесконечный). Тогда существует $n_0\in\mathbf{N}$, такое, что последовательность $(1/a_n)$, определенная для $n \geqslant n_0$,— фундаментальная (!).

1.191.* Изучить сходимость последовательности (a_n), если:

1) $a_n = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{n^2}$;

2) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} 1!}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2!}{2^n} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg} n!}{2^n}$;

3) $a_n = \frac{2}{1}\,\frac{1}{1!} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2!} + \ldots + \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{n!}$;

4) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Пусть L — множество пределов (конечных и бесконечных) подпоследовательностей последовательности (a_n). Число (или символ $\pm\infty$) $\sup L$ называется *верхним пределом последовательности* (a_n) и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Аналогично *нижний предел последовательности* (a_n) — это $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \inf L$.

1.192.* Найти верхний и нижний пределы (a_n), если:

1) $a_n = \sin(n\pi/6)$; 2) $a_n = (-1)^n$;

3) $a_n = (-1)^n + 1/n$; 4) $a_n = (-1)^n/n^2$;

5) $a_n = \operatorname{arctg}((-1)^n n)$; 6) $a_n = n \operatorname{arctg} n$.

1.193. В каждом из примеров 1.192 указать подпоследовательность, предел которой совпадает:

1) с $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$; 2) с $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

1.194. Для любой последовательности существуют ее верхний и нижний пределы (!).

1.195. Для сходимости (a_n) необходимо и достаточно, чтобы были конечны и равны $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ (!).

1.196. Пусть L — множество пределов подпоследовательностей последовательности (a_n).

1. Показать, что L может быть бесконечным.

2. Если (b_n) — последовательность элементов из L и $b_n \to b$, то $b \in L$ (!).

3. Существует подпоследовательность (a_{n_k}), такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ (!).

1.197. Для произвольных последовательностей (a_n) и (b_n)

имеют место неравенства $\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant$ $\leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ (!). Привести примеры, когда эти неравенства становятся:

1) равенствами;

2) строгими неравенствами.

1.198. Пусть (x_n) и (y_n) — две последовательности, причем (y_n) — возрастающая и $y_n \to +\infty$. Предположим, что $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to a$. Обозначим $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Для $\forall m,n \in \mathbf{N}$ $n > m \Rightarrow x_n - x_m = a(y_n - y_m) + \sum_{p=m+1}^{n} \alpha_p (y_p - y_{p-1})$ (!).

2. Выразить отсюда x_n/y_n и доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu_\varepsilon \in \mathbf{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ $n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leqslant \varepsilon$.

1.199. Отсюда получаем *теорему Штольца*: если $y_n > y_{n+1}$, $y_n \to +\infty$ и существует предел $a = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ (!).

1.200.* Вычислить пределы:

1) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right)$;

2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots \frac{1}{n^3} \right)$;

3) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right)$;

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

При выполнении приведенных ниже упражнений можно использовать различные приемы и теоремы, рассмотренные ранее.

1.201.* Последовательность (v_n) — такая, что $v_{n+1} - v_n \to \lambda$. Показать, что:

1) $v_n/n \to \lambda$; 2) $\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n^2} \to \frac{\lambda}{2}$.

1.202.* Пусть (a_n) — такая, что $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \to \lambda$. Тогда $a_n/n^2 \to \lambda/2$ (!).

1.203.* Сходится ли последовательность (u_n), если:

1) $u_0 = 1,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$;

2) $u_0 = x > 0,\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right),\ a > 0$?

1.204.* Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел и $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \ldots + \sqrt{x_n}}}$.

1. Доказать сходимость последовательности (y_n) и найти ее предел, если $\forall n\quad x_n = 2$ (см. 1.167.6).

2. Если последовательность (x_n) постоянная, то (y_n) ограничена сверху (!). Доказать сходимость (y_n) в этом случае.

3. Пусть $x_n = ab^{2^n}$. Доказать, что последовательность (y_n) сходится, и найти ее предел.

4. Последовательность (y_n) сходится тогда и только тогда, когда $\left(x_n^{2^{-n}}\right)$ ограничена сверху (!).

5. Изучить сходимость (y_n), если: а) $x_n = (n!)^n$; б) $x_n = n^{n^2}$; в) $x_n = n^{(n!)}$.

1.205.* Найти предел (a_n), если:

1) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{5}{3n} + \ldots + \dfrac{2n-1}{n^2}$;

2) $a_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$;

3) $a_n = n/p^n,\ p > 1$; 4) $a_n = n^k/2^n$;

5) $a_n = \dfrac{\log_a n}{n},\ a > 1$; 6) $a_n = n^k q^n,\ |q| < 1$.

1.206. Доказать равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Пусть (a_n)—некоторая последовательность. Рассмотрим последовательность (s_n), построенную по правилу: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ... Последовательность (s_n) называют *рядом* и записывают в виде $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, или $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, или $\sum a_n$.

Числа a_1, a_2, ... называют *членами ряда*, суммы s_1, s_2, ...—*частными суммами ряда*. Если (s_n) сходится, то ее предел s называют *суммой ряда*, а ряд называют *сходящимся*. В противном случае ряд *расходится*. Сумму ряда $\sum a_n$ обозначают $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.207.* Для любой последовательности (b_n) существует ряд $\Sigma\, a_n$, последовательность частных сумм которого совпадает с (b_n) (!).

Следовательно, изучение последовательностей можно свести к изучению рядов.

1.208. Для сходимости ряда $\Sigma\, a_n$ необходимо, чтобы $a_n \to 0$ (!).

1.209. Учитывая утверждение 1.207, сформулировать необходимое условие сходимости последовательности (b_n).

1.210. Условие 1.208 не является достаточным для сходимости ряда $\Sigma\, a_n$ (!) (см. 1. 191.4).

1.211. Указать необходимые и достаточные условия монотонности последовательности (s_n) частных сумм ряда $\Sigma\, a_n$.

1.212.* Изучить сходимость приведенных ниже рядов; для сходящихся рядов найти их суммы:

1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$; 2) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+1}{n}$;

4) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$; 5) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$;

6) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$.

1.213.* Для сходимости ряда $\Sigma\, a_n$ с положительными членами (положительного ряда) необходимо и достаточно, чтобы последовательность (s_n) была ограничена (!).

1.214.* Пусть Σa_n и Σb_n—положительные ряды, $a_n \leqslant b_n$ $\forall n$.

1. Если Σb_n сходится, то Σa_n сходится (!).
2. Если Σa_n расходится, то Σb_n расходится (!).
3. Утверждения 1 и 2 справедливы, если заменить условие $a_n \leqslant b_n$ $\forall n$ условием: $\exists\, m$, такое, что $\forall n \geqslant m \Rightarrow a_n \leqslant b_n$ (!).

1.215.* Если ряд Σa_n сходится и $a_n \geqslant 0$ $\forall n$, то сходится и ряд Σa_n^2 (!).

1.216. Пусть Σa_n и Σb_n—положительные сходящиеся ряды. Доказать сходимость рядов $\Sigma a_n b_n$ и $\Sigma (a_n + b_n)^2$.

1.217.* Изучить сходимость рядов:

1) $\sum \frac{1}{n^2}$; 2) $\sum \frac{1}{n+1}$; 3) $\sum \frac{|\sin n|}{n(n+1)}$;

4) $\sum \frac{1}{n!}$; 5) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; 6) $\sum \frac{1}{2^n+1}$.

1.218.* Доказать *критерий Коши сходимости ряда*: для того чтобы ряд Σa_k сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$, такое, что $\forall n \geqslant N_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leqslant \varepsilon$.

1.219. Доказать сходимость ряда Σa_n, если:

1) $a_n = \frac{\sin n^2}{n^2}$; 2) $a_n = \frac{\cos (n!)}{n!}$;

3) $a_n = x^n/n!$ $\forall x \in [0, +\infty[$.

Предполагаем, что читателям известны комплексные числа и действия в множестве $\mathbf{C}$ комплексных чисел. (Читатели, незнакомые с комплексными числами, могут перейти к § 1.4.)

Отображение (c_n): $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$, (c_n): $n \in \mathbf{N} \mapsto c_n \in \mathbf{C}$, называется *комплексной числовой последовательностью*. Поскольку $\forall n \in \mathbf{N}$ $c_n = x_n + iy_n$, то всякая комплексная последовательность (c_n) порождает две действительные последовательности: (x_n) и (y_n). Для комплексных последовательностей сохраняются основные обозначения и терминология, принятые для действительных последовательностей.

1.220. Сформулировать определение бесконечно малой последовательности и сходящейся последовательности (c_n).

1.221. Пусть $(c_n) = (x_n + iy_n)$. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $c_n \to x + iy$ (!).

1.222. Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению 1.221.

Таким образом, для сходимости (c_n) необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности (x_n) и (y_n).

1.223.* Исследовать сходимость последовательности (c_n) и найти ее предел, если он существует:

1) $c_n = \frac{1+i}{n}$; 2) $c_n = \frac{1+ni}{n+1}$; 3) $c_n = \frac{n^2+i(n+1)}{n}$;

4) $c_n = z^n$, где $z = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)$.

1.224.* Изучить сходимость последовательности (z^n), $z \in \mathbf{C}$.

1.225. Доказать принцип выбора для комплексных последовательностей.

1.226. Сформулировать определение фундаментальной комплексной последовательности.

1.227. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости комплексной последовательности.

Ряд с комплексными членами определяется так же, как ряд с действительными членами. Определения основных понятий для комплексных рядов дословно повторяют определения этих понятий для действительных рядов. Каждый комплексный ряд Σc_n, $c_n = a_n + ib_n$, порождает два действительных ряда: Σa_n и Σb_n.

1.228. Установить связь между сходимостью ряда $\Sigma\, c_n$ и рядов $\Sigma\, a_n$, $\Sigma\, b_n$, а также связь между их суммами.

1.229.* Изучить сходимость рядов:

$$1)\ \sum \frac{1+i}{n^2};\qquad 2)\ \sum \frac{1+ni}{n^2};\qquad 3)\ \sum \frac{1+i}{n}.$$

Ряд Σc_n называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\Sigma |c_n|$ ($\Sigma\, |c_n|$—действительный положительный ряд).

1.230. Используя критерий 1.227, доказать, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

1.231. Доказать сходимость ряда $\Sigma\, c_n$, если:

$$1)\ c_n = \frac{1+\sqrt{3}i}{2^n};\qquad 2)\ c_n = \frac{1+i}{(2+i)^n};$$

$$3)\ c_n = \frac{(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n}{n^2}.$$

1.232. При любом $z \in \mathbf{C}$ сходятся ряды:

$$1)\ \sum \frac{z^n}{n!};\qquad 2)\ \sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};\qquad 3)\ \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ (!).$$

1.4. Функции

Будем рассматривать *функции*, т. е. отображение вида $f\colon X \to Y$, X, $Y \subset \mathbf{R}$. Точнее, пусть X, $Y \subset \mathbf{R}$. Закон f, сопоставляющий каждому $x \in X$ единственное число $y \in Y$, называется функцией. Число y обозначают $y = f(x)$. Сам факт задания функции записывают следующим образом: $f\colon X \to Y$ или $f\colon x \in X \mapsto y = f(x) \in Y$.

Множество X называют *множеством задания* функции f, множество $E_y = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ — *множеством значений* f. Задание функции f уже предполагает задание множества X. Будем рассматривать в основном функции, заданные аналитически, т. е. одной или несколькими формулами. Если f задана формулой и множество X не указано специально, то под X будем подразумевать *естественную область определения* f, т. е. множество x, при которых эта формула имеет смысл.

1.233.* Найти естественные области определения функций, заданных формулами:

1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{9-x^2}$;

3) $f(x)=\sqrt{ax^2+1}+\sqrt{bx^2+1}$, $ab>0$;

4) $f(x)=\ln\sin x$; 5) $f(x)=\ln\ln x$;

6) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$; 7) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$.

1.234. Построить функцию, заданную формулой, у которой естественной областью определения является множество $\{a\}\cup[b, c]$, $a\notin[b, c]$.

1.235. Естественная область определения функции f: $x\mapsto\log_a\varphi(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, не зависит от выбора a (!).

1.236.* Пусть (x_n) — арифметическая прогрессия с разностью d и f: $x\mapsto f(x)=2^x$. Последовательность $f(x_n)$ является геометрической прогрессией (!). Найти ее знаменатель.

1.237.* Пусть (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q и f: $x\mapsto f(x)=\log_x 2$.

1. Какова естественная область определения f?

2. Последовательность $(1/f(x_n))$ является арифметической прогрессией (!). Какова ее разность?

1.238. Функция *Дирихле* D: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определяется формулой

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Показать, что $\forall p,q\in\mathbf{Z}\Rightarrow D(x+p/q)=D(x)$.

1.239.* Функция *Хевисайда* определяется на $\mathbf{R}$ формулой

$$1(x)\triangleq\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Пусть a, $b\in\mathbf{R}$, $a<b$.

1. Вычислить $1(x-a)$.

2. Вычислить $1(x-a)+1(x-b)$.

3. Пусть f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a, b[;\\ c, & x\in[a, b[.\end{cases}$ Выразить $f(x)$ с помощью $1(x)$.

4. Записать с помощью $1(x)$ функцию g,

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\notin [a, d[;\\ A, & x\in [a, b[; \quad a\leqslant b\leqslant d.\\ B, & x\in [b, d[,\end{cases}$$

Функция f: $X\to Y$ называется *ограниченной (ограниченной сверху, снизу)*, если множество E_y ограничено (ограничено сверху, снизу). Грани множества E_y обозначают:

$$\sup E_y=\sup_{x\in X} f(x)=\sup_X f(x); \quad \inf E_y=\inf_{x\in X} f(x)=\inf_X f(x).$$

1.240. Пусть f и g—две функции, определенные на $X\in \mathbf{R}$.

1. $\sup\limits_X (f(x)+g(x))\leqslant \sup\limits_X f(x)+\sup\limits_X g(x)$ (!).

2. Построить пример, когда будет равенство.

3. Предположим, что $f(x)<g(x)$ $\forall x\in X=[a, b]$. Могут ли выполняться оба равенства: $\sup\limits_X f(x)=\sup\limits_X g(x)$ и $\inf\limits_X f(x)=\inf\limits_X g(x)$?

4. Допустим, что $\sup\limits_X f(x)<\sup\limits_X g(x)$ и $\inf\limits_X f(x)<\inf\limits_X g(x)$, $X=[a,b]$. Следует ли отсюда, что $f(x)<g(x)$ $\forall x\in [a, b]$?

Пусть f: $X\to Y$ и $A\subset X$. Функцию g: $A\to Y$, определяемую по правилу: g: $x\in A\mapsto g(x)=f(x)$, называют *сужением f на A*.

1.241. Пусть f: $x\mapsto x^2$ $\forall x\in \mathbf{R}$ и g—сужение f на $[0,+\infty[$. Сравнить E_y для f и для g.

1.242. Сравнить множества значений произвольной функции f и ее произвольного сужения.

1.243. Если функция f ограничена, то и любое ее сужение ограничено (!).

1.244. Множество всех определенных на $[a, b]$ и ограниченных функций замкнуто относительно сложения и умножения (!). Замкнуто ли оно относительно деления? (Арифметические операции над функциями определяются естественным образом:

$f+g$: $x\mapsto f(x)+g(x)$, fg: $x\mapsto f(x)g(x)$, f/g: $x\mapsto f(x)/g(x)$.)

1.245. Если f ограничена на $[a, b]$, то функция g: $[a, b]\to \mathbf{R}$, $g(x)=f^n(x)+a_1f^{n-1}(x)+\ldots+a_{n-1}f(x)+a_n$ $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n\in \mathbf{R}$, ограничена на $[a, b]$ (!).

1.246. Привести пример функции, для которой $f(x)\neq \sup\limits_X f(x)$ $\forall x\in X$, если:

1) $X=\mathbf{R}$; 2) $X=[0, 1]$.

Пусть $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y_1\to Z$, $Y\subset Y_1$, X, $Z\subset\mathbf{R}$. Тогда каждому $x\in X$ можно сопоставить $z\in Z$ по правилу: $h\colon x\mapsto z=g(f(x))$, т. е. можно определить функцию $h\colon X\to Z$, которую называют *композицией функций* g *и* f (сложной функцией) и обозначают $h=g\circ f$.

1.247. Выяснить, в каком из следующих случаев можно построить композицию $g\circ f$:

1) $f\colon x\mapsto \ln x\quad \forall x\in\,]0,\,1]$, $g\colon x\mapsto\ln x\quad\forall x\in\,]0,\,+\infty[$;

2) $f\colon x\mapsto x^2\quad\forall x\in\mathbf{R}$, $g\colon x\mapsto\cos x\quad\forall x\in\mathbf{R}$;

3) $f\colon x\mapsto \operatorname{tg} x\quad\forall x\in\,]-\pi/2,\,\pi/2[$, $g\colon x\mapsto e^x\quad\forall x\in\mathbf{R}_0$.

1.248.* Можно ли составить композиции $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$, если:

1) $f(x)=e^x\quad\forall x\in\mathbf{R}$, $g(x)=\ln x\quad\forall x\in\,]0,\,+\infty[$;

2) $f(x)=2^x\quad\forall x\in\mathbf{R}$, $g(x)=x^2\quad\forall x\in\mathbf{R}$?

1.249. Композиция ограниченных функций ограничена (!).

1.250.* Будет ли ограниченной композиция $f\circ g$, если:

1) f ограничена, а g — нет;

2) g ограничена, а f — нет?

1.251. Композиция $D\circ f$ ограничена для любой функции f (!) (см. 1.238).

1.252.* Рассмотрим функцию $E\colon x\mapsto E(x)$, где $E(x)$ — целая часть числа x, $x\in\mathbf{R}$. Какие значения принимает f, если $E\circ f=f$?

1.253. Функции $f\colon [a,\,b]\to\mathbf{R}$ и $E\circ f$ обе ограничены или обе не ограничены (!).

1.254. Функция $f\colon [0,\,1]\to\mathbf{R}$ ограничена на любом отрезке $\left[\dfrac{1}{n+1},\,\dfrac{1}{n}\right]$, $n\in\mathbf{N}$. Ограничена ли f на $[0,\,1]$?

1.255.* Пусть $f\colon x\mapsto ax+b$, $x\in\mathbf{R}$, a и b — фиксированные. Найти $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\ \text{раз}}$.

1.256.* Пусть f — произвольная функция. Существуют ли функции φ и ψ, $\varphi(x)\not\equiv x$, $\psi(x)\not\equiv x$, такие, что $f=\psi\circ\varphi$?

1.257. Функции f и φ определены на множестве X. Существует ли функция ψ, такая, что $\psi\circ\varphi=f$?

1.258. Функция f представима в виде $f=\psi\circ\varphi$. Является ли такое представление единственным?

Пусть функция f определена на множестве X, таком, что $\exists T\neq 0$ $\forall x\in X\Rightarrow x\pm T\in X$. Если $f(x+T)=f(x)\quad\forall x\in X$, то f называется *периодической функцией с периодом* T.

1.259. Является ли периодической функция f, если:

1) $f(x) = \sin x + \cos(x/2) + 1$; 2) $f(x) = \sin^2 x + \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = E(x) + 1$; 4) $f(x) = E(x) + 1(x)$?

1.260. Привести пример периодической функции с периодом:

1) 1; 2) 1/2; 3) 3; 4) e.

1.261. Если T — период функции f, то kT также является периодом f при любом $k \in \mathbf{Z}$ (!).

В дальнейшем под периодом будем понимать наименьший из положительных периодов функции (если он существует).

1.262. Функция f периодическая с периодом T. Определить, будет ли периодической функция g, если:

1) $g(x) = f(x + a)$, $a \in \mathbf{R}$ фиксировано;

2) $g(x) = af(x + b) + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ фиксированы;

3) $g(x) = f(x^2)$; 4) $g(x) = f(\sqrt{x})$.

1.263. Функция f периодическая, и $f \circ \varphi$ определена. Будет ли периодической $f \circ \varphi$?

1.264. То же для $\varphi \circ f$ в предположении, что $\varphi \circ f$ определена.

1.265.* Если функция f периодическая с периодом T, то f^2 — также периодическая с периодом $T_1 \leqslant T$. Привести пример, когда $T_1 < T$.

1.266. Функция Дирихле (см. 1.238) периодическая, но не имеет наименьшего положительного периода (!).

1.267. Многочлен может быть периодической функцией только тогда, когда он нулевой или степень его равна нулю (!).

1.268. Относительно каких арифметических операций замкнуто множество всех периодических функций с периодом T?

1.269. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $f(ax) = f(x)$ $\forall x \in X$, $a > 0$—фиксированное. Показать, что $\forall c > 0$, $c \neq 1$, функция $\varphi: x \mapsto f(c^x)$ периодическая. Определить ее период.

1.270.* Функции f и g периодические с ненулевыми периодами T_1 и T_2.

1. Если $T_1/T_2 \in \mathbf{Q}$, то функция $f+g$ периодическая (!). Каков ее период?

2. Будет ли периодической $f+g$, если $T_1/T_2 \notin \mathbf{Q}$?

Функцию f, определенную на X, называют *четной*, если $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$. Если $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$, то f называют *нечетной*.

1.271. Выяснить, являются ли четными или нечетными функции, определенные формулами:

1) $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \cos x + \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$;

4) $f(x) = x^3 + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$;

5) $f(x) = e^{x^2} + x$, $x \in \mathbf{R}$.

1.272. Функция f определена на $\mathbf{R}$. Выяснить, являются ли четными или нечетными функции, заданные формулами:

1) $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$; 2) $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$;

3) $\varphi(x) = f(x^2)$; 4) $\varphi(x) = f(x^3)$; 5) $\varphi(x) = f(|x|)$;

6) $\varphi = f \circ g$, где g — четная функция;

7) $\varphi = f \circ g$, где g — нечетная функция.

1.273. Пусть $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $g\colon x \mapsto f(x+a)$ — четные функции. Тогда функция f периодическая (!). Определить ее период.

1.274.* Любая функция $f\colon]-l, l[\to R$ представима в виде суммы четной и нечетной функций (!).

1.275. Представить в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

1) $f\colon x \mapsto (x+1)^2$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $f\colon x \mapsto e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

1.276. Относительно каких арифметических операций замкнуто множество всех четных (нечетных) функций?

Функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ называется *возрастающей*, если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$, и *убывающей*, если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Если неравенства строгие, то f называют *строго возрастающей* или *строго убывающей* соответственно. Все эти функции называют монотонными.

1.277. Линейная функция $f\colon x \mapsto ax+b$ монотонна на $\mathbf{R}$ (!).

1.278. Если f монотонна, то и любое ее сужение монотонно (!). Верно ли обратное?

1.279. Показать, что функция $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$, немонотонна. Можно ли построить ее монотонные сужения?

1.280. Для функции f из задачи 1.279 найти $a, b, c \in \mathbf{R}$, такие, чтобы сужение f на $[0, 1]$ было монотонным.

1.281. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ и $c \in]a, b[$. Если сужения f на $[a, c]$ и $[c, b]$ возрастают, то f возрастает (!).

1.282. Можно ли в задаче 1.281 заменить $[c, b]$ на $]c, b]$?

1.283. Построить монотонную функцию f, такую, что функция $|f|$: $x \mapsto |f(x)|$ немонотонна.

1.284. Если $|f|$ монотонна, то обязательно ли монотонна f?

Пусть f: $X \to \mathbf{R}$, $A \subset X$ и g — сужение f на A. Если функция g имеет свойство P, то будем говорить, что f на A имеет свойство P.

1.285. Функции $|f|$ и f^2 имеют совпадающие промежутки монотонности (!).

1.286. Функции f и g монотонны на $[a, b]$, $f(a) < g(a)$ и $f(b) < g(b)$. Верно ли, что $f(x) < g(x)$ $\forall x \in [a, b]$?

1.287. Определить промежутки монотонности функций, заданных формулами:

1) $f(x) = \sin 2x$; 2) $f(x) = E(x) - x$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = 1/(x-1)$;
5) $f(x) = 1(x)$; 6) $f(x) = D(x)$.

1.288. Если f и g возрастают на $X = [a, b]$ и ограничены, то:

$$\sup_X (f(x) + g(x)) = \sup_X f(x) + \sup_X g(x);$$

$$\inf_X (f(x) + g(x)) = \inf_X f(x) + \inf_X g(x) \ (!).$$

Справедливо ли аналогичное утверждение для убывающих f и g?

1.289. Пусть f и g — возрастающие на X функции. Изучить монотонность функций $f+g$, $f-g$, fg, f/g (в последнем случае $g(x) \neq 0$, $x \in X$).

1.290. Если f: $\mathbf{R} \to Y$ и Y — конечное множество, то f не может быть строго монотонной (!).

1.291. Может ли монотонная функция быть четной (нечетной)?

1.292. Может ли монотонная функция быть периодической?

1.293. Указать функцию f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такую, что $\varphi: x \mapsto \sin f(x)$ монотонна.

1.294. Пусть функции f и φ определены на $\mathbf{R}$ и f монотонна. Будет ли монотонной композиция $f \circ \varphi$?

1.295. Изучить монотонность композиции $f \circ \varphi$ (считая, что она может быть определена) в случае, когда:

1) f и φ возрастают;
2) f возрастает, а φ убывает;
3) f убывает, а φ возрастает;
4) f и φ убывают.

Важнейшим классом функций, изучаемых в курсе средней школы, является класс функций, условно называемых *элементарными*. Обозначим этот класс E. Характерными свойствами класса E являются:

1) функции: постоянная $f(x)=c$, степенная $f(x)=x^{\mu}$, синус $f(x)=\sin x$, показательная $f(x)=a^x$ принадлежат E;

2) класс E замкнут относительно арифметических операций;

3) если $f\in E$, то $f^{-1}\in E$;

4) если $f, g\in E$, то $f\circ g\in E$ (если $f\circ g$ имеет смысл).

В частности, элементарными являются:

гиперболические функции

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$—синус гиперболический x;

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$—косинус гиперболический x;

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — тангенс гиперболический x;

обратные гиперболические функции

$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$—ареа-синус гиперболический x;

$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ — ареа-косинус гиперболический x;

$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ — ареа-тангенс гиперболический x (!).

Основанием для таких названий является глубокая связь этих функций с тригонометрическими функциями. Для гиперболических функций выполняются следующие соотношения:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$; $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$;

$\operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$; $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$; $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$;

$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$; $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$; $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}$;

$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$; $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}$;

$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))$;

$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))$;

$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))$ (!).

1.296. Показать, что следующие функции элементарные:

1) $f\colon x \to \sqrt[3]{x} + \log_2 \operatorname{arctg} x$; 2) $f\colon [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$.

1.297.* Будут ли элементарными функции, определенные по закону:

1) φ: $[-1, 2] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x$; 2) φ: $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x$?

1.298.* Пусть f: $X \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{E}$ и $]a, b[\subset X$. Будет ли сужение f на $]a, b[$ элементарной функцией?

1.5. Предел функции

1.299. Рассмотрим функцию f: $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

1. $\exists \delta_1 > 0$, такое, что $\forall x$, $|x-1| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |x^2-1| \leqslant 0{,}01$(!).
2. $\exists \delta_2 > 0$, такое, что $\forall x$, $|x-1| \leqslant \delta_2 \Rightarrow |x^2-1| \leqslant 0{,}001$(!).
3. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $|x-1| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2-1| \leqslant \varepsilon$(!).

1.300. Пусть f: $x \mapsto 1(x) + 1(-x)$, $x \in \mathbf{R}$ (см. 1.239).

1. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $0 < |x| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$(!).
2. Утверждение 1 не выполняется, если неравенство $0 < |x| \leqslant \delta_\varepsilon$ заменить неравенством $|x| \leqslant \delta_\varepsilon$(!).

1.301. Пусть f: $x \mapsto x^2/|x^2|$ $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $0 < |x| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$(!).

Рассмотрим функцию f, определенную в некоторой окрестности точки a, за исключением разве лишь самой точки a. Число A называют *пределом функции* f в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $0 < |x-a| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$. Говорят также, что $f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к a, и записывают: $f(x) \to A$ при $x \to a$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

1.302. Для того чтобы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists M$, такое, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, при котором $\forall x$, $0 < |x-a| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant M\varepsilon$(!).

1.303. Функция может иметь в точке a не более одного предела (!).

1.304. Функция Хевисайда имеет предел в любой точке $x \neq 0$, а в точке 0 предела не имеет (!).

1.305. Функция Дирихле (см. 1.238) не имеет предела ни в одной точке (!).

1.306. Функция f, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ имеет предел только в точке 0(!).

1.307.* Привести пример функции, не имеющей предела во всех точках, за исключением точек a и b.

1.308. Привести пример функции, имеющей предел всюду, за исключением:

1) точек множества $\{1/n, n \in \mathbf{N}\}$;

2) заданной монотонной сходящейся последовательности точек.

1.309. Если $f(x) \to A$ при $x \to a$, то существует $\delta > 0$, такое, что f ограничена для x, $0 < |x-a| \leqslant \delta$ (!).

1.310. Рассмотрим функцию f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, обладающую «сжимающим» свойством: $\exists k$, $0 < k < 1$, такое, что $\forall x$, $y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Пусть $a \in \mathbf{R}$, $z_0 = a$, $z_n = f(z_{n-1})$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Последовательность (z_n) фундаментальная (!).

2. Функция f имеет «неподвижную» точку, т. е. $\exists x_0$, такая, что $f(x_0) = x_0$ (!).

3. Неподвижная точка функции f единственная (!).

4. Уравнение $\dfrac{\sin 2x}{2} - 3x = 0$ имеет решение (!).

5. Единственно ли это решение?

1.311. Если $f(x) \to A$ при $x \to a$, то f удовлетворяет *условию Коши* при $x \to a$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x'$, $x'' \in \mathbf{R}$, $0 < |x'-a| \leqslant \delta_\varepsilon$, $0 < |x''-a| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$(!).

1.312. Для функции f: $x \mapsto (x-1)^2$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$. Показать, что для любой последовательности (x_n), $x_n \to 1$, последовательность $(f(x_n))$ сходится к 0.

1.313. Если $f(x) \to A$ при $x \to a$, то для любой последовательности (x_n), удовлетворяющей условиям: $x_n \to a$, $x_n \in X$, $x_n \neq a$, выполняется условие $f(x_n) \to A$ (!).

1.314. Используя правило Де Моргана, можно записать, что утверждение «$f(x)$ не стремится к A при $x \to a$» означает: $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x^0 \in X$, $0 < |x^0 - a| \leqslant \delta$, но $|f(x^0) - A| > \varepsilon$ (!).

1.315. Пусть $\delta_n = o(1)$. Для каждого n построим x_n^0 (см. 1.314). Последовательность (x_n^0) сходится (!). Найти ее предел.

1.316. Последовательность $(f(x_n^0))$ не сходится к A (!).

1.317. Используя результаты 1.313 — 1.316, доказать *критерий Гейне* стремления $f(x)$ к A при $x \to a$: для того чтобы $f(x) \to A$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x_n), удовлетворяющей условиям: $x_n \to a$, $x_n \in X$, $x_n \neq a$, последовательность $(f(x_n))$ сходилась к A.

1.318. Построить последовательности (x_n'), $(x_n'') \in \mathrm{M}$, такие, что $\sin(1/x_n') \to 1$ и $\sin(1/x_n'') \to 0$. Что можно сказать о пределе $\sin(1/x)$ при $x \to 0$?

1.319. Используя критерий Гейне, показать, что не существует предела при $x \to 1$ функции f, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1; \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$

1.320. Если $\exists (x_n)$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in X$, такая, что $f(x_n) \to \infty$, то не существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (!).

1.321. Пусть $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$. Тогда $f(x) + g(x) \to A + B$ при $x \to a$ (!).

1.322. Сформулировать и доказать утверждение о пределе арифметической комбинации функций (см. 1.138).

1.323. Если $f(x) \leqslant g(x)$ и $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$, то $A \leqslant B$ (!).

1.324. Справедливо ли утверждение: если $f(x) < g(x)$, $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$, то $A < B$?

1.325. Если $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и $f(x) \to A$, $h(x) \to A$ при $x \to a$, то $g(x) \to A$ при $x \to a$ (!).

1.326. Показать, что $\forall x \in]0, \pi/2[$ выполняется неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

1.327. Для $x \in]0, \pi/4[$ выполняется неравенство $x < \operatorname{tg} x < 2x$ (!). Найти отсюда предел $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

1.328. Функция $f\colon x \mapsto (x^2 + 1)/x$ не имеет предела в точке 0 (!).

1.329. Для любого многочлена P, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, предел в точке x_0 равен $P(x_0)$ (!).

1.330.* Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)(2+x)}{(x+3)(x+4)}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax+b}{cx+d} + \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$;

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^3 - 8}$;

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^m - a^m}{x}$, $m \in \mathbf{N}$;

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, $m, n \in \mathbf{N}$; 8) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x^3} - 8}{\sqrt{x} - 4}$;

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(x+a)a} - (x+a)}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}$; 10) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m, n \in \mathbf{N}$.

1.331. Пусть f удовлетворяет условию Коши при $x \to a$ (см. 1.311). Используя критерий Коши сходимости последовательности 1.189 и критерий Гейне 1.317, можно показать, что $\exists A \in \mathbf{R}$, такое, что $f(x) \to A$ при $x \to a$ (!).

1.332. Вместе с результатом 1.311 утверждение 1.331 дает *критерий Коши существования предела функции*: для того чтобы $f(x) \to A$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяла условию Коши $x \to a$ (!).

1.333. Условие: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x \in [-\delta_\varepsilon, 0[\cup]0, \delta_\varepsilon] \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$, для функции $f(x) = 1(x)$ не выполняется ни при каком A (см. 1.304). Но $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x \in]0, \delta_\varepsilon] \Rightarrow |1(x) - 1| \leqslant \varepsilon$ (!).

Число A называют *правосторонним пределом функции* f *в точке* a, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $0 < x - a \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$. Обозначают это так: $f(a+0) = A$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$. Аналогично *левосторонний предел* f *в точке* a — такое число A, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, $\forall x$, $0 < a - x \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$. Обозначают: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$.

1.334. Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $\exists f(a+0)$, $f(a-0)$ и они равны A (!).

1.335. Если $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют и равны, то существует и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a+0) = f(a-0)$ (!).

1.336.* Найти $f(a+0)$, $f(a-0)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (если они существуют):

1) $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x < 0; \\ \sin(1/x), & x > 0; \end{cases} \quad a = 0;$

2) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $a = 0$;

3) $f(x) = x/|x|$, $x \neq 0$, $a = 0$;

4) $f(x) = \sin x \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $a = 0$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{1/(x-1)}}$, $x \neq 1$, $a = 1$.

1.337. Пусть $a \in]\alpha, \beta[$, f определена на $]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$ и $g_+ \colon]a, \beta[\to \mathbf{R}$ — сужение f на $]a, \beta[$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g_+(x)$.

1.338. Аналогично для сужения $g_- \colon]\alpha, a[\to \mathbf{R}$ функции f на $]\alpha, a[$ имеем: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g_-(x)$ (!).

1.339. Для того чтобы $f(a+0) = A$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x_n), удовлетворяющей условиям: $x_n \to a$, $x_n \in X$, $x_n > a$, последовательность $(f(x_n))$ сходилась к A (!). Это утверждение называют *правосторонней теоремой Гейне*. Сформулировать и доказать левостороннюю теорему Гейне.

1.340. Рассмотрим $f\colon x \mapsto (1+x)^{1/x}$, $x \neq 0$.

1. Пусть (k_n) — последовательность натуральных чисел, $k_n \to +\infty$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/k_n) = e$.

2. Пусть $x_n \to +0$. Тогда для $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists k_n$, такое, что $\dfrac{1}{k_n+1} < x_n \leqslant \dfrac{1}{k_n}$. Используя лемму 1.133, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

3. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = e$ (!).

4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = e$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ (!).

1.341.* Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to a} (1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \left(1 + \dfrac{x-a}{x}\right)^{1/(x-a)}$; 3) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{x^2+x-a^2}{x}\right)^{x/(x-a)}$.

Говорят, что $f(x)$ стремится к ∞ при x, стремящемся к a ($f(x) \to \infty$ при $x \to a$), если $\forall E > 0$ $\exists \delta_E > 0$, такое, что $\forall x$, $0 < |x-a| \leqslant \delta_E \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)| \geqslant E$. Если при этом $f(x) \geqslant E$, то $f(x) \to +\infty$; если же $f(x) \leqslant$ $\leqslant -E$, то $f(x) \to -\infty$.

1.342. Что означают односторонние бесконечные пределы в точке a?

В дальнейшем, говоря о пределе функции, будем подразумевать не только конечный, но и бесконечные пределы.

1.343.* Найти $f(a+0)$, $f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (если они существуют):

1) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $a = 0$; 2) $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, $a = 0$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$; 4) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $x \neq 1$, $a = 1$.

Если функция f определена на $]a, +\infty[$, то можно рассматривать предел f при $x \to +\infty$, а именно: число A называют пределом функции f при $x \to +\infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon$, такое, что $\forall x$, $x \geqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to +\infty$.

1.344. Дать определение предела функции:

1) при $x \to -\infty$; 2) при $x \to \infty$.

1.345. Записать с помощью неравенств (т. е. так, как это сделано в определении предела) утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

7) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$; 8) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

1.346. Сформулировать критерий Гейне для случаев $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

1.347.* Показать, что пределы функции $f\colon x\mapsto\sin x$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ не существуют.

1.348. Привести пример функции, не имеющей предела при $x\to+\infty$ и имеющей предел при $x\to-\infty$.

Точка x_0 называется *предельной точкой множества* U, если в любой окрестности точки x_0 есть точки из U, отличные от x_0.

Пусть $f\colon X\to\mathbf{R}$, $U\subset X$ и a — предельная точка U. Число A называют *пределом функции* f *в точке* a *вдоль* U, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_\varepsilon>0$, такое, что $\forall x\in U$, $0<|x-a|\leqslant\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$. Пишут: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in U}} f(x) = A$.

В дальнейшем, если нет специальных указаний, будем понимать $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ как $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} f(x)$.

1.349.* Для функции Дирихле (см. 1.238) вычислить:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{Q}}} D(x)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}} D(x)$.

1.350. Доказать:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a+0)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a-0)$.

Говорят, что f удовлетворяет *условию Коши при* $x\to+\infty$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$, такое, что $\forall x'$, x'', таких, что $x'>P_\varepsilon$, $x''>P_\varepsilon\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$.

