

Н. К. БАРИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Н. К. БАРИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

При редакционном участии
П. Л. УЛЬЯНОВА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

А Н Н О Т А Ц И Я

Монография содержит изложение теории тригонометрических рядов в ее современном состоянии. В частности, в ней впервые изложены замечательные исследования Д. Е. Меньшова, а также исследования ряда других современных советских и иностранных авторов. Вся теория рядов Фурье изложена на основе интеграла Лебега; наряду с теорией рядов Фурье подробно развиты вопросы общей теории тригонометрических рядов.

Предназначена главным образом для аспирантов и научных работников, специализирующихся в различных областях теории функций действительного переменного. Она может быть использована для работы со студентами университетов в семинарах и для чтения спецкурсов по теории тригонометрических рядов. Первая глава доступна и для очень широкого круга читателей.

Бари Нина Карловна.

Тригонометрические ряды.

Редактор А. З. Рывкин.

Техн. редактор К. Ф. Брудно.

Корректор Л. О. Сечейко.

Сдано в набор 11/XI 1959 г. Подписано к печати 1/IX. 1960 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 58,50. Условн. печ. л. 80,15. Уч.-изд. л. 72,82. Тираж 7000 экз. Т- 08971. Цена книги 3 р. 84к. Зазак 2044.

Государственное издательство физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект 15

Типография Академии, Будапешт

*Посвящаю этот труд
светлой памяти моего учителя*
**НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА
ЛУЗИНА**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Обозначения	15

ВВОДНЫЙ МАТЕРИАЛ

I. Теоремы из анализа

§ 1. Преобразование Абеля	17
§ 2. Вторая теорема о среднем значении	19
§ 3. Выпуклые кривые и выпуклые последовательности	19

II. Числовые ряды, суммирование

§ 4. Ряды с монотонно убывающими членами	21
§ 5. Линейные методы суммирования	25
§ 6. Метод средних арифметических [или $(C, 1)$]	26
§ 7. Метод Абеля	27

III. Неравенства для чисел, рядов и интегралов

§ 8. Числовые неравенства	31
§ 9. Неравенство Гельдера	32
§ 10. Неравенство Минковского	35
§ 11. O - и o -соотношения для рядов и интегралов	36

IV. Теория множеств и теория функций

§ 12. О верхнем пределе последовательности множеств	39
§ 13. Сходимость по мере	39
§ 14. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега	39
§ 15. Точки Лебега	41
§ 16. Интеграл Римана—Стилтьеса	43
§ 17. Две теоремы Хелли	43
§ 18. Теорема Фубини	44

V. Функциональный анализ

§ 19. Линейные функционалы в C	44
§ 20. Линейные функционалы в L^p ($p > 1$)	45
§ 21. Сходимость по норме в пространствах L^p	46

VI. Теория приближения функций тригонометрическими полиномами

§ 22. Элементарные свойства тригонометрических полиномов	47
§ 23. Неравенство Бернштейна	47
§ 24. Тригонометрический полином наилучшего приближения	49
§ 25. Модуль непрерывности, модуль гладкости, интегральный модуль непрерывности	50

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

1.	Понятие о тригонометрическом ряде; сопряженные ряды	54
2.	Комплексная форма тригонометрического ряда	55
3.	Краткие исторические сведения	56
4.	Формулы Фурье	57
5.	Комплексная форма ряда Фурье	58
6.	Проблемы теории рядов Фурье; ряды Фурье—Лебега	58
7.	Разложение в тригонометрический ряд функций с периодом $2l$	59
8.	Ряды Фурье для четных и нечетных функций	61
9.	Ряд Фурье по ортогональной системе	61
10.	Полнота ортогональной системы	64
11.	Полнота тригонометрической системы в пространстве L	65
12.	Равномерно сходящиеся ряды Фурье	68
13.	Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя	69
14.	Сходимость ряда Фурье в метрике L^2	70
15.	Понятие о замкнутости системы. Связь между замкнутостью и полнотой	71
16.	Теорема Фишера—Рисса	73
17.	Теорема Фишера—Рисса и равенство Парсеваля для тригонометрической системы	74
18.	Равенство Парсеваля для произведения двух функций	75
19.	Стремление к нулю коэффициентов Фурье	76
20.	Лемма Фейера	77
21.	Оценка коэффициентов Фурье через интегральный модуль непрерывности функции	79
22.	Коэффициенты Фурье для функций с ограниченным изменением	80
23.	Формальные операции над рядами Фурье	81
24.	Ряды Фурье от многократно дифференцируемых функций	88
25.	О коэффициентах Фурье для аналитических функций	88
26.	Простейшие случаи абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье	91
27.	Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами	92
28.	Плотность класса тригонометрических полиномов в пространствах L^p ($p \geq 1$)	93
29.	Ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро	94
30.	Ряды по синусам или по косинусам с монотонно убывающими коэффициентами	95
31.	Интегральные выражения для частных сумм ряда Фурье и сопряженного ряда	103
32.	Упрощение выражений для $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$	107
33.	Принцип локализации Римана	110
34.	Теорема Штейнгауза	111
§ 35.	Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Константы Лебега	112
36.	Оценка частных сумм ряда Фурье от ограниченной функции	117
37.	Критерий сходимости ряда Фурье	118
38.	Признак Дини	119
39.	Признак Жордана	121
40.	Интегрирование рядов Фурье	122
41.	Явление Гиббса	123
42.	Определение величины скачка функции по ее ряду Фурье	127
43.	Особенности рядов Фурье от непрерывных функций. Полиномы Фейера	128
44.	Непрерывная функция с рядом Фурье, сходящимся всюду, но неравномерно	130
45.	Непрерывная функция с рядом Фурье, расходящимся в одной точке (пример Фейера)	132
46.	Расходимость в одной точке (пример Лебега)	133
47.	Суммирование ряда Фурье методом Фейера	137
48.	Следствия теоремы Фейера	141
49.	Теорема Фейера—Лебега	143
50.	Оценка частных сумм ряда Фурье	144
51.	Множители сходимости	146
52.	Сравнение ядер Дирихле и Фейера	146
53.	Суммирование рядов Фурье методом Абеля—Пуассона	152
54.	Ядро Пуассона и интеграл Пуассона	152

55. Поведение интеграла Пуассона в точках непрерывности функции	154
56. Поведение интеграла Пуассона в общем случае	156
57. Проблема Дирихле	160
58. Суммирование методом Пуассона продифференцированного ряда Фурье....	161
59. Интеграл Пуассона—Стилтьеса	163
60. Фейеровские и пуассоновские суммы для различных классов функций	165
61. Общие тригонометрические ряды. Теорема Лузина—Данжуа	173
62. Теорема Кантора—Лебега	174
63. Пример всюду расходящегося ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю	175
64. Изучение сходимости одного класса тригонометрических рядов	177
65. Лакунарные последовательности и лакунарные ряды	178
66. Гладкие функции	181
67. Вторая производная Шварца	185
68. Метод суммирования Римана	187
69. Приложение метода суммирования Римана к рядам Фурье	190
70. Теорема единственности Кантора	191
71. Принцип локализации Римана для общих тригонометрических рядов.....	193
72. Теорема дю Буа-Реймона	198

