В. Бляшке

КРУГ И ШАР

В. БЛЯШКЕ

КРУГ И ШАР

Перевод с немецкого
В. А. ЗАЛГАЛЛЕРА и С. И. ЗАЛГАЛЛЕР

Под редакцией
В. А. ЗАЛГАЛЛЕРА и И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

513
Б 71
УДК 513.0

WILHELM BLASCHKE

KREIS UND KUGEL

2., durchgesehene und verbesserte Auflage

Walter de Gruyter & Co
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung (J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung Georg Reimer Karl J. Trübner)
Veit & Comp.
BERLIN 1956

Вильгельм Бляшке

КРУГ И ШАР

М., 1967 г., 232 стр. с илл.

Редактор *Д. Л. Снежко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *С. Н. Емельянова* и *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 13/II 1967 г. Подписано к печати 25/VII 1967 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ. печ. л. 7,25. Условн. печ. л. 12,18. Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 14 000 экз.
Цена книги 1 р. 05 к. Заказ № 654

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

2-2-3
76-67

СОДЕРЖАНИЕ

От редакторов 6

Предисловие автора ко второму изданию 7

Первая часть. **Минимальное свойство круга** 9

§ 1. Четырехшарнирный метод Штейнера 9
§ 2. Вопрос существования 11
§ 3. Площадь многоугольника 13
§ 4. Применение четырехшарнирного метода к многоугольнику 17
§ 5. Доказательство существования для многоугольника . . . 19
§ 6. Равносторонние многоугольники и тригонометрические выражения 22
§ 7. Длина кривой 30
§ 8. Приближение кривой многоугольниками 34
§ 9. Функции ограниченной вариации 37
§ 10. Площадь, охваченная замкнутой кривой 40
§ 11. Решение изопериметрической задачи на плоскости . . . 41
§ 12. Приложения 44
§ 13. О понятии интеграла 47
§ 14. Исторические сведения; литература 51

Вторая часть. **Минимальное свойство шара** 57

§ 15. Основная идея доказательства, принадлежащая Штейнеру 57

I. Постановка задачи (57). II. Симметризация Штейнера (58). III. Критика доказательства Штейнера (60).

§ 16. Выпуклые тела и выпуклые функции 62

I. Выпуклые функции двух переменных (62). II. Задание выпуклого тела посредством неравенств (64). III. Выпуклые функции одной переменной (66). IV. Опорные прямые. Опорные плоскости (67). V. Выпуклая оболочка точечного множества. Выпуклые многогранники (69). VI. Опорная функция (70).

§ 17. Объем и площадь поверхности 71

I. Объем и площадь поверхности многогранника (71). II. Приближение многогранниками (72). III. Определение объема и площади поверхности произвольного выпуклого тела (74). IV. Сходящиеся последовательности выпуклых тел (75). V. Непрерывность объема и площади поверхности для выпуклых тел (77).

§ 18. Одно обобщение теоремы Больцано — Вейерштрасса о существовании предельной точки 79

I. Теорема выбора для выпуклых тел (79). II. Диагональный процесс Кантора (79). III. Сходимость выбранной последовательности (81). IV. Совпадение с ранее данным определением сходимости (82). V. Другая форма определения сходимости (83).

§ 19. Симметризация Штейнера 85

I. Симметризация сходящихся последовательностей тел (85). II. Влияние симметризации на объем и площадь поверхности (88). III. Симметризация приближающих многогранников (89). IV. Применение теоремы Гёльдера о среднем значении (91). V. Использование найденной оценки (92). VI. Неравенство Шварца (94). VII. Уменьшение площади поверхности (96). VIII. Изопериметрическое свойство шара (98).

§ 20. Дополнительные замечания 99

I. Об ограничении одними лишь выпуклыми телами (99). II. О существовании двойного интеграла (102). III. Понятия „выпуклого тела" и „выпуклой функции" (103).

Третья часть. **Теоремы Шварца, Брунна и Минковского о выпуклых телах** 106

§ 21. Симметризация Шварца и теоремы Брунна 106

I. Симметризация Шварца (106). II. Доказательство сходимости (107). III. О центре тяжести (109). IV. Теорема Г. Брунна (110). V. Теорема Г. А. Шварца (112).

§ 22. Теоремы Брунна и Минковского 113

I. Линейные семейства и выпуклые семейства выпуклых тел (113). II. Симметризация выпуклых семейств (116). III. Доказательство теоремы Брунна об объемах тел линейного семейства (117). IV. Симметризация линейных семейств (119). V. Дополнение Минковского к теореме Брунна (121). VI. Неравенства Минковского (122). VII. О другом доказательстве неравенства $M^2 - 4\pi O \geqslant 0$ (124).

§ 23. Дополнения 126

I. Литература (126). II. Лемма Виртингера (127). III. Применение (128). IV. Перенесение леммы Виртингера в сферическую геометрию (130). V. Формула Минковского для площади поверхности (132). VI. Выпуклые функционалы (133).

Четвертая часть. **Другие задачи об экстремумах для выпуклых тел** 136

§ 24. Наибольший шар, который может свободно перекатываться внутри выпуклой поверхности 136

I. О дифференциальной геометрии „в целом" (136). II. Наименьшая и наибольшая окружность кривизны выпуклой кривой (137). III. Факт, двойственный теореме Эйлера о кривизне поверхности (140). IV. Решение пространственной задачи (141).

§ 25. Ограничения для значений кривизны выпуклых поверхностей 143

I. Постановка вопроса и сведение к поверхностям вращения (143). II. Применение симметризации Шварца (144). III. Инвариантность диаметра (145). IV. Теорема Бибербаха (147). V. Поведение кривизны при симметризации (148). VI. Поведение кривизны при предельном пере-

ходе (152). VII. Подготовка к доказательству для поверхностей вращения (155). VIII. Веретенообразные поверхности вращения постоянной кривизны (157). IX. Результаты (159). X. Теорема Бонне (161).

§ 26. Другие ограничения кривизны 163

I. Постановка задачи и сведение к поверхностям вращения (163). II. Свойства операции окатывания (165). III. Дифференциальная геометрия опорной функции (166). IV. Поведение кривизны при окатывании (169). V. Сырообразная поверхность вращения постоянной кривизны (171). VI. Поведение средней кривизны при окатывании (173).

Добавление. **Взгляд на дальнейшие исследования о выпуклых телах** 175

I. Площадь проекции выпуклого тела (176). II. Периметры проекций выпуклого тела (178). III. Тела постоянной ширины Минковского (180). IV. Тела постоянной яркости (182). V. Интегральное задание центрально-симметричных выпуклых тел (184). VI. Формулы для центрально-симметричных овалоидов (186). VII. Свойства, выделяющие эллипсоиды среди других выпуклых поверхностей (187). VIII. Наименьшее число вершин замкнутой выпуклой кривой (191). IX. Дальнейшие сведения о дифференциальной геометрии овалоидов (194).

Литература 197

И. М. Яглом. **Вильгельм Бляшке и его книга по теории выпуклых тел** 201

Именной указатель 228

Предметный указатель 231

ОТ РЕДАКТОРОВ

Замечательная книга «Круг и шар» известного немецкого геометра Вильгельма Бляшке (1885—1962) впервые появилась на свет в 1916 г. В 1956 г. эта книга была переиздана; однако произведенная автором для нового издания переработка текста была не слишком значительна и в этой и сегодня еще по-юношески свежей и живой книге сохранились некоторые следы ее почтенного возраста: так, например, автор иногда называет «новыми» задачи более чем полувековой давности и считает «нерешенными» проблемы, которые были таковыми разве лишь в 1916 г. (см., например, подстрочное примечание**) на стр. 194). В связи с этим в некоторых случаях нам пришлось слегка отступить от авторского текста, исключив кое-где прилагательное «новый» или, тем более, «новейший»; слегка модернизировав терминологию (например, автор всюду называет «симметрическую» производную Шварца «обобщенной производной» — однако в настоящее время последний термин приобрел совершенно другой смысл); несколько изменив обозначения (мы старались избегать готических букв, непривычных нашему читателю); сопроводив изложение несколькими подстрочными примечаниями, содержащими, в частности, указания на новую литературу *). Кроме того, по инициативе редакторов несколько параграфов, содержащих второстепенный или дополнительный материал, напечатано мелким шрифтом. Наконец, редакторами составлен аннотированный список дополнительной литературы (см. стр. 197—200), для удобства читателей разбитый на две части: литература по теории выпуклых тел и литература об изопериметрических свойствах круга и шара; кроме того, в русское издание включена написанная одним из редакторов статья об авторе настоящей книги.

В. А. Залгаллер, И. М. Яглом

---

*) В отличие от нумерованных сносок автора подстрочные примечания переводчиков и редакторов всюду обозначены звездочками.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Прошло уже 40 лет с тех пор, как во время первой мировой войны впервые появилась эта книга «Круг и шар». В ней содержалось элементарное изложение минимальных свойств круга и шара и наряду с этим рассматривались свойства выпуклых тел. Кажется, моя книга в свое время возбудила большой интерес у молодых геометров, так как многие дальнейшие исследования оказались связанными с этими старыми вопросами о круге, восходящими еще к Архимеду. Из этих новых исследований я назову книги Т. Боннезена и В. Фенхеля «Теория выпуклых тел» (1934); А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (1948); Л. Фейеша Тота «Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве» (1958) и, в особенности, Г. Хадвигера «Старое и новое о выпуклых телах» (1955) *). В последние десятилетия на этом поприще получено много нового. И все же в новом облике моей старой книги сохранена ее прежняя форма, поскольку она следует простому ходу мысли, который идет от древних греков и укрепился в Германии, особенно благодаря Я. Штейнеру, Г. А. Шварцу, Г. Брунну и Г. Минковскому. Однако последующее развитие этой темы в новом издании не совсем обойдено и кое-где я ссылаюсь на отдельные сочинения, изданные после 1916 г.

В этой книге речь идет прежде всего об «*основных изопериметрических свойствах*» круга и шара. А именно, о свойстве круга определять наименьшую длину кривой при заданной площади и свойстве шара определять наименьшую площадь поверхности при заданном объеме. При доказательствах используются, в частности, методы Штейнера и Брунна,

---

*) Книги [3], [1], [11] и [5] в списке литературы на стр. 197—200.

которые имеют преимущество большой наглядности. При этом естественно включаются рассуждения, которые остаются справедливыми для всех вообще «*выпуклых тел*», т. е. для таких точечных множеств в пространстве, которые вместе с каждыми своими двумя точками содержат и весь соединяющий их отрезок.

Я снова вспоминаю сегодня моего покойного друга и коллегу Г. Герглотца, которому первое издание этой книги обязано очень многим.

В. Бляшке

Зима 1955/56 г.

П Е Р В А Я Ч А С Т Ь

МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КРУГА

§ 1. Четырехшарнирный метод Штейнера

Я. Штейнер, по-видимому, в связи с исследованиями С. Люилье (Варшава, 1782), предложил простую геометрическую конструкцию[1]), которая позволяет для каждой отличной от окружности замкнутой плоской кривой K получить новую кривую K^*, также плоскую и замкнутую, которая имеет т у ж е длину, что и K, но охватывает б о́ л ь ш у ю площадь. Из возможности такого построения сразу становится ясным, что кривая K не может быть решением «изопериметрической» задачи, т. е. не может ограничивать наибольшую площадь среди всех замкнутых плоских кривых этой длины. Таким образом, никакая кривая, о т л и ч н а я о т о к р у ж н о с т и, не может обладать этим свойством.

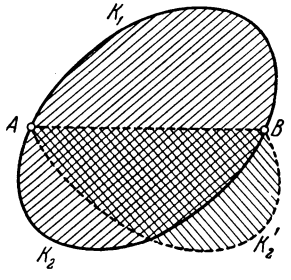

Рис. 1.

Упомянутый метод Штейнера, который мы будем называть «четырехшарнирным методом», состоит в следующем. На кривой K выбираем две точки A и B так, чтобы обе части, K_1 и K_2, кривой K, соединяющие точки A и B, имели одинаковую длину (рис. 1). Нумерацию выберем для определенности так, чтобы площади F_1 и F_2, ограниченные дугами K_1, K_2 и хордой $\overline{AB}$, удовлетворяли соотношению $F_1 \geqslant F_2$. Заменим теперь дугу K_2 дугой K_2', получающейся из K_1 отражением от прямой AB. Замкнутая кривая K', составленная

[1]) J. S t e i n e r, Gesammelte Werke, т. II, Berlin, 1882, стр. 193 и след.

из K_1 и K_2', симметрична относительно оси AB и имеет, очевидно, одинаковую с кривой K длину. Площади

$$F = F_1 + F_2 \quad \text{и} \quad F' = 2F_1$$

кривых K и K' связаны неравенством

$$F \leqslant F'.$$

Здесь мы еще не можем остановиться, так как пока не исключено, что имеет место равенство $F = F'$. Заметим, однако, что по предположению кривая K не была окружностью. Поэтому мы можем выбрать точки деления так, что ни одна из дуг K_1 и K_2 не будет половиной окружности. Значит, и K' тоже не есть окружность.

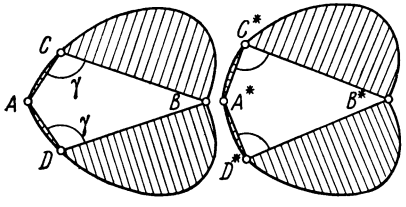

Рис. 2.

Поэтому мы можем на симметричной кривой K' так выбрать отличную от A и B точку C, что в треугольнике ABC угол γ при вершине C не будет прямым. Пусть D отражение C в прямой AB. Вырежем теперь из площади, охваченной кривой K', площадь четырехугольника $ACBD$; тогда останутся четыре «лунки», заштрихованные на рис. 2. Представим себе, что эти лунки изготовлены из картона и скреплены шарнирно друг с другом в вершинах A, C, B, D. Тогда получится «четырехшарнирник», который снаружи ограничен кривой K', а изнутри — сторонами четырехугольника.

Сдвинем звенья этого четырехшарнирника в такое положение $A^*C^*B^*D^*$, чтобы углы в точках C^* и D^* оказались прямыми. Симметричная кривая K^*, которая служит внешним контуром нашего нового четырехшарнирника *), является искомой. Действительно, дуга K^* состоит из четырех дуг, равных соответствующим дугам из K', а потому K^* имеет такую же

*) Строго говоря, здесь следует еще доказать, что при деформации шарнирного четырехугольника «лунки» не пересекутся (ср. подстрочное примечание на стр. 339 статьи В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [26]).

длину, что и кривые K' и K. Разность площадей F^* и F', ограниченных кривыми K^* и K', поскольку лунки остаются неизменными равна разности площадей Φ^* и Φ четырехугольников $A^*C^*B^*D^*$ и $ACBD$:

$$F^* - F' = \Phi^* - \Phi.$$

Пусть a и b — стороны треугольника ABC, лежащие против вершин A и B, а γ — угол при вершине C, тогда

$$\Phi^* - \Phi = ab(1 - \sin\gamma) > 0.$$

Таким образом, $F^* > F'$, а значит,

$$F^* > F,$$

т. е. площадь, ограниченная кривой K^*, действительно больше, чем площадь, ограниченная кривой K.

§ 2. Вопрос существования

Можно ли считать, что в приведенном рассуждении Штейнера (даже если считать достаточно точными использованные выше понятия «замкнутой плоской кривой», «длины дуги» и «площади охваченной области», к чему мы вскоре вернемся) действительно содержится доказательство изопериметрического свойства круга? Повторяем, доказано следующее. Если K — замкнутая плоская кривая, отличная от окружности, то с помощью четырехшарнирного метода можно построить новую замкнутую плоскую кривую K^* той же длины, которая охватит б о́ л ь ш у ю площадь. Поэтому K не может быть решением изопериметрической задачи.

Иначе говоря, *если среди всех замкнутых плоских кривых данной длины есть хотя бы одна, охватывающая площадь, бо́льшую или равную площади, охваченной любой другой из них, то эта кривая может быть только окружностью.*

При этом считается само собой разумеющимся наличие такого решения. Однако при более глубоком рассмотрении оказывается, что именно в установлении этого факта скрывается главная трудность.

Легко убедиться, что площадь F, ограниченная любой замкнутой плоской кривой K с заданной длиной L, не

превосходит некоторого конечного числа. Например (как мы покажем в § 5):

$$F < L^2.$$

Множество всех чисел F, т. е. множество значений площадей, охватываемых всеми замкнутыми плоскими кривыми длины L, является поэтому, как принято говорить, «ограниченным» множеством. Каждое число, которое больше, чем все F, — например, число L^2, — называется *границей* этого множества. Еще в 1817 г. ученый-теолог Б. Больцано показал, что непрерывность набора вещественных чисел выражается, в частности, в том, что среди всех границ любого непустого и ограниченного множества чисел всегда есть наименьшая, называемая *точной верхней границей* этого множества [1]).

Рассмотрим для примера множество чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Это множество имеет своей точной верхней границей единицу. Уже на этом простом примере видно, что сама точная верхняя граница может не принадлежать множеству, т. е. что в составе ограниченного бесконечного множества не обязательно есть самое большое число.

Поэтому *мы должны еще показать, что в множестве всех чисел F имеется наибольшее число F_0, — только после этого четырехшарнирный метод даст полное доказательство максимального свойства круга.*

Точку зрения самого Штейнера на вопрос существования из его работ усмотреть трудно. Гейзер в своих интересных воспоминаниях о Штейнере [2]), бывшем, по-видимому, капризным чудаком, рассказывает, что Дирихле безуспешно пытался убедить Штейнера в недостаточности его доказательства.

---

[1]) Работа Больцано называлась: «Чисто аналитическое доказательство того, что между каждыми двумя числами, дающими противоположные по знаку результаты, лежит по крайней мере один вещественный корень уравнения». Изложение теории вещественных чисел см., например, O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig, 1914. [См. также, например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. «Наука», 1966. — *Прим. перев.*]

[2]) C. F. Geiser, Zur Erinnerung an J. Steiner, Zürich, 1874.

Однако Штейнер все же задумывался над этим вопросом. Хотя в большинстве случаев он рассматривал существование как само собой разумеющееся, в одном месте он написал: «... действительно, доказательство проводится очень коротко, если предположить, что наибольшая фигура существует» [1]).

Позднее при доказательстве существования возникли серьезные трудности. Впервые Вейерштрасс в лекциях по вариационному исчислению, которые он читал в Берлинском университете в 70-х годах прошлого века, строго обосновал с помощью некоторых вспомогательных средств максимальное свойство круга.

Теперь в этом пункте доказательство может быть получено на следующем пути. Сначала вместо произвольной замкнутой кривой рассматриваются многоугольники, а затем кривые приближаются многоугольниками. Этот путь рассуждения (предварительное рассмотрение изопериметрического свойства многоугольников) использовался уже в старейшей из трактовавших эту тему работ — в книге грека Зенодора περί ἰσοπεριμέτρων σχημάτων *), написанной, по-видимому, за 150 лет до нашей эры.

Таким образом, удается довести доказательство до конца с помощью одного только штейнеровского четырехшарнирника, не прибегая к вариационному исчислению и другим аналитическим средствам. Достаточно присоединить к доказательству существования для многоугольника теорему существования Вейерштрасса для непрерывных функций, которую мы в необходимом нам частном случае подробно докажем в § 5.

Кроме того, мы покажем, как можно полностью обойтись без аналитических средств и провести доказательство существования для многоугольника на чисто элементарной основе (§ 6).

§ 3. Площадь многоугольника

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Пусть O — начало координат; T_1, T_2 — две точки [2]) с координатами x_1, y_1; x_2, y_2. *Площадью треугольника* OT_1T_2 мы

---

[1]) J. Steiner, Gesammelte Werke, т. II, стр. 197, замечание.

*) «Об изопериметрических фигурах» (греч.).

[2]) Под точкой мы всегда будем понимать вещественную собственную точку евклидова пространства. Введение мнимых элементов и бесконечно удаленных точек здесь бесполезно.

называем число, определяемое формулой

$$\text{пл}\ \{OT_1T_2\} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Как легко проверить, это число остается неизменным при повороте системы координат на любой угол φ, т. е. если

$$x = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi$$
$$y = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi,$$

то

$$x_1y_2 - y_1x_2 = x_1^*y_2^* - y_1^*x_2^*.$$

В частности, положив, что T_1 принадлежит оси x ($y_1 = 0$), мы легко выясним геометрический смысл этого выражения.

Определенная таким образом площадь имеет положительный знак, когда вершины OT_1T_2 обходятся в положительном

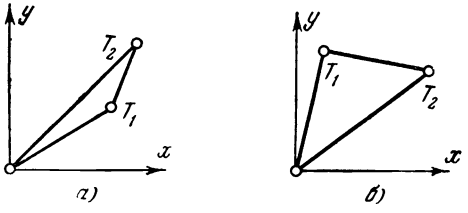

Рис. 3.

направлении (рис. 3, *а*), и отрицательный — в противоположном случае (рис. 3, *б*)*).

Возьмем теперь конечную последовательность точек T_1, T_2, ..., T_{n+1} с координатами x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_{n+1}, y_{n+1}. Под *площадью многоугольника* с вершинами $OT_1T_2 \ldots T_{n+1}$ мы понимаем сумму площадей треугольников:

$$\text{пл}\ \{OT_1T_2 \ldots T_{n+1}\} =$$
$$= \text{пл}\ \{OT_1T_2\} + \text{пл}\ \{OT_2T_3\} + \ldots + \text{пл}\ \{OT_nT_{n+1}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \{x_ky_{k+1} - y_kx_{k+1}\}.$$

*) Определенную в этом параграфе «площадь треугольника» и «площадь многоугольника» часто называют также «ориентированной площадью».

Предположим теперь, что T_{n+1} совпадает с T_1 ($x_{n+1}=x_1$, $y_{n+1}=y_1$). Тогда наша площадь не зависит от выбора начала O параллельно переносимых координат. Действительно, при параллельном переносе осей системы координат:

$$\begin{cases} x_k = x_k^* + \xi \\ y_k = y_k^* + \eta, \end{cases}$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k^* y_{k+1}^* - y_k^* x_{k+1}^*) + \\ + \xi \sum_{k=1}^{n}(y_{k+1}^* - y_k^*) - \eta \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}^* - x_k^*);$$

но последние две суммы обращаются в нуль из-за совпадения T_{n+1} и T_1. Поэтому мы будем составленное выражение называть *площадью замкнутого многоугольника* с вершинами $T_1, T_2, \ldots, T_n$:

$$\text{пл}\,\{OT_1T_2\ldots T_nT_1\} = \text{пл}\,\{T_1T_2\ldots T_nT_1\} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}). \qquad (1)$$

При этом под *многоугольником* понимается конечное число точек $T_1, T_2, \ldots, T_n$, $T_{n+1}=T_1$, не обязательно различных, но циклически упорядоченных.

Если объединить оба рассмотренных преобразования координатной системы: поворот и параллельный перенос, то мы увидим, что при любом таком преобразовании, сохраняющем ориентацию (т. е. направление вращения от оси x к оси y):

$$\begin{cases} x = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi + \xi, \\ y = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi + \eta, \end{cases} \qquad (2)$$

выражение для площади остается неизменным или, как говорят, инвариантным.

Однако формулу (2) можно еще истолковать иначе, а именно, как движение нашего многоугольника при фиксированной координатной системе

$$T_1T_2\ldots T_n \to T_1^*T_2^*\ldots T_n^*,$$

Тогда мы видим, что *два одинаково ориентированных равных многоугольника имеют равные площади.*

Если изменить на обратные все знаки у одной из координат, то мы убеждаемся, что *два равных, но противоположно ориентированных многоугольника*, в частности, два симметричных друг другу относительно прямой многоугольника, *имеют одинаковые по величине, но противоположные по знаку площади.*

Другое следствие из нашей формулы таково: если изменить направление обхода многоугольника, то площадь изменит знак:

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3\ldots T_nT_1\}+\text{пл}\,\{T_1T_nT_{n-1}\ldots T_2T_1\}=0.$$

В то же время любое изменение нумерации вершин, сохраняющее их циклический порядок, не влияет на значение площади

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3\ldots T_nT_1\}-\text{пл}\,\{T_2T_3T_4\ldots T_1T_2\}=0.$$

Если в составе двух многоугольников есть общая последовательность вершин и эти вершины следуют друг за другом в составе двух многоугольников в противоположных направлениях, то площади таких многоугольников естественным образом складываются, что следует из формулы (1). Так, например, в условиях рис. 4

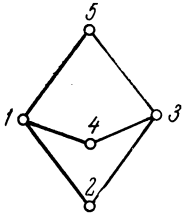

Рис. 4.

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_4T_1\}+\text{пл}\,\{T_1T_4T_3T_5T_1\}=$$
$$=\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_5T_1\}$$

Это свойство аддитивности площади, подтверждающее, между прочим, целесообразность условия о знаке площади, играет существенную роль в четырехшарнирном методе.

Несмотря на то, что площадь по нашему определению может быть и положительной и отрицательной, *длина* (*периметр*) многоугольника не может быть меньше нуля

$$\text{дл}\,\{T_1T_2\ldots T_nT_1\}=\sum_{k=1}^{n}\overline{T_kT_{k+1}},$$

так как для того, чтобы найти длину, мы просто складываем длины $\overline{T_kT_{k+1}}$ всех сторон многоугольника.

§ 4. Применение четырехшарнирного метода к многоугольнику

Поставим перед собой задачу: *среди равносторонних многоугольников с заранее заданным четным числом вершин n ($n = 6, 8, 10, \ldots$) и заданной длиной Λ найти многоугольник наибольшей площади.*

Равносторонний многоугольник называют правильным, если его вершины лежат на окружности и встречаются последовательно по одному разу при однократном обходе окружности. С помощью рассмотренного в § 1 метода мы можем показать, что *только правильные (обходимые в положительном направлении) многоугольники могут быть решением нашей задачи.*

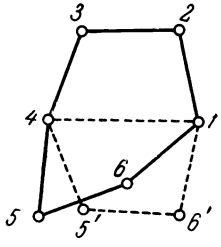

Рис. 5.

Площадь всякого другого равностороннего n-угольника мы можем увеличить с помощью четырехшарнирного метода, сохраняя длину его сторон. Примем, например, для определенности, что $n = 6$ (рис. 5). Нам задано только направление обхода шестиугольника V; выбор начала нумерации вершин находится в нашем распоряжении. Выберем первую вершину так, чтобы имело место соотношение

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_4T_1\} \geqslant \text{пл}\,\{T_4T_5T_6T_1T_4\},$$

т. е. чтобы было

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_4T_1\} \geqslant \frac{1}{2}\,\text{пл}\,\{V\}.$$

Заменим наш шестиугольник V новым равносторонним шестиугольником V', для которого прямая T_1T_4 является осью симметрии. Вершинами этого шестиугольника будут служить точки T_1, T_2, T_3, T_4, T_5', T_6', где T_5' и T_6' симметричны T_3 и T_2 относительно T_1T_4. (Если вершины T_1 и T_4 совпадают, можно в качестве прямой T_1T_4 взять любую из проходящих через эту точку прямых.)

Поскольку при осевой симметрии и при изменении направления обхода меняется знак площади,

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_4T_1\} = -\,\text{пл}\,\{T_1T_6'T_5'T_4T_1\} = \text{пл}\,\{T_1T_4T_5'T_6'T_1\}.$$

Согласно правилу аддитивности площади

$$\text{пл}\,\{T_1T_2T_3T_4T_1\} + \text{пл}\,\{T_1T_4T_5'T_6'T_1\} = \text{пл}\,\{V'\};$$

вместе с предыдущим равенством и последним неравенством это дает

$$\text{пл}\,\{V\} \leqslant \text{пл}\,\{V'\}.$$

Но, очевидно,

$$\text{дл}\,\{V\} = \text{дл}\,\{V'\}.$$

Построим теперь на отрезке T_1T_4, как на диаметре, окружность и допустим, что одна из точек, скажем T_2, не лежит на соответствующей полуокружности, которая проходится при движении в положительном направлении от T_1 к T_4. Иными словами, предположим, что угол между лучами $\overrightarrow{T_1T_2}$ и $\overrightarrow{T_2T_4}$ не является (положительным!) прямым углом. Тогда можно применить четырехшарнирный метод, при котором шарниры помещены в точках T_1, T_2, T_4 и T_6'.

На основании свойства аддитивности площади убеждаемся, как и в § 1, что шестиугольник V^*, полученный из V' четырехшарнирным методом и обладающий в T_2^* прямым углом между $\overrightarrow{T_1^*T_2^*}$ и $\overrightarrow{T_2^*T_4^*}$, будет иметь площадь *строго бо́льшую*, чем V', т. е. что

$$\text{пл}\,\{V\} \leqslant \text{пл}\,\{V'\} < \text{пл}\,\{V^*\},$$

$$\text{дл}\,\{V\} = \text{дл}\,\{V'\} = \text{дл}\,\{V^*\}.$$

Поэтому V не может быть решением нашей задачи о максимуме.

В каком случае указанный четырехшарнирный процесс не применим? Только если вершины T_2 и T_3 лежат на полуокружности, идущей в положительном направлении от T_1 к T_4. Другими словами, описанный процесс увеличения площади не действует только, если, во-первых, все отрезки, соединяющие противоположные вершины (T_1T_4; T_2T_5; T_3T_6), делят пополам площадь многоугольника и, во-вторых, все вершины лежат на одной окружности и следуют на ней в положительном направлении. Но тогда шестиугольник правильный. Этот вывод справедлив для любого четного n.

Этим наше утверждение доказано.

§ 5. Доказательство существования для многоугольника

Чтобы завершить доказательство и убедиться, что правильный n-угольник действительно является решением задачи § 4, надо еще, как это было разъяснено в § 2, доказать существование решения, т. е. показать, что *среди всех равносторонних многоугольников с числом вершин n и периметром Λ имеется хотя бы один, у которого площадь больше или равна площади любого другого из этих многоугольников.*

Прежде всего с помощью очень грубой оценки легко получить, что *площади всех таких допустимых n-угольников меньше конечного числа $\Lambda^2/4$.*

Действительно, поместим одну из вершин T_1 в начале координат O. Тогда каждое из расстояний $\overline{OT_k} \leqslant \Lambda/2$, так как O и T_k соединены двумя участками многоугольника, сумма которых Λ, и потому хотя бы одно не превосходит $\Lambda/2$; тем более отрезок $\overline{OT_k}$ не больше, чем $\Lambda/2$. Кроме того, $\overline{T_kT_{k+1}} = \Lambda/n$, откуда для каждого треугольника имеем

$$|\text{пл}\,\{OT_kT_{k+1}\}| < \frac{1}{4n}\Lambda^2.$$

Для площади Φ всего нашего многоугольника имеем

$$|\Phi| = |\text{пл}\,\{T_1T_2\ldots T_nT_1\}| \leqslant n \max_k |\text{пл}\,\{OT_kT_{k+1}\}|,$$

и мы получаем оценку:

$$|\Phi| < \frac{1}{4}\Lambda^2 \qquad (*)$$

(конечно, она без особого труда может быть улучшена).

Ограниченное множество чисел Φ — множество всех площадей допустимых многоугольников — имеет некоторую точную верхнюю границу Φ_0. Остается показать, что существует допустимый многоугольник с площадью именно Φ_0. Для доказательства рассуждаем следующим образом.

Среди допустимых многоугольников есть такие, площади которых сколь угодно мало отличаются от Φ_0. Поэтому найдется последовательность допустимых многоугольников $V_1, V_2, V_3, \ldots$, площади которых $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ с ростом

номера k неограниченно приближаются к значению Φ_0, что выражается формулой $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k = \Phi_0$. При этом с помощью соответствующих движений можно добиться, чтобы у каждого из многоугольников $V_1, V_2, V_3, \ldots$ одна вершина совпадала с точкой O.

Мы хотим показать, что из этой последовательности многоугольников $V_1, V_2, V_3, \ldots$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к допустимому многоугольнику с площадью Φ_0.

Для этого обозначим по порядку, начиная с O, все вершины каждого многоугольника V_k через $O = T_{k1}, T_{k2}, \ldots, T_{kn}$.

Первые вершины T_{k1} у всех V_k совпадают. Бесконечное точечное множество вторых вершин $T_{12}, T_{22}, T_{32}, \ldots$ заведомо лежит в круге с центром O и диаметром Λ и потому имеет хотя бы одну предельную точку T_{02}, т. е. точку, в сколь угодно малой окрестности которой лежит бесконечно много представителей из множества вторых вершин. (Не исключается, что сама точка T_{02} содержится в множестве $T_{12}, T_{22}, T_{32}, \ldots$, но может и не содержаться.) Выберем из последовательности $V_1, V_2, V_3, \ldots$ такую подпоследовательность, для которой точка T_{02} является единственной предельной точкой вершин T_{k2} из этой подпоследовательности. Тогда вершины T_{k2} сходятся к T_{02}. Я позволю себе, чтобы не усложнять обозначения, выбранную таким образом подпоследовательность снова обозначать через $V_1, V_2, V_3, \ldots$; предполагается, что остальные (бесполезные для нас) многоугольники V из первоначальной последовательности просто выброшены. Третьи вершины $T_{13}, T_{23}, T_{33}, \ldots$ многоугольников новой последовательности также лежат в круге с центром O и диаметром Λ и имеют поэтому хотя бы одну предельную точку T_{03}, и я могу с помощью соответствующего выбрасывания обеспечить, чтобы эти вершины снова имели только одну эту предельную точку. Повторим этот процесс $(n-1)$ раз; тогда мы получим, наконец, последовательность многоугольников $V_1, V_2, V_3, \ldots$ с тем свойством, что каждая точечная последовательность $T_{1k}, T_{2k}, T_{3k}, \ldots$ имеет единственную предельную точку $\lim\limits_{j\to\infty} T_{jk} = T_{0k}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$.

Предельный многоугольник V_0 с вершинами $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0n}$ и есть нужный нам.

Прежде всего из $\overline{T_{jk}T_{j,\,k+1}} = \Lambda/n$ следует, что и $\overline{T_{0k}T_{0,\,k+1}} = \Lambda/n$, т. е. V_0 также есть равносторонний n-угольник с периметром Λ. Нам остается еще из

$$\lim_{j\to\infty} \Phi_j = \Phi_0$$

заключить, что V_0 имеет площадь Φ_0.

Мы можем для каждого (и сколь угодно малого) положительного числа ε найти такой номер N, что все расстояния $\overline{T_{jk}T_{0k}} < \varepsilon$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ для всех $j > N$. Теперь сравним выражения для площади многоугольника V_0, которую мы пока обозначим через Φ_0^*, и для площадей Φ_j многоугольников V_j:

$$\Phi_0^* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{0k}y_{0,\,k+1} - y_{0k}x_{0,\,k+1}),$$

$$\Phi_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{jk}y_{j,\,k+1} - y_{jk}x_{j,\,k+1}).$$

С помощью вычитания и добавления двух взаимно сокращающихся членов получаем

$$\Phi_0^* - \Phi_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{(x_{0k}y_{0,\,k+1} - y_{0k}x_{0,\,k+1}) - (x_{0k}y_{j,\,k+1} - y_{0k}x_{j,\,k+1}) +$$

$$+ (x_{0k}y_{j,\,k+1} - y_{0k}x_{j,\,k+1}) - (x_{jk}y_{j,\,k+1} - y_{jk}x_{j,\,k+1})\}.$$

Заметив еще, что

$$|x_j| < \frac{1}{2}\Lambda, \qquad |y_j| < \frac{1}{2}\Lambda,$$

$$|x_{0k} - x_{jk}| < \varepsilon, \qquad |y_{0k} - y_{jk}| < \varepsilon,$$

находим

$$|\Phi_0^* - \Phi_j| < n\Lambda\varepsilon;$$

но отсюда уже следует искомый результат

$$\Phi_0^* = \lim_{j\to\infty} \Phi_j = \Phi_0.$$

Таким образом, V_0 является допустимым многоугольником и имеет площадь Φ_0. Теорема существования доказана.

Приведенное доказательство того факта, что из $V_0 = \lim\limits_{j\to\infty} V_j$ следовало пл $\{V_0\} = \lim\limits_{j\to\infty}$ пл $\{V_j\}$, или, иначе говоря,

$$\text{пл}\left\{\lim_{j\to\infty} V_j\right\} = \lim_{j\to\infty} \text{пл}\,\{V_j\},$$

основывается только на том, что площадь есть непрерывная функция от координат вершин многоугольника. Мы просто на нашем специальном случае подтвердили известную теорему о том, что для непрерывных функций знаки предела и функции можно переставлять.

В целом мы здесь установили частный случай теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, состоящей в случае функции одной переменной в том, что «*функция, непрерывная на замкнутом отрезке* (т. е. на отрезке с включенными в него концами), *достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения*».

Из доказательства § 4 и из изложенного здесь уже полностью вытекает справедливость следующего утверждения:

Если Φ — *площадь неправильного равностороннего многоугольника с четным числом сторон, а* Φ_0 — *площадь правильного многоугольника с тем же периметром, тем же числом сторон и положительным направлением обхода, то* $\Phi < \Phi_0$.

Ограничение четностью числа сторон здесь, конечно, совершенно несущественно и будет дальше устранено.

В этом параграфе мы воспользовались предельным переходом и несколько вышли из круга понятий элементарной математики. Мы сделали это с целью подготовить в дальнейшем аналогичное рассмотрение пространственного случая. Однако здесь это не было необходимо, — в следующем параграфе мы покажем, как можно тот же результат получить чисто элементарными средствами, т. е. без предельных переходов.

§ 6. Равносторонние многоугольники и тригонометрические выражения[1])

Результат о равносторонних многоугольниках, полученный с использованием геометрических рассмотрений, мы докажем теперь еще раз элементарными средствами без каких бы то ни было предельных переходов. Для этого нам послужат тригонометрические

[1]) Может быть пропущен.

выражения вида

$$f(\varphi) = c_0 + c_1 \cos\varphi + c_2 \cos 2\varphi + \ldots + c_m \cos m\varphi + c_1^* \sin\varphi + \\ + c_2^* \sin 2\varphi + \ldots + c_m^* \sin m\varphi.$$

Пусть φ пробегает равноотстоящие значения

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}; \quad 2\frac{2\pi}{n}; \quad 3\frac{2\pi}{n}; \ \ldots; \ n\frac{2\pi}{n}.$$

Обозначим соответствующие им значения $f(\varphi)$ через

$$f(\varphi) = z_1; \ z_2; \ z_3; \ \ldots; \ z_n.$$

Предположим теперь, что n есть нечетное число, связанное с m соотношением $n = 2m + 1$. Тогда n равно числу коэффициентов c в выражении $f(\varphi)$; если n значений z заданы, то для n неизвестных коэффициентов c получается система линейных уравнений

$$z_p = c_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(c_k \cos kp\frac{2\pi}{n} + c_k^* \sin kp\frac{2\pi}{n} \right); \qquad p = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Если мы покажем, что определитель этой системы уравнений, p-я строка которого имеет вид

$$1; \cos p\frac{2\pi}{n}, \ \sin p\frac{2\pi}{n}; \ \cos 2p\frac{2\pi}{n}, \ \sin 2p\frac{2\pi}{n}; \ \ldots \\ \ldots; \cos mp\frac{2\pi}{n}, \ \sin mp\frac{2\pi}{n},$$

отличен от нуля, то тем самым будет доказано, что система имеет одно и только одно решение (относительно неизвестных c).

Чтобы получить квадрат определителя, мы умножим наш определитель, предварительно поменяв в нем ролями строки и столбцы, на второй экземпляр исходного определителя, т. е. умножим определитель сам на себя, перемножая его столбцы. Тогда окажется, что в полученном таким путем определителе только по главной диагонали стоят элементы, отличные от нуля!

Предварительно покажем, что имеют место равенства

$$\sum_{p=1}^{n} \cos kp\frac{2\pi}{n} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

Легче всего в этом убедиться с помощью формулы Эйлера

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega \qquad (i^2 = -1).$$

Действительно, положим

$$\varepsilon = e^{ik\frac{2\pi}{n}},$$

тогда

$$\varepsilon^n = 1. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\sum_{p=1}^{n} \cos kp\frac{2\pi}{n} = \operatorname{Re}\sum_{p=1}^{n} \varepsilon^p,$$

где $\operatorname{Re}(\alpha + i\beta) = \alpha$ означает вещественную часть комплексного числа. По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{p=1}^{n} \varepsilon^p = \varepsilon\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}, \tag{4}$$

а последнее выражение, согласно (3), равно нулю. Этим доказано равенство (2). Точно так же, рассматривая мнимую часть нашей геометрический прогрессии, получаем

$$\sum_{p=1}^{n} \sin kp\frac{2\pi}{n} = 0 \qquad \text{при} \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Формулы (2) и (5) верны и в более широкой области значений k: их вывод остается в силе, пока знаменатель $1-\varepsilon$ в формуле (4) отличен от нуля, т. е. при всех k, не кратных n.

В число элементов определителя, получаемого при умножении, входят еще другие суммы, которые могут быть сведены к суммам (2) и (5) на основании формул сложения:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

С помощью равенств (6) получаем

$$\left.\begin{aligned} &\cos kp\frac{2\pi}{n}\cos lp\frac{2\pi}{n} = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left\{\cos(k+l)p\frac{2\pi}{n} + \cos(k-l)p\frac{2\pi}{n}\right\}, \\ &\cos kp\frac{2\pi}{n}\sin lp\frac{2\pi}{n} = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left\{\sin(k+l)p\frac{2\pi}{n} - \sin(k-l)p\frac{2\pi}{n}\right\}, \\ &\sin kp\frac{2\pi}{n}\sin lp\frac{2\pi}{n} = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left\{-\cos(k+l)p\frac{2\pi}{n} + \cos(k-l)p\frac{2\pi}{l}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда, согласно (2) и (5),

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n} \cos kp\frac{2\pi}{n}\cos lp\frac{2\pi}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq l, \\ \dfrac{n}{2} & \text{при} \quad k = l, \end{cases} \\
&\sum_{p=1}^{n} \cos kp\frac{2\pi}{n}\sin lp\frac{2\pi}{n} = 0, \\
&\sum_{p=1}^{n} \sin kp\frac{2\pi}{n}\sin lp\frac{2\pi}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq l, \\ \dfrac{n}{2} & \text{при} \quad k = l, \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где k и l пробегают значения $1, 2, \ldots, m$.

Таким образом, в получаемом описанным выше путем определителе отличны от нуля только элементы главной диагонали $\left(\text{они равны } n \text{ или } \frac{n}{2}\right)$. Квадрат определителя системы (1) равен произведению этих элементов и потому отличен от нуля. Значит, существует ровно одно решение системы (1). Более того, наши формулы (2), (5), (8) позволяют сразу (в чем мы, собственно, в дальнейшем не нуждаемся) написать это решение:

$$\left.\begin{aligned}
&c_0 = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p, \\
&\left.\begin{aligned}
c_k &= \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p \cos kp\frac{2\pi}{n}, \\
c_k^* &= \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p \sin kp\frac{2\pi}{n},
\end{aligned}\right\} k = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Содержанием формул (1) является так называемое линейное преобразование, связывающее c с z. Таблица коэффициентов, или, как говорят, **матрица** коэффициентов этого преобразования, имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}
1; & \cos 1\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 1\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}; & \cos 2\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 2\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}; & \ldots; & \cos m\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}; & \sin m\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n} \\
1; & \cos 1\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 1\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n}; & \cos 2\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 2\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{\pi}; & \ldots; & \cos m\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin m\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1; & \cos 1\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 1\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}; & \cos 2\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin 2\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}; & \ldots; & \cos m\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}, & \sin m\cdot n\cdot\frac{2\pi}{n}
\end{matrix}\right\|.$$

Выражаемые равенствами (2), (5), (8) зависимости между коэффициентами показывают, что сумма квадратов элементов каждого

столбца отлична от нуля (она равна n для первого столбца и $n/2$ для остальных), а сумма произведений соответствующих элементов из разных столбцов равна нулю. Это — характерное свойство так называемых ортогональных матриц*).

Если мы составим сумму квадратов z, то получим из свойств (2), (5), (8) основную для дальнейшего формулу

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p^2 = c_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(c_k^2 + c_k^{*2}\right).} \tag{10}$$

Это тождество является характеристическим для ортогонального преобразования (1), так как из (10) в известном смысле следуют соотношения ортогональности (2), (5), (8).

Из равенства (10) легко получить несколько более общую формулу для двух наборов чисел. Положим

$$z_p = c_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(c_k \cos kp\frac{2\pi}{n} + c_k^* \sin kp\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\zeta_p = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\gamma_k \cos kp\frac{2\pi}{n} + \gamma_k^* \sin kp\frac{2\pi}{n}\right),$$

а затем применим к $z_p + \lambda\zeta_p$ формулу (10). Тогда, приравнивая члены при первых степенях λ, получим

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p\zeta_p = c_0\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(c_k\gamma_k + c_k^*\gamma_k^*\right).} \tag{10*}$$

Несколько иными получаются формулы при четном $n = 2m$. Положим на этот раз

$$z_p = c_0 + c_1 \cos p\frac{\pi}{m} + c_2 \cos 2p\frac{\pi}{m} + \ldots + c_{m-1}\cos(m-1)p\frac{\pi}{m} +$$
$$+ c_m \cos mp\frac{\pi}{m} + c_1^* \sin p\frac{\pi}{m} + c_2^* \sin 2p\frac{\pi}{m} + \ldots$$
$$\ldots + c_{m-1}^* \sin(m-1)p\frac{\pi}{m}.$$

*) В ортогональных матрицах, кроме того, сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, так что данная матрица отличается от ортогональной только множителем n в первом столбце и $n/2$ в каждом из остальных столбцов. — *Прим. перев.*

Тогда снова n совпадает с числом коэффициентов c. Равенства (2) и (5) справедливы, как и раньше, но равенства (8) принимают несколько измененный вид:

$$\sum_{p=1}^{n} \cos kp\frac{\pi}{m} \cos kp\frac{\pi}{m} = \begin{cases} m & \text{при} \quad k < m, \\ n & \text{при} \quad k = m. \end{cases} \tag{8'}$$

Вместо (10*) получается соответственно

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} z_p\zeta_p = c_0\gamma_0 + c_m\gamma_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(c_k\gamma_k + c_k^*\gamma_k^*\right).} \tag{10'}$$

Теперь мы можем применить полученные результаты к многоугольникам.

Пусть сначала число n вершин x_p, y_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ будет нечетным. Согласно только что доказанному, можно так выбрать коэффициенты, чтобы координаты вершин выражались формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_p &= a_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cos kp\frac{2\pi}{n} + a_k^* \sin kp\frac{2\pi}{n}\right), \\ y_p &= b_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(b_k \cos kp\frac{2\pi}{n} + b_k^* \sin kp\frac{2\pi}{n}\right); \\ & p = 1, 2, \ldots, n; \qquad n = 2m + 1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Мы хотим теперь выяснить, как периметр и площадь многоугольника выражаются через эти постоянные a и b.

Составим предварительно разность $x_{p+1} - x_p$ и преобразуем ее так, чтобы она приняла вид, подобный выражениям z_p:

$$x_{p+1} - x_p = \sum_{k=1}^{m}\left\{a_k\left(\cos k(p+1)\frac{2\pi}{n} - \cos kp\frac{2\pi}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + a_k^*\left(\sin k(p+1)\frac{2\pi}{n} - \sin kp\frac{2\pi}{n}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left\{\left[a_k\left(\cos k\frac{2\pi}{n} - 1\right) + a_k^* \sin k\frac{2\pi}{n}\right]\cos kp\frac{2\pi}{n} + \right.$$
$$\left. + \left[-a_k \sin k\frac{2\pi}{n} + a_k^*\left(\cos k\frac{2\pi}{n} - 1\right)\right]\sin kp\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

Применим теперь равенство (10), причем стоящие в квадратных скобках выражения будут играть роль коэффициентов c; тогда получим

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(x_{p+1}-x_p)^2=\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+a_k^{*2}\right)\left(1-\cos k\frac{2\pi}{n}\right).$$

Если заменить x, a на y, b, то аналогично получим

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(y_{p+1}-y_p)^2=\sum_{k=1}^{m}\left(b_k^2+b_k^{*2}\right)\left(1-\cos k\frac{2\pi}{n}\right),$$

а после сложения

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}[(x_{p+1}-x_p)^2+(y_{p+1}-y_p)^2]=\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+a_k^{*2}+b_k^2+b_k^{*2}\right)2\sin^2 k\frac{\pi}{n}.$$

Если все стороны многоугольника имеют одинаковую длину, то стоящее слева выражение равно квадрату длины стороны многоугольника, т. е. равно Λ^2/n^2, где Λ — периметр (длина) многоугольника. Таким образом, для периметра Λ равностороннего $(2m+1)$-угольника мы получили формулу

$$\boxed{\Lambda^2=n^2\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+a_k^{*2}+b_k^2+b_k^{*2}\right)2\sin^2 k\frac{\pi}{n}.} \tag{12}$$

Вычислим теперь площадь Φ такого многоугольника! Очевидно,

$$2\Phi=\sum_{p=1}^{n}(x_py_{p+1}-y_px_{p+1})=\sum_{p=1}^{n}x_p(y_{p+1}-y_p)-\sum_{p=1}^{n}y_p(x_{p+1}-x_p).$$

Используя имеющиеся выражения для x_p; $y_{p+1}-y_p$; y_p; $x_{p+1}-x_p$, применим к каждой из сумм $\sum x_p(y_{p+1}-y_p)$ и $\sum y_p(x_{p+1}-x_p)$ формулу (10*). Тогда найдем

$$\boxed{2\Phi=n\sum_{k=1}^{m}\left(a_kb_k^*-b_ka_k^*\right)\sin k\frac{2\pi}{n}.} \tag{13}$$

Для правильного n-угольника, радиус описанного круга которого равен R, имеем

$$\Lambda = 2nR \sin \frac{\pi}{n},$$

$$\Phi = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n},$$

откуда следует, что

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \Phi = 0.$$

Если нам удастся показать, что для любого другого равностороннего n-угольника

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \Phi > 0,$$

то минимальное свойство правильного многоугольника будет доказано.

Из наших формул (12) и (13) с помощью простых преобразований получаем

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \Phi = \\ = 2n^2 \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{aligned} &\left(a_k \sin k \frac{\pi}{n} - b_k^* \cos k \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2 + \\ &+ \left(a_k^* \sin k \frac{\pi}{n} + b_k \cos k \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2 + \\ &+ \left(b_k^2 + b_k^{*2}\right) \cos^2 k \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{tg}^2 k \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Поскольку здесь справа стоят только неотрицательные члены $\left(\operatorname{tg}^2 k \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \geqslant 0 \text{ при всех } k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 2m + 1\right)$, то фактически в формуле (14) уже содержится неравенство

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \Phi \geqslant 0;$$

остается только установить, когда в нем имеет место знак равенства.

В случае равенства из приравнивания нулю третьих сумм в формуле (14) заключаем, что все b_k и b_k^* обращаются в нуль при $k > 1$. Из равенства нулю первых двух сумм дополнительно следует, что все $a_k = 0$, $a_k^* = 0$ при $k > 1$ и $a_1 - b_1^* = 0$, $a_1^* + b_1 = 0$.

Поэтому для координат вершин получаем

$$\left.\begin{aligned} x_p - a_0 &= a_1 \cos p\frac{2\pi}{n} - b_1 \sin p\frac{2\pi}{n}, \\ y_p - b_0 &= a_1 \sin p\frac{2\pi}{n} + b_1 \cos p\frac{2\pi}{n}; \end{aligned}\right\} \quad p = 1, 2, \ldots, n. \qquad (15)$$

Но n-угольник с такими координатами вершин — правильный!

До сих пор мы предполагали, что число вершин n нечетно, $n = 2m + 1$. Остается рассмотреть, как изменятся формулы, если мы примем, что $n = 2m$. Из формулы (10′) видно, что новые формулы (12), (13), (14) получаются при четном n из старых формул простой заменой a_m, a_m^*, b_m, b_m^* на $\sqrt{2}a_m$, 0, $\sqrt{2}b_m$, 0. Тогда, как и раньше, получаем неравенство $\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\Phi \geqslant 0$ и убеждаемся, что знак равенства имеет место в нем тогда и только тогда, когда координаты вершин можно записать в форме (15), т. е. когда многоугольник правильный. Этим требуемое доказательство завершено [1]).

§ 7. Длина кривой

Если мы хотим теперь вывести из доказанного уже двумя способами минимального свойства правильного многоугольника изопериметрическое свойство круга, то мы должны прежде всего договориться о точном смысле понятий «длина кривой» и «площадь фигуры». При этом придется преодолеть некоторые трудности, которые, однако, лежат в существе вещей. Зато изучение этих понятий вводит нас в самые истоки исчисления бесконечно малых, что подтверждается всеми исследованиями в этой области от Архимеда до Лебега.

Функции $x(t)$, $y(t)$, непрерывные в интервале $a \leqslant t \leqslant b$, дают параметрическое задание

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

непрерывной кривой K с начальной точкой $A(x(a), y(a))$ и конечной $B(x(b), y(b))$. Относительно функций $x(t)$, $y(t)$ мы всегда будем предполагать, что нет никакого частичного

---

[1]) Если осуществить предельный переход при $n \to \infty$, то формулы (12), (13), (14) переходят в выражения, данные А. Гурвицем (A. Hurwitz) в работе «О некоторых геометрических приложениях рядов Фурье» (Ann. de l'école normale supérieure (3) **19**, 1902, стр. 357 — 408).

интервала $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, в котором обе функции постоянны, т. е. мы предполагаем, что никакой целый интервал значений t не соответствует одной точке кривой.

Возьмем на кривой K какие-нибудь точки $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$, которые отвечают значениям параметра

$$a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < b,$$

расположенным в порядке возрастания. Соединим точки $A, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, B$ прямолинейными отрезками; получим *ломаную, вписанную в кривую* K. Длину ломаной, т. е. сумму длин всех составляющих ее отрезков $\overline{AT_1}$, $\overline{T_1T_2}, \ldots, \overline{T_{n-1}B}$ обозначим через Λ.

Если длины Λ всех вписанных в K ломаных ограничены сверху, то кривая K называется спрямляемой. Точная верхняя граница всех Λ называется длиной L кривой K.

Это определение понятия длины кривой (основывающееся на том факте, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны), по существу, восходит еще к Архимеду. Позднее оно было возобновлено Пеано.

Из определения понятия точной верхней границы следует, что для всех длин Λ

$$\Lambda \leqslant L$$

и для любого $\varepsilon > 0$ найдется ломаная, для которой

$$\Lambda > L - \varepsilon.$$

Вставим между точками A и B на кривой K третью точку M, соответствующую значению $t = m\,(a < m < b)$. Тогда между длинами обеих частей, на которые кривая K разбивается точкой M, и длиной всей кривой есть простое соотношение; используя очевидные обозначения, его можно записать так:

$$L_a^b = L_a^m + L_m^b.$$

Действительно, из определения длины кривой сразу получаем

$$L_a^b \geqslant L_a^m + L_m^b,$$

так как при приближении кривой K ломаными могут быть использованы также ломаные, не имеющие вершин в точке M.

С другой стороны, мы можем для любого $\varepsilon > 0$ найти такую вписанную в K ломаную V, что для ее длины Λ будет

$$L_a^b - \Lambda_a^b < \varepsilon;$$

присоединив к вершинам V еще точку M, мы получим ломаную длины $\Lambda_n^m + \Lambda_m^b \geqslant \Lambda_a^b$. Поэтому

$$L_a^b - \Lambda_a^m - \Lambda_m^b < \varepsilon,$$

и тем более

$$L_a^b - L_a^m - L_m^b < \varepsilon.$$

Последнее верно для каждого $\varepsilon > 0$; поэтому

$$L_a^b \leqslant L_a^m + L_m^b,$$

что вместе с ранее доказанным противоположным неравенством дает

$$L_a^b = L_a^m + L_m^b.$$

Этим доказано свойство аддитивности длины кривой.

Непосредственно из определения длины кривой вытекает свойство прямой быть кратчайшей. *Если две точки A и B соединены непрерывной спрямляемой кривой K, отличной от прямолинейного отрезка $\overline{AB}$, то длина L кривой K больше, чем длина $\overline{AB}$.* Действительно, если K содержит точку M, не принадлежащую отрезку $\overline{AB}$, то

$$L \geqslant \overline{AM} + \overline{MB},$$

а правая часть по теореме о сумме сторон треугольника превосходит $\overline{AB}$. Если же кривая K целиком принадлежит прямой AB, но частично или полностью несколько раз покрывает отрезок $\overline{AB}$, то тем более

$$L > \overline{AB}.$$

Рассмотрим теперь замкнутую непрерывную кривую K

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b, \quad x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b)).$$

Можно отказаться от ограничения t интервалом $a \leqslant t \leqslant b$, если считать, что функции $x(t)$, $y(t)$ имеют период $b-a$, т. е. что

$$x(t+b-a)=x(t), \qquad y(t+b-a)=y(t)$$

для всех t. С помощью линейного преобразования

$$\varphi = pt+q$$

мы можем добиться, чтобы интервал $a \leqslant t \leqslant b$ перешел в интервал $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Если мы заменим t на φ, то получим две новые непрерывные функции:

$$x=x(\varphi), \quad y=y(\varphi)$$

с периодом 2π. Положим, кроме того,

$$\xi=\cos\varphi, \qquad \eta=\sin\varphi.$$

Тогда точка (ξ, η) пробегает единичную окружность. Каждая точка этой окружности соответствует (с точностью до слагаемого, кратного 2π) одному определенному значению параметра φ, а это значение параметра соответствует одной определенной точке кривой K. Поэтому мы можем наше определение непрерывной замкнутой кривой выразить более наглядно:

Под непрерывной замкнутой кривой понимают однозначный и непрерывный образ окружности.