1.351. Для того чтобы $f(x)\to A$ при $x\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяла условию Коши при $x\to+\infty$ (!).

1.352. Сформулировать условие Коши при $x\to-\infty$ и критерий Коши для этого случая.

1.353. Сравнить пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ для нечетной функции, предполагая, что эти пределы существуют.

1.354. Функция $f\colon x\mapsto e^{-x}D(x)$ не имеет предела ни в одной конечной точке, но имеет предел при $x\to+\infty$ (!).

1.355. Сформулировать и доказать аналог утверждения 1.325 при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

1.356. Если функция f периодическая и $f(x) \to c$ при $x \to \infty$, то $f(x) \equiv c$ (!).

1.357. Может ли периодическая функция иметь бесконечный предел при $x \to +\infty$?

1.358. Может ли периодическая функция быть неограниченной?

1.359. Если $\exists a \neq 1$, такое, что функция f, имеющая конечный предел $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = c$, удовлетворяет условию $f(ax) = f(x)$ $\forall x > 0$, то f постоянна на $]0, +\infty[$ (!).

1.360. Изучить пределы многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

1.361.* Пусть P и Q — многочлены. Каковы пределы функции $f\colon x \mapsto P(x)/Q(x)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$?

1.362. Если $f(x) \to l$ при $x \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $f(\varphi(x)) \to l$ при $x \to a$ (!). (Предполагается, что $f \circ \varphi$ имеет смысл.)

1.363.* Вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{ax})}{\ln(2 + e^{bx})}$, $a, b > 0$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$, $n \in \mathbf{N}$;

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1.364. Пусть $u(x) \to 1$, $v(x) \to +\infty$ и $v(x)(u(x) - 1) \to c$ при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} (u(x))^{v(x)} = e^c$ (!).

1.365. Используя неравенство 1.326, показать, что $|1 - \sin x/x| < x$ для $x > 0$. Отсюда получить $\lim\limits_{x \to +0} \sin x/x = 1$.

1.366. Доказать замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

1.367.* Вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin mx^2}{nx^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)\to 0$, $\alpha(x)\neq 0$ при $x\to a$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi/2-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{1/(2x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x^2-a^2)}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

1.368.* Пусть $\varphi(x)\to\infty$ и $\varphi(x+1)-\varphi(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\varphi(x+1)-\sin\varphi(x))$.

1.369.* Пусть $f(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))$.

1.370.* Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}$, если $\frac{f(x)}{x}\to\infty$ при $x\to\infty$.

1.6. Бесконечно малые функции

Функцию f называют *бесконечно малой* при $x\to a$, если $f(x)\to 0$ при $x\to a$. При этом пишут: $f(x)=o(1)$ при $x\to a$. Аналогично определяют бесконечно малые функции при $x\to a-0$, $x\to a+0$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, $x\to\infty$.

1.371. Если f и g — бесконечно малые функции при $x\to a$, то $f+g$, fg и αf ($\alpha\in\mathbf{R}$ — число) — также бесконечно малые (!).

1.372. Привести примеры, в которых предел отношения двух бесконечно малых функций при $x\to a$:

1) равен 1; 2) равен 0; 3) равен ∞; 4) не существует.

1.373.* Может ли многочлен быть бесконечно малой функцией при $x\to\infty$?

Пусть f и g — бесконечно малые функции при $x\to a$, $g(x)\neq 0$ $\forall x$ и $\exists\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))=l$.

Если $l=1$, то f называют *эквивалентной* g *при* $x\to a$ и записывают: $f\sim g$ при $x\to a$.

Если $l=0$, то говорят, что f имеет *больший порядок малости*, чем g, и записывают: $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$.

Если $l\neq 0$, $l\neq\infty$, то f и g *одного порядка малости.*

Пусть $\exists M$, такое, что $|f(x)|\leqslant M|g(x)|\,\forall x$ из некоторой окрестности точки a, $x\neq a$. В этом случае записывают: $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$.

Если f и g^n одного порядка малости, то f называют *бесконечно малой n-го порядка* относительно g при $x\to a$.

1.374. Если $f\sim g$ при $x\to a$, то $g\sim f$ при $x\to a$ (!).

1.375. $f\sim f$ при $x\to a$ (!).

1.376. Если при $x\to a$ $f\sim g$ и $g\sim h$, то $f\sim h$ (!).

1.377. Если $f \sim g$ при $x \to a$, то $f(x) - g(x) = o(f(x))$ и $f(x) - g(x) = o(g(x))$ (!).

1.378. $f \sim g$ при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + h(x)$, где $h(x) = o(g(x))$ (!). Это утверждение называют *критерием эквивалентности бесконечно малых функций*.

1.379. Привести примеры эквивалентных бесконечно малых функций при:

1) $x \to 0$; 2) $x \to x_0$; 3) $x \to \infty$.

1.380. Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$ (!).

1.381. Если при $x \to a$ $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$ (!).

1.382. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ и $\alpha > 0$, то $f(x)(x - a)^{\alpha} = o(g(x))$ при $x \to a$ (!).

1.383. Если $\alpha < 0$, то утверждение 1.382 может не выполняться (!).

1.384. $o((x-a)^{\alpha}) \cdot o((x-a)^{\beta}) = o((x-a)^{\alpha+\beta})$ при $x \to a$ для любых положительных α, β (!).

1.385. При $x \to a$ $o((x-a)^{\alpha}) + o((x-a)^{\beta}) = o((x-a)^{\gamma})$, где $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ (!).

1.386. $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$ при $x \to a$ (!).

1.387. $o((x-a)^{\alpha})(x-a)^{\beta} = o((x-a)^{\alpha+\beta})$ при $x \to a$ $\forall \alpha, \beta \in \,]0, +\infty[$ (!).

1.388. $O((x-a)^{\alpha}) \cdot (x-a)^{\beta} = O((x-a)^{\alpha+\beta})$ при $x \to a$ $\forall \alpha, \beta \in \,]0, +\infty[$ (!).

1.389. Если при $x \to a$ $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$ (!).

1.390. Если при $x \to a$ $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$ при $x \to a$ (!).

1.391. $\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$ (!).

1.392.* Установить порядок малости функции f по отношению к x при $x \to 0$, если:

1) $f(x) = 2x + x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \sin x$;
3) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$;
5) $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$; 6) $f(x) = x \sin x - x^2 \operatorname{tg} x$.

1.393.* Установить порядок малости функции f по отношению к $x - a$ при $x \to a$, если:

1) $f(x) = 1 - \sin x$, $a = \pi/2$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $a = 1$;
3) $f(x) = \cos^2 x$, $a = \pi/2$; 4) $f(x) = x^3 + 1$, $a = -1$.

1.394.* Установить порядок малости функции f по отношению к $1/x$ при $x \to \infty$, если:

1) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x\sqrt{x+2}}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$; 4) $f(x) = \sin(1/\sqrt{x})$.

1.395. Для $\forall n \in \mathbf{N}$ существует функция порядка n по отношению к x при $x \to 0$ (!).

1.396. Функция $f: x \mapsto x^{1/x}$, $x \in]0, +\infty[$, при $x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^n при любом фиксированном $n \in \mathbf{N}$ (!).

1.397.* Построить функцию более высокого порядка при $x \to 0$, чем $x^{1/x}$.

1.398.* Построить функцию более низкого порядка при $x \to 0$, чем $x^{1/n}$.

1.399. Если $f(x) \to A$ при $x \to a$, то $f(x) = A + o(1)$ (!). Представить в таком виде $f(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $a = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $a = 0$.

1.400. Функции $f: x \mapsto x$ и $g: x \mapsto \sin(1/x)$ несравнимы при $x \to 0$ в том смысле, что g не является ни одинакового, ни более высокого, ни более низкого порядка по отношению к f (!).

1.401. Привести примеры несравнимых бесконечно малых функций при:

1) $x \to 0$; 2) $x \to x_0$; 3) $x \to +\infty$.

1.402.* Найти многочлен $P_2(x)$ второй степени, такой, что $(a_1 + b_1x + c_1x^2 + o(x^2))(a_2 + b_2x + c_2x^2 + o(x^2)) = P_2(x) + o(x^2)$.

1.403. Пусть $f \sim g$ при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\varphi(x)$, причем существование одного из пределов влечет за собой существование другого (!).

1.404.* Показать, что $(1+x)^2 - 1 \sim 2x$ при $x \to 0$. Можно ли при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2 - 1 - 2x}{x^2}$ заменить $(1+x)^2 - 1$ на $2x$?

Таким образом, при вычислении пределов можно заменять бесконечно малые функции, входящие в числитель или знаменатель данного выражения в виде множителей, эквивалентными им функциями.

1.405.* Используя предыдущее замечание, вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3(x/2)}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \sin x)}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x}$.

1.406. Рассмотрим функцию $1(x)$ на $\mathbf{R}$.

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x$, $|x-1| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |1(x) - 1(1)| \leqslant \varepsilon$ (!).

2. $\exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall \delta \quad \exists x_0$, $|x_0| \leqslant \delta$, для которого $|1(x_0) - 1(0)| > \varepsilon$ (!).

Функция f, определенная на промежутке X, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x \in X$, $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

1.407. Сравнить определения непрерывности функции f в точке x_0 и предела f при $x \to x_0$. Если x_0—внутренняя точка множества X, то непрерывность f в точке x_0 означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (!).

1.408. Если x_0—граничная точка множества X, то непрерывность функции f в точке x_0 означает, что либо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, либо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (!).

1.409.* Установить, будет ли непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция f, если:

1) $f(x) = x^2$;

2) $f(x) = 1(x)$;

3) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0; \\ A, & x = 0; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0; \\ A, & x = 0; \\ x^2 + 1, & x > 0; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0; \\ A, & x = 0. \end{cases}$

1.410. Любая арифметическая комбинация непрерывных в точке x_0 функций (если она имеет смысл) непрерывна в x_0(!) (см. 1.322).

1.411. Непосредственно из определения непрерывности в точке x_0 следует *теорема о сохранении знака:* если f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то существует окрестность U точки x_0, такая, что $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in U \cap X$ (!).

Функцию f называют *непрерывной слева* в точке x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то f *непрерывна справа* в точке x_0.

1.412. Пусть x_0 — внутренняя точка множества X. Для непрерывности f в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна слева и справа в точке x_0, т. е. чтобы выполнялось равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ (!).

1.413. Выполнение равенств 1.412 означает, что выполняются следующие условия:

1) $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ существуют;
2) $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ конечны;
3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;
4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ (!).

1.414. Какое из условий 1.413 не выполнено для функции f в точке $x_0=0$, если:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos(1/x), & x\neq 0;\\ 1, & x=0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}1/x^2, & x\neq 0;\\ 0, & x=0;\end{cases}$

3) $f(x)=1(x)$; 4) $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0;\\ 1, & x=0?\end{cases}$

1.415. * Являются ли непрерывными слева и справа в точке $x_0=0$ функции из упражнения 1.409?

1.416. Привести примеры функций, непрерывных слева в точке 1, но не являющихся непрерывными в этой точке.

1.417. Любая имеющая смысл арифметическая комбинация функций, непрерывных слева (справа) в точке x_0, непрерывна слева (справа) в x_0 (!).

Функция f называется *непрерывной на множестве* $A\subset X$, если f непрерывна в каждой точке множества A. Аналогично определяется непрерывность слева и справа на множестве A.

1.418. * Могут ли две непрерывные на $[a, b]$ функции различаться лишь в одной точке?

1.419. Если f непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x\in[a, b]\cap\mathbf{Q}\Rightarrow f(x)=0$, то $f(x)\equiv 0$ на $[a, b]$ (!).

1.420. Функция f непрерывна на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Будет ли f непрерывна на $[a, b]$?

1.421. Функция f непрерывна на $[a, c]$ и на $]c, b]$. При каком условии она будет непрерывна на $[a, b]$?

1.422. Если функция f непрерывна на любом $[a, b]\subset X$, то f непрерывна на X (!).

1.423. Функция Дирихле (см. 1.238) не является непрерывной ни в одной точке (!).

1.424. Функция $f\colon x\mapsto xD(x)$ (см. 1.238) непрерывна только в одной точке (!). В какой?

1.425. * Привести пример функции, непрерывной только в точке $x_0=a$.

1.426. Пусть $f\colon [a, b]\to\mathbf{R}$, $\varphi\colon x\mapsto \inf\limits_{t\in[a,\, x[} f(t)$, $\psi\colon x\mapsto \sup\limits_{t\in[a,\, x[} f(t)$.

1. Если f ограничена на $[a, b]$, то φ и ψ непрерывны слева на $[a, b]$ (!).

2. Если f непрерывна на $[a, b[$, то φ и ψ непрерывны на $[a, b[$ (!).

3. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Будут ли φ и ψ непрерывны на $[a, b]$?

4. Если f непрерывна на $[a, b]$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постоянные на $[a, b]$, то f — постоянная на $[a, b]$ функция (!).

1.427. Функции f и g определены на I, $M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, $m(x)=\min\{f(x), g(x)\}$.

1. $$M(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2};$$

$$m(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \text{ (!)}.$$

2. Если f и g непрерывны на I, то функции m: $x\mapsto m(x)$ и M: $x\mapsto M(x)$, $x\in I$, непрерывны на I (!).

1.428. Если каждый элемент сходящейся последовательности (T_n) является периодом для непрерывной функции f и $T_\infty\neq 0$, то и T_∞ является периодом для f (!).

1.429. Непрерывная периодическая непостоянная функция имеет наименьший неотрицательный период (!).

1.430. Пусть (T_n) — ненулевая последовательность, каждый элемент которой является периодом для непрерывной функции f. Если $T_\infty=0$, то f — постоянная функция (!).

Если для функции f, определенной в окрестности точки x_0, нарушено хотя бы одно из условий 1.413, то функция f разрывна в точке x_0, а сама x_0 называется *точкой разрыва.*

1.431. Объяснить, какое из условий 1.413 нарушено в точке x_0, если:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \sin(1/x), & x>0,\end{cases}$ $x_0=0;$

2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & x\neq\pi/2+k\pi;\\ 0, & x=\pi/2+k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$, $x_0=\pi/2;$

3) $f(x)=|x|/x$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, $x_0=0;$

4) $f(x)=1(x)+1(-x)$, $x_0=0$.

Классификация точек разрыва проводится следующим образом (см. 1.413):

1) если нарушено условие 1, то x_0 — *точка неопределенности;*

2) если выполнено условие 1 и нарушено условие 2, то x_0 — *точка бесконечного скачка;*

3) если выполнены условия 1, 2 и нарушено условие 3, то x_0 — *точка скачка;*

4) если выполнены условия 1—3 и нарушено условие 4, то x_0 — *точка устранимого разрыва.*

Если $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ конечны, то x_0 — *точка разрыва первого рода,* в остальных случаях x_0 — *точка разрыва второго рода.*

1.432. * Выяснить характер точек разрыва функций:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1}, & x\neq 1;\\ 1, & x=1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\ln|x|, & x\neq 0;\\ a, & x=0;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-E\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{x/(1-x)}}, & x\notin\{0,\ 1\};\\ 0, & x\in\{0,\ 1\};\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\sin^2(1/x), & x\neq 0;\\ a, & x=0;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}e^{1/(1-x^2)}, & |x|\neq 1;\\ 0, & |x|=1.\end{cases}$

1.433. Точка x_0 является точкой устранимого разрыва для функции f. Изменив значение функции f лишь в одной точке, можно получить функцию, непрерывную в точке x_0 (!).

1.434. В упражнениях 1.432 изменить значения функций в точках устранимого разрыва так, чтобы полученные функции были непрерывны в этих точках.

Если функция f определена в окрестности точки x_0, за исключением самой x_0, то точку x_0 условно называют точкой разрыва функции f. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 — точка устранимого разрыва. В остальных случаях классификация таких точек проводится, как раньше (см. с. 51).

1.435. * Пусть f — непрерывная непостоянная периодическая функция и φ — произвольная функция, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Функция $f\circ\varphi$ разрывна в точке x_0 (!). Каков характер разрыва в x_0?

1.436. Привести пример функций φ и ψ, разрывных в точке x_0 и таких, что их сумма и произведение непрерывны в x_0.

1.437. * Если сумма двух разрывных в x_0 функций непрерывна в этой точке, то обе функции имеют в x_0 разрывы одного типа (!). Верно ли это для произведения двух функций?

1.438. Если функция g: $\mathbf{R}_0 \to \mathbf{R}$ — возрастающая, а f: $x \mapsto g(x)/x$ — убывающая, то g непрерывна (!).

1.439. Функция f определена на $[-1, 2]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} -(1+x), & x \in [-1, 0[; \\ 0, & x = 0; \\ 2-x, & x \in]0, 2]. \end{cases}$$

Построить непрерывную непостоянную функцию φ, такую, что $\varphi \circ f$ непрерывна на $[0, 2]$.

1.440.* Какого типа разрывы может иметь функция f в точке x_0, если:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall h$, $|h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0 - h)| \leqslant \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall h, h'$, $|h| \leqslant \delta$, $|h'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0 - h')| \leqslant \varepsilon$;

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall h$, $|h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)| \leqslant \varepsilon$;

4) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall h, h'$, $|h| \leqslant \delta$, $|h'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h')| \leqslant \varepsilon$?

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и $I_\varepsilon = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Величину $\omega(f, x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\sup\limits_{I_\varepsilon} f(x) - \inf\limits_{I_\varepsilon} f(x))$ называют *колебанием функции f в точке x_0*.

1.441. Выяснить, чему равно $\omega(f, x_0)$, если x_0 является для f точкой:

1) непрерывности; 2) скачка;

3) устранимого разрыва; 4) неопределенности.

1.442. Вычислить колебание функции Дирихле в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

1.443.* Для любой непрерывной неотрицательной функции $\varphi: X \to \mathbf{R}$ существует функция ψ: $X \to \mathbf{R}$, такая, что $\omega(\psi, x) = \varphi(x) \quad \forall x \in X$ (!).

1.444. Построить функцию f, такую, что $\omega(f, x)$ имеет:

1) только устранимые разрывы;

2) скачок; 3) бесконечный скачок.

1.445.* Построить функцию f, такую, что $\omega(f, x) = f(x)$ $\forall x \in X$.

1.446. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q, \ p \text{ и } q \text{ взаимно простые}; \\ 0, & x \text{ иррациональное}. \end{cases}$$

Пусть g — непрерывная неотрицательная функция и $\varphi(x) = f(x)g(x)$. Показать, что $\omega(\varphi, x) = \varphi(x) \quad \forall x \in X$.

Величину $\omega_I = \sup\limits_I f(x) - \inf\limits_I f(x)$ назовем *колебанием функции f на множестве I*.

1.447. Если $I_1 \subset I$, то $\omega_{I_1} \leqslant \omega_I$ (!).

1.448. Если $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле), то $\omega_{I_1} = \omega_I$ для любого промежутка $I_1 \subset I$ (!).

1.449. Функции f и $g: x \mapsto f(x) + c$ имеют одинаковые колебания на I $\forall c \in \mathbf{R}$ (!).

1.450. Пусть f определена на $[a, b]$. Функция $g: x \mapsto \omega_{[a, x]}$ возрастает на $[a, b]$ (!).

1.451.* Если f непрерывна на $[a, b]$, то g непрерывна на $[a, b]$ (!).

1.452.* Верно ли утверждение: если f разрывна, то g также разрывна?

1.453. Если функция f непрерывна на промежутке I и $\omega_{I_1} = \omega_I$ $\forall I_1 \subset I$, то f постоянна на I (!).

1.454. Показать, что $\omega_I = \sup\limits_{x_1, x_2 \in I} (f(x_1) - f(x_2))$.

1.455. Показать, что $\omega_I = \sup\limits_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)|$.

1.456. Пусть ω_f — колебание функции f на I. Показать, что $\omega_f \geqslant \omega_{|f|}$.

1.457. $\omega_{\alpha f} = |\alpha| \omega_f$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ (!).

1.458. $\omega_{f+g} \leqslant \omega_f + \omega_g$ для любых функций f и g, определенных на I (!).

1.459. $\omega_{f-g} \leqslant \omega_f + \omega_g$ для любых функций f и g, определенных на I (!). Привести пример, когда неравенство становится равенством.

1.460. Пусть функция f монотонна на X, x_0—внутренняя точка множества X и (x_n)—последовательность, $x_n \in X$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \to x_0$.

1. Если (x_n) монотонна, то $(f(x_n))$ сходится (!).

2. $\exists l_1$, такое, что для любой возрастающей последовательности (x_n), $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l_1$ (!).

3. $\exists l_2$, такое, что для любой убывающей последовательности (x_n), $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l_2$ (!).

4. Выяснить, когда $l_1 = l_2$.

1.461. Если функция f монотонна на X и x_0—внутренняя точка множества X, то существуют $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ (!).

1.462. Если функция f возрастает, то $f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0)$ (!).

1.463. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для убывающей функции.

1.464. * Какого типа разрывы может иметь монотонная функция во внутренней точке?

1.465. Функция f монотонна на $[a, b]$ и $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \subset [a, b]$ — произвольное n-точечное множество.

1. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k+0) - f(x_k-0)| \leqslant |f(b) - f(a)|$.

2. Для $\forall n \in \mathbf{N}$ множество $\{x \in [a, b] \,|\, |f(x+0) - f(x-0)| > 1/n\}$ конечно (!).

3. Отсюда следует важное утверждение: множество точек разрыва монотонной на $[a, b]$ функции счетно или конечно (!).

4. Распространить результат на случай функции, монотонной на произвольном промежутке $I \subset \mathbf{R}$.

1.466. Пусть функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ — возрастающая, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $C \in]A, B[$ и $x_0 = \sup\{x \,|\, f(x) < C\}$. Тогда $f(x_0 - 0) \leqslant C \leqslant f(x_0 + 0)$ (!).

1.467. Если функция f возрастает на $[a, b]$ и непрерывна, то для $\forall C \in]A, B[$ $\exists x_0 \in]a, b[$, такое, что $f(x_0) = C$ (!).

1.468. Используя результат 1.464, показать, что монотонная на $[a, b]$ функция, для которой множество E_y является отрезком, непрерывна на $[a, b]$.

1.469. Из утверждений 1.467 и 1.468 следует *критерий непрерывности монотонной функции:* для непрерывности на $[a, b]$ монотонной функции f необходимо и достаточно, чтобы множество $f([a, b])$ было отрезком (!).

1.470. Пусть функция f непрерывна на $[a, +\infty[$, возрастает, $f(a) = A$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = B$. Тогда для $\forall C \in]A, B[$ $\exists x_0 \in]a, +\infty[$, такое, что $f(x_0) = C$ (!).

1.471. Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}$, возрастает, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = B$, то $f(\mathbf{R}) =]A, B[$ (!).

1.472. Пусть функция f монотонна и непрерывна на множестве X. Каким может быть $f(X)$, если:

1) $X =]a, b[$; 2) $X = [a, b[$;
3) $X = [a, +\infty[$; 4) $X = \mathbf{R}$;
5) $X = [a, b] \cup [c, d]$, $a < b < c < d$?

1.473. Тот же вопрос для случая, когда функция f только непрерывна.

1.474. Тот же вопрос для случая, когда функция f только монотонна.

1.475. Если функция f строго монотонна на X, то $\forall y \in E_y$ $\exists x \in X$, такое, что $f(x) = y$ (!). Построить немонотонную функцию, обладающую таким же свойством.

Если функция f обладает свойством 1.475, то на E_y можно определить функцию со значениями в X по правилу 1.475. Эту функциюназывают *обратной для* f и обозначают f^{-1}. Таким образом, f^{-1}: $E_y \to X$, f^{-1}: $y \in E_y \mapsto x \in X$, так что $f(x)=y$.

1.476. $f^{-1} \circ f: x \mapsto x$; $f \circ f^{-1}: y \mapsto y$ (!).

1.477. Если функция f строго монотонна, то f^{-1} существует (!). Можно ли определить f^{-1} для монотонной (нестрого) функции?

1.478. Может ли четная функция иметь обратную?

1.479. Выяснить, имеет ли обратную функция f, определенная формулой:

1) $f(x) = 1/x$; 2) $f(x) = x^2 - 1$;

3) $f(x) = 2^x$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

1.480. Функция f: $x \mapsto x - \varepsilon \sin x$, $0<\varepsilon<1$, имеет обратную на E_y (!).

1.481. Если функция f непрерывна и f^{-1} существует, то f и f^{-1} монотонны (!). (Можно использовать теорему 1.544.)

1.482. Установить связь между характером монотонности функций f и f^{-1}.

1.483. Какой должна быть функция f, чтобы f^{-1} была ограниченной?

1.484. Найти обратные функции для функций 1, 3, 4 из упражнения 1.479.

1.485. Функции f и g имеют обратные. Существуют ли обратные функции для $f+g$ и fg?

1.486. Построить какое-либо сужение функции f, имеющее обратную функцию, если:

1) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

1.487. Если функция f непрерывна и f^{-1} существует, то f^{-1} непрерывна (!).

1.488. Объединяя результаты 1.481, 1.487, можно получить утверждение, называемое *теоремой о непрерывности обратной функции:* если функция f строго монотонна и непрерывна на X, то обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на E_y (!).

1.489. Может ли разрывная функция иметь непрерывную обратную?

1.490. Если $g=f^{-1}$, то $g^{-1}=f$ (т. е. f и f^{-1} взаимно обратные) (!).

1.491. Для каждой функции выбрать в этом же списке обратную ей:

1) $f(x)=\sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; 2) $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = x^a$, $x > 0$; 4) $f(x) = a^x$, $a>0$, $a \neq 1$;

5) $f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$; 6) $f(x)=\arcsin x,\ x\in[-1,\ 1]$;

7) $f(x)=1/x,\ x\neq 0$; 8) $f(x)=x^{1/a},\ x>0$;

9) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[0,\ 1]$; 10) $f(x)=x,\ x\in[1,\ 2]$.

1.492. Пусть функция f определена и строго монотонна на $[a,\ b]$, I — отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Для того чтобы f была непрерывна на $[a,\ b]$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках I существовала обратная функция f^{-1} (!).

1.493. Периодическая функция периода T, непрерывная на каком-либо отрезке $[a,\ a+T]$, непрерывна на $\mathbf{R}$ (!).

1.494. Доказать непрерывность следующих функций f в их естественной области определения:

1) $f(x)=x^a,\ a\in\mathbf{R}$; 2) $f(x)=a^x,\ a>0$;

3) $f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$; 4) $f(x)=\sin x$;

5) $f(x)=\cos x$; 6) $f(x)=\operatorname{tg} x$;

7) $f(x)=\arcsin x$; 8) $f(x)=\arccos x$.

1.495. Арифметические комбинации функций из упражнения 1.494 непрерывны в их естественной области определения (!).

1.496. Для функции $f: x\mapsto x-\varepsilon\sin x$ множество значений $E_y=\mathbf{R}$ при любом $\varepsilon\in\mathbf{R}$ (!).

1.497. Отсюда, в силу утверждения 1.480, следует, что уравнение Кеплера $x-\varepsilon\sin x=a,\ 0<\varepsilon<1$, имеет единственное решение при $\forall a\in\mathbf{R}$ (!).

1.498. Этот же результат можно получить с помощью метода, описанного в задаче 1.310 (!).

1.499. Пусть $\varphi: x\mapsto 1(x),\ x\in\mathbf{R}$ и $\psi: x\mapsto\sin x,\ x\in[-\pi/2,\ \pi/2]$. Изучить непрерывность композиций $\varphi\circ\psi$ и $\psi\circ\varphi$ в точках 0 и 1.

1.500.* Пусть f: $X\to Y$, g: $Y\to Z$ и $h=g\circ f$: $X\to Z$. Справедливо ли следующее утверждение: если последовательность (x_n) такова, что $x_n\in X$, $x_n\to x_0$, $x_0\in X$, то $h(x_n)\to h(x_0)$?

1.501. Если функция f непрерывна в точке $x_0\in X$ и g непрерывна в точке $y_0=f(x_0)\in Y$, то $h=g\circ f$ непрерывна в точке x_0 (!) *(теорема о непрерывности сложной функции)*.

1.502. Если функция f непрерывна на X и g непрерывна на E_y, то $h=g\circ f$ непрерывна на X (!).

1.503. Может ли быть непрерывной композиция $g\circ f$, если:

1) f непрерывна, g разрывна;
2) f разрывна, g непрерывна;
3) f и g разрывны?

1.504. Пусть $f(x)=1/x$, $x \neq 0$. Построить непрерывную функцию g, такую, что композиция $g \circ f$ в точке 0 имеет:

1) неопределенность; 2) скачок;

3) бесконечный скачок; 4) устранимый разрыв.

1.505. Функции u, $u(x)>0$ и v непрерывны на $\mathbf{R}$. Доказать непрерывность функции $f: x \mapsto (u(x))^{v(x)}$, $x \in \mathbf{R}$.

1.506. Если функция f непрерывна в точке l и $g(x) \to l$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(l) \text{ (!)}.$$

1.507. Используя результат 1.340, доказать замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

1.508. Положив в задаче 1.507 $x = a^y - 1$, получим еще один замечательный предел:

$$\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a \text{ (!)}.$$

1.509. Из утверждений 1.507 и 1.508 получить:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu \quad \forall \mu \neq 0.$$

1.510.* Пусть функция f определена и непрерывна на I и $f(ax) = f(x)$, $a>0$, $a \neq 1$.

1. Если $I=[0, 1]$, то $f(+0) = f(1-0)$ (!).
2. Если $I=[0, 1]$, то f — постоянная функция (!).
3. Какой должна быть f, если: а) $I=[1, +\infty[$; б) $I=\mathbf{R}$?

1.511.* Определить класс всех непрерывных функций f, таких, что $f(x^2) = f(x)$ $\forall x>0$.

1.512.* Пусть G — множество непрерывных функций $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих следующему условию: $g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$ $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

1. $g(0) = 0$(!).
2. g — четная функция (!).
3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow g(nx) = n^2 g(x)$(!).
4. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall p \in \mathbf{Q} \Rightarrow g(px) = p^2 g(x)$(!).
5. $\forall x$, $a \in \mathbf{R} \Rightarrow g(ax) = a^2 g(x)$(!).
6. Определить функции, входящие в G.

1.513.* Пусть F — множество непрерывных функций $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, удовлетворяющих следующему условию: $f(x+y) f(x-y) = f^2(x) f^2(y)$.

1. Если $f(0)=0$, то $f(x)=0$ $\forall x$ (!).

2. Если $\exists a\in\mathbf{R}$, такое, что $f(a)=0$, то $f(x)=0$ $\forall x$ (!).

3. Установить связь между F и G (см. 1.512) и определить функции, входящие в F.

1.514. Рассмотрим последовательности (u_n) и (v_n), определенные по правилу: $0<u_0<v_0$, $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$, $v_{n+1}=(u_n+v_n)/2$, $n\in\mathbf{N}$ (см. 1.165). Было показано, что обе последовательности имеют общий предел, который обозначим $L(u_0, v_0)$.

1. $L(\lambda a, \lambda b)=\lambda L(a, b)$ $\forall\lambda>0$ (!).

2. $L(a, b)=L(b, a)$(!).

3. $L(a, b)=L\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$(!).

4. $a\leqslant a'\Rightarrow L(a, b)\leqslant L(a', b)$(!).

1.515.* Пусть $f: x\mapsto L(x, 1)$, $x>0$.

1. $f(1)=1$ (!).

2. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}f(x)$(!).

3. $\sqrt{x}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1+x}{2}$ (!).

4. $\dfrac{1+x}{2}f\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=f(x)$(!).

5. Функция f непрерывна (!) (см. 1.438).

6. Функция f имеет предел при $x\to+\infty$ (!). Найти его.

7. Функция f имеет предел при $x\to+0$. Найти его.

1.516.* Обозначим I один из промежутков $[0, 1[$, $]1, +\infty[$, $[0, +\infty[$, $\mathbf{R}$. Для $k\in\mathbf{R}$ обозначим через $E_k(I)$ множество функций, непрерывных на I и удовлетворяющих условию $f(x^2)-f(x)=k$.

1. Пусть $h\in E_k(I)$. Установить связь между $E_0(I)$ и $E_k(I)$.

2. Определить $E_0(I)$ для каждого выбора I.

3. Найти $E_k([0, +\infty[)$ для $k=\ln 2$, убедившись, что $f: x\mapsto\ln|\ln x|$ принадлежит $E_k([0, +\infty[)$.

1.517. Пусть функция $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такая, что $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall x, y\in\mathbf{R}$.

1. $\forall x\in\mathbf{R}$ $\forall\alpha\in\mathbf{Q}\Rightarrow f(\alpha x)=\alpha f(x)$(!).

2. В дальнейшем считаем функцию f ограниченной на некотором непустом интервале. Тогда существует интервал $]-\alpha, \alpha[$, на котором f ограничена (!).

3. Функция f непрерывна в точке 0 (!).

4. Функция f непрерывна на $\mathbf{R}$ (!).

5. Функция f линейная (!).

Функцию φ называют *выпуклой на промежутке* I, если $\varphi(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \leqslant \varphi(x_0) + \tau(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))$ $\forall x_0, x_1 \in I$ и $\forall \tau \in [0, 1]$. Если на $]0, 1[$ неравенство строгое, то функцию φ называют *строго выпуклой*.

1.518. Если функция φ выпукла на I, то она выпукла на любом промежутке $I_1 \subset I$ (!).

1.519. Выпуклость функции φ на I означает, что ни одна из точек дуги графика этой функции с концами $M_0(x_0, \varphi(x_0))$ и $M_1(x_1, \varphi(x_1))$ не лежит над хордой M_0M_1 $\forall x_0, x_1 \in I$ (!).

1.520. Может ли выпуклая на $[a, b]$ функция быть разрывной?

1.521. Выпуклая на $]a, b[$ функция непрерывна (!).

Будем рассматривать непрерывные выпуклые функции.

1.522.* Изучить монотонность выпуклой на I функции.

1.523. Непостоянная выпуклая на $\mathbf{R}$ функция не может быть ограниченной (!).

1.524. Непостоянная выпуклая на $\mathbf{R}$ функция не может быть периодической (!).

1.525. Построить две выпуклые на I функции φ и ψ, такие, что $\varphi \circ \psi$ не является выпуклой.

1.526.* Существует ли выпуклая на I функция φ, такая, что $\varphi \circ \varphi$ не является выпуклой?

1.527. Для того чтобы φ была выпукла на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнялось неравенство $\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}$ (!).

1.528. Используя утверждение 1.527, показать, что для неубывающей функции φ из выпуклости φ и ψ следует выпуклость композиции $\varphi \circ \psi$.

1.529. Пусть $x_0 < x_1$. Обозначим через M_τ точку с координатами $x_\tau = x_0 + \tau(x_1 - x_0)$, $y_\tau = \varphi(x_\tau)$, а через $k(AB)$ — угловой коэффициент отрезка AB. Из определения получаем для выпуклой функции:

$$k(M_0M_\tau) \leqslant k(M_0M_1) \leqslant k(M_\tau M_1) (!).$$

1.530. Пусть функция f выпукла на $]a, b[$, $x_1, \ldots, x_n \in]a, b[$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}_0$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Используя метод математической индукции, можно доказать *неравенство Иенсена:*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) (!).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции f на X называют *экстремальными значениями функции* f на X. Если они существуют, то их обозначают $\max f(x)$ и $\min f(x)$ соответственно. Точки, в которых f принимает экстремальные значения, называют *точками экстремума* f.

1.531. Всегда ли существует $x_0 \in X$, такое, что $f(x_0) = \max f(x)$?

1.532. Тот же вопрос для: непрерывной f; ограниченной f. Привести соответствующие примеры.

1.533. Если функция f определена на $X = [a, b]$ и монотонна, то $\exists x_0 \in X$, такое, что $f(x_0) = \max f(x)$ (!).

1.534. Справедливо ли аналогичное утверждение для:

1) $X = [a, b[$; 2) $X = [a, b] \cup [c, d]$, $a < b \leqslant c < d$?

1.535. Пусть f непрерывна на X и $A = \sup\limits_X f(x)$.

1. Если (a_n) — возрастающая последовательность, $a_n \to A$, то существует последовательность (x_n), $\{x_n\} \subset X$, такая, что $f(x_n) \geqslant a_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (!).

2. Если $X = [a, b]$, можно выбрать сходящуюся последовательность (x_n) (!).

3. Если $x_n \to x$, то $f(x) = A$ (!).

1.536. Из задачи 1.535 следует *теорема Вейерштрасса:* непрерывная на $[a, b]$ функция принимает на $[a, b]$ свои экстремальные значения (!).

1.537. Верна ли теорема Вейерштрасса, если в ее формулировке:

1) вместо $[a, b]$ взять $[a, b[$;

2) вместо $[a, b]$ взять $[a, b] \cup [c, d]$;

3) функция f не является непрерывной?

1.538. Непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена (!).

1.539. Обязательно ли ограничена функция, непрерывная: на $]a, b[$; на $\mathbf{R}$? Сравнить с утверждением 1.309.

1.540. Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}$ и ни на одном интервале $]a, b[$ не принимает значения $\sup\limits_{]a,b[} f(x)$ и $\inf\limits_{]a,b[} f(x)$, то f строго монотонна на $\mathbf{R}$ (!).

1.541. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ принимает экстремальные значения в граничных точках этого отрезка, то f строго монотонна на $[a, b]$ (!).

1.542. Указать множество значений функции f, удовлетворяющей условиям задачи 1.541.

1.543. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и $M = \{x \mid f(t) \leqslant 0 \ \forall t \in [a, x], \ x \in [a, b]\}$. Если $c = \sup M$, то $f(c) = 0$ (!).

1.544. Отсюда получаем *теорему о промежуточном зна-*

чении: если функция f непрерывна на I и принимает на I значения A и B, $A<B$, то f принимает на I и любое промежуточное значение $C \in]A, B[$ (!).

1.545. Всякий многочлен нечетной степени обращается в нуль хотя бы в одной точке (!).

1.546. Показать, что уравнение $xe^x=1$ имеет на $]0, 1[$ по крайней мере один корень.

1.547. Существует ли разрывная на $[a, b]$ функция, принимающая на этом отрезке каждое промежуточное значение?

1.548.* Множеством значений функции, непрерывной на отрезке (компакте), является отрезок (компакт) (!).

1.549.* Две непрерывные на $[a, b]$ функции f и g имеют одно и то же множество значений. Тогда существует $c \in [a, b]$, такое, что $f(c)=g(c)$ (!).