ГЛАВА II

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

1. Введение	202
2. Порядок коэффициентов Фурье для функций с ограниченным изменением. Критерий для непрерывности функции с ограниченным изменением	203
3. О коэффициентах Фурье для функций из класса $Lip\ \alpha$	208
4. Связь между степенью суммируемости функции и коэффициентами Фурье ..	210
5. Обобщение равенства Парсеваля для произведения двух функций	218
6. О скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье от суммируемых функций	221
7. Вспомогательные теоремы о системе Радемахера	223
8. Отсутствие критериев, налагаемых на модули коэффициентов	226
9. Некоторые необходимые условия для коэффициентов Фурье	228
10. Необходимые и достаточные условия Салема	231
11. Тригонометрическая проблема моментов	234
12. Коэффициенты тригонометрических рядов с неотрицательными частными сум- мами	236
13. Преобразования рядов Фурье	243

ГЛАВА III

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ В ТОЧКЕ

1. Введение	246
2. Сравнение признаков Дини и Жордана	246
3. Признак Валле-Пуссена, сравнение его с признаками Дини и Жордана ...	247
4. Признак Юнга	249
5. Взаимоотношения между признаком Юнга и признаками Дини, Жордана, Валле-Пуссена	251
6. Признак Лебега	254
7. Сравнение признака Лебега со всеми предыдущими	258
8. Признак Лебега—Гергена	263
9. О необходимых условиях сходимости в точке	267
10. Достаточные признаки сходимости в точке при дополнительных ограничениях на коэффициенты ряда	271
11. Замечание о равномерной сходимости ряда Фурье на некотором отрезке	273

ГЛАВА IV

РЯДЫ ФУРЬЕ ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение	275
2. Достаточные условия для равномерной сходимости, выраженные через коэф- фициенты Фурье	276
3. Достаточное условие для равномерной сходимости в терминах наилучших приближений	279
4. Признак Дини—Липшица	280
5. Признак Салема. Функции с Φ -ограниченным изменением	283
6. Тожество Рогозинского	288
7. Признак равномерной сходимости, использующий обынтегрированный ряд	291

8.	Обобщение признака Дини—Липшица (в интегральной форме)	293
9.	Равномерная сходимость на отрезке $[a, b]$	296
10.	Признаки Сато	299
11.	О равномерной сходимости около каждой точки отрезка	302
12.	Об операциях над функциями для получения равномерно сходящихся рядов Фурье	303
13.	О равномерной сходимости при расстановке знаков у членов ряда	306
14.	Экстремальные свойства некоторых тригонометрических полиномов	307
15.	Подбор аргументов при заданных модулях членов ряда	309
16.	О коэффициентах Фурье от непрерывных функций	311
17.	Об особенностях рядов Фурье от непрерывных функций	316
18.	Непрерывная функция с рядом Фурье, сходящимся неравномерно во всяком интервале	317
19.	О множестве точек расходимости для тригонометрического ряда	318
20.	Непрерывная функция с рядом Фурье, расходящимся на множестве мощности континуума	319
21.	Расходимость на заданном счетном множестве	320
22.	Расходимость на множестве мощности континуума при ограниченности частных сумм	322
23.	Расходимость для ряда от $f^2(x)$	323
24.	Подпоследовательности частных сумм рядов Фурье от непрерывных функций	327
25.	Разбиение на сумму двух рядов, сходящихся на множествах положительной меры	329

ГЛАВА V

СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ НА МНОЖЕСТВЕ

1.	Введение	331
2.	Теорема Колмогорова—Селиверстова и Плесснера	332
3.	Признак сходимости, выраженный через первые разности коэффициентов ...	337
4.	Множители сходимости	338
5.	Другие формы условия, входящего в теорему Колмогорова—Селиверстова и Плесснера	339
6.	Следствия теоремы Плесснера	340
7.	Об эквивалентности некоторых условий, выражаемых через интегралы и через ряды	342
8.	Признак сходимости почти всюду для функций из $L^p(1 \leq p \leq 2)$	346
9.	Выражение условий сходимости почти всюду через квадратичные модули непрерывности и наилучшие приближения	347
10.	Признаки сходимости почти всюду на отрезке длины, меньшей чем 2π	350
11.	Индексы сходимости	354
12.	Выпуклая емкость множеств	362
13.	Признак сходимости, использующий обынтегрированный ряд	378
14.	Признак Салема	379
15.	Признак Марцинкевича	380
16.	Признак сходимости, выраженный через логарифмическую меру множества	384
17.	Ряды Фурье, расходящиеся почти всюду	391
18.	Невозможность усиления признака Марцинкевича	402
19.	О ряде, сопряженном к почти всюду расходящемуся ряду Фурье	406
20.	Ряд Фурье, расходящийся в каждой точке	412
21.	О принципе локализации для множеств	421
22.	О сходимости ряда Фурье на заданном множестве и расходимости вне его ..	425
23.	Проблема сходимости и принцип локализации для рядов Фурье с переставленными членами	434

ГЛАВА VI

«ИСПРАВЛЕНИЕ» ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ МАЛОЙ МЕРЫ

1.	Введение	438
2.	Две элементарные леммы	438
3.	Лемма о множителе Дирихле	440
4.	«Исправление» функции для получения равномерно сходящегося ряда Фурье	448
5.	Усиленное С-свойство	457
6.	Проблемы, связанные с «исправлением» функций	458
7.	«Исправление» суммируемой функции вне заданного совершенного множества	459

ГЛАВА VII

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВОПРОСОВ О СХОДИМОСТИ

1. Введение	472
2. Применение к рядам Фурье методов суммирования с треугольными матрицами	473
3. Суммирование рядов Фурье методами (C, α)	482
4. Метод суммирования Бернштейна—Рогозинского	483
5. Метод суммирования Лебега	485
6. Понятие сильной суммируемости и суммируемости (H, k)	488
7. Суммируемость (H, k) для рядов Фурье от функций из класса L^p	490
8. Суммируемость $(H, 2)$	493
9. Суммируемость (H, k) с переменным показателем	500
10. Об одном видоизменении понятия сильной суммируемости	503
11. Усиленная сходимость функционального ряда	509
12. Усиленная сходимость тригонометрических рядов	510
13. Суммируемость $(C^*, 0)$	516