Такая кривая не обязана быть взаимно однозначным образом окружности: она может, например, иметь вид восьмерки, т. е. обладать двойной точкой, или даже может целиком принадлежать (несколько раз покрытой) прямой (например: $x=\cos\varphi$, $y=0$).

Теперь нам нужно объяснить, что следует понимать под *длиной* замкнутой кривой. Для этого мы рассмотрим замкнутую кривую K как кривую, у которой начальная точка A и конечная B, соответствующие значениям параметра $t=a$ и $t=b$, совпадают. Длина L_a^b этой кривой определена; ее-то мы и назовем длиной кривой K:

$$L=L_a^b.$$

Я утверждаю, что L не зависит от выбора точки $A=B$ на K, т. е. что

$$L_a^b=L_{a+c}^{b+c}.$$

Ввиду свойства аддитивности длины вместо этого равенства достаточно доказать равенство

$$L_a^{a+c} + L_{a+c}^b = L_{a+c}^b + L_b^{b+c}$$

или

$$L_a^{a+c} = L_b^{b+c}.$$

Но последнее равенство, очевидно, является следствием периодичности!

Наше определение понятия длины замкнутой кривой K можно перефразировать еще и по-другому. *Возьмем любой вписанный в K многоугольник, т. е. многоугольник, вершины которого лежат на K в правильном циклическом порядке. Если точная верхняя граница L периметров Λ всех этих вписанных многоугольников V конечна, то кривая K называется спрямляемой и L есть длина K.*

§ 8. Приближение кривой многоугольниками

Рассмотрим опять спрямляемую кривую K

$$x = x(t), \qquad y = y(t); \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

у которой начальная и конечная точки не обязательно совпадают. Мы покажем, что приближение длины дуги L кривой K длинами Λ вписанных ломаных является в некотором смысле равномерным. Именно, пусть V — такая вписанная ломаная, у которой вершины соответствуют значениям параметра

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Для каждого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что длина Λ каждой вписанной ломаной V отличается от длины L кривой K меньше чем на ε:

$$L - \Lambda < \varepsilon,$$

как только

$$t_k - t_{k-1} < \delta; \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Короче, но менее строго: приближение длины кривой с помощью вписанных ломаных будет сколь угодно точным,

если только вершины ломаных лежат на кривой достаточно плотно.

В этом можно убедиться, например, так. По определению длины L можно найти такую вписанную в K ломаную V', длина которой Λ' произвольно близка к L:

$$L - \Lambda' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим вершины V' через

$$T_0 = A,\ T'_1,\ T'_2,\ \ldots,\ T_m = B,$$

и пусть $\delta > 0$ прежде всего меньше всех разностей значений параметра

$$\delta < t'_k - t'_{k-1}; \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Тогда «между» двумя соседними вершинами T'_{k-1}, T'_k ломаной V' лежит по крайней мере одна вершина T_r ломаной V. Ломаная V'', которая содержит как вершины V, так и вершины V', имеет длину Λ'', для которой $\Lambda'' \geqslant \Lambda'$ и, значит, $L - \Lambda'' < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть теперь T'_k лежит между T_r и T_{r+1}. Мы можем ввиду непрерывности K с помощью соответствующего выбора δ сделать все расстояния между точками участков T_rT_{r+1}, — а потому и расстояния $\overline{T_rT'_k}$ и $\overline{T'_kT_{r+1}}$, — меньше, чем произвольное наперед заданное положительное число η. Тогда

$$\Lambda'' - \Lambda = \Sigma\left\{\overline{T_rT'_k} + \overline{T'_kT_{r+1}} - \overline{T_rT_{r+1}}\right\} < \\ < \Sigma\left\{\overline{T_rT'_k} + \overline{T'_kT_{r+1}}\right\} < 2\eta m.$$

Отсюда следует

$$L - \Lambda < \frac{\varepsilon}{2} + 2\eta m.$$

Мы можем теперь так выбрать δ, что

$$\eta < \frac{\varepsilon}{4m};$$

тогда

$$L - \Lambda < \varepsilon,$$

что нам и требовалось доказать.

Рассмотрим, в частности, приближение равносторонними ломаными. Заключим начальную точку A спрямляемой кривой K в круг радиуса $\rho > 0$ с центром в точке A и выберем ρ настолько малым, что K не попадает целиком в этот круг. Обозначим через T_1 первую (по значениям параметра) следующую за A точку кривой, лежащую на границе круга. Около T_1, как около центра, опишем снова круг того же радиуса ρ и обозначим через T_2 первую следующую за T_1 точку кривой, лежащую на границе второго круга. Продолжая действовать так же, получим равностороннюю вписанную в K ломаную со стороной ρ. Так как длина этой ломаной меньше, чем длина L спрямляемой по предположению кривой K, то мы после конечного числа шагов придем к такой точке T_p $(p < L/\rho)$, что дуга кривой K, заключенная между T_p и B, попадет в круг с центром T_p и радиусом ρ. Соединим теперь точки $A, T_1, T_2, \ldots, T_p, B$ рядом прямолинейных отрезков; тогда получим ломаную V_*, вписанную в K, у которой p первых сторон имеют длину ρ, а длина последней меньше или равна ρ.

Мы хотим доказать следующее: *можно выбрать ρ настолько малым, что все разности $t_{k-1} - t_k$ значений параметра, соответствующих вершинам $A = T_0, T_1, \ldots, T_p, T_{p+1} = B$, будут меньше произвольного наперед заданного числа $\delta > 0$:*

$$t_{k+1} - t_k < \delta \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p.$$

В этом можно убедиться, например, следующим образом. Построим такую ломаную V' с вершинами $A = T'_0, T'_1, \ldots, T'_{m+1} = B$, что соответствующие разности $t_{k+1} - t_k < \frac{\delta}{2}$. Так как мы предположили, что никакой частичный интервал $a \leqslant t \leqslant \beta$ не соответствует одной точке кривой K, то мы можем так выбрать V', что никакие две соседние вершины T'_k и T'_{k+1} не совпадают. Возьмем 2ρ меньшим, чем наименьшая из длин сторон ломаной V'; тогда между двумя соседними вершинами T' лежит по меньшей мере одна вершина T, а значит, как мы и хотели, все разности $t_{k+1} - t_k < \delta$.

Ломаная V_*, вообще говоря, не равносторонняя, так как последняя сторона $\overline{T_pB} \leqslant \rho$. Заменим эту сторону двумя или

тремя сторонами длины ρ; тогда получим вместо V_* равностороннюю ломаную V^*, у которой можно считать общее число сторон четным. Ломаная V^* не будет, строго говоря, вписанной в кривую K, так как одна или две вершины V^*, находящиеся между T_p и B, вообще говоря, не лежат на K.

Положим $A = B$, т. е. рассмотрим случай, когда кривая K — замкнутая. Тогда площадь, охваченная V_*, отличается от площади, охваченной V^*, на площадь треугольника или четырехугольника с вершинами T_p, B и одной или двумя новыми вершинами ломаной V^*. Поэтому, согласно оценке (*) (стр. 19), отличие площадей меньше, чем $4\rho^2$; в то же время длины отличаются меньше чем на 3ρ.

Из теоремы, доказанной в самом начале этого параграфа, мы можем теперь заключить, что *если ε — произвольно малое заранее заданное положительное число, то мы всегда можем так выбрать длину ρ стороны некоторого приближающего замкнутую спрямляемую кривую K равностороннего многоугольника V^* с четным числом сторон, что длина K и периметр V^* будут связаны соотношением*

$$L - \Lambda^* < \varepsilon.$$

Мы закончили требуемую подготовку в части, касающейся понятия длины дуги кривой и периметра (длины) замкнутой кривой. Перейдем теперь к изучению понятия «площади». Для этого нам нужны еще некоторые предварительные сведения.

§ 9. Функции ограниченной вариации

Пусть непрерывная кривая K

$$x = x(t), \qquad y = y(t); \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

спрямляема. Каким условиям должны для этого удовлетворять функции $x(t)$ и $y(t)$? Очевидно, должна быть ограниченной сумма [1])

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

[1]) Квадратные корни всегда берутся *положительными*.

по всем разбиениям интервала

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Но

$$\sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} \geqslant |x(t_k) - x(t_{k-1})|,$$
$$\geqslant |y(t_k) - y(t_{k-1})|.$$

Таким образом, функция $x(t)$ должна обладать тем свойством, что для всех разбиений интервала сумма

$$\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|$$

ограничена. Первым такие функции рассматривал Л. Шефер; позже К. Жордан назвал их *функциями ограниченной вариации.*

Таким образом, имеет место теорема: *для того чтобы непрерывная кривая*

$$x = x(t), \qquad y = y(t); \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

была спрямляемой, необходимо, чтобы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$ были функциями ограниченной вариации.

Если мы учтем еще неравенство

$$\sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} \leqslant$$
$$\leqslant |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})|,$$

то увидим, *что это условие является также и достаточным.*

Мы докажем теперь следующую известную теорему: *Каждая непрерывная функция $f(t)$ ограниченной вариации может быть представлена как разность двух неубывающих непрерывных функций*

$$f(t) = \varphi(t) - \psi(t).$$

Пусть $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — частичный интервал из $a \leqslant t \leqslant b$. Разобьем его на произвольное число частей

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$$

и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Обозначим через

$$S_\alpha^\beta f$$

конечную (по нашему предположению о функции f) точную верхнюю границу всех таких сумм по всем разбиениям. Эта граница есть не что иное, как длина дуги непрерывной кривой

$$x = f(t), \qquad y = 0,$$

целиком лежащей на оси x между точками $t = \alpha$ и $t = \beta$.

Теперь положим

$$S_a^t = \varphi(t).$$

Это будет монотонно возрастающая непрерывная функция. Ее монотонность следует непосредственно из доказанного для длины дуги свойства аддитивности:

$$S_a^t + S_t^{t+h} = S_a^{t+h}.$$

Из доказанной в начале § 8 теоремы получается, что при $h < \delta$

$$S_t^{t+h} - |f(t+h) - f(t)| < \varepsilon,$$

так как слева первый член означает длину дуги, а второй — длину однозвенной вписанной ломаной. Таким образом, мы имеем

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = S_t^{t+h} < \varepsilon + |f(t+h) - f(t)|,$$

и ввиду непрерывности f можем сделать правую часть произвольно малой за счет выбора достаточно малого h. Поэтому функция $\varphi(t)$ действительно непрерывна.

Легко видеть, что непрерывная функция

$$\psi(t) = \varphi(t) - f(t)$$

заведомо не убывает, так как по определению φ при $\alpha < \beta$

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = S_\alpha^\beta \geqslant |f(\beta) - f(\alpha)|.$$

Таким образом, доказано требуемое утверждение:

$$f(t) = \varphi(t) - \psi(t).$$

Теорема, обратная доказанной, тривиальна: любая линейная комбинация монотонных функций есть функция ограниченной вариации.

§ 10. Площадь, охваченная замкнутой кривой

Пусть K — непрерывная замкнутая спрямляемая кривая

$$x = x(t), \qquad y = y(t); \qquad a \leqslant t \leqslant b; \qquad x(a) = x(b); \quad y(a) = y(b).$$

Впишем в кривую K многоугольник, вершины которого $A = T_0$, T_1, T_2, ..., $T_n = B = A$ соответствуют значениям параметра

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Разности значений параметра пусть удовлетворяют неравенствам

$$t_k - t_{k-1} < \delta; \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что *площадь* Φ *каждого вписанного в* K *многоугольника при достаточно малом* δ *отличается произвольно мало от некоторого числа* F, *которое мы назовем* **площадью**, *охваченной замкнутой кривой* K.

Согласно § 3 для площади многоугольника имеем

$$2\Phi = \sum_{k=1}^{n} [x(t_{k-1})\, y(t_k) - y(t_{k-1})\, x(t_k)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})\,[y(t_k) - y(t_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} y(t_{k-1})\,[x(t_k) - x(t_{k-1})].$$

Рассмотрим отдельно каждую из двух стоящих справа сумм. Ввиду спрямляемости кривой K функция $y(t)$ имеет ограниченную вариацию; поэтому (см. § 9) мы можем разложить эту функцию на две монотонные составляющие:

$$y(t) = \varphi(t) - \psi(t).$$

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})\,[y(t_k) - y(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})\,[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})\,[\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})].$$

Для каждой из стоящих справа сумм, точно так же как это

делается при доказательстве существования интеграла Римана, можно показать, что при размельчении разбиения, т. е. при уменьшении δ, эти суммы приближаются к определенному пределу. (Мы еще вернемся к этому в § 13.) Аналогичное верно и для второй суммы в выражении для 2Φ. Поэтому наше утверждение справедливо.

Из только что установленного и из результатов § 8 можно заключить следующее: *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно так выбрать длину* ρ *стороны приближающего* K *равностороннего многоугольника* V^*, *что для площадей* F *и* Φ^*, *охваченных* K *и* V^*, *будет справедливо неравенство*

$$|F - \Phi^*| < \varepsilon.$$

При этом можно добиться, чтобы у V^* было четное число вершин.

При нашем определении площади, которую охватывает непрерывная замкнутая спрямляемая кривая, как и в случае многоугольника, существенно направление обхода кривой. Оно определяется направлением возрастания параметра. Измененню направления обхода соответствует изменение знака площади. Как и в случае многоугольников (§ 3), имеет место свойство аддитивности площади (оно проверяется путем предельного перехода от многоугольников к кривым). *Если две непрерывные замкнутые спрямляемые кривые* K_1 *и* K_2 *охватывают площади* F_1 *и* F_2 *и имеют общую дугу с противоположным направлением прохождения этой дуги, то площадь* F, *которую охватывает кривая* K, *полученная объединением* K_1 *и* K_2 *с выбрасыванием общей дуги, равна*

$$F = F_1 + F_2.$$

Это прямо следует из аналогичного свойства многоугольников (ср. § 3, рис. 4, стр. 16).

§ 11. Решение изопериметрической задачи на плоскости

Периметр Λ и площадь Φ правильного n-угольника с положительным направлением обхода связаны легко проверяемым соотношением, которым мы уже пользовались в § 6:

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \Phi = 0.$$

Как следует из § 5, и как мы непосредственно проверили в § 6, для любого другого n-угольника, по крайней мере при четных n,

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \Phi > 0.$$

Поэтому во всех случаях

$$\Lambda^2 - 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \Phi \geqslant 0.$$

Мы можем из этого неравенства вывести новое, более слабое, но обладающее тем преимуществом, что число вершин n уже не будет в него входить. Временно в множителе $4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ положим $\frac{\pi}{n} = p$; тогда получим

$$4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 4\pi \frac{\operatorname{tg} p}{p}.$$

Поскольку известно, что при $0 < p < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} p > p,$$

то получаем

$$4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > 4\pi,$$

и наше неравенство переходит в новое неравенство

$$\Lambda^2 - 4\pi\Phi > 0. \qquad (*)$$

Пусть теперь K — замкнутая спрямляемая непрерывная кривая, L — ее длина, а F — охваченная ею площадь. Я утверждаю, что из неравенства $(*)$ следует

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0.$$

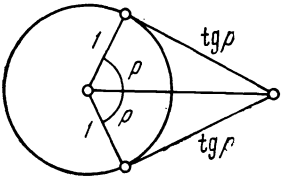

Рис. 6.

Мы можем построить описанным в конце § 8 способом приближающий кривую K равносторонний многоугольник V^* с четным числом вершин, причем, согласно результатам § 10, можем выбрать длину стороны ρ многоугольника V^* настолько малой, что его периметр Λ^* и площадь Φ^* будут произвольно мало отличаться соответственно от L и F. Если бы было

$$L^2 - 4\pi F < 0,$$

то мы могли бы так определить V^*, что получилось бы

$$\Lambda^{*2} - 4\pi\Phi^* < 0,$$

что противоречит неравенству (*) для равносторонних многоугольников.

Надо еще выяснить, когда в соотношении

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0$$

имеет место знак равенства. Если K — окружность с положительным направлением обхода, а r — ее радиус, то, очевидно,

$$L = 2\pi r, \qquad F = \pi r^2$$

и, значит,

$$L^2 - 4\pi F = 0.$$

Если же K есть любая другая непрерывная замкнутая спрямляемая кривая, то для нее можно найти с помощью описанного в § 1 четырехшарнирного метода новую кривую K', у которой длина L' и площадь F' таковы, что

$$L = L', \qquad F < F',$$

так что

$$L^2 - 4\pi F > L'^2 - 4\pi F',$$

и, поскольку мы показали, что должно быть

$$L'^2 - 4\pi F' \geqslant 0,$$

то

$$L^2 - 4\pi F > 0.$$

Таким образом, мы окончательно доказали следующий результат:

Пусть непрерывная замкнутая и спрямляемая плоская кривая K длины L охватывает площадь F. Тогда всегда выполняется неравенство

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда K есть окружность с положительным направлением обхода.

Это — сильная формулировка теоремы об изопериметрическом свойстве круга.

Отсюда сразу следует:

Среди всех допустимых кривых К данной длины наибольшую площадь охватывает окружность с положительным направлением обхода

или, иначе:

Среди всех допустимых кривых, охватывающих заранее заданную площадь, окружность имеет наименьшую длину.

Мы доказали теорему в полной общности, так как для сравниваемых кривых мы сделали ровно столько предположений, сколько необходимо, чтобы имели смысл сами понятия «длина дуги» и «площадь». Идея доказательства в основном старая, принадлежащая еще Штейнеру. Мы только преподнесли доказательство так, что при этом оказался исчерпанным вопрос существования. Было бы неразумно при этом еще вторгаться во все глубины понятий «длины дуги» и «площади». Разумеется, при таком изложении пришлось втиснуть первоначальный метод в прокрустово ложе анализа, из-за чего сильно пострадала его первоначальная простота. Что сказал бы об этом старик Штейнер, который был врагом чрезмерной вежливости? В лучшем случае он процитировал бы слова Фауста:

«Ваш ум, нетронутый доныне,
На них приучат к дисциплине,
Чтоб взял он направленья ось,
Не разбредаясь вкривь и вкось ...

... Во всем подслушать жизнь стремясь,
Спешат явленья обездушить,
Забыв, что если в них нарушить
Одушевляющую связь,
То больше нечего и слушать!» *).

§ 12. Приложения

Пусть даны четыре отрезка s_1, s_2, s_3, s_4, каждый из которых меньше суммы трех других. Тогда существует четырехугольник, последовательные стороны которого равны этим отрезкам. Более того, всегда можно найти вписанный в круг четырехугольник, стороны которого в порядке обхода окружности в положительном направлении

*) И. В. Гёте, «Фауст»; перевод Б. Пастернака.

будут равны s_1, s_2, s_3, s_4. Действительно, если положить (рис. 7)

$$\overline{CE} = x, \qquad \overline{DE} = y,$$

то из подобия треугольников ABE и CDE следует

$$x : (s_4 + y) = s_3 : s_1,$$
$$y : (s_2 + x) = s_3 : s_1;$$

откуда

$$x = s_3 \frac{s_1 s_4 + s_2 s_3}{s_1^2 - s_3^2}, \qquad y = s_3 \frac{s_1 s_2 + s_3 s_4}{s_1^2 - s_3^2}.$$

Таким образом, зная стороны s, можно найти все стороны треугольника CDE и построить сначала его, а затем и сам четырехугольник $ABCD$ *).

Мы хотим показать, что *среди всех четырехугольников с заданными длинами сторон именно вписанный в окружность имеет наибольшую площадь.*

Согласно Штейнеру это получается сразу из максимального свойства круга с помощью метода, в известном смысле обратного четырехшарнирному. Действительно, пусть $A'B'C'D'$ — любой другой четырехугольник с теми же длинами сторон. Мы можем, сохраняя форму и порядок следования, перенести четыре сегмента, ограниченных сторонами s_1, s_2, s_3, s_4 и описанной вокруг $ABCD$ окружностью K, и приложить их к соответствующим сторонам $A'B'C'D'$; они составят изломанную в четырех точках кривую K' (рис. 8). Согласно

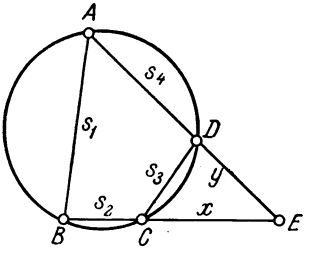

Рис. 7.

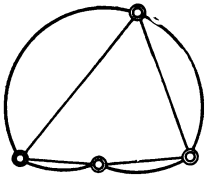

Рис. 8.

*) В случае $s_1 = s_3$ достаточно построить равнобочную трапецию с основаниями s_2 и s_4 и боковой стороной s_1. — *Прим. перев.*

изопериметрической теореме площадь, охваченная кривой K', меньше, чем площадь круга K. Так как сами сегменты остались при этом неизменными, то новая площадь четырехугольника меньше, чем старая; но это нам и требовалось доказать.

Этот результат можно, конечно, получить и непосредственно, без окольного пути, опирающегося на несравненно более глубокое свойство круга. Например, можно поступить следующим образом. Для площади F четырехугольника имеет место формула

$$F^2 = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) - s_1 s_2 s_3 s_4 \cos^2 \theta,$$

где $2s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$, а θ — среднее арифметическое двух противоположных внешних углов четырехугольника [1]).

---

[1]) Вывод этой формулы см., например, в книге: G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie, Berlin und Leipzig, 1914, стр. 96. [Вот доказательство этой формулы. Если $AB = s_1$, $BC = s_2$, $CD = s_3$, $DA = s_4$, то по теореме косинусов

$$AC^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos B = s_3^2 + s_4^2 - 2s_3 s_4 \cos D,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - s_4^2\right) = s_1 s_2 \cos B - s_3 s_4 \cos D. \qquad (*)$$

С другой стороны, очевидно,

$$2F = s_1 s_2 \sin B + s_3 s_4 \sin D. \qquad (**)$$

Возводя в квадрат формулы (*) и (**) и складывая их, имеем

$$4F^2 + \frac{1}{4}\left(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - s_4^2\right)^2 = s_1^2 s_2^2 + s_3^2 s_4^2 - 2s_1 s_2 s_3 s_4 \cos(B + D) =$$
$$= s_1^2 s_2^2 + s_3^2 s_4^2 - 2s_1 s_2 s_3 s_4 \cos 2\theta$$

или, поскольку $s_1^2 s_2^2 + s_3^2 s_4^2 = (s_1 s_2 + s_3 s_4)^2 - 2s_1 s_2 s_3 s_4$,

$$16F^2 = 4(s_1 s_2 + s_3 s_4)^2 - \left(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - s_4^2\right)^2 - 16 s_1 s_2 s_3 s_4 \cos^2 \theta;$$

далее остается только воспользоваться тем, что, очевидно,

$$\left(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - s_4^2\right)^2 - 4(s_1 s_2 + s_3 s_4)^2 =$$
$$= [(s_1 + s_2)^2 - (s_3 - s_4)^2][(s_1 - s_2)^2 - (s_3 + s_4)^2] =$$
$$= (s_1 + s_2 + s_3 - s_4)(s_1 + s_2 - s_3 + s_4)(s_1 - s_2 + s_3 + s_4)(s_1 - s_2 - s_3 - s_4) =$$
$$= -(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4).$$

— *Прим. ред*].

Из этой формулы видно, что F^2 имеет максимум при

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

т. е. в случае вписанного четырехугольника.

После того как максимальное свойство описанного четырехугольника доказано, можно несколько обобщить изложенный в § 1 четырехшарнирный метод, заменив употребленные там симметричные четырехугольники произвольными шарнирными четырехугольниками. Применение этого «обобщения четырехшарнирного метода» имеет то преимущество, что мы избавились от необходимости предварительно симметризовать замкнутые кривые. Но частный метод § 1 предпочтительнее тем, что в нем мы избегаем скучных вычислений, ведущих к приведенной выше формуле для F^2.

С помощью обобщенного четырехшарнирного процесса можно сразу доказать, что *только тот среди всех n-угольников с заданными длинами последовательных сторон может иметь максимум площади, вершины которого так расположены на окружности, что при положительном обходе этой окружности они следуют друг за другом в правильной последовательности.*

Однако тот факт, что максимум в этой задаче действительно существует, доказывается точно такими же рассуждениями, как в § 5. При этом устанавливается также существование вписанного n-угольника с заданными длинами сторон.

Из изопериметрического свойства круга сразу получается решение следующей, немного более общей задачи. Пусть две различные точки A и B соединены фиксированной спрямляемой кривой K_1. Требуется так определить соединяющую точки A и B другую спрямляемую кривую K_2, имеющую данную длину L, чтобы замкнутая кривая $K_1+K_2=K$ охватывала возможно большую площадь.

Очевидно, кривая K_2 должна быть дугой окружности.

§ 13. О понятии интеграла

В §§ 7—10 мы совершенно независимо имели дело с понятиями длины и площади и вывели некоторые свойства этих, как говорят, «интегральных инвариантов». Здесь будет разъяснено, как можно рассматривать эти понятия более

единообразно на основе некоторого обобщения интеграла Римана.

Возьмем не одну, а две функции f и g. Пусть при этом функция $f(t)$ зависит от одной переменной и задана в интервале $a \leqslant t \leqslant b$, а функция $g(s, t)$ — от двух переменных, меняющихся в треугольной области $a \leqslant s \leqslant b$, $s \leqslant t \leqslant b$. Относительно этих функций сделаем следующие предположения:

I. $f(t)$ непрерывна;

II. $g(s, t)$ неотрицательна: $g(s, t) \geqslant 0$;

III. из $t_1 < t_2 < t_3$ всегда следует:

$$g(t_1, t_2) + g(t_2, t_3) \geqslant g(t_1, t_3);$$

IV. для всякого разбиения

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

интервала $a \leqslant t \leqslant b$ на любое конечное число частей

$$g(t_0, t_1) + g(t_1, t_2) + \ldots + g(t_{n-1}, t_n) \leqslant G,$$

где G — некоторое конечное число;

V. $g(s, t)$ непрерывна и обращается в нуль при $s = t$.

При этих условиях имеет место следующая теорема существования:

Составим для некоторого разбиения Z нашего интервала

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

сумму

$$S_Z = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\, g(t_{k-1}, t_k),$$

где

$$t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k.$$

Тогда эта сумма сколь угодно мало отличается от некоторого предела J, если только наибольший частичный интервал из Z достаточно мал:

$$|S_Z - J| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad |t_k - t_{k-1}| < \delta.$$

Доказательство, по существу, таково же, как и для обычного интеграла Римана. Наметим его вкратце.

Выберем сначала каждую среднюю точку τ_k так, чтобы в этой точке функция $f(t)$ принимала свое наименьшее значение $\varphi(t_{k-1}, t_k)$ на интервале $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$. Обозначим соответствующую сумму через Σ_Z:

$$\Sigma_Z = \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}, t_k) g(t_{k-1}, t_k).$$

Если присоединить к уже имеющимся точкам t_k новые, то, как можно заключить из III, сумма Σ_Z не уменьшится.

Точная верхняя граница сумм Σ_Z по всем разбиениям Z ввиду I и IV будет конечна. Обозначим ее через J. Мы покажем, что это число J обладает требуемыми свойствами.

Прежде всего, по самому определению точной верхней границы, можно так выбрать разбиение Z'

$$a = t_0' < t_1' < t_2' < \ldots < t_{n'}' = b,$$

что будет выполняться неравенство

$$J - \Sigma_{Z'} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое, заранее заданное число. Пусть теперь Z — другое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

настолько мелкое, что все частичные интервалы Z меньше, чем δ; число $\delta > 0$ будем считать заведомо меньшим, чем все частичные интервалы из Z'. Тогда между двумя соседними точками деления t_{p-1}, t_p из Z лежит не больше чем одна точка деления t_k' из Z':

$$t_{p-1} \leqslant t_k' \leqslant t_p.$$

Построим разбиение $Z + Z'$, содержащее точки из Z и Z'; при этом

$$\Sigma_{Z+Z'} \geqslant \Sigma_{Z'}$$

и потому

$$J - \Sigma_{Z+Z'} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Теперь можно оценить разность

$$\Sigma_{Z+Z'} - \Sigma_Z = \Sigma \{\varphi(t_{p-1}, t'_k) g(t_{p-1}, t'_k) + \\ + \varphi(t'_k, t_p) g(t'_k, t_p) - \varphi(t_{p-1}, t_p) g(t_{p-1}, t_p)\}.$$

Учитывая V, мы можем выбрать δ настолько малым, что

$$g(t_{p-1}, t'_k); \quad g(t'_k, t_p); \quad g(t_{p-1}, t_p) < \rho;$$

тогда имеем

$$\Sigma_{Z+Z'} - \Sigma_Z < 3\rho n' \cdot \max |f(t)|.$$

Но поскольку за счет выбора δ мы можем сколь угодно уменьшить $\rho > 0$, то можно сделать сколь угодно малой разность

$$\Sigma_{Z+Z'} - \Sigma_Z < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Из I и IV следует, что мы, кроме того, можем обеспечить соблюдение неравенства

$$S_Z - \Sigma_Z < \varepsilon. \tag{3}$$

Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ будут верны все неравенства (1), (2), (3), из которых следует желаемый результат

$$|J - S_Z| < \varepsilon.$$

Для определенного нами предела J, как и для частного случая длины дуги, имеет место легко устанавливаемое свойство аддитивности:

$$J_a^b + J_b^c = J_a^c.$$

Данное ранее определение понятия длины дуги есть, по существу, частный случай только что приведенного понятия «интеграла» J. Действительно, возьмем в качестве функций f и g

$$f(t) = 1; \qquad g(s, t) = \sqrt{[x(t) - x(s)]^2 + [y(t) - y(s)]^2},$$

где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции ограниченной вариации. Тогда все предположения I—V выполнены, и доказанная только что общая теорема дает ранее полученную теорему о существовании длины.

Мы более систематично продвигались бы вперед, если бы сразу начали прямо с введенного здесь понятия интеграла. Но выбранный нами путь, по-видимому, имеет свои преимущества: он более легок для понимания. Общее изложение отпугивало бы читателя уже одним тем, что поставленные в самом начале условия I—V были бы ничем не мотивированы, так сказать, свалились бы с неба.

Как свести понятие площади к нашему понятию интеграла? Оставим в качестве $f(t)$ произвольную непрерывную функцию, а за функцию $g(s, t)$ примем

$$g(s, t) = \varphi(t) - \varphi(s),$$

где φ — непрерывная, монотонная (неубывающая) функция. Тогда условия I—V выполняются. Выражение

$$J_a^b = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\, g(t_{k-1}, t_k) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\, [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})],$$

следуя Стилтьесу, кратко записывают в виде

$$J_a^b = \int_a^b f(t)\, d\varphi(t).$$

Именно к такому интегралу Стилтьеса сводилось в § 10 понятие площади.

§ 14. Исторические сведения; литература

Историю «изопериметрической задачи», которая началась в седой древности легендой о карфагенской царице Дидоне, легко проследить вплоть до господина тайного советника Германа Амандуса Шварца из Берлина. Мы не ставим здесь себе таких целей *). В заключение первой части нашей книги мы только приведем некоторые литературные ссылки, не имеющие ни малейшей претензии на полноту **).

В древности минимальным свойством круга, как уже упоминалось, занимался грек Зенодор. Имел с этим дело и Архимед, но из его исследований на эту тему ничего путного, видимо, не вышло. Другие ссылки на древнюю литературу можно найти в заметке

*) Ср. § 10 популярной брошюры автора [27].

**) Материал этого параграфа сегодня заметно устарел; в частности, литературные указания представляют теперь уже только исторический интерес.

В. Шмидта «Об истории изопериметрии в древности» (W. Schmidt, Bibl. math. (3) **2**, 1901).

К моменту изобретения общего вариационного исчисления ведущие ученые уже занимались частными изопериметрическими задачами и их ближайшими аналитическими обобщениями. Здесь, прежде всего, заслуживают упоминания Яков Бернулли (Jakob Bernoulli, Acta eruditorum, май 1697) и его брат Иоганн; при этом между двумя братьями возник ожесточенный и в высшей степени неприятный спор о приоритете. Никак нельзя обойти здесь и знаменитейшего основателя многих математических дисциплин Леонарда Эйлера — см. его собрание примеров, относящихся к вариационному исчислению (Leonhard Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausanne — Genf, 1744) *). Наконец, должен быть упомянут и Ж. Л. Лагранж (J. L. Lagrange, Misc. Soc. Taur. **2**, 1762).

Общим недостатком всех этих аналитических исследований был пробел в вопросе существования. Как уже отмечалось, его впервые восполнил К. Вейерштрасс — см. по этому поводу изложение Г. А. Шварца (H. A. Schwarz, Gesam. Abhandl., т. II, Berlin, 1890, стр. 232 и сл.). Новое доказательство с использованием тригонометрических рядов идет от А. Гурвица (см. сноску на стр. 30).

С нашей точки зрения преимущественно геометрические приемы доказательства здесь важнее, чем аналитические. С этой стороны подходили к вопросу Г. Крамер (G. Cramer, Berliner Akademie, 1752), С. Люилье (S. Lhuilier, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum..., Warshau, 1782) и, особенно, обстоятельный Я. Штейнер. Из штейнеровских приемов доказательства мы до сих пор пользуемся «четырехшарнирным методом». Второй метод — «метод симметризации» приведет нас во второй части этой книги к изопериметрическому свойству шара.

Штейнер опубликовал эти методы в трех довольно пространных статьях, воспроизведенных во втором томе его собрания сочинений (Gesam. Werke, Berlin, 1882). По мнению Вейерштрасса, указанные статьи принадлежат к самым значительным работам этого плодовитого геометра. Первая статья называется «Простое доказательство основной изопериметрической теоремы»; она написана в 1836 г. Обе другие — «О максимуме и минимуме для фигур на плоскости, на сфере и в пространстве вообще» были представлены Штейнером Парижской академии в 1841 г. Четырехшарнирный метод содержался в первой из этих двух одинаково озаглавленных статей под названием «первый способ доказательства» (стр. 193—194). В духе Штейнера была написана и книга Р. Штурма «Максимум и минимум» (R. Sturm, Maxima und Minima, Leipzig und Berlin, 1910).

Дополнение штейнеровского доказательства осуществлялось неоднократно. В частности, Ф. Эдлер (F. Edler) вполне элементарно

---

*) Есть русский перевод: Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или сешение изопериметрической задачи, взятой в самом широком рмысле, ГТТИ, 1934.

с помощью рассматриваемой ниже (стр. 58) симметризации доказал экстремальное свойство правильных многоугольников (Göttinger Nachrichten, 1882, стр. 73—80). К. Каратеодори и Э. Штуди (C. Carathéodory, E. Study) дополнили идею доказательства Штейнера двумя разными реализациями бесконечных сходящихся процессов («Два доказательства того, что круг среди всех фигур одного периметра имеет наибольшую площадь», Math. Ann. **68**, 1909, стр. 133—140). Каратеодори, применив к замкнутой кривой бесконечное число раз четырехшарнирный метод, показал, что при соответствующем предельном переходе этот процесс ведет к окружности; при этом, в отличие от нашего исследования, он ограничивался «выпуклыми» кривыми. Доказательство Штуди в основном соответствовало изложенному нами; только он вместо теоремы Вейерштрасса о достижении экстремума непрерывной функцией пользовался некоторым сходящимся процессом. Метод Штуди был распространен Шварцем на сферическую геометрию.

Максимальное свойство правильных многоугольников было доказано Вейерштрассом в его лекциях с помощью изящного аналитического процесса. Изложение можно найти у Э. Штуди в его статье «Многоугольники экстремальной площади» (Archiv für Math. (3) **11**, 1907). Мою заметку с тем же названием см. там же (3) **22**, 1914. Специально многоугольникам посвящена заметка Г. Вебера во II томе Энциклопедии элементарной математики Г. Вебера и И. Вельштейна в ее первом издании (H. Weber, J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, т. II, Leipzig, 1905) *). В более позднем итальянском издании Ф. Энрикеса (F. Enriques) Энциклопедии элементарной математики (Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna, 1914) имеется заметка О. Чизини (O. Chizini) «Об элементарной теории изопериметрии» и заметка Энрикеса «Максимум и минимум в современном анализе».

Ф. Бернштейн доказал изопериметрическое свойство окружностей на шаре, используя рассмотрение параллельных кривых, а также решил задачу в случае плоскости путем предельного перехода от сферы к плоскости (F. Bernstein, Math. Ann. **60**, 1905, стр. 117).

Чтобы применить четырехшарнирный метод в условиях сферической геометрии, надо воспользоваться тригонометрической формулой К. В. Баура для площади сферического четырехугольника. Она является обобщением соответствующей формулы стр. 46. Формула Баура изящным образом доказана Хессенбергом в юбилейном сборнике, посвященном Шварцу (G. Hessenberg, Swarz-Festschrift, Berlin, 1914, стр. 76—83).

Штейнеровский четырехшарнирный метод можно с успехом применять и в других задачах. Например, с его помощью можно найти охватывающую наименьшую площадь плоскую выпуклую кривую данной «ширины», т. е. с заранее заданным минимумом

---

*) См. Г. Вебер, И. Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, книги 2 и 3, Одесса, Матезис, 1910, гл. V, стр. 3—39.

расстояния между параллельными касательными (см. статьи автора «Выпуклая фигура заданной постоянной ширины и наименьшей площади», Math. Ann. 76, 1915, стр. 507—513 и «Несколько замечаний о кривых и поверхностях постоянной ширины», Leipziger Berichte, 1915, стр. 290—297).

Новое обобщение изопериметрического свойства круга нашел Г. Минковский; ниже мы еще вернемся к этому. Но уже здесь упомянем, что неравенство Минковского для «смешанных площадей», которое содержит как частный случай наше неравенство $L^2 - 4\pi F \geqslant 0$, может быть доказано вполне элементарно. Можно, например, штейнеровский четырехшарнирный метод и вместе с ним все приведенное нами доказательство заменить на, в известном смысле, двойственное ему, как я показал это в статье «Доказательства теорем Брунна и Минковского о минимальном свойстве круга» (Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **23**, 1914, стр. 210—234). При этом обосновывается двойственный аналог формулы стр. 46. Именно, если обозначить через s_1, s_2, s_3, s_4 длины сторон, а через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 половины внешних углов четырехугольника, то, при соответствующем выборе знака площади F четырехугольника, получаем для этой площади формулу

$$F = \frac{(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)^2}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4} - \frac{(s_1 - s_2 + s_3 - s_4)^2}{\operatorname{ctg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2 + \operatorname{ctg}\varphi_3 + \operatorname{ctg}\varphi_4}.$$

Другое, еще более простое доказательство было дано Г. Фробениусом в заметке «О смешанных площадях двух овалов» (G. Frobenius, Berliner Berichte **28**, 1915, стр. 387—404).

Весьма подробный обзор литературы о максимумах и минимумах в элементарной геометрии дан М. Цахариасом в «Энциклопедии математических наук» (M. Zacharias, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III AB9, Leipzig, 1907; см. в особенности § 28 этой статьи).

Понятие «длины дуги» в использованной нами форме введено Г. Пеано, Л. Шеффером и К. Жорданом. Ссылки на этих авторов и другую литературу можно найти в статье Г. фон Мангольдта (H. v. Mangoldt) «О применениях дифференциального и интегрального исчисления» в «Энциклопедии математических наук» (см. III D1,2, стр. 20—23). Дальнейшее развитие понятия длины на основании идущего от А. Лебега понятия меры было осуществлено К. Каратеодори в статье «О линейной мере точечных множеств и обобщении понятия длины» (Göttinger Nachrichten, 1914). С этим теснейшим образом связано упомянутое нами в § 13 расширение понятия интеграла. По родственным вопросам элементарного характера, таким как измерение длины окружности и приближенное вычисление длины дуги и площади, см. содержательные книги Ф. Валена «Построения и приближения» (Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig, 1911) и Л. Бибербаха «Теория геометрических построений» (L. Bieberbach, Theorie der geometrischer Konstruktionen, Basel — Stuttgart, 1952).

Понятие «площади» еще будет рассматриваться ниже в этой книге в связи с интегралами Римана и Лебега и соответствующими понятиями меры Жордана и меры Лебега. Использованное нами выше определение было связано с интегралом Стилтьеса (T. J. Stieltjes, Annales de Toulouse **8**, 1894). Понятия функции ограниченной вариации и интеграла Стилтьеса для функций нескольких переменных были введены М. Фреше (M. Fréchet, Nouvelles Annales de Math. (4) **10**, 1910, стр. 241—256; Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 1915. стр. 215—234). См. также И. Радон «Теория и приложения абсолютно аддитивных функций множеств» (J. Radon, Sitzungberichte der Wiener Akad., math.-nat. Klasse **122**, 1913, стр. 1—144). С теорией функций вещественной переменной наилучшим образом можно ознакомиться по «Лекциям о функциях вещественного переменного» К. Каратеодори (C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Basel — Stuttgart, 1950) *).

Пожалуй, следует в заключение подчеркнуть, что окружность и сфера являются решениями еще многих других задач о максимуме и минимуме. Назовем здесь две весьма известные задачи, из которых только первая решена полностью **).

«Односвязную область», т. е. взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ круга на плоскости требуется так *конформно* отобразить на другую область, чтобы при этом в некоторой точке был фиксирован единичный коэффициент растяжения и чтобы полученная при отображении область имела возможно меньшую площадь. Минимум здесь достигается, причем образ есть круг того же размера. Решение этой задачи восходит к диссертации Б. Римана (Göttingen, 1851) ***); далее см. Л. Бибербах (L. Bieberbach, Circolo math. Palermo **38**, 1914, стр. 98—112; Math. Ann. **77**, 1916, стр. 153—171).

Требуется найти форму закрепленной по контуру плоской мембраны с заданной площадью так, чтобы основной тон колеблющейся мембраны был возможно более низким. Этот вопрос был поставлен лордом Релеем; ему было посвящено исследование «Равновесие закрепленной эластичной пластинки» Ж. Адамара (J. Hadamard, Mémoires présentés par divers savants á l'Académie de Sciences (2), **33**, 1908).

---

*) Русскому читателю можно рекомендовать книги: Л. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949; П. Халмош, Теория меры, ИЛ, 1953; И. П. Натансон, Теория функций вещественного переменного, Гостехиздат, 1957. К разобранным здесь вопросам тесно примыкает также статья В. А. Рохлина [20].

**) В 1923 г. была решена и вторая задача. Большой круг подобных вопросов охватывает книга Г. Полиа и Г. Сегё [36], которая тоже сегодня уже далеко не исчерпывает сделанного в этом направлении.

***) См. Б. Риман, Основы общей теории функций одной комплексной переменной, в книге «Сочинения», Гостехиздат, 1948, стр. 49—87.

Среди многочисленных новых доказательств изопериметрического свойства круга упомянем, прежде всего, те, которые даются в «интегральной геометрии» и идут в основном от Л. А. Сантало. См. в связи с этим книгу автора «Интегральная геометрия» [31], третье переработанное издание которой было недавно (в 1955—1956 гг.) выпущено в Берлине *). См. также Т. Боннезен [22]; Е. Штейниц, Разбиения пространства ..., Энциклопедия матем. наук, III AB12, § 16, а также Т. Боннезен и В. Фенхель [3], стр. 111—113 и Л. Фейеш Тот [11], стр. 23 и след., наконец, В. Бляшке [29], стр. 56—62**).

---

*) См. также гл. V книги Л. А. Сантало [32].

**) См. также гл. V книги Г. Хадвигера [5] и гл. VI книги Г. Хадвигера [19].

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ШАРА

§ 15. Основная идея доказательства, принадлежащая Штейнеру

I. Постановка задачи. Мы переходим теперь к рассмотрению экстремального свойства шара. Оно заключается в том, что среди «всех тел» заданного объема шар обладает наименьшей поверхностью и соответственно среди всех тел с данной площадью поверхности он обладает наибольшим объемом. Для краткости изложения мы будем допускать к сравнению с шаром только так называемые «выпуклые» тела. Но используемый процесс достаточен и для рассмотрения прочих тел[1]). «Выпуклое тело» короче называют «овалоидом».

В соответствии с нашей целью мы определим понятие «выпуклого тела» несколько у́же, чем это обычно делается. Именно: *пространственное точечное множество образует выпуклое тело, если оно*: 1) *ограничено*, 2) *замкнуто и* 3) *обладает свойством выпуклости, т. е. со всякой пересекающей его прямой имеет общим только один отрезок* (*он может, конечно, сводиться к единственной точке*). Последнее, важнейшее, требование можно заменить равносильным требованием, чтобы точечное множество вместе с любыми двумя точками содержало и весь соединяющий эти точки отрезок. Множество всех точек, лежащих как внутри, так и на поверхности шара или эллипсоида, или множество всех точек, лежащих внутри и на поверхности куба, дают нам простые примеры выпуклых тел. *Для определенности подчеркнем, что, например, круг, отрезок и даже одну точку мы считаем выпуклыми «телами»*. Тела вида изогнутого рога или кольца являются простыми примерами невыпуклых тел.

---

[1]) Ср. § 20, п. I.

Обозначим объем шара и площадь его поверхности через J и O, а через r — его радиус; тогда открытие Архимеда можно выразить формулами:

$$J = \frac{4\pi}{3} r^3, \qquad O = 4\pi r^2,$$

из которых следует

$$O^3 - 36\pi J^2 = 0.$$

Между объемом и площадью поверхности (о точном смысле этих понятий мы дальше договоримся) всякого другого тела, т. е. всякого выпуклого тела, не имеющего формы шара, имеет место соотношение

$$O^3 - 36\pi J^2 > 0.$$

Это неравенство является аналитическим выражением приведенного выше экстремального свойства шара. Доказательством этого неравенства для выпуклых тел мы и будем заниматься во второй части книги.

II. Симметризация Штейнера. Штейнер придумал процесс (здесь он будет кратко называться «симметризацией»), который позволяет для каждого нешарообразного выпуклого тела построить другое тело с тем же объемом, но меньшей поверхностью. Поэтому, если вообще среди всех выпуклых тел данного объема имеется одно, обладающее наименьшей поверхностью, то этим телом может быть только шар. *С помощью симметризации*, которая теперь занимает место примененного в плоском случае четырехшарнирного метода, *наша задача сводится к одному только доказательству существования.*

Раньше, чем рассмотреть симметризацию, сделаем довольно тривиальное замечание. *Выпуклое тело, у которого для любой плоскости имеется параллельная ей плоскость симметрии, обязательно есть шар.*

Прежде всего, такое тело имеет три попарно перпендикулярные плоскости симметрии. А так как выполненные последовательно симметрии относительно трех таких плоскостей дают симметрию относительно точки M пересечения этих трех плоскостей, то M есть центр симметрии

тела. Наш первый результат таков: *наше выпуклое тело имеет центр симметрии M.*

Далее, ограниченное точечное множество не может иметь двух разных центров симметрии M_1 и M_2, ибо последовательные симметрии относительно обеих этих точек дают параллельный перенос на отрезок $2\overline{M_1M_2}$, при котором каждая точка нашего множества опять должна перейти в точку этого множества. При многократном повторении этого параллельного переноса каждая точка перейдет как угодно далеко, что находится в противоречии с предположенной ограниченностью тела. Отсюда следует второй результат: каждая плоскость симметрии тела проходит через его центр (иначе имелся бы второй центр, симметричный точке M относительно плоскости симметрии). Значит, *каждая плоскость, проходящая через M, есть плоскость симметрии тела.*

Пусть теперь P — какая-нибудь точка нашего выпуклого тела. Тогда каждая настолько же удаленная от M точка Q также принадлежит телу, ибо отражение от плоскости симметрии, проходящей через M перпендикулярно отрезку PQ, переводит P в Q. Таким образом, *если тело содержит точку P, то оно содержит* поверхность шара с центром M, проходящую через P, и ввиду выпуклости содержит также и весь *шар с центром M и радиусом MP.* Теперь, если P — наиболее удаленная от M точка тела (такая точка должна существовать ввиду ограниченности и замкнутости тела), то тело должно совпадать с только что построенным шаром. Этим установлено, что *тело есть шар.*

Пусть теперь K — выпуклое тело, не являющееся шаром, и пусть выбрана произвольная плоскость (которую мы будем считать «горизонтальной»), для которой у тела K нет параллельной ей плоскости симметрии. Тогда симметризация K относительно этой горизонтальной плоскости состоит в следующем. Мы представляем себе K состоящим только из тонких вертикальных стержней. Каждый такой стержень передвинем в вертикальном направлении настолько, чтобы его середина попала на нашу горизонтальную плоскость. Передвинутые стержни заполнят симметричное относительно этой плоскости тело $\tilde{K}$. Мы покажем, что оно опять выпукло. Геометрически это можно выразить так. *Определим тело $\tilde{K}$, симметричное относительно нашей горизонтальной плоскости*

так, что K и $\tilde{K}$ пересекаются каждой вертикалью по отрезкам одинаковой длины [1]).

Из так называемого принципа Кавальери сразу вытекает равенство объемов тел K и $\tilde{K}$:

$$J_K = J_{\tilde{K}}.$$

Далее, если K ограничено конечным числом плоскостей, т. е. если K, а значит и $\tilde{K}$, есть многогранник, то, как это с помощью элементарно геометрических соображений показал Штейнер, площади соответствующих поверхностей связаны неравенством

$$O_K > O_{\tilde{K}}.$$

Из справедливости этого неравенства в случае многогранника Штейнер заключал о его справедливости в общем случае, полагая, что для этого достаточно приближать любое выпуклое тело многогранниками.

III. Критика доказательства Штейнера. Чтобы на основе симметризации получить полное доказательство минимального свойства шара, необходимо, как мы уже отмечали, иметь доказательство существования, т. е. знать, что среди всех выпуклых тел заданного объема вообще есть тело с наименьшей поверхностью. Чтобы убедиться в необходимости доказывать существование, достаточно повторить те же доводы, что и в первой части для аналогичной плоской задачи. Но в пространственной задаче дело обстоит немножко хуже, чем в плоском случае: с самой штейнеровской симметризацией не совсем все в порядке.

Из трех свойств этого процесса, а именно: 1) что из выпуклости K следует выпуклость $\tilde{K}$, 2) что

$$J_K = J_{\tilde{K}}$$

и 3) что

$$O_K > O_{\tilde{K}},$$

---

[1]) Аналогичная конструкция на плоскости изображена на рис. 13, стр. 87, а симметризация четырехгранника — на рис. 9, стр. 61.

весьма существенный третий пункт пока нами не установлен. Из справедливости этого неравенства для многогранника и возможности приближения произвольного выпуклого тела многогранниками с помощью предельного перехода следует для этого тела лишь, что

$$O_K \geqslant O_{\tilde{K}},$$

и остается еще доказать, что равенство имеет место только, когда уже само тело K, вопреки предположению, имеет горизонтальную плоскость симметрии. В этом тривиальном исключительном случае симметризация сводится к чистому параллельному переносу.

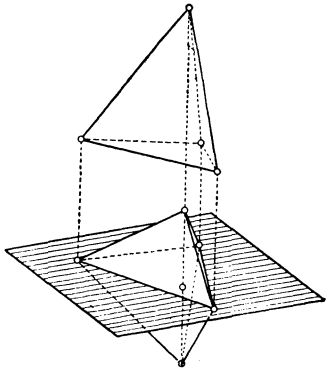

Рис. 9.

Таким образом, если мы хотим действительно завершить штейнеровское доказательство, то путь четко определен: сначала мы должны ближе ознакомиться с понятием «выпуклого тела» в той мере, в какой это необходимо для дальнейшего; затем изучить понятия «объема» и «площади поверхности»; далее, строго обосновать три свойства симметризации и, наконец, решить вопрос существования. Если в последнем вопросе мы попробуем сначала, как и в случае плоскости, исходить из известной теоремы существования Вейерштрасса для непрерывных функций и с ее помощью установить неравенство $O^3 - 36\pi J^2 > 0$ только для многогранников с фиксированным числом вершин и граней, то окажется, что это принципиально невозможно сделать с помощью симметризации, так как при симметризации многогранника, вообще говоря, число вершин и граней возрастает, в то время как при соответствующем применении четырехшарнирного метода к многоугольнику число вершин остается неизменным (примером может служить изображенная на рис. 9 симметризация, переводящая четырехгранник в шестигранник). Из всего сказанного следует, что пространственная задача содержит гораздо большие трудности, чем плоская.

§ 16. Выпуклые тела и выпуклые функции

I. Выпуклые функции двух переменных. Из данного ранее, на стр. 57, определения выпуклого тела сразу следует, что *общая часть двух пересекающихся выпуклых тел есть опять выпуклое тело.*

Точка выпуклого тела называется внутренней, если можно построить маленький шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий данному телу. Выпуклое тело без внутренних точек лежит целиком в одной плоскости, ибо если тело содержало бы четыре вершины некоторого четырехгранника, то оно содержало бы также его внутреннюю часть, а значит, и внутренние точки. Такое выпуклое тело без внутренних точек следует кратко называть «*выпуклой фигурой*» или «*выпуклой областью*». Примером выпуклой фигуры являются круг, отрезок, точка. Точки выпуклого тела, не являющиеся внутренними, называются *граничными точками*; последние точки в своей совокупности образуют *выпуклую границу или граничную поверхность выпуклого тела.*

Легко доказать, что *выпуклое тело пересекается с секущей его плоскостью по выпуклой фигуре. Ортогональные проекции точек выпуклого тела на плоскость заполняют выпуклую фигуру. Все точки, расстояние которых от выпуклого тела*[1]) *K не больше, чем ρ, образуют снова выпуклое тело K_ρ — «параллельное тело» для тела K.*

Пусть теперь K — произвольное выпуклое тело. Примем какую-нибудь плоскость за (x, y)-плоскость или, как мы также будем говорить, за «горизонтальную плоскость» прямоугольной системы координат.

Горизонтальная проекция $(x, y, 0)$ каждой точки (x, y, z) тела K принадлежит некоторой выпуклой фигуре G на горизонтальной плоскости; эту фигуру мы будем называть «горизонтальной проекцией» тела K. Так как каждая вертикаль, т. е. прямая, параллельная оси z, пересекает тело K, вообще говоря, по отрезку, то мы видим, что координата z любой из точек тела K удовлетворяет двум неравенствам

$$g(x, y) \leqslant z \leqslant f(x, y).$$

Эти функции однозначно определены в области G. Если

---

[1]) См. стр. 75.

какая-нибудь тройка значений (x, y, z) обращает одно из этих соотношений в равенство, то ей соответствует граничная точка тела K.

Пусть теперь (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)—две точки тела K; тогда координаты каждой точки соединяющего их отрезка можно записать в виде

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2; \quad z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,$$

где

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0.$$

Поскольку ввиду выпуклости тела K каждая точка (x, y, z) отрезка должна в свою очередь принадлежать телу K, то функции f и g должны удовлетворять неравенствам

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2),$$

$$g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \leqslant \lambda_1 g(x_1, y_1) + \lambda_2 g(x_2, y_2).$$

После этого напрашивается следующее определение: *функция, заданная в выпуклой области G плоскости x, y, называется выпуклой (сверху), если*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2)$$

при всех (x_1, y_1), (x_2, y_2) из G и при всех $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ и если, кроме того, $f(x, y)$ в G ограничена снизу:

$$f(x, y) \geqslant m.$$

Для определенной телом K функции f последнее условие всегда выполняется ввиду ограниченности тела. Аналогично функции $f(x, y)$ определяемая телом K функция $-g(x, y)$ также выпукла (сверху). Можно также сказать, что сама функция $g(x, y)$ *выпукла снизу* *).

Из нашего определения выпуклости функций сразу следует, что *если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$—заданные в области G выпуклые (сверху) функции, то функция*

$$f(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)$$

также выпукла (сверху), если только $c_1 \geqslant 0$ и $c_2 \geqslant 0$.

*) В современной литературе часто выпуклыми называют только функции, выпуклые снизу, а функции, выпуклые сверху, называют вогнутыми. Автор этой книги обычно под выпуклостью понимает выпуклость сверху. — *Прим. перев.*

Другими словами, линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами не выводит из множества выпуклых функций. В частности, функция

$$\frac{1}{2} f(x, y) - \frac{1}{2} g(x, y)$$

выпукла.