1.550.* Если функция f непрерывна на $I=[a, b]$ и $f(I)=I$, то $\exists x_0 \in I$, такое, что $f(x_0)=x_0$ (!).

1.551. Результат 1.550 перестает быть верным, если I — незамкнутый или неограниченный промежуток (!).

1.552. Пусть функция f непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0)=f(1)$. Показать, что $\forall n \in \mathbf{N}$ $g_n: x \mapsto f(x+1/n)-f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке из $[0, 1-1/n]$.

1.553. Утверждение 1.552 неверно, если вместо $1/n$ взять $\alpha \in]0, 1/2[$, $\alpha \neq 1/n$ (!).

1.554. Если функция f непрерывна на $[a, +\infty[$ и $f(x) \to l$ при $x \to +\infty$, $l>f(a)$, то $[f(a), l[\subset E_y$ (!).

1.555.* Если функция f непрерывна на $]a, b[$, то для любых $x_1, \ldots, x_n \in]a, b[$ существует $c \in]a, b[$, такое, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(c)$(!).

1.556. Пусть $f: x \mapsto 1/x$, $x \in]0, +\infty[$. Непрерывность функции f в точке $x_0 \in]0, +\infty[$ означает: $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$, такое, что $\forall x$, $|x-x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Показать, что при фиксированном ε число δ зависит от x_0.

1.557. Не существует число δ, которое годилось бы для всех $x_0 \in]0, +\infty[$(!).

1.558. Пусть $\alpha>0$ и g — сужение функции $f: x \mapsto 1/x$ на $[\alpha, +\infty[$. Для функции g число δ можно выбрать не зависящим от $x_0 \in [\alpha, +\infty[$(!).

Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется *равномерно непрерывной на* $A \subset X$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x_1, x_2 \in A$, $|x_1 - x_2| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$.

1.559. Функция g из задачи 1.558 равномерно непрерывна на $[\alpha, +\infty[$ (!).

1.560. Равномерно непрерывная на A функция непрерывна на A (!). Обратное утверждение неверно (!).

1.561. Если функция f равномерно непрерывна на A, она равномерно непрерывна на любом $B \subset A$ (!).

1.562.* Пусть функция f равномерно непрерывна на A и на B.

1. Функция f равномерно непрерывна на $A \cap B$ (!).

2. Если A и B — отрезки, то f равномерно непрерывна на $A \cup B$ (!).

3. Построить функцию, равномерно непрерывную на $[a, b]$ и $]b, c]$, но не являющуюся равномерно непрерывной на $[a, c]$.

1.563.* Пусть функция f не является равномерно непрерывной на A.

1. Записать это по правилу Де Моргана.

2. Используя результат 1.315, показать, что существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности (x_n'), (x_n''), x_n', $x_n'' \in A \ \forall n \in \mathbf{N}$, такие, что $|x_n' - x_n''| \to 0$ и $|f(x_n') - f(x_n'')| > \varepsilon$.

3. Если $A = [a, b]$, то $\exists (x_n')$, (x_n''), такие, что $x_\infty' = x_\infty'' \in \in A$ (!).

4. Функция f не может быть непрерывной, если $A = = [a, b]$ (!).

1.564.* Непрерывная на $[a, b]$ функция равномерно непрерывна на $[a, b]$ (*теорема Кантора*) (!).

1.565. Привести пример функции, равномерно непрерывной:

1) на $[0, 1]$; 2) на $]0, 2]$.

1.566.* Если функция f не является равномерно непрерывной на $[a, b]$, то она разрывна хотя бы в одной точке из $[a, b]$ (!).

1.567.* Функции f и g равномерно непрерывны на $[a, +\infty[$.

1. Произведение fg может не быть равномерно непрерывной на $[a, +\infty[$ функцией (!).

2. Если функции f и g ограничены, то fg равномерно непрерывна на $[a, +\infty[$ (!).

1.568.* Если функция f непрерывна на $]a, b[$, то $\forall x_0 \in]a, b[$ существует окрестность $U \ni x_0$, такая, что f равномерно непрерывна на U (!).

1.569.* Пусть f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$. Будет ли равномерчо непрерывной на X функция $g \circ f$, если:

1) f равномерно непрерывна на X, g равномерно непрерывна на Y;

2) f равномерно непрерывна на X, g непрерывна на Y;

3) f непрерывна на X, g равномерно непрерывна на Y?

1.570. Если функция f непрерывна на $[a, +\infty[$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то f равномерно непрерывна на $[a, +\infty[$(!).

1.571. Если функция f равномерно непрерывна на A, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, такое, что на любом промежутке $I\subset A$ длиной δ колебание функции $\omega_f\leqslant\varepsilon$ (!).

1.572. Для равномерной непрерывности функции f на $]a, b[$ необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна на $]a, b[$ и существовали конечные пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$ (!).

1.573. Из утверждения 1.572 следует, что функция f равномерно непрерывна на $]a, b[$ тогда и только тогда, когда она является сужением непрерывной на $[a, b]$ функции (!).

Пусть f определена на $[a, b]$ и $\sigma=\{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$, $x_{i-1}<x_i$. Величину

$$V_a^b(f)=\sup_\sigma\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

называют *полной вариацией f на* $[a, b]$. Если $V_a^b(f)$ конечна, то f называют *функцией с ограниченной вариацией*. Множество всех функций с ограниченной вариацией на $[a, b]$ обозначим $\mathrm{B}_{[a, b]}$.

1.574. Если функция f монотонна на $[a, b]$, то $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$(!).

1.575. Привести пример функции, вариация которой не ограничена.

1.576. $V_a^b(f)\geqslant|f(b)-f(a)|$(!).

1.577. $V_\alpha^\beta(f)\leqslant V_a^b(f)$ $\forall[\alpha, \beta]\subset[a, b]$(!).

1.578. Если $f\in\mathrm{B}_{[a, b]}$, то f ограничена на $[a, b]$(!).

1.579. $V_a^b(f\pm g)\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)$(!).

1.580. Множество $\mathrm{B}_{[a, b]}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения (!).

1.581. Если $f, g\in\mathrm{B}_{[a, b]}$ и $g(x)\geqslant\alpha>0$ $\forall x\in[a, b]$, то $f/g\in\mathrm{B}_{[a, b]}$(!).

1.582. Пусть $f \in B_{[a,\,b]}$ и $c \in]a,\ b[$. Тогда $V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f)$(!).

1.583.* Пусть $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b$ и функция f монотонна на каждом отрезке $[\alpha_{j-1},\ \alpha_j]$. Тогда $f \in B_{[a,\,b]}$(!).

1.584.* Если $f \in B_{[a,\,b]}$, то функция $\varphi: x \mapsto V_a^x(f)$ возрастает (!).

1.585. Пусть $f \in B_{[a,\,b]}$, $\varphi: x \mapsto V_a^x(f)$ и $\psi = \varphi - f$. Показать, что $\psi(x + \Delta x) - \psi(x) = V_x^{x+\Delta x}(f) - (f(x + \Delta x) - f(x))$ $\forall x \in [a,\ b]$ и $\Delta x > 0,\ x + \Delta x \in [a,\ b]$.

1.586. Функция ψ (см. 1.585) возрастает (!).

1.587. Из результатов 1.584 и 1.586 следует необходимость, а из 1.579 и 1.583 — достаточность следующего утверждения: для того чтобы $f \in B_{[a,\,b]}$, необходимо и достаточно, чтобы f была представима в виде разности двух возрастающих функций (!).

1.588. Если $f \in B_{[a,\,b]}$ и непрерывна, то $\varphi: x \mapsto V_a^x(f)$ — непрерывная функция (!).

1.589.* Если $f \in B_{[a,\,b]}$ и непрерывна, то она представима в виде разности двух непрерывных монотонных функций (!).

1.590. Из утверждения 1.587 следует, что если $f \in B_{[a,\,b]}$, то $\exists f(x+0)$ и $f(x-0) \in \mathbf{R}$ $\forall x \in]a,\ b[$ (!).

1.591. Множество точек разрыва функции $f \in B_{[a,\,b]}$ счетно или конечно (!) (см. 1.590, 1.461, 1.465, 1.587).

1.9. Рациональные функции

◀ Будем рассматривать *многочлены с комплексными коэффициентами:* $P:\ z \mapsto P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0,\ z \in \mathbf{C},\ c_k \in \mathbf{C},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ c_n \neq 0$. Число n — *степень многочлена.*

1.592. Пусть P_n и P_m — ненулевые многочлены степени n и m соответственно. Функция $P_n P_m:\ z \mapsto P_n(z) P_m(z)$ является многочленом степени $n + m$(!).

1.593. Показать, что $P_n + P_m$ — многочлен. Какова его степень?

1.594. Два многочлена равны, если равны их степени и соответствующие коэффициенты (!).

1.595. Пусть P_n и P_m — многочлены степени n и m соответственно, $n \geqslant m$.

1. Вычислить и сравнить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P_n(x)}{x^n}$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P_m(x)}{x^n}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Если $P_n(z) = P_m(z)$ $\forall z \in \mathbf{C}$, то $n = m$(!).

3. Если $P_n(z) = P_m(z)$ $\forall z \in \mathbf{C}$, то соответствующие коэффициенты P_n и P_m равны (!).

1.596. Таким образом, два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их степени и соответствующие коэффициенты (!).

1.597. Если P — многочлен с действительными коэффициентами, то $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ $\forall z \in \mathbf{C}$ ($\bar{z} = x - iy$ — число, сопряженное числу $z = x + iy$)(!). Верно ли это утверждение для многочлена с комплексными коэффициентами?

Число $\lambda \in \mathbf{C}$ называют *корнем многочлена* P, если $P(\lambda) = 0$.

1.598. Пусть P — многочлен с вещественными коэффициентами. Если λ — его корень, то $\bar{\lambda}$ — также корень P (!).

1.599.* Пусть $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1$, $Q(z) = z^2 + z + 1$. Используя утверждение 1.596, найти многочлен S, такой, что $P(z) = Q(z)S(z)$ $\forall z \in \mathbf{C}$.

1.600.* Пусть $P(z) = z^4 - z^3 - 3z^2 - 4z - 1$, $Q(z) = z^3 + z^2 - z - 1$. Используя утверждение 1.596, найти многочлен S степени 1 и многочлен R степени меньше 3, такие, что $P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$ $\forall z \in \mathbf{C}$.

1.601. Пусть P — многочлен степени n и Q — многочлен степени m, $n \geqslant m$. Существуют многочлены S степени $n-m$ и R степени m или нулевой многочлен, такие, что $P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$ $\forall z \in \mathbf{C}$ (!).

1.602. Существует лишь одна пара многочленов S и R (!).

Многочлены S и R (см. 1.601, 1.602) называют соответственно *частным* и *остатком* от деления P на Q. Если R — нулевой многочлен, то говорят, что Q *делит* P *без остатка* ($P(z)$ делится на $Q(z)$).

1.603. Пусть в утверждении 1.601 $Q(z) = z - \lambda$. Получить *теорему Безу:* число λ является корнем многочлена P тогда и только тогда, когда $P(z)$ делится на $z - \lambda$.

1.604. Пусть P и S — два многочлена (S — ненулевой многочлен), $\lambda \in \mathbf{C}$ — произвольное число. Существует $A \in \mathbf{C}$, такое, что $P(z) - AS(z)$ делится на $z - \lambda$ (!).

1.605.* Если P — многочлен с действительными коэффициентами и $\lambda = \alpha + i\beta$ — его корень, то $P(z)$ делится на $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$ (!).

Если $P(z)$ делится на $(z - \lambda)^k$ и не делится на $(z - \lambda)^{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$, то говорят, что λ — *корень кратности* k *многочлена* P.

1.606.* Если Q — многочлен с действительными коэффициентами и λ — его корень кратности k, то $\bar{\lambda}$ — также корень кратности k многочлена Q (!).

1.607. Из утверждений 1.603 и 1.606 следует, что многочлен Q с действительными коэффициентами, имеющий корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k, делится на $(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)^k$ (!).

1.608. Обозначив $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, можно записать: $Q(z) = (z^2 + pz + q)^k S(z)$, где S имеет степень, на $2k$ меньшую, чем степень Q (!).

1.609. Пусть P и S — два многочлена с действительными коэффициентами (S — ненулевой многочлен). Для $\forall\lambda \in \mathbf{C}$ $\exists M, N \in \mathbf{R}$, такие, что $P(x) - (M + Nx) S(x)$ делится на $x - \lambda$ (а значит, и $x - \bar{\lambda}$)(!).

1.610. Сформулируем без доказательства *основную теорему алгебры*: всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

1.611. Из теорем 1.603 и 1.610 следует, что всякий многочлен степени $n > 0$ имеет n корней (среди них могут быть равные) (!).

1.612. Если многочлен P степени n имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $P(z) = c_n(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$(!).

1.613. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ — множество всех различных корней многочлена P степени n, $n \geqslant m$, и $k_1, \ldots, k_m$ — их кратности ($k_1 + \ldots + k_m = n$). Тогда

$$P(z) = c_n(z - \lambda_1)^{k_1}(z - \lambda_2)^{k_2} \cdots (z - \lambda_m)^{k_m} (!).$$

1.614. Пусть P — многочлен с действительными коэффициентами, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — его действительные корни, кратности которых $k_1, \ldots, k_p$, $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_s$ — комплексные корни кратности $l_1, \ldots, l_s$. Из утверждений 1.608 и 1.613 следует, что

$$P(x) = c_n(x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_p)^{k_p}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

где $p_m = -2\alpha_m$; $q_m = \alpha_m^2 + \beta_m^2$, $m = 1, 2, \ldots, s$ (!).

Будем рассматривать рациональные функции $f\colon z \mapsto P(z)/Q(z)$, где P и Q — многочлены. Если степень P меньше степени Q, то f называют *правильной рациональной функцией*.

1.615.* Всякую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции (!). Является ли такое представление единственным?

1.616. Относительно каких арифметических операций замкнуто множество всех правильных рациональных функций, у которых P и Q имеют положительные старшие коэффициенты?

В дальнейшем мы будем рассматривать правильные рациональные функции и считать, что числитель и знаменатель имеют общие делители только нулевой степени, т. е. сокращены.

1.617. Пусть $Q(z)=(z-\lambda)^k S(z)$, $S(\lambda)\neq 0$. Используя результат 1.604, показать, что существует $A_1\in\mathbf{C}$, такое, что $\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A_1}{(z-\lambda)^k}=\frac{T(z)}{Q(z)}$, причем $T(\lambda)=0$.

1.618. Если $Q(z)=(z-\lambda)^k S(z)$, $S(\lambda)\neq 0$, то существует $A_1\in\mathbf{C}$, такое, что $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{(z-\lambda)^k}+\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$, где $Q_1(z)=(z-\lambda)^{k-l}S(z)$, $l\geqslant 1$ (!).

1.619. Функция $z\mapsto P_1(z)/Q_1(z)$ в задаче 1.618 правильная (!).

1.620. Если P и Q имеют действительные коэффициенты и $\lambda\in\mathbf{R}$, то $A_1\in\mathbf{R}$ и коэффициенты многочленов P_1 и Q_1 можно выбрать действительными (!).

1.621. Повторяя прием, использованный в задаче 1.618, получаем:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{(z-\lambda)^k}+\frac{A_2}{(z-\lambda)^{k-1}}+\cdots+$$
$$+\frac{A_k}{z-\lambda}+\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(z)},$$

где $\tilde{Q}(\lambda)\neq 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_k\in\mathbf{C}$ (!).

1.622. Если $P(z)/Q(z)$ — правильная рациональная функция и $Q(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r}$, то

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{(z-\lambda_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(z-\lambda_2)^{k_2}}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{z-\lambda_1}+$$
$$+\frac{B_1}{(z-\lambda_2)^{k_2}}+\cdots+\frac{B_{k_2}}{z-\lambda_2}+\cdots+$$
$$+\frac{C_1}{(z-\lambda_r)^{k_r}}+\cdots+\frac{C_{k_r}}{z-\lambda_r},$$

где $A_1, \ldots, C_{k_r}$ — комплексные коэффициенты (!).

1.623. Если P в теореме 1.622 — действительный многочлен и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}$, то $A_1, \ldots, C_{k_r} \in \mathbf{R}$ (!).

1.624. Пусть P и Q — многочлены с действительными коэффициентами, $Q(x) = (x^2 + px + q)^k S(x)$ (см. обозначения задачи 1.608), $\lambda = \alpha + i\beta$, $S(\lambda) \neq 0$. Используя утверждение 1.609, показать, что $\exists M, N \in \mathbf{R}$, такие, что $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{M + Nx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $Q_1 x = (x^2 + px + q)^{k-l} S(x)$, $l \geqslant 1$.

1.625. Используя результат 1.622 и повторяя рассуждения задачи 1.624, можно доказать следующую теорему: если $x \mapsto P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная действительная функция и $Q(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{k_i} \prod_{i=1}^{s} (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$, то ее можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{A_j}{(x - \lambda_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{k_p} \frac{C_j}{(x - \lambda_p)^j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l_1} \frac{M_j + N_j x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{l_s} \frac{R_j + T_j x}{(x^2 + p_s x + q_s)^j},$$

где $A_j, \ldots, C_j, M_j, N_j, \ldots, R_j, T_j$ — действительные коэффициенты (!).

1.626. Некоторые из этих коэффициентов могут быть равными нулю (!).

Рациональные функции вида $\frac{A}{(x - \lambda)^k}$ и $\frac{M + Nx}{(x^2 + px + q)^l}$, $p^2 - 4q < 0$, называют *простейшими*. Для нахождения коэффициентов $A_j, \ldots, T_j$ используют метод неопределенных коэффициентов: записывают общий вид разложения с неопределенными коэффициентами (см. 1.625) и затем выполняют сложение в правой части. Сравнивая коэффициенты числителя полученного выражения и $P(x)$, получают систему линейных уравнений относительно $A_j, \ldots, T_j$.

1.627.* Представить в виде суммы простейших рациональных функций функцию f, если:

1) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$; 2) $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2(x-1)}$;

3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^3 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)^2}$.

Будем рассматривать *многочлены переменных* u и v, т. е.

$$P(u,\ v) = \sum_{k+m=0}^{n} a_{km} u^k v^m,$$

где $a_{km} \in \mathbf{R}, k, m \in \mathbf{N}_0$. Степень $P(u,\ v)$ — наибольшее из чисел $k+m$, для которых $a_{km} \neq 0$.

1.628. Сумма и произведение конечного числа многочленов двух переменных u и v являются многочленами переменных u и v (!).

Рациональная функция переменных u и v — это отношение двух многочленов переменных u и v.

1.629. Множество всех *рациональных функций* от u и v замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения (!).

1.630. Если u и v — рациональные функции от x, $R(u, v)$ — рациональная функция от u и v, то $R(u(x),\ v(x))$ — рациональная функция x (!).

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

2.1. Производная и дифференциал

Пусть x_0 и x — внутренние точки промежутка $I \subset \mathbf{R}$. Число $\Delta x = x - x_0$ называют *приращением переменной* x в точке x_0. Пусть $f\colon I \to \mathbf{R}$, $f\colon x \mapsto y = f(x)$. Число $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$ — *приращение функции* f в точке x_0.

Функцию f называют *дифференцируемой в точке* x_0, если

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad \text{(A)}$$

Линейную относительно Δx часть приращения функции $A\Delta x$ называют *дифференциалом функции* f в точке x_0 и обозначают $df(x_0)$.

2.1. $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (!).

Число A называют *производной функции* f *в точке* x_0. Производную обозначают обычно одним из символов: $f'(x_0)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $Df(x_0)$ и др. Процесс нахождения производной называют *дифференцированием*. Итак,

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

2.2*. Вычислить $f'(0)$ функций f, определенных формулами:

1) $f(x) = 4$; 2) $f(x) = 2x$; 3) $f(x) = x^2$;

4) $f(x) = \sin x$; 5) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$; 6) $f(x) = e^{-x}$.

2.3. Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0) \in \mathbf{R}$ (!).

2.4. Показать, что следующие функции недифференцируемы в нуле:

1) $f\colon x \mapsto |x|$; 2) $f\colon x \mapsto |\sin x|$;

3) $f\colon x \mapsto \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ 2x, & x > 0; \end{cases}$ 4) $f\colon x \mapsto \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

2.5.* Являются ли дифференцируемыми в нуле функции:

1) $f\colon x \mapsto \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0; \\ x, & x > 0; \end{cases}$ 2) $f\colon x \mapsto \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0; \\ \operatorname{tg} x, & x > 0; \end{cases}$

3) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0; \\ x^3, & x > 0; \end{cases}$ 4) $f: x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x^2, & x > 0? \end{cases}$

2.6. Построить и сравнить в окрестности нуля графики функций, рассмотренных в упражнениях 2.4 и 2.5.

2.7. Используя свойства предела функции, можно сформулировать *правила дифференцирования:* если f и g дифференцируемы в точке x_0, то:

1) функции $h_1 = f + g$ и $h_2 = f - g$ также дифференцируемы в x_0, причем $h_1'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $h_2'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ (!);

2) функция $h_3 = cf$ дифференцируема в x_0 и $h_3'(x_0) = cf'(x_0)$ $\forall c \in \mathbf{R}$ (!);

3) функция $h_4 = fg$ дифференцируема в x_0 и $h_4'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (!);

4) если $g(x_0) \neq 0$, то $h_5 = f/g$ дифференцируема в x_0 и $h_5'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ (!).

2.8. Может ли быть дифференцируемой в точке x_0 функция $f+g$, если f дифференцируема в x_0, а g — нет?

2.9. Сумма двух не дифференцируемых в точке x_0 функций может быть дифференцируемой в x_0 (!).

2.10. Может ли быть дифференцируемым в точке x_0 произведение функций f и g, если в этой точке:

1) f и g не дифференцируемы;

2) f дифференцируема, а g — нет?

2.11.* Существует непрерывная не дифференцируемая в точке x_0 функция, квадрат которой дифференцируем в x_0 (!).

2.12.* Построить непрерывную функцию, которая вместе со своим квадратом не дифференцируема в точке x_0.

2.13.* Построить непрерывную функцию f, такую, что f^2 не дифференцируема в точке x_0, а f^3 дифференцируема.

2.14.* Существует ли непрерывная не дифференцируемая в точке x_0 функция f, все степени которой f^n, $n=2, 3, \ldots$:

1) дифференцируемы в x_0; 2) не дифференцируемы в x_0?

2.15. Может ли быть дифференцируемым в x_0 частное f/g, если в этой точке:

1) f и g не дифференцируемы;

2) f дифференцируема, а g — нет;

3) g дифференцируема, а f — нет?

2.16. Непосредственно из формулы (A) следует, что дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке (!).

2.17. Если $f(x) = c \quad \forall x \in I$, то $f'(x) = 0$ (!).

2.18. Используя формулу 2.1 и результат 1.366, получаем $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.19. Аналогично получаем $(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.20. Используя формулу 2.1 и результат 1.509, получаем $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ (!). При каких x справедлива эта формула?

2.21. Используя формулу 2.1 и результат 1.507, получаем $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ (!). При каких x это справедливо?

2.22. Используя формулу 2.1 и результат 1.508, получаем $(a^x)' = a^x \ln a \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.23. В частности, $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.24. Показать, что $(e^{-x})' = -e^{-x} \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

2.25. Используя правила дифференцирования и формулы 2.18, 2.19, получаем:

1) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ (!);

2) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$ (!).

2.26. Из формул 2.23, 2.24 и правил дифференцирования следует: $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.27. Как и в задаче 2.25, получаем:

1) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!);

2) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$ (!).

2.28. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и монотонна. Тогда в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $f^{-1} = g$. Если f дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то g дифференцируема в y_0 и $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (!). (При доказательстве можно использовать результат 2.16.)

2.29. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Если f^{-1} не дифференцируема в $y_0 = f(x_0)$, то ее производная в этой точке бесконечна (т. е. $\Delta x/\Delta y \to \infty$ при $\Delta x \to 0$) (!).

2.30. Пользуясь правилом 2.28, получаем:

1) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $x \in]-1, 1[$ (!);

2) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2) \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (!).

2.31. Используя результаты 2.28 и 2.21, получить формулу 2.22.

2.32. Пусть $\varphi: t \mapsto x = \varphi(t)$, $f: x \mapsto y = f(x)$, $t \in T$, $x \in X$ и $h = f \circ \varphi$, причем φ дифференцируема в $t_0 \in T$, а f — в $x_0 = \varphi(t_0) \in X$.

1. Используя формулу (A), показать, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

2. Функция h дифференцируема в t_0 и $h'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)$ (!).

2.33. Последний результат известен как *теорема о производной сложной функции:* если φ дифференцируема в t_0, а f — в $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $h = f \circ \varphi$ дифференцируема в t_0, причем $(f(\varphi(t)))'|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\,\varphi'(t_0)$. (Эту формулу называют *правилом цепочки.*)

2.34. Может ли быть дифференцируемой в t_0 композиция $f \circ \varphi$, если:

1) φ дифференцируема в t_0, а f не дифференцируема в $\varphi(t_0)$;

2) φ не дифференцируема в t_0, а f дифференцируема в $\varphi(t_0)$;

3) φ и f не дифференцируемы в t_0 и $\varphi(t_0)$ соответственно?

2.35. Если u — дифференцируемая в точке x функция, то, применяя правило цепочки, получаем (все функции и производные вычислены в точке x):

$c' = 0$; $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$x' = 1$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$;

$(u^\mu)' = \mu u^{\mu-1} u'$; $\quad (\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$;

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; $\quad (\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

$(e^u)' = e^u u'$; $\quad (\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{(u \ln a)}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $\quad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

$(\ln u)' = u'/u$; $\quad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $\quad (\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$ (!).

Если в формуле 2.1 рассматривать односторонние пределы, то получим *односторонние производные функции f в точке x_0*. Их обозначают $f'_+(x_0)$ *(правосторонняя)* и $f'_-(x_0)$ *(левосторонняя)*.

2.36. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то существуют $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ (!).

2.37.* Верно ли обратное утверждение?

2.38.* Какому условию должны удовлетворять $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, чтобы $f'(x_0)$ существовала?

2.39. Вычислить односторонние производные в точке 0 функций, рассмотренных в задачах 2.4 и 2.5.

2.40. Привести пример функции, имеющей в точке 0 производную справа и не имеющей производной слева.

2.41.* Функции φ и ψ дифференцируемы в каждой точке $\mathbf{R}$, φ — ограниченная периодическая, $\psi(0)=0$, $\psi(x)\neq 0$ для $x\neq 0$ в окрестности нуля. Рассмотрим функцию f,

$$f(x)=\begin{cases}\psi(x)\varphi(1/x), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1. Если $\psi(x)=x$, $\varphi(x)=\sin x$, то f не имеет в нуле односторонних производных (!).
2. Если $\psi(x)=x^2$, $\varphi(x)=\sin x$, то f дифференцируема в нуле (!).
3. Пусть $\psi(x)=x^{\alpha}$, $\varphi(x)=\sin x$. При каких α функция f дифференцируема в нуле? При каких α функция f непрерывна в нуле?
4. Если $\psi(x)=x$, то $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ не существуют (!),
5. Если $\psi(x)=x^2$, то f дифференцируема в нуле (!).
6. Каким условиям должна удовлетворять функция ψ, чтобы f не имела в нуле односторонних производных?

2.42. Если $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ обладает свойством: $\exists\varepsilon>0$. $\forall x\in\,]-\varepsilon,\ \varepsilon[\ \Rightarrow |f(x)|\leqslant x^2$, то f дифференцируема в точке 0 (!).

2.43. Существует ли функция f, имеющая конечные и неравные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, все степени которой f^n, $n=2, 3, \ldots$, дифференцируемы в точке x_0?

2.44.* Существует ли функция f, имеющая конечные и неравные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, для которой f^k при $k=1, 2, \ldots, n$ не дифференцируемы в точке x_0, а при $k=n+1, n+2, \ldots$ дифференцируемы в этой точке $(n>1)$?

Если функция f дифференцируема в каждой точке промежутка I, то говорят, что f *дифференцируема на* I, или просто дифференцируема (в граничных точках, принадлежащих I, требуется существование лишь односторонних производных — правосторонней в левой граничной точке и левосторонней в правой). В этом случае на I определена функция $f\colon x\mapsto f'(x)$.

2.45. Вычислить $f'(x)$, если:

$f(x)=x^2+\sqrt{x^3}-4/x$; $\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{1}{2x^3}$;

$f(x)=2^x+e^{\sin x}+2x^3$; $\quad f(x)=e^{2x}\sin e^x$;

$f(x)=\ln x+x^2\log_2 x$; $\quad f(x)=x\sqrt{\cos x^3}$;

$f(x)=\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \ln x}$; $\quad f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

$f(x)=\arcsin \ln x$; $\quad f(x)=\operatorname{ch}\sin 3x$;

$f(x)=\sin \operatorname{sh} x$; $\quad f(x)=\operatorname{th}\operatorname{ctg} 2x^3$;

$f(x)=\operatorname{sh}\sqrt{x}$; $\quad f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{ch} x$.

2.46. Если f — элементарная дифференцируемая функция, то f' — также элементарная функция (!).

2.47. Если f — дифференцируемая и четная функция, то f' — нечетная функция; если f нечетная, то f' четная (!).

2.48. Если функция f четная и дифференцируемая в точке $x=0$, то $f'(0)=0$ (!).

2.49. Функция $f\colon x\mapsto\sin(1/x)$ ограничена на $]0, 1[$, но имеет неограниченную производную (!).

2.50. Может ли не ограниченная на I функция иметь ограниченную производную? Рассмотреть случаи $I=|a, b|$, $I=]a, +\infty[$.

2.51. Производная периодической дифференцируемой функции периодическая (!).

2.52. Привести пример функции, монотонной на $\mathbf{R}$ и имеющей периодическую производную.

2.53.* Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1;\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$

1. Найти $a=a_0$ и $b=b_0$, такие, чтобы f была дифференцируема в точке $x=1$.

2. Построить на одном рисунке графики функций $\varphi\colon x\mapsto x^2$ и $\psi\colon x\mapsto a_0x+b_0$, считая, что $x\in[0, 2]$.

Обозначим через $l=\{(x, f(x))\,|\,x\in X\}$ *график функции* f. Пусть $M_0(x_0, f(x_0))\in l$ и $M(x, f(x))\in l$. Прямую, проходящую через M_0 и M, назовем *секущей*. Устремим x к x_0. Предельное положение секущей M_0M (если оно существует) называют *касательной к графику функции f в точке* $(x_0, f(x_0))$.

2.54. Число $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно угловому коэффициенту секущей M_0M (!).

2.55. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ (!).

2.56.* Написать уравнение касательной к l в точке $(x_0, f(x_0))$ для дифференцируемой в x_0 функции f.

2.57. Построить график функции f, для которой:

1) $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) > 0$; 2) $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) < 0$;

3) $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$.

2.58. Функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Построить графики функций f и g, для которых:

1) $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) \neq g'(x_0)$;

2) $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$;

3) $f(x_0) > g(x_0)$, $f'(x_0) < g'(x_0)$;

4) $f(x_0) > g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$.

2.59. Функции f и g дифференцируемы на $]a, b[$ Построить графики функций f и g, для которых:

1) $f(x) < g(x)$, $f'(x) > g'(x)$ $\forall x \in]a, b[$;

2) $f(x) < g(x)$, $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in]a, b[$;

3) $f(x) < g(x)$, $f'(x) < g'(x)$ $\forall x \in]a, b[$.

2.60.* Для любых двух чисел a_0 и a_1 существует функция f, дифференцируемая в точке x_0, такая, что $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$ (!). Сколько таких функций существует?

2.61. Изобразить графически функцию f, определенную на $[0, +\infty[$, для которой $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ и:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = c \neq 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ не существует.

2.62. На $[\alpha, \beta]$ построить график функции f, для которой при $x \to \beta$:

1) $f(x) \to \infty$, $f'(x) \to \infty$;

2) $f(x) \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\beta} f'(x)$ не существует;

3) $f(x) \to c$, $\lim\limits_{x\to\beta} f'(x)$ не существует;

4) $f(x) \to c$, $f'(x) \to 0$; 5) $f(x) \to c$, $f'(x) \to \lambda \neq 0$;

6) $f(x) \to c$, $f'(x) \to \infty$.

2.63. Для функции Дирихле (см. 1.238) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D(1/n)-D(0)}{1/n}$, но D не дифференцируема в нуле (!).

2.64. Последовательность (α_n) бесконечно малая. Построить функцию f, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n}=0$, но $f'(x_0)$ не существует.

2.65. Функция $f\colon [0, 1[\to \mathbf{R}$,

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} 0, & x=0; \\ \dfrac{1}{n^2}, & \dfrac{1}{n+1} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x=0$ (!).

2.66.* Функции φ и ψ дифференцируемы на $\mathbf{R}$. Пусть

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathbf{Q}; \\ \psi(x), & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

1. Если $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=x$, то f имеет производную только в точке 0 (!).

2. Привести другие примеры функций φ и ψ, для которых f дифференцируема лишь в одной точке.

3. Каким условиям должны удовлетворять φ и ψ, чтобы f была дифференцируема лишь в одной точке?

2.67. Построить функцию, имеющую производную только в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.68. Используя задачу 2.55, выяснить геометрический смысл дифференциала функции в точке x_0. Изобразить геометрически приращение функции f и ее дифференциал в точке x_0, если:

1) $f(x)=x^2$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$;

3) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/2$.

Если $g\colon x \mapsto x$ $\forall x$, то $dg(x)=dx$. С другой стороны, $dg(x)=g'(x)\,\Delta x=\Delta x$. Поэтому $dx=\Delta x$, и для дифференцируемой функции f имеем: $df(x)=f'(x)\,dx$. Используя формулу (А), можно утверждать, что $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$. При этом погрешность является величиной $o(\Delta x)$.

2.69. Получить следующие приближенные формулы для малых x:

1) $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$; 2) $\ln(1+x)\approx x$; 3) $e^x \approx 1+x$;

4) $\sin x \approx x$; 5) $\arcsin x \approx x$; 6) $\operatorname{tg} x \approx x$.

2.70. Пусть $y=x^2$, где $x=\sin t$. Вычислить dy двумя способами: 1) подставить вместо x его выражение и дифференцировать по t; 2) дифференцировать по x и заменять x, dx их выражениями через t. Сравнить результаты.

2.71. То же для случаев:

1) $y = \sin x$, $x = t^2$; 2) $y = e^x$, $x = \operatorname{tg} t$;

3) $y = \operatorname{arctg} 2x^2$, $x = \ln \sqrt{t}$.

2.72. Пусть $\varphi: t \mapsto x = \varphi(t)$, $f: x \mapsto y = f(x)$, $t \in T$, $x \in X$ и $h = f \circ \varphi$, т. е. $y = f(x) = f(\varphi(t)) = h(t)$. Используя правило цепочки, показать, что дифференциал функции обладает свойством *инвариантности формы*:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{dy}{dt}\,dt.$$

(Форма дифференциала одна и та же при дифференцировании и по независимой переменной t, и по промежуточной переменной x.)

2.2. Производные и дифференциалы порядков выше первого

2.73. Пусть $f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

1. Функции f_1 и f_2 дифференцируемые (!).

2. Обозначим через g_1 и g_2 их производные. Убедиться, что $g_2'(0)$ существует, а $g_1'(0)$ — нет.

Если производная f' функции f является дифференцируемой в точке x функцией, то f называют *дважды дифференцируемой в точке x функцией*.

2.74. Из утверждения 2.3 следует, что f дважды дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда существует производная функции f' в точке x (!).

Производную функции f' в точке x называют *второй производной функции f в x* и обозначают одним из символов: $f''(x)$; $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$; $\left.\dfrac{d^2f}{dx^2}\right|_x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; $D^2f(x)$; $f^{(2)}(x)$ и др.

По индукции определяют *производную порядка n*:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Удобно полагать $f^{(0)}(x) = f(x)$. Тогда предыдущая формула справедлива для любого $n \in \mathbf{N}$. Если существует $f^{(n)}(x)$, то функцию f называют *n раз дифференцируемой в точке x*.

2.75.* Вычислить производные порядка n функции f, если:

1) $f(x) = x^3$, $n = 3$; 2) $f(x) = \sin x$, $n = 4$;

3) $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$, $n = 3$; 4) $f(x) = x^3$, $n = 15$.

2.76. Используя метод математической индукции, получить следующие формулы для производных порядка n:

1) $f(x) = x^{\mu}$, $f^{(n)}(x) = \mu(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1) x^{\mu - n}$; если $\mu \in \mathbf{N}$, то $f^{(n)}(x) = 0$ $\forall n > \mu$;

2) $f(x) = \ln x$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$;

3) $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$;

4) $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$;

5) $f(x) = a^x$, $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$.

2.77. Показать, что для функции f существует $f'(0)$ и не существует $f''(0)$:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0; \\ -x^2, & x < 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leqslant 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$

2.78. Построить функцию f, имеющую $f'(0)$ и не имеющую $f''(0)$.

2.79. Если f имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков и $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то для функции φ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant x_0; \\ -f(x), & x < x_0, \end{cases}$$

существует $\varphi'(x_0)$ и не существует $\varphi''(x_0)$ (!).

2.80. Построить функцию, которая в точке x_0:

1) имеет производные первого и второго порядков и не имеет производной третьего порядка;

2) имеет производную порядка s и не имеет производной порядка $s+1$.

2.81. Если функция φ дифференцируема и $\varphi'(x) = c\varphi(x)$, то φ имеет производные любого порядка (!).

2.82. Функция φ дифференцируема, а f имеет производные любого порядка, причем $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$. Тогда φ имеет производные любого порядка (!).

2.83. Функция φ дважды дифференцируема и $a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = 0$, a, b, $c \in \mathbf{R}$. Тогда φ имеет производные любого порядка (!).

2.84. Привести примеры функций φ, для которых последовательность $(\varphi^{(n)}(0))$ является:

1) ограниченной;

2) ограниченной снизу и не ограниченной сверху;

3) не ограниченной ни снизу, ни сверху;

4) возрастающей; 5) немонотонной; 6) постоянной.

2.85. Если P_n — многочлен степени n, то P_n' — также многочлен (!). Сравнить степени P_n и P_n'.

2.86. Пусть E_{na} — класс функций вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Из утверждения 2.85 получаем:

1) если $f \in \mathrm{E}_{n0}$, $n \geqslant 1$, то $f' \in \mathrm{E}_{(n-1)\,0}$ (!);

2) если $f \in \mathrm{E}_{na}$, $a \neq 0$, то $f' \in \mathrm{E}_{na}$ (!).