ГЛАВА VIII

СОПРЯЖЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1. Введение	518
2. Сходимость в точке; признак Дини	519
3. Принцип локализации	521
4. Теорема Юнга	521
5. Суммируемость $(C, 1)$ ряда $\bar{\sigma}(f)$	524
6. Суммируемость методом Абеля—Пуассона	526
7. Существование сопряженной функции	528
8. Смысл существования сопряженной функции	531
9. Критерий Лузина для сходимости рядов Фурье от функций с интегрируемым квадратом	534
10. Условия для того, чтобы два сопряженных ряда были рядами Фурье	538
11. Коэффициенты степенного ряда для функций класса H_1	545
12. Степенные ряды с ограниченным изменением	547
13. Свойства двух сопряженных функций	554
14. Функции класса L^p . Теорема М. Рисса	564
15. Теорема Зигмунда	568
16. Суммируемость $ \bar{f}(x) ^p$ при $p < 1$	572
17. Ряды Фурье для сопряженных суммируемых функций	582
18. А-интеграл и сопряженные ряды	585
19. Равномерная сходимость двух сопряженных рядов	591
20. Сходимость в метрике L^p	593
21. Случай $p < 1$	595
22. Проблема сходимости в метрике L	598
23. Сходимость сопряженных рядов на множестве положительной меры	604

ГЛАВА IX

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

1. Введение	607
2. Достаточные условия в терминах модулей непрерывности и наилучших приближений	608
3. Случай функций с ограниченным изменением	613
4. Необходимые условия	618
5. Общие замечания о связи между модулем непрерывности функции и абсолютной сходимостью ее ряда Фурье	629
6. Критерий абсолютной сходимости Шилова	632
7. Критерий абсолютной сходимости М. Рисса	634
8. Критерий абсолютной сходимости Стечкина	636
9. Простейшие операции над функциями с абсолютно сходящимися рядами Фурье	637
10. Роль локальных свойств функции в абсолютной сходимости	638
11. Суперпозиции функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье	640
12. Некоторые обобщения вопроса об абсолютной сходимости	646

ГЛАВА X

РЯДЫ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ С МОНОТОННО УБЫВАЮЩИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1.	Введение	649
§ 2.	Условия для того, чтобы ряды с монотонными коэффициентами были рядами Фурье	650
§ 3.	Ряды Фурье для функций из класса L^p	657
§ 4.	A -интегрируемость сумм рядов с монотонными коэффициентами	658
§ 5.	Суммируемость $ f(x) ^p$ и $ \bar{f}(x) ^p$ при $0 < p < 1$	664
§ 6.	Равенство Рисса	664
§ 7.	Поведение около точки $x = 0$	668
§ 8.	Дифференциальные свойства функций $f(x)$ и $\bar{f}(x)$	676
§ 9.	Ряды с монотонными коэффициентами для функций из класса $\text{Lip } \alpha$	678

ГЛАВА XI

ЛАКУНАРНЫЕ РЯДЫ

§ 1.	Введение	680
§ 2.	Свойства лакунарных последовательностей	680
§ 3.	Лакунарные ряды, суммируемые на множестве положительной меры	684
§ 4.	Поведение суммы лакунарного ряда там, где она существует	689
§ 5.	Степень суммируемости функций, определяемых лакунарными рядами Фурье	690
§ 6.	Непрерывные функции с лакунарными рядами Фурье	691
§ 7.	Абсолютная сходимость лакунарных рядов	693
§ 8.	Теорема Зигмунда	696
§ 9.	Лакунарные ряды, сходящиеся на множестве не первой категории	703
§ 10.	Теорема Эрдеша	703
§ 11.	Теорема единственности для лакунарных рядов	708
§ 12.	О наилучшем приближении функций, заданных лакунарными тригонометрическими рядами	713
§ 13.	Локальные теоремы для обобщенных лакунарных рядов	714

ГЛАВА XII

СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ ОБЩИХ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1.	Введение	721
§ 2.	Коэффициенты всюду расходящихся тригонометрических рядов	722
§ 3.	Расходимость на множестве второй категории	728
§ 4.	Множества типа R	730
§ 5.	Множества типа H	732
§ 6.	Множества типа H_σ . Теорема Райхмана	735
§ 7.	Достаточные условия для R -множеств	736
§ 8.	Базисы	738
§ 9.	О мере Хаусдорфа и размерности Хаусдорфа для R -множеств	743
§ 10.	Необходимый признак для замкнутых R -множеств	746
§ 11.	Сумма двух R -множеств	747

ГЛАВА XIII

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1.	Введение	749
§ 2.	Влияние точек абсолютной сходимости на сходимость ряда	750
§ 3.	Теорема Лузина о категории множества точек абсолютной сходимости	752
§ 4.	Простейшие свойства N -множеств. Редукция к ряду из синусов	752
§ 5.	Базисы и абсолютная сходимость	757
§ 6.	Общие свойства N - и R -множеств	757
§ 7.	Взаимоотношение между классами множеств N , N_0 и R	759
§ 8.	Сумма двух N -множеств	761
§ 9.	Дополнение Салема к теореме Лузина—Данжуа	764
§ 10.	Выпуклая емкость множеств и абсолютная сходимость	768
§ 11.	Абсолютная сходимость для рядов специального вида	773

ГЛАВА XIV

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ
В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

1. Введение	781
2. Вспомогательные теоремы о верхней и нижней производной Шварца	783
3. Законность почленного интегрирования тригонометрического ряда	786
4. Обобщение теоремы дю Буа-Реймона; теорема Валле—Пуссена	788
5. Теорема Юнга. Постановка проблемы единственности	792
6. Свойства нуль-рядов; сумма замкнутых U -множеств	793
7. H -множества. Теорема Райхмана	796
8. Множества типа H^*	799
9. Подобное преобразование U -множеств	801
10. Преобразование U -множества в M -множество	802
11. Критерий для совершенных M -множеств	803
12. Пример Меньшова	804
13. Достаточные условия для M -множеств	807
14. Достаточные условия для замкнутых U -множеств	812
15. Множества типа $H^{(s)}$	814
16. Существование U -множества, не содержащегося ни в каком $H^{(s)}$	818
17. О точности достаточных условий для совершенных M -множеств	822
18. M -множества в узком смысле	823
19. Симметричные совершенные множества	827
20. Совершенные множества «с постоянным отношением»	829
21. Несимметричные совершенные множества «с постоянным разбиением»	836
22. Краткий обзор результатов, относящихся к симметричным совершенным множествам с переменным отношением	836
23. Проблемы, связанные с классификацией множеств меры нуль	838
24. О быстроте стремления к нулю коэффициентов нуль-ряда	840
25. О единственности для различных методов суммирования	844
26. Множества относительной единственности	847
27. Множества относительной единственности для различных методов суммирования	851

ГЛАВА XV

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ

1. Введение	852
2. Изображение функции, конечной почти всюду	853
3. Изображение функций, обращающихся в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры	864
4. О пределах неопределенности частных сумм тригонометрического ряда	865
5. О множестве предельных функций для тригонометрического ряда	869
6. Универсальные тригонометрические ряды	870
7. Сходимость по мере тригонометрических рядов	875

ДОБАВЛЕНИЯ

К главе II

1. Принцип Фрагмена—Линделефа	877
2. Модуль непрерывности и модуль гладкости в L^p ($p \geq 1$)	878
3. Обращение неравенства Гельдера	878
4. Теорема Банаха—Штейнгауза	880

К главе IV

5. Категория множества	880
6. Теоремы Римана и Каратеодори	881
7. Связь между модулем непрерывности и наилучшим приближением функции	881