II. Задание выпуклого тела посредством неравенств. Лежащая в одной плоскости $z = 0$ выпуклая фигура G в смысле геометрии в пространстве не имеет внутренних точек, т. е. все ее точки граничные. Если же мы обратимся к планиметрии, ограничившись рассмотрением самой плоскости $z = 0$, то мы опять можем говорить о внутренних и граничных точках G, смотря по тому, принадлежит точка фигуре G вместе с каким-нибудь окружающим эту точку кругом или нет. Мы будем предполагать, что наше множество G имеет в этом смысле внутренние точки, другими словами, мы исключаем случай, когда G стягивается в отрезок (или точку). Внутреннюю часть G, т. е. множество внутренних точек G, обозначим через G_0.

Пусть в G_0 задана функция $f(x, y)$, выпуклая (сверху) в приведенном выше смысле, и пусть $f(x, y) \geqslant m$. Тогда определим пространственное множество точек (x, y, z) неравенствами

$$M \begin{cases} (x, y) \in G_0, \\ m \leqslant z \leqslant f(x, y). \end{cases}$$

Мы утверждаем следующее. *Если присоединить к этому точечному множеству все его предельные точки, т. е. расширить множество до замкнутого, то получится некоторое выпуклое тело M.*

Для доказательства прежде всего надо убедиться, что M будет ограничено, или, что то же самое, что функция $f(x, y)$ ограничена также и сверху

$$f(x, y) \leqslant n.$$

Мы временно предполагаем ради простоты, что $m = 0$, а значит, $f(x, y) \geqslant 0$; этого всегда можно добиться несущественным для наших рассуждений параллельным переносом в направлении оси z.

Пусть теперь $(x_0, y_0, 0)$ — точка из G_0 и S — круг с центром (x_0, y_0), целиком принадлежащий G_0. Соединим точку P_0,

имеющую координаты $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$, отрезками со всеми точками круга S. Тогда эти отрезки заполнят замкнутый круговой конус D, имеющий S своим основанием и P_0 — вершиной; из выпуклости f следует, что этот конус содержится в M. Продолжим конус D за вершину P_0, тогда мы получим второй круговой конус D^*, внутренность которого не содержит точек M. Действительно, если бы, например, точка O из M лежала внутри D^*, то тело M содержало бы конус с основанием S и вершиной Q, и, следовательно, было бы $f(x_0, y_0) > z_0$.

Но из того, что D^* не содержит точек M, сразу следует *ограниченность* M. Точно так же из того факта, что «поверхность» $z = f(x, y)$ проходит между конусами D и D^*, следует *непрерывность* выпуклой функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

Выпуклая функция, определенная в выпуклой области, непрерывна в каждой внутренней точке области.

Тот факт, что замкнутое и ограниченное точечное множество M обладает также свойством выпуклости, сразу следует из выпуклости f. Поэтому мы можем утверждать следующее:

Пусть G_0 — внутренность выпуклой области, лежащей в $z = 0$, и пусть в G_0 определены две выпуклые функции $f(x, y)$ и $-g(x, y)$, причем

$$f(x, y) - g(x, y) \geqslant 0.$$

Тогда условиями

$$K \begin{cases} (x, y) \in G_0, \\ g(x, y) \leqslant z \leqslant f(x, y) \end{cases}$$

определяется множество точек (x, y, z), которое, если только мы его расширим до замкнутого множества, будет выпуклым телом, причем, в силу сказанного выше (стр. 62—63), *таким путем можно задавать каждое выпуклое тело, если только оно не сводится к отрезку.*

Действительно, всякое такое тело K есть пересечение двух выпуклых тел M и N, определенных условиями:

$$M \begin{cases} (x, y) \in G_0, \\ m \leqslant z \leqslant f(x, y), \end{cases} \qquad N \begin{cases} (x, y) \in G_0, \\ g(x, y) \leqslant z \leqslant n, \end{cases}$$

где функции f и g лежат между границами m и n:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant n, \quad m \leqslant g(x, y) \leqslant n.$$

III. Выпуклые функции одной переменной. До сих пор мы предполагали, что область G задания наших выпуклых функций содержит внутренние точки. Остается рассмотреть случай, когда G есть отрезок. Мы для определенности будем считать его принадлежащим оси Ox. Тогда имеем

$$K \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \ y = 0, \\ g(x) \leqslant z \leqslant f(x) \end{cases}$$

и функции f и $-g$ выпуклы *) на $a < x < b$, т. е.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{1}$$

при

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0;$$

кроме того,

$$f(x) \geqslant m.$$

Положим $\lambda_1 = 1 - \theta$, $\lambda_2 = \theta$, тогда можно написать

$$f[(1-\theta)x_1 + \theta x_2] \geqslant (1-\theta) f(x_1) + \theta f(x_2), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{2}$$

Докажем теперь следующее. *В каждой внутренней точке x интервала $a < x < b$ существует (конечный) предел*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f^*(x). \tag{3}$$

В этом можно убедиться, например, так. Функция

$$\varphi(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

при закрепленном x есть монотонно убывающая, точнее, невозрастающая функция от h. Действительно, при $0 < \theta < 1$

$$\varphi(x, h) - \varphi(x, \theta h) = \frac{(1-\theta) f(x) + \theta f(x+h) - f(x+\theta h)}{\theta h}, \tag{5}$$

где числитель, согласно (2), не положителен.

Ввиду монотонности $\varphi(x, h)$ существуют, как известно, пределы $\varphi(x, \pm 0)$, так называемые правая и левая

*) См. подстрочное примечание на стр. 63.

производные функции f. Но отсюда следует утверждаемое существование предела (3):

$$f^*(x) = \frac{\varphi(x, +0) + \varphi(x, -0)}{2}. \tag{6}$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в обычном смысле, т. е. если

$$\varphi(x, +0) = \varphi(x, -0) = f'(x),$$

то

$$f^*(x) = f'(x),$$

и мы можем поэтому назвать $f^*(x)$ «симметричной» производной Шварца*) выпуклой функции $f(x)$. Факт существования правой и левой производных уже подразумевает *непрерывность* функции f.

Из монотонности φ получается при $h > 0$

$$\varphi(x, -h) \geqslant \varphi(x, -0) \geqslant f^*(x) \geqslant \varphi(x, +0) \geqslant \varphi(x, +h) \tag{7}$$

или, если мы заменим φ его значением,

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geqslant f^*(x) \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{8}$$

где снова $h > 0$. Если изменить обозначения, положив x_1 и x_2 сначала вместо $x - h$ и x, а потом вместо x и $x + h$, то получим

$$f^*(x_1) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant f^*(x_2) \tag{9}$$

при $x_1 < x_2$, т. е. функция $f^*(x)$ также монотонна. Итак:

Если $f(x)$ — определенная в интервале $a < x < b$ выпуклая функция, то в каждой внутренней точке x этого интервала существует производная Шварца

$$f^*(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

и она является невозрастающей функцией.

IV. Опорные прямые. Опорные плоскости. Из соотношения (8) следует

$$f(x+h) \leqslant f(x) + hf^*(x) \tag{10}$$

*) По поводу свойств производной Шварца см. указанную в подстрочном примечании [1]) на стр. 55 книгу И. П. Натансона, стр. 323—334.

при $h \gtreqless 0$, т. е. геометрически: кривая $\zeta = f(\xi)$ лежит целиком «под» прямой $\zeta = f(x) + (\xi - x) f^*(x)$. Из этого мы заключаем, что *через каждую граничную точку* [1]) *выпуклой фигуры проходит (в плоскости этой фигуры) по меньшей мере одна такая прямая, что вся фигура лежит целиком по одну сторону от этой прямой.*

Если фигура не имеет внутренних точек, то это утверждение очевидно; в невырожденном случае нам достаточно взять в качестве положительного направления оси z направленную прямую, соединяющую внутреннюю точку с исследуемой граничной точкой, и мы получим тогда нашу теорему с помощью только что приведенной формулы (10). Согласно Г. Минковскому, проходящая хотя бы через одну точку фигуры прямая, которая лежит в плоскости этой фигуры и «не разрезает» фигуру, называется *опорной прямой* рассматриваемой фигуры.

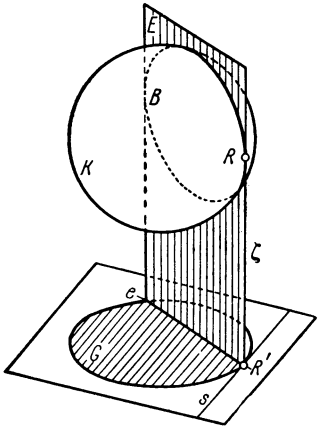

Рис. 10.

Мы хотим теперь аналогично установить для стереометрического случая, что *через каждую граничную точку R выпуклого тела K проходит по крайней мере одна опорная плоскость, т. е. такая плоскость, что все тело расположено по одну сторону от нее.*

Проведем для доказательства через R какую-нибудь плоскость E, которая пересекает тело K по выпуклой фигуре B (рис. 10). Через точку R проходит тогда опорная прямая ζ фигуры B в плоскости E. Эту прямую мы выберем за ось z. Найдем проекцию G тела K на плоскость $z = 0$. Обозначим проекцию R через R', а пересечение E с плоскостью $z = 0$ через e. Так как в плоскости E с одной стороны от опорной прямой ζ нет точек фигуры B, а значит, и точек тела K, то один из двух лучей прямой e, исходя

[1]) «Граничная точка» в планиметрическом смысле, ср. стр. 64.

из R', не содержит точек фигуры G, а значит, R' есть граничная точка G. Тогда через R' проходит опорная к G прямая s. Так как в плоскости $z=0$ по одну сторону от s нет точек G, то по одну сторону от плоскости S, проходящей через ζ и s, нет точек K, т. е. S есть опорная плоскость тела K, проходящая через точку R, что и требовалось доказать [1]).

V. Выпуклая оболочка точечного множества. Выпуклые многогранники. Пусть M — ограниченное и замкнутое множество в нашем пространстве. Тогда заведомо найдутся выпуклые множества, содержащие M, например достаточно большой шар, окружающий M. *Среди всех выпуклых тел, содержащих M, имеется одно наименьшее тело K, которое содержится во всех других выпуклых телах, содержащих M.* Мы будем называть K *выпуклой оболочкой* M.

Чтобы доказать, что такое тело K существует, рассмотрим, прежде всего, плоскости, которые не касаются и не секут M, т. е. вообще не затрагивают M. Мы будем называть такие плоскости «ограничивающими» M. Тогда мы утверждаем, что *множество K, составленное из всех точек, через которые не проходит ни одна плоскость, ограничивающая M, есть выпуклая оболочка M.*

Действительно, очевидно, что все указанные точки образуют замкнутое и ограниченное множество. Если к нему принадлежат точки P и Q, то ни через какую точку отрезка PQ нельзя провести ограничивающую M плоскость, иначе проведенная параллельно ей через P или через Q плоскость также ограничивала бы M. Этим доказаны для K три свойства выпуклого тела.

Лемма. *Через каждую точку A, не принадлежащую выпуклому телу K^*, проходит плоскость, ограничивающая K^*.*

Ввиду замкнутости K^* существует кратчайший отрезок $\overline{AB}$, соединяющий A с телом K^*. Плоскость, проходящая

---

[1]) Можно было бы ожидать, что для выпуклых функций двух переменных аналогично (10) имеет место формула

$$f(x+h;\ y+k) \leqslant f(x,\ y) + hf_x^*(x,\ y) + kf_y^*(x,\ y);$$

однако, как можно убедиться на примерах, это, вообще говоря, неверно.

через A перпендикулярно этому отрезку, ограничивает K^*. Если бы она содержала, например, точку C из K^*, то отрезок $\overline{BC}$ принадлежал бы K^* и основание перпендикуляра, опущенного из A на этот отрезок, лежало бы ближе к A, чем к B, что противоречит предположению.

Поэтому, если K^* — любое выпуклое тело, содержащее M, то через каждую не принадлежащую K^* точку A проходит плоскость, ограничивающая K^*, и тем более ограничивающая M. Значит, A лежит вне K, поэтому K содержится в K^*, что мы и хотели доказать. Наконец, очевидно, что M принадлежит K.

Кроме упомянутого способа, можно определять наименьшее выпуклое тело K, содержащее множество M, методами механики. Если распределить в M положительную массу, то центр тяжести распределенной массы всегда принадлежит K. Обратно, всегда можно (неотрицательное) распределение массы по телу M выбрать так, что ее центр тяжести будет лежать в любой заранее заданной точке тела K.

Если M состоит из конечного числа не лежащих в одной плоскости точек, то соответствующая выпуклая оболочка K множества M, которая при этом содержит внутренние точки, называется *выпуклым многогранником*. Если же все точки M принадлежат одной плоскости, то K называется *выпуклым многоугольником* *).

Граница выпуклого многогранника состоит из конечного числа выпуклых многоугольников. Примерами выпуклых многогранников являются пять правильных тел Платона: правильный четырехгранник или тетраэдр, правильный шестигранник или куб, правильный восьмигранник или октаэдр, правильные двенадцати- и двадцатигранник.

VI. Опорная функция. *Каждой плоскости соответствуют на выпуклом теле K, имеющем внутренние точки, ровно две различные параллельные ей опорные плоскости.* Действительно, если мы представим себе плоскость горизонтальной, то ввиду замкнутости и ограниченности K на K найдется самая высокая и самая низкая точка. Горизонтальные плоскости, проведенные через эти две точки, будут искомыми опорными плоскостями. Более чем две па-

*) Ср. § 3 статьи [4].

раллельные опорные плоскости невозможны, как непосредственно следует из самого определения опорных плоскостей.

Проведем к каждой опорной плоскости тела K направленный наружу (т. е. в сторону, не содержащую точек K) перпендикуляр. Обозначим направляющие косинусы этого перпендикуляра через α, β, γ, а расстояние опорной плоскости от начала координат, выбранного где-нибудь внутри тела K, через $H\,(>0)$. Тогда

$$H = H(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

будет однозначной функцией на единичной сфере $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Ее называют, следуя Г. Минковскому, *опорной функцией* тела K. Все точки $(x,\ y,\ z)$ тела K удовлетворяют неравенствам

$$\alpha x+\beta y+\gamma z \leqslant H(\alpha,\ \beta,\ \gamma). \qquad (*)$$

Поскольку по нашей лемме (стр. 69) через каждую точку вне K проходит ограничивающая K плоскость

$$\alpha_0 x+\beta_0 y+\gamma_0 z = H_0 > H(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0),$$

то выполнение неравенства $(*)$ при всех значениях α, β, γ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$ является характеристическим признаком точек $(x,\ y,\ z)$ тела K.

§ 17. Объем и площадь поверхности

I. Объем и площадь поверхности многогранника. Для многогранника мы будем считать известными понятия объема и площади поверхности, определяя их в обычном смысле как абсолютные величины, т. е. всегда с положительным знаком; отсюда мы выведем определения соответствующих понятий для произвольного выпуклого тела.

Пусть V — один выпуклый многогранник, а W — второй, который содержит V, но также содержит точки, не входящие в V. Мы обозначим это неравенством $V<W$. Далее, через λV обозначим многогранник, который получается, если координаты всех точек V изменяются в отношении $1:\lambda\,(\lambda>0)$. Для площади поверхности O и объема J (выпуклых) многогранников мы предположим известными следующие свойства:

1) из $V<W$ следует $J_V<J_W$ и $O_V<O_W$;

2) $J_{\lambda V}=\lambda^3 J_V$ и $O_{\lambda V}=\lambda^2 O_V$;

3) если многогранник V разбивается на два других многогранника V_1 и V_2 плоскостью, которая пересекает V по выпуклой фигуре с площадью F, то имеет место свойство «аддитивности» J и O, выражающееся соотношениями:

$$J_{V_1} + J_{V_2} = J_V; \qquad O_{V_1} + O_{V_2} = O_V + 2F.$$

II. Приближение многогранниками. Чтобы можно было распространить понятия объема и площади на произвольное выпуклое тело, нам потребуется следующая теорема Минковского о приближении выпуклого тела выпуклыми многогранниками:

Пусть K — произвольное выпуклое тело и начало координат находится во внутренней точке[1]) *тела K. Тогда для любого, сколь угодно малого, положительного ε можно так определить выпуклый многогранник V, что*

$$K < V < K(1+\varepsilon).$$

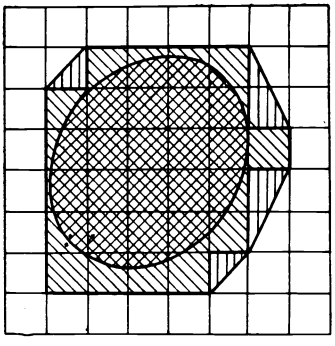

Рис. 11.

Это легко доказать, например, так. Покроем пространство кубической *решеткой* со стороной σ, т. е. рассмотрим все точки, координаты которых имеют вид

$$x = p\sigma, \qquad y = q\sigma, \qquad z = r\sigma,$$

где p, q, r — целые числа. Этим все пространство разбивается на кубики с длиной ребра σ. Из этих кубиков (замкнутых) мы рассматриваем те, которые имеют с телом K хотя бы одну общую точку. Они образуют вместе замкнутое точечное множество M, для которого мы построим выпуклую оболочку V. (На рис. 11 показана соответствующая планиметрическая конструкция.) Тело V будет многогранником, ибо V есть наименьшее выпуклое тело, содержащее множество (конечное) вершин всех кубиков, принадлежащих M.

---

[1]) Если K не имеет внутренних точек, то $J_K = 0$, а O_K равно удвоенной площади фигуры K (ср. стр. 75).

Тело K лежит в V. С другой стороны, ни одна из точек M не удалена от K более чем на диагональ куба $\sqrt{3}\sigma$. Иначе говоря, M, а значит, и V лежат в выпуклом теле K_ρ $\{\rho = \sqrt{3}\sigma\}$, параллельном телу K (ср. стр. 62). Это дает для соответствующих опорных функций соотношение

$$H_K < H_V \leqslant H_K + \sqrt{3}\sigma. \qquad (*)$$

Пусть теперь ρ - радиус шара с центром в начале координат, расположенном внутри K, причем

$$0 < \rho < H_K.$$

Тогда

$$\sqrt{3}\sigma < \frac{\sqrt{3}\sigma}{\rho} H_K,$$

и потому

$$H_K < H_V < H_K\left(1 + \frac{\sqrt{3}\sigma}{\rho}\right)$$

Поскольку значение σ произвольно мало, здесь уже заключается требуемый результат.

При выборе начала координат внутри V опорная функция H_V многогранника V очевидным образом будет непрерывна; поэтому из неравенства $(*)$ следует, что опорная функция произвольного выпуклого тела K может быть равномерно приближена непрерывными функциями. Отсюда следует, что *опорная функция* $H(\alpha, \beta, \gamma)$ *произвольного выпуклого тела непрерывна на всей единичной сфере* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Теорему Минковского о приближении можно сформулировать следующим образом:

Произвольное выпуклое тело, содержащее начало координат в качестве внутренней точки, всегда можно заключить сколь угодно тесно между двумя подобно расположенными выпуклыми многогранниками

$$V(1 - \varepsilon) < K < V.$$

Для этого строим V, как и выше. Требуемое неравенство получается, если положить

$$\varepsilon = \frac{\sigma\sqrt{3}}{\rho}.$$

III. Определение объема и площади поверхности произвольного выпуклого тела. Пусть K — произвольное выпуклое тело с внутренними точками, V — многогранник, охватывающий K, а W — многогранник, содержащийся в K ($W < K < V$). Тогда, согласно свойству 1), для объемов и площадей поверхности многогранников $W < V$ имеют место неравенства

$$J_W < J_V; \qquad O_W < O_V;$$

и мы можем поэтому потребовать для объема и площади поверхности тела K выполнения соотношений

$$J_W < J_K < J_V; \qquad O_W < O_K < O_V.$$

Этими неравенствами, если потребовать, чтобы они были справедливы для всех содержащих K многогранников V и всех содержащихся в K многогранников W, как мы покажем, величины J_K и O_K уже однозначно определяются.

Это следует из свойства 2) и из доказанной теоремы о приближении. Действительно, надо только показать, что при каждом положительном δ можно так определить два многогранника V и W, что

$$W < K < V$$

и

$$J_V - J_W < \delta; \qquad O_V - O_W < \delta.$$

По нашей теореме о приближении мы можем выбрать

$$W = (1 - \varepsilon) V,$$

и мы имеем, в силу 2),

$$J_V - J_W = \left\{ \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} - 1 \right\} J_W; \quad O_V - O_W = \left\{ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} - 1 \right\} O_W.$$

Если мы заключим K, а значит и W, в куб со стороной S, то найдем отсюда

$$J_V - J_W < \left\{ \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} - 1 \right\} S^3;$$

$$O_V - O_W < \left\{ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} - 1 \right\} 6S^2;$$

так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то из этого следует желаемый результат.

Поэтому мы можем J_K и O_K определить так:

Объем и площадь поверхности выпуклого тела K с внутренними точками суть точные верхние границы соответственно объемов и площадей поверхности содержащихся в K выпуклых многогранников и точные нижние границы объемов и площадей поверхности содержащих K выпуклых многогранников.

В точном соответствии с этим можно в планиметрии определить площадь и периметр плоской выпуклой фигуры, отправляясь соответственно от площадей и периметров содержащихся в этой области и содержащих ее выпуклых многоугольников.

Объем выпуклой фигуры мы можем считать равным нулю, а ее полную поверхность — равной ее удвоенной площади.

Приведенные в § 17, п. I три свойства мер J и O для многогранников могут быть теперь с помощью теоремы Минковского о приближении перенесены на произвольные выпуклые тела.

IV. Сходящиеся последовательности выпуклых тел. Каждому выпуклому точечному множеству K соответствуют определенный объем J_K и определенная площадь поверхности O_K. Иначе говоря, каждому такому множеству соответствуют два числа. Обычная функция соотносит каждой точке множества, например каждой точке интервала, число. Здесь мы имеем дело с видоизменением понятия функции, называемым «*функцией множества*» или, короче, «*функционалом*».

Для обоих введенных функционалов J_K и O_K мы хотим вывести из их определения некоторое свойство непрерывности, состоящее в том, что как объемы, так и площади поверхностей двух «достаточно близких» выпуклых тел отличаются произвольно мало друг от друга. При этом еще необходимо придать точное значение словам «близкие выпуклые тела».

Пусть P — закрепленная точка и K — выпуклое тело. Под *расстоянием $E(P, K)$ точки P от тела K* понимают минимум расстояний от точки P до различных точек Q тела K. Такой минимум достигается ввиду замкнутости K.

Мы можем теперь определить положительное число $\nu = N(K, L)$, называемое *мерой близости* или *отклонением* друг от друга двух выпуклых тел K и L, как

наименьшее число, обладающее тем свойством, что расстояние каждой точки из L до K не превосходит ν и, обратно, расстояние каждой точки из K до L также не превосходит ν.

После этого мы можем говорить, что *последовательность выпуклых тел* $K_1, K_2, K_3, \ldots$ *сходится к выпуклому телу* L[1])

$$L = \lim_{n\to\infty} K_n,$$

если отклонение K_n *от* L *стремится к нулю*

$$\lim_{n\to\infty} N(K_n, L) = 0.$$

Примеры. 1. Пусть L — произвольное выпуклое тело с внутренними точками или даже без внутренних точек. Построим множество всех точек P, расстояние которых $E(P, L) \leqslant \rho_n$; это — снова выпуклое тело K_n, которое мы назвали параллельным телу L. Пусть ρ_n пробегает стремящуюся к нулю последовательность, например $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$; тогда соответствующие тела K_n сходятся к L.

2. Опишем около каждой точки $M_n\{n = 1, 2, 3, \ldots\}$ с координатами $\left(x = \frac{1}{n},\ y = 0,\ z = 0\right)$ шар K_n радиуса $\frac{1}{2^n}$. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L,$$

где тело L состоит из одной точки и совпадает с началом координат.

Теорема о приближении (стр. 72) может быть теперь сформулирована в следующей форме: *Если задано выпуклое тело* K *и положительное число* ν, *то всегда можно найти такой выпуклый многогранник* V, *что* $N(K, V) < \nu$.

Пусть K_1 и K_2 — два выпуклых тела, содержащих начало координат, и H_1, H_2 — их опорные функции; тогда

$$|H_1 - H_2| \leqslant N(K_1, K_2).$$

---

[1]) Другое равносильное определение сходимости мы дадим ниже (§ 18, V, стр. 83—84).

V. Непрерывность объема и площади поверхности для выпуклых тел. Теперь мы в состоянии строго доказать ранее упомянутую *непрерывность функционалов* J_K *и* O_K, *т. е. показать, что для выпуклых* *) *тел из*

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} J_{K_n} = J_L, \qquad \lim_{n\to\infty} O_{K_n} = O_L.$$

Доказательство сразу вытекает из предшествующего. Допустим сначала, что L имеет внутренние точки; одну из них примем за начало координат M. Шар с центром M и радиусом ρ пусть содержится в L. Если отклонение

$$N(K_n, L) < \nu$$

удовлетворяет неравенству $0 < \nu < \rho$, то

$$\left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right) L < K_n < \left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right) L.$$

Отсюда, по свойству 2),

$$\left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right)^3 J_L < J_{K_n} < \left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right)^3 J_L$$

и

$$\left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right)^2 O_L < O_{K_n} < \left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right)^2 O_L.$$

Но в этих неравенствах уже содержатся требуемые результаты:

$$\lim_{n\to\infty} J_{K_n} = J_L, \qquad \lim_{n\to\infty} O_{K_n} = O_L.$$

Случай, когда L не имеет внутренних точек, столь же прост. Пусть L — выпуклая фигура на плоскости $z = 0$, содержащая круг радиуса ρ с центром в начале координат M (если L сводится к отрезку или точке, то справедливость утверждения очевидна без особых рассмотрений).

---

*) Нетрудно понять, что условие выпуклости в этой теореме нельзя отбросить (см. статью В. Г. Болтянского [21]).

Построим выпуклое тело

$$M_\nu \begin{cases} (x,\ y) \in \left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right) L, \\ |z| \leqslant \nu. \end{cases}$$

Из $N(K_n,\ L) < \nu$ следует тогда $K_n < M_\nu$; поэтому если F_L обозначает площадь, а U_L — периметр фигуры L, то

$$J_{K_n} < J_{M_\nu} = \left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right)^2 2\nu F_L,$$

$$O_{K_n} < O_{M_\nu} = 2\left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right)^2 F_L + 2\nu\left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right) U_L.$$

Отсюда для объемов сразу получаем

$$\lim_{n \to \infty} J_{K_n} = J_L = 0.$$

Для площадей поверхностей K_n мы нуждаемся еще в одной оценке. Пусть G_n — проекция K_n на плоскость $z = 0$. Тогда

$$G_n > \left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right) L$$

и мы имеем оценку с другой стороны

$$O_{K_n} \geqslant 2F_{G_n} > 2\left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right)^2 F_L.$$

Поэтому, действительно,

$$\lim_{n \to \infty} O_{K_n} = O_L = 2F_L.$$

Использованное нами соотношение

$$O_{K_n} \geqslant 2F_{G_n}$$

между поверхностью K_n и площадью проекции в случае, когда K_n есть многогранник, очевидно. С помощью предельного перехода и доказанного ранее легко получается справедливость этого соотношения для случая, когда произвольное выпуклое тело K_n имеет внутренние точки. Если же K_n — плоская фигура, то соотношение тривиально.

§ 18. Одно обобщение теоремы Больцано — Вейерштрасса о существовании предельной точки

I. Теорема выбора для выпуклых тел. Теорема Больцано — Вейерштрасса о существовании предельной точки утверждает, что *из каждого ограниченного бесконечного множества точек всегда можно выбрать сходящуюся последовательность.*

Эту теорему можно считать частным случаем более общей теоремы о сходимости выпуклых тел, которую мы сейчас докажем.

Теорема выбора. *Из бесконечного множества M равномерно ограниченных выпуклых тел K всегда можно выбрать последовательность тел $K_1, K_2, K_3, \ldots$, которая сходится к некоторому выпуклому телу*

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L.$$

(Множество выпуклых тел называется «равномерно ограниченным», если все тела этого множества лежат внутри какого-нибудь куба W или, что равносильно, внутри достаточно большого шара.) Сходимость тел здесь следует понимать, как это было объяснено в § 17, п. IV.

II. Диагональный процесс Кантора. Доказательство можно вести, например, так. Пусть куб W определяется неравенствами

$$|x| \leqslant c; \quad |y| \leqslant c; \quad |z| \leqslant c.$$

Тогда все точки куба W, у которых все три координаты — рациональные числа, можно перенумеровать, т. е. можно эти точки расположить в одну последовательность $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Чтобы сделать это, составим таблицу, в q-й строке которой стоят все точки (их будет конечное число), имеющие рациональные координаты со знаменателем, не большим q. Перенумеруем теперь числа, стоящие в первой строке таблицы, затем — стоящие во второй строке и т. д. При этом может случиться, что одна и та же рациональная точка получит несколько номеров, но, во всяком случае, все рациональные точки из куба W заведомо будут перенумерованы.

Пусть теперь K — какое-нибудь выпуклое тело из нашего множества M и $E(P_1, K)$ — расстояние точки P_1 от этого

тела (см. § 17, п. IV, стр. 75). Тогда множество всех чисел $E(P_1, K)$ ограничено, так как

$$0 \leqslant E(P_1, K) \leqslant 2\sqrt{3}c;$$

значит, мы можем по теореме Больцано — Вейерштрасса выделить из множества M такую последовательность тел K_{11}, K_{12}, K_{13}, ..., что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} E(P_1, K_{1n}).$$

Из последовательности K_{11}, K_{12}, K_{13}, ... мы на том же основании можем снова выделить подпоследовательность, назовем ее K_{21}, K_{22}, K_{23}, ..., такую, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} E(P_2, K_{2n}).$$

Повторяя этот выбор k раз, мы приходим к последовательности K_{k1}, K_{k2}, K_{k3}, ... выпуклых тел из нашего множества M с тем свойством, что при $j = 1, 2, \ldots, k$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} E(P_j, K_{kn}).$$

Если мы будем продолжать этот процесс до бесконечности, то получим таблицу выпуклых тел:

$$\begin{array}{cccc}
K_{11}, & K_{12}, & K_{13}, & K_{14}, \ldots \\
K_{21}, & K_{22}, & K_{23}, & K_{24}, \ldots \\
K_{31}, & K_{32}, & K_{33}, & K_{34}, \ldots \\
K_{41}, & K_{42}, & K_{43}, & K_{44}, \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

которая бесконечна в двух направлениях. Каждая строка таблицы представляет собой последовательность тел, содержащихся в последовательности, заданной предыдущей строкой.

Следуя Кантору, построим теперь «диагональную последовательность» таблицы

$$K_{11}, K_{22}, K_{33}, \ldots$$

Начиная с k-го члена, она содержит только тела из последовательности K_{k1}, K_{k2}, K_{k3}, ... Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} E(P_j, K_{nn})$$

при $j=1, 2, 3, \ldots, k$, а поскольку натуральное число k совершенно произвольно, то этот предел существует для всех рациональных точек.

III. Сходимость выбранной последовательности. Теперь мы хотим показать, что для последовательности

$$K_{11}, K_{22}, K_{33}, \ldots,$$

которую мы для краткости обозначим через

$$K_1, K_2, K_3, \ldots,$$

предел $\lim\limits_{n\to\infty} E(P, K_n)$ существует не только для каждой рациональной точки P из W, но и вообще для каждой точки P из W и что этот предел есть непрерывная функция от координат точки P. Это выводится с помощью неравенства треугольника. Действительно, пользуясь соотношением между сторонами треугольника, нетрудно убедиться, что всегда

$$|E(P, K_n) - E(Q, K_n)| \leqslant \overline{PQ}.$$

Отсюда для рациональных точек P и Q сразу следует

$$\left|\lim_{n\to\infty} E(P, K_n) - \lim_{n\to\infty} E(Q, K_n)\right| \leqslant \overline{PQ}. \qquad (*)$$

Далее, из первого неравенства можно вывести, что для иррациональной точки P числа

$$E(P, K_1), E(P, K_2), E(P, K_3), \ldots$$

могут иметь только одну предельную точку*) и что, таким образом, для иррациональной точки P существует

$$\lim_{n\to\infty} E(P, K_n).$$

---

*) Достаточно воспользоваться неравенством

$$|E(P, K_i) - E(P, K_j)| \leqslant |E(P, K_i) - E(Q, K_i)| + \\ + |E(Q, K_i) - E(Q, K_j)| + |E(Q, K_j) - E(P, K_j)|$$

при достаточно близкой к P рациональной точке Q и достаточно больших номерах i, j. — *Прим. перев.*

Отсюда получаем далее, что для иррациональных точек P или Q неравенство (*) также имеет место, а это уже означает, что функция от координат (x, y, z) точки P

$$E(x, y, z) = \lim_{n\to\infty} E(P, K_n)$$

непрерывна.

Теперь надо доказать, что все точки P из W, для которых $E(x, y, z) = 0$, образуют выпуклое тело L.

Прежде всего $L \leqslant W$, значит L ограничено. Далее, L замкнуто ввиду непрерывности функции $E(x, y, z)$. Наконец, пусть P_1 и P_2 — две точки из L и P — точка соединяющего их отрезка; тогда из

$$E(P_1, K_n) < \varepsilon, \qquad E(P_2, K_n) < \varepsilon$$

следует также

$$E(P, K_n) < \varepsilon;$$

поэтому из

$$\lim_{n\to\infty} E(P_1, K_n) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} E(P_2, K_n) = 0$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty} E(P, K_n) = 0.$$

Поэтому, если L содержит точки P_1 и P_2, то L содержит также всякую точку P соединяющего их отрезка. Этим для L установлены все три свойства выпуклого тела.

IV. Совпадение с ранее данным определением сходимости. В заключение мы еще докажем, что в смысле, определенном в § 17, п. IV, также

$$L = \lim_{n\to\infty} K_n.$$

Для этого нам, во-первых, надо показать, что для произвольного положительного ε существует такое m, что при $n > m$

$$E(P, K_n) < \varepsilon$$

для всех точек P из L. Если бы это было не так, то нашлись бы неограниченно растущая последовательность чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ и бесконечная последовательность точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$ из L, для которых выполнялись бы неравенства

$$E(P_j, K_{n_j}) \geqslant \varepsilon.$$

Поскольку тело L ограничено и замкнуто, последовательность P_j имела бы в L по крайней мере одну предельную точку P_0. Для нее мы имели бы

$$E(P_0, K_{n_j}) \geqslant E(P_j, K_{n_j}) - \overline{P_0P_j} \geqslant \varepsilon - \overline{P_0P_j}.$$

Но тогда было бы

$$\lim_{n\to\infty} E(P_0, K_n) \geqslant \varepsilon,$$

что противоречит предположению.

Во-вторых, мы должны еще доказать, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти столь большое m, что при $n > m$

$$E(P, L) < \varepsilon$$

для любой точки P тела K_n. Если бы это было не так, мы могли бы найти бесконечное множество точек P_j из K_{n_j} $(n_j > m)$ таких, что

$$E(P_j, L) \geqslant \varepsilon.$$

Все эти точки P_j лежат в кубе W и потому имеют хотя бы одну предельную точку P_0. При этом мы имели бы

$$E(P_0, K_{n_j}) \leqslant \overline{P_0P_j},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} E(P_0, K_n) = 0.$$

Кроме того, было бы

$$E(P_0, L) \geqslant E(P_j, L) - \overline{P_0\,P_j},$$

откуда

$$E(P_0, L) \geqslant \varepsilon,$$

что противоречит предыдущему.

Этим доказательство теоремы выбора завершено.

V. Другая форма определения сходимости. Мы воспользуемся нашей теоремой выбора, чтобы получить еще один результат. Пусть последовательность выпуклых тел сходится

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L$$

и предельное тело L имеет внутренние точки; тогда заведомо справедливо следующее утверждение: если точка A лежит

вне L, то при достаточно больших n она лежит также вне K_n, а всякая внутренняя точка B тела L, начиная с достаточно больших n, является также внутренней для всех K_n. Мы докажем теперь, что это свойство вообще характеризует сходимость. Точнее говоря, верно следующее:

Пусть K_1, K_2, K_3, ... — последовательность выпуклых тел, а L — некоторое выпуклое тело, обладающее внутренними точками. Если каждая лежащая вне L точка A при достаточно большом $n > m_A$ лежит также вне K_n, а каждая точка B, внутренняя для L, лежит при достаточно больших $n > m_B$ внутри K_n, то последовательность K_1, K_2, K_3, ... сходится к L

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L.$$

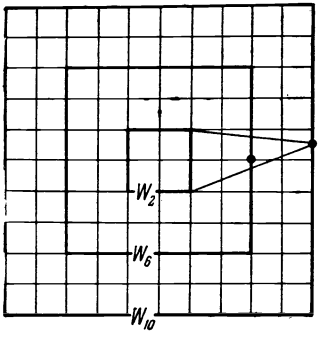

Рис. 12.

По существу, мы утверждаем при этом, что требовавшаяся в ранее данном определении сходимости (§ 17, п. IV) равномерность приближения является следствием выпуклости тел K_n.

Прежде всего, нам надо доказать равномерную ограниченность последовательности K_1, K_2, K_3, ... Разобьем пространство (как в § 17, п. II) на кубики с длиной ребра σ и выберем σ настолько малым, чтобы некоторый куб W_2 с ребром 2σ, который складывается из восьми кубиков нашей решетки, целиком лежал внутри L. Кроме того, ввиду ограниченности тела L мы можем определить другой куб W_{2k+2} со стороной $(2k+2)\sigma$, содержащий L внутри себя и подобно W_2 сложенный из кубиков нашей решетки, причем так, что W_2 и W_{2k+2} имеют общий центр.

По предположению можно выбрать m настолько большим, что при $n > m$ все точки решетки (вершины малых кубиков), лежащие на поверхности W_{2k+2}, находятся вне всех K_n, а W_2 содержится внутри всех K_n. Но тогда тела K_n заведомо лежат внутри куба W_{4k+2}, имеющего тот же центр, что и W_2, W_{2k+2}, расположенного подобно W_2 и имеющего ребро длины $(4k+2)\sigma$. Действительно, если бы какое-нибудь тело K_n со-

держало точку, принадлежащую поверхности W_{4k+2}, то оно содержало бы также конус из отрезков, соединяющих эту точку с W_2, а значит, и точку решетки на поверхности W_{2k+2}, что противоречит предположению (ср. рис. 12, где $k=2$). Поскольку при $n>m$ все K_n лежат в W_{4k+2}, то равномерная ограниченность последовательности тем самым доказана.

По нашей теореме выбора в равномерно ограниченной последовательности $K_1, K_2, K_3, \ldots$ найдется сходящаяся подпоследовательность $K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, \ldots$ $(n_1<n_2<n_3<\ldots)$. Пусть

$$\lim_{j\to\infty} K_{n_j}=L^*.$$

Начиная с некоторого n_j, каждая внутренняя точка предельного тела L^* лежит внутри всех K_{n_j} и не может поэтому не принадлежать L; аналогично при достаточно больших n_j каждая точка, не принадлежащая предельному телу L^*, лежит вне K_{n_j} и потому не лежит внутри L. Отсюда мы заключаем, что с одной стороны $L^*\leqslant L$, а с другой стороны $L^*\geqslant L$, т. е. $L^*=L$.

Рассмотрим теперь последовательность отклонений (стр. 75)

$$\nu_n=N(K_n, L).$$

По доказанному каждая частичная последовательность, выбранная из ограниченного множества чисел $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к нулю. Но отсюда уже следует, что для всей последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n=0$$

или, иначе говоря, что в смысле § 17, п. IV

$$\lim_{n\to\infty} K_n=L,$$

что мы и хотели доказать.

§ 19. Симметризация Штейнера

I. Симметризация сходящихся последовательностей тел. Симметризацию, которую мы определяли в § 15, п. II, стр. 59, можно удобно выразить с помощью обозначений, введенных на стр. 65. Пусть K — выпуклое тело с

проекцией G

$$K: \begin{cases} (x, y) \in G, \\ g(x, y) \leqslant z \leqslant f(x, y). \end{cases}$$

Функции $+f$ и $-g$ выпуклы в области G; значит, согласно сделанному на стр. 64 замечанию, выпуклой является и функция

$$\frac{1}{2}(f-g).$$

Поэтому условиями

$$\tilde{K}: \begin{cases} (x, y) \in G, \\ \frac{1}{2}\{g(x, y) - f(x, y)\} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\{f(x, y) - g(x, y)\} \end{cases}$$

определяется опять выпуклое тело. Поскольку $\tilde{K}$ пересекается каждым перпендикуляром по отрезку той же длины, что и K, и $\tilde{K}$ симметрично относительно плоскости $z=0$, то $\tilde{K}$ получается из K симметризацией Штейнера относительно горизонтальной плоскости. *Этим доказано первое свойство симметризации: выпуклое тело преобразуется снова в выпуклое тело.*

Чтобы доказать соотношения

$$J = \tilde{J}, \qquad O \geqslant \tilde{O}$$

для объемов и площадей поверхностей тел K и $\tilde{K}$, докажем сначала, что справедлива

Лемма. *Пусть $K_1, K_2, K_3, \ldots$ — последовательность выпуклых тел, сходящихся к предельному телу L*

$$\lim_{n \to \infty} K_n = L.$$

Симметризуем все тела последовательности относительно одной и той же горизонтальной плоскости. Получаемые при этом тела $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3, \ldots$ образуют также сходящуюся последовательность и предельное тело

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{K}_n = \tilde{L}$$

является симметризацией тела L относительно той же плоскости.

Короче: *симметризация и предельный переход перестановочны.*

При доказательстве мы ограничимся «невырожденным» случаем, когда тело L имеет внутренние точки. Тогда мы можем применить достаточный для этого случая признак сходимости, который установлен в § 18, п. V.

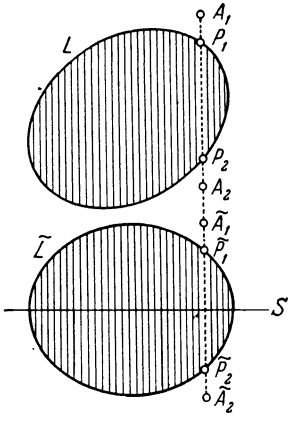

Рис. 13.

Пусть $\tilde{A}_1$ — точка вне тела $\tilde{L}$, получаемого из L симметризацией относительно горизонтальной плоскости S, и $\tilde{A}_2$ — точка, симметричная точке $\tilde{A}_1$ относительно плоскости S (рис. 13). Отрезок $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$ может пересекать тело $\tilde{L}$ по некоторому отрезку $\tilde{P}_1\tilde{P}_2$. Мы передвинем четверку точек $\tilde{A}_1\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{A}_2$ вдоль прямой, на которой они лежат, сохраняя расстояния между ними, пока средний кусок не ляжет в положение P_1P_2 в теле L. При этом точки $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ займут некоторое положение A_1 и A_2, где A_1 и A_2 лежат вне L, а потому лежат также при $n > m_A$ вне всех тел K_n. Отсюда следует, что при тех же n точка $\tilde{A}_1$ находится также вне всех $\tilde{K}_n$.

Еще проще этот факт устанавливается, если лежащая вне $\tilde{L}$ точка $\tilde{A}$ расположена так, что перпендикуляр из $\tilde{A}$ на S вообще не пересекает тело $\tilde{L}$. Тогда при достаточно больших n эта прямая не пересекает тел K_n, а потому и тел $\tilde{K}_n$.

Наконец, если точка $\tilde{B}_1$ лежит внутри $\tilde{L}$, то снова берем точку $\tilde{B}_2$, симметричную этой точке относительно плоскости S, и пересечение $\tilde{P}_1\tilde{P}_2$ отрезка $\tilde{B}_1\tilde{B}_2$ с $\tilde{L}$. При обратном движении $\tilde{P}_1\tilde{P}_2$ по перпендикуляру в положение P_1P_2 на L точки $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ совместятся с внутренними точками B_1, B_2 тела L. Остается так выбрать m_B, чтобы при $n > m_B$ для всех соответствующих K_n точки B_1, B_2 были внутренними. Тогда и точки $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ будут внутренними точками тел $\tilde{K}_n$ $\{n > m_B\}$.

Этим уже установлено, что тело $\tilde{L}$, получающееся симметризацией из предельного тела L, является предельным телом для симметризованной последовательности $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3, \ldots$

II. Влияние симметризации на объем и площадь поверхности. По теореме Минковского о приближении (стр. 73 и 76) можно любое выпуклое тело K приблизить последовательностью выпуклых многогранников V_1, V_2, V_3, ...

$$K = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Симметризуя эти тела относительно одной и той же плоскости S, получим по только что доказанному, что

$$\tilde{K} = \lim_{n\to\infty} \tilde{V}_n,$$

т. е. получим приближение симметричного тела K симметричными многогранниками $\tilde{V}_n$. Обозначим объем и площадь поверхности V_n через J_n и O_n, а соответствующие величины для $\tilde{V}_n$ через $\tilde{J}_n$, $\tilde{O}_n$; тогда получим по § 17, п. V, стр. 77:

$$J_K = \lim_{n\to\infty} J_n, \qquad O_K = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

$$\tilde{J}_K = \lim_{n\to\infty} \tilde{J}_n, \qquad \tilde{O}_K = \lim_{n\to\infty} \tilde{O}_n.$$

Если мы хотим доказать соотношения

$$J_K = \tilde{J}_K, \qquad O_K \geqslant \tilde{O}_K,$$

то нам теперь достаточно установить соответствующие соотношения

$$J_n = \tilde{J}_n, \qquad O_n \geqslant \tilde{O}_n \tag{1}$$

для выпуклых многогранников V_n, $\tilde{V}_n$, а это совершенно элементарная задача.

Мы не будем на ней останавливаться[1]), а перейдем сразу к незаконченному Штейнером пункту доказательства — тому, что всегда

$$O_K > \tilde{O}_K, \tag{2}$$

[1]) Первое соотношение тривиально, а второе будет чуть ниже доказано в более сильной форме.

если только тело K не имеет параллельной S плоскости симметрии. Это не без труда удается установить путем предельного перехода, отправляясь от соответствующего факта для многогранников.

Совершенно аналогично тому, как при симметризации выпуклого тела K, переходящего в $\tilde{K}$, мы приходим к пониманию того, что

$$J_K = \tilde{J}_K,$$

так и при симметризации лежащей в вертикальной плоскости (например, $y=0$) выпуклой фигуры B, переходящей в $\tilde{B}$ (ср. рис. 13), мы приходим к соответствующему равенству площадей

$$F_B = \tilde{F}_B. \tag{3}$$

Плоским аналогом пространственного соотношения

$$O_K \geqslant \tilde{O}_K$$

является неравенство, связывающее длины границ фигур B и $\tilde{B}$:

$$L_B \geqslant \tilde{L}_B. \tag{4}$$

Для того чтобы прийти к результатам (3) и (4), достаточно перенести наши пространственные рассмотрения на более простой планиметрический случай.

III. Симметризация приближающих многогранников. Пусть K — выпуклое тело с внутренними точками. Мы можем приблизить K последовательностью многогранников V_1, V_2, V_3, ...

$$\lim_{n\to\infty} V_n = K,$$

причем можем сделать это так, чтобы каждый следующий многогранник содержался в предыдущем:

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots > K.$$

Тогда проекции этих многогранников на плоскость $z=0$ будут также содержаться друг в друге:

$$G_1 \geqslant G_2 \geqslant G_3 \geqslant \ldots \geqslant G.$$

Внутри G выберем такой прямоугольник R

$$\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2, \qquad \eta_1 \leqslant y \leqslant \eta_2, \qquad z=0,$$

чтобы увеличенный со всех сторон на некоторую величину $\rho > 0$ прямоугольник также лежал в области G. Четыре плоскости $x = \xi_1$, $x = \xi_2$, $y = \eta_1$, $y = \eta_2$ разбивают V_n на девять выпуклых многогранников V_n^k $\{k = 0, 1, 2, \ldots, 8\}$; пусть V_n^0 — тот из них, который имеет своей проекцией R.

Площади поверхностей этих многогранников связаны соотношением (ср. стр. 72, свойство 3))

$$O_{V_n} = \sum_{k=0}^{8} O_{V_n^k} - 2 \sum_{l=1}^{4} F_{B^l},$$

где B^l $\{l = 1, 2, 3, 4\}$ — четыре выпуклых многоугольника, получающихся при пересечении многогранника V_n вертикальными плоскостями $x = \xi_1$, $x = \xi_2$, $y = \eta_1$, $y = \eta_2$.

Когда мы симметризуем всю фигуру относительно плоскости $z = 0$, то, согласно предыдущему (§ 19, п. II),

$$O_{V_n^k} \geqslant \tilde{O}_{V_n^k}, \qquad F_{B^l} = \tilde{F}_{B^l},$$

откуда

$$O_{V_n} - \tilde{O}_{V_n} \geqslant O_{V_n^0} - \tilde{O}_{V_n^0}.$$

Таким образом нам достаточно рассмотреть многогранники V_n^0 и $\tilde{V}_n^0$, которые имеют своей проекцией R.

Ребра многогранника V_n^0, спроектированные на плоскость $z = 0$, дают в проекции сеть прямолинейных отрезков, которая разбивает R на конечное число выпуклых кусков (многоугольников). Отдельный такой кусок мы обозначим через ΔR, а его площадь — через ΔF. В ту же сеть проектируется сеть ребер $\tilde{V}_n^0$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} z &= p_1 x + q_1 y + r_1, \\ z &= -p_2 x - q_2 y - r_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

— уравнения граней V_n, расположенных над областью ΔR; тогда уравнения соответствующих граней $\tilde{V}_n$ будут иметь вид

$$2z = \pm \{(p_1 + p_2) x + (q_1 + q_2) y + (r_1 + r_2)\}. \tag{6}$$

Площади этих участков поверхностей будут соответственно равны

$$\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,\Delta F, \qquad \sqrt{1+p_2^2+q_2^2}\,\Delta F,$$
$$\sqrt{1+\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2+\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}\,\Delta F,$$

откуда находим

$$O_{V_n^0}-\tilde{O}_{V_n^0}=$$
$$=\sum\left[\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}-2\sqrt{1+\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2+\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}\right]\Delta F, \qquad (7)$$

так как площади граней, лежащих в вертикальных плоскостях $x=\xi_1$, $x=\xi_2$, $y=\eta_1$, $y=\eta_2$ взаимно уничтожатся. Сумма распространяется на все выпуклые многоугольные куски ΔR прямоугольника R.

Таким образом, окончательно имеем

$$O_{V_n}-\tilde{O}_{V_n}\geqslant\Sigma\Omega\cdot\Delta F, \qquad (8)$$

где через Ω мы для краткости обозначили выражение, стоящее в (7) в квадратных скобках. Это выражение зависит от положения граней V_n над R. Каждое из таких выражений Ω мы теперь будем оценивать.

IV. Применение теоремы Гёльдера о среднем значении. Пусть $F(h)$ — функция, непрерывная на отрезке $-1\leqslant h\leqslant 1$ и обладающая на этом отрезке первой и второй производными. Тогда по Гёльдеру [1]) найдется такое $|h|<1$, что

$$F(+1)-2F(0)+F(-1)=F''(h). \qquad (9)$$

Действительно, построим вспомогательную квадратичную функцию

$$G(h)=F(0)+\frac{h}{2}\{F(+1)-F(-1)\}+$$
$$+\frac{h^2}{2}\{F(+1)-2F(0)+F(-1)\};$$

тогда

$$F(h)-G(h)=0 \quad \text{при} \quad h=-1,\ 0,\ +1.$$

---

[1]) O. Hölder, Math. Ann. 24, 1884, стр. 183.

По теореме Ролля (теореме о среднем из дифференциального исчисления) производная

$$F'(h) - G'(h)$$

наверняка обращается в нуль хотя бы один раз на отрезке $-1 < h < 0$ и один раз на отрезке $0 < h < 1$. Еще одно применение теоремы Ролля дает поэтому существование корня h на отрезке $(-1, 1)$ для второй производной

$$F''(h) - G''(h) = F''(h) - \{F(1) - 2F(0) + F(-1)\},$$

что и требовалось доказать.

Если мы применим теперь эту теорему Гёльдера о среднем значении к функции

$$F(h) = \sqrt{1 + \left(\frac{p_1 + p_2}{2} + h\,\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_1 + q_2}{2} + h\,\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2},$$

то получим для выражения, обозначенного в (8) через Ω,

$$\Omega = F''(h).$$

При этом

$$F''(h) = \frac{(p_1 - p_2)^2 + 2(p_1 q_2 - p_2 q_1) + (q_1 - q_2)^2}{4[F(h)]^3}.$$

Если теперь

$$|p_1| \leqslant \sigma, \quad |p_2| \leqslant \sigma, \quad |q_1| \leqslant \sigma, \quad |q_2| \leqslant \sigma, \tag{10}$$

то окончательно получается оценка:

$$\Omega \geqslant \frac{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}{4(1 + 2\sigma^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

V. Использование найденной оценки. Чтобы можно было применить к нашему случаю найденную оценку (11), установим для $|p|$ и $|q|$ границу σ, не зависящую от n.

Последовательность многогранников $V_1 > V_2 > V_3 > \ldots$, которой мы приближали тело K, сама по себе равномерно ограничена, так как все V_n содержатся в V_1. Заключим V_1, а значит и все V_n, между двумя горизонтальными плоскостями

$$z = \pm \zeta.$$

Тогда выпуклые функции $\varphi_n(x, y)$ и $-\gamma_n(x, y)$, определяющие V_n

$$V_n: \begin{cases} (x, y) \in G_n, \\ \gamma_n(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_n(x, y), \end{cases}$$

ограничены числом ζ

$$|\gamma_n(x, y)| \leqslant \zeta, \quad |\varphi_n(x, y)| \leqslant \zeta.$$

По предположению все области G_n задания функций $\varphi_n, -\gamma_n$ содержат прямоугольник R

$$\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2; \quad \eta_1 \leqslant y \leqslant \eta_2$$

и, кроме того, содержат больший прямоугольник

$$\xi_1 - \rho \leqslant x \leqslant \xi_2 + \rho;$$
$$\eta_1 - \rho \leqslant y \leqslant \eta_2 + \rho.$$

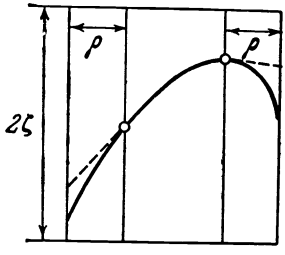

Рис. 14.

Функция $\varphi_n(x, y)$ при закрепленном y заведомо в пределах R является выпуклой функцией от x; поэтому (ср. стр. 67)

$$\frac{\partial\varphi_n(\xi_1, y)}{\partial x} \geqslant \frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x} \geqslant \frac{\partial\varphi_n(\xi_2, y)}{\partial x},$$

где под частными производными мы для определенности понимаем ранее введенную симметричную производную Шварца. Далее, по формуле (8), стр. 67 (см. также рис. 14), имеем

$$\frac{\varphi_n(\xi_1, y) - \varphi_n(\xi_1 - \rho, y)}{\rho} \geqslant \frac{\partial\varphi_n(\xi_1, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\varphi_n(\xi_2 + \rho, y) - \varphi_n(\xi_2, y)}{\rho} \leqslant \frac{\partial\varphi(\xi_2, y)}{\partial x}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}.$$

Аналогичная оценка имеет место также и для производной по y. (Кстати, такие же неравенства имеют место и для производных функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определяющих тело K.)

В нашем случае выпуклые функции φ_n кусочно-линейны и их производные в пределах одной грани суть p_1 и q_1. Таким образом, мы имеем

$$|p_1| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}, \quad |q_1| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho} \tag{12}$$

и точно так же

$$|p_2| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}, \quad |q_2| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}.$$

Поэтому можно положить

$$\sigma = \frac{2\zeta}{\rho} \tag{13}$$

и внести это значение в оценку для Ω.