2.87. Пусть T_{nb} — класс функций вида $f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx$, $n \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{R}$, где степени P_n и Q_n не превосходят n, причем хотя бы один из многочленов P_n, Q_n имеет степень n.

1. Если $f \in \mathrm{T}_{n0}$, $n \geqslant 1$, то $f' \in \mathrm{T}_{(n-1)\,0}$ (!).

2. Если $f \in \mathrm{T}_{nb}$, $b \neq 0$, то $f' \in \mathrm{T}_{nb}$ (!).

2.88. Пусть K — множество всех *квазиполиномов*, т. е. функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} (P_{n_k}(x)\cos b_k x + Q_{n_k}(x)\sin b_k x)\, e^{a_k x}, \quad m \geqslant 1.$$

1. $\mathrm{E}_{na} \subset \mathrm{K}$ (!). 2. $\mathrm{T}_{na} \subset \mathrm{K}$ (!).

3. Если f — квазиполином, то f дифференцируема и f' — также квазиполином (!).

2.89. Отсюда следует, что любой квазиполином имеет производные всех порядков (!).

Множество всех функций, определенных на I и имеющих непрерывные производные до порядка n включительно, обозначают C_I^n. Множество всех функций, имеющих на I производные любого порядка (т. е. *бесконечно дифференцируемых*), обозначают C_I^∞. Таким образом $\mathrm{K} \subset C_{\mathbf{R}}^\infty$.

2.90. Используя результаты 1.28 и 1.29, получить *формулу Лейбница* для вычисления n-й производной произведения двух функций u и v из C_I^n (см. 1.30):

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

2.91.* Вычислить производные указанного порядка n:

1) $f(x) = x^2 e^x$, $n = 50$; 2) $f(x) = x^3 \cos 2x$, $n = 30$;

3) $f(x) = 1/(x^2 - 1)$, $n = 20$; 4) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $n = 20$.

Пусть $f: x \mapsto y = f(x)$ — дифференцируемая на I функция. *Дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* функции f в точке x называют значение дифференциала от $df(x)$, т. е. $d^2f(x) = d(df(x))$ в предположении, что повторное приращение равно первоначальному. Аналогично $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x))$ — *дифференциал n-го порядка* (при тех же предположениях относительно приращения). По определению считают $d^0f(x) = f(x)$.

2.92. Если x — независимая переменная, то $d^2f(x) = f''(x)(dx)^2$ (!).

Степени дифференциала независимой переменной x обозначают $(dx)^n = dx^n$, $n = 2, 3, \ldots$ Поэтому

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2 \quad \text{или} \quad d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2. \tag{Б}$$

2.93. Для независимой переменной x получаем $d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$ (!).

2.94. Чему равны $d^nf(x)$ для функций 2.76?

2.95. Формула Лейбница для дифференциалов имеет вид

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u\,d^kv$$

(см. 2.90) (!).

2.96. Пусть $y = x^2$.

1. Вычислить d^2y, считая x независимой переменной.

2. Предположим, что $x = e^t$. Подставить $x = e^t$ в y и найти d^2y.

3. Подставить $x = e^t$ в выражение d^2y, вычисленное в п. 1, и сравнить с п. 2.

4. В общем случае если $y = y(x)$, $x = x(t)$, то

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 + \frac{dy}{dx}\,d^2x,$$

так как $d^2x \neq 0$ (вообще говоря). Сравнивая полученный результат с формулой (Б), видим, что второй дифференциал (и дифференциалы более высоких порядков) не обладают инвариантностью формы (см. 2.72) (!).

2.97.* Считая x дифференцируемой нужное число раз функцией от t, найти дифференциалы указанных порядков функции y, если:

1) $y(x)=e^x$, d^3y; 2) $y(x)=\sin x$, d^4y.

2.98. Вычислить указанные в задаче 2.97 дифференциалы, считая x независимой переменной. Сравнить результат с полученным в 2.97.

2.99. Если $x=at+b$, a, $b\in\mathbf{R}$, то дифференциалы всех порядков функции $y=f(x)$ обладают инвариантностью формы, т. е. $d^ny=\dfrac{d^ny}{dx^n}dx^n=\dfrac{d^ny}{dt^n}dt^n$ (!).

Функциональная зависимость между $x\in X$ и $y\in Y$ может быть задана уравнением вида $F(x, y)=0$. В этом случае говорят о *неявной функции* $f\colon x\mapsto y=f(x)$, такой, что $F(x, f(x))=0$, $x\in X$. Не выясняя условий существования функции f и ее производных, изучим метод нахождения этих производных.

2.100.* Пусть $x^2+y^2=1$. Считая y функцией от x, найти $y'(x)$, продифференцировав исходное соотношение.

2.101. В общем случае, дифференцируя соотношение $F(x, y)=0$ и считая y дифференцируемой функцией от x, получаем уравнение для нахождения $y'(x)$ (!).

2.102*. Найти $y'(x)$, если:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

3) $e^y+xy+e^x=0$.

2.103. Дифференцируя уравнение $F(x, y)=0$ k раз по x и считая при этом, что y есть k раз дифференцируемая функция от x, получаем уравнение для нахождения $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ (!).

2.104. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций, рассмотренных в упражнении 2.102.

2.105.* Написать уравнение касательной к кривой, определяемой уравнением $x^2+y^2=1$ в точке:

1) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; 2) $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Пусть $\varphi\colon t\mapsto x=\varphi(t)$ и $\psi\colon t\mapsto y=\psi(t)$, $t\in I$. Если для φ существует обратная функция φ^{-1}, можно определить на множестве значений φ функцию $f\colon x\mapsto y=f(x)$ по закону $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$. Говорят, что формулы $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in I$, задают *параметрически* функциональную зависимость y от x.

2.106. Из утверждений 2.28 и 2.33 следует: если ψ и φ

дифференцируемы и $\varphi'(t_0)=0$, то f дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$ (!).

2.107. Правило вычисления производной $f'(x)$ следует из свойства 2.72:

$$f'(x)=y'(x)=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ (!).$$

2.108. Обозначим $\psi'(t)/\varphi'(t)=Y(t)$. Если φ и ψ — дважды дифференцируемые функции, то, применяя к паре $x=\varphi(t)$, $y'=Y(t)$ формулу 2.107, находим:

$$y''(x)=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}\ (!).$$

2.109. Получить формулу для вычисления $y'''(x)$, считая φ и ψ трижды дифференцируемыми функциями.

2.110.* Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если:

1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi]$;

2) $x=\operatorname{tg} t,\quad y=\sin t,\quad t\in\,]-\pi/2,\ \pi/2[$.

2.111.* Написать уравнение касательной к кривой l, определяемой уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, в точке, соответствующей:

1) $t=\pi/4$; 2) $t=\pi/3$.

2.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Точку c называют *стационарной точкой* функции f, если $f'(c)=0$.

2.112. Пусть $f\colon x\mapsto\sin x$, $x\in[-\pi,\ \pi]$. Найти стационарные точки функции f. Сравнить значения f в стационарных точках и близких к ним точках.

2.113. Пусть функция $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0. Считая x_0 точкой экстремума функции f, сравнить приращения $\Delta f=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$ для $\Delta x>0$ и $\Delta x<0$.

2.114. Отсюда получить *теорему Ферма:* если функция $f\colon I\to R$ дифференцируема во внутренней точке экстремума $x_0\in I$, то x_0 — стационарная точка функции f.

2.115. Функция $f\colon x\mapsto x^3$, $x\in\mathbf{R}$, не имеет экстремума в стационарной точке (!).

2.116. Привести примеры других функций, не имеющих экстремума в своих стационарных точках.

2.117. Функция f дифференцируема внутри I и немонотонна. Можно ли утверждать, что внутри I существует стационарная точка, если:

1) $I=[a,\ b]$; 2) $I=[a,\ b[$; 3) $I=\,]a,\ b[$?

2.118. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)=f(b)$, то хотя бы одно ее экстремальное значение достигается внутри $[a, b]$ (!).

2.119. Используя утверждения 2.118 и 2.114, получаем *теорему Ролля:* если функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $]a, b[$ и $f(a)=f(b)$, то на $]a, b[$ существует стационарная точка функции f (!).

2.120. Построить дифференцируемую на $]a, b[$ функцию f, обладающую свойством $f(a)=f(b)$ и не имеющую стационарной точки на $]a, b[$.

2.121. Построить непрерывную на $[a, b]$ функцию f, обладающую свойством $f(a)=f(b)$ и не имеющую стационарной точки на $]a, b[$.

2.122. Построить непрерывную на $[a, b]$ и дифференцируемую на $]a, b[$ функцию f, не имеющую стационарной точки на $]a, b[$.

2.123. Построить на $[a, b]$ функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Ролля и имеющую на $[a, b]$: одну; две; счетное множество стационарных точек; отрезок $[\alpha, \beta]\subset\subset[a, b]$, состоящий из стационарных точек.

2.124.* Если функция f дифференцируема на $]a, b[$ и существуют одинаковые пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$, то на $]a, b[$ имеется стационарная точка (!).

2.125.* Останется ли справедливым утверждение 2.124, если $]a, b[=\mathbf{R}$?

2.126. Применив теорему Ролля, доказать, что функция $f\colon x\mapsto x(1-x)$ имеет на $[0, 1]$ стационарную точку.

2.127.* Если многочлен P имеет k вещественных корней, то его производная P' имеет не меньше чем $k-1$ вещественных корней (!).

2.128. Если все корни многочлена P вещественны, то все его производные $P^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$, имеют только вещественные корни (!).

2.129.* Пусть функция $f\in C^{n-1}_{[a,b]}$ имеет на $[a, b]$ производную $f^{(n)}$. Если $\exists\, x_i\in[a, b]$, $i=0, 1, \ldots, n$, такие, что $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$, то $\exists\, c\in[a, b]$, $f^{(n)}(c)=0$ (!).

2.130. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $]a, b[$, то функция

$$F\colon x\mapsto (f(x)-f(a))(b-a)-(f(b)-f(a))(x-a)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (!).

2.131. Пользуясь результатами 2.130 и 2.119, доказать *теорему Лагранжа*: если функция f непрерывна на $[a, b]$

и дифференцируема на $]a, b[$, то на $]a, b[$ существует точка c, такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (!).$$

2.132.* Используя утверждение 2.55, дать геометрическое истолкование теоремы Лагранжа.

2.133. Привести пример функции, для которой существуют две различные точки, удовлетворяющие теореме 2.131.

2.134. Пусть $f(x)=1/x$, $x\in[a, b]$, $ab<0$. Не существует $c\in[a, b]$, такого, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (!).

2.135. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для каждой из следующих функций:

1) $f(x)=x^2$, $x\in[0, 1]$; 2) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $x\in[0, 1]$;

3) $f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$;

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x\in[-1, 1]$.

2.136. Построить на $[a, b]$ функцию f, такую, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad \forall c\in[\alpha, \beta]\subset[a, b].$$

2.137. Если функция f непрерывна на $[a, +\infty[$, дифференцируема на $]a, +\infty[$, $f(a)<0$ и $f'(x)\geqslant p>0$, $x\in[a, +\infty[$, то уравнение $f(x)=0$ имеет один вещественный корень (!).

2.138.* Можно ли условие $f'(x)\geqslant p>0$ заменить условием $f'(x)>0$?

2.139.* Пусть x, $x+h\in[a, b]$.

1. Из теоремы Лагранжа следует, что $\exists\theta\in]0, 1[$, такое, что $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$ (!). (Эту формулу называют *формулой конечных приращений*.)

2. Вычислить θ для $f(x)=ax^2+bx+c$; $f(x)=e^x$.

2.140.* Пусть $f(x)=x^2\sin(1/x)$, $x\neq 0$, $f(0)=0$. По теореме Лагранжа существует c, $0<c<x$, такое, что $x^2\sin(1/x)=x(2c\sin(1/c)-\cos(1/c))$. Тогда $\cos(1/c)=2c\sin(1/c)-x\sin(1/x)$. Если $x\to 0$, то $c\to 0$. Получаем $\lim\limits_{c\to 0}\cos(1/c)=0$. Но $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ не существует. Объяснить противоречие.

2.141. Применив к функции Φ,

$$\Phi(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(f(b)-f(a))(g(x)-g(a)),$$

теорему Ролля, доказать *теорему Коши*: если f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на $]a, b[$ и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$, то существует $c \in]a, b[$, такое, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} =$ $= \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2.142.* Почему нельзя получить формулу 2.141, применив теорему Лагранжа отдельно для f и отдельно для g и разделив первое выражение на второе?

2.143.* Что получится, если в теореме Коши положить $g(x) = x$ $\forall x \in [a, b]$?

2.144.* Можно ли применить теорему Коши на $[-1, 1]$ к функциям f и g, если $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$?

2.145. Пусть функции f и g дифференцируемы на $[a, b]$ и $|f'(x)| \leqslant g'(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$ (!).

2.146. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на $]a, b[$, $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$. Тогда $f(x) > g(x)$ $\forall x \in]a, b[$(!).

2.147. Используя результат 2.146, доказать неравенства:

1) $\cos x > 1 - x^2/2$, $x > 0$;
2) $\sin x > x - x^3/6$, $x > 0$;
3) $x/(1+x) < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

2.148. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенства:

1) $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;
2) $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;
3) $|\ln x_1 - \ln x_2| \leqslant \frac{x_1 - x_2}{a}$ $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty[$, $a > 0$.

2.149. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $]a, b[$, $m = \inf\limits_{x \in]a, b[} f'(x)$, $M = \sup\limits_{x \in]a, b[} f'(x)$. Тогда $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$ (!).

2.150. Если функция f имеет на $[a, b]$ ограниченную производную, то f также ограничена на $[a, b]$ (!). (В точках a и b рассматриваются односторонние производные.)

2.4. Раскрытие неопределенностей

2.151. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на $]a, b[$, $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$. Тогда $\forall x \in]a, b[$ $\exists c \in]a, x[$, такое, что $\frac{f(x)}{g(x)} =$ $= \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (!).

2.152. Функции f и g дифференцируемы на $]a, b[$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in]a, b[$. Тогда $\forall x \in$ $\in]a, b[$ $\exists c \in]a, x[$, такое, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (!).

2.153. Если функции f и g удовлетворяют условиям 2.152 и существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to l$ при $x\to a$(!).

2.154. Утверждение 2.153 остается в силе, если в задаче 2.152 вместо $]a, b[$ взять $]b, a[$(!).

2.155. Пусть в задаче 2.154 $]b, a[=]b, +\infty[$, $b>0$. Положив $u=1/x$, показать, что утверждение 2.154 остается в силе.

2.156. Таким образом, получаем *правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Пусть функции f и g дифференцируемы на I, a — предельная точка I, $a\notin I$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x \in I$. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ (!).

2.157.* Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-x^2/2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x - x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\ln(1+x^2)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{10}}$.

2.158. Функции f и g дифференцируемы на $]a, b[$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in]a, b[$.

1. Если $x, \bar{x}\in]a, b[$, такие, что $g(x)\neq g(\bar{x})$, то для любого $l\in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$l-\frac{f(x)}{g(x)} = \left(l-\frac{f(x)-f(\bar{x})}{g(x)-g(\bar{x})}\right)\frac{g(x)-g(\bar{x})}{g(x)} + $$
$$+ l\frac{g(\bar{x})}{g(x)} - \frac{f(\bar{x})}{g(x)} \text{ (!)}.$$

2. Если $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\to l$ при $x\to a$, то, используя теорему 2.141, можно показать, что $\exists \bar{x}$, такое, что $\forall x\in]a, \bar{x}[$

$$\left|l-\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon\left|\frac{g(x)-g(\bar{x})}{g(x)}\right|+\left|l\frac{g(\bar{x})}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(\bar{x})}{g(x)}\right| (!).$$

3. Если к тому же $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $\exists\,\delta>0$, такое, что $\forall x\in\,]a, a+\delta[\Rightarrow\left|l-\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon(1+\varepsilon)+ l\varepsilon+\varepsilon$ (!).

4. Из п. 3 следует, что $\frac{f(x)}{g(x)}\to l$ при $x\to a$ (!).

5. Провести рассуждения 1—4 для случая $x\to b$.

2.159. Доказать *правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям 2.156 и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то $\frac{f(x)}{g(x)}\to l$ при $x\to a$. (Это правило называют также *правилом Штольца.)*

2.160. Если $a=\pm\infty$, то можно использовать для доказательства, как и в задаче 2.155, замену $u=1/x$ (!).

2.161.* Использовать правило Штольца для раскрытия неопределенностей:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x}$.

2.162. Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ $[\infty-\infty]$ сводятся с помощью преобразований исходных выражений к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (!).

2.163.* Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$; 8) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/\ln x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}$.

2.164. Пусть $f(x)=2x-\sin x$, $g(x)=2x+\sin x$, $x\in\mathbf{R}$. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'x}$ не существует, но $\frac{f(x)}{g(x)}\to 1$ при $x\to+\infty$.

2.165. Можно ли применить правило Лопиталя к функциям $f\colon x\mapsto x^2\sin(1/x)$ и $g\colon x\mapsto\sin x$ при $x\to 0$?

2.5. Формула Тейлора

2.166. Используя представление $x^k=((x-b)+b)^k$, любой многочлен $P\colon x\mapsto P(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$ можно *переразложить* по степеням $x-b$, $b\in\mathbf{R}$, т. е. представить в виде $P(x)=a_0+a_1(x-b)+\ldots+a_n(x-b)^n$ (!).

2.167. Пусть $P(x)=a_0+a_1(x-b)+\ldots+a_n(x-b)^n$, $b\in\mathbf{R}$, $a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда $a_k=\frac{P^{(k)}(b)}{k!}$, $k=0,1,\ldots,n$ (!).

2.168. Любой многочлен P степени n определяется однозначно, если задать значения $P, P', \ldots, P^{(n)}$ в какой-либо точке b (!).

2.169. Таким образом, если P — многочлен степени n, то $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k$, где b — любая точка из $\mathbf{R}$ (!).

2.170. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки b и n раз дифференцируемая в b. Многочлен T_n,

$$T_n(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n,$$

обладает свойством: $T_n^{(k)}(b)=f^{(k)}(b)$, $k=0,1,\ldots,n$ (!).

Обозначим $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$. Тогда

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x). \qquad \text{(B)}$$

Формулу (B) называют *формулой Тейлора порядка n для функции f в окрестности точки b*. Многочлен T_n называют *многочленом Тейлора*, $R_n(x)$ — *остаточным членом* формулы Тейлора.

2.171. Написать формулу Тейлора для функций f' и f'' в окрестности точки b, считая f дифференцируемой n раз в этой точке.

2.172. Пусть P — многочлен степени n. Доказать, что

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k + R_m(x),$$

где $R_m(x) = \begin{cases} 0, & m \geqslant n; \\ o((x-b)^m), & m < n. \end{cases}$

2.173. Разложить $P(x) = x^5$ по степеням $x+1$, используя: 1) задачу 2.166; 2) задачу 2.167.

2.174. Разложить $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x-1$. Вывести отсюда, что $x = 1$ является корнем кратности 3 для $P(x)$.

2.175. Для того чтобы многочлен P степени n имел число b корнем кратности $k \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы $P(b) = P'(b) = \ldots = P^{(k-1)}(b) = 0$, $P^{(k)}(b) \neq 0$ (!).

2.176. Если $x = b$ — корень многочлена P кратности $k > 1$, то он будет корнем кратности $k-1$ для P' (!).

2.177. Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на I и T_n^b — ее многочлен Тейлора порядка n в окрестности точки $b \in I$. Зафиксируем любое $x \in I$.

1. Можно определить на I функцию

$$\tau\colon b \mapsto \tau(b) = T_n^b(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k \text{ (!)}.$$

2. Функция $F\colon b \mapsto f(x) - \tau(b)$, $b \in I$, дифференцируема на I (!).

3. Вычислить производную $F'(b)$.

4. $F(b) = R_n(x)$, где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (!).

5. $F(x) = 0$ (!).

6. Пусть $\varphi\colon b \mapsto \varphi(b)$ — произвольная дифференцируемая на I функция, $\varphi'(b) \neq 0$ $\forall b \in I$. Используя теорему Коши 2.141 для F и φ, показать, что $\forall x \in I$ $\exists c \in I$, такое, что

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{\varphi'(c)} \; \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Используя различные функции φ в формуле 2.177.6, можно получить различные представления для $R_n(x)$.

2.178. Если $\varphi(b) = (x-b)^{n+1}$, получаем *остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1},$$

где c лежит между b и x (!).

2.179. Для любого c, лежащего между b и x, существует θ, $0<\theta<1$, такое, что $c=b+\theta(x-b)$ (!).

2.180. Если $\varphi(b)=(x-b)$, то получаем *остаточный член формулы Тейлора в форме Коши:*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(b+\theta(x-b))}{n!}(1-\theta)^n(x-b)^{n+1},$$

$$0<\theta<1 \text{ (!)}.$$

2.181. Из формул Лагранжа и Коши для $R_n(x)$ следует, что ограниченность $f^{(n+1)}$ в окрестности I точки b влечет стремление к нулю $R_n(x)$ при $x\to b$ (!). Впрочем, это утверждение можно значительно усилить.

2.182. Пусть функция f имеет на I производную $f^{(n)}$, непрерывную в точке b. Тогда

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n+\alpha(x-b)^n,$$

где $\alpha\to 0$ при $x\to b$ (!).

2.183. Из утверждения 2.182, сравнивая формулы Тейлора порядка $n-1$ и порядка n в точке b, получаем *форму Пеано для остаточного члена*: $R_n(x)=o((x-b)^n)$ (!). Сравнить с результатом 2.181.

Итак, существование на I производной $f^{(n)}$, непрерывной в точке b, позволяет представить $f(x)$ в виде $f(x)=T_n(x)+o((x-b)^n)$. Изучим обратное утверждение.

2.184. Если $f(x)=P_0(x)+o(1)$, где P_0 — многочлен нулевой степени, то f непрерывна в точке b (!).

2.185. Если $f(x)=P_1(x)+o(x-b)$, где P_1 — многочлен первой степени, то f дифференцируема в точке b (!).

2.186. Пусть $f(x)=\cos x+x^3\sin(1/x)$, $x\neq 0$ и $f(0)=1$.

1. Используя упражнение 2.157.3, можно записать:

$$f(x)=1-x^2/2+o(x^2) \text{ (!)}.$$

2. $f'(0)=0$, $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ не существует (!).

Таким образом, из представления $f(x)$ в виде $f(x)=P_n(x)+o((x-b)^n)$, где P_n — многочлен степени n, $n\geqslant 2$, не следует существование $f^{(n)}(b)$.

2.187. Если $f(x) = P_n(x) + o((x-b)^n)$, где P_n — многочлен степени n, и $f^{(n)}(b)$ существует, то P_n — многочлен Тейлора степени n для f (!).

2.188. Используя формулы 2.76, получаем следующие разложения в окрестности точки 0:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (!);

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ (!);

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ (!);

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$ (!);

5) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ (!).

2.189.* Используя разложения 2.188, написать формулу Тейлора порядка $2n$ в окрестности точки $b = 0$ для следующих функций:

1) $f(x) = \operatorname{ch} x$; 2) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

3) $f(x) = 1/(1-x)$; 4) $f(x) = 1/(1+x^2)$.

2.190. Функция φ определена и дифференцируема в окрестности точки b,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-b)^k; \quad P_{n+1}(x) = \varphi(b) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-b)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

1. Если $|\varphi'(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon |x-b|^n$, то, применив неравенство 2.145 к функциям $f\colon x \mapsto \varphi(x) - P_{n+1}(x)$ и $g\colon x \mapsto \varepsilon \frac{(x-b)^{n+1}}{n+1}$, можно показать, что

$$|\varphi(x) - P_{n+1}(x)| \leqslant \varepsilon \frac{|x-b|^{n+1}}{n+1} \quad (!).$$

2. Если $\varphi^{(n+1)}(b)$ существует и $\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-b)^k + o((x-b)^n)$, то

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-b)^{k+1}}{k+1} + o((x-b)^{n+1}) \text{ (!)}.$$

Последний результат дает возможность строить разложение по формуле Тейлора функции φ, если известно разложение ее производной φ'.

2.191. Используя разложение 2.189.4, получаем $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (!).

2.192.* Написать формулу Тейлора порядка n в окрестности $b = 0$ для следующих функций:

1) $f(x) = e^{x(x+1)}$, $n = 3$; 2) $f(x) = e^{\sin x}$, $n = 3$;

3) $f(x) = \ln(\cos x)$, $n = 6$; 4) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $n = 3$;

5) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $n = 5$; 6) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $n = 4$.

2.193.* Функцию $f\colon x \to e^{x^2}$ разложить в окрестности точки $b = 1$ с точностью до $o((x-1)^2)$.

Формула Тейлора оказывается очень полезной при вычислении пределов.

2.194.* Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - \ln(1 + \sin x)}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{(\cos x)^x + x^3 - 1}{x \ln \frac{\sin x}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x e^{\sin x}}{\ln(\cos x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

2.195. Из формулы Тейлора следует, что $f(x) \approx T_n(x)$. При этом погрешность $\delta = |R_n(x)|$. Доказать оценки:

1) $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{e^{x1(x)}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ $\forall x \in \mathbf{R}$;

2) $\left| \sin x - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$ $\forall x \in \mathbf{R}$;

3) $\left| \ln(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ $\forall x \in [0, 1]$.

2.196.* Вычислить:

1) число e с точностью до 10^{-5};

2) $\ln 1{,}1$ с точностью до 10^{-3};

3) $\sqrt[3]{28}$ с точностью до 10^{-3};

4) $\sin 2°$ с точностью до 10^{-5};
5) $\cos 2°$ с точностью до 10^{-5}.

Пусть функция f имеет в точке b производные любого порядка. Тогда в формуле (B) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Если $R_n(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x_0 - b)^k,$$

т. е. $f(x_0)$ представима числовым рядом. Если $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall x \in I$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x - b)^k.$$

Говорят, что функция f разложена в *ряд Тейлора* в окрестности точки b.

2.197. Оценив остаточный член формулы Тейлора, показать справедливость следующих разложений:

1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbf{R};$

2) $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$

3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbf{R};$

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in]-1, 1];$

5) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in]-1, 1[.$

2.198. Ряд Тейлора может быть построен для любой бесконечно дифференцируемой на промежутке I функции f. Но равенство $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k$ может не выполняться для $x \in I$. Пусть $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

1. $f \in C^{\infty}_{[-1,1]}$ (!).
2. Построить ряд Тейлора для f в окрестности 0 и убедиться, что он не сходится к $f(x)$ для $x \neq 0$.

Пусть $z \in \mathbf{C}$. Как показано в упражнении 1.232, ряд $\sum \frac{z^k}{k!}$ сходится при любом $z \in \mathbf{C}$. По определению полагают $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

2.199. Для $x \in \mathbf{R}$ вычислить e^{ix} и показать, что $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

2.200. Результат 2.199 позволяет получить *формулы Эйлера*:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \ (!).$$

Используя эти формулы, доказать тождества:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Функции sin и cos определяют на $\mathbf{C}$ также с помощью рядов:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

2.201. Убедиться, что $|\cos 2i| > 1$ (см. 2.200).

Заметим, что если в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ вместо z подставить квадратную матрицу A, то все операции можно выполнить ($A^0 = E$ — единичная матрица). Можно определить таким образом *матричную экспоненту* $A \mapsto e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

2.202. Множество определения матричной экспоненты непусто (!).

2.6. Монотонность. Экстремумы

2.203. Используя теорему Лагранжа 2.131, доказать следующее утверждение: если $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a, b[$, то f — постоянная на $]a, b[$ функция.

2.204. Таким образом, получаем *критерий постоянства дифференцируемой функции:* дифференцируемая на $]a, b[$ функция f постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a, b[$ (!).

2.205. Если функции f и g дифференцируемы на $]a, b[$

и $f'(x)=g'(x)$, то существует постоянная c, такая, что $f(x)=g(x)+c\ \forall x\in]a, b[$ (!).

2.206. Используя критерий 2.204, доказать тождества:

1) $\arcsin x+\arccos x=\pi/2\ \forall x\in[0, 1]$;

2) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(1/x)=\begin{cases}\pi/2, & x>0;\\ -\pi/2, & x<0.\end{cases}$

2.207. Используя теорему Лагранжа, доказать утверждение: если функция f дифференцируема на I и $f'(x)>0$, $x\in I$, то f строго возрастает на I.

2.208. Справедливо ли обратное утверждение для дифференцируемой функции? (Рассмотреть функцию f: $x\mapsto x^3$ на $[-1, 1]$.)

2.209. На каком множестве может обращаться в нуль производная дифференцируемой строго монотонной функции?

2.210. Для того чтобы дифференцируемая на I функция строго возрастала, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geqslant\geqslant 0\ \forall x\in I$, причем $\forall\ ]\alpha, \beta[\subset I\ \exists x_0\in]\alpha, \beta[$, такое, что $f'(x_0)>>0$ (!).

2.211. Сформулировать и доказать критерий строгого убывания дифференцируемой функции.

2.212. Для возрастания дифференцируемой на I функции f необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geqslant 0\ \forall x\in I$ (!). Для убывания дифференцируемой на I функции f необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\leqslant 0\ \forall x\in I$ (!).

2.213. Используя теорему о сохранении знака (см. 1.411), можно доказать, что если f' непрерывна в точке c и $f'(c)>0$, то существует окрестность точки c, в которой f возрастает (!).

2.214. Пусть $f'(c)>0$. Пользуясь определением производной в точке c, можно показать, что $f(x)<f(c)$ для $x<c$ и $f(x)>f(c)$ для $x>c$ в некоторой окрестности точки c (!). Означает ли это, что f возрастает в этой окрестности?

2.215. Если $f'(c)>0$ и f' разрывна в точке c, то f может не быть возрастающей ни в одной окрестности точки c (!). Рассмотреть функцию f: $x\mapsto\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)==0$ в точке $c=0$.

Если существует окрестность X точки x_0, такая, что $f(x_0)$ является экстремальным значением f в X, то x_0 называют *точкой локального экстремума функции* f. Если при этом существует окрестность точки x_0, в которой нет других точек локального экстремума функции f, то x_0 называют *изолированной точкой локального экстремума* (Необходимое условие локального экстремума см. в теореме 2.114.)

2.216. Из результатов 2.210 следует *достаточное условие локального экстремума:* если в некоторой окрестности стационарной точки производная $f'(x)<0$ для $x<x_0$ и $f'(x)>0$ для $x>x_0$, то x_0 — точка локального минимума; если же $f'(x)>0$ для $x<x_0$ и $f'(x)<0$ для $x>x_0$, то x_0 — точка локального максимума (!).

2.217. Изучить функцию $f: x \mapsto 2x^2 + x^2 \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, в окрестности точки $x_0 = 0$ и убедиться, что условия **2.216** не являются необходимыми для локального экстремума.

2.218. Существуют дифференцируемые на $]\alpha, \beta[$ функции φ и ψ, такие, что выполняются три условия:

1) $\exists x_0 \in]\alpha, \beta[$, в которой $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0) = 0$;

2) $\forall x \in]\alpha, \beta[\Rightarrow \varphi'(x)\,\psi'(x) \geqslant 0$;

3) точка x_0 является точкой строгого локального максимума для φ и точкой строгого локального минимума для ψ (!).

2.219. Изучить монотонность функции f' в окрестности точки x_0, если:

1) x_0 — точка локального максимума f;

2) x_0 — точка локального минимума f. (Рассмотреть изолированные и неизолированные точки локального экстремума.)

2.220. Используя утверждение 2.213, можно получить *достаточные условия локального экстремума* в следующей форме: если функция f имеет непрерывную вторую производную в стационарной точке x_0 и $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка локального минимума; если $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимума f (!).

2.221. Считая функцию f'' непрерывной в окрестности стационарной точки x_0, можно получить этот же результат, отправляясь от формулы Тейлора и используя теорему 1.411 (!).

2.222. Результат 2.220 можно получить, требуя лишь существования $f''(x_0)$ и используя утверждение 2.214 (!).

2.223. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Привести примеры функций, для которых:

1) x_0 — точка локального максимума;

2) x_0 — точка локального минимума;

3) нет экстремума в точке x_0.

2.224. Функция f имеет в окрестности точки x_0 непрерывную производную $f^{(n+1)}$. Используя формулу Тейлора, доказать *достаточные условия локального экстремума:* пусть $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1, 2, \ldots, n$, $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, тогда:

1) если $n=2p$, то в x_0 нет экстремума;

2) если $n=2p+1$, то x_0 — точка локального максимума (при $f^{(n+1)}(x_0)<0$) и точка локального минимума (при $f^{(n+1)}(x_0)>0$).

2.225. Функция f: $x\mapsto|x|$, $x\in[-1, 1]$, имеет локальный экстремум в точке 0, но не дифференцируема в нуле (!).

2.226. Всегда ли f имеет локальный экстремум в точках недифференцируемости?

Экстремумы в точках недифференцируемости называют *острыми экстремумами.*

2.227. Исследовать функцию на экстремум в точках недифференцируемости можно по правилу 2.216 (!).

2.228.* Найти локальные экстремумы функции f:

1) $f(x)=4x-x^2$; 2) $f(x)=2x/(1+x^2)$;

3) $f(x)=\operatorname{sh} x$; 4) $f(x)=\operatorname{ch} x$;

5) $f(x)=x\ln x$; 6) $f(x)=\ln x+1/x$;

7) $f(x)=(x-1)^5$; 8) $f(x)=(x+2)^6$;

9) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 10) $f(x)=e^{-1/x^2}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

11) $f(x)=xe^{-1/x^2}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$; 12) $f(x)=\sin|x|$.

2.229.* Найти экстремальные значения функций на указанных множествах:

1) $f(x)=4x-x^2$ на $[0,5]$;

2) $f(x)=\sin|x|$ на $[-\pi/2, \pi/2]$;

3) $f(x)=x+\sqrt{x^2}$ на $[-1, 1]$;

4) $f(x)=x\ln x$ на $]0, e]$.

2.230.* Найти $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ на указанных множествах

1) $f(x)=\ln x-x$ на $]0, 10]$;

2) $f(x)=e^{-x}\sin x$ на $[0, +\infty[$.

2.7. Дифференцируемые выпуклые функции

Функцию f называют *вогнутой на* I, если функция $-f$ выпукла на I (см. § 1.8).

2.231. Если функция f вогнута на I, то $\forall x_0,x_1\in I$ ни одна из точек дуги графика $y=f(x)$ с концами $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ не лежит под хордой M_0M_1 (!).

2.232. Пусть $x_0<x_1$, $x_\tau=x_0+\tau(x_1-x_0)$, $0<\tau<1$, $k(\tau)=k(M_0M_\tau)$. Из задачи 1.529 следует, что для выпуклой функции φ функция $k:\tau\mapsto k(\tau)$ возрастает (!).

2.233. Если функция f выпукла и x_0 — внутренняя точка промежутка I, то функция k ограничена снизу (!).

2.234. Из утверждений 2.232 и 2.233 следует, что существует конечная правосторонняя производная $f'_+(x_0)$ для выпуклой функции f в любой внутренней точке $x_0 \in I$ (!).

2.235. Выпуклая на I функция f имеет конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ в любой внутренней точке $x_0 \in I$, причем $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ (!).

2.236. Аналогично для вогнутой функции f имеем $f'_-(x_0) \geqslant f'_+(x_0)$ для любой внутренней точки $x_0 \in I$ (!).

2.237. Если функция f дифференцируема во внутренней точке x_0 промежутка I и выпукла на I, то ни одна точка графика $y=f(x)$ не лежит ниже касательной к графику в точке $M_0(x, f(x_0))$ (!).

2.238. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению 2.237, для функции, вогнутой на I.

2.239. Используя неравенство 1.529, можно получить следующее утверждение: если функция f дифференцируема на I и выпукла, то f' возрастает на I (!).

2.240. Пусть $x_0 < x_\tau < x_1$ — точки из I. Из теоремы Лагранжа следует:

$$f(x_\tau) - f(x_0) = f'(c_0)\,\tau\,(x_1 - x_0);$$

$$f(x_1) - f(x_\tau) = f'(c_1)\,(1-\tau)\,(x_1 - x_0),$$

где $c_0 \in]x_0, x_\tau[$; $c_1 \in]x_\tau, x_1[$ (!).

2.241. Отсюда получаем: если функция f дифференцируема на I и f' возрастает, то $f(x_\tau) \leqslant f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0))$, т. е. f выпукла (!).

2.242. Таким образом, утверждения 2.239 и 2.241 дают *критерий выпуклости дифференцируемой функции:*

1) для выпуклости дифференцируемой на I функции f необходимо и достаточно, чтобы f' была возрастающей (!);

2) для вогнутости дифференцируемой на I функции f необходимо и достаточно, чтобы f' была убывающей (!).

2.243. Вогнутую функцию называют также *выпуклой вверх*, а выпуклую — *выпуклой вниз*. Показать, что задача о направлении выпуклости дифференцируемой функции f равносильна задаче о монотонности ее производной f'.

2.244. Из результатов 2.212 и 2.243 получаем критерий: пусть функция f дважды дифференцируема на I, тогда:

1) для выпуклости f на I необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in I$ (!);

2) для вогнутости f на I необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leqslant 0$ $\forall x \in I$ (!).

2.245.* Выделить промежутки выпуклости и вогнутости функций, заданных формулами:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \sin^2 x$; 3) $f(x) = (x-1)^3$;

4) $f(x) = e^{-x^2}$; 5) $f(x) = x^{2/3}$.

2.246.* При каком α функция $f: x \mapsto x^4 + \alpha x^3 + 3x^2/2 + 1$ выпукла на $\mathbf{R}$?

2.247. Всякий многочлен четной степени с положительными коэффициентами является выпуклой на $\mathbf{R}$ функцией (!).

2.248. Пусть $f: x \mapsto \ln x$, $x \in]0, +\infty[$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}_0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

1. f вогнута на $]0, +\infty[$ (!).
2. Применив к f результат 1.530, показать, что

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_0.$$

2.249. Как частный случай получаем *неравенство Юнга*:

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_0, \quad \forall p, q \in]0, +\infty[,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (!)}.$$

2.250. Из неравенства 2.248.2 получить неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad \forall x_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

(Это неравенство называют *неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.*)

Точка $(c, f(c))$ графика функции f называется *точкой перегиба*, если существует окрестность $]\alpha, \beta[$ точки c, такая, что на одном из интервалов $]\alpha, c[$, $]c, \beta[$ функция f выпукла, а на другом — вогнута.