К главе V

8. μ -меры и интегралы	883
----------------------------------	-----

К главе VII

9. Чезаровские средние (C, α)	884
10. Сравнение методов (C, α) с методом A^*	887
11. Применение линейных методов суммирования к функциональным рядам	888

§ 12. Теоремы тауберова типа	889
§ 13. Лемма о точках плотности	892
§ 14. О точках Лебега в L^p	893
§ 15. Слабая сходимость линейных функционалов	894
К главе VIII	
§ 16. Образ множества	895
§ 17. Сингулярные функции	895
§ 18. Неравенство Бернштейна в пространстве L^p ($p \geq 1$)	895
§ 19. Неравенство Привалова	896
§ 20. Теорема Бэра	898
§ 21. Неравенство Иенсена	899
К главе X	
§ 22. Некоторые неравенства для функций из класса L^p	899
К главе XI	
§ 23. Вспомогательные теоремы из метрической теории множеств	901
К главе XII	
§ 24. Теорема Минковского	903
§ 25. Несколько теорем из теории рядов	904
К главе XIII	
§ 26. Равномерное распределение	907
К главе XIV	
§ 27. Мажорантные и минорантные функции	910
§ 28. Теорема Минковского о системе линейных форм	911
§ 29. Теорема Пизо	911
§ 30. Об одной диофантовой задаче	916
§ 31. О множествах типа $(H^{(s)})^*$	919
Библиография	922
Алфавитный указатель	933

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известная книга А. Зигмунда «Тригонометрические ряды»^{[М.6] *)} содержит более или менее исчерпывающее изложение тех результатов по теории тригонометрических рядов, которые были получены до 1935 года **). С тех пор интерес математиков к тригонометрическим рядам не уменьшился и достигнутый прогресс настолько значителен, что представляется необходимым изложить современное состояние наших познаний в этой области.

Круг вопросов, которые следовало бы рассмотреть, настолько велик, что приходится сразу же его ограничить. Поэтому я совершенно исключаю интегралы Фурье ***) , тригонометрические ряды от нескольких переменных ****) и лишь очень мало касаюсь исследований по наилучшим приближениям функций тригонометрическими полиномами.

Я говорю также об ортогональных системах лишь в тех случаях, где получение теорем теории тригонометрических рядов из более общих, касающихся ортогональных систем, оказывается проще; если же перенос теорем на общие ортогональные системы требует специального изучения, я ограничиваюсь их формулировкой для тригонометрических рядов *****).

Несмотря на указанное здесь ограничение материала, его все еще остается очень много. Когда в 1915 году Н. Н. Лузин написал свою замечательную диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд»^{[М.9], [М.10]}, где им был решен и поставлен целый ряд существенных проблем, он отметил, что «понятие ряда Фурье не есть понятие вполне определенное и устойчивое, но всецело зависит от понятия интеграла. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла (Коши, Римана, Дирихле, Гарнака, Лебега, Данжуа), мы расширяем все более и более класс тригонометрических рядов Фурье». В настоящей книге под словами «ряд Фурье» я всегда буду понимать ряд Фурье—Лебега. Известно, что существуют тригонометрические ряды, сходящиеся в каждой точке, но имеющие сумму неинтегрируемую не только

*) Библиография помещена в конце книги; цифры в квадратных скобках в тексте являются ссылками на эту библиографию. Цифра, снабженная буквой М, означает ссылку на монографию или учебник.

**) Английское издание книги Зигмунда [М.6] сдано в печать в 1935 году; русский перевод появился в 1939 году. [Примечание при корректуре. В последнее время вышла фундаментальная монография А. Зигмунда «Trigonometric series», 2-е издание, Кембридж, 1959.]

***) Этому вопросу посвящены специальные книги, например Титчмарш [М.23].

****) Основные сведения по этому вопросу можно найти в книге Hobson [М.29], т. II или в книге Tonelli [М.33]. Изложение современных результатов, по моему мнению, является в настоящий момент преждевременным, так как теория кратных тригонометрических рядов еще недостаточно разработана.

*****) Общей теории ортогональных рядов посвящена книга Качмаж и Штейнгауз [М.7], русский перевод которой, снабженный дополнительными статьями, освещающими современное состояние этой теории, вышел в 1958 году.

по Лебегу, но и по Данжуа, в том смысле, как интеграл был определен самим Данжуа (см. Denjoy^[3]) и А. Я. Хинчиным^[1] в 1916 году. Чтобы суметь выразить коэффициенты такого ряда через его сумму по формулам Фурье, Данжуа позже изобрел новый процесс: тотализацию с двумя индексами (см. Denjoy^[М. 27]).

Я не сочла возможным осветить в своей книге эту хотя и очень важную тему, так как на это потребовалось бы слишком много места. Более того, я не касаюсь даже и рядов Фурье—Данжуа, если понимать интеграл Данжуа в смысле первоначального определения: уже на изложение материала по рядам Фурье—Лебега и общим тригонометрическим рядам (т. е. не являющимся рядами Фурье) понадобилось очень много страниц. Ведь если в первое время после создания интеграла Лебега принято было думать, что множества меры нуль всегда можно пренебречь, то в настоящее время совершенно ясно обратное: в целом ряде вопросов теории тригонометрических рядов некоторые множества меры нуль ведут себя так, как множества положительной меры. Таким образом, если прежде об общих тригонометрических рядах можно было сказать очень мало, то теперь им посвящен ряд интересных работ, где появились не только новые результаты, но и существенно новые методы (в частности, в теории тригонометрических рядов иногда значительную роль играет теория чисел).

Сказанное здесь имеет целью хоть отчасти объяснить объем настоящей книги. Конечно, желая его сократить, можно было бы пойти по пути лаконичного изложения, но я сознательно от этого отказываюсь. Мне кажется, что в последнее время авторы математических работ слишком злоупотребляют словами «легко видеть», в результате чего читатель часто не понимает доказательств теорем или упускает некоторые важные моменты. Я же старалась сделать изложение вполне доступным для аспирантов и студентов старших курсов. Особенно это относится к материалу главы I. Я предполагаю, что ее сможет понимать всякий, кто знает лишь теорию интеграла Лебега в объеме обычного курса теории функций для университетов *). В следующих главах содержатся уже более углубленные исследования по теории тригонометрических рядов; для их понимания иногда требуются дополнительные сведения. Для удобства читателей доказательства ряда теорем, на которые я ссылаюсь в тексте, помещены в «Добавлениях». Во «Вводный материал» отнесены некоторые весьма элементарные теоремы из анализа, теории рядов и теории функций, которыми я пользуюсь в тексте систематически; я даю ссылки на наиболее употребительные учебники, где можно найти их доказательства. Вводный материал написан в виде отдельных теорем, причем я не ставила себе целью их формулировать в самой общей форме, а лишь так, как это понадобится в дальнейшем тексте.

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность П. Л. Улянову, который прочел всю книгу еще в рукописи и сделал ряд ценных указаний как в смысле подбора материала, так и в смысле устранения некоторых недочетов. Он дал также во многих случаях ряд собственных доказательств теорем других авторов.