Формула (8), стр. 91, принимает тогда вид

$$O_{V_n} - \tilde{O}_{V_n} \geqslant \frac{\Sigma\,[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2]\,\Delta F}{4\left[1 + 2\left(\frac{2\zeta}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

VI. Неравенство Шварца. Для дальнейшего удобно записать найденную оценку в несколько другой форме, заменив знак суммы двойным интегралом:

$$O_{V_n} - \tilde{O}_{V_n} \geqslant C \iint\limits_R [(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2]\,dx\,dy. \tag{14}$$

Здесь

$$\frac{1}{C} = 4\left[1 + 2\left(\frac{2\zeta}{\rho}\right)^2\right]^{3/2} \tag{15}$$

и

$$\begin{cases} p_1 = +\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x}, & q_1 = +\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y}, \\ p_2 = -\dfrac{\partial\gamma_n}{\partial x}, & q_2 = -\dfrac{\partial\gamma_n}{\partial y}. \end{cases} \tag{16}$$

Так как подынтегральная функция положительна, то формула (14) и подавно имеет место, если интегрировать по любому меньшему прямоугольнику, содержащемуся в R:

$$\xi \leqslant x \leqslant \xi', \quad \eta \leqslant y \leqslant \eta'.$$

Но для каждых двух функций $A(t)$ и $B(t)$ имеет место так называемое неравенство Шварца*)

$$\left[\int_a^b A(t)\,B(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b A(t)^2\,dt \int_a^b B(t)^2\,dt. \qquad (17)$$

В его справедливости можно убедиться, например, так. Составим квадратичный многочлен от λ:

$$\int_a^b [A(t)+\lambda B(t)]^2\,dt =$$
$$= \int_a^b A(t)^2\,dt + 2\lambda \int_a^b A(t)\,B(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^b B(t)^2\,dt;$$

этот многочлен при всех значениях λ неотрицателен. Поэтому, приравнивая нулю правую часть этого равенства, мы получим квадратное уравнение относительно λ, корни которого не могут быть различными вещественными числами. (Иначе это выражение принимало бы и отрицательные значения.) Следовательно дискриминант квадратного уравнения неположителен, что дает как раз требуемое неравенство.

Положим теперь в первом из слагаемых оценки (14) сначала

$$A(x) = \frac{\partial(\varphi_n+\gamma_n)}{\partial x}, \quad B(x) = 1$$

и применим к интегрированию по x неравенство Шварца, а затем положим

$$A(y) = [\varphi_n+\gamma_n]_{x=\xi}^{x=\xi'}, \quad B(y) = 1$$

и применим это неравенство к интегрированию по y. Аналогично — для второго слагаемого. В итоге после четырех

*) Называемое также неравенством Буняковского. [Г. А. Шварц, вслед за О. Коши рассматривал аналогичное «конечное» неравенство, в котором вместо интегралов фигурируют суммы.]

применений нашего неравенства получаем

$$O_{V_n} - \tilde{O}_{V_n} \geqslant \frac{C}{(\xi' - \xi)(\eta' - \eta)} \left\{ \left\{ \int_{\eta}^{\eta'} [\varphi_n + \gamma_n]_{x=\xi}^{x=\xi'} dy \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_{\xi}^{\xi'} [\varphi_n + \gamma_n]_{y=\eta}^{y=\eta'} dx \right\}^2 \right\}. \quad (18)$$

Эта оценка имеет существенное преимущество: *она не содержит производных*!

VII. Уменьшение площади поверхности. Теперь перейдем в оценке (18) к пределу при $n \to \infty$. Для этого заметим, что функции φ_n и γ_n, задающие многогранники V_n, равномерно в R сходятся к функциям f и g, задающим тело $K = \lim V_n$.

Пусть τ — угол, который образует опорная плоскость поверхности $z = f(x, y)$ (где (x, y) — точка из R) с горизонтальной плоскостью $z = 0$. Тогда из аналогичных (12) оценок для f в R

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leqslant \frac{2\zeta}{\rho}$$

следует, что

$$\frac{1}{\cos \tau} \leqslant \sqrt{1 + 2\left(\frac{2\zeta}{\rho}\right)^2}.$$

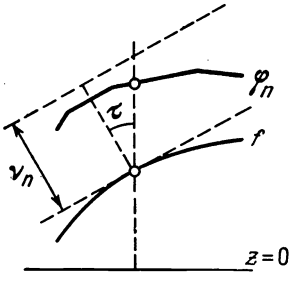

Рис. 15.

Пусть, далее, ν_n отклонение (стр. 75)

$$\nu_n = N(V_n, K).$$

Тогда плоскость, параллельная опорной плоскости и лежащая на расстоянии ν_n выше нее, лежит над V_n, а значит, и над $z = \varphi_n(x, y)$, откуда (ср. рис. 15)

$$0 \leqslant \varphi_n(x, y) - f(x, y) \leqslant \frac{\nu_n}{\cos \tau} \leqslant \nu_n \sqrt{1 + 2\left(\frac{2\zeta}{\rho}\right)^2}. \quad (19)$$

Но поскольку

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n = 0,$$

в (19) уже содержится утверждаемая равномерная сходимость $\varphi_n \to f$. Точно так же получается равномерная сходимость $\gamma_n \to g$.

Если мы теперь в нашей последней оценке (18) для разности площадей поверхностей выполним предельный переход при $n \to \infty$, то получим

$$O_K - \tilde{O}_K \geqslant \frac{C}{(\xi' - \xi)(\eta' - \eta)} \left\{ \left\{ \int_{\eta}^{\eta'} [f+g]_{x=\xi}^{x=\xi'} \, dy \right\}^2 + \right.$$
$$\left. + \left\{ \int_{\xi}^{\xi'} [f+g]_{y=\eta}^{y=\eta'} \, dx \right\}^2 \right\}. \qquad (20)$$

Здесь ξ, η; ξ', η' обозначают две произвольные точки из R, а постоянная C (см. (15)) отлична от нуля. Отсюда уже следует, что равенство $O_K = \tilde{O}_K$ имеет место только тогда, когда в R

$$f + g = \text{const}. \qquad (21)$$

Действительно, если бы нашлись, например, две точки ξ, y; ξ', y, для которых

$$f(\xi, y) + g(\xi, y) < f(\xi', y) + g(\xi', y), \qquad (22)$$

то можно было бы ввиду непрерывности выпуклых функций f и g выделить столь маленький отрезок $\eta \leqslant y \leqslant \eta'$, что для всех этих значений y остается справедливым неравенство (22). Но тогда было бы

$$\int_{\eta}^{\eta'} [f+g]_{x=\xi}^{x=\xi'} \, dy > 0$$

и, в силу (20), отсюда следовало бы $O_K > \tilde{O}_K$. Функция $f+g$ должна, таким образом, во-первых, быть постоянной при постоянном y. Точно таким же образом показывается постоянство при закрепленном x, а значит, постоянство во всем R.

Мы нашли таким образом, что $O_K = \tilde{O}_K$ только тогда, когда $f+g$ постоянно в каждом прямоугольнике R внутри проекции G тела K на плоскость $z=0$, т. е. когда $f+g$ постоянно всюду внутри G. Но в этом случае K имеет параллельную $z=0$ плоскость симметрии. Этим доказано третье,

самое важное, свойство симметризации (и с ним наиболее деликатное место всего рассуждения):

Для площади поверхности любого выпуклого тела K при симметризации относительно горизонтальной плоскости имеет место неравенство

$$O_K \geqslant \tilde{O}_K,$$

причем знак равенства имеет место только в тривиальном случае, когда K обладает горизонтальной плоскостью симметрии.

VIII. Изопериметрическое свойство шара. Теперь мы счастливо достигли цели, так как экстремальное свойство шара уже падает нам в руки, как созревшее яблоко. Пусть K — произвольное выпуклое тело с внутренними точками. Мы покажем, что если K — не шар, то шар такого же объема обладает меньшей поверхностью, чем K.

Возьмем в K шар S и рассмотрим множество M всех выпуклых тел одинакового объема с K, содержащих S.

Это множество равномерно ограничено. Действительно, возьмем точку P, настолько далекую от S, что объем выпуклой оболочки P и S, состоящей из куска поверхности шара S и конуса вращения с вершиной в P, будет больше, чем объем K; тогда все тела из M лежат внутри шаровой поверхности, концентричной S, проходящей через точку P.

Теперь мы можем применить к множеству M теорему выбора (стр. 79) и с ее помощью доказать, что *среди всех выпуклых тел из M имеется одно тело L, поверхность которого меньше или равна поверхности любого другого тела из M.* Действительно, из множества M можно выбрать последовательность тел $K_1, K_2, K_3, \ldots$, поверхности которых $O_1, O_2, O_3, \ldots$ сходятся к точной нижней границе O_0 поверхностей всех тел из M. Из последовательности $K_1, K_2, K_3, \ldots$ ввиду равномерной ограниченности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, \ldots$

Пусть

$$\lim_{j\to\infty} K_{n_j} = L.$$

Ввиду непрерывности функционалов O_K и J_K (стр. 77) объем тела L равен пределу объемов тел K_{n_j}, т. е. равен объему J тела K, и

$$O_L = \lim O_{n_j} = O_0;$$

кроме того, из $K_n \geqslant S$ следует соотношение $L \geqslant S$, т. е. L принадлежит M.

Теперь с помощью штейнеровской симметризации убедимся, что *L есть шар*. Действительно, если бы тело L не было шаром, то можно было заранее так провести плоскость через центр S, что L не имеет параллельной ей плоскости симметрии (ср. стр. 58). Симметризация относительно этой плоскости перевела бы S само в себя, а тело L превратилось бы в выпуклое тело равного объема, которое опять содержало бы S и которое поэтому принадлежало бы M, но имело меньшую поверхность, чем L, чего не может быть.

Если мы объединим все ранее сказанное, то убедимся: *шар равного с K объема имеет не бо́льшую поверхность, чем K*, или в аналитическом виде: объем J и площадь поверхности O тела K связаны неравенством

$$O^3 - 36\pi J^2 \geqslant 0.$$

При этом если K не шар, то в последнем неравенстве наверняка имеет место знак $>$, ибо с помощью симметризации в этом случае из K получается новое тело $\tilde{K}$, для которого

$$J = \tilde{J} \quad \text{и} \quad O > \tilde{O},$$

а значит,

$$O^3 - 36\pi J^2 > \tilde{O}^3 - 36\pi \tilde{J}^2 \geqslant 0.$$

Этим завершается доказательство того, что объем и площадь поверхности каждого отличного от шара выпуклого тела связаны неравенством

$$O^3 - 36\pi J^2 > 0.$$

§ 20. Дополнительные замечания [1])

I. Об ограничении одними лишь выпуклыми телами. Доказательство неравенства

$$O^3 - 36\pi J^2 \geqslant 0$$

мы провели при более узких предположениях, чем доказательство соответствующей планиметрической формулы

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0,$$

[1]) Могут быть пропущены.

так как в пространственном случае мы с самого начала ограничивались одними лишь выпуклыми поверхностями.

Можно было бы рассмотреть утверждение об изопериметрическом свойстве шара и в самом общем виде, подобно тому как мы это сделали для соответствующего свойства круга на плоскости. Для этого надо рассмотреть в пространстве самую общую замкнутую поверхность Φ, которая является однозначным (не обязательно взаимно однозначным) непрерывным образом сферы. Прежде всего речь идет о том, чтобы определить площадь O поверхности Φ. Для этого покроем исходную сферу (прообраз Φ) сетью треугольников, отметим соответствующие точки на Φ и соответствующим образом соединим их отрезками, так что получится «вписанный» в Φ многогранник V, построенный из треугольных граней. Пусть δ — наибольшая сторона треугольной сети на шаре. Как это первым показал Г. А. Шварц *), нельзя определять площадь поверхности O_Φ через напрашивающуюся формулу

$$O_\Phi = \lim_{\delta \to 0} O_V,$$

а, следуя А. Лебегу, надо определять ее формулой

$$O_\Phi = \varliminf_{\delta \to 0} O_V,$$

где $\varliminf$ означает «нижний предел» **). При этом все площади здесь берутся положительными, кроме того, ограничиваются такими поверхностями Φ, для которых площадь O_Φ конечна.

Можно было бы затем объем J_Φ тела Φ определить формулой

$$J_\Phi = \lim_{\delta \to 0} J_V$$

и доказать, что из конечности O_Φ следуют существование и конечность этого предела J_Φ. При этом объем берется уже алгебраическим, т. е. рассматривается с определенным знаком. Тогда изопериметрическое свойство шара выразится следующим образом:

Для так определенных величин J_Φ и O_Φ всегда имеет место неравенство

$$O_\Phi^3 - 36\pi J_\Phi^2 \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только в случае шара.

Это было бы, по-видимому, самым общим выражением изопериметрического свойства шара.

---

*) Пример Шварца можно найти, скажем, в статье В. Г. Болтянского [21], стр. 134—136.

**) То есть наименьший из пределов, которые можно получить при $\delta \to 0$ для различных последовательностей многогранников V.

Для того чтобы применить наш процесс доказательства в этом общем случае, нужно было бы сначала обобщить симметризацию на случай многогранника V с конечным числом вершин, который уже не обязан быть выпуклым (и даже может сам себя пересекать!), но имеет «связность» сферы. Такой многогранник симметризуют относительно плоскости $z=0$ тем, что формально строят

$$\pm 2\tilde{z}(x, y) = \sum \varepsilon_j z_j(x, y),$$

где z_j означают координаты z точек многогранника V с данными координатами x и y, а $\varepsilon_j = \pm 1$, смотря по тому, протыкается в этом месте поверхность V направленными прямыми, параллельными оси z, «изнутри» «наружу» или наоборот [1]). После этого надо было бы обобщить на данный случай теорему о «непрерывности» функционалов O_Φ и J_Φ и, наконец, доказать справедливость теоремы выбора для поверхностей Φ с конечной площадью поверхности O_Φ.

Для того чтобы все это на самом деле осуществить, потребовалось бы очень много «ε-рассуждений», которые мы большей частью сэкономили, допустив для сравнения с шаром только выпуклые поверхности Φ.

Если доказать формулу $L^2 - 4\pi F \geqslant 0$ только для выпуклых кривых, то довольно легко перейти к произвольным кривым с помощью следующего замечания. Если C — плоская кривая, являющаяся взаимно однозначным и непрерывным образом окружности, т. е. так называемая «жорданова кривая», и если K — кривая, служащая границей выпуклой оболочки C, то

$$F_K \geqslant F_C \quad \text{и} \quad L_K \leqslant L_C.$$

Можно было бы предположить, что в пространственной геометрии имеет место аналогичное утверждение, которое позволит при сравнении с шаром переходить от произвольных поверхностей к выпуклым поверхностям. Однако это не так. Рассмотрим, например, невыпуклое тело, представляющее собой маленький шар, в который воткнуто много длинных и тонких шипов. Выпуклая оболочка этого «ежика» будет делаться все больше, если мы шипы нашего ежика будем достаточно удлинять. Однако поверхность ежика может оставаться произвольно малой, если «центральное тело» будет малым, а «шипы» — очень тонкими. Поэтому классическое доказательство Г. А. Шварца имеет существенное преимущество, поскольку в нем допускаются к сравнению также и невыпуклые тела, в то время как в более позднем исследовании Г. Минковского (которое зато является более общим в ином отношении) ограничение выпуклыми телами сравнения является существенным.

---

[1]) Таким образом, ε_j имеет то или иное значение в зависимости от ситуации, подобно так называемым символам Кронекера δ.

Упомянем, что доказательство Шварца требует, однако, некоторых ограничивающих предположений о регулярности допускаемых к сравнению поверхностей; так, например, здесь можно представлять себе ограничивающие поверхности составленными из конечного числа кусков аналитических поверхностей. В заключение своего доказательства Шварц показал (см. H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, т. II, 1890, стр. 340), что последнее ограничение можно обойти средствами штейнеровской симметризации. Но для этого нужно было прежде всего осуществить для намеченной в § 20, п. I симметризации отсутствующее у Штейнера доказательство того, что при симметризации действительно поверхность всегда уменьшается: $O > \tilde{O}$ (кроме тривиального случая симметричных поверхностей). Выше мы убедились в этом, однако, лишь для случая выпуклой поверхности) [1]).

К исследованиям Шварца и Минковского мы еще вернемся ниже. Говоря о дополнительной литературе по нашей теме, укажем, что И. О. Мюллер в своей диссертации «О минимальном свойстве шара» (I. O. Müller, Über die Minimaleigenschaft der Kugel, Göttingen, 1903) сделал попытку использовать доказательство Шварца в общей теории изопериметрических проблем для двойных интегралов.

II. О существовании двойного интеграла. Приходит на ум, что изложенное ранее доказательство можно было бы несколько сократить, определяя поверхность выпуклого тела с помощью двойного интеграла. При этом надо было бы доказать существование двойного интеграла

$$\iint\limits_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

где функция $f(x, y)$ выпукла в прямоугольнике R. Здесь производные могут обозначать, как на стр. 67, «симметричные» частные производные Шварца, или односторонние производные — это равносильно. Можно также считать производные ограниченными в R. Задача эта без особого труда сводится к другой задаче — доказательству существования интегралов

$$\iint\limits_K \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \iint\limits_K \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Насколько проста соответствующая задача в случае одного измерения, когда нужно только убедиться в интегрируемости одной монотонной функции, настолько глубоким представляется решение поставленной здесь задачи.

---

[1]) Л. Тонелли перестроил доказательство Шварца так, чтобы возможно более ослабить предположения о регулярности допускаемых к сравнению поверхностей. См. L. Tonelli, Rend. Palermo **39**, 1915.

Я намечу только общий план доказательства, которым я обязан дружескому сообщению Каратеодори. Из выпуклости функции f можно вывести, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна всюду, где она непрерывна как функция одного x. Но при закрепленном y функция $\frac{\partial f}{\partial x}$ монотонна по x и поэтому точки разрыва образуют не более чем счетное множество. Отсюда по теореме Фубини*) можно заключить, что множество точек разрыва $\frac{\partial f}{\partial x}$ имеет в R меру Лебега нуль, а отсюда в свою очередь, что интеграл

$$\int\int_K \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy$$

существует в смысле Римана, и тем более в смысле Лебега. Аналогичный результат имеет место для производной по y.

В том, что выпуклая поверхность $z = f(x, y)$ может не иметь определенной касательной плоскости, например, во всех рациональных точках R, проще всего можно убедиться на примере. Пусть

$$f(x, y) = X(x) + Y(y).$$

Тогда X и Y должны быть выпуклыми функциями своих аргументов, а значит, интегралами от монотонных функций. Но эти монотонные функции можно взять такими, чтобы они были разрывными во всех рациональных точках.

III. Понятия «выпуклого тела» и «выпуклой функции». Выпуклые кривые или овалы рассматривал еще Архимед; он, например, заметил, что из двух выпуклых кривых внешняя всегда длиннее внутренней. Выпуклыми многогранниками занимался О. Коши, который в 1813 г. доказал для них утверждение Евклида о том, что пространственная форма такого многогранника полностью определена заданием вида и порядка прилегания его граней**). Геометрические исследования о выпуклых телах и кривых были проведены Я. Штейнером, затем Л. Линделёфом и, кроме того, Г. Брунном, к результатам которого мы еще вернемся.

---

*) См., например, стр. 379 указанной на стр. 55 книги И. П. Натансона.

**) Теорема Коши о выпуклых многогранниках излагается, например, в книгах А. Д. Александрова [8] и Л. А. Люстерника [10]; см. также Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, Учпедгиз, 1958, Прибавление К; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Гостехиздат, 1954, решение задачи 58; В. Г. Ашкинузе, Выпуклые многогранники, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Физматгиз, 1963, стр. 410—420.

Понятие «выпуклости», особенно в последнее время, стало важным также и для других ветвей математики. К. Нейман в 1877 г. решил граничную задачу теории потенциала именно для выпуклых областей. Г. Минковскому в его «Геометрии чисел» (1896 г.) удалось великолепно применить понятие выпуклого тела в *теории чисел*. К. Каратеодори в 1907 г. в *теории функций* использовал выпуклые тела для характеристики коэффициентов степенного ряда с положительной вещественной частью.

Сводное изложение свойств выпуклых тел можно найти у Г. Минковского, в его статье «Объемы и поверхности» (H. Minkowski, Math. Ann. **57**, 1903); у К. Каратеодори, в статье «Об области изменения коэффициентов Фурье у положительных гармонических функций» (C. Carathéodory, Rendiconti di Palermo **32**, 1911); у Е. Штейница, в статье «Условно сходящиеся ряды и выпуклые системы» (E. Steinitz, Crelles Journal **143**, 1914) *).

«Теорему выбора» для выпуклых тел я опубликовал в Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **24**, 1915, стр. 195, 209, где были кратко изложены вопросы, с которыми мы имели дело в первой и второй частях этой книги. Изложенной выше, в § 18, форме доказательства «теоремы выбора» я обязан дружескому сообщению К. Каратеодори. Мое первоначальное доказательство было основано на ограниченности частных производных опорных функций, при которой возможно использование одной теоремы Гильберта (D. Hilbert, Math. Ann. **59**, 1904).

Недавно Е. Витт дал далеко идущее обобщение нашей теоремы выбора (E. Witt, Hamburg. Abhandl. **19**, 1954). Простое доказательство теоремы выбора найдено Г. Хадвигером (см. § 7 книги [5] «Метрики и теорема выбора Бляшке»; ср. также стр. 22 той же книги). Доказательство изопериметрического свойства шара средствами штейнеровской симметризации, но без использования теоремы выбора принадлежит В. Гроссу (W. Gross, Monatshefte Math. Phys. **18**, 1917).

Выпуклые функции (без предположения их дифференцируемости) были, по-видимому, впервые рассмотрены О. Штольцем в первом томе его «Основ дифференциального и интегрального исчисления» (O. Stolz, Grundzüge der Differential-und Integralrechnung, Leipzig, 1893). Позднее их подробно рассмотрел И. Л. Йенсен (J. L. Jensen, Acta Math. **30**, 1906). Он определил выпуклую функцию $f(x)$ условиями

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) \qquad (*)$$

и требованием ограниченности снизу: $f(x) > m$. Легко видеть, что эти условия содержатся в условии (1) стр. 66 и приводят к тем же непрерывным внутри интервала функциям, которые рассматривались нами. Условие ограниченности при этом существенно; действительно, если его отбросить, то, как отметили Ф. Бернштейн и Г. Дёйч (F. Bernstein, G. Doetsch, Math. Ann. **76**, 1915), существуют также вполне разрывные функции со свойством выпуклости (*).

*) См. также книги и статьи [2] — [6], [9], [10], [16].

Теорема Иенсена о среднем значении для выпуклых функций, которая в геометрическом виде очевидна, была уже раньше доказана О. Гёльдером при более узких предположениях в статье «Об одной теореме о среднем значении» (O. Hölder, Göttinger Nachr., 1889).

Как я показал в 1914 г. в докладах Парижской академии наук («Новые оценки расстояний в функциональном пространстве», C. R. Acad de Sci. Paris), с помощью интеграла Стилтьеса выпуклую функцию можно представить, например, в виде

$$f(x) = \int_a^b |x - t| \, d\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ монотонно убывает. Подробный разбор интегрального выражения с применением к некоторым минимальным задачам имеется в работе Г. Пика и моей «Оценки расстояний в функциональном пространстве» (W. Blaschke, G. Pick, Math. Апп. 77, 1916). Другие результаты о выпуклых функциях получил И. Радон на основании их интегрального представления (J. Radon, Wiener Akademieberichte, 1916). Еще раньше Э. Штуди, основываясь на исследованиях Е. Б. Кристоффеля и Г. А. Шварца и используя интеграл Стилтьеса, указал наиболее общие аналитические функции, которые осуществляют конформное отображение круга на произвольную выпуклую область (E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, т. 2 — Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Leipzig und Berlin, 1913).

Выпуклые тела играют важную роль также в механике, в частности, в *теории плавающих тел*. Если от некоторого тела отсекать плоскостями части одинакового объема, то центры тяжести этих (однородных) частей, как показал Ш. Дюпен, всегда заполняют выпуклую поверхность, так называемую *поверхность плавучести*. Г. Минковский дал повод для связанных с этим исследований Бёмерса о дифференциальных инвариантах более высокого порядка выпуклых кривых (Böhmers, Эллиптически и гиперболически искривленные овалы, Math. Ann. 60, 1905). См. об этом также статьи Г. Мормана (H. Mohrmann, Math. Апп. 72, 1911, стр. 285—291 и 593—595).

Понятия «выпуклого тела» и «выпуклой функции» допускают разнообразнейшие обобщения, которые еще слабо использованы *). Например, можно определить выпуклые тела в функциональном пространстве Гильберта и перенести туда понятие «опорной функции», что приводит к «опорному функционалу». В выпуклых телах функций можно рассматривать «выпуклые функционалы», некоторые примеры которых мы укажем ниже (§ 23, п. VI). Наконец, можно еще ввести выпуклые дифференциальные процессы, примеры чему будут также приведены позднее (§ 26, IV).

Дальнейшие литературные указания будут даны в § 23, п. I и в Добавлении.

---

*) Напоминаем, что 1-е издание этой книги вышло в свет в 1916 г.

ТЕОРЕМЫ ШВАРЦА, БРУННА И МИНКОВСКОГО О ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

§ 21. Симметризация Шварца и теоремы Брунна

I. Симметризация Шварца. Теперь мы хотим показать, что результаты второй части (а именно, симметризация Штейнера и теорема выбора) уже содержат все необходимое для того, чтобы простейшим способом установить различные другие, полученные позже результаты о выпуклых телах.

Пусть K — выпуклое тело с внутренними точками, а S_1 и S_2 — две плоскости, пересекающиеся по прямой a и образующие несоизмеримый с полным углом π угол α, например угол $\alpha = \pi\sqrt{2}$. Выполним над K симметризацию Штейнера относительно плоскости S_1 — получим выпуклое тело K_1. Его мы симметризуем относительно S_2 — получим K_2 и т. д. Продолжая неограниченно поочередную симметризацию относительно плоскостей S_1 и S_2, получим бесконечную последовательность выпуклых тел

$$K = K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad K_3, \quad \ldots, \quad K_n, \quad \ldots,$$

из которых тела с нечетными номерами симметричны относительно плоскости S_1, а с четными ($n \geqslant 2$) — относительно S_2.

Мы утверждаем, что этот процесс сходится:

Теорема сходимости. *Последовательность K_0, K_1, K_2, ... сходится к некоторому выпуклому телу вращения L*

$$\lim_{n\to\infty} K_n = L,$$

причем осью вращения тела L является прямая a пересечения плоскостей S_1 и S_2.

Если эта теорема верна, то мы можем сразу (без предельного процесса) строить тела вращения L по K и a. Действительно, согласно результатам (стр. 86) о симметри-

зации выпуклых областей, перпендикулярная a плоскость пересекает все тела K_n по выпуклым фигурам *одинаковой площади*. Значит, она пересекает L по кругу (с центром на a) той же площади, так как площадь, как и объем, обладает свойством непрерывности (стр. 77). Это приводит к следующему правилу:

В каждой перпендикулярной a плоскости, которая пересекает тело K, строят круг с центром на a, имеющий ту же площадь, что и сечение тела K этой плоскостью; все эти круги заполняют тело вращения L.

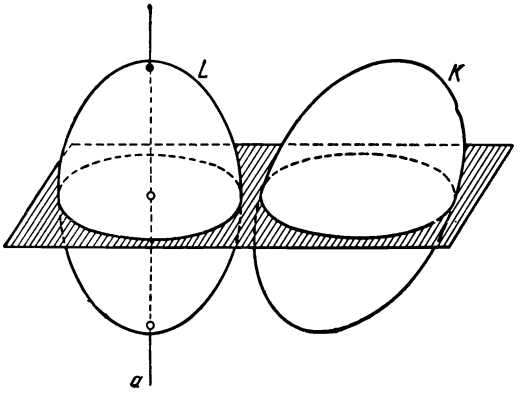

Рис. 16.

Указанная конструкция (рис. 16) была применена Г. А. Шварцем в его знаменитом доказательстве изопериметрического свойства шара. Мы будем ее всегда называть «*симметризацией Шварца*». Иногда ее называют еще «*округлением*» выпуклого тела.

II. Доказательство сходимости. С нашими вспомогательными средствами доказательство теоремы сходимости получается совсем просто. Сначала нам надо доказать *равномерную ограниченность* последовательности $K_0, K_1, K_2, \ldots$ Если мы построим шар $M > K$ с центром в какой-нибудь точке оси a, то он содержит также все тела K, поскольку при каждой симметризации относительно S_1 или S_2 шар M переходит в себя и поэтому соотношение $M > K$ дает $M > K_n$.

Теперь мы можем применить нашу теорему выбора (стр. 79). Значит, в последовательности K_0, K_1, K_2, ... наверняка содержится сходящая подпоследовательность K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, ...; мы докажем, что ее предельное тело

$$L = \lim_{k \to \infty} K_{n_k}$$

имеет осью вращения линию пересечения a плоскостей S_1 и S_2.

Если последовательность K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, ... содержит бесконечное множество элементов из последовательности K_1, K_3, K_5, ..., тела которой симметричны относительно S_1, то очевидно, что L, как предел последовательности симметричных тел, само симметрично относительно S_1. Если K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, ... содержит также бесконечное множество членов последовательности K_2, K_4, K_6, ..., то точно так же получается симметричность L относительно S_2. Но так как угол между S_1 и S_2 по предположению несоизмерим с π, то из симметрии относительно S_1 и S_2 и замкнутости L уже следует, что a — ось вращения L. Действительно, можно каждое вращение вокруг a с любой степенью точности приблизить последовательностью четного числа следующих друг за другом симметрий относительно S_1 и S_2, что сводится к тому, что угол поворота φ можно представить в виде

$$\varphi = n \cdot 2\alpha + m \cdot 2\pi + \varepsilon,$$

где m и n — целые, а $|\varepsilon|$ сколь угодно мало.

Остается еще рассмотреть несколько более сложный случай, когда последовательность чисел n_1, n_2, n_3, ... содержит только конечное число четных или конечное число нечетных членов. Предположим, что имеет место, например, первое. Поскольку при рассмотрении сходимости можно исключить конечное число элементов, то будем считать, что все вообще n_1, n_2, n_3, ... нечетны. Тогда симметричность предельного тела L относительно S_1 очевидна. Остается доказать его симметричность относительно S_2, чтобы убедиться, что тело L имеет прямую a своей осью вращения.

По доказанному в § 19, п. VII (стр. 98), свойству симметризации площади поверхностей K_0, K_1, K_2, ... образуют убывающую или, во всяком случае, невозрастающую последовательность положительных чисел. Поэтому они сходятся

к определенному пределу O_L, который ввиду доказанной (на стр. 77) непрерывности функционала площади совпадает с площадью поверхности L.

Симметризуем теперь все тела последовательности K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, ... и L относительно S_2; тогда мы получим тела K_{n_1+1}, K_{n_2+2}, K_{n_3+3}, ... и L^*.

Так как симметризация и предельный переход могут быть переставлены (стр. 87), то

$$L^* = \lim_{k\to\infty} K_{n_k+1}.$$

Площадь поверхности тела L^* равна поэтому пределу площадей K_{n_k+1}, т. е. равна площади O_L поверхности тела L. Площадь поверхности L, таким образом, при симметризации этой поверхности относительно S_2 не уменьшается, и поэтому (стр. 98) тело L имеет параллельную S_2 плоскость симметрии τ. Остается доказать, что плоскость τ совпадает с S_2.

III. О центре тяжести. Это можно показать совсем наглядно, рассматривая центр тяжести s_n тела K_n (тела мы считаем однородными). Тогда имеют место две достаточно очевидные теоремы, строгое обоснование которых мы опустим; они могут быть доказаны с помощью предельного перехода, исходя из соответствующих теорем для многогранников, как это делалось для свойств объема и площади поверхности. Вот эти теоремы:

I. *Из*

$$\lim_{k\to\infty} K_{n_k} = L$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s_L,$$

где s_n и s_L — соответствующие центры тяжести.

II. *Если, симметризуя K относительно плоскости S_1, мы получаем тело K_1, то центр тяжести s_1 тела K_1 есть проекция (нормальная) на S_1 центра тяжести s тела K.*

При симметризации K_1 перпендикулярные S_1 тонкие палочки, из которых мы считаем составленным тело K, передвинутся перпендикулярно S_1, поэтому ортогональная проекция центра тяжести на S_1 не может при этом измениться. С другой стороны, s_1 наверняка принадлежит плоскости симметрии S_1 тела K_1.

Из II следует, что центры тяжести s_1, s_2, s_3, ... тел K_1, K_2, K_3, ... принадлежат плоскости, перпендикулярной a, и там образуют фигуру, изображенную на рис. 17. Поэтому, согласно I, центр тяжести s_L тела L принадлежит прямой a. С другой стороны, он принадлежит и τ. Но так как S_2 и τ должны быть параллельны, то они совпадают.

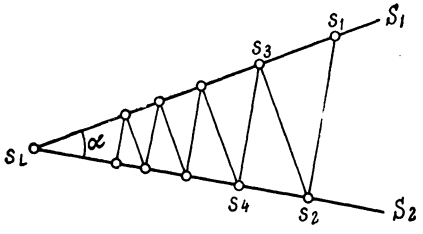

Рис. 17.

Этим доказано, что все выделенные из последовательности K_1, K_2, K_3, ... сходящиеся подпоследовательности сходятся к одному и тому же предельному телу L, которое получается из K симметризацией Шварца. Числовая последовательность отклонений (стр. 75)

$$\nu_n = N(K_n, L)$$

имеет поэтому то свойство, что каждая ее частная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к нулю. Отсюда следует сходимость всей последовательности

$$\lim_{n\to\infty} N(K_n, L) = 0$$

или, что то же самое,

$$L = \lim_{n\to\infty} K_n,$$

что мы и хотели доказать.

IV. Теорема Г. Брунна. Выше было показано, что симметризация Шварца может быть получена, исходя из симметризации Штейнера. Поэтому из свойств последней можно получить различные следствия, простейшим из которых является следующее:

Тело вращения K^*, получающееся из выпуклого тела K с помощью симметризации Шварца относительно оси a, всегда выпукло.

Эту красивую теорему первым доказал Г. Брунн в 1887 г. совсем другим путем в своей богатой идеями диссертации «Овалы и овалоиды» (Ovale und Eifläche, München). Позднее Г. Минковский заметил, что отсюда легко выводится теорема о минимальном свойстве круга. Это делается примерно так.

Пусть B — выпуклая фигура, расположенная в плоскости $z=0$. В части пространства $0 \leqslant z \leqslant 1$ определим множество всех точек a, для которых существует такая точка b из B, что угол между отрезком ab и осью z не больше, чем $\pi/4$. Для множества K таких точек a легко доказываются три основные свойства выпуклого тела (см. стр. 57). Каждая плоскость $z=\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ пересекает K по выпуклой фигуре B_λ, проекция которой на плоскость $z=0$ определена тем, что расстояние ее точек от B не превосходит λ. Поэтому площади F, F_λ и периметры L, L_λ этих «параллельных» фигур B, B_λ связаны известными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} F_\lambda &= F + L\lambda + \pi\lambda^2, \\ L_\lambda &= L + 2\pi\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ввиду выпуклости тела K^*, получающегося из K с помощью симметризации Шварца относительно оси z, радиусы параллельных кругов в плоскостях $z=0$, $z=\lambda$, $z=1$ связаны неравенством

$$r_\lambda \geqslant (1-\lambda)\, r_0 + \lambda r_1.$$

Но так как

$$\pi r_0^2 = F, \quad \pi r_\lambda^2 = F_\lambda, \quad \pi r_1^2 = F_1,$$

то

$$\sqrt{F_\lambda} \geqslant (1-\lambda)\sqrt{F} + \lambda\sqrt{F_1}.$$

Выразив F_λ и F_1 по формуле (1), мы получим после возведения в квадрат и некоторых упрощений

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0.$$

Это — то самое неравенство, выражающее минимальное свойство круга, которое мы доказали в первой части этой книги (стр. 43). Однако приведенное доказательство в общности уступает старому, поскольку здесь мы ограничились

выпуклыми фигурами и не доказали, что знак равенства имеет место только для круга.

Этот последний факт получается из *усиления теоремы Брунна*, которое также было доказано этим геометром и может быть сформулировано примерно так:

«Слой» тела вращения K^*, получаемого из K симметризацией Шварца, т. е. кусок тела K^*, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, только тогда является слоем кругового конуса, когда соответствующий слой K есть слой конуса.

При этом второй конус, естественно, не обязан быть (прямым) круговым; конусом; цилиндры здесь причисляются к конусам, как предельные случаи. Не представляло бы труда доказать это усиление с помощью наших вспомогательных средств, но мы сейчас откажемся от этого, так как позднее (см. § 22, п. V) будет рассмотрен совершенно аналогичный вопрос.

Упомянем также, что указанную выше теорему Брунна или, что сводится к тому же, неравенство Минковского для так называемых «смешанных площадей» (ср. § 23, п. III) можно получить на значительно более элементарном пути, как это было кратко намечено Г. Фробениусом [1]); таким образом, мы здесь «стреляли из пушек по воробьям». В одном, однако, наш процесс имеет заметное преимущество перед более простым методом: он позволяет получать теорему Брунна для пространства произвольного числа измерений n ($n = 4, 5, \ldots$). В частности, в § 22 мы будем иметь дело как раз со случаем $n = 4$; но при этом исследование будет проведено так, что нам не придется выйти из обычного трехмерного евклидова пространства.

V. Теорема Г. А. Шварца. Если, как мы это делали выше, подходить к симметризации Шварца путем предельного перехода от симметризаций Штейнера, то сразу получается, что *для тела L, полученного из выпуклого тела K симметризацией Шварца, имеют место соотношения*

$$J_K = J_L, \quad O_K \geqslant O_L,$$

причем знак равенства во втором соотношении имеет место только в том тривиальном случае, когда K имеет ось вращения, параллельную оси вращения L.

---

[1]) См. стр. 54 настоящей книги.

Это свойство симметризации Шварца позволяет свести пространственную задачу о теле с наименьшей поверхностью при заданном объеме к плоской задаче, а именно, к поиску формы меридиональной кривой той поверхности вращения, которая удовлетворяет минимальному условию. Это — основная идея знаменитого доказательства Шварца изопериметрического свойства шара. Отсюда видно, какая глубокая внутренняя связь существует между идеями Штейнера, Шварца, Брунна и Минковского.

§ 22. Теоремы Брунна и Минковского

I. Линейные семейства и выпуклые семейства выпуклых тел. *Пусть K_0 и K_1 — какие-нибудь выпуклые тела, P_0 — произвольная точка тела K_0, а P_1 — произвольная точка тела K_1. Построим точку*

$$P_\theta = (1-\theta)P_0 + \theta P_1 \qquad \{0 \leqslant \theta \leqslant 1\},$$

которая делит отрезок P_0P_1 в заданном отношении $\theta:(1-\theta)$. Если мы зафиксируем K_0, K_1 и θ и заставим P_0 и P_1 пробегать тела K_0 и K_1, то точка P_θ опишет также выпуклое тело, которое мы будем обозначать символом

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1.$$

Действительно, ограниченность и замкнутость K_0 и K_1 влекут за собой ограниченность и замкнутость K_θ. Кроме того, если P_θ и Q_θ — две точки из K_θ, то соединяющий их отрезок заведомо лежит в K_θ, так как из

$$P_\theta = (1-\theta)P_0 + \theta P_1,$$
$$Q_\theta = (1-\theta)Q_0 + \theta Q_1$$

легко выводится

$$(1-\vartheta)P_\theta + \vartheta Q_\theta =$$
$$= (1-\theta)[(1-\vartheta)P_0 + \vartheta Q_0] + \theta[(1-\vartheta)P_1 + \vartheta Q_1],$$
$$\{0 \leqslant \vartheta \leqslant 1\},$$

где стоящие в квадратных скобках точки принадлежат K_0, соответственно K_1.

Если θ пробегает значения $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то K_θ описывает «*линейное семейство*» выпуклых тел, которое «соединяет» K_0

и K_1. Такие семейства были впервые рассмотрены в диссертации Г. Брунна, исходившего из исследований Я. Штейнера.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, которая поясняет зависимость между граничными точками тел линейного семейства:

Линейная комбинация двух точек P_0 и P_1 тел K_0 и K_1

$$P_\theta = (1-\theta)P_0 + \theta P_1$$

тогда и только тогда является граничной точкой тела

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1, \qquad \{0 < \theta < 1\},$$

когда P_0 и P_1 — граничные точки тел K_0 и K_1, причем такие, что через P_0 и P_1 проходят параллельные и одинаково направленные опорные плоскости этих тел.

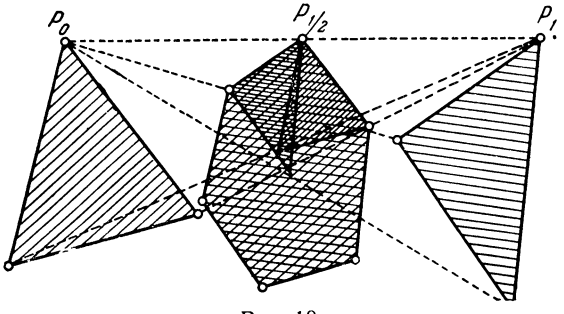

Рис. 18.

«Одинаково направленными» мы называем опорные плоскости с одинаково направленными внешними (относительно K_0, соответственно K_1) нормалями.

В справедливости этой теоремы можно убедиться так (ср. рис. 18, на котором изображена аналогичная планиметрическая конструкция): тела

$$(1-\theta)P_0 + \theta K_1 \quad \text{и} \quad (1-\theta)K_0 + \theta P_1 \qquad (*)$$

подобны и подобно расположены по отношению к телам K_0 и K_1, содержат точку P_θ и содержатся в теле K_θ $\left(\text{на рисунке } \theta = \frac{1}{2} \text{ и тела } (*) \text{ густо заштрихованы}\right)$. Поэтому, если P_θ — граничная точка тела K_θ, то должна существовать

проходящая через P_θ общая опорная плоскость обоих тел (*). Но тогда в соответственных точках P_0 и P_1 тел K_0 и K_1, подобно расположенных (гомотетичных!) телам (*), действительно имеются одинаково направленные параллельные опорные плоскости. Это условие, очевидно, и необходимо.

Из доказанного следует также, например, что *если S_0 и S_1 — одинаково направленные опорные плоскости тел K_0 и K_1, то $(1-\theta)S_0+\theta S_1$ есть параллельная им и одинаково с ними направленная опорная плоскость тела K_θ.* Таким образом, опорная функция линейной комбинации выпуклых тел получается как линейная комбинация их опорных функций.

Для нас особенно важно доказать теорему Брунна, истинное значение которой было выявлено позднее в работах Минковского. С помощью ранее введенного понятия выпуклой функции (стр. 63) мы можем сформулировать эту теорему так:

Основная теорема. *Корень третьей степени из объема $J(\theta)$ тела K_θ линейного семейства*

$$K_\theta=(1-\theta)K_0+\theta K_1$$

есть выпуклая (сверху) функция параметра θ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$.

Чтобы доказать это, введем, кроме понятия *линейного семейства*, еще более широкое понятие «*выпуклого семейства*» выпуклых тел, родственное понятию выпуклой функции.

Пусть дана система выпуклых тел K_θ, однозначно зависящих от параметра θ, меняющегося на отрезке $0\leqslant\theta\leqslant 1$, и пусть при этом тело, соответствующее значению параметра

$$\theta=\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2 \qquad (\lambda_1\geqslant 0;\ \lambda_2\geqslant 0;\ \lambda_1+\lambda_2=1),$$

всегда содержит тело

$$\lambda_1K_{\theta_1}+\lambda_2K_{\theta_2},$$

принадлежащее линейному семейству, соединяющему тела K_{θ_1} и K_{θ_2} $(0\leqslant\theta_1\leqslant 1;\ 0\leqslant\theta_2\leqslant 1)$:

$$K_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}\geqslant\lambda_1K_{\theta_1}+\lambda_2K_{\theta_2}.$$

Тогда мы будем это семейство выпуклых тел называть выпуклым.

Каждое линейное семейство выпукло, но обратное, разумеется, неверно. Мы хотим теперь посмотреть, как влияет на выпуклые семейства (штейнеровская) симметризация.

II. Симметризация выпуклых семейств. Мы намерены показать следующее. *Если симметризовать* (по Штейнеру) *выпуклые тела выпуклого семейства относительно одной и той же горизонтальной плоскости* $z=0$, *то мы получим снова тела выпуклого семейства* (рис. 19).

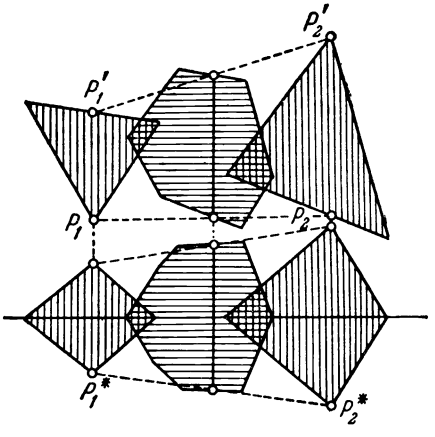

Рис. 19.

Пусть $K_{\theta_1}^*$ и $K_{\theta_2}^*$ — два выпуклых тела семейства симметризованных тел, которые получены из тел K_{θ_1} и K_{θ_2} исходного семейства; P_1^* — точка тела $K_{\theta_1}^*$; P_2^* — точка тела $K_{\theta_2}^*$; z_1 и z_2 — координаты z этих точек. Проходящая через P_1^* вертикальная прямая содержит такие две точки P_1, P_1' тела K_{θ_1}, что расстояние между ними равно $2|z_1|$, а проходящая через P_2^* вертикальная прямая — две точки P_2, P_2' тела K_{θ_2}, расстояние между которыми равно $2|z_2|$.

Возьмем линейную комбинацию одинаково направленных отрезков P_1P_1', P_2P_2':

$$\lambda_1\overline{P_1P_1'}+\lambda_2\overline{P_2P_2'};$$

тогда, в силу выпуклости исходного семейства, получим отрезок, принадлежащий телу

$$K_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}.$$

Симметризация относительно плоскости $z=0$ дает поэтому отрезок PP', принадлежащий симметризованному телу

$$K^*_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}.$$

Этот отрезок, однако, можно найти прямым путем, составив линейную комбинацию симметричных относительно $z=0$ отрезков:

$$\overline{PP'}=\lambda_1\overline{P_1^*P_1'^*}+\lambda_2\overline{P_2^*P_2'^*}.$$

Но в этом результате уже содержится выпуклость

$$K^*_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}\geqslant\lambda_1K^*_{\theta_1}+\lambda_2K^*_{\theta_2}$$

семейства симметризованных тел.

В частности, из нашей теоремы следует, что из линейного семейства выпуклых тел при симметризации получается выпуклое семейство выпуклых тел, которое, однако, как можно показать на примерах, не обязано быть снова линейным.

Действительно, возьмем, например, два не перпендикулярных плоскости $z=0$ отрезка. Линейно скомбинировав эти отрезки, получим в общем случае четырехгранник (тетраэдр), а симметризуя его относительно плоскости $z=0$ — многогранник с шестью гранями. Симметризуя же сначала отрезки относительно $z=0$, получим отрезки в плоскости $z=0$, линейная комбинация которых также представляет собой фигуру, лежащую в плоскости $z=0$ и, разумеется, отличную от полученного ранее шестигранника. К вопросу о том, когда операции образования линейной комбинации тел и симметризации переставимы (коммутируют), мы вернемся ниже (§ 22, п. IV).

III. Доказательство теоремы Брунна об объемах тел линейного семейства. Располагая вспомогательными средствами предыдущего пункта, мы в состоянии доказать приведенную на стр. 115 основную теорему, утверждающую следующую закономерность для объема $J(\theta)$ тел линейного семейства $K_\theta=(1-\theta)K_0+\theta K_1$:

Величина

$$\sqrt[3]{J(\theta)}$$

есть выпуклая (сверху) функция параметра θ.

Возьмем три плоскости S_1, S_2, S_3, имеющие единственную общую точку M, такие, что из углов между ними по меньшей мере два несоизмеримы с π. Симметризуем линейное семейство K_θ относительно S_1; при этом получим выпуклое семейство K_θ^1. Из него при симметризации относительно S_2 получим семейство K_θ^2, из которого при симметризации относительно S_3 получим K_θ^3. Тело K_θ^3 симметризуем опять относительно S_1 и т. д. Семейство K_θ^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) выпукло по п. II, и объем тела из K_θ^n равен объему соответствующего тела K_θ ввиду инвариантности этого функционала относительно симметризации.

Последовательность тел K_θ^1, K_θ^2, K_θ^3, ..., которые получаются указанным путем из тела K_θ, сходится к шару L_θ с центром M

$$L_\theta = \lim_{n\to\infty} K_\theta^n.$$

Действительно, легко доказывается (как в § 21, пп. II, III), что каждая сходящаяся подпоследовательность сходится к предельному телу, которое симметрично относительно плоскостей S_1, S_2, S_3, а потому может быть только шаром. Ограниченность последовательности снова следует из того, что если взять шар с центром в M, содержащий K_θ, то этот шар содержит также все тела последовательности K_θ^n. Основой доказательства сходимости являются теорема выбора и свойства симметризации.

Мы имеем при этом (стр. 77)

$$J(L_\theta) = \lim_{n\to\infty} J\left(K_\theta^n\right) = J(\theta).$$

С другой стороны, из выпуклости последовательности K_θ^n следует

$$K_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}^n \geqslant \lambda_1 K_{\theta_1}^n + \lambda_2 K_{\theta_2}^n$$

и, с помощью предельного перехода при $n\to\infty$,

$$L_{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2} \geqslant \lambda_1 L_{\theta_1} + \lambda_2 L_{\theta_2},$$

т. е. семейство концентрических шаров L_θ также выпукло. Но это дает для радиуса $r(\theta)$ шара L_θ соотношение

$$r(\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2) \geqslant \lambda_1 r(\theta_1) + \lambda_2 r(\theta_2)$$

и соответствующее соотношение для пропорционального радиусу корня третьей степени из объема

$$\sqrt[3]{J(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2)} \geqslant \lambda_1 \sqrt[3]{J(\theta_1)} + \lambda_2 \sqrt[3]{J(\theta_2)}. \qquad (1)$$

Так как функция

$$\sqrt[3]{J(\theta)}$$

неотрицательна, а значит, ограничена снизу, то формула (1) уже утверждает ее выпуклость на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; таким образом, требуемая теорема полностью доказана.

Теперь остается только решить вопрос о том, когда в (1) имеет место знак равенства, т. е. когда кусок выпуклой кривой

$$y = \sqrt[3]{J(x)}$$

представляет собой прямолинейный отрезок. Для этого нам только нужно дополнить проведенный в п. II анализ влияния симметризации на выпуклые семейства тел и установить, когда линейное семейство выпуклых тел при симметризации остается линейным.

IV. Симметризация линейных семейств. Пусть

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1$$

— линейное семейство выпуклых тел. Мы симметризуем каждое тело K_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ относительно одной и той же плоскости $z=0$. Спрашивается, когда получаемые выпуклые тела K_θ^* снова образуют линейное семейство

$$K_\theta^* = (1-\theta)K_0^* + \theta K_1^*.$$

Возьмем в плоскости $z=0$ такую точку P_0, что проведенная через P_0 вертикальная прямая (т. е. прямая, параллельная оси z), пересекает тела K_0 и K_0^* по отрезкам $\overline{Q_0R_0} = \overline{Q_0^*R_0^*}$ положительной длины. Это заведомо можно сделать, если, как мы и предполагаем, тела K_0, K_1, а значит, и тела K_0^*, K_1^* содержат внутренние точки. Через точку Q_0^* проходит по крайней мере одна опорная плоскость S_0^* тела K_0^*, а через R_0^* — симметричная S_0^* (относительно плоскости $z=0$) опорная плоскость T_0^*.

Мы обозначим параллельные и одинаково направленные с S_0^* и T_0^* опорные плоскости тела K_1^* через S_1^* и T_1^*. Это надо понимать так: опорные плоскости S_0^* и S_1^*, например, должны быть не только параллельны, но и иметь одинаковое направление внешних нормалей. Пусть Q_1^*, R_1^* — две симметричные относительно $z=0$ точки, в которых тело K_1^* имеет опорные плоскости S_1^* и T_1^*, а P_1 — середина отрезка $Q_1^*R_1^*$ (рис. 20).

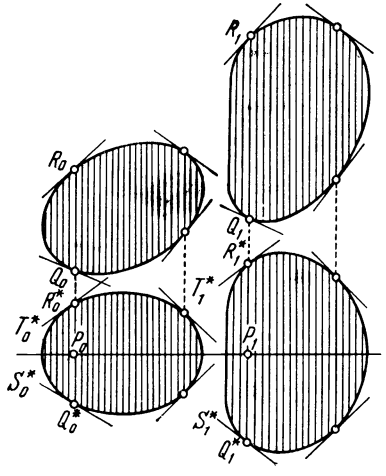

Рис. 20.

Предположим теперь, что симметричное семейство линейно; тогда, согласно результатам стр. 15, плоскости

$$S_\theta^* = (1-\theta)\,S_0^* + \theta S_1^*,$$
$$T_\theta^* = (1-\theta)\,T_0^* + \theta T_1^*$$

будут опорными плоскостями тела K_θ^* в точках

$$Q_\theta^* = (1-\theta)\,Q_0^* + \theta Q_1^*,$$
$$R_\theta^* = (1-\theta)\,R_0^* + \theta R_1^*.$$

Если условиться проводить через точку

$$P_\theta = (1-\theta)\,P_0 + \theta P_1$$

вертикаль в пределах тела K_θ^*, соответствующего тому же θ, то мы получим линейное семейство вертикальных отрезков $Q_\theta^* R_\theta^*$. Оно заполняет ограниченную сверху и снизу прямыми выпуклую фигуру B^* (трапецию), если только $P_0 \neq P_1$.

Будем теперь точно так же проводить вертикали через точки P_θ в пределах соответствующего тела K_θ; тогда получим, как это следует из определения линейного семейства, выпуклое семейство отрезков $Q_\theta R_\theta$, которые при $P_0 \neq P_1$ заполняют выпуклую фигуру B. Но так как B^* получается из B симметризацией, а B^* — трапеция, то B может быть также только трапецией, т. е. семейство отрезков $Q_\theta R_\theta$ всегда линейно:

$$Q_\theta = (1-\theta)\,Q_0 + \theta Q_1,$$
$$R_\theta = (1-\theta)\,R_0 + \theta R_1.$$

Из нашей теоремы о граничных точках линейного семейства (стр. 114) при этом следует, что если K_θ — линейное семейство выпуклых тел

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1,$$

а Q_θ — линейное семейство граничных точек тел K_θ

$$Q_\theta = (1-\theta)Q_0 + \theta Q_1,$$

то в точках Q_θ имеются одинаково направленные параллельные опорные плоскости тел K_θ.

Этим мы установили следующий результат: *для того чтобы линейное семейство*

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1$$

выпуклых тел с внутренними точками переходило при симметризации относительно горизонтальной плоскости опять в линейное семейство, необходимо, чтобы вертикальные хорды Q_0R_0, Q_1R_1 тел K_0 и K_1 можно было бы так попарно соотнести друг другу, чтобы всегда существовали проходящие через точки Q_0 и Q_1 одинаково направленные параллельные опорные плоскости тел K_0 и K_1 и аналогично для точек R_0, R_1. Рис. 20 поясняет соответствующее положение вещей в двумерном случае.

Легко видеть, что найденное условие также и достаточно, чем нам, впрочем, не придется в дальнейшем пользоваться.

V. Дополнение Минковского к теореме Брунна. Из результата п. IV мы можем сделать следующий вывод:

Линейное семейство

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1$$

тогда и только тогда переходит при симметризации относительно любой плоскости снова в линейное семейство, когда K_0 и K_1 подобны и подобно расположены.

Действительно, пусть S_0 и S_1 — две одинаково направленные параллельные опорные плоскости тел K_0 и K_1 и пусть для определенности они имеют с K_0 и K_1 только по одной общей точке Q_0 и Q_1. Проведем через Q_0 и Q_1 две произвольные параллельные хорды Q_0R_0, Q_1R_1 тел K_0 и K_1; тогда через R_0 и R_1 должны проходить параллельные опорные

плоскости тел K_0 и K_1. Это, очевидно, возможно только тогда, когда K_0 и K_1 подобны и подобно расположены.

Теперь мы в состоянии сделать дополнение к доказанной в п. III теореме Брунна:

Корень третьей степени из объема

$$\sqrt[3]{J(\theta)}$$

тела K_θ линейного семейства выпуклых тел с внутренними точками является линейной функцией параметра θ только в том тривиальном случае, когда все тела K_θ семейства подобны и подобно расположены.

Это также было высказано еще Брунном, но впервые строго доказано Минковским. Из наших соображений это дополнение получается следующим образом. Если K_θ не подобно расположены, то можно так симметризовать семейство, что соответствующее семейство симметричных тел получится выпуклым, но не линейным:

$$K_\theta^* > (1-\theta)K_0^* + \theta K_1^* \qquad (0 < \theta < 1).$$

Тогда по нашей первоначальной теореме Брунна функция

$$\varphi(\theta) = \sqrt[3]{J\left((1-\theta)K_0^* + \theta K_1^*\right)}$$

выпукла (возможно, линейна). Функция

$$\sqrt[3]{J(\theta)} = \sqrt[3]{J(K_\theta^*)}$$

имеет с функцией $\varphi(\theta)$ общие значения на концах $\theta = 0$, $\theta = 1$, но при значениях $0 < \theta < 1$ она строго больше $\varphi(\theta)$ и не может быть, таким образом, линейной, ч. и т. д.