2.251. Пусть функция f дифференцируема на I, $M(c, f(c))$ — точка перегиба графика функции f. Тогда по одну сторону от точки M график лежит над касательной, проведенной в точке M, а по другую — под касательной (!).

2.252. График функции $f: x \mapsto 2x^3 + x^3 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, слева и справа от точки $(0, 0)$ лежит по разные стороны от касательной, проведенной в этой точке, однако $(0, 0)$ не является точкой перегиба (!). (Сравнить с 2.251.)

2.253. Точка $(c, f(c))$ является точкой перегиба дифференцируемой функции f тогда и только тогда, когда f' имеет локальный экстремум в точке c (!). Это позволяет использовать для исследования на перегиб дифференцируемой функции f результаты § 2.6, применяя их к f'.

2.254. Отсюда следует, что если $(c, f(c))$ — точка перегиба графика дважды дифференцируемой функции f, то $f''(c)=0$ (!).

2.255. Функция $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ не имеет производной в точке 0, но (0, 0) является точкой перегиба графика f (!).

2.256. Справедливо ли утверждение: если $(c, f(c))$ — точка перегиба графика f, то либо $f''(c)=0$, либо f' не существует в точке c? (Рассмотреть функцию f: $x \mapsto x^{5/3}$ в окрестности точки 0.)

2.257. Если $(c, f(c))$ — точка перегиба графика функции f, то либо $f''(c)=0$, либо $f''(c)$ не существует (!).

2.258. Функции f: $x \mapsto x^4$, g: $x \mapsto |x|^{3/2}$ удовлетворяют одному из условий 2.257 в точке 0, но их графики не имеют перегиба в (0, 0) (!).

2.259. Пусть функция f имеет непрерывную вторую производную всюду на $]a, b[$, за исключением разве лишь точки c. Для того чтобы $(c, f(c))$ была точкой перегиба графика f, необходимо и достаточно, чтобы f'' меняла знак при переходе через точку c (!).

2.260. Функция $f \in C^3_{]a,b[}$ и $c \in]a, b[$. Если $f''(c)=0$, $f'''(c) \neq 0$, то $(c, f(c))$ — точка перегиба графика функции f (!).

2.261. Можно потребовать в задаче 2.260 лишь существования $f'''(c)$ вместо $f \in C^3_{]a,b[}$ и проводить доказательство, опираясь на результат 2.214 (!).

2.262. Пусть $f \in C^n_{]a,b[}$, $c \in]a, b[$ и $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$. Используя задачи 2.253 и 2.224, можно доказать, что:

1) если $n=2k+1$, то в точке $(c, f(c))$ перегиб (!);

2) если $n=2k$, то в точке $(c, f(c))$ перегиба нет (!).

2.263. Всякий многочлен нечетной степени $n \geqslant 3$ имеет хотя бы одну точку перегиба (!).

2.264. Непостоянная дифференцируемая на I функция f имеет локальный экстремум в точках $a, b \in I$. Тогда $\exists c \in]a, b[$, такое, что $(c, f(c))$—точка перегиба графика функции f (!).

2.265.* Справедливо ли утверждение 2.264, если заменить дифференцируемость непрерывностью?

2.266. Если a и b — точки локального максимума дифференцируемой функции f, то $\exists c_1, c_2 \in]a, b[$, такие, что $(c_1, f(c_1))$ и $(c_2, f(c_2))$ — точки перегиба графика функции f (!).

2.8. Асимптоты

Прямую $x=a$ называют *левосторонней вертикальной асимптотой* графика функции f, если $f(a-0)=\infty$. Если $f(a+0)=\infty$, то прямая $x=a$ — *правосторонняя вертикальная асимптота*. Если оба предела $f(a-0)$ и $f(a+0)$ бесконечны, то прямая $x=a$ — *двухсторонняя вертикальная асимптота*.

Прямую $y=kx+b$ называют *наклонной асимптотой* графика функции f при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$. Аналогично определяют наклонную асимптоту при $x\to-\infty$.

2.267. Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}$, ее график может иметь только наклонные асимптоты (!).

2.268. Если график функции f имеет наклонную асимптоту $y=kx+b, k\neq 0$, при $x\to+\infty$, то $f(x)\to\infty$ при $x\to+\infty$ (!).

2.269. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, $l\neq\infty$, то $k=0$, $b=l$ (!). В этом случае прямую $y=l$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции f при $x\to+\infty$.

2.270. Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика f при $x\to+\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$ (!).

2.271. Коэффициенты наклонной асимптоты графика f при $x\to-\infty$ могут быть вычислены по формулам:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)\ (!).$$

2.272.* Найти асимптоты графиков функций:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$; 3) $f(x)=xe^{1/x}$;

4) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$; 5) $f(x)=2x+\operatorname{arctg} x$;

6) $f(x)=2x\operatorname{arctg} x$.

2.273. Построить схемы графиков функций 2.272, последовательно изучив: область определения; множество значений; непрерывность; точки разрыва; асимптоты; монотонность; локальные экстремумы; выпуклость; перегибы.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл

Нахождение функции по ее производной является одной из важнейших задач математического анализа. Функция F называется *первообразной* для функции f на промежутке I, если $F'(x)=f(x)$ $\forall x \in I$.

3.1. Функция F является первообразной для f на I тогда и только тогда, когда $dF(x)=f(x)\,dx$ $\forall x \in I$ (!).

3.2. Если F — первообразная для f на I и $C \in \mathbf{R}$ — постоянная, то функция $F_1=F+C$ также является первообразной для f на I (!).

3.3. Если F_1 и F_2 — две первообразные для f на I, то $F_1(x)-F_2(x)=C$ $\forall x \in I$, где $C \in \mathbf{R}$ — постоянная (!).

Таким образом, совокупность всех первообразных для f на I задается формулой $F(x)+C$, где F — одна из первообразных для f, C — произвольная постоянная. Эту совокупность называют *неопределенным интегралом* от функции f на промежутке I и обозначают $\int f(x)dx$.

3.4. Для каждой первообразной $F(x)+C$ выполняется соотношение $d(F(x)+C)=f(x)\,dx$ (!). Условно это записывают так: $d(\int f(x)\,dx)=f(x)\,dx$.

3.5. $\int dF(x)=F(x)+C$ (!).

3.6. Пусть $a \neq 0$ — постоянная. Если функция f имеет первообразную на I, то $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$ (!).

3.7. Если функции f и g имеют первообразные на I, то

$$\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx \text{ (!)}.$$

Свойства 3.6 и 3.7 называют *линейностью неопределенного интеграла*. Отметим, что при выборе первообразных в обеих частях формул 3.6 и 3.7 произвольные постоянные должны быть согласованы. Это же мы будем предполагать и в дальнейшем во всех формулах, содержащих интегралы.

3.8. Доказать, используя формулы 2.35:

$\int 0 \cdot dx = C;$ $\qquad\qquad$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$, $\mu \neq -1$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$;

$\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

3.9.* Преобразовывая подынтегральную функцию, ее можно представить в виде, позволяющем использовать для вычисления интеграла формулы 3.8 и свойства 3.6, 3.7. Вычислить:

1) $\int (x+1)^2 x dx$; 2) $\int (\sqrt{x}+2)^2 dx$;

3) $\int \frac{x+\sin^2 x}{x \sin^2 x} dx$; 4) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

5) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$;

7) $\int (e^x + e^{2x})^2 dx$; 8) $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} 2x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 10) $\int \frac{2^x+3^x}{6^x} dx$.

3.10. Доказать:

1) $\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)} + C$;

2) $\int \sin u(x) u'(x) dx = -\cos u(x) + C$.

Во всех примерах 3.10 подынтегральное выражение представимо в виде $g(u(x)) u'(x) dx = g(u) du$.

3.11. Пусть u: $I \to U$ — дифференцируемая функция, такая, что функция f представима в виде $f(x) = g(u(x)) u'(x)$. Если g имеет на U первообразную G, то f имеет на I первообразную, причем $\int f(x) dx = \int g(u(x)) u'(x) dx = G(u(x)) + C$ (!).

3.12. Если f имеет первообразную F, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ (!).

3.13.* Вычислить неопределенные интегралы (параметры положительны):

1) $\int \frac{dx}{x+1}$; 2) $\int (x+2)^5 dx$; 3) $\int x(1+x)^5 dx$;

4) $\int \frac{x}{(1+x)^{100}}dx$; 5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

7) $\int \sin(2x+3)\,dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

10) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$; 11) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 12) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

13) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 14) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; 15) $\int \operatorname{tg} x dx$;

16) $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$; 17) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; 18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

19) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; 20) $\int \sin^3 x dx$; 21) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.14. Пусть $\varphi\colon t \mapsto \varphi(t)$ — дифференцируемая на промежутке T функция со значениями, заполняющими промежуток I, и $\varphi'(t) \neq 0$. Тогда существует обратная функция $\psi\colon I \to T$. Если $f(x)\,dx = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = g(t)\,dt$ и функция g имеет на T первообразную G, то f имеет на I первообразную, причем $\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(\psi(x)) + C$ (!).

Прием, рассмотренный в задачах 3.11 и 3.14, называют *заменой переменной* или *подстановкой*. Он позволяет заменить нахождение первообразной для данной функции нахождением первообразной для некоторой другой функции. Удачно выбранная подстановка упрощает вычисление первообразной.

3.15.* Вычислить неопределенные интегралы, используя подстановки $x=a\sin t$, $x=a\operatorname{sh} t$ и т. п. $(a>0)$:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 2) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 3) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$;

4) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

3.16.* Выделив в многочлене ax^2+bx+c полный квадрат, вычислить:

1) $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$; 2) $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$;

5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$; 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$;

7) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$; 8) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$.

3.17. Функции u и v дифференцируемы на I, и $u'v$ имеет на I первообразную. Тогда uv' также имеет на I первообразную, причем

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx\ (!).$$

Формулу 3.17 называют *формулой интегрирования по частям*. Коротко ее записывают в виде $\int udv = uv - \int vdu$.

3.18. Если u и v имеют на I производные порядка $n+1$ и $u^{(n+1)}v$ имеет на I первообразную, то $uv^{(n+1)}$ также имеет на I первообразную, причем

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}\,vdx\ (!).$$

3.19.* Применив интегрирование по частям, вычислить:

1) $\int xe^x dx$; 2) $\int (x^2+x)\cos x dx$; 3) $\int \ln x dx$;

4) $\int \operatorname{arctg} x dx$; 5) $\int \arcsin x dx$; 6) $\int x^2 \operatorname{ch} x dx$;

7) $\int e^{ax}\cos bx dx$; 8) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

Класс элементарных функций не замкнут относительно операции вычисления первообразной. Примерами элементарных функций, не имеющих элементарных первообразных, служат: $f\colon x \mapsto e^{x^2}$; $f\colon x \mapsto \frac{\sin x}{x}$; $f\colon x \mapsto \frac{1}{\ln x}$; $f\colon x \mapsto \sin x^2$; $f\colon x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$; $f\colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $k \in]0, 1[$, и др. П. Л. Чебышев доказал, что функция $f\colon x \mapsto x^m(a+bx^n)^p$, $m,n,p \in \mathbf{Q}$, имеет элементарную первообразную только в трех случаях: если $p \in \mathbf{Z}$; если $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$ (см. 3.44—3.46). Ниже будут выделены другие классы функций, имеющих элементарные первообразные.

3.20. Пусть $H_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

1\. $H_n(t) = H_{n-1}(t) - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}$ (!).

2\. Полагая $u = \frac{t}{2}$, $dv = \frac{2t dt}{(1+t^2)^n}$, получаем

$$H_n(t) = \frac{1}{2n-2} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} H_{n-1}(t) \text{ (!)}.$$

3.21. Пусть $K_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда

$$K_n(x) = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \frac{1}{a^2} K_{n-1}(x) \text{ (!)}.$$

3.22. Функция K_n является элементарной $\forall n \in \mathbf{N}$ (!).

3.23. Функция $x \mapsto \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $p^2 - 4q < 0$, имеет элементарную первообразную $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall M, N \in \mathbf{R}$ (!).

3.24. При $\forall A \in \mathbf{R}$ и $\forall n \in \mathbf{N}$ функция $x \mapsto \frac{A}{(x+a)^n}$ имеет элементарную первообразную (!).

3.25. Используя результаты 1.615, 1.625, 3.23, 3.24, показать, что любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

3.26.* Используя результаты 1.625 и 1.627, вычислить:

1\) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}$;

3\) $\int \frac{(5x+1)\,dx}{x^3-1}$; 4) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx$.

3.27. Какие функции могут быть получены при интегрировании рациональной функции P/Q?

3.28. Тот же вопрос для случая, когда Q имеет корни: 1) только действительные; 2) только комплексные.

3.29. Если замена переменной с помощью элементарной функции φ превращает интеграл $\int f(x)\,dx$ в интеграл от рациональной функции (*рационализирует подынтегральное выражение*), то f имеет элементарную первообразную (!).

3.30. Если первообразная функции φ рациональная, то $\varphi(x)\operatorname{arctg} x$, $\varphi(x)\operatorname{arcctg} x$, $\varphi(x)\arcsin x$, $\varphi(x)\arccos x$, $\varphi(x)\ln x$ также имеют элементарные первообразные (!).

3.31. Если P — многочлен, то $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin x$, $P(x)\cos x$ имеют элементарные первообразные (!).

3.32. Первообразной квазиполинома является квазиполином (!).

3.33. Пусть P — полином степени n и $Q(x)e^{ax}$ — первообразная для $P(x)e^{ax}$. Если $a\neq 0$, то степень полинома Q равна n; если $a=0$, то степень Q равна $n+1$ (!).

3.34. Если P — полином, то $P(\ln x)$ имеет элементарную первообразную (!).

3.35. Если R—рациональная функция, то $R(e^x)$, $R(\cos x)$, $R(\sin x)$, $R(\operatorname{tg} x)$ имеют элементарные первообразные (!).

3.36. Если φ имеет рациональную первообразную, а ψ — рациональную производную, то $\psi\varphi$ имеет элементарную первообразную (!).

3.37. Пусть R—рациональная функция двух переменных. Используя утверждение 1.631, можно показать, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx = R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ (!).

3.38.* Вычислить:

1) $\int \frac{(1-x)\,dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; 4) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

3.39. Пусть R—рациональная функция двух переменных; a, $b\in\mathbf{R}$, $a/b\in\mathbf{Q}$. Тогда $R(e^{ax}, e^{bx})$ имеет элементарную первообразную (!).

3.40. Если область определения функции $x\mapsto\sqrt{ax^2+bx+c}$ не пуста, то либо $a>0$ и $c>0$, либо $b^2-4ac\geqslant(0)$ (!).

3.41. Пусть $f(x)=R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, R — рациональная.

1. Если $b^2-4ac>0$, то $f(x)\,dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$, где x_1 — один из корней многочлена ax^2+bx+c (!).

2. Если $b^2-4ac<0$, то $f(x)\,dx$ рационализируется одной из следующих подстановок:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}\pm t;\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}\pm xt \text{ (!)}.$$

3.42. Подстановки 3.41 называют *подстановками Эйлера*. Из результатов 3.40 и 3.41 следует, что $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ (R — рациональная функция) имеет элементарную первообразную (!).

3.43.* Вычислить:

1) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

3.44. Пусть $f(x) = x^m(a+bx^n)^p$, m, n, $p \in \mathbf{Q}$. Если $p \in \mathbf{Z}$, то $f(x)\,dx$ рационализируется подстановкой $x = t^s$, где s — наименьшее общее кратное знаменателей n и m (!).

3.45. Если в задаче 3.44 $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, то $f(x)\,dx$ рационализируется подстановкой $a + bx^n = t^l$, где l—знаменатель p (!).

3.46. Если в задаче 3.44 $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, то $f(x)\,dx$ рационализируется подстановкой $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^l$, где l—знаменатель p (!).

3.47.* Вычислить:

1) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

3.48. Пусть R—рациональная функция двух переменных. Показать, что $R(\cos x, \sin x)\,dx$ рационализируется подстановкой $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

3.49. Если $R(-u, v) = -R(u, v)$, то $R(\cos x, \sin x)\,dx$ рационализируется подстановкой $\sin x = t$ (!).

3.50. Если $R(u, -v) = -R(u, v)$, то $R(\cos x, \sin x)\,dx$ рационализируется, подстановкой $\cos x = t$ (!).

3.51. Если $R(-u, -v) = R(u, v)$, то $R(\cos x, \sin x)\,dx$ рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ (!).

3.52.* Вычислить:

1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x + \cos x \sin x}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$.

3.2. Определенный интеграл

Множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называют *разбиением* $\{x_k\}$ *отрезка* $[a, b]$, если $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Число $\delta = \max \Delta x_k$ называют *диаметром разбиения* $\{x_k\}$.

3.53. Если $\delta \to 0$, то число точек разбиения $\{x_k\}$ стремится к бесконечности (!).

3.54. Верно ли утверждение, обратное утверждению 3.53?

3.55.* Пусть $[a, b] = [0, 1]$. Установить, в каком случае диаметр разбиения $\{x_k\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$:

1) $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; 2) $x_k = \dfrac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$;

3) $x_k = \dfrac{1}{(n-k)^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_0 = 0$.

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, $\{x_k\}$ — разбиение $[a, b]$ с диаметром δ. Для $\forall\, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, можно построить сумму $\sigma_f = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$, называемую *интегральной суммой для f на $[a, b]$*.

3.56. Пусть $\{x_k\}$ — разбиение $[a, b]$, f и g — функции, заданные на $[a, b]$.

1. При любом выборе ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, выполняется соотношение $\sigma_{f+g} = \sigma_f + \sigma_g$ (!).
2. Для любого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $\sigma_{\alpha f} = \alpha \sigma_f$ (!).
3. Если $f(x) \geqslant 0$ $\forall\, x \in [a, b]$, то $\sigma_f \geqslant 0$ (!).
4. Если $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall\, x \in [a, b]$, то $\sigma_f \geqslant \sigma_g$ (!).
5. Если $f(x) > 0$ $\forall\, x \in [a, b]$, то $\sigma_f > 0$ (!).
6. Если f непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ и $\exists\, c \in [a, b]$, такое, что $f(c) > 0$, то $\exists\, \{x_k\}$, для которого $\sigma_f > 0$ при любом выборе точек ξ_k (!).

3.57. Пусть $f(x) = D(x)$, $x \in [0, 1]$ (см. 1.238). При любом разбиении $\{x_k\}$ отрезка $[0, 1]$ можно выбрать ξ_k так, что:

1) $\sigma_f = 0$; 2) $\sigma_f = 1$ (!).

Пусть σ—интегральная сумма для f на $[a, b]$, соответствующая разбиению с диаметром δ. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\delta \to 0} \sigma$, то говорят, что f *интегрируема на* $[a, b]$.

Точнее, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_\varepsilon$, такое, что $\forall\, \{x_k\}$ с диаметром $\delta \leqslant \delta$ при любом выборе точек ξ_k выполняется неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| \leqslant \varepsilon$, то f интегрируема на $[a, b]$. Число I называют *интегралом от a до b от $f(x)$* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

3.58. Функция Дирихле (см. 3.57) не интегрируема на $[0, 1]$ (!).

3.59. Функция Хевисайда $x \mapsto 1(x)$ интегрируема на отрезке $[-1, 1]$ и $\int\limits_{-1}^{1} 1(x)\,dx = 1$ (!).

3.60. Из утверждения 3.56 следует, что если функция f интегрируема на $[a, b]$ и α—постоянная, то αf интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (!).

3.61.* Пусть $\{x_k\}$ — разбиение $[a, b]$ и $\bar{\xi}_k$, $\underline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$, такие, что $f(\bar{\xi}_k) = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $f(\underline{\xi}_k) = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $\underline{\sigma} = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)\,\Delta x_k$, $\bar{\sigma} = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\,\Delta x_k$. Функция f интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда конечны и равны пределы $\lim\limits_{\delta\to 0} \underline{\sigma}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \bar{\sigma}$ (!).

3.62.* Функция f интегрируема на $[a, b]$, $\delta_n = o(1)$, $(\{x_k\}_n)$—некоторая последовательность разбиений $[a, b]$ с диаметрами δ_n и (σ_n) — соответствующая последовательность интегральных сумм для f при некотором выборе точек ξ_{nk}. Если $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$ (!).

3.63. Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, а $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Используя результаты 3.62 и 3.56, доказать следующие свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (линейность);

2) если $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (монотонность).

3.64. Функции f и g определены на $[a, b]$ и различаются только своими значениями в точке $c \in [a, b]$. Если f интегрируема на $[a, b]$, то g также интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (!). (Можно использовать задачу 3.62.)

3.65. Если функция f не ограничена на $[a, b]$, то $\forall \delta > 0$

и $\forall A\ \exists \{x_k\}$ с диаметром δ, такое, что соответствующая интегральная сумма σ при некотором выборе точек ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяет неравенству $|\sigma|>A$ (!).

3.66. Из утверждения 3.65 получаем необходимое условие интегрируемости: если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$ (!).

3.67. Привести пример ограниченной неинтегрируемой функции.

3.68. Если функция f ограничена на $[a, b]$, то $\exists M \in \mathbf{R}$, такое, что любая интегральная сумма σ функции на $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|\sigma| \leqslant M$ (!).

3.69. Известно, что $|f(x)| \leqslant A\ \forall x \in [a, b]$. Указать какое-либо M (см. 3. 68).

3.70. Пусть σ и τ — две интегральные (произвольные) суммы для f на $[a, b]$, соответствующие разбиениям с диаметрами δ и d.

1. Если f интегрируема на $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что если $\max\{\delta, d\} \leqslant \delta_\varepsilon$, то $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$ (!).

2. Пусть, кроме того, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что если δ и d не превосходят δ_ε, то $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$. Тогда f ограничена на $[a, b]$ (!).

3.71. Пусть функция f ограничена на $[a, b]$. Используя результат 3.68 и принцип выбора, можно утверждать, что существует последовательность разбиений с диаметрами $\delta_m \to 0$, такая, что соответствующая последовательность интегральных сумм (σ_m) (при некотором выборе точек ξ_{mk}) сходится (!).

3.72. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что если $\max\{d, \delta\} \leqslant \delta_\varepsilon$, то $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$ (см. 3.70).

1. Для функции f выполняется утверждение (3.71) (!). Обозначим $I = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$.

2. Функция f интегрируема на $[a, b]$, причем $\int\limits_a^q f(x)dx = I$ (!).

3.73. Утверждения 3.70 и 3.72 дают *критерий Коши интегрируемости функции:* для интегрируемости f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что для любых двух разбиений с диаметрами, не превосходящими δ_ε, соответствующие интегральные суммы σ и τ удовлетворяли неравенству $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.74. Пусть $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $\{z_r\}$, $r = 1, 2, \ldots, s$, — два разбиения отрезка $[a, b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta z_r = z_r - z_{r-1}$, Δ_{kr} — длина отрезка $[x_{k-1}, x_k] \cap [z_{r-1}, z_r]$. Тогда

1) $\sum_{r=1}^{s} \Delta_{kr} = \Delta x_k$ (!); 2) $\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kr} = \Delta z_r$ (!);

3) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} \Delta_{kr} = b - a$ (!).

3.75. Если σ и τ—интегральные суммы, соответствующие разбиениям $\{x_k\}$ и $\{z_r\}$ при некотором выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и $\gamma_r \in [z_{r-1}, z_r]$, то

$$\sigma - \tau = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} (f(\xi_k) - f(\gamma_r)) \Delta_{kr} \text{ (!)}.$$

3.76. Пусть δ и d — диаметры разбиений $\{x_k\}$ и $\{z_r\}$ соответственно. Если $|\xi_k - \gamma_r| > d + \delta$ (см. 3.75), то $\Delta_{kr} = 0$ (!).

3.77. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Используя критерий Коши 3.73 и применяя к равенству 3.75 теорему Кантора (см. 1.564), можно доказать, что f интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.78. Непрерывная на X функция интегрируема на любом $[a, b] \subset X$ (!).

3.79.* Используя утверждение 3.62 и разбиение 3.55.1, вычислить $\int_0^1 x dx$.

3.80.* Вычислить:

1) $\int_0^1 e^x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$;

3) $\int_0^1 (2e^x + x - 2)\, dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} (\sin x - 1)\, dx$.

3.81. Функция f интегрируема на $[a, b]$, и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a)$ (!).

3.82. Используя теорему о промежуточном значении (см. 1.544), получить из 3.81 следующее утверждение: если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $\exists c \in [a, b]$, такое, что $\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$. (Это утверждение называют *теоремой о среднем.*)

3.83. Проверить справедливость теоремы о среднем для $\int\limits_0^1 x dx$.

3.84. Функция $1(x)$ интегрируема на $[-1, 1]$, но $\int\limits_{-1}^{1} 1(x)dx \neq \neq 1(c) \cdot 2$ ни для какого $c \in [-1, 1]$ (!).

3.3. Критерий Дарбу интегрируемости

Пусть f: $[a, b] \mapsto \mathbf{R}$, $\{x_k\}$ — разбиение $[a, b]$, ω_k — колебание f на $[x_{k-1}, x_k]$ (см. с. 54). Величину $\Omega_f = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ называют *интегральным колебанием функции f на $[a, b]$, соответствующим разбиению $\{x_k\}$*.

3.85. Если Ω_f — конечная величина, то $\Omega_{|f|} \leqslant \Omega_f$ (!).

3.86. Пусть $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Всякое разбиение $[a, b]$ порождает разбиение $[\alpha, \beta]$. При этом Ω_f на $[\alpha, \beta]$ не превосходит Ω_f на $[a, b]$ (!).

3.87. Если функция f монотонна на $[a, b]$ и δ — диаметр разбиения отрезка $[a, b]$, то $\Omega_f \leqslant \delta |f(a) - f(b)|$ (!).

3.88. Функция f непрерывна на $[a, b]$. Используя теорему Кантора, показать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall \{x_k\}$ с диаметром $\delta \leqslant \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $\Omega_f \leqslant \varepsilon$.

3.89. В критерии Коши интегрируемости f на $[a, b]$ (см. 3.73) положим $\{z_r\} = \{x_k\}$. Получим *необходимое условие Дарбу интегрируемости:* если f интегрируема на $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall \{x_k\}$ с диаметром $\delta \leqslant \delta_\varepsilon$ интегральное колебание $\Omega_f \leqslant \varepsilon$ (!).

3.90. Пусть $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $\{z_r\}$, $r = 1, 2, \ldots, s$, — два разбиения $[a, b]$, ξ_k и γ_r—промежуточные точки, δ и d — диаметры разбиений, σ и τ — соответствующие интегральные суммы, Ω и Π—соответствующие интегральные колебания f на $[a, b]$. В сумме

$$\sum = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{s} (f(\xi_k) - f(\gamma_r)) \Delta_{kr}$$

выделим часть Σ_1, содержащую все слагаемые, для которых $[x_{k-1}, x_k] \subset [z_{r-1}, z_r]$. Доказать оценку $|\Sigma_1| \leqslant \Pi$.

3.91. Пусть $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$ (см. 3.90). Число ненулевых слагаемых в Σ_2 не превосходит s (!).

3.92. Если $|f(x)| \leqslant M \ \forall x \in [a, b]$, то $|\Sigma_2| \leqslant 2Ms\delta$ (!).

3.93. Итак, из результатов 3.75, 3.90 и 3.92 следует, что $|\sigma-\tau| \leqslant \Pi + 2Ms\delta$ (!).

3.94. Отсюда следует, что для любых двух интегральных сумм σ' и σ'', соответствующих разбиениям с диаметрами, не превосходящими δ, справедливо неравенство $|\sigma'-\sigma''| \leqslant 2(\Pi+2Ms\delta)$ (!).

3.95. Используя критерий Коши 3.73 и неравенство 3.94, получить *достаточное условие Дарбу интегрируемости:* если $\forall \varepsilon>0\ \exists \{z_r\}$, такое, что соответствующее интегральное колебание $\Pi \leqslant \varepsilon$, то функция f интегрируема на $[a, b]$.

3.96. Сравнить результаты 3.95 и 3.89.

3.97. Если $\forall \varepsilon>0\ \exists \{z_r\}$, такое, что $\Pi \leqslant \varepsilon$, то интегральное колебание не превосходит ε для любого разбиения с достаточно малым диаметром (!).

3.98. Функция f интегрируема на $[a, b]$. Из утверждения 3.86 следует, что f интегрируема на $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ (!).

3.99. Используя условие Дарбу, показать, что функция $x \mapsto 1(x)$ интегрируема на $[-1, 1]$.

3.100. Пусть функция f ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на $\forall [\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Используя критерий 3.95, можно показать, что f интегрируема на $[a, b]$.

3.101.* Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то f интегрируема на $[a, b]$ (!).

3 102.* Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $c \in [a, b]$. Тогда $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (!). (Это свойство называют *аддитивностью определенного интеграла.)*

3.103. Распространить свойство аддитивности на случай произвольного расположения точек a, b, c, считая функцию f интегрируемой на наибольшем из отрезков с концами a, b, c.

3.104. Пусть $[a, b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k]$ и функция f интегрируема на каждом $[\alpha_k, \beta_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.105.* Если функция f ограничена на $[a, b]$ и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.106. Функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$ и $\exists x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$. Используя результаты 1.411, 3.63 и 3.102, показать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$ (!).

3.107. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx>0$ $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ (!).

3.108. Если функции f и g непрерывны на $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ и $\exists x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) < g(x_0)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (!).

3.109. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Для того чтобы $\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$ (!).

3.110.* Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$ (!);

2) $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, такой, что $\inf\limits_{[\alpha, \beta]} f(x) > 0$ (!).

3.111. Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) < g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (!).

3.112.* Функция f интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$. Для того чтобы $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, такой, что $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ (!).

3.113. Из утверждения 3.85 следует, что если f интегрируема на $[a, b]$, то $|f|$ также интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.114.* Для интегрируемой на $[a, b]$ функции f доказать неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

3.115. Отсюда следует, что если функция f интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$, то $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ (!).

Говорят, что функция f *эквивалентна на* $[a, b]$ функции g, если $\int\limits_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\, dx = 0 \quad \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

3.116. Определенное выше свойство эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно (!).

3.117. Если функции f и g эквивалентны и непрерывны на $[a, b]$, то $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (!).

3.118. Если функция f интегрируема на $[a, b]$, а g ограничена на $[a, b]$ и совпадает с f всюду на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, то f и g эквивалентны на $[a, b]$ (!).

3.119.* Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1/2^n, & x \in]1/2^n, 1/2^{n-1}], \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Используя свойство аддитивности, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$.

3.120. Из утверждений 3.87 и 3.95 следует, что монотонная на $[a, b]$ функция интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.121. Отсюда следует интегрируемость на $[0, 1]$ функции 3.119 (!).

3.122. Пусть $[a, b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k]$, функция f ограничена на $[a, b]$ и монотонна на каждом $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.123. Функция f ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на каждом $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, $n=0, 1, \ldots$, $\alpha_0 = a$, $\alpha_n \to b$ при $n \to \infty$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f(x)\, dx$ (!).

3.124.* Пусть $\alpha_n \in [a, b]$, $n=0, 1, \ldots$, $\alpha_0 = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = b$.

1. Существует функция f, интегрируемая на каждом $]\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots$, и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{\alpha_n} f(x)\, dx = \infty$ (!).

2. Существует функция f, интегрируемая на каждом $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots$, и такая, что последовательность $\left(\int\limits_a^{\alpha_n} f(x)\, dx\right)$ ограничена, но не сходится (!).

3.125. Функции f и g определены на $[a, b]$, $h=fg$, ω_f, ω_g и ω_h—их колебания на $[a, b]$. Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]}|f(x)|$, $N=\sup\limits_{[a,b]}|g(x)|$.

1. Показать, что $\omega_h \leqslant M\omega_g + N\omega_f$.

2. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение h также интегрируемо на $[a, b]$ (!).

3.126.* Функция f интегрируема на $[a, b]$, и $|f(x)| \geqslant \alpha > 0$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда $\varphi: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.127. Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $g(x) \geqslant \alpha > 0$ $\forall x \in [a, b]$, то $h: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ интегрируема на $[a, b]$ (!).

3.4. Вычисление определенного интеграла

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Определим функцию $F: x \mapsto F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ $\forall x \in [a, b]$.

3.128. $F(a)=0$ (!).

3.129. Если функция f неотрицательна на $[a, b]$, то F возрастает (!).

3.130. Если функция f положительна на $[a, b]$, то F строго возрастает (!).

3.131. Функция F непрерывна на $[a, b]$ (!).

3.132.* Применяя к ΔF теорему о среднем, доказать *теорему Барроу:* если функция f непрерывна на $[a, b]$, то F дифференцируема на $[a, b]$, причем $F'(x)=f(x)$ (!).

3.133. Это означает, что любая непрерывная на $[a, b]$ функция имеет первообразную на $[a, b]$ (!).

3.134.* Если функция F' существует, то она ограничена (!).

3.135. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$—точка, в окрестности которой f не имеет точек разрыва, за исключением разве самой точки x_0. Если f имеет в x_0 односторонние пределы, то F имеет в x_0 односторонние производные, причем $F'_+(x_0) = f(x_0+0)$, $F'_-(x_0) = f(x_0-0)$ (!).

3.136. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $x_0 \in]a, b[$.

1. Если x_0 — точка устранимого разрыва функции f, то существует $F'(x_0)$ (!).

2. Если x_0 — точка конечного скачка функции f, то существуют $F'_+(x_0)$ и $F'_-(x_0)$, причем различные (!).

3. Если $f(t) = \sin \dfrac{1}{t - x_0}$, $f(x_0) = 0$, то F не имеет в точке x_0 односторонних производных (!).

3.137.* Вычислить:

1) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^{x^2} \sqrt{\sin t}\, dt\right)$; 2) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_x^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt\right)$;

3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{\sin x} e^{x^2} dx\right)$; 4) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^{x^2} e^{x^4} dx\right)$.

3.138. Доказать утверждения:

1) $\int\limits_0^x (e^x - 1)\, dx \sim \dfrac{1}{2} x^2$ при $x \to 0$;

2) $\int\limits_1^x e^x\, dx \sim e(x - 1)$ при $x \to 1$;

3) $\int\limits_0^x e^{x^2} dx \sim \sin x$ при $x \to 0$.

3.139. Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и F — одна из ее первообразных, то $\int\limits_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$ (!). (Выражение $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ называют *двойной подстановкой.*)

3.140. Утверждение 3.139 можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(t)\, dt = \left[\int f(t)\, dt\right]_a^b \text{ (!)}.$$

(Эту формулу называют *формулой Ньютона—Лейбница.*)

3.141.* Вычислить:

1) $\int\limits_0^1 x^2 dx$; 2) $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_{-1}^1 |x|\, dx$.

3.142. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\ 1]; \\ x^2, & x \in]1,\ 2]. \end{cases}$ Вычислить $\int\limits_0^2 f(x)\, dx$

двумя способами:

1) найдя первообразную для f и применив формулу 3.140;

2) использовав свойство аддитивности и применив формулу 3.140;

3.143.* Вычислить:

1) $\int\limits_{-1}^{1} 1(x)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} (1(x) + 1(-x))\,dx$.

3.144. Используя формулы 3.17 и 3.140, получить *формулу интегрирования по частям* определенного интеграла: если u и v имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x).$$

3.145. Аналогично из формул 3.18 и 3.140 получаем

$$\int\limits_a^b uv^{(n+1)}dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^n u^{(n)} v]_a^b + (-1)^{(n+1)} \int\limits_a^b u^{(n+1)} v\,dx \text{ (!)}.$$

3.146.* Вычислить:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

3.147. Пусть $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbf{N}_0$. Доказать, что $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

3.148. Отсюда $J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}$; $J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$ (!).

3.149. Пусть $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем φ имеет на $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную φ', $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Используя результаты 3.11 и 3.14, показать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \text{ (!)}.$$

(Существование одного из интегралов обеспечивает существование второго.)

Заметим, что формулу 3.149 можно использовать в обоих направлениях: вносить множитель под дифференциал и выносить из-под дифференциала.

3.150.* Вычислить:

1) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{\ln \pi}^1 e^x \cos e^x\, dx$; 3) $\int\limits_0^1 x e^{x^2} dx$.

3.151. Показать, что:

1) $\int\limits_0^1 (1 - x^2)^n dx = J_{2n+1}$ (см. 3.147);

2) $\int\limits_0^1 x^m (1 - x)^n dx = \int\limits_0^1 x^n (1 - x)^m dx$.

3.152. Пусть функция f интегрируема на $[-a, a]$. Тогда:

1) если f четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int\limits_0^a f(x)\, dx$ (!);

2) если f нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 0$ (!).

3.153.* Функция f — периодическая с периодом T, интегрируемая на $[0, T[$, и $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$. Тогда:

1) f интегрируема на $\forall\, [a, b] \subset \mathbf{R}$ (!);

2) $\int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx = \int\limits_0^T f(x)\, dx$ (!);

3) если $f(t) = \sin t$, то F — периодическая (!);

4) если $f(t) = \sin^2 t$, то F — непериодическая (!);

5) получить условие периодичности F;

6) существуют периодическая функция φ с периодом T и постоянная A, такие, что $F(x) = \varphi(x) + Ax$ (!).

3.154.* Может ли наименьший положительный период функции F быть меньше, чем наименьший положительный период функции f?

3.5. Обобщения интеграла

3.155.* Вычислить $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ в случае, если:

1) $F(x) = \int\limits_0^x \sin t\, dt$; 2) $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$; 3) $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t^2}$.

Пусть $f: [a, +\infty[\to \mathbf{R}$, причем для любого $x \in [a, +\infty[$ существует $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Предел $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ называют *несобственным интегралом от f на $[a, +\infty[$* и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$. Если этот предел конечный, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *сходится*, а функция f интегрируема на $[a, +\infty[$. В противном случае интеграл *расходится*. Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$.

3.156. Если F—первообразная для функции f на $[a, +\infty[$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a) \text{ (!)}.$$

3.157.* При каком $\alpha \in \mathbf{R}$ интегрируема на $[1, +\infty[$ функция $f: t \mapsto t^{-\alpha}$?

3.158.* Выяснить, сходятся ли следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}}$; 5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

3.159. Пусть $f(t) \geqslant 0$ $\forall t \in [a, +\infty[$. Для сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы существовало $M \in \mathbf{R}$, такое, что $\int\limits_0^x f(t)\,dt \leqslant M$ $\forall x \in [a, +\infty[$ (!).