27 декабря 1957 г.

Н. Барн

*) Например, в объеме книги П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [М. 1] или книги И. П. Натансона [М. 16].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$[a, b]$ означает множество всех x , таких, что $a \leq x \leq b$; соответственно $(a, b]$ для $a < x \leq b$; (a, b) для $a < x < b$ и $[a, b)$ для $a \leq x < b$.

$[x]$ — целая часть числа x .

$\{x\} = x - [x]$.

$\{x\}$ — разность между x и ближайшим целым (по недостатку или по избытку).

$x \equiv x_0 \pmod{a}$ — разность $x - x_0$ делится на a .

\uparrow монотонно не убывает; \downarrow монотонно не возрастает; $\uparrow a$ (и $\downarrow a$) — стремится к a , монотонно не убывая (соответственно не возрастаая).

$f(x) \in C[a, b]$ — $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

$f(x) \in L[a, b]$ — $f(x)$ суммируема на $[a, b]$,

$f(x) \in L^p[a, b]$ — $f(x)$ суммируема в степени p на $[a, b]$.

$$\|f\|_{L^p[a, b]} = \left\{ \int_a^b |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad \|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Если ясно, о каком отрезке идет речь, то будет употребляться краткое обозначение $\|f\|_p$, или $\|f\|_C$.

$\|f\|_\infty$ — см. § 9 Вводного материала.

$f(x) \in \text{Lip } \alpha$ означает: существует константа C такая, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha$ для любых x_1 и x_2 на отрезке, где $f(x)$ определена.

o, O, \sim, \approx см. § 11 Вводного материала.

$\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f(x)$.

$x \in E$ — точка x принадлежит множеству E .

$E_1 \subset E_2$ — любая точка из E_1 принадлежит E_2 .

ВВОДНЫЙ МАТЕРИАЛ

I. ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА

§ 1. Преобразование Абеля

Пусть $u_0, u_1, \dots, v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ — любые действительные числа; положим

$$V_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n.$$

Тогда для любых m и n имеем

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_m V_{m-1} \quad (1.1)$$

(если $m = 0$, то условимся считать $V_{-1} = 0$).

Эта формула, носящая название *преобразования Абеля*, доказывается мгновенно; надо только заметить, что $v_k = V_k - V_{k-1}$, подставить это выражение в левую часть и сгруппировать члены.

При $m = 0$ получаем, в частности,

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n. \quad (1.2)$$

Важность формул (1.1) и (1.2) станет ясной, если заметить, что они играют ту же роль, как интегрирование по частям: подобно тому, как вычисление интеграла $\int u dv$ иногда удобно свести к вычислению интеграла $\int v du$, мы и здесь, полагая

$$\Delta u_k = u_k - u_{k+1},$$

$$\Delta V_k = V_k - V_{k+1},$$

можем переписать (1.1) в виде

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta u_k V_k = - \sum_{k=m}^n u_k \Delta V_{k-1} + u_m V_{m-1} - u_n V_n, \quad (1.3)$$

т. е. свести вычисление одной из рассматриваемых сумм к другой, что часто оказывается полезным.

В частности, это бывает удобно, когда одна из рассматриваемых последовательностей монотонно убывает (так как из $u_k \downarrow$ следует $\Delta u_k \geq 0$ для всех k).

Из преобразования Абеля сразу получаем следствие.

С л е д с т в и е. Если все $u_k \geq 0$ и $u_k \downarrow$, а $|V_k| \leq M$ для $m \leq k \leq n$, то

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k v_k \right| \leq 2 u_m M. \quad (1.4)$$

Действительно,

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k v_k \right| \leq M \left| \sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) + u_n + u_m \right| \leq 2 u_m M.$$

Рассмотрим теперь случай, когда вместо чисел v_n мы имеем функции $v_n(x)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$. Полагая

$$V_n(x) = v_0(x) + \dots + v_n(x),$$

имеем лемму:

Л е м м а А б е л я. Если $u_n \downarrow 0$ и

$$|V_n(x)| \leq M, \quad a \leq x \leq b,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$ и для его суммы $S(x)$ справедливо неравенство

$$|S(x)| \leq M u_0, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.5)$$

Действительно, положим

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k v_k(x).$$

Тогда по формуле (1.2)

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) V_k(x) + u_n V_n(x), \quad (1.6)$$

откуда

$$S_n(x) - u_n V_n(x) = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) V_k(x).$$

Так как

$$|(u_k - u_{k+1}) V_k(x)| \leq (u_k - u_{k+1}) M, \quad a \leq x \leq b, \quad (1.7)$$

а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(u_k - u_{k+1})$$

с неотрицательными членами сходится (в силу $u_n \downarrow 0$) и имеет сумму $M u_0$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) V_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$. Тогда из $u_n \downarrow 0$ и (1.6) следует, что $S_n(x)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $S(x)$, для которой справедливо (1.5), и лемма доказана.

Лемму Абеля можно обобщить. Предварительно введем определение.

О п р е д е л е н и е. Последовательность чисел $\{u_n\}$ имеет *ограниченное изменение*, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta u_n| < +\infty. \quad (1.8)$$

Ясно, что если $u_n \downarrow 0$, то условие (1.8) имеет место.

Лемма Абеля сохраняет силу, если условие $u_n \downarrow 0$ заменить условием: последовательность $\{u_n\}$ имеет ограниченное изменение.

Действительно, доказательство полностью сохраняет силу, если только в правой части (1.7) вместо $u_k - u_{k+1}$ написать $|u_k - u_{k+1}| = |\Delta u_k|$.

§ 2. Вторая теорема о среднем значении

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, интегрируемые по Риману на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда, если $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx, \quad (2.1)$$

где $a \leq \xi \leq b$.

В случае, когда $f(x)$ не только монотонна на $[a, b]$, но и неотрицательна на этом отрезке, формула упрощается и принимает вид

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx, \quad \text{если } f(x) \downarrow, \quad (2.2)$$

и

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx, \quad \text{если } f(x) \uparrow \quad (2.3)$$

(см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, § 294).

§ 3. Выпуклые кривые и выпуклые последовательности

О п р е д е л е н и е 1. Кривую $y = \varphi(x)$ условимся называть *выпуклой*, если для любых двух ее точек A и B точки дуги AB лежат ниже хорды AB или на ней (рис. 1). Аналогично, кривая называется *вогнутой*, если точки дуги лежат выше хорды или на ней.

Например, если $\varphi(x)$ имеет производную второго порядка и $\varphi''(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\varphi(x)$ выпукла на этом отрезке.