Здесь напрашивается следующее замечание: когда уже известна первоначальная теорема Брунна, то (как мы это здесь и сделали) «дополнение» может быть получено на вполне элементарном пути, просто из свойств симметризации без всякого предельного перехода. В противоположность этому первоначальные исследования Брунна и Минковского создавали впечатление, будто главная трудность запрятана в «дополнении». В этом пункте сказывается преимущество штейнеровской симметризации перед другими вспомогательными средствами.

VI. Неравенства Минковского. Мы не будем здесь воспроизводить общие неравенства для «смешанных объемов» выпуклых тел, в которых Минковский выразил теорему

Брунна, а ограничимся упоминанием следствий, полученных Минковским для шара.

Пусть K_0 — выпуклое тело; ограничивающую его поверхность мы на этот раз предположим имеющей непрерывно меняющуюся кривизну, что позволит нам применять к ней формулы дифференциальной геометрии. Параллельная поверхность, проходящая вне тела на расстоянии единица, ограничивает также выпуклое тело K_1. Рассмотрим линейное семейство выпуклых тел

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1 \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Их ограничивающие поверхности параллельны друг другу и их расстояния от K_0 равны θ.

Объем $J(\theta)$ тела K_θ выражается по Штейнеру[1]) формулой

$$J(\theta) = J + O\theta + M\theta^2 + \frac{4\pi}{3}\theta^3.$$

Здесь J и O обозначают объем и площадь поверхности тела K_0, а M — введенный Штейнером новый интегральный инвариант тела K_0, так называемый *интеграл средней кривизны*

$$M = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) do,$$

где выражение в скобках обозначает среднюю кривизну, а do — элемент площади поверхности тела K_0.

По нашей теореме Брунна — Минковского функция

$$\sqrt[3]{J(\theta)}$$

выпукла и не линейна, если K_0 и K_1 не подобно расположены, т. е. если K_0 не шар[2]). Мы имеем, таким образом,

$$\frac{d^2 J(\theta)^{\frac{1}{3}}}{d\theta^2} \leqslant 0 \quad \text{при всех} \quad \theta \geqslant 0.$$

---

[1]) J. Steiner, Gesammelte Werke, т. II, стр. 173—176 (статья «О параллельных поверхностях»).

[2]) То, что только шар подобно расположен (гомотетичен) параллельному ему телу, доказывается следующим путем. Пусть K_0 — такое тело, а L — шар. Тогда тело $(1-\theta)K_0 + \theta L$ подобно телу, параллельному телу K_0, а значит, подобно самому K_0. Но тогда должно быть также тело $L = \lim\{(1-\theta)K_0 + \theta L\}$ при $\theta \to 1$ подобно K_0, ч. т. д.

Но, как нетрудно подсчитать,

$$-\frac{9}{2} J(\theta)^{\frac{5}{3}} \frac{d^2}{d\theta^2} J(\theta)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= (O^2 - 3JM) + (MO - 12\pi J)\theta + (M^2 - 4\pi O)\theta^2.$$

Таким образом, во всяком случае

$$\begin{aligned} O^2 - 3JM &\geqslant 0, \\ M^2 - 4\pi O &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Эти неравенства между инвариантами J, M, O принадлежат Минковскому. Из них следует так хорошо нам знакомое неравенство Шварца:

$$O^3 - 36\pi J^2 \geqslant 0. \tag{II}$$

В случае шара во всех трех неравенствах имеет место знак равенства. Относительно совокупности выпуклых тел, для которых в первом или во втором неравенстве (I) имеет место знак равенства из нашего вывода, а также из дополнения к теореме Брунна, мы не получаем никакого разъяснения. Однако легко можно убедиться, что сразу в обеих формулах (I), а значит в (II), равенство может иметь место только в случае шара. Этим вновь получены основные результаты § 19.

Отметим один новый результат: *среди всех выпуклых тел с заданной площадью поверхности шар имеет наименьший интеграл средней кривизны* (Минковский).

Упомянем, что равенство $M^2 = 4\pi O$ имеет место только для шара, в то время как равенство $O^2 - 3JM = 0$ может иметь место также для некоторых нешарообразных тел. Это также доказал Минковский[1]). Вопрос о том, для каких выпуклых тел $O^2 - 3JM = 0$, в полном объеме был впервые выяснен Г. Болем (G. Bol, Hamburg. Abhandlungen **15**, 1943).

VII. О другом доказательстве неравенства $M^2 - 4\pi O \geqslant 0$. Для изложенной во второй части этой книги теории можно указать родственную ей теорию, к которой мы придем, если заменим штейнеровскую симметризацию, которой до сих пор постоянно пользовались, некоторой другой симметризацией.

---

[1]) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, т. II, Berlin, 1911, стр. 259.

Мы ограничимся лишь краткими указаниями, относящимися к этой теме.

Пусть K — произвольное выпуклое тело, K' — тело, симметричное телу K относительно некоторой плоскости S. Образуем следующую линейную комбинацию тел K и K' (стр. 113):

$$K^* = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K';$$

при этом полученное тело K^* будет симметрично относительно плоскости S. *Этот переход от K к K^* и задает некоторую новую симметризацию относительно плоскости S.*

Эта новая симметризация обладает тремя важными свойствами:

1. Тело K^* снова выпукло.

2. Тело K^* имеет тот же интеграл средней кривизны, что и тело K:

$$M = M^*.$$

3. У тела K^* площадь поверхности всегда больше, чем у тела K:

$$O < O^*,$$

если только K не имеет плоскости симметрии, параллельной S. В этом исключительном случае K и K^* равны и, значит,

$$O = O^*.$$

Эти свойства можно доказать совершенно тем же путем, каким раньше были доказаны три свойства симметризации Штейнера (см. стр. 60). Относительно второго пункта при этом следует заметить, что определение интеграла средней кривизны, которое в п. VI было дано только для выпуклых тел с непрерывно меняющейся кривизной, естественно распространяется на случай произвольного выпуклого тела, подобно тому как понятия площади поверхности и объема, известные сначала только для многогранников, мы смогли распространить на произвольные выпуклые тела (см. формулу (9) стр. 133).

Точно такое же рассуждение, которое при использовании старой симметризации вело к неравенству Шварца

$$O^3 - 36\pi J^2 \geqslant 0,$$

дает, если взять за исходный пункт новую симметризацию, неравенство Минковского

$$M^2 - 4\pi O \geqslant 0.$$

Новая симметризация также сразу приводит к выяснению того факта, что равенство

$$M^2 - 4\pi O = 0$$

имеет место только для шара.

§ 23. Дополнения[1])

I. Литература. В основе содержания этой третьей части книги лежит статья Г. А. Шварца «Доказательство теоремы о том, что шар обладает наименьшей поверхностью среди всех других тел того же объема» (H. A. Swarz, Göttinger Nachrichten, 1884, стр. 1 — 13; Gesammelte Abhandlungen, т. II, 1890, стр. 327 — 340). Затем необходимо упомянуть сочинения Г. Брунна (H. Brunn, Ovale und Eiflächen, München, 1887 и Kurven ohne wendepunkte, München, 1889) и, наконец, знаменитую статью «Объемы и поверхности» Г. Минковского (H. Minkowski, Math. Ann. **57**, 1903, стр 447 — — 495; Gesammelte Abhandlungen, т. II, 1911, стр. 230 — 276).

Принадлежащее Минковскому доказательство дополнения к теореме Брунна было существенно упрощено И. Радоном (J. Radon, Wiener Akademieberichte, 1916).

Неравенство $M^2 - 4\pi O \geqslant 0$ было также доказано А. Гурвицем с помощью сферических функций в уже упомянутом сочинении «О некоторых геометрических приложениях рядов Фурье» (A. Hurwitz, Annales de l'école normale supérieure (3), **19**, 1902, стр. 357 — 408); ср. также ниже, стр. 131—132. В связи с содержанием §§ 21, 22 хочется указать на новое, простое и красивое изложение этого предмета в уже дважды упоминавшейся книге Г. Хадвигера [5].

Д. Гильберт (D. Hilbert) отчасти заново обосновал теорию Минковского с помощью интегральных уравнений в своем шестом «Сообщении» (Göttinger Nachrichten, 1910, стр. 355 — 417), воспроизведенном также в книге «Основы общей теории линейных интегральных уравнений» (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1912, стр. 242 — — 258).

Сложение конечного числа или даже бесконечного множества выпуклых кривых было изучено Г. Бором в целях приложения этих понятий к аналитической теории чисел (H. Bohr, Oversigt over det Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1913).

Элементарное доказательство теоремы Брунна о поперечных сечениях выпуклого тела уже упоминалось на стр. 54. Здесь мы изложим вкратце, как эту теорему можно просто доказать с по-

---

[1]) Могут быть пропущены.

мощью тригонометрических рядов. Я дал один вывод такого рода (Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **23**, 1914, стр. 232 — — 234). За нижеследующее еще более прозрачное доказательство я благодарен В. Виртингеру.

II. Лемма Виртингера. *Пусть $f(\varphi)$ — функция с периодом 2π, производная которой $f'(\varphi)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда из*

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$$

следует неравенство

$$\int_0^{2\pi} [f(\varphi)]^2\,d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} [f'(\varphi)]^2\,d\varphi,$$

причем знак равенства имеет здесь место только в том случае, когда $f(\varphi)$ имеет вид

$$f(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$$

Доказательство этой теоремы, условия которой можно еще ослабить [1]), получается наиболее просто, если воспользоваться коэффициентами Фурье функций $f'(\varphi)$ и $f(\varphi)$. Пусть

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f'(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad \pi b_n = \int_0^{2\pi} f'(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi;$$

тогда с помощью интегрирования по частям получаем для коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$ значения

$$\alpha_n = -\frac{b_n}{n}, \qquad \beta_n = \frac{a_n}{n}.$$

Так называемая полнота ортогональной системы Фурье дает, в силу $a_0 = \alpha_0 = 0$, равенства

$$\int_0^{2\pi} [f(\varphi)]^2\,d\varphi = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{n^2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} [f'(\varphi)]^2\,d\varphi = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

---

[1]) Достаточно предполагать интегрируемость f'. (Кроме того, под f' можно понимать, например, одностороннюю производную или производную Шварца. — *Прим. перев.*)

С помощью вычитания отсюда можно сразу получить справедливость леммы Виртингера.

III. Применение. Пусть теперь $h_0(\varphi)$ — *опорная функция* выпуклой фигуры B_0, расположенной в плоскости $z=0$, т. е. фигура B_0 определяется соотношениями

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi \leqslant h_0(\varphi), \qquad z=0,$$

причем для каждого значения φ существует по крайней мере одна точка (x, y) из B_0, для которой имеет место знак равенства. Пусть точно так же в плоскости $z=1$ определена вторая выпуклая фигура B_1 с опорной функцией $h_1(\varphi)$:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi \leqslant h_1(\varphi), \qquad z=1.$$

Тогда плоскость $z=\theta\,(0<\theta<1)$ содержит фигуру B_θ

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi \leqslant (1-\theta)\,h_0(\varphi) + \theta h_1(\varphi),$$

являющуюся пересечением плоскости $z=\theta$ с выпуклой оболочкой фигур B_0 и B_1. Требуется показать, что *корень квадратный из площади фигуры* B_θ

$$\sqrt{F(\theta)}$$

есть выпуклая функция параметра θ.

Площадь F выпуклой фигуры находится по ее опорной функции h с помощью формулы *)

$$2F = \int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2)\,d\varphi. \qquad (*)$$

В нашем случае это дает

$$F(\theta) = (1-\theta)^2 F_0 + 2(1-\theta)\,\theta M + \theta^2 F_1,$$

где F_0 и F_1 — площади фигур B_0 и B_1, а M — введенная Минковским «*смешанная площадь*» этих фигур:

$$2M = \int_0^{2\pi} \left(h_0 h_1 - h_0' h_1'\right) d\varphi. \qquad (**)$$

Опорная функция $h(\varphi)$ при этом всегда имеет производную (в смысле стр. 67), и последняя, как это действительно можно показать, является функцией ограниченной вариации [1]).

---

*) См., например, В. Бляшке [29], стр. 46 или В. Бляшке [31], стр. 122 русского перевода.

[1]) Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **23**, 1914, стр. 230.

Заметим, что периметры L_0 и L_1 фигур B_0 и B_1 выражаются формулами

$$L_0 = \int_0^{2\pi} h_0\, d\varphi, \qquad L_1 = \int_0^{2\pi} h_1\, d\varphi, \tag{L}$$

так что функция

$$f(\varphi) = \frac{h_0(\varphi)}{L_0} - \frac{h_1(\varphi)}{L_1}$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Применив к ней лемму, получим

$$\frac{F_0}{L_0^2} - \frac{2M}{L_0 L_1} + \frac{F_1}{L_1^2} \leqslant 0,$$

или

$$M \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{L_1}{L_0} F_0 + \frac{L_0}{L_1} F_1\right]. \tag{F}$$

Но из

$$\left[\sqrt{\frac{L_1}{L_0} F_0} - \sqrt{\frac{L_0}{L_1} F_1}\right]^2 \geqslant 0$$

следует, что всегда

$$\frac{L_1}{L_0} F_0 + \frac{L_0}{L_1} F_1 \geqslant 2\sqrt{F_0 F_1};$$

поэтому окончательно

$$M \geqslant \sqrt{F_0 F_1}. \tag{M}$$

Выведенное Минковским соотношение (M) между площадями и смешанной площадью есть аналитическое выражение выпуклости функции

$$\sqrt{F(\theta)}.$$

Попутно из нашей леммы следует, что знак равенства имеет здесь место только тогда, когда B_0 и B_1 подобны и подобно расположены.

Полученное несколько выше более сильное неравенство (F) было выведено также Г. Фробениусом [1]).

---

[1]) G. Frobenius, Berliner Akademieberichte **28**, 1915, стр. 397.

Пусть теперь B_1 — круг радиуса 1, т. е.

$$h_1(\varphi) = 1;$$

тогда

$$2M = L_0$$

и

$$F_1 = \pi, \qquad L_1 = 2\pi.$$

Поэтому из (M) получается снова наша старая формула

$$L_0^2 - 4\pi F_0 \geqslant 0.$$

IV. Перенесение леммы Виртингера в сферическую геометрию. Наметим кратко доказательство того факта, что в геометрии на сфере справедливо некоторое утверждение, соответствующее планиметрической лемме Виртингера. Подобно тому как мы установили последнюю посредством разложения функции в тригонометрический ряд, сферическая теорема доказывается с использованием сферических функций.

Пусть на сфере с центром в начале координат определена регулярная аналитическая функция f, среднее значение которой равно нулю:

$$\int f\, d\omega = 0, \tag{1}$$

где $d\omega$ — элемент площади сферы. Тогда всегда имеет место неравенство

$$\int f^2\, d\omega \leqslant \frac{1}{2} \int \Delta f\, d\omega, \tag{2}$$

где Δf — так называемый первый дифференциальный параметр Бельтрами[1]*. Знак равенства имеет место только тогда, когда f имеет вид*

$$f = ax + by + cz. \tag{3}$$

Действительно, пусть

$$f = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots \qquad (X_0 = 0) \tag{4}$$

— разложение f по сферическим функциям. Отсюда, используя дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют сферические функции:

$$\Delta_2 X_n + n(n+1) X_n = 0, \tag{5}$$

---

[1]) См., например, G. Scheffers, Theorie der Flächen, Leipzig, 1913, стр. 428, где вместо Δf пишется Δ_{ff}, или G. Darboux, Leçon sur la Théorie générale des surfaces, т. III, Paris, 1894, стр. 194. [См. также, например, В. Бляшке [30], § 79, стр. 185—186 или В. Бляшке [29], стр. 108, 132, 171. — *Прим. ред.*] Интегрирование ведется по всей поверхности сферы. Предположения регулярности здесь также можно ослабить.

можно для второго дифференциального параметра $\Delta_2 f$ функции f*) вывести разложение [1])

$$\Delta_2 f = -\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) X_n. \tag{6}$$

Но по формуле Грина [2])

$$\int \Delta f \, d\omega = -\int f \Delta_2 f \, d\omega. \tag{7}$$

Так как сферические функции образуют полную ортогональную систему, то отсюда следует

$$\int f^2 \, d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 \, d\omega,$$

$$\int \Delta f \, d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \int X_n^2 \, d\omega.$$

Далее отсюда выводим

$$\int f^2 \, d\omega - \frac{1}{2} \int \Delta f \, d\omega = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) \int X_n^2 \, d\omega, \tag{8}$$

— а эта формула уже содержит требуемый результат.

Если мы хотим теперь вывести отсюда для выпуклых тел что-нибудь аналогичное приведенным ранее неравенствам (F) и (M), то применим к интегралу от средней кривизны выпуклой поверхности с опорной функцией H формулу Минковского

$$M = \int H \, d\omega, \tag{9}$$

а для площади поверхности — выведенную им же формулу

$$O = \int \left(H^2 - \frac{1}{2} \Delta H\right) d\omega, \tag{10}$$

---

*) См., например, В. Бляшке [30], § 81, стр. 190—191 или В. Бляшке [29], стр. 111, 132, 171.

[1]) Для этого используется формула Грина $\int g \, \Delta_2 f \, d\omega = \int f \, \Delta_2 g \, d\omega$; см., например, названное выше сочинение Г. Дарбу, стр. 200. [См. также В. Бляшке [30], стр. 192. — *Прим. ред.*]

[2]) Г. Дарбу, там же. [См. также В. Бляшке [30], там же. — *Прим. ред.*]

которая является пространственным аналогом формулы для площади плоской фигуры

$$F = \frac{1}{2} \int (h^2 - h'^2)\, d\varphi$$

и которую мы докажем несколько ниже. Тогда с помощью рассуждений, совершенно аналогичных проведенным в п. III, получим, например, как аналог неравенства

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0,$$

снова неравенство Минковского

$$M^2 - 4\pi O \geqslant 0.$$

Подобным образом это неравенство было обосновано также А. Гурвицем.

V. Формула Минковского для площади поверхности. Если $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ — гауссова кривизна, H — опорная функция, $d\omega$ — элемент площади сферического изображения замкнутой выпуклой поверхности, то для объема, ограниченного этой поверхностью, имеет место формула

$$J = \frac{1}{3} \int R_1 R_2 H\, d\omega. \tag{11}$$

Для параллельной поверхности, идущей извне на расстоянии ρ, отсюда получаем

$$J(\rho) = \frac{1}{3} \int (R_1 + \rho)(R_2 + \rho)(H + \rho)\, d\omega.$$

Но (стр. 123) по Штейнеру

$$J(\rho) = J + \rho O + \rho^2 M + \rho^3 \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при первой степени ρ, находим

$$O = \frac{1}{3} \int \{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) H\}\, d\omega. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$O = \int R_1 R_2\, d\omega;$$

если это учесть в (12), то получим

$$\boxed{O = \frac{1}{2} \int (R_1 + R_2) H\, d\omega.} \tag{13}$$

Для того чтобы ввести в эту формулу Минковского дифференциальный параметр от H, нужна формула Вайнгартена [1])

$$R_1 + R_2 = 2H + \Delta_2 H. \tag{14}$$

Тогда получается

$$O = \int \left(H + \frac{1}{2}\Delta_2 H\right) H\, d\omega.$$

Отсюда, используя формулу Грина (7), получаем требуемый результат:

$$\boxed{O = \int \left(H^2 - \frac{1}{2}\Delta H\right) d\omega.} \tag{10}$$

Если перейти здесь снова к параллельной поверхности, то получим

$$O(\rho) = O + \rho 2M + \rho^2 4\pi = \int \left\{(H+\rho)^2 - \frac{1}{2}\Delta H\right\} d\omega.$$

Отсюда, вновь приравнивая линейные относительно ρ члены, получаем уже упомянутую ранее формулу (9) для интеграла от средней кривизны

$$\boxed{M = \int H\, d\omega.} \tag{9}$$

VI. Выпуклые функционалы. На стр. 113 была определена линейная комбинация двух выпуклых тел:

$$(1-\theta) K_0 + \theta K_1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Результат такого сложения снова есть выпуклое тело. Множество всех выпуклых тел обладает, таким образом, свойством выпуклости, так как линейная комбинация (точнее, линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами, дающими в сумме единицу) двух элементов множества всегда представляет собой опять элемент того же множества. Если рассматривать только множество M выпуклых тел, лежащих в некотором фиксированном шаре, то это множество не только выпукло, но также и ограничено, а по теореме выбора (стр. 79) также и замкнуто. Точно так же как из точек строится выпуклое тело, можно поэтому из выпуклых тел строить выпуклые системы таких тел, обладающие соответствующими свойствами.

Далее, подобно тому как мы внутри выпуклой области определяем выпуклую функцию, так же можно внутри такого рода

---

[1]) J. Weingarten, Festschrift der technischen Hochschule, Berlin, 1884; см. также L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, 1910, стр. 140. [См. также В. Бляшке [30], стр. 251. — *Прим. ред.*]

выпуклого множества M выпуклых тел определить «*выпуклый функционал*»; примером такого функционала, как мы видели, может служить кубический корень из объема тела

$$\sqrt[3]{J_K} = V_K.$$

Действительно, по теореме Г. Брунна (стр. 115)

$$V_{(1-\theta)K_0+\theta K_1} \geqslant (1-\theta)\, V_{K_0} + \theta V_K,$$

— а эту формулу можно принять за определение выпуклости функционала V (сняв специфическое для данного частного случая ограничение $V_K \geqslant 0$).

С помощью формулы Минковского можно также легко показать, что *квадратный корень из площади поверхности* является вторым примером выпуклого функционала. Напротив, интеграл средней кривизны есть линейный функционал.

Но можно линейную комбинацию выпуклых тел определить еще совершенно другим образом и прийти при этом к новым фактам. Например, можно, используя симметризацию выпуклых тел K_0 и K_1 с одной и той же проекцией G,

$$K_0 \begin{cases} (x, y) \in G, \\ g_0(x, y) \leqslant z \leqslant f_0(x, y), \end{cases} \qquad K_1 \begin{cases} (x, y) \in G, \\ g_1(x, y) \leqslant z \leqslant f_1(x, y), \end{cases}$$

трактовать линейную комбинацию в следующем смысле: определять

$$K_\theta = (1-\theta)\, K_0 + \theta K_1$$

условиями:

$$K_\theta = \begin{cases} (x, y) \in G, \\ (1-\theta)\, g_0 + \theta g_1 \leqslant z \leqslant (1-\theta)\, f_0 + \theta f_1. \end{cases}$$

По отношению к этой новой линейной комбинации функционал J_K — линейный, а O_K — выпуклый (снизу).

Наконец, можно линейную комбинацию произвольных выпуклых тел определить еще и таким образом, что O_K окажется линейным функционалом. Действительно, рассмотрим обратное значение гауссовой кривизны $1:K = R_1R_2$, ограничивающей тело поверхности как функцию направления $\alpha:\beta:\gamma$ внешней нормали. Тогда по Минковскому тело однозначно определено этой функцией с точностью до параллельного переноса (см. стр. 196). Это позволяет ввести определение «линейной комбинации» выпуклых тел так, что вместо опорных функций по определению линейно комбинируются соответствующие функции $1:K$ на единичной сфере $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Тогда площадь поверхности

$$O = \int \frac{d\omega}{K}$$

(здесь $d\omega$ — элемент площади на единичной сфере), очевидно, будет линейным функционалом, а функционал $\sqrt[3]{J}$ в этом случае попрежнему остается выпуклым, как это показал Г. Герглотц, применяя формулы Гильберта к теории Минковского [1]).

Возможно, стоило бы вообще изучить общие свойства «выпуклой вариационной задачи», т. е. задачу об экстремуме выпуклого функционала.

Чрезвычайно красивые исследования по изопериметрической проблеме опубликовал Э. Шмидт (E. Schmidt) в 1939—1948 гг. в Math. Zeitschrift, Math. Nachrichten, и в Math. Annalen. По этому вопросу есть также много работ его греческого ученика А. Дингаса (A. Dinghas) за 1939—1949 гг. *).

---

[1]) См. ссылку на стр. 129.

*) См. библиографические указатели в книгах Г. Хадвигера [19] и [5].

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМУМАХ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

§ 24. Наибольший шар, который может свободно перекатываться внутри выпуклой поверхности

I. О дифференциальной геометрии «в целом». Понятия «выпуклой фигуры» (овала) и «выпуклого тела» (овалоида), кроме рассмотренной изопериметрической задачи, дают повод к постановке множества других экстремальных задач. Многие из этих задач совсем элементарные, другие — ведут к запутанным проблемам вариационного типа. Результаты, к которым здесь можно прийти, принадлежат, как принято говорить, *дифференциальной геометрии «в целом»*. Действительно, большинство теорем обычной дифференциальной геометрии относится к достаточно малой окрестности элемента рассматриваемого геометрического объекта [1]); теоремы же, которые здесь должны быть установлены, относятся к кривым или поверхностям, ограничивающим выпуклые фигуры и тела на всем их протяжении, именно «в целом».

Можно пояснить на примере разницу между этими двумя постановками вопроса. В дифференциальной геометрии Гаусс многократно имел дело с *изгибанием* поверхностей, т. е. с таким изменением их формы, при котором длины дуг всех идущих по поверхности кривых остаются неизменными. Можно показать, что достаточно малый кусок «поверхности», на которую обычно накладывают некоторые условия регулярности, всегда может быть изогнут бесконечно многими способами. Совсем иначе обстоит дело с поверхностью в целом. Хотя об изгибаниях известно все еще не очень много, но Г. Либман, Д. Гильберт, Г. Вейль, С. Кон-Фоссен,

---

[1]) Мы, далее, считаем известными основы этой «дифференциальной геометрии в малом» (см., например, книгу В. Бляшке [29]).

В. Бляшке, Г. Герглотц, Р. Каччиополи, А. Д. Александров, А. В. Погорелов, Рембс, Гротеймейер и другие рассматривали этот вопрос и в итоге доказали, что, например, овалоид в целом никогда не может быть изогнут без нарушений выпуклости [1]).

Подобные вопросы о связи между свойствами в бесконечно малом и свойствами геометрического образа в целом, т. е. вопросы дифференциальной геометрии в целом, естественно связаны с весьма значительными трудностями [2]). Но зато они гораздо естественнее и интереснее, так что всю дифференциальную геометрию в малом, которой одной посвящена большая книга Л. Бианки, можно, если угодно, рассматривать как предварительную подготовку к вопросам геометрии в целом.

Наиболее простые постановки вопросов, касающихся свойств «в целом», непосредственно связаны с замкнутыми выпуклыми поверхностями — границами выпуклых тел. Для примера мы займемся сейчас выяснением связи между наибольшим и наименьшим значениями гауссовой кривизны на такой поверхности и ее общими размерами. Для этой цели мы предварительно установим некоторые не особенно глубоко лежащие теоремы; они нам потом понадобятся.

II. Наименьшая и наибольшая окружность кривизны выпуклой кривой. Граница выпуклой фигуры, имеющей внутренние точки, называется далее *выпуклой кривой* G. Так как мы всегда предполагаем выпуклые фигуры ограниченными, то выпуклые кривые мы будем всегда предполагать замкнутыми, хотя кое-что из последующего дословно переносится и на незамкнутые выпуклые кривые.

Мы будем предполагать, что вдоль кривой G кривизна изменяется непрерывно. Тогда на кривой существует (по крайней мере одна) точка с наименьшей и (по крайней мере одна) точка с наибольшей окружностью кривизны; эта окружность может также вырождаться в прямую. (*Окружностью кривизны* кривой G в точке P называется окружность, которая касается G в точке P и имеет радиус,

---

[1]) См. Добавление, стр. 195. [Окончательный результат принадлежит здесь А. В. Погорелову. — *Прим. перев.*]

[2]) О проблемах дифференциальной геометрии в целом см., в частности, Чжень (Shiing-Shen Chern), Topics in Differential Geometry (мимеографированные лекции), Princeton, 1951.

равный обратному значению кривизны кривой G в этой точке.)

Возьмем теперь две выпуклые кривые G и G_0 с непрерывно изменяющейся кривизной, касающиеся друг друга в одной точке S и лежащие по одну сторону от их общей касательной в этой точке (рис. 21). Мы мыслим себе G и G_0 проходимыми в положительном направлении и касательные на обеих кривых соответственно направленными. Тогда имеет место следующая теорема:

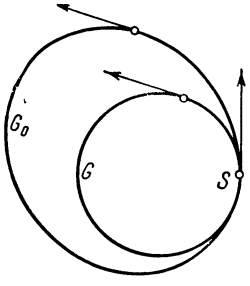

Рис. 21.

Если две, проходимые в положительном направлении, выпуклые кривые G и G_0 с непрерывно изменяющейся кривизной касаются друг друга в точке S (причем лежат по одну сторону от касательной в S) и в точках с одинаково направленными параллельными касательными кривизна кривой G всегда не меньше кривизны G_0, то кривая G целиком принадлежит выпуклой фигуре, ограниченной кривой G_0.

Для доказательства используем «опорные функции», которые мы уже вводили на стр. 71. Они выражают расстояние касательной от определенной точки (например, точки S) в зависимости от угла, образованного касательной с фиксированным направлением (например, направлением касательной в S). Пусть $h(\tau)$, $h_0(\tau)$ — эти две функции; тогда вследствие начальных условий

$$h(0)=0, \qquad h'(0)=0,$$

$$h_0(0)=0, \qquad h_0'(0)=0.$$

Мы можем по опорной функции $h(\tau)$ вычислить радиус кривизны $\rho(\tau)$. Для круга радиуса ρ

$$h(\tau)=\rho(1-\cos\tau),$$

поэтому для него

$$\rho=h+h''.$$

Но поскольку при вычислении радиуса кривизны используются только производные до второго порядка, то эта

формула

$$\rho(\tau) = h(\tau) + h''(\tau) \tag{1}$$

справедлива и для произвольных кривых *).

Если, наоборот, известно $\rho(\tau)$, то $h(\tau)$ находится интегрированием линейного дифференциального уравнения второго порядка (1) при начальных условиях $h(0) = h'(0) = 0$. Это дает [1])

$$h(\tau) = \int_0^\tau \rho(\sigma) \sin(\tau - \sigma)\, d\sigma. \tag{2}$$

Так как функции $h(\tau)$ и $\rho(\tau)$ должны обладать периодом 2π, то мы находим, как условие замкнутости,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\sigma) \cos\sigma\, d\sigma = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\sigma) \sin\sigma\, d\sigma = 0.$$

Вернемся теперь снова к нашему утверждению. По предположению имеет место соотношение

$$\rho_0(\tau) - \rho(\tau) \geqslant 0. \tag{3}$$

Из (2) следует

$$h_0(\tau) - h(\tau) = \int_0^\tau \{\rho_0(\sigma) - \rho(\sigma)\} \sin(\tau - \sigma)\, d\sigma.$$

Если τ лежит в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$, то, в силу (3), подынтегральная функция неотрицательна, а значит,

$$h_0(\tau) \geqslant h(\tau); \tag{4}$$

аналогично выводится то же соотношение при $-\pi \leqslant \tau \leqslant 0$.

---

*) См. также В. Бляшке [31], стр. 122 русского перевода.

[1]) Вводя длину дуги s, можно записать полученную формулу в виде

$$h(\tau) = \int_0^\tau \sin(\tau - \sigma)\, ds(\sigma);$$

она остается верной и в случае, когда на кривой имеются точки с нулевой кривизной.

Из (4) следует, что G действительно содержится в G_0, как это и утверждалось.

Отметим несколько следствий.

Если для выпуклой кривой G_0 начертить круг, касающийся кривой изнутри, то этот круг нигде не будет выходить за пределы G_0, если только его радиус не больше всех радиусов кривизны кривой G_0.

Если выпуклая кривая G касается круга изнутри, то G целиком лежит в этом круге, если радиус последнего не меньше всех радиусов кривизны G.

Как частный случай получается соотношение, которое ранее вывел Гурвиц с помощью тригонометрических рядов:

Длина выпуклой кривой с непрерывно изменяющейся кривизной и площадь, ограниченная этой кривой, заключены между длинами и площадями наименьшего и наибольшего кругов кривизны этой кривой.

Мы переходим теперь к тому, чтобы перенести эту теорему на геометрию в пространстве. Предварительно осуществим небольшое вспомогательное рассмотрение.

III. Факт, двойственный теореме Эйлера о кривизне поверхности. Пусть P — регулярная точка искривленной поверхности и T — прямая, касающаяся поверхности в точке P. Мы построим касающийся поверхности цилиндр, все образующие которого параллельны прямой T и касаются поверхности. Определим радиус кривизны R нормального сечения такого цилиндра и установим, по какому закону меняется R при изменении направления T.

Так как все, что нас интересует, зависит лишь от производных не выше второго порядка, то мы можем заменить поверхность ее соприкасающимся параболоидом. Его уравнение при подходящем выборе системы координат можно записать так:

$$2z = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}. \tag{5}$$

Точка P совпадает при этом с началом координат, а R_1, R_2 суть главные радиусы кривизны заданной поверхности в точке P. Уравнение касательной плоскости к параболоиду в точке x, y, z имеет в текущих координатах ξ, η, ζ вид

$$z + \zeta = \frac{x\xi}{R_1} + \frac{y\eta}{R_2} \tag{6}$$

и направление нормали к этой плоскости определяется отношениями

$$\frac{x}{R_1} : \frac{y}{R_2} : -1. \tag{7}$$

Если, с другой стороны, записать направляющие косинусы нормали нашего параболоида в виде

$$\cos\alpha \sin\varphi : \sin\alpha \sin\varphi : -\cos\varphi,$$

то найдем, сравнивая с (7), выражение для координат точки касания

$$x = R_1 \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi, \qquad y = R_2 \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi. \tag{8}$$

Расстояние h от точки P до касательной плоскости (6), т. е. до плоскости

$$z + \zeta = (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha) \operatorname{tg}\varphi, \tag{9}$$

поэтому равно

$$h = z\cos\varphi = (R_1 \cos^2\alpha + R_2 \sin^2\alpha) \frac{\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}. \tag{10}$$

Искомый радиус кривизны R вычисляется отсюда по формуле (1), стр. 139:

$$R = \left[h + \frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2}\right]_{\varphi=0},$$

что дает

$$R = R_1 \cos^2\alpha + R_2 \sin^2\alpha. \tag{11}$$

Это — результат, который нам будет нужен позднее и который в некотором смысле двойствен известной формуле Эйлера

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \tag{12}$$

для радиуса кривизны нормального сечения поверхности.

Заметим еще, что *если* $R_1 > 0$ *и* $R_2 > 0$, *то* из (11) следует

$$R_1 \leqslant R \leqslant R_2. \tag{13}$$

IV. Решение пространственной задачи. Пусть теперь F — выпуклая поверхность, т. е. граница выпуклого тела

с внутренними точками[1]). Мы будем предполагать, что F непрерывно искривлена, т. е. что гауссова кривизна

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

и средняя кривизна

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

являются непрерывными функциями точки поверхности F.

Мы ставим перед собой следующую задачу:

Определить наибольшую возможную величину R такую, что в каждой точке P поверхности F можно построить шар радиуса R, касающийся F в точке P изнутри и не выходящий за пределы F. Иначе это можно выразить так: определить радиус наибольшего шара, который можно свободно перекатывать внутри F.

Сразу ясно, что R не может превосходить радиус кривизны нормального сечения в точке касания P с F, так как иначе поверхность заходила бы внутрь шара. Таким образом, R наверняка меньше или равен минимуму всех этих радиусов кривизны для всех точек P поверхности F. Мы хотим доказать, что здесь имеет место именно равенство:

Искомый радиус R равен наименьшему из главных радиусов кривизны во всех точках поверхности F.

Для этого достаточно показать, что шар такой величины, касающийся F в произвольной точке P, не выходит за пределы F, или, что то же самое, что F не заходит ни в один такой шар. Предположим противное: пусть точка Q поверхности F лежит внутри касательного в точке P шара. Мы определим направление (или, если их несколько, одно из направлений), параллельное касательным плоскостям поверхности в точках P и Q и спроектируем поверхность F и наш шар на плоскость, перпендикулярную этому направлению. Фигура, в которую проектируется поверхность F, пусть будет G, а проекцию нашего шара назовем K. Тогда K есть круг, который касается G в точке P' (проекции точки P), а G проходит через точку Q' (проекцию точки Q), лежащую внутри K. С другой стороны, по (13) все радиусы кри-

[1]) «Выпуклая поверхность» означает здесь, как и обычно в этой книге, *замкнутую* выпуклую поверхность.

визны G больше или равны R, откуда, в силу результатов п. II, следует, что круг радиуса R, касающийся G в P', должен лежать в G. Таким образом мы пришли к противоречию.

Совершенно так же можно доказать соответствующую теорему о шарах, которых поверхность F касается изнутри и которые целиком содержат F. Мы можем этот результат выразить так:

Наименьший шар, в котором выпуклая поверхность F может беспрепятственно перекатываться, имеет радиус, равный наибольшему из главных радиусов кривизны поверхности F.

Если в некоторой точке F кривизна поверхности обращается в нуль, то не существует максимального главного радиуса кривизны, а следовательно, также и шара, обладающего указанным свойством.

§ 25. Ограничения для значений кривизны выпуклых поверхностей[1])

I. Постановка вопроса и сведение к поверхностям вращения. Мы хотим решить следующую задачу:

Пусть для поверхности F с непрерывно меняющейся кривизной известно, что

(А) *гауссова кривизна K во всех точках F удовлетворяет соотношению*

$$K \geqslant \frac{1}{A^2};$$

(Б) *существует шар радиуса R, который не выходит за пределы F.*

Требуется найти верхнюю границу расстояний между точками поверхности F.

Назовем, как обычно, максимум расстояния двух точек ограниченного и замкнутого множества «*диаметром*» этого множества; тогда нашу задачу можно сформулировать так:

Отыскать верхнюю границу диаметра поверхности F.

Можно определять тот же диаметр D поверхности F еще несколько иначе. Именно, пусть P и Q — две точки

---

[1]) Ср. статью автора «Задачи дифференциальной геометрии в целом», Sitzungsberichte der Berliner Mathem. Gesellsch. 15, 1916, стр. 62—69.

поверхности F с расстоянием D. Тогда F лежит в пересечении двух шаров радиуса D с центрами P и Q. Но отсюда сразу следует, что касательные плоскости к F в точках P и Q должны быть параллельны между собой и перпендикулярны отрезку PQ. Таким образом, можно утверждать, что

диаметр D выпуклой поверхности F равен наибольшему расстоянию между параллельными касательными плоскостями F.

Теперь нужно доказать следующее. *С помощью (осевой) симметризации Шварца* (см. стр. 107) *каждую выпуклую поверхность F с непрерывно меняющейся кривизной, удовлетворяющую условиям* (А) *и* (Б), *можно перевести в выпуклую поверхность вращения с непрерывно меняющейся кривизной, которая также удовлетворяет условиям* (А) *и* (Б) *и имеет тот же диаметр, что и первоначальная поверхность.*

После того как это установлено, можно будет искать верхнюю границу диаметра только для поверхностей вращения.

II. Применение симметризации Шварца. Используем построение Шварца следующим образом. Пусть P и Q — две точки поверхности F, расстояние между которыми равно диаметру D поверхности F. Переведем с помощью симметризации Шварца ограниченное поверхностью F выпуклое тело L в тело вращения $\tilde{L}$, которое имеет осью вращения прямую a, соединяющую точки P и Q. Тогда L и $\tilde{L}$ пересекаются каждой плоскостью, перпендикулярной a, по выпуклым фигурам одинаковой площади, — именно это свойство и определяет симметризацию Шварца. Надо показать следующее:

1°. *Тело $\tilde{L}$ также выпукло и тоже имеет непрерывно меняющуюся кривизну.*

2°. *Если на ограничивающей поверхности F тела L для гауссовой кривизны имеет место соотношение $K \geqslant 1 : A^2$, то такое же соотношение имеет место и на ограничивающей поверхности $\tilde{F}$ тела $\tilde{L}$.*

3°. *Если F содержит шар радиуса R, то $\tilde{F}$ наверняка содержит шар такой же величины.*

4°. *Диаметры поверхностей F и $\tilde{F}$ или тел L и $\tilde{L}$ одинаковы.*

Рассмотрим эти пункты последовательно. Что $\tilde{L}$ тоже выпукло — доказал Брунн; нами это было установлено на стр. 111.

Что $\tilde{F}$ тоже обладает непрерывной кривизной, можно сразу усмотреть из аналитической записи конструкции Шварца и известных правил дифференцирования под знаком интеграла.

Наиболее труден п. 2°, который мы вследствие этого отложим на конец. Нам удастся провести соответствующее доказательство, используя, как это уже потребовалось нам и раньше (§ 21), представление симметризации Шварца с помощью последовательности штейнеровских симметризаций и предельного перехода.

Пункт 3° очевиден. Если мы применим к заключающемуся внутри F шару радиуса R симметризацию Шварца, то он перейдет опять в шар того же радиуса, заключающийся внутри $\tilde{F}$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к последнему пункту.

III. Инвариантность диаметра. Ось вращения a поверхности $\tilde{F}$ содержит обе точки P и Q, расстояние между которыми равно диаметру D поверхности F. Плоскости, перпендикулярные a в точках P и Q, суть касательные плоскости поверхности F (ср. стр. 144). Построение Шварца осуществляется, таким образом, в полосе, ограниченной этими двумя плоскостями, которые являются поэтому также касательными плоскостями поверхности $\tilde{F}$ в точках P и Q. Диаметр $\tilde{D}$ поверхности $\tilde{F}$, таким образом, во всяком случае не меньше, чем $PQ = D$. Если мы, кроме того, сумеем показать, что $\tilde{D} \leqslant D$, то этим равенство обоих диаметров будет установлено.

Мы покажем, что вообще:

Если поверхность $\tilde{F}$ получается из поверхности F с помощью симметризации Шварца[1]), *то диаметры этих поверхностей связаны соотношением*

$$\tilde{D} \leqslant D.$$

Для этого мы докажем сначала следующую теорему

[1]) Это, разумеется, означает, что поверхности F и $\tilde{F}$ ограничивают выпуклые тела L и $\tilde{L}$ такие, что при симметризации Шварца L переходит в $\tilde{L}$.

Л. Бибербаха[1]), которая выражает соответствующее свойство симметризации Штейнера:

При симметризации Штейнера диаметр уменьшается или по крайней мере не возрастает.

Пусть K — первоначальное тело и $\tilde{K}$ — тело, полученное из него симметризацией относительно горизонтальной плоскости S; пусть, далее, $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ — две точки из $\tilde{K}$ с наибольшим расстоянием $\tilde{D}$. Через $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ проведем вертикали, наивысшие точки пересечения которых с K обозначим через P_2 и Q_1, а наинизшие — через P_1 и Q_2. Тогда, как видно из рис. 22[2]),

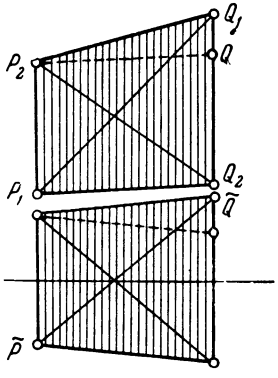

Рис. 22.

$$2\tilde{P}\tilde{Q} \leqslant P_1Q_1 + P_2Q_2,$$

откуда

$$2\tilde{D} \leqslant 2D,$$

т. е.

$$\tilde{D} \geqslant D,$$

ч. т. д.

Кроме того, мы сразу можем видеть, что диаметр D_K выпуклого тела K есть непрерывный функционал, непрерывный в том же смысле, как мы это устанавливали для объема и площади поверхности (стр. 77), т. е. что из

$$L = \lim_{n \to \infty} K_n$$

---

[1]) L. Bieberbach, Об экстремальном свойстве круга, Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **24**, 1915, стр. 247—250.

[2]) С помощью параллельного переноса это сводится к теореме о том, что *из двух треугольников с одинаковыми основаниями и высотами равнобедренный имеет меньший периметр.* [В самом деле, проведя из точки P_2 отрезок $P_2Q' \# P_1Q_2$ (т. е. перенеся параллельно P_1Q_2 в положение P_2Q!) или $P_2Q' \# P_1Q_1$ (этого отрезка на рис. 22 нет), мы получим треугольник Q_1P_2Q, соответственно. Q_2P_2Q'; отвечающий ему треугольник в нижней части рис. 22 будет равнобедренным и иметь те же основание и высоту. Доказательство выделенной курсивом теоремы следует из решения широко известной задачи о нахождении на данной прямой (параллельной основанию треугольника) точки, сумма расстояний от которой до двух данных точек (вершин треугольника) является минимальной. — *Прим. ред.*]

следует

$$D_L = \lim_{n\to\infty} D_n.$$

Действительно, если мы определим сходимость с помощью отклонений (см. стр. 76), то сразу получим, что

$$|D_{K_1} - D_{K_2}| \leqslant 2N(K_1, K_2)$$

— а это неравенство уже содержит требуемую непрерывность!

Если мы теперь опять сведем симметризацию Шварца к пределу последовательности штейнеровских симметризаций поочередно относительно двух плоскостей S_1 и S_2, угол между которыми несоизмерим с π (см. стр. 106), то диаметры соответствующих тел будут образовывать убывающую *) последовательность

$$D \geqslant D_1 \geqslant D_2 \geqslant \ldots,$$

откуда и следует желаемый результат:

$$\tilde{D} = \lim_{n\to\infty} D_n \leqslant D.$$

IV. Теорема Бибербаха. Из выведенного Бибербахом свойства симметризации Штейнера получается (и будет уместно включить это в наше изложение!) еще одно, также выведенное Л. Бибербахом, максимальное свойство шара:

Среди всех выпуклых тел данного диаметра шар имеет наибольший объем.

Иначе говоря, *объем и диаметр выпуклого тела* [1]) *связаны соотношением*

$$\frac{\pi}{6} D^3 - J \geqslant 0, \tag{B}$$

где знак равенства имеет место только в случае шара.

Действительно, если K — произвольное выпуклое тело, то мы можем с помощью симметризации относительно трех попарно перпендикулярных плоскостей получить из него новое выпуклое тело $\tilde{K}$, которое имеет центром симметрии точку

*) Точнее, не возрастающую.

[1]) Перенос на необязательно выпуклые точечные множества тривиален: достаточно перейти для этого от самих множеств к их выпуклым оболочкам (стр. 69).

пересечения этих плоскостей. Объемы и диаметры обоих тел связаны соотношениями

$$J = \tilde{J}, \qquad D \geqslant \tilde{D}.$$

Чтобы вывести отсюда требуемое неравенство

$$\frac{\pi}{6} D^3 - J \geqslant 0,$$

достаточно доказать его для тела $\tilde{K}$:

$$\frac{\pi}{6} \tilde{D}^3 - \tilde{J} \geqslant 0.$$

Но если мы построим шар диаметра $\tilde{D}$ с центром в центре симметрии тела $\tilde{K}$, то этот шар будет целиком содержать $\tilde{K}$, откуда сразу получается последнее неравенство. Действительно, если бы точка тела $\tilde{K}$ лежала вне этого шара, то симметричная ей относительно центра симметрии точка также принадлежала бы $\tilde{K}$ и расстояние между этими обеими симметричными точками было бы больше, чем диаметр $\tilde{D}$.

Чтобы убедиться, что в неравенстве (B) знак равенства имеет место только для шара, достаточно, например, доказать следующую лемму (это делается без труда, ср. рис. 22):

Если из выпуклого тела при симметризации (относительно плоскости) получается шар, то первоначальное тело, если только оно само не шар, имеет больший диаметр:

$$D > \tilde{D}.$$

V. Поведение кривизны при симметризации. Тем же способом, которым в п. III была установлена инвариантность диаметра, мы можем теперь закончить доказательство еще не сдавшегося нам второго из приведенных на стр. 144 утверждений о свойствах (осевой) симметризации Шварца.

Докажем предварительно, что *при штейнеровской симметризации* (относительно плоскости) *выпуклого тела L, ограниченного поверхностью F с непрерывно меняющейся кривизной, мы получаем выпуклое тело $\tilde{L}$, поверхность $\tilde{F}$ которого снова имеет непрерывно меняющуюся кри-*

визну. Если, далее, $1:A^2$ *и* $1:\tilde{A}^2$ — *наименьшие значения гауссовых кривизн на* F *и* $\tilde{F}$, *то*

$$\frac{1}{A^2} \leqslant \frac{1}{\tilde{A}^2}.$$

Мы считаем, что тело L задано в том виде, как мы это всегда полагали в § 16 (стр. 65):

$$L: \begin{cases} (x, y) \in G, \\ -g(x, y) \leqslant z \leqslant f(x, y), \end{cases}$$

где f и g — определенные в выпуклой области G выпуклые (сверху) функции. С помощью симметризации относительно плоскости $z=0$ получим отсюда

$$\tilde{L}: \begin{cases} (x, y) \in G, \\ -\frac{1}{2}[f(x, y)+g(x, y)] \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}[f(x, y)+g(x, y)]. \end{cases}$$

Рассмотрим, прежде всего, гауссову кривизну K в точках, проекции (x, y) которых попадают внутрь G. Мы полагаем *)

$$K(\theta) = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

где

$$p = (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \theta\frac{\partial g}{\partial x} = (1-\theta)p_0 + \theta p_1,$$

$$q = (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \theta\frac{\partial g}{\partial y} = (1-\theta)q_0 + \theta q_1,$$

$$r = (1-\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = (1-\theta)r_0 + \theta r_1,$$

$$s = (1-\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \theta\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$

$$t = (1-\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \theta\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (1-\theta)t_0 + \theta t_1.$$

Тогда $K(\theta)$ или, подробнее, $K(x, y; \theta)$ выражает при $\theta=0$ кривизну «верхней», а при $\theta=1$ кривизну «нижней» ограничивающей поверхности тела L в точках с проекцией (x, y), а при $\theta=1/2$ — кривизну в обеих точках поверхности $\tilde{F}$ с той же проекцией (x, y).

---

*) См. любой курс дифференциальной геометрии, например П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 1956, § 58, стр. 263.

Если мы сможем показать, что

$$K\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant K(0),$$

или

$$K\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant K(1),$$

то в этом уже будет содержаться желаемый результат. Для этого мы докажем, что имеет место неравенство

$$\sqrt{K(\theta)} \geqslant \varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ обозначает некоторую монотонную функцию, которая совпадает с $\sqrt{K(\theta)}$ в концах интервала $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Обозначим числитель $rt - s^2$ выражения для кривизны $K(\theta)$ через u^2. Прежде всего, мы покажем, что (неотрицательная по определению) функция $u(\theta)$ при любом фиксированном (x, y) является *выпуклой* (сверху) функцией от θ на интервале $0 < \theta < 1$. Поскольку после фиксации (x, y) уравнение

$$u^2 = rt - s^2 \qquad (*)$$

является квадратным относительно u и θ, нам достаточно убедиться, что оно не выражает на плоскости (u, θ) гиперболу (любая другая кривая второго порядка, симметричная относительно оси θ, дает нужную выпуклость). Чтобы уравнение $(*)$ не было уравнением гиперболы, достаточно проверить, что на оси θ есть значения, при которых $rt - s^2 < 0$. Для этого введем обозначения $r : s = \xi$, $t : s = \eta$. На плоскости с прямоугольными координатами (ξ, η) область $rt - s^2 \geqslant 0$ будет замкнутой внутренней областью $\xi\eta \geqslant 1$ равнобочной гиперболы. Тогда (r_0, t_0, s_0) и (r_1, t_1, s_1) суть «однородные координаты» двух внутренних (точнее, не внешних) точек этой области и на проходящей через них прямой заведомо найдется точка с некоторыми однородными координатами

$$(1-\theta)r_0 + \theta r_1; \quad (1-\theta)t_0 + \theta t_1; \quad (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$

лежащая вне гиперболы $\xi\eta = 1$, т. е. точка, для которой

$$rt - s^2 < 0.$$

Введем еще функцию

$$v(\theta) = 1 + p^2 + q^2.$$

Она при любом фиксированном (x, y) выпукла снизу, так как просто изображает на плоскости (θ, v) параболу, уходящую в бесконечность в верхнюю полуплоскость (относительно оси θ).

Из свойств выпуклости функций $u(\theta)$ и $v(\theta)$ следует, что при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$u(\theta) \geqslant (1-\theta)\,u(0) + \theta u(1),$$

$$v(\theta) \leqslant (1-\theta)\,v(0) + \theta v(1);$$

поэтому

$$\sqrt{K(\theta)} \geqslant \varphi(\theta),$$

где

$$\varphi(\theta) = \frac{(1-\theta)\sqrt{r_0 t_0 - s_0^2} + \theta\sqrt{r_1 t_1 - s_1^2}}{(1-\theta)\left(1 + p_0^2 + q_0^2\right) + \theta\left(1 + p_1^2 + q_1^2\right)}.$$

Но эта последняя функция, которая на плоскости (θ, φ) изображается или гиперболой (с параллельными осям асимптотами), или прямой линией, действительно монотонна на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Поэтому $\sqrt{K(\theta)}$, а значит и $K(\theta)$, принимает свое наименьшее на этом отрезке значение в одном из его концов.

Теперь мы еще должны изучить на F и $\tilde{F}$ те точки, проекции которых попадают на границу области G, т. е. точки, в которых касательная плоскость вертикальна — параллельна оси z. Поскольку здесь играют роль только производные до второго порядка, мы можем в такой точке заменить поверхность F ее соприкасающимся параболоидом, уравнение которого при соответствующем выборе системы координат можно записать в виде

$$2y = Ax^2 + 2Bxz + Cz^2. \tag{1}$$

Решая это уравнение относительно z, получаем

$$Cz = -Bx \pm \sqrt{(B^2 - AC)\,x^2 + 2Cy}$$

При симметризации относительно плоскости $z = 0$ отсюда получается

$$C^2\tilde{z}^2 = (B^2 - AC)\,x^2 + 2Cy,$$

т. е.

$$2Cy = (AC - B^2)x^2 + C^2\tilde{z}^2. \tag{2}$$

Для кривизны обоих параболоидов в начале координат или, что то же самое, для кривизны в соответствующих точках поверхностей F и $\tilde{F}$ с вертикальными касательными плоскостями, находим из (1) и (2) одно и то же значение

$$K = AC - B^2.$$

Таким образом, кривизна поверхности $\tilde{F}$ нигде не меньше, чем кривизна в соответствующих точках поверхности F. Отсюда следует справедливость утверждения, высказанного в начале этого пункта.

VI. Поведение кривизны при предельном переходе. Чтобы из того факта, что при («плоскостной») симметризации Штейнера минимум кривизны не уменьшается, можно было заключить об аналогичном поведении кривизны при («осевой») симметризации Шварца, нам нужна лишь следующая теорема:

Пусть L_1, L_2, L_3, ... — сходящаяся последовательность выпуклых тел с непрерывно меняющейся кривизной поверхности и пусть поверхность $\tilde{F}$ предельного тела

$$\tilde{L} = \lim_{n\to\infty} L_n$$

также имеет непрерывно меняющуюся кривизну. Тогда можно для каждой точки P поверхности $\tilde{F}$ так подобрать сходящуюся последовательность точек

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P,$$

что точка P_n принадлежит поверхности F_n тела L_n и кривизны F_n в точках P_n сходятся к кривизне $\tilde{F}$ в точке P:

$$\lim_{n\to\infty} K(P_n) = K(P).$$

Пусть a — минимум главного радиуса кривизны по всей поверхности $\tilde{F}$ тела $\tilde{L}$. Мы построим для $\tilde{F}$ две параллельные поверхности $F_{+\varepsilon}$ и $F_{-\varepsilon}$, удаленные от $\tilde{F}$ на расстояние ε внутри и снаружи. Обе они выпуклы, если только

$0 < \varepsilon < a$. Из определения сходимости следует, что при $n > n_\varepsilon$ поверхность F_n тела L_n лежит между $F_{+\varepsilon}$ и $F_{-\varepsilon}$.

Выделим на $\tilde{F}$ маленький кусок Φ, который, например, вырезается из $\tilde{F}$ небольшим шаром с центром в некоторой точке $\tilde{F}$. Соответствующий кусок поверхности F_n, т. е. кусок, по которому нормали к Φ (более короткие, чем расстояние ε) достигают F_n, обозначим через Φ_n. Тогда легко видеть, что вследствие выпуклости площади f_n и f кусков Φ_n и Φ связаны соотношением

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f. \qquad (*)$$

(f_n больше, чем площадь соответствующего Φ куска поверхности $F_{-\varepsilon}$, и меньше, чем площадь соответствующего Φ куска поверхности $F_{+\varepsilon}$, увеличенная на произведение 2ε и и длины границы Φ.)

Найдем теперь сферические изображения наших кусков поверхностей F, F_n на единичной сфере, проводя из центра этой сферы все радиусы, параллельные внешним нормалям в точках соответствующего куска поверхности.