3.160. Если функция $f(t) \geqslant 0$ и интегрируема на $[a, +\infty[$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant 0$ (!).

3.161. Пусть $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ $\forall t \in [0, +\infty[$. Тогда:

1) если $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится (!);

2) если $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$ расходится (!).

3.162.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t+1)}}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{3/2}}\,dt$.

3.163.* Верно ли утверждение: если $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$ и f интегрируема на $[a, +\infty[$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

3.164. Привести пример неограниченной на $[a, +\infty[$ интегрируемой функции.

3.165. Из утверждения 1.351 следует *критерий Коши сходимости несобственного интеграла:* для сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$, такое, что для любых A' и A'', $A' > M$, $A'' > M$, выполнялось неравенство $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.166. Отсюда, используя неравенство 3.114, получаем, что если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то:

1) f интегрируема на $[a, +\infty[$ (!);

2) $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ (!).

3.167. Если $\exists M>0$, такое, что $\forall x \in [0, +\infty] \Rightarrow \int\limits_a^{x} |f(t)|\,dt \leqslant M$, то f интегрируема на $[a, +\infty[$ (!).

3.168.* Пусть $f(x) = n$, если $x \in [n, n+1/n^3[$, $n = 1, 2, \ldots$, $f(x) = 0$ для остальных $x \geqslant 1$.

1. Функция f интегрируема на $[1, +\infty[$ (!).
2. Будет ли интегрируема функция f^2: $x \mapsto (f(x))^2$?

3.169. Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то при любом $a_1 > a$ сходится $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ (!).

3.170. Если функция f интегрируема на любом отрезке

$[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty[$ и $\exists a_1 \geqslant a$, такое, что сходится $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (!).

3.171. На $[a, +\infty[$ определены положительные функции f и g, причем $\exists\, l = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Если $0 < l < +\infty$, то f и g обе интегрируемы либо обе не интегрируемы на $[a, +\infty[$ (!).

3.172.* Как связаны интегрируемость f и интегрируемость g (см. 3.171), если:

1) $0 \leqslant l < +\infty$; 2) $0 < l \leqslant +\infty$?

3.173.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{x(e^{1/x} - 1)}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{(x^2 + 3)e^x}\,dx$;

3) $\int\limits_{a}^{+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где P и Q—многочлены степени m и n соответственно, $Q(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$.

3.174. Распространить результаты, полученные для $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t)dt$, на $\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$. Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ определяется как $\lim\limits_{\substack{x'' \to +\infty \\ x' \to -\infty}} \int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt$.

3.175.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 1}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$.

Главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ называют предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

3.176. Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится, то его значение равно его главному значению (!).

3.177.* Вычислить главные значения (если они существуют) интегралов 3.175.

3.178. Получить формулу интегрирования по частям несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = \lim_{x\to+\infty} [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^{+\infty} v\,du.$$

3.179.* Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$ в случае, когда:

1) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1-x}$; 2) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{(1-x)^2}$.

Точку c называют *особой точкой* функции f, если f не ограничена в любой окрестности точки c. Пусть b—единственная особая точка функции f и для любого $x \in [a, b[$ существует $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Предел $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ называют *несобственным интегралом от* f *на* $[a, b[$ и обозначают $\int\limits_a^b f(t)\,dt$. Если этот предел конечен, то f называют интегрируемой на $[a, b[$, а $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ — *сходящимся*.

3.180.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_a^b (x-b)^\alpha dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.181. Если F — первообразная функции f на $[a, b[$, то

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) \text{ (!)}.$$

3.182. Используя критерий 1.332, можно доказать *критерий сходимости несобственного интеграла от неограниченной функции:* пусть b — единственная особая точка функции f на $[a, b]$; для сходимости $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$, такое, что $\forall\, x', x''$, $|x'-b| \leqslant \delta$, $|x''-b| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.183. Пусть b — особая точка функции f. Из сходимости $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (!).

Если единственной особой точкой функции f на $[a, b]$ является точка a, то определяют $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to a} \int\limits_x^b f(t)\,dt$.

3.184.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x}$; 2) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$;

3) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

3.185. Пусть a — единственная особая точка f на $[a, b]$.

1. Сформулировать и доказать критерий сходимости $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

2. Доказать аналог формулы 3.181 для этого случая.

Если единственной особой точкой функции f является точка $c\in]a, b[$, то несобственный интеграл от f на $[a, b]$ определяется так:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon'\to+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon'} f(t)\,dt + \lim_{\varepsilon''\to+0} \int\limits_{c+\varepsilon''}^b f(t)\,dt.$$

3.186.* Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$.

Главным значением интеграла $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ ($c\in]a, b[$ — особая точка) называют $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(t)\,dt\right)$.

3.187. Если $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ сходится, то он равен своему главному значению (!).

3.188. Вычислить главные значения (если они существуют) интегралов 3. 186.

3.189. Построить не интегрируемую на $[a, b]$ функцию, для которой существует главное значение интеграла на $[a, b]$.

В основе понятия несобственного интеграла находится определенный интеграл (см. с. 111), введенный Б. Риманом и называемый также *интегралом Римана*. Есть и другие способы построения интеграла. Рассмотрим два из них: интеграл Стилтьеса и интеграл Лебега.

Пусть на $[a, b]$ определены ограниченные функции f и g, $\{x_k\}$—разбиение $[a, b]$ диаметра δ, ξ_k—произвольная точка из $[x_{k-1}, x_k]$, $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Сумма $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta g_k$ называется *интегральной суммой Стилтьеса для f по g*. Если существует конечный предел $S = \lim_{\delta\to 0} \sigma$, то говорят, что *$f$ интегрируема по g на $[a, b]$ в смысле Стилтьеса*. Число S называют *интегралом Стилтьеса от f по g на $[a, b]$* и обозначают $S = \int_a^b f(x)\,dg(x)$. Мы будем использовать также обозначение $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$, чтобы отличать от интеграла Римана $(R)\int_a^b f(x)\,dx$.

3.190. Если $g(x) = x$ $\forall x \in [a, b]$, то $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,dx$ (!). (Предполагается, что f интегрируема по Риману на $[a, b]$.)

3.191. Любая ограниченная функция f интегрируема по g, $g: x \mapsto c$ $\forall x \in [a, b]$ (!). Вычислить $(S)\int_a^b f(x)\,dc$.

3.192. Если функции f_1 и f_2 интегрируемы по g на $[a, b]$, α и β—постоянные, то $h = \alpha f_1 + \beta f_2$ также интегрируема по g на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dg(x) = \alpha\int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \beta\int_a^b f_2(x)\,dg(x) \quad (!).$$

3.193. Если функция f интегрируема по g_1 и g_2 на $[a, b]$, α и β—постоянные, то f интегрируема по $\alpha g_1 + \beta g_2$ на $[a, b]$, причем

$$\int_b^a f(x)\,d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)\,dg_2(x) \text{ (!)}.$$

3.194. Вычислить $(S)\int_0^\pi \sin x d(x+2)$, $(S)\int_0^\pi \sin x d2x$.

3.195. Пусть $c \in]a, b[$, функция f интегрируема по g на $[a, c]$, на $[c, b]$ и на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x) \text{ (!)}.$$

3.196. Пусть $g(x) = 1(x)$, $f(x) = 1 - 1(c-x)$.

1. Функция f интегрируема по g на каждом из отрезков $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ (!) (см. 3.191).

2. Для $\forall\delta > 0$ существуют разбиение с диаметром δ и набор точек ξ_h, для которых интегральная сумма Стилтьеса для f по g на $[-1, 1]$ равна 1 (!).

3. Функция f не интегрируема по g на $[-1, 1]$ (!). Сравнить с результатом 3.195.

3.197. Функции f и g ограничены на $[a, b]$ и $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta g_k$ — интегральная сумма Стилтьеса на $[a, b]$, соответствующая разбиению с диаметром δ.

1. Если g дифференцируема на $[a, b]$, то

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,g'(c_k)\,\Delta x_k,$$

где $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (!).

2. Пусть g' непрерывна на $[a, b]$. Используя теорему Кантора, оценить разность

$$\alpha = \sigma - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,g'(\xi_k)\,\Delta x_k$$

и показать, что $\alpha \to 0$ при $\delta \to 0$.

3. Если f интегрируема по Риману, а g' непрерывна на $[a, b]$, то f интегрируема по g на $[a, b]$ и

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \text{ (!)}.$$

(Использовать 3.62.)

4. Пусть f непрерывна, а g' ограничена на $[a, b]$. Используя теорему Кантора, оценить разность

$$\beta = \sigma - \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g'(c_k) \Delta x_k$$

и показать, что $\beta \to 0$ при $\delta \to 0$.

5. Если f непрерывна, а g' интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f интегрируема по g на $[a, b]$ и

$$(S)\int_a^b f(x)\, dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \ (!).$$

3.198.* Вычислить интегралы Стилтьеса:

1) $\int_0^1 x^2 dx^2$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin x d \cos x$; 3) $\int_0^1 e^x\, dx^2$.

3.199. Пусть $a = x_0 = \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_{n-1} \leqslant \leqslant \xi_n \leqslant x_n = \xi_{n+1} = b$.

1. Эта совокупность задает разбиение $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, отрезка $[a, b]$ с выбором промежуточных точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (!).

2. Эта совокупность задает разбиение $\{\xi_l\}$, $l = 0, 1, \ldots, n+1$, отрезка $[a, b]$ с выбором промежуточных точек $x_l \in [\xi_l, \xi_{l+1}]$, $l = 0, 1, \ldots, n$ (!).

3. Обозначим $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$, $\Delta f_l = f(\xi_{l+1}) - f(\xi_l)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta g_k = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \sum_{l=0}^{n} g(x_l) \Delta f_l \ (!).$$

4. Отсюда следует утверждение: если g интегрируема по f на $[a, b]$, то и f интегрируема по g на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x) \ (!).$$

(Эту формулу называют *формулой интегрирования по частям.*)

3.200. Функция f: $x \mapsto x$ интегрируема на $[a, b]$ по любой функции g, интегрируемой на $[a, b]$ в смысле Римана (!).

3.201.* Вычислить:

1) $\int_{-1}^{1} xd\, 1(x)$; 2) $\int_{-1}^{1} xd \operatorname{sgn} x$.

Для определения интеграла Лебега нам понадобится ввести предварительно некоторые понятия.

Функция f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ называется *ступенчатой*, если существует разбиение $\{x_k\}$, $k=0, 1, \ldots, n$, и постоянные $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$, такие, что $f(x)=c_k$ $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[$.

3.202. Ступенчатая функция ограничена (!).

3.203. Ступенчатая функция интегрируема по Риману (!).

3.204. Пусть f и g — две ступенчатые функции, определенные на $[a, b]$. Тогда:

1) $f+g$ и fg — ступенчатые функции (!);

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ ступенчатая (!);

3) $f \circ g$ — ступенчатая функция (если она определена) (!).

3.205.* Какого вида разрывы может иметь ступенчатая функция?

3.206. Если φ непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция f, такая, что $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ $\forall x \in [a, b]$ (!).

3.207. Функция f определена на $[a, b]$ и ограничена, $\{x_k\}$ — разбиение $[a, b]$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Положим $f^*(x) = M_k$, $x \in [x_{k-1}, x_k[$, $f_*(x) = m_k$, $x \in [x_{k-1}, x_k[$ $k = 1, 2, \ldots, n$, $f_*(b) = f^*(b) = f(b)$. Убедиться, что f^* и $_*$ являются ступенчатыми функциями.

Функция f: $I \to \mathbf{R}$ называется *полунепрерывной сверху в точке* $x_0 \in I$, если $\forall d > f(x_0)$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < d$.

Функция f: $I \to \mathbf{R}$ называется *полунепрерывной снизу в точке* $x_0 \in I$, если $\forall d < f(x_0)$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > d$.

Говорят, что f *полунепрерывна сверху (снизу) на* I, если она полунепрерывна сверху (снизу) в каждой точке из I.

3.208. Пусть $f(x) = 1(x)$.

1. Функция f полунепрерывна сверху в точке 0 (!).
2. Функция f не является полунепрерывной снизу в точке 0 (!).

3.209. Непрерывная в точке x_0 функция полунепрерывна сверху и снизу в этой точке (!).

3.210. Если f полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0, то она непрерывна в x_0 (!).

3.211.* Выяснить, будут ли следующие функции полунепрерывными сверху или снизу в точке 0:

1) $f(x) = 1(-x)$; 2) $f(x) = [x]$; 3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

4) $f(x) = -1(x)$; 5) $f(x) = |x|$; 6) $f(x) = 1(x) + 1(-x)$.

3.212. Привести примеры разрывных в точке 0 функций, которые были бы в этой точке полунепрерывными:

1) сверху; 2) снизу.

3.213. Функция f полунепрерывна сверху в точке x_0 тогда и только тогда, когда $-f$ полунепрерывна снизу в x_0 (!).

3.214. Функции f^* и f_* из задачи 3.207 могут не быть ни полунепрерывными сверху, ни полунепрерывными снизу на $[a, b]$ (!).

3.215.* Изменить значение функции $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ в точке 0 так, чтобы полученная функция была в точке 0:

1) полунепрерывна сверху; 2) полунепрерывна снизу.

3.216. Пусть f — ступенчатая функция на $[a, b]$. Изменив, если нужно, значение f только в точках разбиения $x_0, \ldots, x_n$, можно получить функцию:

1) полунепрерывную сверху на $[a, b]$;

2) полунепрерывную снизу на $[a, b]$ (!).

3.217. На $[a, b]$ задана ступенчатая функция f. Положим $\overline{f}(x) = \max\{f(x-0),\ f(x+0)\}$, $\underline{f}(x) = \min\{f(x-0),\ f(x+0)\}$, $x \in]a, b[$, $\overline{f}(a) = \underline{f}(a) = f(a+0)$, $\overline{f}(b) = \underline{f}(b) = f(b-0)$. Тогда:

1) функция $\overline{f}$ полунепрерывна сверху на $[a, b]$ (!);

2) функция $\underline{f}$ полунепрерывна снизу на $[a, b]$ (!).

3.218.* Построить функции $\overline{f}$ и $\underline{f}$, если:

1) $f(x) = 1(x) + 1(-x)$; 2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Пусть функция φ полунепрерывна сверху, ψ полунепрерывна снизу на $[a, b]$, $\varphi(x) < \psi(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Обозначим через $U_{[\varphi, \psi]}$ множество функций h: $[a, b] \to \mathbf{R}$, таких, что $\varphi(x) < h(x) < \psi(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Множество $U_{[\varphi, \psi]}$ называется *окрестностью функции* f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, если $f \in U_{[\varphi, \psi]}$.

3.219. Пересечение двух окрестностей функции f является окрестностью f (!).

3.220. Будет ли окрестностью функции f объединение двух ее окрестностей?

Говорят, что ступенчатая функция f *принадлежит множеству* $U_{[\varphi, \psi]}$ *в целом*, если $\overline{f} \in U_{[\varphi, \psi]}$ и $\underline{f} \in U_{[\varphi, \psi]}$.

3.221. Пусть $\varphi(x) = 1/2$, $\psi(x) = 3/2$ $\forall x \in [-1, 1]$. Функция f: $x \mapsto 1(x) + 1(-x)$, $x \in [-1, 1]$, принадлежит в целом множеству $U_{[\varphi, \psi]}$, но $f \notin U_{[\varphi, \psi]}$ (!).

3.222. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\varphi(x) = -2$, $\psi(x) = \begin{cases} 1/2, & x \leqslant 0; \\ 2, & x > 0. \end{cases}$

Функция f не принадлежит в целом множеству $U_{[\varphi,\psi]}$, но $f \in U_{[\varphi,\psi]}$ (!).

3.223.* Если ψ — ступенчатая, а φ — постоянная функции на $[a, b]$, $\varphi(x) < \psi(x)$ $\forall x \in [a, b]$, то существует ступенчатая функция h, принадлежащая в целом $U_{[\varphi,\psi]}$ (!).

3.224.* Если φ и ψ — ступенчатые функции на $[a, b]$, $\bar{\varphi}(x) < \underline{\psi}(x)$ $\forall x \in [a, b]$, то существует ступенчатая функция h, принадлежащая в целом $U_{[\bar{\varphi},\underline{\psi}]}$ (!).

Для ступенчатой функции, определенной на $[a, b]$ по закону $f\colon x \mapsto f(x) = c_k$, $x \in]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, 2, \ldots, n$, число $\sigma_f = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$ называют *римановой суммой* этой функции.

3.225. Пусть f — ступенчатая функция на $[a, b]$. Тогда $(R)\int_a^b f(x)\,dx = \sigma_f$ (!).

3.226. Если f интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция g на $[a, b]$, такая, что $\left|\sigma_g - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.227. Предположим, что для функции f на $[a, b]$ существует число A и для любого $\varepsilon > 0$ существуют ступенчатые функции φ и ψ, такие, что $f \in U_{[\bar{\varphi},\underline{\psi}]}$ и для любой ступенчатой функции g, принадлежащей в целом $U_{[\bar{\varphi},\underline{\psi}]}$, выполняется неравенство $|\sigma_g - A| \leqslant \varepsilon$.

1. Функция f ограничена (!).

2. Множество D точек, в которых хотя бы одна из функций $\bar{\varphi}$ или $\underline{\psi}$ разрывна, конечно (!).

3. Пусть N — число точек множества D, $z_k \in D$ и $\varepsilon > 0$, такое, что $I_k = [z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon] \subset [a, b]$. Используя утверждения 3.223 и 3.224, можно определить на множестве $\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ ступенчатую функцию h, такую, что $\bar{\varphi}(x) < \bar{h}(x) < \underline{\psi}(x)$ и $\bar{\varphi}(x) < \underline{h}(x) < \underline{\psi}(x)$ $\forall x \in \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ (!).

4. Пусть τ — интегральная сумма Римана для f на $[a, b]$, соответствующая разбиению с диаметром $\delta < \varepsilon/2$, $\tau =$

$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$. Определим на $[a, b]$ ступенчатую функцию g, положив на $[x_{k-1}, x_k[$

$$g(x) = \begin{cases} f(\xi_k), & [x_{k-1}, x_k[\cap D = \varnothing; \\ h(x), & [x_{k-1}, x_k[\cap D \neq \varnothing, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Показать, что функция g принадлежит в целом множеству $U_{[\overline{\varphi}, \underline{\psi}]}$.

5. Обозначим $M = \max\{|\varphi(x)|, |\psi(x)|\}$, $x \in [a, b]$. Тогда

$$|\tau - A| \leqslant |\tau - \sigma_g| + |\sigma_g - A| \leqslant 2NM\delta + \varepsilon \text{ (!)}.$$

6. Если диаметр разбиения достаточно мал, то $|\tau - A| \leqslant 2\varepsilon$ (!).

7. Отсюда следует, что f интегрируема в смысле Римана на $[a, b]$ (!).

3.228.* Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана и $A = (R)\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение отрезка $[a, b]$, такое, что если взять $\varphi(x) = f_*(x)$, $\psi(x) = f^*(x)$ (см. 3.207), то для любой ступенчатой функции g, принадлежащей в целом $U_{[\overline{\varphi}, \underline{\psi}]}$, выполняется неравенство $|\sigma_g - A| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.229. Отсюда следует, что условие 3.227 можно взять в качестве определения интегрируемости в смысле Римана (!).

Функция f называется *интегрируемой в смысле Лебега на* $[a, b]$, если существуют число A и для любого $\varepsilon > 0$ функция φ, полунепрерывная сверху, и функция ψ, полунепрерывная снизу, $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$, такие, что для любой ступенчатой функции g, принадлежащей в целом $U_{[\varphi, \psi]}$, выполняется неравенство $|\sigma_g - A| \leqslant \varepsilon$. Число A называют *интегралом (в смысле Лебега) от* f *по* $[a, b]$ и обозначают $(L)\int_a^b f(x)\,dx$ или просто $\int_a^b f(x)\,dx$.

3.230. Сравнить это определение с упражнениями 3.229 и 3.227.

3.231. **Если в определении интегрируемости по Лебегу взять в качестве функций φ и ψ ступенчатые функции, полунепрерывные сверху и снизу соответственно, получим определение интегрируемости по Риману (!).**

3.232. Если функция f интегрируема по Риману на

$[a, b]$, то она интегрируема по Лебегу на этом отрезке. При этом

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ (!).}$$

3.233.* Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество отрезков $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $\alpha_k < \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\bigcup_k I_k \supset \mathbf{Q}$ и $\sum_k |\alpha_k - \beta_k| \leqslant \varepsilon$ (!).

3.234. Пусть $\varepsilon > 0$. Определим на $[0, 1]$ функции:

$$\varphi(x) = -\varepsilon; \quad \psi(x) = \begin{cases} 1+\varepsilon, & x \in \bigcup_k\,]\alpha_k, \beta_k[; \\ \varepsilon, & x \notin \bigcup_k\,]\alpha_k, \beta_k[, \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

(см. 3.233). Множество $U_\varepsilon = U_{[\varphi,\psi]}$ является окрестностью функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}, \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ (!).}$$

3.235. Пусть g—ступенчатая функция, принадлежащая в целом окрестности U_ε. Точка $|\sigma_g| \leqslant 3\varepsilon + 2\varepsilon^2$ (!).

3.236. Отсюда следует, что функция Дирихле интегрируема на $[0, 1]$ в смысле Лебега и $(L)\int_0^1 D(x)\,dx = 0$ (!).

3.237. Сравнить результаты 3.232, 3.58 и 3.236.

3.238. Привести примеры функций, интегрируемых на $[a, b]$ в смысле Лебега и не интегрируемых в смысле Римана.

3.6. Геометрические приложения определенного интеграла

Фигурой называют всякое множество точек плоскости. Одной из простейших плоских фигур является треугольник. Если T—треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, то число $S_T = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$ назовем *площадью треугольника* T.

3.239. Площадь S_T равна половине модуля определителя

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ (!).}$$

3.240. Сравнить S_T с площадью треугольника, определяемой по формулам, известным из геометрии.

3.241. При параллельном переносе и повороте системы координат площадь треугольника не меняется (!).

Точка M называется *граничной точкой фигуры* F, если в любом круге с центром в M есть точки из F и точки, не принадлежащие F. Совокупность граничных точек фигуры F называют ее *границей*.

3.242. Всякий многоугольник P можно разбить на треугольники T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, так, что если $R_i = T_i \cap \cap \left(\bigcup_{k \neq i} T_k\right)$, то $R_i \neq \varnothing$ и R_i содержит лишь граничные точки T_i (!).

3.243. *Площадью* S_P *многоугольника* P называют сумму площадей составляющих его треугольников T_k, имеющих общими лишь граничные точки, $S_P = \sum\limits_k S_{T_k}$.

3.244. При различных разбиениях многоугольника P на треугольники T_k формула 3.243 дает один и тот же результат (!).

3.245. При параллельном переносе и повороте системы координат площадь многоугольника не меняется (!).

Многоугольник P_* называется *вписанным* в фигуру F, если $P_* \subset F$. Многоугольник P^* называют *описанным* около фигуры F, если $F \subset P^*$.

3.246. $S_{P^*} \geqslant S_{P_*}$ (!).

3.247.* Привести пример фигуры, для которой существует P_* и не существует P^*.

Число $S_* = \sup S_{P_*}$ называют *внутренней площадью фигуры* F, число $S^* = \inf S_{P^*}$—*внешней площадью фигуры* F. Отметим, что $\sup \varnothing = -\infty$, $\inf \varnothing = +\infty$. Если $F \neq \varnothing$, то $0 \leqslant S_* \leqslant S^* \leqslant +\infty$.

3.248. Если F—многоугольник, то для него $S_* = S^*$ (!).

Если внутренняя и внешняя площади фигуры F совпадают, то F называют *квадрируемой фигурой*, а число $S_F = S^* = S_*$—*площадью* F.

3.249. Привести примеры фигур:

1) квадрируемых; 2) неквадрируемых.

3.250. Площадь фигуры не меняется при параллельном переносе и повороте системы координат (!).

3.251. Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P^*$, P_*, такие, что $S_{P^*} - S_{P_*} \leqslant \varepsilon$ (!).

3.252. Из утверждения 3.251 следует, что фигура F

квадрируема тогда и только тогда, когда площадь ее границы равна нулю (!).

3.253. Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют квадрируемые фигуры $\underline{F} \subset F$ и $\overline{F} \supset F$, такие, что $S_{\overline{F}} - S_{\underline{F}} \leqslant \varepsilon$ (!).

3.254. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ и F — *криволинейная трапеция*, т. е. фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$. Пусть $\overline{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$—числа, определенные в задаче 3.61.

1. Показать, что существуют многоугольники $\overline{P}$ и $\underline{P}$, такие, что $\underline{P} \subset F \subset \overline{P}$ и $S_{\overline{P}} = \overline{\sigma}$, $S_{\underline{P}} = \underline{\sigma}$.

2. Используя интегрируемость функции f на $[a, b]$, показать, что F квадрируема и $S_F = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. (В этой формуле выражен *геометрический смысл определенного интеграла* от непрерывной неотрицательной функции.)

3.255. Каков геометрический смысл интеграла от ограниченной неотрицательной функции f, для которой $c \in]a, b[$ является точкой конечного скачка (в предположении, что других разрывов f не имеет)? Рассмотреть $\int\limits_{-1}^{1} (1 + 1(x))\,dx$.

3.256. Фигура F ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, сверху—кривой $y = f(x)$, снизу—кривой $y = g(x)$. Тогда ее площадь $S_F = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ (!).

3.257.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y = x^4$, $y = x^2$;

2) $y = x^2$, $y = x^3$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ и $x = 2$;

3) $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$.

3.258. Площадь кругового сектора радиусом r с центральным углом φ вычисляют по формуле $S = r^2\varphi/2$ (!).

3.259. Уравнение $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, определяет в полярных координатах кривую $l = \{(\varphi, r(\varphi)), \varphi \in [\alpha, \beta]\}$.

1. Уравнение $\varphi = \varphi_0$ задает луч, выходящий из начала координат (!).

2. Если r: $\varphi \mapsto r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$,— неотрицательная непрерывная функция, то вместе с лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ она

ограничивает некоторую фигуру F (!). (Эту фигуру называют *криволинейным сектором.*)

3. Используя результаты 3.253 и 3.258, доказать, что криволинейный сектор является квадрируемой фигурой.

4. Площадь криволинейного сектора F может быть вычислена по формуле $S_F = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(r(\varphi))^2 d\varphi$ (!).

3.260.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $r = a\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \varphi = 2\pi;$

2) $r = a(2 + \cos\varphi)$.

3.261. Пусть криволинейная трапеция F ограничена прямыми $x = a,\ x = b,\ y = 0$ и кривой, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,\ \varphi'(t) > 0,\ \psi(t) > 0,\ \varphi'$ и ψ непрерывны на $\alpha, \beta]$. Тогда $S_F = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,dt$ (!).

3.262.* Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

1) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;\ y = 0;$

2) $x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3.263.* Если граница l фигуры F задана уравнением вида $\Phi(x, y) = 0$, то для вычисления площади этой фигуры можно перейти к параметрическому или полярному заданию l. Вычислить площадь фигуры F в случае, если l задана у[равнением:

1) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$; 2) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Пусть $x\colon t \mapsto x(t)$ и $y\colon t \mapsto y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$,—непрерывные функции. Множество $L = \{(x, y) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]\}$ называют *плоской кривой*. Кривая называется *простой*, если у нее нет точек самопересечения.

3.264. График непрерывной функции $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ есть кривая (!).

3.265. Какие кривые определяются на $[-1, 1]$ уравнением $x^2 - y^2 = 0$?

3.266. Отрезок M_1M_2 с концами $M_i\ (x_i, y_i),\ i = 1, 2$, является кривой (!).

Длиной отрезка называют число

$$\lambda = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Длиной λ ломаной $M_0M_1 \ldots M_n,\ M_i(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, называют сумму длин составляющих ее отрезков:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

3.267. Какова бы ни была точка $M(x, y)$, длина ломаной $M_0M_1 \ldots M_kM_{k+1} \ldots M_n$ не превосходит длины ломаной $M_0M_1 \ldots M_kMM_{k+1} \ldots M_n$ (!).

Ломаная $M_0M_1 \ldots M_n$ называется *вписанной* в простую кривую L, если $M_i \in L$, $i=0, 1, \ldots, n$, причем точки M_0 и M_n совпадают с концами кривой. Пусть l — супремум длин ломаных, вписанных в L. Если l — конечная величина, то кривую L называют спрямляемой, а число l — *длиной кривой* L.

3.268. Рассмотрим окружность L радиусом R. Известно, что длина стороны вписанного в L правильного n-угольника равна $2R \sin(\pi/n)$. Чему равна длина окружности L, если предположить, что спрямляемость L доказана?

3.269. Пусть d—наибольшая из длин звеньев ломаной $M_0M_1 \ldots M_n$, вписанной в кривую L, λ — длина ломаной, Q—множество всех ломаных, вписанных в L. Используя утверждение 3.267, можно показать, что $\sup\limits_{Q} \{\lambda\} = \lim\limits_{d \to +0} \lambda$ (!).

3.270. Если кривая L спрямляема, то ее длина $l = \lim\limits_{d \to +0} \lambda$ (!).

3.271. График функции $f\colon x \mapsto \sin(1/x)$, $x \in]0, 1]$, не является спрямляемой кривой (!).

3.272. Привести примеры неспрямляемых кривых.

3.273. Пусть $\{t_k\}$, $k=0, 1, \ldots, n$,—разбиение $[\alpha, \beta]$, δ — диаметр разбиения. Используя результат 3.269, показать, что если L спрямляема, то ее длина

$$l = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \ (!).$$

Если функции $x\colon t \mapsto x(t)$ и $y\colon t \mapsto y(t)$, $t \in |\alpha, \beta|$, непрерывно дифференцируемы и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ $\forall t \in |\alpha, \beta|$, то кривая L называется *гладкой*.

3.274. Функция f имеет непрерывную производную на $|\alpha, \beta|$. Тогда ее график $\{(x, f(x)) \mid x \in |\alpha, \beta|\}$ является гладкой кривой (!).

3.275. Применение теоремы Лагранжа (см. 2.131) дает

$$l = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\bar{\tau}_k))^2}\, \Delta t_k,$$

где τ_k, $\bar{\tau}_k \in [t_{k-1}, t_k]$ (!).

3.276. Показать, что

$$l=\lim_{\delta\to+0}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k))^2}\,\Delta t_k+\alpha\right),$$

где $\alpha\to 0$ при $\delta\to+0$.

3.277. Из результатов 3.273 и 3.77 следует теорема: гладкая кривая L спрямляема, и ее длина

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \quad (!).$$

3.278. Если функция f непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, то, положив $x=t$, $y=f(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, получим формулу для вычисления длины кривой $\{(x, f(x))|\,x\in[\alpha, \beta]\}$:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,(!).$$

3.279. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha, \beta]$, и функция r непрерывно дифференцируема. Положив $\varphi=t$ и найдя $x=x(t)$ и $y=y(t)$, можно получить формулу

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi\,(!).$$

3.280.* Вычислить длины следующих кривых:

1) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (арка циклоиды);

2) $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$;

3) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$, $0\leqslant t<2\pi$;

4) $y=\operatorname{ch}x$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 5) $y=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

6) $r=a\varphi$ (спираль Архимеда), $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$;

7) $r=a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида); 8) $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

Телом называют всякое множество точек пространства. Одним из простейших тел является тетраэдр. Пусть T — тетраэдр с вершинами $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$. Обозначим

$$d=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}.$$

Число $V=|d|/6$ называют *объемом тетраэдра* T.

3.281. Объем тетраэдра не меняется при параллельном переносе и повороте системы координат (!).

3.282. Тетраэдр имеет вершины $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 0, 0)$, $M_3(0, 1, 0)$, $M_4(0, 0, 1)$. Вычислить объем тетраэдра, используя данное выше определение. Вычислить объем тетраэдра, используя известную из геометрии формулу $V = Sh/3$, где S — площадь основания, h — высота тетраэдра. Сравнить результаты.

3.283. Всякий многогранник G можно разбить на тетраэдры T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, так, что если $R_i = T_i \cap \cap (\bigcup\limits_{k \neq i} T_k)$, то $R_i \neq \varnothing$ и R_i содержит лишь граничные точки T_i (!).

3.284. *Объемом* V_G *многогранника* G называют сумму объемов составляющих его тетраэдров, имеющих общими лишь граничные точки (см. 3.283), т. е. $V_G = \sum\limits_k V_{T_k}$.

3.285. При различных разбиениях многогранника G на тетраэдры T_k формула 3.284 дает одинаковые результаты (!).

3.286. Куб имеет вершины в точках $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 0, 0)$, $M_3(1, 1, 0)$, $M_4(0, 1, 0)$, $M_5(0, 1, 1)$, $M_6(1, 0, 1)$, $M_7(0, 0, 1)$, $M_8(1, 1, 1)$. Вычислить объем куба, основываясь на данном выше определении объема многогранника. Вычислить объем куба, используя формулу $V = a^3$, где a — ребро куба. Сравнить результаты.

3.287. При параллельном переносе и повороте системы координат объем многогранника не меняется (!).

Многогранник G_* называется *вписанным в тело* T, если $G_* \subset T$. Многогранник G^* называется *описанным около* T, если $T \subset G^*$.

3.288. $V_{G_*} \leqslant V_{G^*}$.

3.289. Существуют $V_* = \sup V_{G_*}$ и $V^* = \inf V_{G^*}$ (!).

3.290. Если $T \neq \varnothing$, то $V_* \leqslant V^*$ (!).

3.291. Если T — многогранник, то $V_* = V^* = V_T$ (!).

3.292. Если T — плоская квадрируемая фигура, то $V^* = V_* = 0$ (!).

3.293. Привести пример тела T, для которого $V^* \neq V_*$.

Если для тела T $V_* = V^*$, то T называют *кубируемым телом*, а число $V_T = V_* = V^*$ — *объемом тела* T.

3.294. Привести примеры кубируемых и некубируемых тел.

3.295. Объем тела не меняется при параллельном переносе и повороте системы координат (!).

3.296. Тело кубируемо тогда и только тогда, когда объем его границы равен нулю (!) (см. 3. 252).

3.297. Тело T кубируемо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют кубируемые тела $\underline{T}$ и $\overline{T}$, такие, что $\underline{T} \subset T \subset \overline{T}$ и $V_{\overline{T}} - V_{\underline{T}} \leqslant \varepsilon$ (!) (см. 3.253).

3.298. Если T — цилиндр высотой h, основанием которого является квадрируемая фигура F, то T является кубируемым и $V_T = S_F h$ (!).

3.299. Всякое ступенчатое цилиндрическое тело (т. е. тело, состоящее из конечного числа цилиндров с параллельными основаниями и параллельными образующими) кубируемо (!).

3.300. Пусть тело T образовано вращением непрерывной кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вокруг оси Ox и $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — разбиение отрезка $[a, b]$. Каков геометрический смысл интегральных сумм $\overline{\sigma} = \pi \sum\limits_{k=1}^{n} f^2(\overline{\xi}_k)\,\Delta x_k$ и $\underline{\sigma} = \pi \sum\limits_{k=1}^{n} f^2(\underline{\xi}_k)\Delta x_k$, если $f(\overline{\xi}_k) = \max\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $f(\underline{\xi}_k) = \min\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$?

3.301. Используя результаты 3.297, 3.299 и 3.300, можно получить формулу для вычисления объема тела T, полученного вращением непрерывной дуги $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вокруг оси Ox:

$$V_T = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ (!)}.$$

3.302. Пусть проекция тела T на ось Ox равна $[a, b]$ и площадь сечения тела T плоскостью $x = t$, $a \leqslant t \leqslant b$, равна $S(t)$, причем S зависит непрерывно от t. Тогда $V_T = \int\limits_a^b S(t)\,dt$ (!).

3.303.* Найти объемы тел, полученных при вращении следующих кривых:

1) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox;

2) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг прямой $y = 1$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox;

4) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox.

3.304.* Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ z=\pm c$.

3.305. Пусть тело T образовано вращением вокруг оси Oy фигуры $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, где f — непрерывная функция. Выяснить геометрический смысл интегральной суммы

$$\sigma=2\pi\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

3.306. Вывести отсюда формулу для вычисления объема тела вращения T (см. 3.305):

$$V_T=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx=2\pi\int_a^b xy(x)\,dx.$$

3.307.*. Найти объемы тел, полученных при вращении вокруг оси Oy фигур, ограниченных кривыми:

1) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$;

2) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ y=0$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 4) $(x-a)^2+y^2=c^2,\ a\geqslant c$ (тор).

3.7. Использование аналитических методов при построении и исследовании математических моделей естественных и технических процессов

В основе анализа как одного из мощных средств изучения математических моделей естественных и технических процессов лежат операции дифференцирования и интегрирования. На основе методики, разработанной для изучения указанных операций, создана аналитическая техника, позволяющая с единой точки зрения исследовать различные по природе прикладные задачи.

Ниже приводятся примеры применения аналитической техники для решения простейших прикладных задач. В ряде задач после формулировки условия дается примерный план исследования и решения. При этом в отдельных случаях могут быть поставлены не один, а несколько вопросов, а иногда вопросы формулируются в процессе решения, являясь этапами плана исследования. Это позволяет проанализировать задачу и получаемый результат и тем самым лучше понять рассматриваемый процесс. Предполагается, что при таком анализе читатель сам будет формулировать дополнительные вопросы, продолжая исследование. Именно такой подход к решению задач (формулировка гипотезы — постановка задачи — уточнение гипотезы), связанный с ветвящимися исследованиями, и является наиболее актуальным в настоящее время.

3.308.* Канат висячего моста закреплен на береговых вертикальных опорах, расстояние между которыми 200 м. Провисая, канат принимает форму параболы, самая нижняя точка которой находится на 50 м ниже точек, в которых закреплен канат. Найти угол φ, образуемый канатом с опорами.

1. Выбрать систему координат, в которой указанная парабола имеет уравнение $y=kx^2$.

2. Определить k, зная координаты точек закрепления каната.

3. Найти угол φ.

3.309.* Тяжелая балка длиной l опирается нижним концом на тележку. Верхний конец балки скользит вниз вдоль вертикального упора со скоростью v. При этом тележка вместе с нижним концом балки отъезжает от упора. Найти скорость тележки в момент, когда она удалена от упора на расстояние b, $b<l$.

1. Выбрать систему координат.

2. Выразить зависимость перемещения нижнего конца балки от времени (закон движения).

3. Вычислить момент времени t, когда тележка находится на расстоянии b от упора.