Действительно, если $a < x < b$, то для любого $h > 0$, если только оно достаточно мало для того, чтобы $x + h$ и $x - h$ все еще лежали на (a, b) , имеем

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h \varphi'(x_1), \quad \text{где } x < x_1 < x + h;$$

$$\varphi(x - h) - \varphi(x) = -h \varphi'(x_2), \quad \text{где } x - h < x_2 < x.$$

Поэтому

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x) = h[\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)] = h(x_1 - x_2)\varphi''(\xi) \geq 0.$$

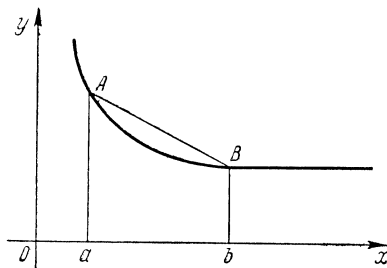


Рис. 1

(Здесь $x - h < \xi < x + h$.) Итак,

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) \geq 0,$$

т. е.

$$\varphi(x) \leq \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h)}{2},$$

откуда, в силу непрерывности $\varphi(x)$ следует, что любая точка дуги кривой между $x - h$ и $x + h$ лежит ниже или на хорде, т. е. кривая выпукла.

Т е о р е м а. Если $F(x)$ выпуклая на $[a, b]$ функция, то ее можно представить в виде

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad (3.1)$$

где $\varphi(t)$ — неубывающая функция на $[a, b]$. Обратно, каждая функция $F(x)$, представимая в такой форме, выпукла на $[a, b]$.

См., например, Натансон [М. 16], стр. 547.

Впоследствии нам придется подробнее ознакомиться со свойствами выпуклых функций; в данное время мы говорим о них лишь в связи с понятием выпуклой последовательности.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) называется *выпуклой*, если, полагая

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1},$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

имеем

$$\Delta^2 a_n \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ясно, что если кривая $y = \varphi(x)$ выпукла на $0 \leq x < +\infty$, то точки $a_n = \varphi(n)$ образуют выпуклую последовательность.

Укажем ряд свойств выпуклых последовательностей.

1) Если последовательность $\{a_n\}$ выпукла и ограничена сверху, то $a_n \downarrow$.

Надо доказать, что $\Delta a_n \geq 0$. Если бы это было неверно, то нашлось бы такое m , что $\Delta a_m < 0$. Но тогда в силу выпуклости при любом $k \geq m$ имеем $\Delta a_k < 0$ и $|\Delta a_k| \geq |\Delta a_m|$; так как

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+1} - a_m) = \\ &= - \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k = \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| \geq (n-m) |\Delta a_m| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, но a_n ограничено сверху, и мы приходим к противоречию.

2) Если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n \rightarrow 0$, то $a_n \downarrow 0$.

Действительно, из $a_n \rightarrow 0$ следует ограниченность a_n сверху; тогда в силу только что доказанного $a_n \downarrow$; вместе с $a_n \rightarrow 0$ это дает $a_n \downarrow 0$.

3) Если $\{a_n\}$ выпукла и ограничена, то

$$n \Delta a_n \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

и

$$\sum (n+1) \Delta^2 a_n < +\infty. \quad (3.3)$$

Действительно, мы уже видели, что при этих условиях $a_n \downarrow$. В силу ограниченности снизу, тогда числа a_n имеют конечный предел. Пусть

$$\lim a_n = a;$$

тогда

$$a_0 - a = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) + \dots,$$

где ряд, стоящий в правой части, имеет члены, монотонно убывающие, и он сходится. Поэтому и $n \Delta a_n \rightarrow 0$ в силу известной теоремы из теории числовых рядов.

Далее, применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{m=0}^n \Delta a_m = \sum_{m=0}^n 1 \cdot \Delta a_m = \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \Delta^2 a_m + (n+1) \Delta a_n,$$

и так как $(n+1) \Delta a_n \rightarrow 0$, а

$$\sum_{m=0}^n \Delta a_m = a_0 - a_n \rightarrow a_0 - a \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \Delta^2 a_m \rightarrow a_0 - a, \quad \text{т. е. ряд} \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \Delta^2 a_m$$

сходится, а это и надо было доказать.

З а м е ч а н и е. Если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n \rightarrow 0$, то доказанное предложение тем более справедливо.

II. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ, СУММИРОВАНИЕ

§ 4. Ряды с монотонно убывающими членами

Т е о р е м а 1 (теорема Коши). Если $u_n \downarrow 0$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, в силу монотонности u_n имеем при любом k

$$2^{k-1} u_{2^k} \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} u_n \leq 2^{k-1} u_{2^{k-1}}$$

и остается заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=2^{k-1}+1}^{2^k} u_s.$$

Т е о р е м а 2. Если $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то, полагая $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \Delta a_n = +\infty.$$

Положим $u_n = \sum_{k=1}^n k \Delta a_k$. В силу $a_n \downarrow 0$ имеем $\Delta a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Значит все $u_n \geq 0$ и \uparrow . Надо доказать, что $u_n \rightarrow \infty$. Если бы это было неверно, то

$$u_n \uparrow a, \quad \text{где} \quad a \neq +\infty.$$

Тогда $u_n = a - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \downarrow 0$, и следовательно, так как

$$u_n - u_{n-1} = n \Delta a_n = (a - \varepsilon_n) - (a - \varepsilon_{n-1}) = \Delta \varepsilon_{n-1},$$

то

$$\Delta a_n = \frac{\Delta \varepsilon_{n-1}}{n}.$$

В силу $a_n \rightarrow 0$ и $\Delta \varepsilon_k \geq 0$ имеем

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{k-1}}{k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_{k-1} = \frac{1}{n} \varepsilon_{n-1},$$

а потому $na_n \rightarrow 0$.

Но, применяя к сумме, изображающей u_n , преобразование Абеля, находим

$$u_n = \sum_{k=1}^n k \Delta a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1},$$

а так как $u_n \rightarrow a$, а $na_n \rightarrow 0$, то

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow a,$$

что противоречит условию $\sum a_n = +\infty$.

Для дальнейшего полезно ввести следующее определение.

Определение 1. Пусть $\sum u_n$ — сходящийся ряд с $u_n \downarrow 0$. Полагаем

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Будем говорить, что этот ряд удовлетворяет условию (L), если

$$r_n = O(u_n). \quad (4.1)$$

Если члены ряда убывают не медленнее некоторой геометрической прогрессии, т. е. если

$$u_{n+1} \leq \theta u_n, \quad 0 < \theta < 1,$$

то он удовлетворяет условию (L), но обратное заключение, разумеется, неверно, как показывает хотя бы такой пример:

$$u_{2n-1} = u_{2n} = \theta^n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad 0 < \theta < 1.$$

Покажем, что если ряд удовлетворяет условию (L), то каково бы ни было $\theta < 1$, его можно разбить на конечное число l рядов (l зависит от θ) так, чтобы члены каждого из них убывали не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ .

Действительно, условие (4.1) означает, что

$$r_n < cu_n,$$

где c — постоянное. Пусть θ задано. Выберем число l так, чтобы

$$l = \left[\frac{c}{\theta} \right]. \quad (4.2)$$

Тогда в силу монотонного убывания чисел u_n и в силу (4.2) имеем

$$(l+1)u_{n+l} \leq \sum_{k=n}^{k=n+l} u_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} u_k \leq cu_n, \quad (4.3)$$

а потому в силу (4.3)

$$u_{n+l} \leq \frac{c}{l+1} u_n \leq \theta u_n.$$

Следовательно, все l рядов

$$\begin{aligned} & u_1 + u_{1+l} + u_{1+2l} + \dots, \\ & u_2 + u_{2+l} + u_{2+2l} + \dots, \\ & \dots\dots\dots \\ & u_l + u_{2l} + u_{3l} + \dots, \end{aligned}$$

на которые можно разбить наш ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, убывают не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ .

Докажем теперь теорему.

Т е о р е м а 3. Если ряд $\sum u_n$ удовлетворяет условию (L), то

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = O\left(\frac{1}{u_n}\right). \quad (4.4)$$

Действительно, имеем из определения

$$u_n = r_n - r_{n+1},$$

а потому из $\frac{r_n}{u_n} < c$

$$\frac{r_n}{r_n - r_{n+1}} < c,$$

откуда

$$r_n < c(r_n - r_{n+1}),$$

т. е.

$$cr_{n+1} < (c-1)r_n$$

или

$$r_{n+1} < \theta r_n, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{c-1}{c} < 1.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} & \leq r_n \sum_{k=1}^n \frac{c}{r_k} \leq c \left[\frac{r_n}{r_1} + \frac{r_n}{r_2} + \dots + \frac{r_n}{r_n} \right] \leq \\ & \leq c(1 + \theta + \dots + \theta^{n-1}) = O(1), \end{aligned}$$

а это и значит, что (4.4) доказано.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что *возрастающая последовательность натуральных чисел*

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

удовлетворяет условию (L), если ряд $\sum \frac{1}{n_k}$ удовлетворяет условию (L), т. е.

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = O\left(\frac{1}{n_m}\right). \quad (4.5)$$

В частности, это имеет место для одного важного класса последовательностей, называемых лакунарными.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

называется *лакунарной*, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.6)$$

Ясно, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L), так как

$$n_{k+s} \geq \lambda^s n_k \quad (s = 1, 2, \dots),$$

а потому

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n_m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^s} = O\left(\frac{1}{n_m}\right).$$

В общем случае последовательность, удовлетворяющую условию (L), можно разбить на конечное число лакунарных (так как она разбивается на конечное число таких, у которых члены растут не медленнее, чем члены некоторой возрастающей геометрической прогрессии).

З а м е ч а н и е 1. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то и $\{n_k^2\}$ также. Действительно,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \leq \frac{1}{n_m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{1}{n_m} O\left(\frac{1}{n_m}\right) = O\left(\frac{1}{n_m^2}\right).$$

З а м е ч а н и е 2. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то

$$\sum_{k=1}^m n_k = O(n_m). \quad (4.7)$$

Действительно, по условию имеем

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} < C \frac{1}{n_m}, \quad (4.8)$$

где C — постоянная. Ясно, что $C > 1$.

Положим

$$r_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k}.$$

Тогда $\frac{1}{n_m} = r_m - r_{m+1}$ и (4.8) принимает вид

$$r_m < C(r_m - r_{m+1}),$$

откуда

$$r_{m+1} < \frac{C-1}{C} r_m$$

или, полагая $\theta = \frac{C-1}{C}$,

$$r_{m+1} < \theta r_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4.9)$$

где $0 < \theta < 1$. Но

$$\frac{1}{n_m} < r_m$$

и, с другой стороны, в силу (4.8) $r_m < \frac{C}{n_m}$, следовательно

$$n_m < \frac{C}{r_m}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^m n_k &< r_m \sum_{k=1}^m \frac{C}{r_k} = C \left[1 + \frac{r_m}{r_{m-1}} + \frac{r_m}{r_{m-2}} + \dots + \frac{r_m}{r_1} \right] < \\ &< C [1 + \theta + \theta^2 + \dots] = \frac{C}{1 - \theta} = K, \end{aligned}$$

где K — постоянная, а это и доказывает (4.7).

§ 5. Линейные методы суммирования

Существует целый ряд приемов, позволяющих приписать «сумму» расходящемуся ряду; эти приемы носят название *методов суммирования рядов*. Наиболее употребительными являются линейные методы суммирования, которые строятся по следующему принципу: пусть A — некоторая матрица с бесконечным числом строк и столбцов

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{00} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{10} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|.$$

Вместо рассмотрения обычных частных сумм S_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ рассматривают числа

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k, \quad (5.1)$$

предполагая, что ряды в правых частях этих равенств сходятся ($n = 0, 1, 2, \dots$); если при этом существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S,$$

то число S называют «суммой» ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ и говорят, что метод, определяемый матрицей, суммирует ряд $\sum u_n$ к числу S .

Методы, определенные таким образом, носят название *линейных* потому, что если такой метод суммирует ряд $\sum u_n$ к сумме S , то ряд $\sum C u_n$, где C постоянно, суммирует к $C S$ и если ряд $\sum v_n$ суммируется к S_1 , то ряд $\sum (u_n + v_n)$ суммируется к $S + S_1$.

Метод суммирования принято называть *регулярным*, если всякий сходящийся ряд суммируется этим методом к числу S , являющемуся его суммой в классическом смысле слова, т. е.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Теплиц (Toeplitz^[1]) доказал, что для регулярности линейного метода, определяемого матрицей A , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие три условия:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$
2. Если $A_n = a_{n0} + a_{n1} + \dots + a_{nk} + \dots$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$.

3. Если $K_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$, то $K_n < C$ ($n = 1, 2, \dots$), где C — постоянное.

Принято называть их «условиями Теплица», а удовлетворяющие им матрицы — T -матрицами.

Мы не будем доказывать, что эти условия необходимы для регулярности метода (см. об этом, например, Харди [М. 24] § 3.2), что касается их достаточности, то она получается мгновенно. Действительно, пусть

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Положим $S_n = S + \varepsilon_n$, тогда $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} S_p = S \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p = S A_n + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p.$$

Так как $A_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ в силу условия 2, то остается доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ дано; выберем N столь большим, что $|\varepsilon_p| < \varepsilon$ для $p > N$, тогда

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p \right| \leq \left| \sum_{p=0}^N a_{np} \varepsilon_p \right| + \varepsilon \sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{np}|.$$

В первой сумме число членов ограничено, $a_{np} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, числа ε_p ограничены в совокупности; значит, при $n \rightarrow \infty$ эта сумма стремится к 0; вторая сумма не превосходит εC , где C — константа из условия 3, а ε взято произвольно малым, поэтому правая часть может быть сделана как угодно малой с ростом n , и теорема доказана.

Принято называть матрицу A *положительной*, если все $a_{nk} \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots$). Ясно, что если для положительной матрицы выполнено второе условие Теплица, то выполнено и третье.

Матрицу A называют T^* -матрицей, если она удовлетворяет двум первым условиям Теплица, но не обязательно удовлетворяет третьему (в силу предыдущего замечания, для положительных матриц этот случай невозможен).