Пусть P и P_n — две сопоставленные друг другу точки Φ и Φ_n, т. е. две точки, принадлежащие одной и той же нормали к Φ, а $\bar{P}$, $\bar{P}_n$ – их сферические изображения. Тогда, как мы покажем, для сферического расстояния $\bar{P}\bar{P}_n$ между точками сферического изображения имеет место оценка:

$$\cos \bar{P}\bar{P}_n > \frac{a-\varepsilon}{a+\varepsilon},$$

т. е. с уменьшением ε соответствующие сферические изображения равномерно сближаются.

В этом можно убедится так. Число $a - \varepsilon$ есть минимум главного радиуса кривизны на $F_{-\varepsilon}$. Поэтому шар с тем же радиусом, касающийся $F_{-\varepsilon}$ в точке $P_{-\varepsilon}$, отвечающей P, лежит, согласно результату стр. 142, внутри $F_{-\varepsilon}$. Так как $F_{-\varepsilon}$ лежит внутри F_n, то этот шар также лежит внутри F_n, откуда и получается (рис. 23) желаемое неравенство

$$\cos \bar{P}\bar{P}_n \geqslant \cos \delta,$$

где

$$\cos \delta > \frac{a-\varepsilon}{a+\varepsilon}.$$

Таким образом, если $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi}_n$ — сферические изображения Φ и Φ_n, то граница $\bar{\Phi}_n$ лежит между двумя «параллельными» кривыми, удаленными одна от другой на расстояние

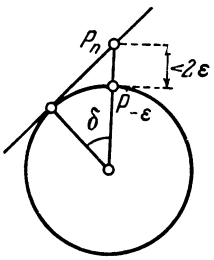

Рис. 23

$$\arccos\frac{a-\varepsilon}{a+\varepsilon}$$

и расположенными с двух сторон от границы $\bar{\Phi}$. Отсюда для площадей $\bar{f}$ и $\bar{f}_n$ сферических изображений $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi}_n$ следует

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \bar{f}_n. \qquad (**)$$

Но теперь можно, в силу широко известной связи интеграла кривизны K с площадями $\bar{f}$ и $\bar{f}_n$, написать

$$\bar{f} = \int_{\Phi} K\,df, \qquad \bar{f}_n = \int_{\Phi_n} K\,df_n.$$

По теореме о среднем мы можем также написать

$$\bar{f} = f\cdot K(\Phi), \qquad \bar{f}_n = f_n\cdot K(\Phi_n),$$

где через $K(\Phi)$ и $K(\Phi_n)$ обозначены значения кривизны в некоторых средних точках участков Φ и Φ_n. После деления этих двух равенств друг на друга и предельного перехода при $n\to\infty$ из (*) и (**) получаем

$$\lim_{n\to\infty} K(\Phi_n) = K(\Phi).$$

Поскольку можно выбрать кусок поверхности Φ на F сколь угодно малым, а кривизна K на F_n и на $\tilde{F}$ предполагается непрерывной, то в этом уже содержится справедливость утверждения о сходимости кривизны.

Если мы теперь приблизим тело $\tilde{L}$, которое получилось из выпуклого тела L с помощью симметризации Шварца, последовательностью тел L_1, L_2, L_3, ..., получаемых из L последовательными симметризациями (стр. 106), то для соответствующих наименьших значений кривизны, согласно п. V

(стр. 148 — 149), получаем

$$\frac{1}{A^2} \leqslant \frac{1}{A_1^2} \leqslant \frac{1}{A_2^2} \leqslant \frac{1}{A_3^2} \leqslant \cdots$$

Кроме того, ввиду только что доказанного

$$\frac{1}{\tilde{A}^2} \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{A_n^2},$$

а из этих двух соотношений следует

$$\frac{1}{A^2} \leqslant \frac{1}{\tilde{A}^2}.$$

Но это и есть утверждение п. 2° из перечисленных на стр. 144 свойств осевой симметризации, правильность которых теперь полностью установлена.

VII. Подготовка к доказательству для поверхностей вращения. Пока мы доказали следующее: выпуклая поверхность с непрерывной меняющейся кривизной и с диаметром D, которая (А) удовлетворяет наложенному на гауссову кривизну K ограничению $K \geqslant 1/A^2$ и (Б) содержит внутри шар радиуса R, может быть переведена с помощью осевой симметризации Шварца в выпуклую поверхность вращения с непрерывной кривизной и прежним диаметром D, которая удовлетворяет обоим предположениям (А) и (Б); при этом именно точки P, Q поверхности вращения, которые лежат на оси вращения, удалены на расстояние D друг от друга.

Мы можем теперь найденную поверхность вращения симметризовать еще относительно плоскости, перпендикулярной отрезку PQ в его середине. При этом, согласно п. III (стр. 146), диаметр D не изменится и по-прежнему остаются выполненными оба предположения (А) (п. V стр. 148 — 149) и (Б) (см. последние строки п. II, стр. 145).

Таким образом, чтобы найти при заданных A и R верхнюю границу диаметра D, нам достаточно обратить внимание только на выпуклые поверхности вращения, которые расположены симметрично относительно их «экваториальной плоскости», «полюсы» которых P и Q находятся на расстоянии D друг от друга.

Раз такая поверхность F содержит шар радиуса R и симметрична относительно середины M отрезка PQ, то она

содержит также шар, который симметричен первому относительно M. Поэтому в F лежит и такой же шар с центром в M, поскольку он содержится в выпуклой оболочке двух симметричных относительно M шаров. Мы имеем поэтому

$$PQ = D \geqslant 2R,$$

и для радиуса R_0 экваториального круга поверхности F

$$R_0 \geqslant R.$$

Кроме того, мы не можем считать величины $1/A^2$ и R совершенно независимыми друг от друга, а должны учитывать, что всегда

$$A \geqslant R.$$

Действительно, пусть ось вращения совпадает с осью z (которую мы направим вертикально вверх). Обозначим: через X, Y, Z — направляющие косинусы внешней нормали поверхности F; через df — элемент площади на f; через $d\bar{f}$ — элемент площади сферического изображения F. Тогда

$$\int \frac{Z}{K}\, d\bar{f} = \int Z\, df.$$

Второй интеграл, очевидно, выражает площадь проекции куска поверхности F, по которому производится интегрирование, на экваториальную плоскость. Если мы распространим, таким образом, первый интеграл на верхнюю полусферу H, то получим площадь πR_0^2 экваториального круга

$$\int\limits_H \frac{Z}{K}\, d\bar{f} = \pi R_0^2.$$

Но из

$$K \geqslant \frac{1}{A^2}$$

находим

$$\int\limits_H \frac{Z}{K}\, d\bar{f} \leqslant A^2 \int\limits_H Z\, d\bar{f} = \pi A^2.$$

Таким образом,

$$\pi A^2 \geqslant \pi R_0^2$$

или, поскольку $A > 0$, $R_0 > 0$,

$$A \geqslant R_0 \geqslant R.$$

VIII. Веретенообразные поверхности вращения постоянной кривизны. При $A > R_0$ существует веретенообразная поверхность вращения F_0 с постоянной кривизной $K = 1 : A^2$, которая получается при вращении вокруг оси z следующей меридиональной кривой

$$x = R_0 \cos\sigma, \quad y = 0, \quad z = \int_0^\sigma \sqrt{A^2 - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma, \quad |\sigma| \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

(рис. 24). При этом параметр σ пропорционален длине дуги меридиана. Эта поверхность вращения F_0 выпукла и имеет непрерывную кривизну везде, кроме точек P_0, Q_0 пересечения с осью вращения, где она имеет вершины (конические точки). Во всех остальных точках ее кривизна равна $1/A^2$ [1]). При $A = R_0$ поверхность F_0 будет сферой с радиусом R_0.

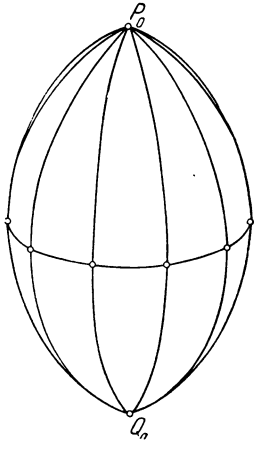

Рис. 24.

Мы утверждаем следующее:

Выпуклая, симметричная относительно своей экваториальной плоскости, обладающая непрерывной кривизной поверхность вращения F, кривизна K которой удовлетворяет неравенству

$$K \geqslant \frac{1}{A^2},$$

всегда содержится в обладающей постоянной кривизной $1/A^2$ поверхности вращения F_0, которая имеет общий с F экваториальный круг.

Для доказательств снова примем за ось вращения ось z, а за экваториальную плоскость — плоскость xy. Мы рассмотрим

---

[1]) Описание поверхностей вращения постоянной кривизны можно найти во всех учебниках по дифференциальной геометрии; см., например, стр. 139, 140 указанной в подстрочном примечании на стр. 130 «Теории поверхностей» Г. Шефферса [или § 97 названного на стр. 149 «Курса дифференциальной геометрии» П. К. Рашевского.— *Прим. ред.*].

дуги меридиональных кривых C_0 и C поверхностей F_0 и F в квадранте

$$x \geqslant 0, \qquad y = 0, \qquad z \geqslant 0$$

в параметрическом задании

$$C_0: \begin{cases} x = x_0(\tau), \quad y = 0, \quad z = z_0(\tau), \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0; \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x = x(\tau), \quad y = 0, \quad z = z(\tau), \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

здесь параметр τ обозначает угол между положительным направлением оси z и касательной к кривой (рис. 25).

Требуется доказать, что *дуга C лежит внутри C_0*.

Прежде всего убедимся, что всегда

$$x_0(\tau) \leqslant x(\tau).$$

Для этого заметим, что проекции (на основание $z = 0$) поясов поверхностей вращения F_0 и F_1, получающихся при вращении частей дуг C_0 и C, соответствующих значениям параметра от 0 до τ, имеют следующие площади:

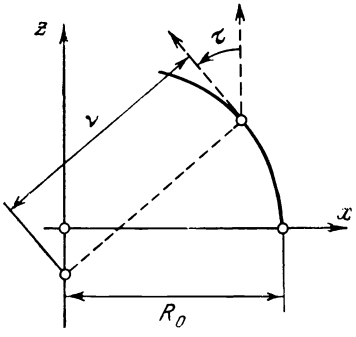

Рис. 25.

$$\pi\left\{R_0^2 - [x_0(\tau)]^2\right\} = \int \frac{Z}{K_0}\, d\bar{f},$$

$$\pi\left\{R_0^2 - [x(\tau)]^2\right\} = \int \frac{Z}{K}\, d\bar{f};$$

здесь использованы те же обозначения, что и в п. VII, а интегралы справа распространены на соответствующие пояса сферических изображений. Но из предположения

$$\frac{1}{K_0} = A^2 \geqslant \frac{1}{K}$$

следует

$$\pi\left\{R_0^2 - [x_0(\tau)]^2\right\} \geqslant \pi\left\{R_0^2 - [x(\tau)]^2\right\},$$

т. е. действительно

$$x_0(\tau) \leqslant x(\tau).$$

Отсюда можно заключить, что для соответствующих радиусов кривизны ρ_0 и ρ кривых C_0 и C всегда

$$\rho_0(\tau) \geqslant \rho(\tau).$$

В самом деле, один главный радиус кривизны поверхности вращения равен радиусу кривизны ρ ее меридиональной кривой, а другой — отрезку ν ее нормали до оси вращения z (см. рис. 25)[1]). Мы имеем, таким образом,

$$A^2 = \frac{1}{K_0} = \rho_0(\tau)\,\nu_0(\tau),$$

$$\frac{1}{K} = \rho(\tau)\,\nu(\tau).$$

При этом

$$\nu_0(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{\cos\tau}, \qquad \nu(\tau) = \frac{x(\tau)}{\cos\tau}.$$

Из предположения

$$\frac{1}{K_0} \geqslant \frac{1}{K}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_0(\tau)\,\nu_0(\tau) \geqslant \rho(\tau)\,\nu(\tau),$$

и из доказанного соотношения

$$x_0(\tau) \leqslant x(\tau), \quad \text{т. е.} \quad \nu_0(\tau) \leqslant \nu(\tau),$$

после деления получается желаемое неравенство:

$$\rho_0(\tau) \geqslant \rho(\tau).$$

Отсюда (точно так же, как на стр. 138 получалась теорема п. II § 24) из формулы (2), стр. 139 вытекает справедливость утверждения о том, что C лежит внутри C_0, а значит и что поверхность F лежит внутри F_0.

IX. Результаты. Расстояние D_0 между полюсами P, Q веретенообразной поверхности вращения F_0 постоянной кривизны $1/A^2$ и радиус R_0 ($R_0 < A$) ее экваториальной

---

[1]) Ср., например, снова учебник Г. Шефферса, стр. 138 [или В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. I, Гостехиздат, 1947, стр. 261; А. П. Норден, Теория поверхностей, Гостехиздат, 1956, стр. 92. — *Прим. ред.*].

окружности, согласно формуле (1), стр. 157, связаны соотношением

$$D_0 = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma. \tag{2}$$

Пусть теперь выпуклая поверхность вращения F со всюду непрерывной кривизной имеет с F_0 общий экватор и лежит внутри F_0. Тогда ее диаметр D строго меньше, чем диаметр D_0 поверхности F_0:

$$D < D_0,$$

так как, ввиду непрерывности кривизны, F не может содержать вершин P_0 и Q_0 поверхности F_0. Но, поскольку эти вершины можно сгладить, сдвигая их сколь угодно мало, D_0 есть точная верхняя граница значений D.

Внутри F содержится концентричный с F шар радиуса R ($R \leqslant R_0$). Заметим, что интеграл в (2) является монотонно убывающей функцией R_0, поэтому из

$$D < 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma$$

в силу $R_0 \geqslant R$ следует

$$D < 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma. \tag{3}$$

Согласно нашим результатам, эта формула верна всегда и для поверхностей, не являющихся поверхностями вращения. Мы имеем, таким образом, следующий результат:

Если F — обладающая непрерывной кривизной $K \geqslant \frac{1}{A^2}$ выпуклая поверхность, которая содержит шар радиуса $R < A$, то для ее диаметра D справедлива оценка[1]):

$$D < 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma.$$

---

[1]) Значения таких полных эллиптических интегралов приведены, например, в «Таблицах функций», Е. Янке и Ф. Эмде, Гостехиздат, 1948, стр. 172.

К этой верхней границе значений D можно подойти сколь угодно близко; для этого достаточно закруглять обе вершины на веретенообразной поверхности вращения с постоянной кривизной $1/A^2$ и радиусом экваториального круга R.

Мы уже показали (стр. 156), что обязательно должно быть $R \leqslant A$. Этот результат можно дополнить, показав, что $R = A$ только в том случае, когда F имеет форму шара.

Действительно, если F содержит шар радиуса A, то площадь каждой проекции F должна быть не меньше, чем πA^2, а так как кривизна F везде не меньше $1/A^2$, то та же площадь по соображениям стр. 156 должна быть также не больше πA^2. Остается единственная возможность: площадь каждой проекции F равна πA^2. Но тогда F не может содержать никаких точек, кроме точек шара радиуса A, так как иначе нашлась бы проекция F с большей площадью. Таким образом, F совпадает с этим шаром:

Если выпуклая поверхность F, кривизна которой всюду больше или равна $1 : A^2$, содержит шар радиуса A, то F совпадает с этим шаром.

X. Теорема Бонне. Мы уже отмечали, что функция

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R^2 \sin^2 \sigma}\, d\sigma$$

монотонно убывает при изменении R в интервале $0 \leqslant R \leqslant A$. Таким образом, мы лишь увеличим это выражение, положив $R = 0$. При этом из (3) следует более простое неравенство

$$D < \pi A. \tag{4}$$

Если кривизна во всех точках выпуклой поверхности не меньше $1/A^2$, то расстояние между любыми двумя точками поверхности всегда меньше, чем πA.

Это неравенство, которое мы здесь вывели как частный случай более общего неравенства, было получено О. Бонне[1]) еще в 1855 г. При этом можно еще заметить, что расстояние между двумя точками поверхности может быть сколь угодно

---

[1]) См. O. Bonnet, Comptes Rendus, Paris 40, 1855, стр. 1311—1313. Ср. G. Darboux, Théorie générale des Surfaces, т. III, стр. 103 [и В. Бляшке [30], § 100, стр. 237—239. — *Прим. ред.*].

близко к верхней границе πA, так как мы можем построить достаточно тонкую (R_0 мало́) поверхность вращения с постоянной кривизной $1 : A^2$, вершины которой можно представить себе закругленными, а с уменьшением $R_0 > 0$ расстояние между вершинами

$$D_0 = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - R_0^2 \sin^2 \sigma}\, d\sigma$$

стремится к значению πA [1]).

Мы хотим здесь вкратце изложить остроумный метод, с помощью которого Бонне пришел к своему результату, хотя при этом потребуется обратиться к вариационному исчислению, которое мы ранее не предполагали известным.

Пусть G — геодезическая линия на выпуклой поверхности F, P — точка этой линии, s — длина дуги на G, отсчитываемая от P. Тогда условие Якоби означает, что G только тогда может быть кратчайшим расстоянием между двумя точками P и Q на F, когда Q не лежит за «сопряженной» с P точкой P^*, т. е. за точкой, в которой G впервые касается огибающей геодезических линий, выходящих из P. Эта *сопряженная точка*, точнее, соответствующее ей значение s, определяется, если найти то решение $p(s)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 p}{ds^2} = -K(s)\, p,$$

которое обращается в нуль при $s = 0$. (Эти условия определяют $p(s)$ с точностью до постоянного множителя.) Следующий корень функции $p(s)$ соответствует тогда сопряженной точке P^*. При этом $K(s)$ обозначает кривизну F в той точке линии G, которая отвечает значению параметра s. Из $K \geqslant 1 : A^2$ можно по известной теореме Штурма (I. C. F. Sturm) заключить, что корни дифференциального уравнения Якоби лежат ближе друг к другу, чем в случае уравнения

$$\frac{d^2 p}{ds^2} = -\frac{p}{A^2},$$

---

[1]) Это замечание принадлежит Ф. Хаусдорфу.

и что таким образом геодезическое расстояние s от P до P^* не превосходит πA [1]).

Поэтому, *если мы знаем, что на F существует кратчайший путь между любыми двумя точками и что он является геодезической линией*, то мы заключаем, что геодезическое расстояние (по поверхности) между любыми двумя точками на F всегда не превосходит πA, а значит, пространственное расстояние меньше πA.

Отмеченный пробел в доказательстве О. Бонне (отсутствие доказательства существования) был впервые восполнен теоремой существования, которую Д. Гильберт доказал в вариационном исчислении.

§ 26. Другие ограничения кривизны

I. Постановка задачи и сведение к поверхностям вращения. Поставленной и решенной в предыдущем параграфе задаче может быть сопоставлена другая, ей аналогичная и в некотором смысле двойственная ей задача [2]), которая решается еще более простыми средствами. Эта задача состоит в следующем:

Пусть о выпуклой поверхности F с непрерывно меняющейся кривизной известно, что:

(А) *ее гауссова кривизна во всех точках F удовлетворяет условию*

$$K \leqslant \frac{1}{B^2},$$

(Б) *F содержится в шаре радиуса S.*

Требуется найти точную нижнюю границу расстояний между параллельными касательными плоскостями поверхности F.

---

[1]) К этой теореме Штурма мы легко придем, если понимать дифференциальное уравнение механически, как уравнения колебания. Тогда теорема утверждает тот тривиальный факт, что колебания при увеличивающейся силе убыстряются. [В книге [30] В. Бляшке рассказывает, что высокая оценка Штурмом этой и подобных ей теорем, в частности, выражалась в том, что на своих лекциях И. К. Ф. Штурм говорил «о теоремах, имя которых я имею честь носить». — *Прим. ред.*]

[2]) См. упомянутый на стр. 143 доклад автора.

Минимум расстояния между параллельными касательными плоскостями выпуклой поверхности F мы будем называть «шириной» поверхности *). Тогда перед нами стоит задача определить нижнюю границу ширины для всех поверхностей F, удовлетворяющих условиям (А) и (Б).

Изложим план решения задачи. Вместо симметризации Шварца употребим в качестве спасительного средства другой процесс, который превращает нашу поверхность в выпуклую поверхность вращения, снова удовлетворяющую условиям (А) и (Б). Этот процесс может быть описан наипростейшим образом с помощью опорной функции поверхности F (см. стр. 70—71). Мы считаем начало координат M расположенным внутри F. Отобразим F параллельными (внешними) нормалями на единичный шар с центром M. В точках этого сферического изображения зададим функцию, равную опорной функции H, которая выражает положительное расстояние от M до соответствующей касательной плоскости поверхности F. Представим H как функцию географических координат (долготы φ и широты ψ) на сфере. При этом полярную ось a системы координат мы выберем так, чтобы она была перпендикулярна паре (или если их имеется несколько, то какой-нибудь одной паре) касательных плоскостей к F, расстояние между которыми равно ширине F. После этого построим функцию **)

$$H(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\varphi, \psi)\, d\varphi.$$

Это — также опорная функция некоторой выпуклой поверхности $\tilde{F}$ с осью вращения a. Используя выражения, введенные П. Функом в теории сферических функций [1]), мы назовем построение, переводящее F в $\tilde{F}$ (оно двойственно построению Шварца) *окатыванием* (versteifung) поверхности F. Если мы покажем, что найденная таким окатыванием

*) Заметим, что *диаметр* поверхности можно определить как максимум расстояния между параллельными опорными плоскостями (ср. выше, стр. 144).

**) Функция $H(\psi)$ получается осреднением функции $H(\varphi, \psi)$ вдоль каждого круга широты.

[1]) См. P. Funk, Math. Ann. 77, 1916, стр. 137.

поверхность $\tilde{F}$ действительно удовлетворяет условиям (А) и (Б), то нам в дальнейшем будет достаточно обращать внимание только на поверхности вращения. Аналитически это означает, что в наших минимальных задачах нам придется уже иметь дело с неизвестными функциями одной, а не двух переменных.

II. Свойства операции окатывания. Нужно доказать для поверхности $\tilde{F}$, получаемой при окатывании, четыре свойства, соответствующих приведенным в § 25, п. II, стр. 144:

1°. *$\tilde{F}$ также выпукла и имеет непрерывно меняющуюся кривизну.*

2°. *Кривизна на $\tilde{F}$ также удовлетворяет условию $K \leqslant 1 : B^2$.*

3°. *Поверхность $\tilde{F}$ также лежит в шаре радиуса S.*

4°. *Ширина $\tilde{F}$ равна ширине исходной поверхности F.*

Для доказательства п. 1° достаточно установить, что радиус кривизны меридиана $\tilde{F}$ положителен. По формуле (1), стр. 139, находим

$$\tilde{H} + \frac{d^2\tilde{H}}{d\psi^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(H + \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2}\right) d\varphi.$$

Но выражение в скобках есть радиус кривизны кривой, которая при закрепленном φ задается расстоянием $H(\varphi, \psi)$ до опорной прямой, а эта кривая выпукла, так как она является границей проекции F. Таким образом, имеем

$$H + \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2} > 0,$$

отсюда, действительно, следует

$$\tilde{H} + \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \psi^2} > 0,$$

ч. т. д.

Второй пункт, как наиболее трудный, мы опять оставим на конец. Третий пункт легко доказывается следующим рассуждением. Во-первых, если из двух выпуклых поверхностей F и G одна лежит в другой, $F < G$, то такое же включение имеет место и для поверхностей, получающихся из них при окатывании вокруг одной и той же оси, $\tilde{F} < \tilde{G}$.

Во-вторых, при окатывании шара G получается шар $\tilde{G}$ той же величины.

Для п. 4° мы прежде всего докажем следующее: *Если поверхность $\tilde{F}$ получается при окатывании поверхности F, то соответствующие ширины $\tilde{\Delta}$ и Δ всегда связаны соотношением $\tilde{\Delta} \geqslant \Delta$.* Действительно, если

$$\tilde{\Delta} = \tilde{H}(\psi_0) + \tilde{H}(\psi_0 + \pi),$$

то

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H(\varphi, \psi) + H(\varphi, \psi + \pi))\, d\varphi$$

и, поскольку стоящее под знаком интеграла выражение не меньше Δ, то отсюда уже следует желаемый результат: $\tilde{\Delta} \geqslant \Delta$. С другой стороны, в нашем специальном случае ось вращения a выбиралась перпендикулярной тем двум касательным плоскостям поверхности F, расстояние между которыми равно Δ. Очевидно, они являются и касательными плоскостями поверхности $\tilde{F}$. Поэтому в данном случае $\tilde{\Delta} \leqslant \Delta$ и остается единственная возможность [1])

$$\tilde{\Delta} = \Delta.$$

III. Дифференциальная геометрия опорной функции. Для того чтобы осуществить последний пункт нашей программы, а именно п. 2°, можно поступить по аналогии с исследованиями предыдущего параграфа (§ 25). А именно: мы хотим представить окатывание как результат бесконечной последовательности таких симметризаций, которые мы ввели в § 22, п. VII, стр. 125.

---

[1]) Заметим, между прочим, что отсюда легко вывести следующее утверждение, которое можно рассматривать как двойственное теореме Бибербаха (стр. 147): *Среди всех выпуклых поверхностей шириной Δ наименьшее значение интеграла средней кривизны имеет та, у которой постоянно расстояние между параллельными касательными плоскостями.* Такие поверхности принадлежат к «поверхностям постоянной ширины» Минковского, к которым мы еще вернемся в добавлении (стр. 180). Они характеризуются тем, что у них совпадают диаметр и ширина: $D = \Delta$.

Чтобы получить возможно более наглядные формулы, мы выразим опорную функцию $H(\varphi, \psi)$ географических координат φ, ψ через прямоугольные координаты α, β, γ, связанные с географическими координатами соотношениями:

$$\alpha = \cos\varphi\cos\psi, \quad \beta = \sin\varphi\cos\psi, \quad \gamma = \sin\psi.$$

При этом, поскольку точка (α, β, γ) принадлежит единичной сфере,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \tag{1}$$

поэтому мы вправе, распространяя новую опорную функцию $H(\alpha, \beta, \gamma)$ на все значения α, β, γ, потребовать соблюдения свойства однородности:

$$H(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda H(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{при любом} \quad \lambda > 0. \tag{2}$$

Отсюда известным образом с помощью дифференцирования по λ получается тождество *), связывающее частные производные функции H:

$$\alpha H_\alpha + \beta H_\beta + \gamma H_\gamma = H, \tag{3}$$

а после дифференцирований по α, β, γ—тождества, связывающие вторые производные от H:

$$\begin{cases} \alpha H_{\alpha\alpha} + \beta H_{\alpha\beta} + \gamma H_{\alpha\gamma} = 0, \\ \alpha H_{\beta\alpha} + \beta H_{\beta\beta} + \gamma H_{\beta\gamma} = 0, \\ \alpha H_{\gamma\alpha} + \beta H_{\gamma\beta} + \gamma H_{\gamma\gamma} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где, например,

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = H_\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} = H_{\alpha\beta}.$$

Уравнение касательной плоскости с направляющими косинусами внешней нормали α, β, γ для выпуклой поверхности F, определяемой опорной функцией H, имеет в «нормальной форме» (Л. О. Гессе) вид

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = H. \tag{5}$$

Для точки касания (x, y, z) этой плоскости с поверхностью (которая есть огибающая своих касательных плоскостей) находим

$$(x - H_\alpha)\,d\alpha + (y - H_\beta)\,d\beta + (z - H_\gamma)\,d\gamma = 0;$$

*) Так называемое тождество Эйлера.

оно получается из (5) дифференцированием и должно быть верным при всех $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, удовлетворяющих условию

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0 \tag{1'}$$

(последнее получается дифференцированием (1)). Мы имеем, таким образом,

$$x - H_\alpha = \mu\alpha; \quad y - H_\beta = \mu\beta; \quad z - H_\gamma = \mu\gamma,$$

причем из (3) и (5) следует, что $\mu = 0$.

Таким образом, для координат точки касания мы нашли простые выражения

$$x = H_\alpha, \quad y = H_\beta, \quad z = H_\gamma. \tag{6}$$

Пусть теперь R—главный радиус кривизны поверхности F, т. е. координаты (ξ, η, ζ) соответствующего центра кривизны суть

$$\xi = H_\alpha - R\alpha; \quad \eta = H_\beta - R\beta; \quad \zeta = H_\gamma - R\gamma.$$

Сдвинемся вдоль соответствующей линии кривизны поверхности F. Тогда по свойствам линий кривизны *) направление $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ совпадает с направлением нормали α, β, γ. Это дает формулы:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\alpha}\, d\alpha + H_{\alpha\beta}\, d\beta + H_{\alpha\gamma}\, d\gamma &= R\, d\alpha + \lambda\alpha, \\ H_{\beta\alpha}\, d\alpha + H_{\beta\beta}\, d\beta + H_{\beta\gamma}\, d\gamma &= R\, d\beta + \lambda\beta, \\ H_{\gamma\alpha}\, d\alpha + H_{\gamma\beta}\, d\beta + H_{\gamma\gamma}\, d\gamma &= R\, d\gamma + \lambda\gamma; \end{aligned}$$

умножая эти равенства на α, β, γ и складывая их, получим, учитывая (1), (4), и (1'):

$$\lambda = 0.$$

Поэтому для R получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} H_{\alpha\alpha} - R & H_{\alpha\beta} & H_{\alpha\gamma} \\ H_{\beta\alpha} & H_{\beta\beta} - R & H_{\beta\gamma} \\ H_{\gamma\alpha} & H_{\gamma\beta} & H_{\gamma\gamma} - R \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

---

*) В силу так называемых формул Родрига $d\boldsymbol{r} = -\dfrac{1}{R}\, d\boldsymbol{n}$ (см. любой учебник дифференциальной геометрии).

Расписывая этот определитель по степеням R и замечая, что определитель из вторых производных обращается в нуль вследствие (4), получим после деления на R квадратное уравнение для R

$$R^2-(R_1+R_2)R+R_1R_2=0.$$

Здесь обозначено

$$R_1+R_2=H_{\alpha\alpha}+H_{\beta\beta}+H_{\gamma\gamma} \tag{8}$$

и, если обозначать алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} H_{\alpha\alpha} & H_{\alpha\beta} & H_{\alpha\gamma} \\ H_{\beta\alpha} & H_{\beta\beta} & H_{\beta\gamma} \\ H_{\gamma\alpha} & H_{\gamma\beta} & H_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \text{ соответственно через } \begin{pmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\gamma} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} & K_{\beta\gamma} \\ K_{\gamma\alpha} & K_{\gamma\beta} & K_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

то

$$R_1R_2=K_{\alpha\alpha}+K_{\beta\beta}+K_{\gamma\gamma}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (4), имеем

$$\frac{K_{\alpha\alpha}}{\alpha^2}=\frac{K_{\beta\beta}}{\beta^2}=\frac{K_{\gamma\gamma}}{\gamma^2}=\frac{K_{\beta\gamma}}{\beta\gamma}=\frac{K_{\gamma\alpha}}{\gamma\alpha}=\frac{K_{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=\frac{1}{K}, \tag{10}$$

и, в силу (1) и (9),

$$R_1R_2=\frac{1}{K}.$$

Из этих равенств следует также, что при любых a, b, c

$$-\begin{vmatrix} H_{\alpha\alpha} & H_{\alpha\beta} & H_{\alpha\gamma} & a \\ H_{\beta\alpha} & H_{\beta\beta} & H_{\beta\gamma} & b \\ H_{\gamma\alpha} & H_{\gamma\beta} & H_{\gamma\gamma} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}=(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2R_1R_2. \tag{11}$$

IV. Поведение кривизны при окатывании. Если (что делается без труда) перенести понятие выпуклой функции на случай трех переменных, то легко видеть, что положительное значение корня

$$\sqrt{rt-s^2}$$

является выпуклой (обращенной выпуклостью вверх) функцией, заданной в области, где $rt-s^2>0$. (Этот результат,

немного иначе выраженный, уже отмечался в § 25, п. V, стр. 150.) Поэтому из формулы (10) следует, что функция

$$U = \sqrt{R_1 R_2} = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

при закрепленных α, β, γ является выпуклым функционалом от опорных функций H, т. е. что

$$U((1-\theta)H^{(0)} + \theta H^{(1)}) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\theta)U(H^{(0)}) + \theta U(H^{(1)}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Величина U представляет собой *пример выпуклого дифференциального оператора*. Положим, в частности,

$$H^{(0)} = H(+\alpha, \beta, \gamma), \quad H^{(1)} = H(-\alpha, \beta, \gamma), \quad \theta = \frac{1}{2};$$

тогда мы получим уже рассмотренную на стр. 125 симметризацию относительно плоскости $x = 0$, и найдем, таким образом, что при ней минимум выражения $U = \sqrt{R_1 R_2}$ не уменьшается, а поэтому условие $R_1 R_2 \geqslant B^2$ остается выполненным. Если затем мы симметризуем поверхность относительно плоскости $x\cos\omega - y\sin\omega = 0$ (ω несоизмеримо с π), а затем опять относительно $x = 0$ и т. д. попеременно, то придем после предельного перехода к окатыванию (ср. § 21). Для полученной таким окатыванием поверхности поэтому (ср. § 25, п. VI, стр. 152) сохраняется неравенство $R_1 R_2 \geqslant B^2$.

Отсюда получается желаемый результат:

Минимум $R_1 R_2$ на полученной окатыванием поверхности $\tilde{F}$ не меньше, чем соответствующий минимум на первоначальной поверхности F, или максимум кривизны на $\tilde{F}$ не больше, чем на F.

Условие

$$K \leqslant \frac{1}{B^2},$$

таким образом, сохраняется при осевой симметризации окатыванием.

Заметим, наконец, что мы можем еще без нарушения условий (А) и (Б) стр. 163, считать поверхность $\tilde{F}$, имеющей ось вращения, перпендикулярную плоскости симметрии, а зна-

чит, центрально-симметричной. Действительно, мы можем поверхность $\tilde{F}$, полученную окатыванием, еще линейно скомбинировать с поверхностью, симметричной ей относительно экваториальной плоскости, задавая новую опорную функцию равенством

$$\frac{1}{2}\tilde{H}(+\psi)+\frac{1}{2}\tilde{H}(-\psi).$$

V. Сырообразная поверхность вращения постоянной кривизны. Если кривая

$$x=\sqrt{R_0^2-B^2\sin^2\psi},\quad y=0,$$

$$z=\int_0^\psi\sqrt{R_0^2-B^2\sin^2\psi}\,d\psi-(R_0^2-B^2)\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{R_0^2-B^2\sin^2\psi}},$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

вращается вокруг оси z, то она описывает поверхность постоянной кривизны $K=1/B^2$ [1]), которая после добавления двух кругов радиуса $\sqrt{R_0^2-B^2}$ дополняется до замкнутой выпуклой поверхности, ограничивающей выпуклое тело, которое по виду напоминает жернов или плоскую головку сыра (рис. 26); параметр ψ здесь снова обозначает угол между нормалью к поверхности и экваториальной плоскостью. Поэтому мы будем называть эту поверхность вращения постоянной кривизны «сырообразной» для отличия от ранее рассмотренной «веретенообразной». Расстояние между двумя

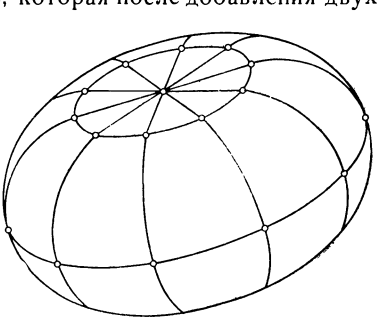

Рис. 26.

[1]) См., например, указанную в сноске на стр 130 книгу Шефферса «Теория поверхностей», стр. 139 и далее и таблицы Е. Янке и Ф. Эмде стр. 150 и далее [см. также «Курс дифференциальной геометрии» П. К. Рашевского, § 97 — *Прим. ред.*].

круглыми основаниями, которое равно «ширине сыра», имеет величину

$$\Delta_0 = \Delta_0(B,\ R_0) =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R_0^2 - B^2\sin^2\psi}\, d\psi - 2\left(R_0^2 - B^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{R_0^2 - B^2\sin^2\psi}}.$$

Без вычислений можно легко видеть, что функция $\Delta_0(B,\ R_0)$ является монотонно убывающей по R_0:

$$\Delta_0(B,\ R_0) > \Delta_0(B,\ \bar{R}_0) \quad \text{при} \quad 0 < R_0 < \bar{R}_0.$$

Действительно, для соответствующих меридиональных кривых имеем

$$x(\psi) = \sqrt{R_0^2 - B^2\sin^2\psi} < \bar{x}(\psi) = \sqrt{\bar{R}_0^2 - B^2\sin^2\psi},$$

и так как для соответствующих радиусов кривизны меридиональных кривых имеет место равенство

$$B^2 = R_1R_2 = \frac{x(\psi)}{\cos\psi}\,\rho(\psi) = \frac{\bar{x}(\psi)}{\cos\psi}\,\bar{\rho}(\psi),$$

то отсюда следует

$$\rho(\psi) > \bar{\rho}(\psi),$$

и потому для

$$\Delta_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\psi)\cos\psi\, d\psi, \qquad \bar{\Delta}_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{\rho}(\psi)\cos\psi\, d\psi$$

будет

$$\bar{\Delta}_0 > \Delta_0,$$

что мы и хотели показать (ср. стр. 159).

Покажем теперь совершенно так же, как и в § 25, п. VIII (стр. 157 и далее), что справедливо следующее утверждение: *Если кривизна выпуклой центрально-симметричной поверхности вращения с непрерывно меняющейся кривизной не превосходит $1/B^2$, то эта поверхность всегда содержит сырообразную поверхность вращения с постоянной кривизной $1/B^2$ и той же экваториальной плоскостью.*

Отсюда получается, что между шириной Δ и радиусом R_0 экваториального круга имеет место соотношение

$$\Delta > \Delta_0(B,\ R_0)$$

и ввиду монотонности Δ_0 тем более

$$\Delta > \Delta_0(B,\ S),$$

где $S \geqslant R_0$ обозначает радиус описанного шара.

Но по ранее сказанному это соотношение справедливо тогда не только для поверхностей вращения:

Ширина Δ и радиус S описанного шара для выпуклых поверхностей с непрерывно меняющейся положительной кривизной $K \leqslant 1/B^2$ связаны неравенством

$$\Delta > 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{S^2 - B^2\sin^2\psi}\, d\psi - 2\,(S^2 - B^2)\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{S^2 - B^2\sin^2\psi}}.$$

При этом можно сколь угодно близко подойти к равенству, если брать поверхности, приближающиеся к сырообразным поверхностям вращения постоянной кривизны $1/B^2$.

Необходимость условия $S \geqslant B$ (равенство выполняется только для шара) доказывается точно так же, как полученное ранее соответствующее неравенство $R \leqslant A$ (стр. 157 и 161).

VI. Поведение средней кривизны при окатывании. Согласно п. IV, произведение R_1R_2 главных радиусов кривизны при линейной комбинации опорных функций ведет себя как квадрат положительной выпуклой функции U, т. е. само выпукло [1]):

$$R_1R_2((1-\theta)H^{(0)} + \theta H^{(1)}) \geqslant (1-\theta)R_1R_2(H^{(0)}) + \theta R_1R_2(H^{(1)}).$$

С другой стороны, как сразу следует из (8), стр. 169, сумма радиусов кривизны линейно комбинируется:

$$(R_1 + R_2)((1-\theta)H^{(0)} + \theta H^{(1)}) = \\ = (1-\theta)(R_1 + R_2)(H^{(0)}) + \theta(R_1 + R_2)(H^{(1)}).$$

---

[1]) В последующих формулах R_1R_2 и $R_1 + R_2$ означают не числа, а дифференциальные операторы!

Тем самым для *«средней кривизны»*

$$\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=N$$

имеют место оценки

$$N\{(1-\theta)H^{(0)}+\theta H^{(1)}\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(1-\theta)(R_1+R_2)(H^0)+\theta(R_1+R_2)(H^{(1)})}{(1-\theta)R_1R_2(H^0)+\theta R_1R_2(H^{(1)})},$$

$$\frac{1}{N}\{(1-\theta)H^{(0)}+\theta H^{(1)}\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(1-\theta)R_1R_2(H^{(0)})+\theta R_1R_2(H^{(1)})}{(1-\theta)(R_1+R_2)(H^{(0)})+\theta(R_1+R_2)(H^{(1)})}.$$

Так как функции от θ, стоящие справа, монотонны, то мы имеем:

$$N\{(1-\theta)H^{(0)}+\theta H^{(1)}\}$$

лежит между

$$N(H^{(0)})\quad \text{и}\quad N(H^{(1)}).$$

В частности, это имеет место при симметризации, введенной на стр. 125. После повторений и предельного перехода получается соответствующий результат для окатывания:

Если средняя кривизна на выпуклой поверхности F с непрерывной кривизной удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{P}\leqslant\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\leqslant\frac{1}{Q},$$

то такое же неравенство имеет место на каждой поверхности вращения $\tilde{F}$, которая получается из F окатыванием.

Это можно применить для решения задач, которые получаются из задач стр. 143 и 163, если вместо ограничения гауссовой кривизны ограничивать среднюю кривизну.

ВЗГЛЯД НА ДАЛЬНЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ О ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

Занимаясь изопериметрическими свойствами круга и шара, мы, естественно, приходим к значительно более общим геометрическим образам: произвольным «выпуклым фигурам» и «выпуклым телам». С некоторым правом можно отважиться на следующее утверждение. Исследование этих геометрических понятий претендует для сегодняшних геометрических исследований на такую же важную роль, какую когда-то, во времена создания проективной геометрии, играли другие обобщения круга и шара — конические сечения и поверхности второго порядка. Естественно, что чем больше характеризующих геометрическую фигуру свойств заранее известно, тем больше можем мы о ней сказать. Вот почему, в частности, замечательно, что из слабого условия выпуклости вытекает такое изобилие красивых и глубоко лежащих следствий.

Сегодня *), пожалуй, было бы уже своевременно дать общее изложение полученных до сих пор результатов теории выпуклых тел. Но это лежит вне плана нашей небольшой книги. Все же не будет лишним, если мы в заключение поместим короткий рассказ о других относящихся сюда исследованиях. При этом много раз воспользуемся сообщениями Г. Герглотца.

Выпуклые кривые и поверхности, если исключить их прямолинейные участки, обладают свойством пересекать любую прямую не более чем в двух точках. Можно поэтому сказать, что они являются, вообще говоря, неаналитическими образами «второго порядка». Конические сечения и квадрики противостоят им как аналитические образы второго порядка. Два датских геометра Х. С. Юэль и И. Ельмслев систематически исследовали такие неаналитические образы и более высоких порядков. К этому новому разделу геометрии,

*) Книга написана в 1915 г. — *Прим. перев.*

лежащему на границе между топологией и проективной геометрией, с одной стороны, и между анализом и синтетической геометрией, с другой, — относится как его первая и основная часть геометрия выпуклых фигур и тел. При этом внимание обоих датских геометров было сосредоточено в первую очередь на *проективных* свойствах неаналитических тел [1]), в то время как в нашей книге на первом плане будут стоять те свойства, которые можно было бы назвать элементарно геометрическими в смысле «Эрлангенской программы» Ф. Клейна [2]).

I. Площадь проекции выпуклого тела. В дальнейшем мы будем для простоты говорить о регулярной и аналитической замкнутой выпуклой поверхности с везде отличной от нуля кривизной и в этом смысле употреблять термин «*овалоид*».

Мы хотим установить связь между площадями и между периметрами проекций овалоида на различные плоскости. (Речь идет об ортогональных проекциях.)

Сопоставим точки нашего овалоида E взаимно однозначно *по соответствию внешних нормалей* с точками единичной сферы и обозначим соответствующие элементы площади поверхности на овалоиде и на сфере через do и $d\omega$. Тогда гауссова кривизна K овалоида E определяется соотношением

$$do = \frac{d\omega}{K}.$$

Пусть теперь ρ — направление параллельных лучей проектирования; буква ρ пусть обозначает также точку единичной сферы, радиус-вектор которой имеет то же направление. Тогда площадь F_ρ проекции овалоида E в направлении ρ задается выражением

$$F_\rho = \frac{1}{2}\int |\cos \widehat{\rho\sigma}|\, do_\sigma = \frac{1}{2}\int \frac{|\cos \widehat{\rho\sigma}|}{K_\sigma}\, d\omega_\sigma. \qquad \text{(I)}$$

---

[1]) По поводу исследований в направлении Юэля и Ельмслева см. J. Hjelmslev, Естественная геометрия, Abh. Math. Sem. Hamburg **2**, 1923 и L. Locher-Ernst, Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, Basel und Stuttgart, 1951.

[2]) F. Klein, Erlangen, 1872; вновь опубликовано в Math. Ann. **43**, 1893 [стр. 63—109 и в т. I сочинений (Gesammelte mathematische Abhandlungen) Ф. Клейна, стр. 460—497. Русский перевод см. в сборнике «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956, стр. 399—434. — *Прим. ред.*].

Здесь последнее интегрирование производится по всей единичной сфере.

Мы будем рассматривать F_ρ как «опорную функцию» (стр. 71) в следующем смысле. Для некоторой закрепленной точки строим две перпендикулярные направлению ρ плоскости, которые отстоят каждая на расстоянии F_ρ от этой фиксированной точки. Мы утверждаем, что все эти плоскости ограничат новый овалоид. Другими словами:

Если провести перпендикулярно образующей каждого описанного около E цилиндра две параллельные плоскости, расстояния которых от некоторой фиксированной точки равны площади поперечного сечения соответствующего цилиндра, то все эти плоскости ограничат снова овалоид, имеющий центром симметрии фиксированную начальную точку.

Это доказывается на основе интегрального выражения (I) для функции F_ρ. Во-первых, $K_\sigma > 0$. Во-вторых, при закрепленном σ функция $|\cos\widehat{\rho\sigma}|$ есть опорная функция некоторого выпуклого тела — отрезка направления σ и длины 2. Но при линейных комбинациях с положительными коэффициентами из опорных функций выпуклых тел получается снова опорная функция выпуклого тела (см. стр. 115).

В этом можно убедиться также и следующим образом. Если ввести прямоугольные координаты α, β, γ точек ρ и σ единичной сферы, то формулу (I) можно записать так:

$$F(\alpha_\rho,\ \beta_\rho,\ \gamma_\rho) = \frac{1}{2}\int \frac{|\alpha_\rho\alpha_\sigma + \beta_\rho\beta_\sigma + \gamma_\rho\gamma_\beta|}{K_\sigma}\, d\omega_\sigma.$$

Здесь функция F есть положительная однородная функция первой степени от координат α_ρ, β_ρ, γ_ρ уже во всем пространстве, как это всегда полагал Минковский, и мы сразу получаем справедливость соблюдения при этом признака опорной функции выпуклого тела [1]):

$$F(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2,\ \gamma_1+\gamma_2) \leqslant F(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) + F(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2).$$

---

[1]) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 231 и далее. Распространение опорной функции на все пространство уже было использовано на стр. 167 настоящей книги.

Из доказанного результата, между прочим, сразу следует правильность одного предположения, высказанного К. Каратеодори:

Если F_1, F_2, F_3 — площади проекций выпуклого тела по трем взаимно перпендикулярным направлениям, а F — площадь любой другой его проекции, то

$$F^2 \leqslant F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

II. Периметры проекций выпуклого тела. Если мы введем в формулу (I) в явном виде главные радиусы кривизны R_1 и R_2 в точке σ

$$2F_\rho = \int |\cos \widehat{\rho\sigma}| (R_1 R_2)_\sigma \, d\omega_\sigma$$

и применим эту формулу вместо нашего овалоида E к параллельной ему выпуклой поверхности, идущей снаружи на расстоянии ε, то получим

$$2\{F_\rho + L_\rho \varepsilon + \pi\varepsilon^2\} = \int |\cos \widehat{\rho\sigma}| (R_1 + \varepsilon)_\sigma (R_2 + \varepsilon)_\sigma \, d\omega_\sigma,$$

где L_ρ — периметр проекции. Приравнивая члены первой степени относительно ε, получаем замечательный результат:

$$2L_\rho = \int |\cos \widehat{\rho\sigma}| (R_1 + R_2)_\sigma \, d\omega_\sigma. \qquad \text{(II)}$$

Так как $R_1 + R_2 > 0$, то отсюда вытекает то же следствие, что и из равенства (I):

Если перпендикулярно образующим каждого описанного около овалоида E цилиндра провести плоскости, расстояние которых от фиксированной точки равно периметру поперечного сечения цилиндра, то эти плоскости ограничивают центрально-симметричный овалоид.

Заметим сразу, что рассуждение, которое ведет от (I) к (II), может быть также применено и к проекциям выпуклого тела в n-мерном ($n \geqslant 2$) пространстве. Под знаком интеграла при этом появятся основные (элементарные) симметрические функции *) от n главных радиусов кривизны.

---

*) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1965, § 52.

Наконец, перепишем формулу (II) так, чтобы в ней явно фигурировала опорная функция H тела E. Тогда получим (см. формулу (L), стр. 129)

$$L_\rho = \int\limits_{K_\rho} H_\sigma \, d\sigma, \qquad (*)$$

где $d\sigma$ есть элемент длины дуги того большого круга K_ρ на единичной сфере, плоскость которого перпендикулярна направлению ρ. Для $R_1 + R_2$ имеет место уже использованная один раз формула Вейнгартена (см. стр. 133)

$$R_1 + R_2 = 2H + \Delta_2 H.$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$2 \int\limits_{K_\rho} H_\sigma \, d\sigma = \int |\cos \widehat{\rho\sigma}| (2H + \Delta_2 H)_\sigma \, d\omega_\sigma, \qquad (**)$$

найденному на другом пути Г. Герглотцем [1]). Оно будет нами использовано ниже.

Функцию L_ρ на единичной сфере, которая получается из функции H_σ на этой сфере интегрированием вдоль больших кругов K_ρ, мы, вслед за П. Функом [2]), назовем «*круговым интегралом*» от H_σ. Используя это выражение, можно полученный ранее результат выразить так:

---

[1]) По формуле Грина (см. т. III названной выше книги Дарбу, стр. 200 [или В. Бляшке [30], § 82, стр. 192. — *Прим. ред.*])

$$\int\limits_{K_\rho} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\sigma = \int\limits_{H_\rho} (\varphi \, \Delta_2 \psi - \psi \, \Delta_2 \varphi) \, d\omega,$$

где H_ρ — полусфера с центром ρ, а n — внешняя нормаль круга K_ρ. Если положить $\varphi = H$ и $\psi = \alpha\alpha_\rho + \beta\beta_\rho + \gamma\gamma_\rho$, то $[\psi]_{K_\rho} = 0$, $\left[\frac{d\psi}{dn}\right]_{K_\rho} = -1$, $\Delta_2 \psi = -2\psi$; после подстановки в формулу Грина это сразу даст равенство (**).

[2]) P. Funk, Поверхности, все геодезические линии которых замкнуты, Math. Ann. **74**, 1913, стр. 284 (обработка гёттингенской диссертации 1911 г.).

Круговой интеграл от опорной функции овалоида всегда снова является опорной функцией некоторого овалоида.

III. Тела постоянной ширины Минковского [1]). Следуя Г. Минковскому, мы будем называть овалоид *телом «постоянной ширины»*, если расстояние D между двумя его параллельными касательными плоскостями постоянно, т. е. не зависит от направления этих плоскостей (ср. сноску на стр. 166) *). Обозначим через $+\sigma$ и $-\sigma$ две диаметрально противоположные точки единичного шара; тогда опорная функция овалоида постоянной ширины характеризуется равенством

$$H_{+\sigma}+H_{-\sigma}=D.$$

Отсюда, применяя формулу (*) для периметра поперечного сечения описанного цилиндра, сразу видим, что из постоянства ширины следует постоянство периметра

$$L_\rho=\int\limits_{K_\rho} H_\sigma\,d\sigma=\int\limits_0^\pi H_\sigma\,d\sigma+\int\limits_0^\pi (D-H_\sigma)\,d\sigma=\pi D.$$

Г. Минковский заметил, что обратное также верно. Это может быть выражено в виде следующей теоремы: *Класс выпуклых тел постоянной ширины тождественен с классом выпуклых тел постоянного охвата (постоянного периметра ортогональной проекции).*

Чтобы убедиться в этом, нам остается доказать, что из

$$\int\limits_{K_\rho} H_\sigma\,d\sigma=\pi D\quad(=\mathrm{const})$$

следует

$$H_{+\sigma}+H_{-\sigma}=D.$$

---

[1]) H. Minkowski, О телах постоянной ширины, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 277—279.

*) Простейший пример такого тела, отличного от сферы, мы получим, вращая треугольник Релло — плоскую выпуклую фигуру, ограниченную тремя дугами окружностей одного радиуса D, соединяющими вершины равностороннего треугольника со стороной D, — вокруг одной из его осей симметрии.

Мы разложим функцию H_σ на единичной сфере на «четную» часть F_σ, для которой

$$F_{+\sigma} - F_{-\sigma} = 0,$$

и «нечетную» часть G_σ, для которой

$$G_{+\sigma} + G_{-\sigma} = 0,$$

так что

$$H_\sigma = F_\sigma + G_\sigma.$$

Для этого положим

$$F_\sigma = \frac{1}{2}(H_{+\sigma} + H_{-\sigma})$$

и

$$G_\sigma = \frac{1}{2}(H_{+\sigma} - H_{-\sigma}).$$

В нашей задаче для четной части F мы имеем условие

$$\int\limits_{K_\rho} F_\sigma \, d\sigma = \pi D.$$

Выведем отсюда, что $2F_\sigma = D$. Для этого рассмотрим также четную функцию

$$\Phi_\sigma = F_\sigma - \frac{D}{2};$$

для нее из обращения в нуль интеграла

$$\int\limits_{K_\rho} \Phi_\sigma \, d\sigma = 0$$

можно заключить об обращении в нуль функции Φ_σ.

Минковский доказывает это, разлагая Φ_σ по сферическим функциям и замечая при этом, что круговой интеграл сферической функции четного порядка отличается от самой функции только постоянным множителем [1]). Функ достигает той же цели без разложения в ряд, на более элементарном пути [2]).

Упомянем, что имеется обширная литература о двумерном аналоге овалоидов постоянной ширины — кривых постоянной ширины; она восходит еще к Л. Эйлеру и связана с так

---

[1]) Ср. формулу (Ф) в сноске на стр. 185.
[2]) P. Funk, Math. Ann. 74, 1913, стр. 286.

называемой «Задачей о бросании иглы» в теории вероятностей [1]).

IV. Тела постоянной яркости. Близка к содержанию п. III идея о следующем видоизменении постановки вопроса Минковского: *найти все овалоиды, для которых постоянна площадь поперечного сечения описанных цилиндров.* Тело, ограниченное такой поверхностью, называется, по Герглотцу, *овалоидом «постоянной яркости»*. Действительно, можно представить себе, что поверхность излучает равномерный свет и что яркость, с которой тело видно с некоторого направления, пропорциональна площади его ортогональной проекции в этом направлении [2]).

Будем рассматривать гауссову кривизну

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

такого овалоида как функцию от направления нормали, чем, согласно Минковскому, овалоид, по существу (т. е. с точностью до параллельного переноса), однозначно определен [3]). Тогда, в силу формулы (I), стр. 176, задача сводится к решению «интегрального уравнения первого рода»

$$\int |\cos \widehat{\rho\sigma}| (R_1 R_2)_\sigma \, d\omega_\sigma = \text{const}.$$

При разложении на четную и нечетную части мы придем, аналогично предыдущему п. III, к утверждению, что условие

$$(R_1 R_2)_{+\sigma} + (R_1 R_2)_{-\sigma} = \text{const}$$

является необходимым и достаточным для овалоида постоянной яркости, если только мы сможем показать, что из уравнения

$$\int |\cos \widehat{\rho\sigma}| \Phi_\sigma \, d\omega_\sigma = 0$$

---

[1]) Ссылки можно найти в Math. Ann 76, 1915, стр. 504. Задача о бросании иглы называется также по имени ее автора «задачей Бюффона»; см. А. А. Марков, Исчисление вероятностей. М., ГИЗ, 1924, стр. 261 или В. Бляшке [31]. [Кривым постоянной ширины и их обобщениям посвящены последние два параграфа указанной на стр. 198 книги [9]. — *Прим. ред.*]

[2]) См. диссертацию Герглотца: G. Herglotz, Über die Scheinbaren Helligkeitsverhältnisse..., München, 1902.

[3]) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 130, 270 и далее (ср. ниже, стр. 196).

для *четных* функций Φ_σ следует тождественное равенство $\Phi_\sigma = 0$.