4. Найти скорость тележки в указанный момент.

3.310.* Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр его равен P. Выяснить, при каких размерах окно пропускает наибольшее количество света.

1. Пусть a и b — стороны прямоугольника. Задача равносильна отысканию a и b, таких, чтобы фигура заданной формы с периметром P имела наибольшую площадь (!).

2. Выразить P через a и b и найти зависимость a от b.

3. Найти зависимость площади S фигуры от b.

4. Зависимость S от b непрерывная (!).

5. Увеличивая b за счет уменьшения a и наоборот и используя п. 4, убедиться, что задача должна иметь решение.

6. Стационарная точка функции S является решением задачи (!) (использовать п. 4).

3.311.* При каких размерах цилиндрического бака без крышки вместимостью V затраты жести на его изготовление будут наименьшими?

1. Установить зависимость между размерами h и R бака.

2. Найти зависимость площади S поверхности бака от R.

3. Исследовать функцию $S(R)$ на экстремум.

3.312.* Цилиндрический резервуар радиусом R и высотой h сваривают из стального листа.

1. При каких R и h вместимость резервуара, изготовленного из листа общей площадью S, будет наибольшей?

2. При каких размерах резервуара вместимостью V на его изготовление пойдет наименьшее количество стального листа?

3. Сравнить соотношения между R и h в первом и во втором случаях.

3.313. Куском проволоки длиной l нужно огородить два участка: круг и квадрат с наибольшей суммой площадей S. Найти размеры круга и квадрата.

1. Установить зависимость между размерами участков.

2. Установить зависимость S от радиуса R круга.

3. Значение S в стационарной точке не является наибольшим (!).

4. Площадь S будет наибольшей, если проволокой огородить только круг (!).

3.314.* Прямоугольный участок примыкает одной стороной к стене, а три другие стороны огорожены забором.

1. При каких размерах участок будет иметь наибольшую площадь при заданной длине забора l?

2. При каких размерах участка площадью S длина забора будет наименьшей?

3.315.* Поперечное сечение канала имеет форму равнобедренной трапеции площадью S и высотой h. При каком наклоне φ боковых сторон потери воды от просачивания в грунт будут наименьшими?

1. Потери воды пропорциональны смачиваемому периметру P трапеции (!).

2. Установить связь между периметром P, площадью S, высотой h и наклоном φ.

3. Исследовать функцию $P=P(\varphi)$.

3.316.* Населенные пункты A и B расположены на разных берегах реки на расстоянии от реки a и b соответственно. В каком месте нужно построить мост через реку, чтобы можно было проложить кратчайшую дорогу между A и B?

1. Пусть AC — перпендикуляр к реке. Если B находится на продолжении AC, то мост нужно строить в точке C (!).

2. В общем случае можно выразить длину дороги l (с учетом длины моста) как функцию расстояния x от места строительства моста до AC (!).

3. Исследовать на минимум функцию $l(x)$.

3.317.* Корабль стоит на якоре на расстоянии a от ближайшей точки A берега. Пассажиру нужно попасть в населенный пункт B, находящийся на берегу на расстоянии b от точки A. В какую точку на берегу он должен плыть на лодке, чтобы попасть в B за кратчайшее время, если скорость лодки v_1, а скорость пешехода v_2, $v_1 < v_2$?

3.318.* От канала шириной a под прямым углом отходит канал шириной b. Найти наибольшую длину l бревен, которые можно сплавлять из одного канала в другой.

1. Считаем бревно таким длинным, что при переходе из одного канала в другой концы бревна упираются в стенки каналов. Обозначим φ угол, образованный при этом бревном с каналом шириной a. Тогда длина бревна $\lambda = \dfrac{a}{\sin\varphi} + \dfrac{b}{\cos\varphi}$ (!).

2. Минимум функции $\lambda(\varphi)$ равен наибольшей допустимой длине l (!).

3. $l = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ (!).

4. При заданных величинах a и l определить наименьшую ширину канала b, при которой можно сплавлять бревна из одного канала в другой.

3.319.* Освещенность поверхности прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света. На какой высоте над круглым столом радиусом a нужно подвесить лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

3.320.* Снаряд выпущен под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить α, при котором дальность полета снаряда будет наибольшей.

1. Вектор скорости $\vec{v}$ разложить на горизонтальную $\vec{v}_г$ и вертикальную $\vec{v}_в$ составляющие. Показать, что $v_г = v_0 \cos\alpha$, $v_в = v_0 \sin\alpha - gt$.

2. В момент t снаряд находится в точке (x, y), где $x = tv_0 \cos\alpha$, $y = tv_0 \sin\alpha - gt^2/2$ (!).

3. Определить момент и точку падения снаряда.

4. Найти зависимость точки падения снаряда x от α.

5. Исследовать функцию $x = x(\alpha)$.

3.321.* Расходы на обслуживание пассажиров теплохода в течение рейса пропорциональны квадрату времени, которое затрачено на рейс. Расходы на амортизацию судна и топливо пропорциональны кубу скорости судна. При какой скорости v рейс длиной l будет наиболее экономичным? Каковы расходы d на рейс в этом случае?

3.322.* Центры трех упругих шаров A, B, C расположены на прямой. Шар A массой M, движущийся со скоростью v, ударяется в шар B, который в свою очередь ударяется в шар C массой m. Какой должна быть масса шара B, чтобы скорость шара C была наибольшей? (При упругом соударении шара массой m_1, движущегося со скоростью v_1, и неподвижного шара массой m_2 последний приобретает скорость $v_2=\dfrac{2m_1v_1}{m_2+m_1}$.)

3.323. Канава треугольного сечения перегорожена вертикальной стенкой. Какова величина силы $\vec{F}$ давления воды на стенку, если глубина воды в канаве h, а ширина стенки на уровне поверхности воды b?

1. На глубине x выделим полоску (элемент стенки) шириной $\Delta x=dx$. Величина силы давления воды на полоску (элементарной силы) равна произведению площади полоски на давление воды на уровне полоски:

$$\Delta F \approx \rho_{в} g x \frac{b\,(h-x)\,\Delta x}{h} \quad (!).$$

(Здесь и далее $\rho_{в}$ — плотность воды; g — ускорение свободного падения.)

2. Точная величина элементарной силы отличается от приближенной на $\alpha=o(\Delta x)$ (!).

3. Разбивая всю стенку на элементарные полоски и суммируя элементарные силы, получаем

$$F \approx \rho_{в} g \sum_k \frac{bx_k\,(h-x_k)}{h}\,\Delta x_k \,(!).$$

4. Если максимальная ширина полоски стремится к нулю, то в пределе

$$F=\rho_{в} g \int_0^h \frac{bx\,(h-x)}{h}\,dx=\rho_{в} g b h^2/6 \,(!).$$

5. Обосновать стремление суммы из п. 3 к пределу можно, используя результаты 3.62 и 3.77 (!).

6. Обосновать получение точного равенства можно с помощью утверждения 2 (!).

7. При заданных b и h сила $\vec{F}$ не зависит от формы треугольника (!).

3.324.* Вычислить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого, равное 4 м, расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

3.325.* Цилиндрический резервуар с вертикальной осью высотой h и радиусом r заполнен жидкостью, плотность которой ρ. Определить величину силы давления жидкости на боковые стенки резервуара.

3.326.* Вычислить величину силы давления воды на поверхность батисферы диаметром 4 м, погруженной на глубину 100 м.

3.327. Котел, имеющий форму параболоида вращения, заполнен водой. Высота котла H, радиус основания R. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы откачать воду из котла.

1. При выборе соответствующей системы координат уравнение параболоида имеет вид $\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)=z,\ 0\leqslant z\leqslant H$ (!).

2. При откачивании горизонтального слоя воды толщиной Δz, находящегося на расстоянии z от нижней точки котла, совершается элементарная работа

$$\Delta A \approx \frac{\pi\rho_{\text{в}} g R^2}{H} z\Delta z (H-z)\ (!).$$

3. Суммируя элементарную работу и переходя к пределу получаем

$$A = \int_0^H \frac{\pi\rho_{\text{в}} g R^2}{H} z(H-z)\,dz\ (!).$$

4. Вычислить работу A.

3.328*. Цилиндрический резервуар радиусом R и высотой H заполнен жидкостью, имеющей плотность ρ. Вычислить работу, совершаемую при откачивании жидкости из резервуара, если резервуар расположен: вертикально; горизонтально.

3.329. Куб с ребром a из металла плотностью ρ погружен в воду так, что его верхняя грань находится на поверхности воды. Какую работу нужно совершить, чтобы извлечь куб из воды?

1. Элементарная работа ΔA, совершаемая при извлечении из воды элементарного слоя куба толщиной Δx, находящегося на глубине x, состоит из двух частей: работы $\Delta_1 A$,

совершаемой при извлечении слоя из воды: $\Delta_1 A = ga^2 \Delta x(\rho - \rho_в)x$, и работы $\Delta_2 A$, совершаемой при подъеме слоя на высоту $a - x$ над поверхностью воды: $\Delta_2 A = ga^2 \Delta x \rho (a - x)$ (!).

2. $A = ga^2 \int\limits_0^a (\rho a - \rho_в x)\, dx$ (!).

3. Вычислить A.

3.330.* Шар радиусом R лежит на дне бассейна глубиной H. Вычислить работу, которую нужно совершить при извлечении шара из воды, если плотность шара $\rho > \rho_в$.

3.331. Материальная точка массой m находится на расстоянии a от материальной прямой, линейная плотность которой равна μ.

1. Сила притяжения точки прямой направлена к прямой по перпендикуляру h, проходящему через данную точку (!).

2. Элемент прямой dx, расположенный на расстоянии x от основания перпендикуляра, притягивает точку с силой $d\vec{F}$, величина которой $dF = \gamma \dfrac{m\mu dx}{a^2 + x^2}$ (!).

3. Найти проекцию dF_h силы $d\vec{F}$ на h.

4. Величина силы притяжения точки прямой

$$F = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF_h = 2\gamma \frac{m\mu}{a} \text{ (!)}.$$

3.332.* Точка массой m расположена на одной прямой со стержнем длиной l на расстоянии a от его конца. Вычислить величину силы притяжения точки стержнем, если масса стержня M.

3.333.* Электрический заряд Q, находящийся в точке $(0, 0)$, перемещает заряд q из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Вычислить работу силы взаимодействия $\vec{F}$, если известно, что $F = kQq/r^2$, r — расстояние между зарядами.

3.334. Цилиндр радиусом R и высотой H наполнен газом под давлением p_0. При движении поршня происходит изотермическое сжатие газа, при котором зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV = c = \text{const}$. Вычислить работу, совершаемую при перемещении поршня на расстояние h.

1. Если поршень переместился внутрь цилиндра на расстояние x, то давление газа $p = p_0 H/(H - x)$ (!).

2. Совершаемая при перемещении поршня из положения x в положение $x+\Delta x$ элементарная работа $\Delta A \approx \frac{c}{H-x}\Delta x$(!).

3. Совершаемая при перемещении поршня на расстояние h работа $A = c\int\limits_0^h \frac{dx}{H-x}$ (!).

4. Вычислить A.

3.335.* Воздух, имеющий начальные объем V_0 и давление p_0, расширяется до объема V_1. Расширение происходит по закону Пуассона: $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ (адиабатический процесс). Найти совершаемую при этом работу.

3.336.* Под действием силы $\vec{F}$ длина пружины увеличивается на l. Какую работу совершают силы упругости при растяжении пружины на L? (По закону Гука удлинение пружины пропорционально приложенной силе: $F=kl$.)

1. При растяжении пружины от длины x до длины $x+$ $+dx$ силы упругости совершают элементарную работу $dA = -kxdx$ (!).

2. При растяжении пружины на L работа сил упругости

$$A = \frac{F}{l}\int\limits_0^L xdx \text{ (!)}.$$

3. Вычислить работу, если $F=1$ Н, $l=1$ см, $L=10$ см.

3.337. Однородный круглый диск радиусом R и массой M вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. Вычислить кинетическую энергию диска.

1. Элементарное кольцо радиусом r и шириной dr имеет элементарную массу $dm = 2MR^{-2}rdr$ (!).

2. Элементарное кольцо имеет элементарную кинетическую энергию $dE = MR^{-2}\omega^2r^3dr$ (!).

3. Кинетическая энергия диска $E = MR^2\omega^2/4$ (!).

3.338.* Однородный шар радиусом R и массой M вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω. Вычислить кинетическую энергию шара, используя разбиение шара на элементы: с помощью параллельных плоскостей; с помощью концентрических цилиндрических поверхностей.

3.339.* Найти массу цилиндра радиусом R и высотой H, если плотность его в каждой точке равна расстоянию: от точки до ближайшего основания; от точки до боковой поверхности.

3.340. Скорость распада радия в каждый момент пропорциональна его наличному количеству. Установить закон распада радия, если в начальный момент $t=0$ имелось Q_0 граммов радия, а через 1600 лет его количество уменьшилось в 2 раза.

1. Закон распада описывается функцией $Q: t \mapsto Q(t)$, причем $\frac{dQ}{dt} = kQ$ (!).

2. Поскольку $\frac{dQ}{Q} = kdt$, то, рассматривая левую и правую части этого соотношения как дифференциалы некоторых функций и используя результат 2.205, получаем $\ln Q = kt + C$ (C — произвольная постоянная).

3. Учитывая, что $Q(0) = Q_0$, а $Q(1600) = Q_0/2$, получаем $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t/1600}$ (!).

3.341. Скорость роста населения пропорциональна его численности, причем годовой прирост составляет q (%). В момент t_0 переписи численность населения равнялась Q_0. Вывести закон изменения численности населения. Через какое время после переписи численность населения удвоится?

1. Если $Q(t)$ — численность населения в момент времени t, то $dQ/dt = kQ$.

2. Отсюда следует, что $Q(t) = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ (!) *(закон Мальтуса)*.

3. Поскольку $Q(t+1) = (1+0{,}01q)\,Q(t)$, можно получить закон изменения численности населения: $Q(t) = Q_0(1 + 0{,}01q)^{t-t_0}$ (!).

4. Если темпы роста постоянны, то население удвоится к моменту времени $t_0 + \frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}01q)}$ (!).

3.342.* Скорость естественного прироста стаи рыб данного вида, обитающей в изолированном водоеме, пропорциональна численности стаи, коэффициент пропорциональности α. Однако конкурентная борьба (за корм, место и т. п.) приводит к гибели части стаи, причем скорость уменьшения численности пропорциональна квадрату численности, коэффициент пропорциональности β. Установить закон изменения численности стаи $Q(t)$, если в момент $t_0=0$ численность равнялась Q_0, $Q_0<\alpha/\beta$, и известно, что $Q(t) < \alpha/\beta$ при всех $t>0$ *(логистический закон)*.

3.343. Решить задачу 3.342, не пользуясь дополнительным указанием на то, что $Q(t) < \alpha/\beta$ при $t \geqslant 0$.

3.344.* Установить закон $s=s(t)$ прямолинейного движения тела, если скорость тела $v=v(t)$, $t\geqslant 0$.

1. За элементарный промежуток времени $|\tau, \tau+d\tau|$ тело проходит расстояние $ds=v(\tau)d\tau$ (!).

2. К моменту t тело пройдет расстояние $s = \int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau$ (!).

3. Найти расстояние, пройденное телом от начала движения до полной остановки, если $v(t)=te^{-0{,}01t}$.

3.345* При подъеме ракеты ее ускорение растет за счет уменьшения веса по закону $a = \dfrac{A}{p-qt}$ $(p-qt>0)$. Установить закон изменения скорости ракеты, считая, что при $t=0$ скорость была равна нулю. На какой высоте будет находиться ракета в момент t_1?

3.346.* Цилиндрическая бочка диаметром D и высотой H заполнена жидкостью, которая вытекает через отверстие в дне диаметром d. Согласно закону Торричелли, скорость истечения жидкости $v=c\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня жидкости над отверстием, c — коэффициент.

1. Слой жидкости толщиной dh, расположенный на расстоянии h от дна бочки (элементарный объем), вытечет за элементарный промежуток времени

$$dt = \frac{D^2dh}{d^2v} = \frac{D^2dh}{d^2c\sqrt{2gh}} \ (!).$$

2. Вычислить время t, необходимое для опорожнения полной бочки, принимая во внимание, что при $h=0$ время опорожнения равно нулю.

3. Вычислить, за какое время t_1 опорожнится половина бочки.

3.347. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело, ограниченное поверхностью вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении через отверстие в дне было равномерным?

1. Предполагаем, что поверхность образована вращением кривой $y=y(x)$ вокруг оси Oy, $0\leqslant y\leqslant H$, а отверстие находится в точке $(0, 0)$. Тогда, используя утверждение 3.346.1, можно показать, что

$$dt = \frac{x^2dy}{d^2c\sqrt{2gy}} \ (!).$$

2. Поскольку по условию $\dfrac{dy}{dt} = c_1 = \text{const}$, то уравнение кривой имеет вид $y = ax^4$, где a — некоторая постоянная (!). Уточнить a.

3.348.* Сосуд, имеющий форму кругового конуса диаметром D и высотой H, заполнен водой, вытекающей через отверстие диаметром d в дне сосуда. Вычислить время опорожнения сосуда, если конус расположен: вершиной вниз; вершиной вверх.

3.349.* Прямоугольный резервуар имеет в днище отверстие площадью S (м^2). В начальный момент в резервуаре содержится V_0 (м^3) воды, уровень воды в нем H (м).

1. За какое время опорожнится резервуар?

2. За какое время из резервуара вытечет V_0 (м^3) воды, если сверху в него непрерывно подливается вода так, что ее уровень остается неизменным?

3. За какое время уровень воды в резервуаре изменится на h (м) ($h<H$), если сверху в него непрерывно поступает V (м^3) воды в секунду?

4. Если $V>cS\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре поднимется на некоторую величину h_1, после чего будет оставаться постоянным (!). Используя результат 2, вычислить h_1.

5. Если $V<cS\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре опустится на некоторую величину h_2, после чего будет оставаться неизменным (!). Вычислить h_2.

3.350. Вертикальный вал радиусом R давит на подпятник с силой $\vec{P}$. Найти работу силы трения при одном обороте вала, если коэффициент трения μ.

1. Найдя давление p и силу трения на единице площади, показать, что в элементарном кольце радиусом r и шириной dr с центром на оси вала работа силы трения (элементарная работа) $dA=4\pi\mu PR^{-2}r^2dr$.

2. Полная работа за один оборот вала $A=4\pi\mu PR/3$ (!).

3. В дальнейшем предполагается, что пята вала и подпятник приработались. Тогда давление $p=p(r)$ на подпятник распределяется так, что износ (а значит, и работа силы трения) является постоянным во всех точках. Показать, что при этом $pr=c=\text{const}$.

4. Вычислив элементарную силу давления $d\vec{P}$ вала на элементарное кольцо и зная, что сила давления на пяту равна $\vec{P}$, можно показать, что $c=\dfrac{P}{2\pi R}$ (!).

5. Работа силы трения в приработавшемся подпятнике при одном обороте вала $A=\pi\mu PR$ (!). Сравнить с п. 2.

Ниже приведены задачи прикладного характера, на примере которых можно проследить изучение конкретных процессов: формулировку задачи (технической, физической и т. п.), построение математической модели, формулировку математической задачи, решение задачи, конкретную (техническую, физическую и т. п.) интерпретацию найденного решения.

3.351. Задача. Допустимые потери мощности в трансформаторе равны a. При каком выходном напряжении мощность, отдаваемая трансформатором, будет наибольшей?

Модель. Пусть U_0 — напряжение на внешней обмотке трансформатора; I, U, R — соответственно сила тока, напряжение, сопротивление во внутренней обмотке. Потери энергии состоят из потерь на нагревание $a_1 = I^2R$ и потерь на намагничивание a_2, пропорциональных плотности намагничивания (U/U_0) в степени 1,6, т. е. $a_2 = \alpha(U/U_0)^{1,6}$. Таким образом, $a = RI^2 + \alpha(U/U_0)^{1,6}$. Поэтому

$$I = \sqrt{(a - \alpha(U/U_0)^{1,6})R^{-1}};$$

$$P = UI = \sqrt{U^2(a - \alpha(U/U_0)^{1,6})R^{-1}}.$$

Математическая задача. Исследовать на максимум функцию $p = p(U) = U^2(a - \alpha(U/U_0)^{1,6})$, $U > 0$.

Решение. $p'(U) = 0 \Rightarrow U = U_1 = U_0\left(\frac{5a}{9\alpha}\right)^{5/8}$, причем $p''(U_1) < 0$, т. е. при $U = U_1$ функция p имеет максимум (!).

Ответ. Наибольшая мощность отдается трансформатором при напряжении $U = U_0\left(\frac{5a}{9\alpha}\right)^{5/8}$.

3.352. Задача. Найти наибольшую скорость ползуна кривошипно-шатунного механизма.

Модель. Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA, вращающегося равномерно вокруг точки O с угловой скоростью ω; шатуна AB, связывающего кривошип и ползун; ползуна, скользящего вдоль прямой OB. Выберем координатную ось, совпадающую с прямой OB, с началом координат в точке O. Пусть r — длина кривошипа, l — длина шатуна, $k = r/l$ (на практике k невелико, не превосходит 0,2), φ — острый угол, образуемый шатуном с осью в момент времени t, когда кривошип образует с осью угол ωt. Обозначим x координату точки B ползуна.

1. $x = r\cos\omega t + l\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega t}$ (!).

2. Раскладывая величину x по степеням k по формуле Тейлора третьего порядка, получаем

$$x = l(1 + k\cos\omega t - k^2(1 - \cos 2\omega t)/4) + R_3,$$

причем $|R_3| \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-4}$ (!).

3. Таким образом, приближенная формула

$$x = l\left(1 - \frac{k^4}{4} + k\cos\omega t + \frac{k^2}{4}\cos 2\omega t\right)$$

довольно точно выражает закон движения ползуна. Скорость ползуна

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -r\omega\left(\sin\omega t + \frac{k}{2}\sin 2\omega t\right).$$

Математическая задача. Исследовать на экстремум функцию $y = y(\alpha) = \sin\alpha + \frac{k}{2}\sin 2\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Решение. $y'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\frac{\sqrt{1+8k^2}-1}{4k}$, $\alpha_2 = 2\pi - \arccos\frac{\sqrt{1+8k^2}-1}{4k}$. При этом $y''(\alpha_1) < 0$, $y''(\alpha_2) > 0$. Следовательно, функция y имеет в точке α_1 максимум, в точке α_2 минимум. Заметим, что $y(\alpha_1) = -y(\alpha_2)$ (!).

Ответ. Экстремальные значения скорости ползуна $v = v(t)$ достигаются в моменты $t_2 = 2\pi/\omega - t_1$, $t_1 = \omega^{-1}\arccos\frac{\sqrt{1+8k^2}-1}{4k}$, причем $|v(t_1)| = |v(t_2)|$. В момент t_1 кривошип совершает первую четверть оборота, в момент t_2 — четвертую четверть. Вычислить $|v(t_1)|$.

3.353. Задача. Винт домкрата имеет прямоугольную резьбу. При каком угле подъема резьбы коэффициент полезного действия домкрата будет наибольшим?

Модель. Прямоугольную резьбу можно рассматривать как наклонную плоскость с углом наклона α. Если μ — коэффициент трения, $\rho = \operatorname{arctg}\mu$ — угол трения, то КПД винта определяется формулой $\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\rho)}$, причем $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Математическая задача. Исследовать на максимум функцию $\eta = \eta(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\rho)}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{2}$, причем α_0 — точка максимума функции η и $\eta(\alpha_0) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ (!).

Ответ. Наибольший КПД домкрата достигается при угле подъема винта $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ и равен $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$.

3.354. Задача. При какой силе тока коэффициент полезного действия электродвигателя будет наибольшим?

Модель. Пусть U — напряжение, I — сила тока, R — сопротивление в цепи электродвигателя. Потери мощности состоят из потерь на нагревание $P_1 = I^2R$ и потерь холостого хода $P_2 = \text{const}$. Затраченная мощность $P = IU$. Следовательно, КПД электродвигателя

$$\eta = \frac{P - P_1 - P_2}{P} = 1 - IRU^{-1} - P_2I^{-1}U^{-1}, \quad I > 0.$$

Математическая задача. Исследовать на максимум функцию $\eta = \eta(I) = 1 - RU^{-1}I - P_2U^{-1}I^{-1}$, $I > 0$.

Решение. $\eta'(I) = 0 \Rightarrow I = I_0 = \sqrt{P_2R^{-1}}$, причем $\eta''(I_0) < 0$, т. е. функция η в точке I_0 имеет максимум, $\eta_{\max} = 1 - 2U^{-1}\sqrt{P_2R}$ (!).

Ответ. Наибольший КПД электродвигателя $\eta_{\max} = 1 - 2U^{-1}\sqrt{P_2R}$ достигается при силе тока $I_0 = \sqrt{P_2R^{-1}}$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1

1.18. Предположим противное. Тогда $\exists p,\ q \in \mathbf{N}$ взаимно простые, такие, что $\sqrt[k]{n} = p/q$. Но тогда p^k/q^k — несократимая дробь и $p^k/q^k = n$?! **1.19.** Если $10^x = 2$ для $x \in \mathbf{Q}$, то $\exists p,\ q \in \mathbf{N}$, такие, что $10^p = 2^q$. Но 2^q не делится на 10?! **1.31.** В задаче 1.30 положить $a = b = 1$. **1.32.** В задаче 1.30 положить $a = 1$, $b = -1$. **1.53.** Если m и M — нижняя и верхняя границы A, то число элементов A_l не превосходит $(M - m)\,10^l + 1$. **1.72.** 1), 2) Верно; 3) неверно (например, $A = Q \cap [1, \sqrt{2}]$). **1.73.** 2) 0, если $\alpha = 0$; $+\infty$, если $\sup A = +\infty$ и $\alpha > 0$ или если $\inf A = -\infty$ и $\alpha < 0$; $\alpha \sup A$, если $\sup A < +\infty$ и $\alpha > 0$; $\alpha \inf A$, если $\inf A = -\infty$ и $\alpha < 0$. **1.82.** Лишь конечное число элементов последовательности не удовлетворяет неравенству $|a_n| \leqslant \varepsilon$. **1.83.** $+\infty$. **1.87.** $\lambda = 0$. **1.90.** Нулевая. **1.91.** Если знаменатель прогрессии $q \in]-1, 1[$. **1.95.** Нет. Рассмотреть нулевую последовательность. **1.98.** Замкнуто относительно умножения. **1.99.** Рассмотреть случай, когда (a_n) — бесконечно малая последовательность. **1.122.** Последовательность (a_{6n}) является подпоследовательностью для (a_{2n}) и (a_{3n}). Последовательность (a_{6n+3}) является подпоследовательностью для (a_{2n+1}) и (a_{3n}). Далее воспользоваться результатом 1.119. **1.123.** Так как (a_{3n}) сходится, то (a_{2n}) и (a_{2n+1}) имеют одинаковые пределы (см. 1.122). Тогда сходится (a_n) (см. 1.121). **1.124.** Лишь конечное число элементов последовательности не удовлетворяет неравенству $a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a + \varepsilon$. **1.126.** $a_n \to l = \inf\{x\}$, где $\{x\}$ — множество чисел $x \in [A, B]$, таких, что на $[A, x]$ содержится бесконечное множество элементов из $\{a_n\}$. **1.127.** Нет. Рассмотреть случай, когда $C = a_\infty \in]A, B[$. **1.135.** Использовать 1.134. **1.136.** Применить 1.134 к остатку последовательности и использовать 1.112. **1.142.** $\forall \varepsilon > 0\ \exists k$, такое, что $\forall m \geqslant k \Rightarrow |x_m - a| \leqslant \varepsilon$. Тогда $|y_n - a| \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{k-1} |x_m - a| + \frac{1}{n}\sum_{m=k}^{n} |x_m - a| \leqslant \varepsilon + \frac{n-k}{n}\,\varepsilon = 2\varepsilon, \quad \text{если } n$$

достаточно велико. **1.145.** Необходимо и достаточно, чтобы либо $a_n \to 0$, либо a_n сохраняли знак при больших n. **1.148.** Рассмотреть последовательность $-2, -1, 1, 2, 3, \ldots$ **1.149.** Рассмотреть последовательности $-1/2, -1, 1, 1/2, 1/3, \ldots$ и $-1/2, -1, 2, 3, 4, \ldots$ **1.154.** Для возрастающей последовательности $a_\infty = \sup\{a_n\}$. **1.156.** Использовать 1.154. **1.162.** См. 1.161. **1.164.** 3) $a_\infty = b_\infty = \sqrt{a_0 b_0}$. **1.165.** Показать (можно по индукции), что $u_n < v_n\ \forall n$; убедиться, что (u_n) возрастает, (v_n) убывает. Тогда обе последовательности сходятся (см. 1.154). Перейти к пределу в равенстве $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$. **1.166.** Из условия следует, что последовательность $(a_{n+1} - a_n)$ монотонна. Значит, ее остаток сохраняет знак. Далее изучить остаток последовательности (a_n) и использовать результат 1.110. **1.167.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 0, если $0 \leqslant a < 1$; $1/2$, если $a = 1$; 1, если $a > 1$; 5) e^{-1}; 6) показать по индукции монотонность, затем ограниченность (a_n) числом 2. Последовательность сходится, и для нахождения ее предела получаем уравнение $a = \sqrt{2+a}$, откуда $a = 2$; 7) так же, как в п. 6 (ограниченность либо c, либо 2), $a_\infty = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$; 8) e. **1.168.** См. 1.169. **1.186.** Использовать неравенство $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$. **1.187.** Следует из 1.185 и 1.177. **1.191.** 1) — 3) Сходится; 4) расходится. **1.192.** 1) 1, -1; 2) 1, -1; 3) 1, -1; 4) 0, 0; 5) $\pi/2$, $-\pi/2$; 6) $+\infty$, $+\infty$. **1.200.** 1) 0; 2) 0; 3) $4/3$; 4) 0. **1.201.** 1) Так как $v_{n+1} - v_n \to \lambda$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k$, такое, что $m \geqslant k \Rightarrow |v_{m+1} - v_m - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Тогда $\left|\dfrac{v_n}{n} - \lambda\right| = \left|\dfrac{v_n - n\lambda}{n}\right| \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} |v_i - v_{i-1} - \lambda| + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{k} |v_i - v_{i-2} - \lambda| + \frac{|v_1 - \lambda|}{n} \leqslant$$

$\leqslant \dfrac{n-k}{n}\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon$, если n достаточно велико; 2) использовать 1.199. **1.202.** Положить $v_n = a_n - a_{n-1}$ и использовать 1.201. **1.203.** 1) Показать, что $\dfrac{1+u_n}{1+2u_n} \in \left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$. Тогда по критерию Коши последовательность расходится; 2) показать, что (u_n) ограничена снизу числом $\sqrt{a}$ при любом x. Вывести отсюда, что (u_n) монотонна и сходится. Из уравнения $u_\infty = \dfrac{1}{2}\left(u_\infty + \dfrac{a}{u_\infty}\right)$ находим $u_\infty = \sqrt{a}$. **1.204.** 5. а) Сходится; б) сходится; в) расходится. **1.205.** 1) 2; 2) $1/(k+1)$; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0. **1.207.** Положить $a_1 = b_1$, $a_n = b_n - b_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ **1.212.** 1) $1/(1-q)$, если $|q| < 1$; расходится, если $|q| \geqslant 1$; 2) 1; 3) расходится; 4) $7/2$; 5) $1/12$; 6) расходится. **1.213.** См. 1.154. **1.214.** Следует из 1.213. **1.215.** Если Σa_n сходится, то $a_n^2 < a_n$. Далее см. 1.214. **1.217.** 1), 3), 4), 6) сходится; 2), 5) расходится. **1.218.** Применить к последовательности частных сумм ряда критерий Коши 1.189. **1.223.** 1) 0; 2) i; 3) ∞; 4) расходится. **1.224.** Сходится к 0, если $|z| < 1$; если $z = 1$, то сходится к 1. **1.229.** 1) Сходится; 2), 3) расходится. **1.233.** 1) $[-1, 1]$; 2) $[-3, 1] \cup [1, 3]$; 3) $\mathbf{R}$, если $a > 0$, $b > 0$; $|x| \leqslant \min\left\{\dfrac{1}{\sqrt{-a}}, \dfrac{1}{\sqrt{-b}}\right\}$, если $a < 0$, $b < 0$; 4) $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}}]2k\pi,\ (2k+1)\pi[$; 5) $]e,\ +\infty[$; 6) $[0, +\infty[$; 7) $]-\infty,\ -1[\cup]1,\ +\infty[$. **1.236.** 2^d. **1.237.** 2) $\log_2 q$.

1.239. 1) $1(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \geqslant a; \end{cases}$ 2) $1(x-a) + 1(x-b) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & a \leqslant x < b; \\ 2, & x \geqslant b; \end{cases}$

3) $f(x) = c\,(1(x-a) - 1(x-b))$; 4) $g(x) = A\,(1(x-a) - 1(x-b)) + B\,(1(x-b) - 1(x-d))$. **1.248.** 1) Можно составить $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$; 2) можно составить все композиции. **1.250.** 1) Если f ограничена, то ограничена любая композиция $f \circ h$; 2) может быть неограниченной. **1.252.** Значения из $\mathbf{Z}$. **1.255.** $a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)\,b$. **1.256.** Рассмотреть $\varphi(x) = 2x$, $\psi(x) = f(x/2)$. **1.265.** Рассмотреть $f(x) = \cos x$.