Это можно, по Герглотцу, доказать, опять-таки разлагая Φ_σ по четным сферическим функциям, которые являются «собственными функциями» нашего интегрального уравнения[1]), или сведя с помощью формулы (**), стр. 179, дело к решению полученного ранее функционального уравнения с круговым интегралом, к чему мы еще вернемся (стр. 184)[2]).

Мы находим, таким образом, что *овалоид тогда и только тогда является овалоидом постоянной яркости, когда радиусы главных кривизн в точках с параллельными касательными плоскостями связаны соотношением*

$$(R_1R_2)_{+\sigma} + (R_1R_2)_{-\sigma} = \text{const}.$$

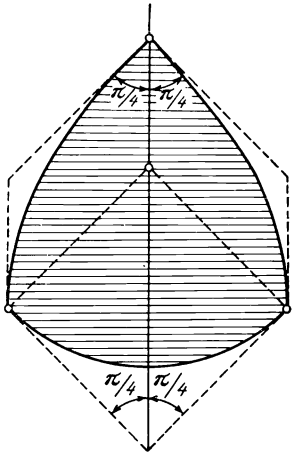

Рис. 27.

Рис. 27 дает простой пример меридионального сечения овалоида вращения постоянной яркости, поверхность которого заведомо неаналитическая. Изображенная на рис. 27 меридиональная кривая в прямоугольных координатах x, y, z может быть задана в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\varphi, \quad y = 0, \\ z &= A\int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{2}}\, d\varphi \end{aligned}\right\} \text{ при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right), \quad y = 0, \\ z &= A\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right\} \end{aligned}\right\} \text{ при } -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 0.$$

---

[1]) См. формулу (Г) в сноске на стр. 185.

[2]) См. доклад автора «Задачи дифференциальной геометрии в целом», Sitzungsberichte der Berliner Mathemat. Gesellschaft **15**, 1916 (заседание от 15. XII 1915, стр. 62—67).

При этом ось z является осью вращения. Соответствующая поверхность вращения составлена из куска поверхности вращения постоянной кривизны и куска шара.

Следует заметить, что неопределенную кривизну на ребре и в вершине овалоида можно положить равной нулю *).

V. Интегральное задание центрально-симметричных выпуклых тел. В силу формул (I) и (II), стр. 176 и 178, возникает стремление представить опорную функцию H_ρ произвольного центрально-симметричного овалоида с помощью симметричного «ядра» $|\cos\widehat{\rho\sigma}|$ в виде

$$H_\rho = \frac{1}{4\pi}\int |\cos\widehat{\rho\sigma}|\, h_\sigma\, d\omega_\sigma. \qquad (***)$$

Мы будем при этом всегда предполагать функцию h_σ на единичной сфере четной (стр. 181), а интегрирование — распространенным на всю сферу. Тогда, как можно увидеть с помощью разложения h_σ по сферическим функциям, это функциональное уравнение однозначно разрешимо относительно h_σ.

Однако решение можно получить на другом пути в замкнутой форме. Условимся писать вместо

$$H_\rho = \frac{1}{4\pi}\int |\cos\widehat{\rho\sigma}|\, h_\sigma\, d\sigma$$

для кратности

$$H = \Gamma h;$$

положим, далее,

$$(\Delta_2 + 2)\, H = \nabla H$$

и, наконец, вместо кругового интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_\rho} H_\sigma\, d\sigma$$

будем кратко писать ΦH. Тогда мы можем придать формуле (**), стр. 179, вид

$$\Phi H = \Gamma\nabla H$$

или

$$\Phi = \Gamma\nabla.$$

---

*) Правильнее было бы считать ее бесконечной.—*Прим. перев.*

Если обозначить обратную операцию знаком степени (—1), то отсюда следует [1])

$$\Gamma^{-1} = \nabla\Phi^{-1}.$$

Таким образом, операцию, обратную Г, можно получить из операции, обратной Ф, с помощью дифференцирования.

Но операция, обратная Ф, была сведена П. Функом к решению интегрального уравнения, использованного Н. Х. Абелем при решении задачи о таутохроне [2]). Возьмем точку ρ за северный полюс полярной системы координат на единичной сфере и обозначим через φ географическую долготу, а через $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ — широту. Тогда, если мы положим

$$\overline{H}_\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\theta, \varphi)\, d\varphi,$$

то, следуя Функу, найдем для уравнения

$$H_\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{K_\rho} f_\sigma\, d\sigma,$$

---

[1]) Если использовать разложение по сферическим функциям, то сразу увидим, что $\Phi = \nabla\Gamma$ и, следовательно, $\Gamma^{-1} = \Phi^{-1}\nabla$. Действительно, для сферической функции X_n порядка n имеет место дифференциальное уравнение (ср. (5), стр. 130)

$$(\nabla) \qquad \nabla X_n = -(n-1)(n+2)X_n$$

и для четной сферической функции получается круговой интеграл

$$(\Phi) \qquad \Phi X_{2m} = (-1)^m \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2m} X_{2m}.$$

Окончательно операция Г дает

$$(\Gamma) \qquad \Gamma X_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2m+2)} X_{2m}.$$

[2]) См. уже названную диссертацию Функа в Math. Ann. **74**, 1913. Далее, см. N. H. Abel, Решение одной механической проблемы (1826), Oevres, Kristiania, 1881, стр. 97—101 или Crelles Journal 1. Решение интегрального уравнения Абеля приводится в книге А. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936, т. I, стр. 310.

имеющего форму «кругового интеграла», решение

$$f_\rho = H_\rho + \int_0^{\pi/2} \frac{d\overline{H}_\rho(\theta)}{\cos\theta}.$$

VI. Формулы для центрально-симметричных овалоидов. Если опорная функция овалоида задана интегральным выражением (***), то координаты той его точки, в которой внешняя нормаль имеет направление ρ, находятся дифференцированием [см. (6), стр. 168] выражения (***):

$$x_\rho = \frac{1}{2\pi}\int \alpha_\sigma h_\sigma\, d\omega_\sigma, \quad y_\rho = \frac{1}{2\pi}\int \beta_\sigma h_\sigma\, d\omega_\sigma,$$

$$z_\rho = \frac{1}{2\pi}\int \gamma_\sigma h_\sigma\, d\omega_\sigma, \tag{1}$$

где α_σ, β_σ, γ_σ — координаты переменной точки σ единичной сферы, и интегрирование каждый раз распространяется по полусфере [1])

$$\alpha_\rho\alpha_\sigma + \beta_\rho\beta_\sigma + \gamma_\rho\gamma_\sigma > 0.$$

При дальнейшем дифференцировании мы получаем для главных радиусов кривизны нашего овалоида в точке с внешним направлением нормали ρ формулы

$$(R_1 + R_2)_\rho = (\Delta_2 + 2)H_\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{K_\rho} h_\sigma\, d\sigma, \tag{2}$$

$$(R_1R_2)_\rho = \frac{1}{2\pi^2}\int_{K_\rho}\int_{K_\rho} (\sin\widehat{\sigma\tau})^2\, h_\sigma h_\tau\, d\sigma\, d\tau, \tag{3}$$

где K_ρ, как и раньше, большой круг единичного радиуса, перпендикулярный направлению ρ, а $d\sigma$ и $d\tau$ — (положительные) элементы длины дуги этого круга.

Далее, получаем замечательную по своей симметричности формулу для объема J нашего овалоида. Пусть

$$\rho(\alpha_\rho, \beta_\rho, \gamma_\rho), \quad \sigma(\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma), \quad \tau(\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau)$$

---

[1]) Можно, в силу этих формул для x_ρ, y_ρ, z_ρ, рассматривать наш овалоид как поверхность плавающего центрально-симметричного тела, которое погружено до половины; ср. стр. 105. Формулы (1) — (3) и результаты предыдущего п. V были найдены также И. Радоном.

— три точки единичной сферы $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Обозначим абсолютную величину определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_\rho & \beta_\rho & \gamma_\rho \\ \alpha_\sigma & \beta_\sigma & \gamma_\sigma \\ \alpha_\tau & \beta_\tau & \gamma_\tau \end{vmatrix}$$

через $[\rho, \sigma, \tau]$. Тогда

$$\boxed{J=\frac{1}{6\pi^3}\int\int\int [\rho, \sigma, \tau]\, h_\rho h_\sigma h_\tau\, d\omega_\rho\, d\omega_\sigma\, d\omega_\tau,} \tag{4}$$

где все три интеграла распространены по всей поверхности единичной сферы. Отсюда при переходе к параллельному телу сразу получаем формулы для площади поверхности O и для интеграла M средней кривизны:

$$O=\frac{1}{2\pi^3}\int\int\int [\rho, \sigma, \tau]\, h_\rho h_\sigma\, d\omega_\rho\, d\omega_\sigma\, d\omega_\tau, \tag{5}$$

$$M=\frac{1}{2\pi^3}\int\int\int [\rho, \sigma, \tau]\, h_\rho\, d\omega_\rho\, d\omega_\sigma\, d\omega_\tau. \tag{6}$$

Для того чтобы выраженная в виде (***) функция H была опорной функцией выпуклого тела, *достаточно*, как мы уже показали в пп. I и II, чтобы было $h \geqslant 0$. Но, очевидно, это условие не является *необходимым*. Было бы желательно просто охарактеризовать специально те выпуклые тела, для которых $h \geqslant 0$, т. е. тела, которые, так сказать, «составлены» из отрезков с помощью линейной комбинации с положительными коэффициентами *). При аффинном преобразовании, т. е. при проективном преобразовании пространства, которое оставляет на месте бесконечно удаленные точки, тела этого класса переходят снова в такие же тела. Из многогранников сюда относятся те, у которых все грани имеют центр симметрии.

VII. Свойства, выделяющие эллипсоиды среди других выпуклых поверхностей. Целый ряд красивых геометрических задач возникает, если брать какое-нибудь давно

---

*) Сейчас такие тела описаны; см. В. А. Залгаллер и Ю. Г. Решетняк, Вестник ЛГУ, 1954, № 2. — *Прим. перев.*

известное свойство эллипсоида и ставить вопрос: является ли это свойство характеризующим эллипсоид среди всех овалоидов?

Упомянем, например, один особенно красивый результат такого рода, к которому пришел Г. Брунн в своем сочинении на получение доцентуры «О кривых без точек перегиба» (H. Brunn, Über Kurven ohne Wendepunkten, München, 1889, стр. 59): *Овалоид, который каждая секущая его плоскость пересекает по центрально-симметричному овалу (выпуклой кривой) есть эллипсоид.*

Докажем здесь сходную теорему, которая находит применение в вариационном исчислении[1]): *Овалоид, который касается каждого описанного вокруг него цилиндра по плоской кривой, обязательно является эллипсоидом.*

Если воспользоваться оборотом речи, уже применявшимся в этой книге, то нашу задачу можно сформулировать так: требуется найти все овалоиды, граница тени которых при освещении любым параллельным пучком света является плоской.

Прежде всего, мы отыщем все вообще овалоиды, у которых границы тени плоские, когда лучи света параллельны некоторой фиксированной («горизонтальной») плоскости. Если такой овалоид E подвергнуть соответствующему аффинному преобразованию, то он, очевидно, не потеряет указанного свойства. (При этом, как обычно, под «аффинным преобразованием» понимается, по Мебиусу, такое проективное преобразование, которое оставляет на месте бесконечно удаленные точки.) Проведем обе касательные к E плоскости, параллельные горизонтальной плоскости. С помощью аффинного преобразования мы всегда можем добиться, чтобы прямая, соединяющая точки касания p и q этих плоскостей с E, была перпендикулярна основной горизонтальной плоскости.

Осветим теперь наш овалоид E параллельными (друг другу) горизонтальными лучами света. Так как, по условию, граница S тени на E должна быть плоской и так как она принадлежит E, то эта линия должна быть овалом, проходящим через полюсы p и q.

Две произвольные горизонтальные плоскости пересекают E по горизонтальным овалам W_1 и W_2, и касательные к этим

[1]) W. Blaschke, Пространственная вариационная задача с симметричным условием трансверсальности, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. 68, 1916, стр. 50—55.

линиям в точках пересечения с границей тени S, очевидно, параллельны. Спроектируем теперь (ортогонально) всю фигуру на горизонтальную плоскость. Общая проекция полюсов p и q пусть будет o. Проекция S есть прямая S', проходящая через o, проекция W_1 и W_2 — два овала W'_1 и W'_2, охватывающие o.

Каждая прямая S', проходящая через точку o, пересекает, таким образом, W'_1 и W'_2 в точках с параллельными касательными, что возможно лишь, если W'_1 и W'_2 имеют o центром симметрии и подобны между собой (и подобно расположены с центром подобия o). Теперь ясно, как отыскать все овалоиды требуемого вида.

Метод построения. Возьмем в горизонтальной плоскости произвольный овал W с центром симметрии o. Возьмем, далее, в плоскости проходящий через p и q овал S, симметричный относительно прямой, соединяющей p и q, и пересекающий W. Затем, закрепив p и q, будем поворачивать S вокруг отрезка, соединяющего эти точки, и при этом изменять S аффинно самому себе так, что каждая точка овала S описывает подобный W и подобно W расположенный овал. (Это есть обобщение построения поверхности вращения с помощью вращения меридиана.)

Отметим следующее: *доказано, что граница тени S симметрична относительно прямой, соединяющей точки p и q.*

Потребуем теперь от нашего овалоида E, чтобы каждая граница S его тени (при любом параллельном освещении!) была плоской. Из доказанного выше следует, что каждый такой овал S «симметричен» относительно любой прямой, соединяющей каждые две его «противоположные» точки p и q (точнее, прямая pq является осью, вообще говоря, «косой симметрии» *) овала S); «противоположными» здесь мы называем точки с параллельными касательными.

Но отсюда уже можно заключить, что S есть эллипс. К этому заключению можно прийти, например, следующим образом.

---

*) См., например, И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. 1, Учпедгиз, 1962, стр. 37.

У овала S легко найти такие две оси симметрии A и A_n, что (косая) симметрия относительно оси A и следующая за ней косая симметрия относительно оси A_n дают в результате аффинное преобразование Φ_n 1-го рода с периодом 2^n. С помощью нового аффинного преобразования ψ можно преобразовать «аффинный поворот» Φ_n в простой поворот $\Phi_n^* = \psi^{-1}\Phi_n\psi$ на угол $2\pi/2^n$. Получающийся из S с помощью ψ овал S^* переходит при вращении Φ_n^* в себя. Закрепим A и заменим теперь A_n на A_{n+1}; тогда, если $n > 1$, то же самое преобразование ψ переводит Φ_{n+1} в поворот $\Phi_{n+1}^* = \psi^{-1}\Phi_n\psi$ (ибо $\Phi_{n+1}^{*2} = \Phi_n^*$), откуда следует, что S^* при повороте на произвольный угол вида $2m\pi : 2^n$ $\{m, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ переходит в себя, а значит, может быть только кругом. Поэтому сам овал S действительно являлся эллипсом[1]).

Таким образом, мы убеждаемся, что все границы тени овалоида E суть эллипсы. Вернемся теперь к нашим предыдущим построениям. Осветим построенное, как указано выше, тело вертикально, т. е. светом, падающим перпендикулярно основной горизонтальной плоскости. Тогда граница тени будет лежащей в горизонтальной плоскости подобной W кривой; соответствующим параллельным переносом основной плоскости ее можно будет совместить с W. Так как теперь W также должно быть эллипсом, то мы можем с помощью соответствующего аффинного преобразования, оставляющего точки p и q на месте и переводящего основную плоскость в себя, превратить W в круг. Но тогда, если использовать наш способ построения, E превратится в поверхность вращения с осью pq, а значит (поскольку меридианные кривые этой поверхности — эллипсы), в эллипсоид вращения. Поэтому аффинный полученному исходный овалоид также был *эллипсоидом*, ч. и т. д.

К полученному результату сводятся и некоторые другие, например следующие:

---

[1]) Таким образом, мы пришли к тому известному факту, *что каждый овал, допускающий непрерывную группу аффинных преобразований в себя* (в терминологии С. Ли — S. Lie), *является эллипсом.* [Ср. с задачей 234б, указанной в подстрочном примечании на стр. 189 книги «Идеи и методы аффинной и проективной геометрии». — *Прим. ред.*]

Если середины любого пучка параллельных хорд овалоида всегда принадлежат одной плоскости, то овалоид является эллипсоидом (Г. Брунн);

Только у эллипсоида параллельные плоские сечения овалоида всегда подобны и подобно расположены [1]).

Другая, возможно не совсем простая, задача подобного рода заключается в следующем: *найти все овалоиды, у которых точки пересечения каждых трех попарно перпендикулярных касательных плоскостей принадлежат одной поверхности.*

В общем случае множество этих точек пересечения образует пространственное тело (имеет внутренние точки). У эллипсоида, и (как я показал в другом месте) только у него, это множество представляет собой поверхность шара.

VIII. Наименьшее число вершин замкнутой выпуклой кривой. В качестве простейшего примера дифференциально-геометрической теоремы в целом упомянем теорему о вершинах овала, которую впервые доказал в 1909 г. индус С. Махападхайя *) и обобщил А. Кнезер [2]):

На каждом (регулярном) овале имеются по крайней мере четыре вершины. При этом, обобщая привычное для конических сечений словоупотребление, мы под «*вершиной*» овала понимаем точку, в которой радиус кривизны достигает экстремума.

Пожалуй, простейшее доказательство этой красивой теоремы получается путем механического истолкования формул

---

[1]) Существует аналогичная планиметрическая задача: требуется отыскать все овалы, у которых, как у эллипса, для каждого диаметра имеется «сопряженный», т. е. такой, что касательные в концах одного из них всегда параллельны другому. Эти овалы (среди них, кроме эллипсов, есть еще много других, даже алгебраических кривых) дают решение поставленной Каратеодори задачи вариационного исчисления и были изучены И. Радоном в статье «Об особом виде плоских выпуклых кривых» (J. Radon, Leipziger Berichte, Math. Phys. Kl. 68, 1916). [Ср. также Энциклопедия элементарной математики, кн. V, «Наука», 1966, стр. 468—469. — *Прим. ред.*] Радон заметил, между прочим, что эти овалы характеризуются тем, что они переходят сами в себя при коррелятивных преобразованиях периода четыре.

*) S. Muckhopadhyaya, Bull. Calcutta Math. Soc. 1, 1909.

[2]) A. Kneser, Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber, Leipzig, 1912.

дифференциальной геометрии на плоскости. Представим себе, что на нашем овале K выбрано «положительное» направление обхода. Обозначим через τ угол положительно направленной касательной кривой K с закрепленным направлением оси x. Радиус кривизны $\rho = \frac{ds}{d\tau}$ предположим непрерывной функцией от τ. Для прямоугольных координат (x, y) точки P нашей кривой тогда имеем

$$x - x_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \cos\tau\, ds = \int_{\tau_0}^{\tau} \rho \cos\tau\, d\tau,$$

$$y - y_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \sin\tau\, ds = \int_{\tau_0}^{\tau} \rho \sin\tau\, d\tau.$$

Из замкнутости овала K следует, таким образом (ср. выше стр 139),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos\tau\, d\tau = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \rho \sin\tau\, d\tau = 0. \qquad (*)$$

Проведем через начало координат O единичный вектор OP', параллельный и одинаково направленный с положительно направленной касательной в точке P. Его конец P' с координатами $x' = \cos\tau$, $y' = \sin\tau$ описывает вокруг O единичный круг K', когда P пробегает овал K. Распределим теперь на K' положительную массу так, что плотность в каждой точке P' круга K' равна радиусу кривизны ρ в соответствующей точке P овала K. Тогда формулы $(*)$ означают, что *центр тяжести такого распределения массы на окружности K' совпадает с ее центром O.*

Из непрерывности функции $\rho(\tau)$ следует существование наибольшего и наименьшего значений ρ на K, а значит, существование двух вершин. Так как, далее, между двумя наибольшими значениями всегда должно лежать наименьшее, то экстремумы могут появляться только в четном числе. Поэтому, если мы покажем, что не существует овалов всего с двумя вершинами, то это будет означать, что наименьшее возможное число вершин равно четырем.

Допустим, что существует овал K всего с двумя вершинами A и B, которые соответствуют наименьшему и наибольшему значениям ρ. Покажем, что это ведет к противоречию.

Точки на единичном круге K', которые соответствуют вершинам A и B, обозначим через A' и B'. Тогда плотность ρ должна монотонно возрастать на обеих круговых дугах между этими точками от A' до B'. Можно направление дуги от A' до B', например, выбрать за положительное направление оси y. Тогда по (*)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho \sin \tau \, d\tau = \int_{0}^{\pi} \{\rho(+\tau) - \rho(-\tau)\} \sin \tau \, d\tau = 0.$$

Но из монотонности непрерывной функции $\rho(\tau)$ между A' и B' следует, что непрерывная функция, стоящая под знаком второго интеграла, положительна во внутренних точках промежутка интегрирования и что, таким образом, интеграл не может обратиться в нуль. С точки зрения механики это значит, что если разбить K' на две полуокружности, то та, которая содержит B', тяжелее, и поэтому центр тяжести не может совпасть с центром O окружности [1]).

Наконец, упомянем о более общей теореме, которая содержит доказанную теорему «о четырех вершинах овала» как частный случай:

Если овал пересекается с кругом в $2n$ точках, то он имеет по крайней мере $2n$ вершин.

---

[1]) W. Blaschke, Rendiconti Circolo di Palermo **36**, 1913, стр. 220—222. Другое доказательство Г. Мормана (H. Mohrmann) см. там же **37**, 1914, стр. 267—268 и кратко у погибшего на войне В. Фогта (W. Fogt) в Crelles Journal **114**, 1914, стр. 239—248. Доказательство Г. Герглотца той же теоремы воспроизведено в книге В. Бляшке [29], § 24, стр. 33 [см. также В. Бляшке [30], § 12, стр. 43—44. — *Прим. ред.*]. Имеются также проективные обобщения этой теоремы, принадлежащие Герглотцу и Барнеру. [Аффинному обобщению этой теоремы уделено много внимания во II томе «Лекций по дифференциальной геометрии» автора настоящей книги (см. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923, § 19, стр. 43—46 и задачи 14 и 23 на стр. 65 и 68).

Вот еще одно обобщение теоремы о четырех вершинах овала, имеющее метрический характер и принадлежащее, видимо, В. Бляшке: *пусть E и E' — две (положительно направленные) выпуклые замкнутые кривые, do и do' — элементы длины дуги в точках с параллельными (и одинаково направленными) опорными прямыми; тогда отношение $\frac{do}{do'}$ имеет минимум четыре экстремума* (эта теорема переходит в теорему о четырех вершинах овала, если E' — окружность). — *Прим. ред.*]

Овалы с только четырьмя вершинами изучены Х. Юэлем в статье «О простых циклических кривых» (C. Juel, Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7) 8, 1911, стр. 6).

IX. Дальнейшие сведения о дифференциальной геометрии овалоидов.

А. К аффинной геометрии. В аффинной геометрии эллипс и эллипсоид обладают «изопериметрическими свойствами», аналогичными свойствам круга и шара. По этому поводу см. В. Бляшке, Лекции по дифференциальной геометрии, ч. II (W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II; Аффинная дифференциальная геометрия, Berlin, 1923 [1]).

Б. К конформной геометрии овалоидов. Ближайшими к нашей теме представляются следующие вопросы:

1°. Что можно сказать о поведении линий кривизны на поверхности овалоида?

2°. С вопросом 1° связано нахождение кривой C, состоящей из всех точек овалоида E, в которых главный круг кривизны имеет с E повышенный порядок соприкосновения. Кратные точки этой кривой C можно было бы называть «вершинами» E. Для эллипсоида C состоит из линий его пересечения с плоскостями симметрии.

3°. Рассмотрение сфер, дважды касающихся овалоида E. Пары их точек касания образуют на E «инволюцию», «двойной линией» которой является линия C.

4°. Рассмотрение сфер, трижды касающихся E.

5°. *Омбилические точки* E, т. е. точки, в которых сфера имеет с E касание второго порядка. К. Каратеодори предположил, что каждый овалоид E содержит по меньшей мере две различные омбилические точки *). Этому были посвящены исследования Г. Гамбургера (1940). См. также по этому поводу В. Бляшке [29], стр. 175—176 и В. Бляшке, Лекции по дифференциальной геометрии, ч. III (W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III; Дифференциальная геометрия кругов и шаров, Berlin, 1929 [2]), § 65, стр. 283—289.

В. Внутренняя метрика на овалоиде; геодезические линии.

6°. А. Пуанкаре предположил, что на каждом овалоиде лежат по меньшей мере три замкнутые геодезические линии (см. H. Poincaré, Trans. Amer. Math. Soc. 6, 1905). Этим вопросом занимался, в частности, А. Шпейзер **).

---

[1]) Книга написана при участии К. Рейдемейстера.

*) Это было доказано Г. Болем в 1943 г. — *Прим. перев.*

[2]) Книга написана в сотрудничестве с Г. Томсеном.

**) Вопрос давно решен в известных работах Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана (см., например, их статью: Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей, УМН 1, вып. 1 (17), 1947) и М. Морза (ср., например, Г. Зейферт и В. Трельфалль, Вариационное исчисление в целом, ИЛ, 1947).

7°. Не решен вопрос о нахождении всех овалоидов, которые обладают только замкнутыми геодезическими. Дарбу нашел все поверхности вращения такого рода (см. G. Darboux, Théorie générale des surfaces, т. III, стр. 4—9). Этому посвящены также защищенные в Гёттингене диссертации О. Цолля (1903) и П. Функа (1914).

8°. К упомянутому классу поверхностей принадлежат, в частности, все овалоиды с «противоположными точками», — речь идет об овалоидах, у которых все геодезические, проходящие через какую-нибудь точку P, всегда проходят также через некоторую точку P', «противоположную» P («поверхности встречи»). Такие поверхности необходимо имеют центр симметрии, относительно которого симметричны противоположные точки. В смысле вариационного исчисления противоположные точки «сопряжены» на каждой соединяющей их геодезической.

Г. Жесткость овалоидов*).

9°. Прежде всего о жесткости многогранников. В связи с утверждением Евклида в последней книге его «Начал», по инициативе старого Лагранжа, молодой Коши доказал в 1813 г. следующую теорему: *Если два многогранника имеют попарно конгруэнтны и в одинаковом порядке прилегающие грани, то эти многогранники можно совместить движением или движением и отражением* (A. L. Cauchy, Werke, I, стр. 26—38) **).

10°. Без ограничения выпуклости утверждение Евклида неверно, как показал Р. Брикар на примере своего «подвижного восьмигранника» (см. R. Bricard, Journal de Math., 1897). По этому поводу см. также В. Бляшке «Шатающийся восьмигранник» (W. Blaschke, Math. Zeitschrift 6, 1920) и Р. Зауер «Шатающийся многогранник с двенадцатью ребрами» (R. Sauer, Hamburg. Abhandlungen 20, 1955/56).

11°. Достаточно регулярный овалоид не допускает (нетривиального) непрерывного изгибания (изменения формы с сохранением длин всех кривых на поверхности). Впервые это доказано Г. Либманом (H. Liebmann, Math. Ann. **53, 54,** 1900, 1901) и более просто В. Бляшке (W. Blaschke, Göttinger Nachrichten, 1912) [1]).

12°. Соответствующая теорема „в целом" принадлежит С. Кон-Фоссену (1927): *Два изометричных овалоида* (т. е. таких, что их можно отобразить один на другой с сохранением длин) *могут быть совмещены движением* (или движением и отражением) ***). Наиболее простое доказательство идет от Г. Герглотца, 1942 (см. В. Бляшке [29], § 67). Без ограничения регулярности эту теорему доказал А. В. Погорелов. (См. предисловие к упоминавшейся книге А. Д. Александрова.)

---

*) См. подстрочное примечание **) на стр. 51.

**) См. подстрочное примечание на стр. 103.

[1]) См. цитату в Энциклопедии: A. Voss, Enzyklopädie der mathematischer Wissenschaften, III, D 6a, стр. 400.

***) Ср. более позднюю статью «Изгибаемость поверхностей в целом» в книге: С. Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Физматгиз, 1959, стр. 33—41.

13°. К теоремам единственности 9° и 12° присоединены теперь также *теоремы существования*. Прежде всего А. Д. Александров в 1941 г. показал следующее: *Если вид и порядок приклеивания граней* (замкнутого и выпуклого) *многогранника абстрактно задан*, т. е. задана развертка в смысле элементарной геометрии, причем развертка «замкнута» и «выпукла», *то всегда существует соответствующий многогранник* *).

14°. Соответствующая теорема существования для овалоидов: *Если на поверхности шара заранее задана гауссова метрика положительной кривизны, то всегда существует соответствующий овалоид*. Доказательство дал Г. Вейль **), Г. Герглотц и В. Бляшке свели утверждение к вариационной задаче, Р. Каччиополи дал первое доказательство при ограничениях регулярности, А. Д. Александров — первое общее доказательство, которое лучше всего можно прочесть в его книге [1], содержащей также много других результатов.

15°. Г. Минковский в 1901 г. доказал с помощью вариационной задачи следующую теорему: *Если гауссову кривизну $K > 0$ искомого овалоида* (соблюдая одно необходимое ограничение) *задать как функцию точки на единичной сфере, требуя, чтобы это была кривизна овалоида в точках с соответствующими нормалями, то по этой функции K однозначно* (с точностью до переноса) *восстанавливается единственный овалоид*.

Ограничение состоит в том, что должно соблюдаться равенство

$$\int \frac{d\vec{o}}{K} = 0,$$

где $d\vec{o}$ — векторный элемент поверхности единичного шара (H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 128, 270). В этом результате содержится неизгибаемость поверхности шара, которую доказал также Д. Гильберт.

16°. Наконец, укажем еще на один близлежащий, но «ершистый» вопрос. У нас имеется формула Я. Штейнера (стр. 123) для объема параллельного овалоида с расстоянием θ, а именно

$$J(\theta) = J + O\theta + M\theta^2 + \frac{4\pi}{3}\theta^3.$$

Положим теперь $x = \frac{4\pi O}{M^2}$, $y = \frac{48\pi^2 J}{M^3}$; тогда можно поставить вопрос об области, которая покрывается на плоскости точками (x, y), характеризующими всевозможные овалоиды. Это — вопрос о *множестве соотношений между J, O, M*. Об этом см. в книге Г. Хадвигера [5], где имеется также очень полный подбор литературы о выпуклых телах.

---

*) См., например, книги А. Д. Александрова [1], [8].

**) Точнее было бы сказать, что Г. Вейль наметил доказательство названной теоремы; завершил его Г. Леви (см. статьи Г. Вейля и Г. Леви в журнале УМН 3, вып. 2 (24), 1948).

ЛИТЕРАТУРА

А. Литература по теории выпуклых тел

1. А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.

Глубокое исследование «внутренней геометрии» выпуклых поверхностей, т. е. геометрии, которая возникает при измерении всех расстояний только на самой поверхности, без выхода в объемлющее пространство.

2. Г. Буземан, Выпуклые поверхности, «Наука», 1964.

Написанный для математиков обзор теории выпуклых поверхностей.

3. T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934.

Небольшая книжка, содержащая близкое к энциклопедическому изложению предмета. С большой полнотой сообщает о всех результатах в теории выпуклых тел, полученных до 1934 г. (По поводу более поздних результатов см., например, книгу [2].) Доказательства в большинстве случаев опущены. К книге приложен весьма подробный список литературы.

4. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Выпуклые фигуры и тела, Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. V, «Наука», 1966, стр. 181—269.

Обзорная статья, в которой, в частности, разбираются понятия площади и периметра выпуклой фигуры на плоскости; объема и площади поверхности выпуклого тела в пространстве (и многомерном пространстве). Содержит примеры относящихся к выпуклым телам задач на максимум и минимум.

5. H. Hadwiger, Altes und neues über konvexe Körper, Basel — Stuttgart, 1955.

Небольшая, но исключительно содержательная книга, излагающая современное состояние не связанных с дифференциальной геометрией разделов теории выпуклых тел. Имеет очень полный библиографический указатель.

6. H. Eggleston, Convexity, Cambridge, 1958.

Краткая, со вкусом написанная книга. Охватывает основные понятия теории выпуклых тел и некоторые специальные вопросы (например, учение о телах постоянной ширины).

7. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер, Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М. — Л., Изд-во Академии наук СССР, 1962. (Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII.)

Формально книга не относится к «выпуклой» тематике; однако по существу она тесно связана с монографией [1] и содержит дальнейшее развитие тех же идей.

8. А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1956.

Эта монография весьма обстоятельно трактует самые общие свойства многогранников и признаки, однозначно определяющие многогранник.

9. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, Гостехиздат, 1951.

Книга рассчитана на студентов-математиков младших курсов и, частично, на школьников. Написана как сборник задач по теории (двумерных) выпуклых фигур с подробными решениями всех задач. Много внимания уделено задачам на максимум и минимум; один параграф целиком посвящен изопериметрическому свойству круга.

10. Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, 1956.

Популярная книга, имеющая много точек соприкосновения с настоящей книгой.

11. Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Физматгиз, 1958.

12. C. A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge, 1964.

Книги [11] и [12] посвящены так называемой «дискретной геометрии» — учению об «оптимальных» в том или ином отношении расположениях фигур на плоскости или в пространстве; этот раздел геометрии (которому посвящена также обзорная статья Г. С. М. Кокстера в сборнике [18]) тесно связан с теорией выпуклых тел. (В книге [11] много внимания уделяется также экстремальным свойствам выпуклых фигур и тел, в частности изопериметрическому свойству круга.) Книга [11] посвящена вопросам дискретной геометрии плоскости и трехмерного пространства; в книге [12] основное внимание уделено задачам n-мерной дискретной геометрии.

13. Г. Хадвигер и Г. Дебруннер, Комбинаторная геометрия на плоскости, «Наука», 1966.

14. В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, «Наука», 1966.

15. V. J. D. Baston, Some properties of polyhedra in euclidean space, Oxford, 1965.

Книги [13] — [15] посвящены так называемой «комбинаторной геометрии» — разделу, родственному «дискретной геометрии» и находящемуся на стыке элементарной геометрии и теории выпуклых тел. Эти три книги практически не пересекаются по своему содержанию: в них излагаются разные разделы комбинаторной геометрии. Книга [13] по своему строению (сборник задач, сопровождаемых решениями) близка к книге [9]. («Комбинаторной геометрии» посвящены также обстоятельные обзоры Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Клии одного Б. Грюнбаума в сборнике [18].)

16. F. A. Valentine, Convex sets, New York, 1964.

Книга посвящена теории выпуклых множеств в общих линейных пространствах (аффинных или пространств с метрикой Минковского, частным случаем которых является обычное пространство Евклида). Основным достоинством книги является богатство разобранных в ней конкретных теорем о выпуклых телах.

17. H. G. Eggleston, Problems in Euclidean space; Aplication of Convexity, London, 1957.

Книга содержит подробное обсуждение десяти весьма разнородных по своему характеру и по трудности задач, относящихся к учению о выпуклых телах.

18. Convexity (ред. — V. L. Klee), Providence, 1963.

Эта книга содержит труды состоявшегося в 1961 г. в г. Сиэтле (США) 7-го симпозиума по проблемам выпуклости, организованного Американским математическим обществом. Наряду со статьями, посвященными достаточно частным результатам, этот том содержит несколько очень интересных обзорных статей.

См. также книгу [19] раздела Б.

Б. Литература об изопериметрических свойствах круга и шара

19. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, «Наука», 1966.

Монография, весьма обстоятельно трактующая весь круг вопросов, связанный с понятиями площади и объема и с изопериметрической задачей.

20. В. А. Рохлин, Площадь и объем, ЭЭМ, кн. V, стр. 5—87.

21. В. Г. Болтянский, Длина кривой и площадь поверхности, ЭЭМ, кн. V, стр. 88—141.

Статьи [20] и [21] посвящены обсуждению смысла понятий «длина кривой», «площадь (плоской) фигуры», «площадь поверхности», «объем (пространственного) тела».

22. T. Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Paris, 1929.

Обстоятельный обзор широкого круга вопросов, связанных с изопериметрическими свойствами круга и шара.

23. Д. А. Крыжановский, Изопериметры, Физматгиз, 1959.

Популярная брошюра, четко и широко рассматривающая связанный с изопериметрической задачей круг вопросов.

24. Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, «Просвещение», 1967.

Большое сочинение, имеющее целью познакомить малоискушенного читателя с математикой в целом. С темой «изопериметрические свойства круга и шара» связана гл. VII «Maxima и minima», особенно § 7 «Существование extremum'a. Принцип Дирихле», § 8 «Изопериметрическая проблема», § 9 «Экстремальные проблемы с граничными условиями. Связь между проблемой Штейнера и изопериметрической проблемой» и § 11 «Экспериментальные решения минимальных проблем. Опыты с мыльными пленками».

25. Д. Пойя, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957.

Книга выдающегося математика и педагога, ставящая своей целью познакомить читателя с некоторыми общими принципами математического творчества (которое может заключаться и в решении задач). К интересующей нас теме относятся гл. VIII «Максимумы и минимумы», гл. X «Изопериметрическая задача» и, в несколько меньшей степени, гл. IX «Физическая математика». Каждая глава завершается списком задач; в конце книги приводятся указания к их решению.

26. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Геометрические задачи на максимум и минимум, ЭЭМ, кн. V, стр. 270—348.

В этой статье разбирается и задача об изопериметрическом свойстве круга.

27. В. Бляшке, Греческая и наглядная геометрия, Математическое просвещение, вып. 2, Гостехиздат, 1957, стр. 111—130; вып. 3, Физматгиз, 1958, стр. 101—138.

Популярная лекция, посвященная греческой геометрии и дальнейшей судьбе возникших в древности идей. Помещенный во второй части лекции § 10 называется «Изопериметрические задачи».

28. Л. А. Люстерник, Кратчайшие линии, Гостехиздат, 1955.

Элементарное введение в так называемое «вариационное исчисление» (см., например, учебники [33] — [35]); гл. V этой брошюры посвящена изопериметрической задаче.

29. В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, Гостехиздат, 1957.

В § 29 этой сжато написанной книги намечено семь разных доказательств изопериметрического свойства круга.

30. В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935.

§§ 28—30 этого обстоятельного учебника дифференциальной геометрии посвящены изопериметрическому свойству круга, §§ 113—115 — изопериметрическому свойству шара.

31. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Berlin, 1955 (русский перевод 1-й части книги: В. Бляшке, Лекции по интегральной геометрии, Успехи математических наук (старая серия), вып. V, Гостехиздат, 1938, стр. 97—149).

32. Л. А. Сантало, Введение в интегральную геометрию, ИЛ, 1956.

Первая часть книги [31] содержит несколько доказательств и обобщений изопериметрического свойства круга, вторая часть — одно усиление изопериметрического неравенства Минковского (см. стр. 124). Книга [32] содержит кроме доказательства изопериметрического свойства круга и его усиления, также «неевклидовы варианты» тех же результатов.

33. Н. И. Ахиезер, Лекции по вариационному исчислению, М., Гостехиздат, 1955.

34. И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.

35. Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1965.

Книги [33] — [35] представляют собой учебники «вариационного исчисления», т. е. учения об отыскании линий и поверхностей, удовлетворяющих определенным условиям «максимальности» или «минимальности». «Изопериметрической задаче» в широком смысле этого слова посвящены п. 25 книги [33], § 10 книги [34] и § 3 гл. 9 части II книги [35]; о собственно «изопериметрической задаче» (об изопериметрическом свойстве круга) см. стр. 211—215 книги [33]; ср. также стр. 54—55 книги [34] и стр. 388—389 книги [35].

36. Г. Полиа и Г. Сегё, Изопериметрические неравенства в математической физике, Физматгиз, 1962.

В этой книге разобран широкий круг механических и физических задач родственных «изопериметрической задаче» в геометрии.

См. также книги [2], [3], [5], [9] и [11] раздела А.

ВИЛЬГЕЛЬМ БЛЯШКЕ И ЕГО КНИГА ПО ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

И. М. ЯГЛОМ

Автором этой книги является один из виднейших геометров нашего столетия, основатель и руководитель Гамбургской геометрической школы, член национальной Академии наук и лауреат Государственной премии Германской Демократической Республики Вильгельм Иоганн Эуген Бляшке.

Творческая судьба Бляшке сложилась на редкость удачно. Немного существует в наши дни таких ученых, которые могут назвать себя создателями целых научных направлений, новых математических наук, разрабатываемых обширными коллективами исследователей в разных странах, — а Бляшке вполне заслуженно мог считать своими детищами сразу несколько подобных больших разделов математики, которые мы ниже постараемся охарактеризовать достаточно подробно. Это обстоятельство связано как с ясностью исходных позиций Бляшке, идущих в основном от известных концепций одного из его непосредственных учителей — знаменитого Феликса Клейна, так и с исключительным педагогическим и популяризаторским талантом Бляшке, на котором мы также еще остановимся ниже.

Вильгельм Бляшке родился в 1885 г. в г. Граце (Австрия), «im schönen Graz» (в прекрасном Граце), как говорил он позже. Его отец, Иосиф Бляшке, преподавал начертательную геометрию в местном реальном училище, и впоследствии Бляшке неоднократно с любовью вспоминал уроки отца, заложившие основы дальнейших успехов знаменитого геометра. Иосиф Бляшке был образованным математиком, особенно высоко ценившим творчество знаменитого швейцарца Якоба Штейнера, — и читатель, уже ознакомившийся с настоящей книгой, вероятно, заметит в ней следы этого увлечения, переданного Бляшке-старшим своему сыну и духовному наследнику. Живо интересовался Иосиф Бляшке также вопросами истории науки — и впоследствии Вильгельм Бляшке любил вспоминать, как показывал ему отец школу, в которой некогда учился один из зачинателей современной астрономии

и математики Иоганн Кеплер, и дом, в котором были написаны первые научные труды Кеплера; это увлечение вопросами истории науки, легко различимое и в настоящей книге, также было полностью воспринято молодым Вильгельмом Бляшке, который пронес его через всю свою жизнь.

После окончания средней школы Бляшке сначала учился в университете в Граце, а затем в Вене, где его учителем являлся известный геометр Вильгельм Виртингер, под руководством которого молодой Бляшке подготовился к получению докторской степени. После этого Бляшке еще несколько лет странствовал по разным университетам, стремясь усовершенствовать свои знания под руководством крупнейших геометров мира. Здесь надо указать университет в Бонне, где Бляшке слушал лекции Эдуарда Штуди; университет в Пизе (Италия), привлекший Бляшке возможностью работать под руководством одного из классиков дифференциальной геометрии Луиджи Бианки; университет в Грейфсвальде (северная Германия), где преподавал в то время Фридрих Энгель — ученик и соратник знаменитого норвежского математика Софуса Ли (впрочем, Бляшке признавался, что не меньшим, чем Энгель, стимулом для него при выборе этого университета являлась близость берлинских театров и увлечение драматургией весьма популярного в те годы Герхарда Гауптмана); наконец, прославленный Гёттингенский университет, где Бляшке учился у Давида Гильберта и Феликса Клейна. Эти продолжительные «годы учения» (гётевское Lehrjahre; впрочем, продолжая вспоминать столь любимого автором настоящей книги Гёте, их вполне можно назвать и «годами странствий» — Wanderjahre) принесли впоследствии прекрасные плоды, и все перечисленные геометры, особенно Ф. Клейн, оказали на дальнейшую деятельность Бляшке большое влияние.

Преподавательскую деятельность Бляшке начал доцентом в Боннском университете; затем он переменил целый ряд высших учебных заведений (в Грейфсвальде, Праге, Лейпциге, Кенигсберге, Тюбингене), не задерживаясь ни в одном из них на сколько-нибудь длительный срок; по-видимому, это связано было с характерной для Бляшке страстью к странствованиям, со стремлением молодого ученого «повидать мир». Из университетов и институтов, в которых работал молодой Бляшке, он охотнее всего вспоминал впоследствии Высшую техническую школу в Праге, в которой его коллегой по

кафедре явился Густав Герглотц; в пражский период жизни Бляшке (1913—1915 гг.) были заложены основы его долголетней дружбы с Герглотцем, сыгравшей существенную роль в создании настоящей книги. В 1919 г. Вильгельм Бляшке был приглашен профессором вновь открытого Гамбургского университета, — и здесь он оставался вплоть до самой смерти, являясь одним из самых уважаемых членов первоклассного коллектива гамбургских математиков, включавшего (в разное время) таких известных ученых, как фон Нейман, Зигель, Артин, Островский, Радемахер, Радон, Гекке, Хассе, Коллатц, Нильсен, Шрейер, Шпернер и ряд других, в том числе и несколько непосредственных учеников Бляшке (Томсен, Боль, Келлер и др.). Дважды (в 1926 и в 1941 гг.) Бляшке избирался деканом математико-естественного факультета этого университета, а 1927/1928 г. он был даже ректором Гамбургского университета. В течение долгих лет Бляшке являлся руководителем математического семинара Гамбургского университета; он был основателем (и в течение многих лет — главным редактором) издаваемых этим семинаром «Трудов» (Hamburger Abhandlungen), в которых было опубликовано очень много работ самого Бляшке и его учеников, а также инициатором издания известной серии математических монографий (Hamburger Mathematischen Einzelschriften), в которой был опубликован целый ряд его книг (книги [4], [7], [9], [11], [12] и [14] — [18], из приложенного к настоящей статье списка).

Первой книгой Вильгельма Бляшке явилось настоящее сочинение, появившееся в свет в Лейпциге в 1916 г. В выборе темы этой книги отразились влияние отца и дружба с таким ярким представителем «геометрии в целом» как Густав Герглотц. Как всегда у Бляшке, появлению книги предшествовал ряд публикаций в научных журналах; первой из них явилась упомянутая на стр. 195 настоящей книги небольшая заметка в Göttinger Nachrichten, посвященная старому вопросу о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей и датированная 1912 годом[1]). За этой заметкой последовал ряд других — всего за период от 1912 до 1916 г. Бляшке

[1]) Теория выпуклых тел и задачи, связанные с изопериметрическими свойствами круга и шара, явились второй из последовательно чередовавшихся в научных интересах Бляшке тем; о самом первом его научном увлечении мы еще скажем в конце настоящей статьи.

напечатал свыше десяти статей, примыкающих по тематике к настоящей книге. Хотя заслуги Бляшке в этой старой области геометрии и не являются особенно выдающимися, но уже и здесь можно указать несколько серьезных его достижений. Прежде всего нужно упомянуть важный метод доказательства теорем о выпуклых телах, опирающийся на аппроксимацию рассматриваемого тела с помощью сходящейся к нему последовательности выпуклых тел; фундаментальное предложение о возможности выбора в каждой ограниченной бесконечной последовательности выпуклых тел сходящейся подпоследовательности (см. § 18 настоящей книги), сегодня представляющееся почти очевидным, до сих пор часто называют в геометрической литературе «теоремой Бляшке». Хорошей иллюстрацией этого общего метода может служить, например, изящное решение Бляшке задачи об отыскании фигуры фиксированной постоянной ширины, имеющей наименьшую площадь [1]) (этой фигурой является треугольник Релло, что независимо от Бляшке и почти одновременно с ним было доказано совершенно другим методом и Анри Лебегом [2])). Можно отметить также любопытный результат Бляшке, утверждающий, что каждая фигура данной ширины Δ содержит внутри себя круг ширины $\frac{2\Delta}{3}$ [3]) (эта теорема в определенном смысле «двойственна» известной теореме Юнга, утверждающей, что каждая фигура данного диаметра D содержится в круге диаметра $\frac{2D}{\sqrt{3}}$ [4])).

---

[1]) W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, Math. Ann. **76**, 1915, стр. 504—513 (доказательство воспроизведено в упомянутой на стр. 198 книге [9] — см. решение задачи 97).

[2]) См. H. Lebesgue, Sur le problème des isopèrimétres et sur les domaines de largeur constante, Bull. Soc. Math. France, C. R., 1914, стр. 72 (доказательство также воспроизведено в книге [9] — см. решение задачи 89).

[3]) W. Blaschke, Über den grossten Kreis einer konvexen Punktmenge, Jahresbericht Deutsch. Mathem. Vereinigung **23**, 1914, стр. 369—374 (доказательство воспроизведено в книге [9] — см. решение задачи 68).

[4]) См. H. W. E. Jung, Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst, Journ. Reine Angew. Math. **123**, 1901, стр. 241—257 (доказательство воспроизведено в книге [9] — см. решение задачи 67, — и в известных «Числах и фигурах» Г. Радемахера и О. Теплица, «Наука», 1966; см. гл. 16).

Однако значение исследований Бляшке по теории выпуклых тел отнюдь не ограничивается этими его результатами. Сегодня мы имеем много различных книг по теории выпуклых тел, — некоторые из них перечислены в списке литературы на стр. 197—200. Однако в 1916 г. таких книг не было вовсе — и первая книга Бляшке бесспорно сыграла выдающуюся роль в деле пробуждения интереса к теории выпуклых тел, характерном для геометрии XX века. Первая книга Бляшке сразу продемонстрировала также выдающийся популяризаторский и литературный талант автора: еще и сегодня эта книга является одним из лучших сочинений, по которым начинающий может познакомиться с основными идеями и характерными постановками задач теории выпуклых тел.

В этой статье, возможно, уместно остановиться на содержании настоящей книги несколько более подробно, имея в виду тех читателей, которые пожелали бы сначала по статье познакомиться с автором книги и лишь затем приступить к изучению самой книги. «Круг и шар» состоит из четырех глав, посвященных, соответственно, «изопериметрическому свойству» круга, утверждающему, что если плоская (выпуклая) фигура Φ площади F имеет периметр L, то

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0, \qquad (*)$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда Φ есть круг; родственному экстремальному свойству шара, утверждающему, что объем J и площадь поверхности O (трехмерного, выпуклого) тела K связаны неравенством

$$O^3 - 36\pi J^2 \geqslant 0, \qquad (**)$$

где равенство имеет место лишь если K есть шар; связанным с этим кругом идей исследованиям Шварца, Брунна и Минковского (сюда включаются понятие о линейных системах выпуклых тел и доказательство неравенства Брунна — Минковского) и экстремальным задачам, относящимся к (достаточно гладким) выпуклым поверхностям, на которые наложены определенные условия, ограничивающие возможности изменения гауссовой кривизны поверхности. Кроме того, книга содержит краткое добавление, посвященное различным задачам

о выпуклых телах, включая, например, совсем нетривиальные предложения о выпуклых телах постоянной ширины (во многом не аналогичных двумерным фигурам постоянной ширины), постоянного охвата и постоянной площади тени («постоянной яркости», по терминологии автора).

Построение первой и второй глав во многом аналогично. В обоих случаях сначала приводятся весьма наглядные и элементарные соображения Штейнера (так, § 1 посвящен известному «четырехшарнирному методу» доказательства изопериметрического свойства круга); затем следует критика этих доказательств, связанная в первую очередь с именем Вейерштрасса, и, наконец, более строгие доказательства основных теорем. Доступно и подробно изложены принципиально важные вопросы, связанные с предельным переходом в множестве выпуклых фигур или тел и с использованием соображений компактности; много внимания уделяется обсуждению строгого смысла фигурирующих в книге понятий (длина кривой, площадь поверхности и т. д.). Чисто геометрические рассуждения все время перемежаются с аналитическими; поэтому книга дает хорошее представление о разнообразии методов, используемых в теории выпуклых тел. Как всегда у Бляшке, ярко и достаточно полно освещается история рассматриваемых задач; очень украшают книгу и весьма полезны для молодых геометров, которым книга в основном адресована, многочисленные указания на нерешенные задачи и возможные пути дальнейших исследований.

Особо должен быть отмечен стиль книги. В немецкой математической литературе можно указать две диаметрально противоположные по своим установкам манеры изложения, наиболее яркими представителями которых были Эдмунд Ландау и Феликс Клейн; каждая из этих манер бесспорно имеет свои достоинства и свои недостатки. Первая манера изложения характеризуется строгой последовательностью всех рассуждений, не перебиваемых ни одним «посторонним» отступлением и доводящих до конца любое — сколь угодно простое и сколь угодно сложное! — доказательство; она хорошо воспроизведена в известной пародии на стиль Э. Ландау:

«**Satz 1.** Eins plus Eins ist Zwei.
Beweis. Trivial.

Satz 2. Zwei plus Eins ist Drei.
Beweis. Siehe Satz 1.
. . . . . .»[1]).

Литературная манера Бляшке родственна манере Клейна (и диаметрально противоположна стилю Эдмунда Ландау); не случайно Бляшке является фактическим автором одной из «самых клейновских» книг Клейна — его «Высшей геометрии» (переведенной и на русский язык)[2]). Для Бляшке, как и для Клейна, характерна «свободная» манера изложения, где выкладки зачастую перебиваются обширными отступлениями, посвященными прошлому излагаемых теорий или, наоборот, возможной будущности рассматриваемых идей и методов и формулировке нерешенных еще задач, а доказательства проводятся с разной степенью подробности, заменяясь иногда лишь наводящими соображениями и указанием

---

[1]) «**Теорема 1.** Один плюс один равно двум.
Доказательство. Тривиально (или ясно).
Теорема 2. Один плюс два равно трем.
Доказательство. См. теорему 1.
. . . . . .».

Для того из читателей, который найдет эту пародию неправдоподобно шаржированной, мы воспроизведем здесь начало § 2 введения к замечательному «Введению в дифференциальное и интегральное исчисление» Эдмунда Ландау (ИЛ, 1948, стр. 19):

«**Определение 4.** $3=2+1$, $4=3+1$, $5=4+1$, $6=5+1$, $7=6+1$, $8=7+1$, $9=8+1$, $10=9+1$.

Теорема 4. Неравенства

$$0 \leqslant r < 10,$$

равно как и

$$0 \leqslant r \leqslant 9,$$

выполняются для

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

и ни для каких других целых r.

Доказательство. Ясно.»

[2]) Ф. Клейн, Высшая геометрия, ГОНТИ, 1939 (формально Бляшке в этой книге принадлежит лишь I раздел третьей части, т. е. §§ 77—81; однако на самом деле вся книга целиком составлена Бляшке по лекциям Клейна).

на метод или выразительным примером[1]). Такая манера изложения преследует своей целью стимулировать, где можно, самостоятельную работу читателя и побудить его к попыткам самостоятельного творчества, — и этой цели как Бляшке, так и Клейн достигали в наилучшей степени: недаром оба они имели так много превосходных учеников. И последующие книги Бляшке — как те, о которых мы еще будем говорить ниже, так и те, на которых мы не сможем остановиться (в первую очередь здесь хочется упомянуть интереснейшие учебники «Аналитическая геометрия» [20] и «Проективная геометрия» [19]; см. список на стр. 226 — 227), — отличались теми же высокими достоинствами, что и его первая книга.

Сам Бляшке до конца своих дней сохранял живой интерес к проблематике, связанной с выпуклыми телами: достаточно указать, как часто обращался он в своей литературной деятельности и в своем научном творчестве к знаменитой изопериметрической задаче, ее вариантам, обобщениям и аналогам — недаром именно здесь лежат истоки некоторых из наиболее значительных направлений, разрабатывавшихся В. Бляшке и его школой (об этом мы еще скажем ниже). Замечательная «Дифференциальная геометрия» Бляшке (здесь идет речь о переведенном и на русский язык первом томе [2] трехтомного сочинения Бляшке) содержит три доказательства изопериметрического свойства круга, небольшое «Введение в дифференциальную геометрию» [22] — семь, «Лекции по интегральной геометрии» [11] — четыре. А среди учеников

---

[1]) В книгах Ф. Клейна или В. Бляшке любое сколько-нибудь сложное доказательство всегда предваряется изложением «общей идеи» или «плана» доказательства (см., например, § 15 или п. 1 § 26 настоящей книги) — а в ряде случаев авторы ограничиваются лишь сообщением «идеи». В противоположность этому Э. Ландау любил говорить, что он не понимает смысла выражения «идея доказательства», и на предложение рассказать ему «общую идею» какого-либо математического рассуждения неизменно предлагал собеседнику взять карандаш и бумагу и изложить доказательство полностью, не пропуская ни одной выкладки. Это различие в установках делает книги Клейна и Бляшке гораздо более подходящими для большинства начинающих, чем книги Ландау; впрочем, автор настоящих строк вспоминает, как он принимал экзамен по математическому анализу у студента-первокурсника, который соглашался отвечать лишь по книге Э. Ландау, утверждая, что не понимает ни одного другого учебника (сегодня этот студент — видный специалист по математической логике).

Бляшке можно указать таких математиков, как руководитель швейцарской геометрической школы Гуго Хадвигер или руководитель венгерской геометрической школы Ласло Фейеш Тот, которые сумели найти в теории выпуклых тел источники для построения новых содержательных геометрических теорий.