1.270. 1) Общее кратное чисел T_1 и T_2. **1.274.** $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. **1.297.** 1) Да, например $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)$; 2) да, например $\varphi(x)=10^{\lg x}$. **1.298.** Рассмотреть $f|_{]a,b[}(x)=f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(10^{\lg(x-a)}-10^{\lg(b-x)}+a+b)$. **1.307.** Например, $f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-b), & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$ **1.330.** 1) 1/6; 2) $b/d+\beta/\delta$; 3) 2; 4) 0; 5) 2/3; 6) ma^{m-1}; 7) n/m; 8) 3; 9) $-\sqrt{a}$; 10) $(m-n)/2$. **1.336.** 1) $f(a-0)=0$, $f(a+0)$ не существует; 2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$; 3) $f(a-0)=-1$, $f(a+0)=1$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$; 5) $f(a-0)=1$, $f(a+0)=0$. **1.341.** 1) e; 2) $e^{1/a}$; 3) e^{2a}. **1.343.** 1) $f(a-0)=-\infty$, $f(a+0)=+\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, 3) $f(a-0)$ и $f(a+0)$ не существуют; 4) $f(a-0)=-\infty$, $f(a+0)=+\infty$. **1.347.** Показать, что существуют две бесконечно большие последовательности (x_n') и (x_n''), такие, что $(f(x_n'))$ и $(f(x_n''))$ сходятся к разным пределам. **1.349.** 1) 1; 2) 0. **1.361.** Предел определяется отношением старших членов $P(x)$ и $Q(x)$. **1.363.** 1) 1/3; 2) 0; 3) 3/2; 4) 1/2; 5) a/b; 6) $2n$; 7) $+\infty$, если $a>0$; 0, если $a<0$; 1, если $a=0$; 8) e^{a-b}. **1.367.** 1) m/n; 2) 1; 3) 1/3; 4) $\cos a$; 5) 1; 6) $e^{1/2}$; 7) $e^{\operatorname{ctg} a/(2a)}$, $a\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; 8) 1. **1.368.** 0. **1.369.** ∞. **1.370.** ∞. **1.373.** Нулевой многочлен, и только он. **1.392.** 1) 1; 2) 1/2; 3) 3; 4) 3; 5) k, где a_k — первый ненулевой коэффициент в ряду $a_0, a_1, \ldots, a_n$; 6) 2. **1.393.** 1) 2; 2) 1/2; 3) 2; 4) 1. **1.394.** 1) 2; 2) 1/2; 3) 1; 4) 1/2. **1.397.** Например, $x^{2/x}$. **1.398.** Рассмотреть $x^{1/2n}$. **1.402.** $P_2(x)=a_1a_2+(a_1b_2+b_1a_2)x+(c_1a_2+b_1b_2+a_1c_2)x^2$. **1.404.** Вычислить предел непосредственно и сравнить с пределом выражения, полученного после указанной замены. **1.405.** 1) 1/8; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **1.409.** 1) Непрерывна; 2), 3), 6) разрывна; 4), 5) непрерывна, если $A=1$. **1.415.** 2) Непрерывны справа (см. также 1.412 и ответы к 1.409). **1.418.** Нет. Использовать единственность предела. **1.425.** См. 1.306. **1.432.** 1) Устранимый разрыв при $x=1$; 2) бесконечный скачок при $x=0$; 3) скачки в точках $x_k=1/k$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$; бесконечный скачок при $x=0$; 4) бесконечный скачок при $x=0$, скачок при $x=1$; 5) точка неопределенности $x=0$; 6) бесконечные скачки в точках $x=\pm 1$. **1.435.** Точка неопределенности. **1.437.** Рассмотреть функции $1(x)$ и $\varphi(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x<0;\\ 0, & x\geqslant 0.\end{cases}$ **1.440.** 1) Все, кроме точки скачка; 2) точки устранимого разрыва; 3) все, кроме точки устранимого разрыва; 4) точки скачка. **1.443.** Рассмотреть функцию $\psi(x)=\varphi(x)D(x)$ (D — функция Дирихле). **1.445.** См. 1.446. **1.451.** Показать, что $\sup\limits_{[a,t]}f(x)$ и $\inf\limits_{[a,t]}f(x)$ непрерывны по t на $[a, b]$. **1.452.** Рассмотреть на $[-1, 1]$ функцию $f(x)=\sin(1/x)$, $x\neq 0$, $f(0)=0$. **1.464.** Только точки скачка. **1.500.** Рассмотреть $f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $g(y)=\sin y$, $x_0=0$. **1.510.** 3) Постоянная на I функция. **1.511.** Постоянные функции. **1.512.** 6) $g(x) = cx^2$, $c \in \mathbf{R}$. **1.513.** 3) $f(x) = e^{cx^2}$, $c \in \mathbf{R}$. **1.515.** 6) $+\infty$; 7) 0. **1.516.** 1) $E_k(I) = \{g | g(x) = h(x) + f(x) \ \forall f \in E_0(I)\}$; 2) E_0 — класс постоянных на I функций; 3) $E_k([0, +\infty[) = \{g | g(x) = \ln|\ln x| + C \ \forall C \in \mathbf{R}\}$. **1.522.** Характер монотонности на I может меняться не более одного раза. **1.526.** Существует, например $\varphi(x) = x^{-1/2}$ на $]0, 1[$. **1.548.** Следует из 1.536 и 1.544. **1.549.** Пусть $f(a) > g(a)$. Если $f(c) \neq g(c)$ ни для какого $c \in [a, b]$, то $f(x) > g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Обозначим $m = \min\limits_{[a,b]} g(x)$, и пусть $m = g(\underline{x})$, $\underline{x} \in [a, b]$. Тогда $f(\underline{x}) > g(\underline{x})$. В то же время $\forall x \in [a, b]$ $f(x) > g(x) \geqslant g(\underline{x})$. Значит, f не принимает на $[a, b]$ значения m, что противоречит результату 1.548. **1.550.** См. 1.549. **1.555.** Пусть $m = \min\limits_k f(x_k)$, $M = \max\limits_k f(x_k)$. Применить теорему о промежуточном значении, используя то, что $m \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant M$. **1.562.** Рассмотреть функцию $1(-x)$ на $[-1, 1]$, $a = 1$, $c = 0$, $b = -1$. **1.563.** $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x'$, $x'' \in A$, $|x' - x''| < \delta$, для которых $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. **1.564.** Следует из 1.563. **1.566.** От противного из 1.564. **1.567.** 1) Рассмотреть $f(x) = g(x) = x$ на $[0, +\infty[$; 2) следует из того, что если $|f(x)| \leqslant A$, $|g(x)| \leqslant B$ $\forall x \in [a, +\infty[$, то $|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \leqslant |f(x')g(x') - f(x')g(x'')| + |f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \leqslant A|g(x') - g(x'')| + B|f(x') - f(x'')|$. **1.568.** $\forall x_0 \in]a, b[$ $\exists [\alpha, \beta] \subset]a, b[$, такой, что $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Далее использовать результат 1.564. **1.569.** 1) Да; 2), 3) рассмотреть случай, когда одна из функций идентичная, $x \mapsto x$, вторая $x \mapsto 1/x$ на $]0, 1]$. **1.583.** Использовать результаты 1.574 и 1.582. **1.584.** Следует из неотрицательности вариации и 1.582. **1.589.** Следует из 1.584 — 1.586 и 1.588. **1.599.** $S(z) = z^2 - 3z + 1$. **1.600.** $S(z) = z - 2$, $R(z) = -5z - 3$. **1.605.** Использовать 1.597. **1.606.** См. 1.597, 1.605. **1.615.** Использовать результат 1.601. **1.627.** 1) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$; 2) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$; 3) $\frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1}$; 4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

2

2.2. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 1; 5) 1; 6) -1. **2.5.** Все дифференцируемы. **2.11.** Рассмотреть $f(x) = |x|$. **2.12.** Например, $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 0$. **2.13.** См. 2.12. **2.14.** Рассмотреть функции $x \mapsto |x|$ и $x \mapsto |x| + 1$. **2.37.** Нет. Рассмотреть $f(x) = |x|$. **2.38.** Необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна в x_0 и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. **2.41.** 3) Дифференцируема при $\alpha > 1$, непрерывна при $\alpha > 0$; 6) $\psi'(0) \neq 0$. **2.44.** Так как $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ существуют, то величина $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ конечна. Тогда $\frac{(f(x_0 + \Delta x))^k - (f(x_0))^k}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} ((f(x_0 + \Delta x))^{k-1} + f(x_0) \times (f(x_0 + \Delta x))^{k-2} + \ldots + (f(x_0))^{k-1})$. При $\Delta x \to \pm 0$ существуют конечные пределы. Если $f(x_0)=0$, то они совпадают, т. е. f^k дифференцируема при любом $k \geqslant 2$. Если $f(x_0) \neq 0$, то односторонние пределы различны при любом $k \geqslant 1$. **2.53.** 1) $a_0=2$, $b_0=-1$. **2.56.** $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. **2.60.** Бесконечное множество. **2.66.** 3) Существует единственная точка x_0, такая, что $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$. **2.75.** 1) 6; 2) $\sin x$; 3) $4 \operatorname{sh} 2x$; 4) 0. **2.91.** 1) $(x^2+100x+2450)e^x$; 2) $2^{30}(3045-45x^2)\sin 2x+2^{29}(1305x-2x^3)\cos 2x$; 3) $\frac{1}{2}\cdot 20!\left(\frac{1}{(x-1)^{21}}-\frac{1}{(x+1)^{21}}\right)$; 4) $-19!\left(\frac{1}{(x-1)^{20}}+\frac{1}{(x+1)^{20}}\right)$. **2.97.** 1) $e^x(dx^3+3dxd^2x+d^3x)$; 2) $\sin x\,(dx^4-3(d^2x)^2-4dxd^3x)+\cos x\,(d^4x-6dx^2d^2x)$. **2.100.** $y'=-x/y$. **2.102.** 1) $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 3) $y'=-\frac{y+e^x}{x+e^y}$. **2.105.** 1) $y+x-\sqrt{2}=0$; 2) $y-x+\sqrt{2}=0$. **2.110.** 1) $y'(x)=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$, $y''(x)=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; 2) $y'(x)=\cos^3 t$, $y''(x)=-3\sin t\cos^4 t$. **2.111.** 1) $y+x-\sqrt{2}=0$; 2) $\sqrt{3}\,y+x-2=0$. **2.124.** Показать, что существует $[\alpha, \beta]\subset\,]a, b[$, такой, что $f(\alpha)=f(\beta)$, и применить теорему Ролля к f на $[\alpha, \beta]$. **2.125.** См. 2.124. **2.127.** Между двумя корнями многочлена расположен корень его производной (следствие из теоремы Ролля). **2.129.** Функция f' имеет на $[a, b]$ по крайней мере n стационарных точек (см. 2.119). Значит, f'' имеет не менее $n-1$ стационарных точек, и т. д. **2.132.** Касательная в точке $(c, f(c))$ параллельна хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. **2.138.** Рассмотреть $f(x)=-1/x$ на $[1, +\infty[$. **2.139.** 2) $\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{1}{h}\ln\left(\frac{e^h-1}{h}\right)$. **2.140.** Числа $c\in\,]0, x[$ не заполняют сплошь окрестность точки 0, а образуют последовательность, сходящуюся к нулю. **2.142.** Постоянные c для f и g, вообще говоря, различны. **2.143.** Теорема Лагранжа (см. 2.131). **2.144.** Нет: условие $g'(x)\neq 0$, $x\in\,]-1, 1[$, не выполнено. **2.157.** 1) m/n; 2) 1; 3) 1; 4) -3; 5) 3/2; 6) 1/6; 7) 1/4; 8) 0. **2.161.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 0. **2.163.** 1) 1; 2) 1; 3) -1; 4) $-2/3$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 1; 9) e^2; 10) 1. **2.189.** 1) $\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$; 2) $\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$; 3) $1/(1-x)=1+x+x^2+\ldots+x^{2n}+o(x^{2n})$; 4) $1/(1+x^2)=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$. **2.192.** 1) $e^{x(x+1)}=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$; 2) $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$; 3) $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$; 4) $\ln(1+\sin x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$; 5) $\operatorname{tg}^2 x=x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)$; 6) $\sqrt{\cos x}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^5)$. **2.193.** $e^{x^2}=e+2e(x-1)+3e(x-1)^2+o((x-1)^2)$. **2.194.** 1) 3/2; 2) -3;

3) 2; 4) 1/2. **2.196.** 1) 2,71828; 2) 0,095; 3) 3,037; 4) 0,03490; 5) 0,99939. **2.228.** 1) $y_{\max} = 4$ при $x = 2$; 2) $y_{\min} = -1$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$; 3) нет экстремума; 4) $y_{\min} = 1$ при $x = 0$; 5) $y_{\min} = -e^{-1}$ при $x = e^{-1}$; 6) $y_{\min} = 1$ при $x = 1$; 7) нет экстремума; 8) $y_{\min} = 0$ при $x = -2$; 9) $y_{\min} = 0$ при $x = 1$; 10) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; 11) нет экстремума; 12) $y_{\max} = 1$ при $x = \pm(\pi/2 + 2k\pi)$, $y_{\min} = -1$ при $x = \pm(3\pi/2 + 2k\pi)$, $k = 0, 1, \ldots$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **2.229.** 1) $y_{\max} = 4$, $y_{\min} = -5$; 2) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 0$; 3) $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$; 4) $y_{\max} = e$, $y_{\min} = -e^{-1}$. **2.230.** 1) $\inf f = -\infty$, $\sup f = -1$; 2) $\inf f = -e^{-5\pi/4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sup f = e^{-\pi/4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2.245.** 1) Выпукла на $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, вогнута на $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) выпукла на $\left[\dfrac{4k-1}{4}\pi, \dfrac{4k+1}{4}\pi\right]$, вогнута на $\left[\dfrac{4k+1}{4}\pi, \dfrac{4k+3}{4}\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) выпукла на $[1, +\infty[$, вогнута на $]-\infty, 1]$; 4) выпукла на $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$ и на $[\sqrt{2}/2, +\infty[$, вогнута на $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$; 5) вогнута на $]-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty[$. **2.246.** $|\alpha| \leqslant 2$. **2.265.** Рассмотреть $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1; \\ 1/x, & x > 1. \end{cases}$ **2.272.** 1) Вертикальная $x = 1$, горизонтальная $y = 1$ при $x \to \pm\infty$; 2) вертикальная $x = 1$, наклонная $y = x + 1$ при $x \to \pm\infty$; 3) вертикальная $x = 0$, наклонная $y = x + 1$ при $x \to \pm\infty$; 4) вертикальные $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) наклонные $y = 2x - \pi/2$ при $x \to -\infty$, $y = 2x + \pi/2$ при $x \to +\infty$; 6) наклонные $y = \pi x - 2$ при $x \to +\infty$, $y = -\pi x - 2$ при $x \to -\infty$.

3

3.9. 1) $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$; 2) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{8}{3}x^{3/2} + 4x + C$; 3) $-\operatorname{ctg} x + \ln|x| + C$; 4) $\operatorname{tg} x - x + C$; 5) $x - \operatorname{arctg} x + C$; 6) $2x^{1/2} + 3x + 2x^{3/2} + \dfrac{1}{2}x^2 + C$; 7) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{2}{3}e^{3x} + \dfrac{1}{4}e^{4x} + C$; 8) $\dfrac{1}{6}\operatorname{ch} 3x - \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} x + C$; 9) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; 10) $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} - \dfrac{2^{-x}}{\ln 2} + C$. **3.13.** 1) $\ln|x+1| + C$; 2) $\dfrac{1}{6}(x+2)^6 + C$; 3) $\dfrac{1}{7}(1+x)^7 - \dfrac{1}{6}(1+x)^6 + C$; 4) $\dfrac{1}{99}(1+x)^{-99} - \dfrac{1}{98}(1+x)^{-98} + C$; 5) $-2(1-x)^{1/2} + \dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$; 6) $\operatorname{arctg}(x+1) + C$; 7) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+3) + C$; 8) $\sqrt{2x+3} + C$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x\right) + C$; 10) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$; 11) $-\sqrt{a^2 - x^2} + C$; 12) $\sqrt{a^2 + x^2} + C$; 13) $2e^{\sqrt{x}} + C$; 14) $-\cos(\ln x) + C$; 15) $-\ln|\cos x| +$

$+C$; 16) $\ln(1+e^x)+C$; 17) $\dfrac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3+C$; 18) $-\arcsin\dfrac{1}{x}+C$; 19) $2\operatorname{arctg} e^x+C$; 20) $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; 21) $\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$.

3.15. 1) $\arcsin\dfrac{x}{a}+C$; 2) $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$; 3) $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C$; 4) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-$ $-\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$; 5) $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$; 6) $\ln|x+$ $+\sqrt{a^2+x^2}|+C$. **3.16.** 1) Представить $x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4$ и использовать результат 3.15.3; 2) $x\sqrt{x^2+x+1}=((x+1/2)-$ $-1/2)\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}$ и далее, как в п. 1; 3) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=$ $=\dfrac{-d(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 5) $\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{-x^{-1}\,d(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}}$; 6) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+\dfrac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)+C$; 7) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\dfrac{(x+1/2)\,d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}+$ $+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}$; 8) $\ln\left(e^x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)+C$.

3.19. 1) xe^x-e^x+C; 2) $(x^2+x-2)\sin x+(2x+1)\cos x+C$; 3) $x(\ln x-1)+C$; 4) $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 5) $x\arcsin x+$ $+\sqrt{1-x^2}+C$; 6) $(x^2+2)\operatorname{sh} x-2x\operatorname{ch} x+C$; 7) $\dfrac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+$ $+C$; 8) $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$. **3.26.** 1) $\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|+C$; 2) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{1}{2(x+1)}+C$; 3) $\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\ln\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}\right|-\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **3.38.** 1) $x-\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C$; 2) $-6\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}-$ $-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-3\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$; 3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+$ $+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$; 4) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\ln|x+$

$+\sqrt{x^2-1}\,|+C$. **3.43.** 1) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right|+C$;
2) $\ln\left|\dfrac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg} t+C$, где $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **3.47.** 1) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$;
2) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$; 3) $\dfrac{12}{7}t^7-3t^4+C$, где $t=$ $=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$; 4) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,
где $t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **3.52.** 1) $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C$; 2) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+$ $+\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}{1+2\cos x}\right|+$ $+C$; 4) $-\dfrac{\cos x}{\sin x+2\cos x}+C$. **3.55.** В случаях 1 и 2. **3.61.** Следует из того, что любая интегральная сумма σ удовлетворяет неравенству $\underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma}$. **3.62.** Использовать теорему Гейне. **3.79.** $1/2$. **3.80.** 1) $e-1$; 2) 1; 3) $2e-7/2$; 4) $1-\pi/2$. **3.101.** Для $\forall\varepsilon>0$ существуют разбиения $\{x_k'\}$ отрезка $[a, c]$ и $\{x_p''\}$ отрезка $[c, b]$, по которым интегральные колебания на этих отрезках не превосходят $\varepsilon/2$. Тогда $\{x_k'\}\cup\{x_p''\}$ является разбиением $[a, b]$, по которому интегральное колебание f на $[a, b]$ не превосходит ε. **3.102.** Интегрируемость f на $[a, c]$ и $[c, b]$ следует из 3.86. Для получения формулы нужно записать интегральные суммы и перейти к пределу. **3.105.** Пусть $|f(x)|\leqslant M$ $\forall x\in[a, b]$ и $c_1, \ldots, c_n$ — точки разрыва функции f. Существуют $[\alpha_k, \beta_k]\subset[a, b]$, $k=1, 2, \ldots,$ n, такие, что $c_k\in[\alpha_k, \beta_k]$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k-\beta_k|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4M}$. На $[a, b]\setminus$ $\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}]\alpha_k, \beta_k[$ функция непрерывна, а значит, интегрируема, и ее интегральное колебание $\Omega_1\leqslant\varepsilon/2$ для некоторого разбиения $\{x_k\}$. Тогда, взяв $\{c_i\}\cup\{x_k\}$ в качестве разбиения $[a, b]$, получим интегральное колебание $\Omega\leqslant 2M\dfrac{\varepsilon}{4M}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. **3.110.** 1) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx=0$ $\forall[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. Пусть последовательность (ε_k) монотонно убывает к нулю. Для ε_1 существует такое разбиение, для которого ин-

тегральная сумма $\sigma_1 \leqslant \varepsilon_1 (b-a)$. Значит, существует отрезок $[a_1, b_1]$, на котором $f(x) < \varepsilon_1$ и $\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$. Продолжив рассуждения, получим систему отрезков $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, таких, что $f(x) < \varepsilon_k \ \forall x \in [a_k, b_k]$. Если $c \in \bigcap\limits_k [a_k, b_k]$, то $f(c) < \varepsilon_k \ \forall k$, т. е. $f(c) = 0$, что противоречит условию; 2) если $\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) = 0 \ \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то при любом разбиении $[a, b]$ можно построить интегральную сумму $\sigma \leqslant \varepsilon$, что противоречит условию $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. **3.112.** См. 3.110. **3.114.** Следует из того, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,\Delta x_k$. **3.119.** 1/3. **3.124.** 1) Рассмотреть $f(x) = 1/x$ на $[-1, 0[$; 2) рассмотреть $f(x) = \begin{cases} (-1)^n n(n-1), & x \in \left[-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n-1}\right[; \quad \alpha_n = -\dfrac{1}{n}. \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **3.126.** $|\varphi(x') - \varphi(x'')| = \left|\dfrac{f(x') - f(x'')}{f(x')\,f(x'')}\right| \leqslant \dfrac{\omega_k^f}{\alpha^2} \Rightarrow \Omega_\varphi \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\,\Omega_f$. **3.132.** $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \dfrac{1}{\Delta x}\,f'(c)\,\Delta x = f'(c)$, где c лежит между x и $x + \Delta x$. Отсюда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f'(x)$. **3.134.** Интегрируемая функция f ограничена, $|f(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1\cdot}{\Delta x}\,M\Delta x\right| = M.$$

3.137. 1) $2x\sqrt{\sin x^2}$; 2) $2x\sqrt{\cos x^2} - \sqrt{\cos x}$; 3) $\cos x e^{\sin^2 x} - 2xe^{x^4}$; 4) $2xe^{x^8}$. **3.141.** 1) 1/3; 2) 1; 3) 1. **3.143.** 1) 1; 2) 0; 3) 2. **3.146.** 1) $\dfrac{\pi}{2} - 1$; 2) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}e^{-2}$; 3) 0. **3.150.** 1) $\pi a^2/4$; 2) $\sin e$; 3) $(e-1)/2$. **3.153.** 5) Необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^T f(x)\,dx = 0$. В противном случае $F(nT) = \int\limits_0^{nT} f(x)\,dx = n\int\limits_0^T f(x)\,dx \to \infty$ при $n \to \infty$; 6) $\varphi(x) = F(x) - Ax = \int\limits_0^x (f(t) - A)\,dt$. Из п. 5 следует, что должно выполняться $\int\limits_0^T (f(t)-A)\,dt = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$. **3.154.** Рассмотреть функцию $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 4k\pi; \\ 1, & x = 4k\pi, \end{cases}$ $k \in \mathbf{Z}$. **3.155.** 1) Не существует; 2) $+\infty$; 3) 1. **3.157.** $\alpha > 1$. **3.158.** 1) Сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится; 5) сходится. **3.162.** 1) Сходится; 2) расходится; 3) сходится. **3.163.** Рассмотреть $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq n; \\ 1, & x = n, \end{cases}$ $n \in \mathbf{N}$, $x \in [1, +\infty[$. **3.168.** 2) Нет. **3.172.** 1) Если g интегрируема, то f интегрируема; 2) если g неинтегрируема, то f неинтегрируема. **3.173.** 1) Расходится; 2) сходится; 3) сходится, если $n-m \geqslant 2$, расходится, если $n-m<2$. **3.175.** 1) Сходится; 2) расходится; 3) расходится. **3.177.** 1) π; 2) 0; 3) 0. **3.179.** 1) ∞; 2) 1. **3.180.** 1) Сходится; если $\alpha > -1$; 2) сходится. **3.184.** 1) Расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. **3.186.** 1) Сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) сходится. **3.198.** 1) 1/2; 2) $-\pi/4$; 3) 2. **3.201.** 1) 0; 2) 0. **3.205.** Устранимые разрывы или скачки. **3.211.** 1), 2), 6) Полунепрерывны сверху; 3) не является полунепрерывной ни сверху, ни снизу; 4) полунепрерывна снизу; 5) полунепрерывна сверху и снизу. **3.215.** 1) Положить $f(0)=c$, $c \geqslant 1$; 2) положить $f(0)=c$, $c \leqslant -1$. **3.218.** 1) $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$; 2) $\overline{f}(x) = \begin{cases} -1, & x<0; \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $\underline{f}(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$

3.223. См. 3.224. **3.224.** Например, $\frac{\underline{\psi}(x)+\overline{\varphi}(x)}{2}$. **3.228.** Оценить разность между римановой суммой σ_g функции g и интегральной суммой τ функции f, соответствующей указанному разбиению, и воспользоваться неравенством $|\sigma_g - A| \leqslant |\sigma_g - \tau| + |\tau - A|$. **3.233.** Пронумеруем все рациональные числа $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $I_k = [\alpha_k, \beta_k] = \left[r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \ r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right]$. Тогда $\bigcup\limits_k I_k \supset \mathbf{Q}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| = \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$. **3.247.** Например, любая неограниченная фигура, содержащая круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. **3.257.** 1) 4/15; 2) 17/12; 3) 4/3. **3.260.** 1) $4a^2\pi^3/3$; 2) $9a^2\pi/2$. **3.262.** 1) $3a^2\pi$; 2) πab. **3.263.** 1) 1; 2) 1.

3.280. 1) $8a$; 2) $\sqrt{2}\,(e^{\pi/2}-1)$; 3) $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{sh} 1$; 5) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$; 6) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$; 7) $8a$; 8) $3\pi a/2$. **3.303.** 1) $\pi^2/2$; 2) $3\pi^2/2 - 4\pi$; 3) $4\pi ab^2/3$; 4) $5\pi^2$. **3.304.** 1) $4\pi abc/3$; 2) $8\pi abc/3$. **3.307.** 1) $2\pi^2$; 2) $6\pi^3$; 3) $4\pi a^2 b/3$; 4) $2\pi^2 c^2 a$. **3.308.** $\pi/4$. **3.309.** $\sqrt{l^2-b^2}/b$. **3.310.** Ширина окна $2P/(4+\pi)$. **3.311.** $R = h = \sqrt[3]{V/\pi}$. **3.312.** 1) $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2\sqrt[3]{V/(2\pi)}$; 2) $R = \sqrt{S/(6\pi)}$, $h = 2\sqrt{S/(6\pi)}$. **3.314.** 1) $\frac{l}{4} \times \frac{l}{2}$; 2) $\sqrt{\frac{S}{2}} \times$

$\times \sqrt{2S}$. **3.315.** $\varphi = \pi/3$. **3.316.** $x = ac/(a+b)$, где c — расстояние между перпендикулярами к реке, проходящими через A и B. **3.317.** В точку C, $AC = v_1 a/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. **3.318.** $(l^{2/3} - a^{2/3})^{3/2}$. **3.319.** a. **3.320.** $\pi/4$. **3.321.** $v = \left(\frac{2\beta l^2}{3\alpha}\right)^{1/5}$, $d = 5\left(\frac{\alpha^2\beta^3 l^6}{108}\right)^{1/5}$. **3.322.** $\sqrt{mM}$. **3.324.** $1{,}7 \cdot 10^4\, g$ Н. **3.325.** $\pi\rho g r h^2$. **3.326.** $1{,}6 \cdot 10^6 \pi g$ Н. **3.328.** При вертикальном расположении резервуара $A = \pi\rho g R^2 H^2/2$, при горизонтальном $A = \pi\rho g R^3 H$. **3.330.** $\frac{4}{3}\pi R^3 g\,(R + (\rho - \rho_в)\,H)$. **3.332.** $\gamma\,\frac{mM}{a\,(a+l)}$. **3.333.** $qQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. **3.335.** $\frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right)$. **3.336.** 0,5 Дж. **3.338.** $MR^2\omega/5$. **3.339.** В первом случае $\pi R^2 h^2/4$, во втором $\pi R^2 h$. **3.342.** $Q(t) = \frac{Q_0 \alpha e^{\alpha t}}{\alpha - Q_0\beta + \beta Q_0 e^{\alpha t}}$. **3.344.** 3) 10 000 м. **3.345.** $v = \frac{A}{q}\ln\frac{p}{p - qt}$, $h = \frac{A}{q^2}\left(qt_1 - (p - qt_1)\ln\frac{p}{p - qt_1}\right)$. **3.346.** $t = \frac{D^2}{cd^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$, $t_1 = \frac{D^2}{cd^2}\sqrt{\frac{H}{g}}$. **3.348.** $t_1 = \frac{2D^2}{3d^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$, $t_2 = \frac{16D^2}{9d^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$. **3.349.** 1) $t = \frac{V_0}{cS}\sqrt{\frac{2}{gH}}$, где c — коэффициент (см. 3.346); 2) $t_1 = \frac{V_0}{cS\sqrt{2gH}}$; 3) $t_2 = \frac{V_0}{cSH}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H-h} + b\ln\left|\frac{\sqrt{H} - b}{\sqrt{H-h} - b}\right|\right)$, где $b = \frac{V}{cS\sqrt{2g}}$; 4) $h_1 = \frac{V^2}{2gc^2S^2} - H$; 5) $h_2 = H - \frac{V^2}{2gc^2S^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданов Ю. С.* Лекции по математическому анализу: В 2 ч.— Мн.: Изд-во БГУ, 1974.— Ч. 1.—176 с.
2. *Воднев В. Т., Наумович А. Ф.* Математический словарь средней школы.— Мн.: Изд-во БГУ, 1978.— 176 с.
3. *Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф.* Математический словарь высшей школы.— Мн.: Выш. шк., 1984.— 527 с.
4. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Мир, 1971.— 680 с.
5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
6. Задачник по курсу математического анализа / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон и др.: В 2 ч.— М.: Просвещение, 1971.— Ч. 1.— 343 с.; Ч. 2.— 336 с.
7. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу.— М.: Высш. шк., 1966.— 460 с.
8. *Ильин В. А., Поэняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч.— М.: Наука, 1973.— Ч. 1.— 600 с.; Ч. 2.— 448 с.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1970.— Т. 1.— 592 с.; Т. 2.— 422 с.
10. *Леваков А. А., Пыжкова Н. В., Черенкова Л. П.* Начала анализа в наглядном изложении.— Мн.: Выш. шк., 1982.— 240 с.
11. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин.— М.: Высш. шк., 1984.— 200 с.
12. Математический анализ в примерах и задачах / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач: В 2 ч.— Киев: Вища шк., 1974.— Т. 1.— 680 с.; 1977 — Т. 2.— 679 с.
13. *Ривкинд Я. И.* Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах.— Мн.: Выш. шк., 1971.— 192 с.
14. *Ривкинд Я. И.* Задачи по математическому анализу.— Мн.: Выш. шк., 1973.— 109 с.
15. Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.— М.: Наука, 1984.— 592 с.
16. *Теляковский С. А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного.— М.: Наука, 1980.— 112 с.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.— М.: Наука, 1966.— Т. 1.— 608 с.; Т. 2— 800 с.; Т. 3.— 656 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность интеграла 116
Асимптота вертикальная 103
— горизонтальная 103
— левосторонняя 103
— наклонная 103
— правосторонняя 103

Бином Ньютона 12

Вариация функции полная 64
Выпуклость функции 60, 100
— — вверх 100
— — вниз 100

Геометрический смысл интеграла 137
Граница множества верхняя 13
— — нижняя 13
— — точная 14
— фигуры 136
Грань множества верхняя 14
— — нижняя 14
График функции 76

Двойная подстановка 120
Деление многочленов 66
Делимость многочленов без остатка 66
Диаметр разбиения 110
Дифференциал функции 71
— — второй 82
— — порядка n 82
Дифференцирование 71
Дифференцируемость функции в точке 71
— — на множестве 75
Длина кривой 139
Дробь десятичная бесконечная 10

Задание функции неявное 83
— — параметрическое 83

Закон логистический 151
— Мальтуса 151
Замена переменной в неопределенном интеграле 106
— — в определенном интеграле 121
Замечательные пределы 43, 45, 58
Замкнутость множества относительно операции 16
Значение несобственного интеграла главное 125, 127

Инвариантность формы дифференциала 79
Интеграл Лебега 134
— неопределенный 104
— несобственный 123, 126
— расходящийся 123
— Римана 111
— Стилтьеса 128
— сходящийся 123, 126
Интегрирусмость функции в смысле Лебега 134
— — — — Римана 111
— — — — Стилтьеса 128
Интервал 13
Инфимум множества 13
— функции на множестве 33

Касательная 76
Квадрируемость 136
Квазиполином 81
Колебание функции в точке 53
— — на множестве 54
— — — — интегральное 115
Композиция функций 34
Корень многочлена 66
— — кратный 66
Кривая гладкая 139
— плоская 138
— простая 138
— спрямляемая 139

Критерий выпуклости дифференцируемой функции 100
— Гейне 40
— — левосторонний 42
— — правосторонний 42
— Дарбу интегрируемости функции 115, 116
— Коши интегрируемости функции 113
— — существования предела функции 42
— — сходимости несобственного интеграла 124, 126
— — — последовательности 25
— — — ряда 30
— монотонности дифференцируемой функции 97
— непрерывности монотонной функции 55
— сходимости комплексной последовательности 30
— постоянства дифференцируемой функции 96
— различия чисел 11
— эквивалентности бесконечно малых функций 47

Лемма о сжатой последовательности 20
Линейность интеграла 104
Логарифм натуральный 23
Ломаная вписанная 139

Максимум функции локальный 97
— — на множестве 61
Метод неопределенных коэффициентов 69
Минимум функции локальный 97
— — на множестве 61
Многогранник вписанный 141
— описанный 141
Многоугольник 136
— вписанный 136
— описанный 136
Многочлен 65
— двух переменных 70
— Тейлора 90
Множество задания функции 31
— значений функции 31
— конечное 13
— ограниченное 13
— счетное 12
Монотонность интеграла 112
— последовательности 22
— функции 36

Непрерывность функции в точке 49
— — — — слева 49
— — — — справа 49
— — на множестве 50
— — — — равномерная 62
Неравенство Иенсена 60
— между средним арифметическим и средним геометрическим 101
— Юнга 101

Область определения функции естественная 32
Образ элемента 16
Объем многогранника 141
— тела 141
— — вращения 142, 143
— тетраэдра 140
Ограниченность последовательности 17
— функции 32
Окрестность точки 13
— функции 132
о-символика 46
Основание логарифма натуральное 23
Основная теорема алгебры 67
Остаток от деления многочленов 66
— последовательности 17
Остаточный член формулы Тейлора 90
— — — — в форме Коши 92
— — — — — — Лагранжа 91
— — — — — — Пеано 92
Отображение 16
Отрезок 13

Первообразная 104
— неэлементарная 107
Переразложение многочлена 90
Перестановка из n элементов 11
Период функции 34
Площадь многоугольника 136
— треугольника 135
— фигуры 136
— — внешняя 136
— — внутренняя 136
Подпоследовательность 17
Подстановка 106

Подстановки Эйлера 109
Полуинтервал 13
Полунепрерывность функции в точке 131
— — на множестве 131
Порядок малости функции 46
Последовательность 16
— бесконечно большая 18
— — малая 17
— возрастающая 22
— комплексная 30
— монотонная 22
— ограниченная 17
— расходящаяся 19
— строго монотонная 22
— — возрастающая 22
— — убывающая 22
— сходящаяся 19
— убывающая 22
— фундаментальная 25
Правила дифференцирования 72
Правило Де Моргана 10
— исследования стационарных точек 98
— — точек, подозрительных на перегиб 102
— Лопиталя 88, 89
— цепочки 74
— Штольца 89
Предел последовательности 19
— — бесконечный 20
— — верхний 26
— — нижний 26
— функции в точке 39
— — — — бесконечный 43
— — — — вдоль множества 44
— — — — левосторонний 42
— — — — правосторонний 42
— — на бесконечности 43
Приближение числа по избытку 10
— — — недостатку 10
Принадлежность функции множеству в целом 132
Принцип выбора 25
Приращение переменной 71
— функции 71
Производная функции в точке 71
— — — — бесконечная 73
— — — — вторая 79
— — — — левосторонняя 74
— — — — нулевого порядка 80
— — — — порядка n 79
— — — — правосторонняя 74
— — , заданной параметрически 84
— — , — неявно 83
Производные старших порядков 79
Промежуток 13
— бесконечный 14
— замкнутый 13
— открытый 13
Прообраз элемента 16
Прямая числовая 12

Равенство многочленов 66
Разбиение отрезка 110
Разложения по формуле Тейлора основные 93
Рационализация подынтегрального выражения 108
Рациональная функция 67
— — двух переменных 70
— — правильная 67
— — простейшая 69
Ряд 29
— комплексный 31
— положительный 29
— расходящийся 29
— сходящийся 29
— — абсолютно 31
— Тейлора 95
— — основных функций 95

Сектор криволинейный 137
Секущая 76
Сжимающее свойство 40
Согласование произвольных постоянных 104
Сочетание из n элементов по m 11
Сравнение функций при $x \to a$ 46
Степень многочлена 65
Сужение функции 33
Сумма интегральная 111
— — Стилтьеса 128
— риманова 133
— ряда 29
— — частная 29
Супремум множества 13
— функции на множестве 33
Сходимость несобственного интеграла 123
— последовательности 19
— — комплексной 30
— ряда 31
— — абсолютная 31

Таблица первообразных 104, 105
— производных 74

Тело 140
— кубируемое 141
Теорема Барроу 119
— Безу 66
— Вейерштрасса 61
— Кантора 63
— Коши 86
— Лагранжа 85
— о гранях 15
— — множестве точек разрыва монотонной функции 55
— — непрерывности обратной функции 56
— — — сложной функции 57
— — представления рациональной функции в виде суммы простейших 69
— — производной обратной функции 73
— — — сложной функции 74
— — промежуточном значении 61
— — сохранении знака 49
— — среднем 114
— — существовании монотонной подпоследовательности 24
— об ограниченной монотонной последовательности 22
— Ролля 85
— Ферма 84
— Штольца для последовательности 27
Точка бесконечного скачка 51, 52
— локального экстремума 97
— — — изолированная 97
— множества внутренняя 13
— — граничная 136
— — предельная 44
— неопределенности 51, 52
— особая 126
— перегиба 101
— разрыва 51, 52
— — второго рода 52
— — первого рода 52
— — устранимого 52
— скачка 52
— стационарная 84
— экстремума 61
Трапеция криволинейная 137

Условие Дарбу интегрируемости функции достаточное 116
— — — — необходимое 115
— интегрируемости необходимое 113
— Коши для последовательности 25
— — — функции при $x \to a$ 40
— локального экстремума достаточное 98
— — — необходимое 84, 97
— сходимости ряда необходимое 29

Фигура 135
— квадрируемая 136
Формула интегрирования по частям неопределенного интеграла 107
— — — — интеграла Стилтьеса 130
— — — — определенного интеграла 121
— конечных приращений 86
— Лейбница 81
— — для дифференциалов 82
— Ньютона 12
— Ньютона — Лейбница 120
— представления остаточного члена 91
— Тейлора 90
Формулы Эйлера 96
Функции гиперболические 38
— — обратные 38
— одного порядка малости 46
— эквивалентные при $x \to a$ 46
— — на множестве 118
— элементарные 38
Функция 31
— бесконечно дифференцируемая 81
— — малая 46
— вогнутая на множестве 99
— возрастающая 36
— — строго 36
— выпуклая 60
— — вверх 100
— — вниз 100
— — строго 60
— Дирихле 32
— дифференцируемая в точке 71
— — — — дважды 79
— — — — n раз 79
— — — — слева 74
— — — — справа 74
— — на множестве 75
— интегрируемая 111
— — по Лебегу 134
— — по Риману 111
— — по Стилтьесу 128
— монотонная 36

Функция, непрерывная в точке 49
— — — — слева 49
— — — — справа 49
— — на множестве 50
— нечетная 35
— неявная 83
— обратная 56
— ограниченная 32
— — сверху 32
— — снизу 32
— параметрическая 83
— периодическая 34
— полунепрерывная в точке сверху 131
— — — — снизу 131
— — на множестве сверху 131
— — — — снизу 131
— равномерно непрерывная на множестве 62
— с ограниченной вариацией 64
— ступенчатая 131
— убывающая 36
— — строго 36
— Хевисайда 32
— четная 35

Частное многочленов 66
Число действительное 10
— десятичное 8
— натуральное 8
— рациональное 8
Число e 23
— перестановок из n элементов 11
— сочетаний из n элементов по m 12
Член ряда 29

Экспонента комплексного аргумента 96
— матричная 96
Экстремальное значение функции 61
Экстремум локальный 97
— острый 99

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Основные обозначения 5

1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1.1. Числа и числовые множества 8
1.2. Числовые последовательности 16
1.3. Существование предела последовательности 22
1.4. Функции 31
1.5. Предел функции 39
1.6. Бесконечно малые функции 46
1.7. Непрерывные функции 49
1.8. Функции, непрерывные на множестве 60
1.9. Рациональные функции 65

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

2.1. Производная и дифференциал 71
2.2. Производные и дифференциалы порядков выше первого . . 79
2.3. Основные теоремы дифференциального исчисления . . . 84
2.4. Раскрытие неопределенностей 87
2.5. Формула Тейлора 90
2.6. Монотонность. Экстремумы 96
2.7. Дифференцируемые выпуклые функции 99
2.8. Асимптоты 103

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл 104
3.2. Определенный интеграл 110
3.3. Критерий Дарбу интегрируемости 115
3.4. Вычисление определенного интеграла 119
3.5. Обобщения интеграла 122
3.6. Геометрические приложения определенного интеграла . . 135
3.7. Использование аналитических методов при построении и исследовании математических моделей естественных и технических процессов 143

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ 15

Литература 168

Предметный указатель 169

Учебное издание

Богданов Юрий Станиславович
Кастрица Олег Адамович

**НАЧАЛА АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ
И УПРАЖНЕНИЯХ**

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *Е. В. Сукач*
Младший редактор *В. М. Кушилевич*
Художник переплета *И. М. Андрианов*
Художественный редактор *Ю. С. Сергачев*
Технический редактор *М. Н. Кислякова*
Корректор *В. В. Неверко*

ИБ № 2524

Сдано в набор 12.05.87. Подписано в печать 04.02.88. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,24. Уч.-изд. л. 10,38. Тираж 9600 экз. Зак. 833. Цена 80 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Типография им. Франциска Скорины издательства «Наука и техника». 220600, Минск, Ленинский проспект, 68.

Богданов Ю. С., Кастрица О. А.
Б 73 Начала анализа в задачах и упражнениях: Учеб. пособие.— Мн.: Выш. шк., 1988.— 174 с.: ил.
ISBN 5—339—00009—5

В виде последовательности задач сфомулированы основные положения математического анализа. Включены также задачи, которые могут быть использованы на кружковых занятиях и при самостоятельном изучении курса.

Для студентов математических специальностей университетов. Может быть полезным студентам технических и педагогических вузов.

Б $\frac{1702050000-016}{М304(03)-88}$ 10—88

ББК 22.161я73