Замечательные педагогические таланты Бляшке сказывались и на устном преподавании. Его лекторская манера была близка к литературной; ее отличали та же живость и нешаблонность, и притом исключительные четкость и ясность, отражающиеся, в частности, в отчетливой дикции, превосходных чертежах на доске и почти каллиграфических записях мелом. Автор настоящих строк встречался с Бляшке во время III Всесоюзного математического съезда в Москве в 1956 г. Бляшке было в это время больше 70 лет и физическая старость была уже заметна в нем; ходил он опираясь на палку и с некоторым трудом. Однако когда Бляшке вышел на кафедру для прочтения своего доклада, он отнюдь не произвел на обширную аудиторию впечатления старика. Сразу виден был первоклассный лектор: большой и превосходно построенный доклад был прочитан необыкновенно живо и темпераментно, с шутками и остротами, которым дружно смеялась вся аудитория, даже слушатели, плохо знающие немецкий язык, — так ясно и отчетливо говорил Бляшке (покойный московский геометр Я. С. Дубнов утверждал, что он понимает немецкую речь, когда говорят русские или Бляшке). Блестящие лекторские данные В. Бляшке становились еще более ценными из-за его страсти к путешествиям — он читал лекции в Италии и в Испании, в Турции и в Латинской Америке и всюду оставлял учеников и продолжателей; в последние годы жизни он наряду с работой в Гамбурге регулярно выступал перед студентами и преподавателями университета им. Гумбольдта в Берлине, не прекращая, буквально до последнего года, и более далеких поездок. Неоднократно бывал Бляшке и в нашей стране: он принимал участие в I Всесоюзном математическом съезде в Харькове в 1930 г., в III Всесоюзном математическом съезде в Москве в 1956 г. и в I Международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии в Москве в 1934 г., где он несколько скандализировал собравшихся геометров, заявив в своем докладе с присущей ему живостью и категоричностью:

«Мы собрались здесь, чтобы забить последний гвоздь в гроб тензорной дифференциальной геометрии».

Мы рассказываем о жизненном пути Вильгельма Бляшке, — и здесь, видимо, следует сказать также и о другом. Эта книга посвящена чисто математическим проблемам — и автор с одинаковым уважением ссылается в ней на исследования замечательного ученого, педагога и человека Феликса Хаусдорфа, доведенного фашистскими преследованиями до самоубийства, и на работы видного математика и педагога Людвига Бибербаха, опозорившего себя гнусными статьями на тему об «арийской» и «еврейской» математике. Сам Бляшке никогда не был активным фашистом наподобие Бибербаха, — но борцом с существующим режимом он тоже никогда не был, и в период фашистского господства в Германии у него вырвалось несколько фраз, о которых он имел все основания сожалеть впоследствии [1]). Также и предисловие к интересной книге [13], последняя фраза которого слишком явно написана с оглядкой на «сильных мира сего», делает ему мало чести. Однако в целом для многочисленных книг и статей Бляшке историко-научного содержания (см., например, его интересную книжку «Речи и путешествия геометра» [27]) характерны истинное уважение к творчеству всех народов, восхищение перед культурными достижениями разных эпох и разных школ. Особенно горячо воспринимал Бляшке культурный подвиг древних греков (см., например, переведенную и на русский язык книгу [23]); к древнему Риму, прославившемуся не научными достижениями, а военным могуществом, он, в противоположность характерным для официальной Германии 1933—1945 гг. воззрениям, относился несравненно более прохладно. В частности, горячая привязанность Бляшке к острову Сицилия, который он неоднократно посещал и с математиками которого поддерживал контакт, возможно, связана была с тем, что здесь Бляшке чувствовал себя вблизи от мест, послуживших истоками столь дорогой ему греческой цивилизации.

Возвратимся, однако, к обзору научного пути Бляшке. В самом начале 20-х годов этого столетия группа выдающихся немецких ученых предприняла издание обширной серии мате-

---

[1]) См., например, Н. Винер, «Я математик», Физматгиз, 1964, стр. 153.

матических монографий, получившей название «Основные направления математических наук» (die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften); эта серия весьма скоро приобрела почетную известность среди математиков всего мира. Во главе нового издания стал Рихард Курант; наряду с ним редакционный совет серии возглавили Вильгельм Бляшке, Макс Борн и Карл Рунге. Первой книгой новой серии явилась первая часть обширного учебника Бляшке «Лекции по дифференциальной геометрии и геометрическим основам теории относительности Эйнштейна» [2]. Этот первый том сочинения Бляшке (впоследствии переведенный на русский, английский и турецкий языки) представлял собой превосходный учебник дифференциальной геометрии, характерными особенностями которого явились внимание к вопросам геометрии в целом и некоторые ценные методические новшества. Судя по ссылке на теорию относительности в названии книги, Бляшке первоначально имел в виду продолжить свою книгу в направлении римановой геометрии и геометрии аффинной связности; однако реально он пошел по другому пути.

Одной из основных идей, вдохновляющих научную деятельность Бляшке, являлась «Эрлангенская программа» Клейна, т. е. идея о существовании ряда независимых геометрий, определяемых разными группами преобразований, играющих в данной «геометрии» роль «движений»; представитель дифференциальной геометрии Бляшке много сделал для того, чтобы ввести эти принципы и в дифференциальную геометрию. Исходным пунктом для новой струи в исследованиях Бляшке явилось все то же изопериметрическое свойство круга: Бляшке живо заинтересовал вопрос о том, как можно перенести это свойство и в аффинную геометрию, в которой ведь не существует ни понятия длины дуги, ни даже понятия площади (а лишь понятие отношения площадей)[1]). Первый

---

[1]) Относительно аффинной геометрии см., например, книгу, названную в подстрочном примечании на стр. 189. В ней, в частности, приведена найденная В. Бляшке «изопериметрическая теорема» плоской аффинной геометрии, представляющая собой наиболее точный аналог изопериметрического свойства круга евклидовой геометрии: для каждой (выпуклой) плоской фигуры Ф площади F

$$\Lambda^3 - 8\pi^2 F \leqslant 0,$$

где Λ — так называемый «эквиаффинный периметр» фигуры Ф;

результат в этом направлении был получен Бляшке еще в том же 1916 г., когда вышла в свет книга «Круг и шар», — а именно он доказал, что если T есть площадь наибольшего из вписанных в выпуклую фигуру Ф площади F треугольников, то

$$4\pi T - 3\sqrt{3}F \geqslant 0,$$

где равенство выполняется в том и только том случае, когда Ф есть эллипс. Соответствующая заметка Бляшке[1]) имеет подзаголовок «К аффинной геометрии. I» — и она явилась первой из длинной серии статей самого Бляшке и его сотрудников, имеющих тот же подзаголовок, где только номер «I» заменялся на «II», «III» и т. д.; впоследствии и сам заголовок несколько трансформировался и звучал уже так: «К аффинной дифференциальной геометрии». Эти статьи (36 работ, 22 из которых принадлежали перу самого Бляшке) разрабатывали дифференциальную геометрию плоскости и трехмерного пространства, где роль «движений» играют аффинные преобразования. Вторая часть «Дифференциальной геометрии Бляшке» [3], подготовленная им при участии его ученика Курта Рейдемейстера и вышедшая в свет в 1923 г., подытожила как эти недавние исследования, так и ряд более старых работ, посвященных тому же кругу вопросов.

Аналогичный характер имеет и обширная третья часть той же книги [5], вышедшая в свет в 1929 г. и составленная при участии рано скончавшегося ученика Бляшке Герхарда Томсена, которого сам Бляшке особенно высоко ценил. Книга [5] посвящена теории кругов и шаров, т. е. трем группам «круговых» (переводящих окружности в окружности) преобразований плоскости и «шаровых» преобразований пространства; в случае плоскости это суть:

равенство здесь достигается лишь в том случае, когда Ф — эллипс (см. стр. 212—213 указанной книги; заметим, что, в то время как площадь F фигуры Ф и ее «эквиаффинный периметр» Λ определены лишь в «эквиаффинной геометрии», рассматривающей свойства фигур, не меняющиеся при так называемых «эквиаффинных преобразованиях» — при аффинных преобразованиях, сохраняющих площади всех фигур, — отношение $\Lambda^3 : F$ имеет смысл и в аффинной геометрии).

[1]) W. Blaschke, Isoperimetrische Eigenschaft von Ellipse und Ellipsoid, Leipziger Berichte **68**, 1916, стр. 217—239.

1° Группа *круговых преобразований Мёбиуса* или «группа инверсий» — соответствующие преобразования переводят точки в точки и переводят окружности (к которым причисляются также «окружности бесконечно большого радиуса», т. е. прямые) в окружности;

2° Группа *круговых преобразований Лагерра* — соответствующие преобразования переводят прямые в прямые и переводят окружности (к числу которых здесь причисляются и «окружности радиуса нуль», т. е. точки) в окружности;

3° Группа *круговых преобразований Ли* — эти преобразования переводят окружности (к числу которых причисляются и «окружности радиуса нуль», т. е. точки, и «окружности бесконечно большого радиуса», т. е. прямые) снова в окружности, но и точки и прямые они, вообще говоря, переводят в окружности [1]).

В книге [5] дано подробное описание строения и свойств соответствующих групп преобразований плоскости, трехмерного пространства и n-мерного пространства, а также указана их связь с движениями неевклидова пространства Лобачевского и псевдоевклидова пространства Минковского (лежащего в основе геометрического описания феноменов специальной теории относительности Эйнштейна); здесь намечено также построение дифференциальной геометрии плоскости и пространства на базе этих трех групп.

Превосходные книги Бляшке послужили мощным толчком для дальнейшего развития соответствующих теорий; так, доведенная до 1957 г. библиография книг и работ по аффинной дифференциальной геометрии, приложенная к учебнику П. А. и А. П. Широковых «Аффинная дифференциальная геометрия» (М., Физматгиз, 1959), насчитывает 401 название, из которых лишь 70 предшествуют книге Бляшке (причем больше половины из этих 70 ранних работ относятся к упомянутой выше серии статей «К аффинной геометрии», принадлежащей самому В. Бляшке и его ученикам).

Говоря о трехтомной «Дифференциальной геометрии» [2], [3], [5] Бляшке, уместно воспроизвести предисловие к книге [3];

---

[1]) По поводу трех групп «круговых» преобразований плоскости см., например, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Физматгиз, 1963, стр. 448—517.

это предисловие подписано В. Бляшке и К. Рейдемейстером, но бесспорно целиком написано самим Бляшке и весьма типично для его автора.

Кто способен — творит, кто неспособен — учится.

Б. Шоу, «Человек и сверхчеловек».

Первое — в помощь рецензенту.

В то время как в первой книжке этого учебника — если отвлечься от кратковременных экскурсий в сторону — мы шли протоптанной и хорошо маркированной дорогой, здесь сделана попытка проложить новую тропу. В этой книге рассматриваются такие свойства фигур, которые не меняются при аффинных преобразованиях, т. е. при преобразованиях, переводящих прямые в прямые и сохраняющих параллельность; при этом нас в первую очередь интересуют здесь дифференциально-геометрические особенности фигур и экстремальные задачи, т. е. задачи, относящиеся к области вариационного исчисления. Мы рассчитываем показать следующее: Подобно столь далеко продвинутой классической дифференциальной геометрии можно воздвигнуть и здание аффинной дифференциальной геометрии, которое, в силу обширности используемых при его постройке средств и богатству результатов, вполне выдерживает сравнение со зданием классической дифференциальной геометрии и являет собой плодотворную область для дальнейших исследований.

Второе — предупреждение читателю.

Мы пытались сделать отдельные части этой книги, возникшей из наших гамбургских лекций, по возможности независимыми одна от другой. Таким образом, читатель может ограничиться тем, что после ознакомления с вступительными замечаниями он извлечет отдельные привлекательные для него изюминки. В частности, теорию поверхностей можно читать и не знакомясь с теорией кривых, а любитель Общего может сразу начинать с гл. V, по которой он ознакомится с теорией тензоров. Некоторые же, наоборот, предпочитают Частное; для них предназначены приложенные к каждой главе задачи.

Третье — оказание почестей.

Наш первый самый низкий поклон — Феликсу Клейну! От него ведет начало геометрическое мышление, базирующееся на рассмотрении непрерывных групп преобразований, — а этот образ мыслей является основой всего дальнейшего.

Следующий дружеский поклон — пражскому геометрическому кружку! В 1916 г. Г. Пик совместно с одним из нас [1]) опубликовал первое исследование, относящееся к аффинной теории поверхностей; позже А. Винтерниц и Л. Бервальд основали Аффинный союз — и создание этой книги обязано Л. Бервальду особенно многим.

---

[1]) Разумеется — с В. Бляшке. — *И. Я.*

Еще один поклон сразу в очень много сторон — всем тем, кто вместе с нами создали длинную очередь работ «К аффинной геометрии», опубликованных в Leipziger Berichte, Mathematische Zeitschrift, Hamburger Abhandlungen! Мы надеемся, что все эти лица будут довольны полнотой изложения и обилием ссылок на их работы.

За помощь в чтении корректур мы особенно признательны Э. Артину, Л. Бервальду, А. Душеку и Г. Томсену[1]).

Благодарность совсем особого рода мы обязаны принести издателю, который сохранил жизненные силы в тот период, когда двоюродный брат знаменитого французского геометра исполнял свой победный танец над телом поверженной Германии.

Ранняя весна 1923 г.

Многое заслуживает внимания в этом примечательном Предисловии — начиная с предпосланного автором своему учебнику эпиграфа, хорошо характеризующего юмор Бляшке, который некоторым может показаться несколько грубоватым. Не менее характерна и последняя фраза, имеющая в виду временную оккупацию французскими войсками Рурской области Германии, произведенную в 1923 г. по распоряжению премьер-министра Франции Раймона Пуанкаре (которому двоюродный брат Раймона, знаменитый французский математик[2]) Анри Пуанкаре, дал прозвище «Пуанкаре-война»); эта оккупация не принесла славы Франции и вызвала в Германии резкое обострение национальных чувств. Однако оскорбленное национальное самолюбие не всегда является хорошим советником — и от этой последней фразы предисловия к книге [3] прямая дорога ведет к уже упомянутой выше последней фразе предисловия к книге [13], которую австрийские патриоты, следуя стилю Бляшке, могли бы, пожалуй, охарактеризовать как «победный танец над телом поверженной Австрии».

Непосредственным продолжением трехтомной «Дифференциальной геометрии» Бляшке явилась написанная совместно с его учеником Герритом Болем книга «Геометрия тканей» [13], вышедшая в свет в 1938 г. в той же серии монографий, что и первые три тома. Основная идея «геометрии тканей» (или «текстильной геометрии», как любил говорить Бляшке на

---

[1]) Все четверо — очень крупные математики. — *И. Я.*

[2]) В старину слово «геометр» рассматривалось как синоним слова «математик».

первом этапе разработки соответствующей теории; впрочем, после того как он неожиданно для себя получил приглашение на совещание работников текстильной промышленности, Бляшке стал говорить о «сотах», а не о «тканях») также целиком вкладывается в рамки концепции Клейна. Эта идея состоит в построении «топологической дифференциальной геометрии», т. е. в изучении тех дифференциально-геометрических (локальных!) свойств геометрических объектов, которые сохраняются при произвольных взаимно однозначных и взаимно непрерывных (топологических) преобразованиях. При этом использование классического аппарата дифференциальной геометрии заставляет ограничиться лишь «гладкими» (дифференцируемыми достаточное число раз или даже аналитическими) преобразованиями. Ясно, что изменение целей исследования неизбежно отразится и на объекте его: ведь изучаемые в классической дифференциальной геометрии кривые и поверхности в малом «устроены» топологически одинаково (малая дуга любой линии неотличима, с этой точки зрения, от отрезка прямой, а небольшой участок поверхности — от плоской площадки) и не имеют топологических свойств, позволяющих их различать. Также и «сети» на плоскости или на произвольной поверхности, т. е. двупараметрические семейства линий, такие, что через каждую точку определенной области проходят две (не касающиеся друг друга) линии, устроены с топологической точки зрения одинаково — все они топологически эквивалентны сети координатных линий на плоскости в декартовой системе координат. По-иному обстоит дело, когда мы переходим к «3-ткани» (или «3-сотам») на плоскости или на произвольной поверхности, т. е. трехпараметрическому семейству линий такому, что в каждой точке пересекаются линии всех трех семейств, — здесь уже можно указать существенные топологические инварианты этих образов и выделить те или иные специфические частные случаи (например, так называемую «шестиугольную ткань», топологически эквивалентную трем пучкам параллельных прямых на плоскости; геометрически «шестиугольная ткань» характеризуется замкнутостью составленных из линий ткани «шестиугольных фигур» — см. рис. 1).

«Топологическая дифференциальная геометрия» явилась самым любимым детищем Бляшке; ни одной из своих идей он не дорожил до такой степени и ни одну не стремился

так популяризировать. Первые публикации Бляшке и его учеников, носящие подзаголовок «Топологические вопросы дифференциальной геометрии», появились в математических журналах в конце 20-х годов [1]), — а уже в 1932 г. в США вышла на английском языке первая книга Бляшке на эту тему [6]; она явилась результатом обработки лекций, прочитанных автором летом того же года в Чикаго. Второй книгой на эту тему явилась обстоятельная монография Бляшке — Боля [13]; третьей — книга на испанском языке [24], вышедшая в свет в Барселоне в 1954 г. и излагающая содержание лекций, прочитанных Бляшке в эти годы в Барселоне и в Мессине (Италия); четвертым вариантом явилось «Введение в геометрию сот» [25], вышедшее на немецком языке в Швейцарии в 1955 г. (эта книга переведена и на русский язык). Курсы лекций и отдельные доклады о «Топологической дифференциальной геометрии» Бляшке читал бессчетное число раз в разных странах; так, можно указать, что все три выступления Бляшке в нашей стране (в Харькове в 1930 г. [2]), в Москве в 1934 г. [3]) и в Москве в 1956 г.) были посвящены этой теме.

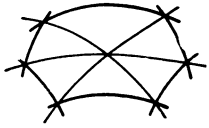

Рис. 1.

Еще одно направление научной работы Бляшке и его школы наметилось в середине 30-х годов, когда в журналах начали появляться статьи нового цикла, имеющего подзаголовок «Интегральная геометрия». Основные идеи «интегральной геометрии» связаны с более старыми исследованиями о так называемых «геометрических вероятностях», т. е. о мерах в множествах различных геометрических объектов —

---

[1]) Всего серия «Топологические вопросы дифференциальной геометрии» содержала 66 (!) работ, опубликованных в различных математических журналах между 1928 и 1938 гг.; правда, лишь 14 из этих 66 работ принадлежали самому В. Бляшке (резко увеличившееся по сравнению с «аффинным периодом» число учеников и сотрудников Бляшке свидетельствовало о его возросшей популярности в математическом мире).

[2]) В. Бляшке, Новые течения в дифференциальной геометрии, Труды I Всесоюзного съезда математиков, ОНТИ, 1936, стр. 156—178 (русск. и нем.).

[3]) В. Бляшке, О геометрии тканей, Труды семинара по вект. и тензорн. анализу при МГУ, вып. 4, 1937, стр. 48—61 (русск. и нем.).

точек, прямых и иных фигур на плоскости; точек, прямых или плоскостей в пространстве и т. д. Сама задача о введении мер, инвариантных относительно движений или других групп геометрических преобразований, является достаточно простой и без труда решается в общем виде. Интерес, однако, представляет не само введение меры, а сопоставление мер различного рода. Один из первых результатов такого рода был получен еще в прошлом веке английским математиком Морганом Вильямом Крофтоном, доказавшим, что мера множества прямых, пересекающих определенную дугу (где каждая прямая засчитывается столько раз, сколько раз пересекает она эту дугу), пропорциональна длине дуги; ему родствен результат Анри Пуанкаре, показавшего, что мера множества фиксированных по форме и по размерам (но не по положению на плоскости!) дуг K, пересекающих неподвижную дугу K_0 (где также каждая дуга K считается столько раз, сколько раз пересекает она K_0), пропорциональна произведению длин K и K_0.

Теоремы М. В. Крофтона и А. Пуанкаре можно вывести из дескриптивных определений мер и длины дуги. В самом деле, длина $d(AB)$ отрезка AB определяется как сопоставляемое отрезку AB число, удовлетворяющее следующим условиям:

1° положительность: если A и B — разные точки, то

$$d(AB) > 0;$$

2° инвариантность: если отрезки AB и $A'B'$ равны, то

$$d(AB) = d(A'B');$$

3° аддитивность: если C — точка отрезка AB, то

$$d(AB) = d(AC) + d(CB)$$

(рис. 2, *а*). Но от меры множества прямых, пересекающих отрезок AB, естественно потребовать выполнения тех же трех условий — положительности, инвариантности и аддитивности, откуда и следует, что эта мера $m(AB)$ пропорциональна длине $d(AB)$ отрезка AB:

$$m(AB) = kd(AB),$$

где коэффициент пропорциональности k зависит от выбора единиц измерения длин $d(AB)$ и мер $m(AB)$.

Далее, длина $d(\smile AB)$ дуги AB определяется как предел длины $d(AA_1) + d(A_1A_2) + \ldots + d(A_{n-1}A_n) + d(A_nB)$ вписанной в дугу AB ломаной $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nB$, когда эта ломаная «стремится» к дуге AB (рис. 2, *б*; см., например, указанную на стр. 199 статью В. Г. Болтянского [21]). Но также и меру $m(\smile AB)$ множества пересекаю-

щих дугу AB прямых можно определить как предел, к которому стремится выражение $m(AA_1)+m(A_1A_2)+\ldots+m(A_{n-1}A_n)+m(A_nB)$, когда ломаная $AA_1A_2\ldots A_{n-1}A_nB$ «стремится» к дуге AB; отсюда и вытекает формула Крофтона:

$$m(\smile AB)=k\cdot d(\smile AB). \tag{1}$$

Аналогично этому устанавливается, что мера $m_K(K_0)$ множества пересекающих неподвижную дугу K_0 «подвижных» дуг K пропорциональна длине $d(K_0)$ дуги K_0:

$$m_K(K_0)=k_K\cdot d(K_0);$$

здесь мы пока считаем дугу K фиксированной, неизменной. Если же учитывать также возможность изменения дуги K, то следует заметить, что множество «подвижных» дуг K, пересекающих неподвижную дугу K_0, и множество «подвижных» дуг K_0, пересекающих

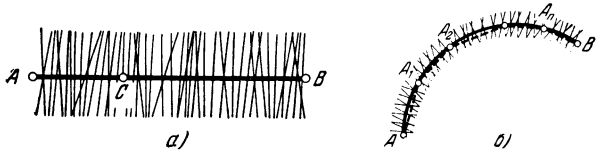

Рис. 2.

неподвижную дугу K, изображаются одним чертежом, рассматриваемым, так сказать, «с позиции наблюдателя, связанного с дугой K_0» и «с позиции наблюдателя, связанного с дугой K». Отсюда следует, что мера $m_K(K_0)$ пропорциональна не только длине $d(K_0)$ дуги K_0, но и длине $d(K)$ дуги K:

$$m_K(K_0)=c\cdot d(K)\,d(K_0), \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности c опять зависит от выбора единиц измерения мер и длин дуг.

Первый результат по «интегральной геометрии» В. Бляшке получил еще в 1917 г. (т. е. через год после опубликования книги «Круг и шар»); он был обязан своим появлением инициативе того же Г. Герглотца, который сыграл такую важную роль в создании настоящей книги. И по тематике и по методам (симметризация Штейнера; см. § 15 настоящей книги) этот результат был тесно связан с кругом проблем, родственным «изопериметрическому свойству» круга. А именно, Бляшке доказал[1]) следующую теорему, которую еще в XIX

[1]) W. Blaschke, Lösung des «Vierpunktproblems» von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, Leipziger Berichte **69**, 1917, стр. 436—453.

столетии предполагал верной знаменитый Джеймс Сильвестр: вероятность того, что взятые наугад внутри плоской фигуры Ф четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, меньше всего в том случае, когда фигура Ф является эллипсом, и больше всего в том случае, когда фигура Ф является треугольником («четырехточечная проблема» Сильвестра[1])). Также и в дальнейшем «интегральная геометрия» Бляшке оказалась тесно связанной с «изопериметрической проблемой»; методами интегральной геометрии удалось дать много разнообразных доказательств «изопериметрических свойств» круга и шара и их обобщений (см., например, книги [11], [12] Бляшке); в интегральной геометрии доказывается также неравенство Минковского для «смешанных объемов» (ср. стр. 122—123 настоящей книги) и ряд других результатов, тесно связанных с изопериметрией круга и шара; играющие такую большую роль в настоящей книге формулы для площади фигуры, «параллельной» данной фигуре:

$$F_\lambda = F + L\lambda + \pi\lambda^2 \tag{3}$$

(см. стр. 111), и для объема тела, «параллельного» данному телу:

$$J_\lambda = J + O\lambda + M\lambda^2 + \frac{4}{3}\pi\lambda^3 \tag{4}$$

(стр. 123), также тесно связаны с интегральной геометрией (в частности, формула (4) является частным случаем так называемой «основной кинематической формулы» интегральной геометрии). Так, например, относящиеся к интегральной геометрии соображения позволяют весьма просто получить следующие два неравенства, принадлежащих известному датскому геометру Томми Боннезену (см. его книгу [22], указанную на стр. 199):

$$L^2 - 4\pi F \geqslant \pi^2 (R - r)^2, \tag{***}$$

---

[1]) Ср. с так называемой «трехточечной проблемой» Сильвестра (поставленной тем же Дж. Сильвестром и решенной впервые М. В. Крофтоном), требующей оценить среднюю площадь треугольника, образованного тремя взятыми наугад точками выпуклой фигуры Ф площади 1 (эта площадь оказывается наименьшей и равной $\frac{35}{48\pi^2} \approx 0{,}0739$, когда Ф есть эллипс, и наибольшей и равной $\frac{1}{12} \approx 0{,}0844$, когда Ф есть треугольник; см. § 24 книги [3] Бляшке).

где R есть радиус «описанного круга» выпуклой фигуры Φ, т. е. наименьшего круга, заключающего Φ внутри себя, а r — радиус «вписанного круга» фигуры Φ, т. е. наибольшего круга, который можно поместить внутри Φ, и

$$M^2 - 4\pi O \geqslant 4\pi^2 (R - r)^2, \qquad (****)$$

где R есть радиус «описанного шара» выпуклого тела K, а r — радиус его «вписанного шара». Ясно, что из неравенства (***) сразу следует как основное «изопериметрическое неравенство» (*) (стр. 205), так и то, что равенство в нем может достигаться только тогда, когда Φ есть круг; из неравенства (****) вытекает неравенство Минковского

$$M^2 - 4\pi O \geqslant 0$$

(стр. 124) и то, что равенство в нем реализуется лишь для шара.

Наметим здесь вывод неравенства Боннезена (***). Воспользуемся формулой Пуанкаре (2), приняв в ней за «неподвижную» дугу K_0 ограничивающую фигуру Φ выпуклую кривую длины L, а за «подвижную» дугу K — окружность радиуса ρ, где $r \leqslant \rho \leqslant R$. Ясно, что окружность K фиксированного радиуса ρ полностью определяется своим центром Q; поэтому множество окружностей K сводится к множеству их центров Q, а мера $m_K(K_0)$ множества этих окружностей — к мере $m(Q)$ множества их центров. Но мера $m(Q)$ множества центров Q, т. е. множества точек, есть не что иное, как просто площадь, покрываемая этими точками[1]); только в соответствии с нашим условием о подсчете дуг K центр Q окружности K должен считаться столько раз, сколько раз соответствующая окружность пересекает кривую K_0. А так как — если отвлечься от имеющего меру нуль множества окружностей K, касающихся кривой K_0, — пересекающая K_0 окружность K пересекает K_0 не менее чем в *двух* точках, то

$$m_K(K_0) = m(Q) \geqslant 2F(Q),$$

где $F(Q)$ — площадь, покрытая центрами Q окружностей K. Поэтому, в силу формулы (2), в которой следует положить $d(K_0) = L$ и $d(K) = 2\pi\rho$, имеем

$$F(Q) \leqslant C\pi\rho L,$$

---

[1]) От меры $m_K(K_0)$ множества окружностей K — т. е., по существу, от меры множества точек Q — естественно потребовать выполнения тех же условий положительности, инвариантности и аддитивности, которые определяют площадь (см., например, указанную на стр. 199 статью В. А. Рохлина [20]); отсюда и вытекает, что мера $m_K(K_0)$ пропорциональна площади, «покрываемой» точками Q.

где коэффициент пропорциональности C зависит от выбора единиц площадей и длин кривых.

Заметим теперь, что покрытая центрами Q окружностей K площадь представляет собой фигуру, «параллельную» фигуре Ф, контур которой отстоит от линии K_0 на расстоянии ρ (рис. 3) [1]. Таким образом, $F(Q) = F_\rho = F + L\rho + \pi\rho^2$ и, значит,

$$F + L\rho + \pi\rho^2 \leqslant C\pi\rho L. \tag{5}$$

Для того чтобы определить численное значение коэффициента C, достаточно принять за K_0 окружность радиуса 1. В силу $r \leqslant \rho \leqslant R$,

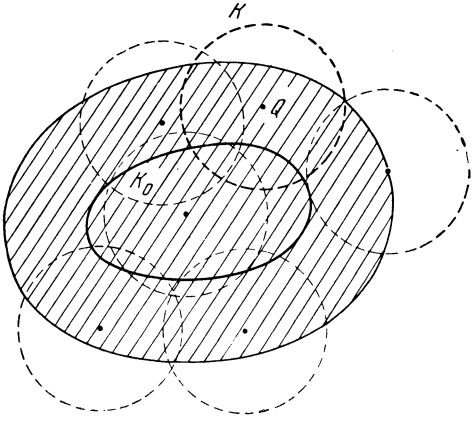

Рис. 3.

тогда с неизбежностью получаем $\rho = 1$; далее, в этом случае $F = \pi$ и $L = 2\pi$. Кроме того, неравенство (5) теперь обращается в равенство, ибо никакая окружность K не пересекает окружность K_0 более чем в двух точках. Поэтому мы имеем

$$\pi + 2\pi \cdot 1 + \pi \cdot 1^2 = C \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2\pi,$$

откуда вытекает, что

$$C = \frac{2}{\pi}.$$

Таким образом, неравенство (5) можно несколько упростить:

$$F \leqslant L\rho - \pi\rho^2. \tag{6}$$

---

[1]) Неравенства $r \leqslant \rho \leqslant R$ обеспечивают отсутствие «пустот» в фигуре, заполняемой центрами Q окружностей K.

Нам будет более удобна несколько иная форма неравенства (6). Поменяем в нем знаки и умножим обе его части на 4π:

$$-4\pi F \geqslant -4\pi L\rho + 4\pi^2\rho^2;$$

далее дополним правую часть до полного квадрата:

$$L^2 - 4\pi F \geqslant L^2 - 4\pi L\rho + 4\pi^2\rho^2,$$

т. е.

$$L^2 - 4\pi F \geqslant (L - 2\pi\rho)^2. \qquad (6a)$$

Теперь нам остается только подставить в неравенство (6а) $\rho = R$ и $\rho = r$:

$$L^2 - 4\pi F \geqslant (2\pi R - L)^2 \qquad \text{и} \qquad L^2 - 4\pi F \geqslant (L - 2\pi r)^2$$

(так как круг радиуса R содержит выпуклую фигуру Φ, а круг радиуса r содержится в ней, то, очевидно, $2\pi R \geqslant L \geqslant 2\pi r$). Составив полусумму двух последних неравенств, получаем

$$L^2 - 4\pi F \geqslant \frac{1}{2}[(2\pi R - L)^2 + (L - 2\pi r)^2],$$

откуда, поскольку

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}[(x + y)^2 + (x - y)^2] \geqslant \frac{1}{4}(x + y)^2,$$

заключаем:

$$L^2 - 4\pi F \geqslant \frac{1}{4}[(2\pi R - L) + (L - 2\pi r)]^2 = \pi^2 (R - r)^2.$$

Но это и есть неравенство Боннезена (***)!

Поразительное богатство конкретных результатов, полученных на самых первых шагах В. Бляшке и его учениками (из числа которых в первую очередь надо упомянуть аргентинского математика Л. А. Сантало-Сорса и румынского математика Менделя Хаймовича, а также отошедших впоследствии от этой проблематики уже упоминавшегося выше замечательного швейцарского геометра Г. Хадвигера и, вероятно, самого выдающегося из учеников Бляшке — работающего в США китайца Шен-шень Чженя[1])), привело Бляшке

[1]) Если В. Бляшке принадлежит честь открытия интегральной геометрии, то про Чженя можно сказать, что он «закрыл» это направление как содержательную науку, выписав общую формулу для всех рассматриваемых в интегральной геометрии «мер» и указав, как трансформируются основные теоремы интегральной геометрии (вроде упомянутых выше теорем Крофтона и Пуанкаре) при переходе к общему случаю (см. Shiing-Shen Chern, On in-

к убеждению, что «Интегральная геометрия» вырастет в новую отрасль геометрии, сравнимую по своему значению с классической дифференциальной геометрией; именно поэтому он предложил столь многообещающее название для этой отрасли науки. Несмотря на то, что впоследствии «Интегральная геометрия» Бляшке не вполне оправдала возлагавшиеся на нее надежды (в связи с чем И. М. Гельфанд предлагает даже «отобрать» у этой части геометрии неоправданно приписанное ей название), все же это направление представляет собой интересную главу геометрии, находящуюся на стыке различных разделов математики (дифференциальная геометрия, теория выпуклых тел, теория вероятностей, теория меры). Разработка идей интегральной геометрии Бляшке (например, идущее от М. Хаймовича перенесение полученных в школе Бляшке результатов на неоднородные многообразия, подобные искривленным поверхностям) успешно продолжается до сих пор.

Как и подобает истинному ученику Ф. Клейна, В. Бляшке проявлял большой интерес к физике и механике. Можно даже сказать, что интерес к кинематике — «раю геометров» по выражению Леонардо да Винчи, которое любил цитировать Бляшке, — был у Бляшке наиболее устойчив: первые работы 25-летнего исследователя были посвящены этой области и последние книги [26], [28] и [29] 75-летнего профессора также относились к ней[1]). Вопросы механики привели Бляшке к изучению некоторых специальных типов вырожденных неевклидовых геометрий (или геометрий Кэли — Клейна); можно считать, что и это широкое направление геометрических исследований (пользующееся, в частности, большой популяр-

---

tegral geometry in Klein spaces, Annals of Math. **43**, 1942, стр. 178 — 189; ср. также § 18 указанной на стр. 200 книги Л. А. Сантало [32]).

Заметим еще, что как Хадвигер, так и Чжень активно интересовались и вопросами «геометрии в целом» и теории выпуклых тел (см., например, указанную на стр. 197 книгу [5] Г. Хадвигера и названную В. Бляшке в подстрочном примечании на стр. 137 книгу Чженя) — и эти интересы также явно были внушены им их общим учителем.

[1]) А также самая последняя из опубликованных В. Бляшке статей: W. Blaschke, Zu den Elementen der Kinematik, Festschrift zur 150-Jahr-Feier der Humboldt-Universität zu Berlin, т. II, Берлин, 1960, стр. 3 — 13.

ностью в нашей стране) было начато В. Бляшке (в его работе о кинематике евклидовой плоскости от 1911 г.[1])). Интерес к неевклидовой геометрии в широком смысле Бляшке сохранил и в дальнейшем; он передал его и своим ученикам, из числа которых можно отметить Карла Штрубеккера.

С механическими же интересами В. Бляшке было связано его внимание к геометрическим применениям аппарата комплексных чисел, кватернионов и других «гиперкомплексных систем» (также тематика, не обойденная вниманием и нашими геометрами!). К этой проблематике примыкает последнее из развивавшихся В. Бляшке направлений геометрии, затрагиваемое в ряде публикаций 1938—1940 и более поздних лет: оно связано с изучением так называемой «эрмитовой геометрии», т. е. геометрии n-мерного комплексного проективного пространства P_n, в котором эрмитова форма $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i$ определяет «эллиптическую эрмитову метрику»[2]). Также и механические применения разного рода комплексных чисел весьма активно интересовали В. Бляшке; этой теме, затрагиваемой в большом числе его публикаций, посвящены последние книги Бляшке [28] и [29].

Заметим еще, что круг научных интересов В. Бляшке далеко не ограничивался одной лишь геометрией: среди почти 250 его научных публикаций несколько десятков посвящены не геометрии — теории функций комплексного переменного и вариационному исчислению, истории математики и функциональному анализу. Об устойчивом интересе Бляшке к истории математики и, даже более общо, к истории культуры, мы уже говорили выше. Истории математики и истории культуры посвящено несколько книг В. Бляшке — [4],

---

[1]) W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, I, II, Zeitschrift für Math. und Phys. **60**, 1911, стр. 61 — 91. Некоторое представление о том, какое развитие получили в дальнейшем эти идеи Бляшке, может дать обзор И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд, Е. У. Ясинская, Проективные метрики, УМН **19**, вып. 5, 1964, стр. 51 — 113.

[2]) Ныне это направление соприкасается с исследованием «почти комплексных», «почти кватернионных» и иных структур геометрических многообразий, активно развиваемым французской и японской геометрическими школами, стоящими в авангарде новых веяний в дифференциальной геометрии.

[7], [14], [16], [18], [23] и [27] [1]) в приведенном ниже списке. Активно интересовался Бляшке и вопросами теории функций комплексного переменного: он принимал участие в составлении двух книг по теории конформных отображений [2]) и опубликовал ряд относящихся к этой области статей. И сегодня так называемые «функции Бляшке» или «произведения Бляшке» занимают большое место во всех исследованиях, посвященных граничным свойствам аналитических функций, и используются всеми «потребителями» этой теории вплоть до инженеров.

В заключение настоящей статьи мы приведем список всех книг Вильгельма Бляшке и порекомендуем читателю не ограничиться изучением лишь одной настоящей книги замечательного немецкого математика и педагога.

КНИГИ В. БЛЯШКЕ [3])

1. Kreis und Kugel, Leipzig, 1916; перепечатка — New York, 1949; 2-е изд., Berlin, 1956. (Русский перевод этой книги лежит перед Вами.)
2. Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, Elementare Differentialgeometrie, Berlin, 1921; 2-е изд., 1924; 3-е изд., 1930; 4-е изд., 1946. (Русский перевод 3-го изд.: Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935.)
3. Vorlesungen über Differentialgeometrie, II, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923.
4. Leonardo und die Naturwissenschaft, Leipzig — Berlin, 1927.
5. Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, Berlin, 1929.

---

[1]) Брошюра [9], частично связанная и с вопросами истории науки, в большей мере касается вопросов преподавания.

[2]) L. Lewent, Konforme Abbildung, Leipzig und Berlin, 1912 (В. Бляшке принадлежит глава этой книги «Конформное отображение круговой области на внутренность выпуклого многоугольника», стр. 97 — 118); E. Study, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche II, Leipzig und Berlin, 1913.

[3]) В списке указываются все издания книг, поскольку каждое последующее издание Бляшке обязательно дополнял и перерабатывал, часто прибегая при этом к помощи своих учеников (так 2-е издание книги [2] подготовлено при участии К. Рейдемейстера, а 3-е — при участии Г. Томсена; 3-е издание книги [11] и 2-е — книги [12] подготовлено при участии Ш. Чженя, Г. Хадвигера и Л. А. Сантало и т. д.). При этом иногда книги Бляшке при переиздании дополнялись очень существенно: так, 1-е издание книги [2] имело 230 стр., а 4-е — 311 стр.; 1-е издание брошюры [16] содержало всего 10 стр., а 2-е — 70 стр. и т. д.

6. Topological differential geometry, Chicago, 1932.
7. Wissenschaftspflege im Ausland, Leipzig — Berlin, 1933.
8. Selected problems of differential geometry, Calcutta, 1934.
9. Über das Studium der Mathematik und Naturwissenschaft, Leipzig — Berlin, 1935.
10. Integralgeometrie I: Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n, Paris, 1935.
11 — 12. Vorlesungen über Integralgeometrie, I, Leipzig — Berlin, 1935; II, Leipzig — Berlin, 1936; 2-е изд. 1-й части, 1936; 3-е изд. 1-й части и 2-е изд. 2-й части (в одной книге), Berlin, 1955. (Русский перевод 2-го изд. 1-й части: Лекции по интегральной геометрии, УМН (старая серия), вып. V, 1938, стр. 96 — 149.)
13. Geometrie der Gewebe (совм. с Г. Болем), Berlin, 1938.
14. Über eine geometrische Frage von Euklid bis heute, Leipzig — Berlin, 1938.
15. Ebene Kinematik, Leipzig — Berlin, 1938.
16. Mathematik und Leben, Leipzig — Berlin, 1941; 2-е изд., Wiesbaden, 1950.
17. Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, Leipzig — Berlin, 1942; перепечатка — 1949.
18. Galilei und Kepler, Leipzig — Berlin, 1943; расширенный итальянский перевод Giorn. Mat. Batt. (V, ser. 2) 82, 1954, стр. 309 —334.
19. Projective Geometrie, Wolfbüttel — Hannover, 1947; 2-е изд. 1948; 3-е изд., Basel — Stuttgart, 1954.
20. Analytische Geometrie, Wolfbüttel — Hannover, 1948; 2-е изд., Basel — Stuttgart, 1954.
21. Geometria differencial moderna, Madrid, 1950.
22. Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1950; 2-е изд. (совм. с Г. Рейхардтом), 1960. (Русский перевод 1-го изд: Введение в дифференциальную геометрию, Гостехиздат, 1957.)
23. Griechische und auschaunliche Geometrie, München, 1953. (Русский перевод: Греческая и наглядная геометрия, Математическое просвещение (новая серия), вып. 2, 1957, стр. 111 — 130; вып. 3, 1958, стр. 101 — 138.)
24. Geometria de los teijidos, Barcelona, 1954.
25. Einführung in die Geometrie der Waben, Basel — Stuttgart, 1955. (Русский перевод: Введение в геометрию тканей, Физматгиз, 1959.)
26. Ebene Kinematik (совм. с Г. Р. Мюллером), München, 1956. (Эта книга существенно отличается от небольшой книжки [15] того же названия.)
27. Reden und Reisen eines Geometers, Berlin, 1957; 2-е изд., 1961.
28. Anwendung dualer Quaternionen auf Kinematik, Helsinki, 1958.
29. Kinematik und Quaternionen, Berlin, 1960.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Н. Х. (Abel N. H.) 185
Адамар Ж. (Hadamard J.) 55, 103
Александров А. Д. 7, 103, 104, 137, 195—197
Артин Э. (Artin E.) 203, 215
Архимед (Archimedes) 7, 30, 31, 51, 103
Ахиезер Н. И. 200
Ашкинузе В. Г. 103, 189, 190, 211

Барнер М. (Barner M.) 193
Бастон В. (Baston V. J. D.) 198
Баур К. В. (Baur C. W.) 53
Бёмер П. ((Böhmer P.) 105
Бервальд Л. (Berwald L.) 214, 215
Бернулли И. (Bernoulli J.) 52
Бернулли Я. (Bernoulli J.) 52
Бернштейн Ф. (Bernstein F.) 53, 104
Бианки Л. (Bianchi L.) 133, 202
Бибербах Л. (Bieberbach L.) 54, 55, 146, 147, 166, 210
Бляшке В. (Blaschke W.) 51, 54, 56, 104, 105, 128, 130, 131, 136, 137, 139, 143, 161, 163, 179, 182, 183, 188, 193, 196, 199—227
Бляшке И. (Blaschke J.) 201
Болтянский В. Г. 10, 70, 77, 100, 104, 197—199, 204, 218
Боль Г. (Bol G.) 124, 194, 203, 215, 217, 227
Больцано Б. (Bolzano B.) 12, 79 80
Бонне О. (Bonnet O.) 161—163
Боннезен Т. (Bonnesen T.) 7, 56, 104, 197, 199, 220, 221, 223
Бор Г. (Bohr H.) 126
Борн М. (Born M.) 211
Брикар Р. (Bricard R.) 195
Брунн Г. (Brunn H.) 7, 54, 103, 106, 110—115, 117, 121—123, 126, 134, 145, 188, 191, 205
Буземан Г. (Busemann H.) 104, 197
Буняковский В. Я. 95
Бюффон Ж. (Buffon G.) 182

Вален Ф. (Vahlen Th.) 54
Валентин Ф. А. (Valentine F. A.) 198
Вебер Г. (Weber H.) 53, 191
Вейерштрасс К. (Weierstrass K.) 13, 52, 53, 61, 79, 80, 206
Вейль Г. (Weyl H.) 136, 196
Вейнгартен И. (Weingarten J.) 133, 179
Вельштейн И. (Wellstein J.) 53
Винер Н. (Wiener N.) 210
Винтерниц А. (Winternitz A.) 214
Виртингер В. (Wirtinger W.) 127, 128, 130, 202
Витт Е. (Witt E.) 104

Гамбургер Г. (Hamburger H.) 194
Гауптман Г. (Hauptmann G.) 202
Гаусс К. Ф. (Gauss K. F.) 136
Гейзер К. Ф. (Geiser C. F.) 12
Гёльдер О. (Hölder O.) 12, 91, 92, 105
Гельфанд И. М. 200, 224
Гекке Э. (Hecke E.) 203
Герглотц Г. (Herglotz G.) 8, 135, 137, 179, 182, 193, 195, 196, 203, 219
Гессе Л. О. (Hesse L. O.) 167
Гессенберг Г. (Hessenberg G.) 46, 53
Гёте И. В. (Göthe J. W.) 44, 202
Гильберт Д. (Hilbert D.) 104, 105, 126, 135, 136, 163, 196, 202
Гохберг И. Ц. 198
Грин Г. (Green G.) 131, 133, 179
Гросс В. (Gross W.) 104
Гротемейер К. П. (Grotemeyer K. P.) 137
Гурвиц А. (Hurwitz A.) 30, 52, 126, 132, 140
Гурса Э. (Goursat E.) 185

Дарбу Г. (Darboux G.) 130, 131, 161, 195
Дебруннер Г. (Debrunner H.) 198
Дёйч Г. (Doetsch G.) 104
Дингас А. (Dinghas A.) 135
Дирихле Л. (Dirichlet P. L.) 12
Дубнов Я. С. 209
Душек А. (Duschek A.) 215
Дюпен Ш. (Dupin Ch.) 105

Евклид (Eukleides) 103, 195
Ельмслев И. (Hjelmslev-Petersen J.) 175, 176

Жордан К. (Jordan C.) 38, 54, 55

Залгаллер В. А. 187, 197
Зауэр Р. (Sauer R.) 195
Зейферт Г. (Seifert H.) 194
Зенодор (Zenodor) 13, 51
Зигель К. Л. (Siegel C. L.) 203

Иенсен И. Л. (Jensen J. L. W. V.) 104, 105

Кавальери Б. (Cavallieri B.) 60
Каган В. Ф. 159
Кантор Г. (Cantor G.) 79, 80
Каратеодори К. (Carathéodory C.) 53—55, 103, 104, 191, 194
Каччиополи Р. (Caccioppoli R.) 137, 196
Келлер О.-Г. (Keller O.-H.) 203
Кеплер И. (Kepler J.) 202
Клейн Ф. (Klein F.) 176, 201, 202, 206—208, 211, 214, 216, 224
Кли В. (Klee V.) 198
Кнезер А. (Kneser A.) 191
Колатц Л. (Collatz L.) 203
Кон-Фоссен С. (Cohn-Vossen S.) 136, 195
Коши О. (Cauchy A. L.) 95, 103, 195
Крамер Г. (Cramer G.) 52
Кристоффель Е. Б. (Christoffel E. B.) 105
Кронекер Л. (Kronecker L.) 101
Крофтон М. В. (Crofton M. W.) 218—220, 223
Крыжановский Д. А. 199
Курант Р. (Courant R.) 199, 211
Курош А. Г. 178
Кэли А. (Cayley A.) 224

Лагерр Э. (Laguerre E.) 213
Лагранж Ж. Л. (Lagrange J. L.) 52, 195
Ландау Э. (Landau E.) 206—208
Лебег А. (Lebesgue H.) 30, 55, 100, 103, 204
Левент Л. (Lewent L.) 226
Леви Г. (Lewy H.) 196
Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) 224, 226
Ли С. (Lie S.) 202, 213
Либман Г. (Liebmann H.) 136, 195
Линделёф Л. (Lindelöf L.) 103
Лобачевский Н. И. 213
Лохер-Эрнст Л. (Locher-Ernst L.) 176
Люилье С. (Lhuillier S. A. J.) 9, 52
Люстерник Л. А. 103, 104, 194, 198, 199

Мангольдт Г. (von Mangoldt H.) 54
Марков А. А. 182
Махападхайя С. (Muckhopadhyaya S.) 191
Мёбиус А. Ф. (Möbius A. F.) 213
Минковский Г. (Minkowski H.) 7, 54, 68, 73, 75, 88, 101, 102, 104—106, 111—113, 115, 121—124, 126, 128, 129, 131—135, 166, 177, 180, 182, 196, 205, 213, 220, 221

Морз М. (Morse M.) 194
Морман Г. (Mohrmann H.) 105, 193
Мюллер Г. Р. (Müller H. R.) 227
Мюллер И. О. (Müller J. O.) 102

Натансон И. П. 55, 67, 108
Нейман Дж. (von Neumann J.) 203
Нейман К. (Neumann C.) 104
Нильсен Я. (Nielsen J.) 203
Норден А. П. 159

Островский А. (Ostrowski A.) 203

Пеано Г. (Peano G.) 31, 54
Пик Г. (Pick G.) 105, 214
Погорелов А. В. 137, 195
Полиа Г. или Пойя Д. (Pólya G.) 55, 199, 200
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 194, 215, 218, 221, 223
Пуанкаре Р. (Poincaré R.) 215

Радемахер Г. (Rademacher H.) 194, 203, 204
Радон И. (Radon J.) 55, 105, 126, 186, 191, 203
Рашевский П. К. 149, 157, 171
Рейдемейстер К. (Reidemeister K.) 212, 214, 226
Рейхардт Г. (Reichardt H.) 227
Релей Дж. У. С. (lord Rayleigh J. W. S.) 55
Релло (Reuleaux) 180, 204
Рембс Е. (Rembs E.) 137
Решетняк Ю. Г. 187
Риман Б. (Riemann B.) 48, 55, 103
Роббинс Г. (Robbins H.) 199
Роджерс К. А. (Rogers C. A.) 198
Родриг О. (Rodrigues O.) 168
Розенфельд Б. А. 225
Роль М. (Rolle M.) 92
Рохлин В. А. 55, 199, 221
Рунге К. (Runge C.) 211

Сакс С. (Saks S.) 55
Сантало или Сантало-Сорс Л. А. (Santaló-Sors L. A.) 56, 200, 223, 224, 226
Сегё Г. (Szegö G.) 55, 200
Сильвестр Дж. (Sylvester J. J.) 219, 220
Стилтьес Т. Ж. (Stjeltjes T. J.) 51, 55, 105

Тёплиц О. (Töplitz O.) 204
Томсен Г. (Thomsen G.) 194, 203, 212, 215, 226
Тонелли Л. (Tonelli L.) 102
Трельфалль В. (Threlfall W.) 194

Фейеш Тот Л. (Fejes Tóth L.) 7, 56, 198, 209
Фенхель В. (Fenchel W.) 7, 56, 104, 197
Фихтенгольц Г. М. 12
Фогт В. (Fogt W.) 193
Фомин С. В. 200
Фосс А. (Voss A.) 195
Фреше М. (Fréchet M.) 55
Фробениус Г. (Frobenius G.) 54, 112, 129
Фубини Г. (Fubini G.) 103
Функ П. (Funk P.) 164, 179, 181, 195
Фурье Ж. Б. (Fourier J. B.) 30, 104, 126, 127

Хадвигер Г. (Hadwiger H.) 7, 56, 104, 126—199, 209, 223, 224, 226
Хаймович М. (Haimovici M.) 223, 224
Халмош П. (Halmos P. R.) 55
Хассе Х. (Hasse H.) 203
Хаусдорф Ф. (Hausdorf F.) 169, 210

Цахариас М. (Zacharias M.) 54
Цоль О. (Zoll O.) 195

Ченцов Н. Н. 103
Чжень Ш.-Ш. (Chern S.-S.) 137, 223, 224, 226
Чизини О. (Chisini O.) 53

Шварц Г. А. (Schwarz H. A.) 51—53, 67, 93—95, 100—102, 105—107, 110—113, 124—127, 144—148, 152, 154, 155, 164, 205
Шеффер Л. (Scheffer L.) 38, 54
Шефферс Г. (Scheffers G.) 130, 157, 159, 171
Широков А. П. 213
Широков П. А. 213
Шклярский Д. О. 103
Шмидт В. (Schmidt W.) 52
Шмидт Э. (Schmidt E.) 135
Шнирельман Л. Г. 194
Шоу Б. (Shaw B.) 214
Шпейзер А. (Speiser A.) 194
Шпернер Э. (Sperner E.) 203
Шрейер О. (Schreier O.) 203
Штейнер Я. (Steiner J.) 7, 9, 11—13, 44, 45, 52—54, 57, 58, 60, 85, 86, 88, 99, 102—104, 110—114, 116, 123—125, 132, 145—147, 196, 201, 206, 219
Штейниц Е. (Steinitz E.) 56, 104
Штольц О. (Stolz O.) 104
Штрубеккер К. (Strubecker K.) 225
Штуди Э. (Study E.) 53, 105, 202, 226
Штурм И. К. Ф. (Sturm I. K. F.) 162, 163
Штурм Р. (Sturm R.) 52

Эглстон Г. Г. (Eggleston H. G.) 104, 197, 198
Эдлер Ф. (Edler F.) 52
Эйлер Л. (Euler L.) 23, 52, 140, 141, 167, 181
Эйнштейн А. (Einstein A.) 211, 213
Эльсгольц Л. Э. 200
Эмде Ф. (Emde F.) 160, 171
Энгель Ф. (Engel F.) 202
Энрикес Ф. (Enriques F.) 53

Юнг Г. У. Е. (Jung H. W. E.) 204
Юэль Х. С. (Juel C. S.) 175, 176, 194

Яглом И. М. 10, 70, 103, 104, 189, 190, 197—199, 211, 225
Якоби К. (Jacobi K. G. J.) 162
Янке Е. (Jahnke E.) 160, 171
Ясинская Е. У. 225

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность длины дуги 50
— объема и площади поверхности 72
— площади 16, 41
Аффинная геометрия 194, 211
Аффинное преобразование 187, 214

Вершины овала 191
Внутренняя метрика 195
— точка 62, 64
Выбора теорема (для овалоидов) 79
Выпуклая область 62
— оболочка 69
— поверхность 62
— фигура 62
— функция 63, 104
Выпуклое семейство 115
— тело 57, 103, 105
Выпуклость сверху, снизу 63
Выпуклый дифференциальный оператор 170
— многогранник 70
— функционал 134

Геодезическая 194
Граница тени 185

Диагональный процесс 80
Диаметр 144, 145
Дифференциальная геометрия в малом и в целом 136
Дифференциальное уравнение кратчайшей 162
— — сферических функций 130, 189
Дифференциальный параметр Бельтрами 130, 179, 184
— оператор 170, 173
Длина дуги 30 и д., 54

Жесткость 195

Замкнутые множества 57

Изопериметрическая задача 9, 51
Изопериметрическое свойство шара 98

Инволюция 194
Интеграл 47, 102
— средней кривизны 123, 124, 133
— Стилтьеса 51, 55
Интегральное представление выпуклых функций 105
— — овалоидов 184
— уравнение Абеля 185
— — сферических функций 130

Конформная геометрия 194
Косая симметрия 189
Кривизна 142, 149, 152, 169
— средняя 142, 169
Круговой интеграл 179, 186

Лемма Виртингера 127
Линейная комбинация выпуклых тел 113
Линейное семейство 113
Линии кривизны 194

Объем выпуклого тела 75, 77
Овалоид 176
Ограниченное множество 12
Окатывание 164
Округление 107
Опорная плоскость 68
— прямая 68
— функция 71, 166
Отклонение выпуклых тел 75

Параллельное тело 62
Плавающие тела 105
Площадь 13, 40, 71, 75, 77
Поверхность встречи 195
— вращения постоянной кривизны 157, 171
— плавучести 105
— постоянной ширины 166, 180
Приближение выпуклого тела многогранниками 72, 73, 76
Производная Шварца (симметричная) 67

Радиус кривизны 138
Расстояние от овалоида 75

Расстояние (отклонение) между овалоидами 75
Решетка 72

Симметризация смешением 125
— Шварца 107
— Штейнера 59
Смешанные объемы 122
— площади 128
Существования доказательство 11, 19, 60, 79, 163
Сферические функции 130, 185
Сходимость овалоидов 75, 81, 107

Тела постоянной ширины 166, 180
— — яркости 182

Формула Вайнгартена 133
— Грина 131, 179
—, двойственная формуле Эйлера 141
— для интегральной средней кривизны 133
— — объема параллельного тела 123
— площади поверхности 132
Функции множества 75

Центр тяжести 70, 192

Четные функции на сфере 181

Ширина овалоида 164

Эллипсоид 187

Ір.Обк.