Сделаем еще одно общее замечание о матрицах T ; пусть S_k не стремится к пределу, но зато существует $\lim_{k_n \rightarrow \infty} S_{k_n} = S$, где $\{k_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность из натуральных чисел. Мы можем тогда сказать, что последовательность S_k суммируется к S некоторым методом Теплица. Действительно, если положить

$$\begin{aligned} a_{nk_n} &= 1, & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ a_{nk} &= 0, & \text{если } k &\neq k_n, \end{aligned}$$

то полученная матрица удовлетворяет всем трем условиям Теплица и при этом $\sigma_n = \sum a_{nk} S_k = S_{k_n} \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. последовательность S_n суммируется к S этим методом.

§ 6. Метод средних арифметических [или $(C, 1)$]

В качестве простейшего примера методов, определяемых матрицами T , рассмотрим классический случай, а именно метод средних арифметических [или $(C, 1)$ *)], введенный Чезаро. Чезаро предложил приписывать расходяще-

*) Обозначение $(C, 1)$ станет понятно, когда будет введено понятие методов (C, a) (см. Добавления, § 9).

муся ряду сумму S , если $\lim \sigma_n = S$, где

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1},$$

и доказал регулярность этого метода суммирования.

Если положить

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (k = 0, 1, \dots, n), \\ 0 & (k > n), \end{cases}$$

то метод средних арифметических определяется матрицей $A = \|a_{nk}\|$ и сразу видно, что здесь три условия Теплица удовлетворены, т. е. A есть T -матрица.

З а м е ч а н и е 1. Метод средних арифметических (или метод $(C, 1)$) является также и вполне регулярным, т. е. если

$$S_n \rightarrow +\infty,$$

то и

$$\sigma_n \rightarrow +\infty.$$

Действительно, если M любое, то можно найти такое N , что $S_n > M$ при $n \geq N$. Тогда

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \dots + S_N}{n+1} + \frac{S_{N+1} + \dots + S_n}{n+1}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а для второго имеем

$$\frac{S_{N+1} + \dots + S_n}{n+1} > M \frac{n-N}{n+1} > \frac{M}{2},$$

как только $n > 2N + 1$, а потому σ_n становится как угодно большим, если n достаточно велико, т. е. $\sigma_n \rightarrow \infty$, а это и надо было доказать.

З а м е ч а н и е 2. Говоря о методе $(C, 1)$, необходимо отметить одну формулу, которая в дальнейшем часто будет употребляться, а именно: если S_n — частные суммы, а σ_n — средние арифметические для ряда $\sum u_k$, то

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k. \quad (6.1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} S_n - \sigma_n &= S_n - \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_n - S_k) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} + \dots + u_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k. \end{aligned}$$

§ 7. Метод Абеля

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ — числовой ряд и x действительное число, $0 \leq x < 1$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируется методом Абеля к числу S (или

кратко: суммируется A к числу S), если $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ сходится для $0 \leq x < 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = S. \quad (7.1)$$

Условие (7.1) можно переписать в другой форме. С этой целью заметим, что для $0 \leq x < 1$ имеем тождественно

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k. \quad (7.2)$$

Действительно, пусть $0 \leq x < 1$ и ряд слева в (7.2) сходится. Возьмем такое r , что $x < r < 1$. Тогда, так как $\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k$ сходится, найдется такое C , что $|u_k r^k| \leq C$ ($k = 0, 1, \dots$).

Поэтому

$$|S_n x^n| \leq C x^n \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n}\right) < \frac{C}{1-r} x^n \frac{1}{r^n},$$

а это выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но в силу преобразования Абеля

$$\sum_{k=0}^n u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) + S_n x^n = (1-x) \sum_{k=0}^n S_k x^k + S_n x^n,$$

и так как $S_n x^n \rightarrow 0$, то (7.2) доказано. Доказательство аналогично, если предположить сходимость ряда в правой части (7.2).

Поэтому условие (7.1) можно также записывать в виде

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S \quad (7.3)$$

и говорить, что ряд суммируем к числу S методом Абеля, если выполнено (7.3).

Докажем, что имеет место

Т е о р е м а Ф р о б е н и у с а. Если ряд суммируем $(C, 1)$ к числу S , то он суммируем методом Абеля к тому же числу.

Действительно, так как

$$(n+1) \sigma_n = S_0 + S_1 + \dots + S_n$$

то, применяя преобразование Абеля к правой части (7.2), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \sigma_k x^k. \quad (7.4)$$

Но так как для $0 < x < 1$ имеем

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

или

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k, \quad (7.5)$$

то, умножая обе части (7.5) на S и вычитая из (7.4), находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - S &= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (\sigma_k - S) x^k = \\ &= (1-x)^2 \sum_{k=0}^N (k+1) (\sigma_k - S) x^k + (1-x)^2 \sum_{N+1}^{\infty} (k+1) (\sigma_k - S) x^k. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Если ε задано, то можно выбрать N так, чтобы

$$|\sigma_{k+1} - S| < \varepsilon \quad \text{для} \quad k \geq N,$$

а тогда вторая сумма в правой части (7.6) меньше ε , что же касается первой суммы, то она стремится к нулю, так как число членов в ней фиксировано. Отсюда вытекает выполнение (7.1) и теорема доказана.

Чтобы сравнить метод Абеля с ранее рассмотренными линейными методами суммирования, можно было бы вместо непрерывного параметра r рассматривать любые последовательности r_n , где $r_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Однако более целесообразно рассмотреть вместо матриц $\|a_{nk}\|$ совокупность функций $a_k(x)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ и $0 \leq x < 1$. Если мы положим

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k,$$

предполагая, что ряд в правой части сходится при $x \rightarrow 1$, и если

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x) = S,$$

то можно рассматривать S как «сумму» ряда $\sum u_k$, определяемую таким методом суммирования с непрерывным параметром $x \rightarrow 1$.

Совершенно так же, как была доказана регулярность методов, определяемых матрицами Теплица, мы видим, что такой метод будет регулярным, если выполнены условия:

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} a_k(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

$$2^\circ. \text{ Если } A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \quad 0 \leq x < 1, \text{ то } A(x) \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 1.$$

$$3^\circ. \text{ Если } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| = f(x), \quad \text{то} \quad |f(x)| < C, \quad 0 \leq x < 1,$$

где C — постоянное.

В частности метод Абеля регулярен, так как в этом случае

$$a_k(x) = x^k - x^{k+1},$$

и сразу видно, что все три условия удовлетворены. Более того, метод Абеля вполне регулярен, так как, если $S_k \rightarrow +\infty$, то можно для любого M найти такое k_0 , что $S_k > M$ при $k > k_0$; тогда

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k &= (1-x) \sum_{k=0}^{k_0} S_k x^k + (1-x) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} S_k x^k > \\ &> (1-x) \sum_{k=0}^{k_0} S_k x^k + M x^{k_0+1}. \end{aligned}$$

Если $x \rightarrow 1$, то первое слагаемое правой части есть $o(1)$, поскольку k_0 фиксировано, а второе стремится к M , а потому $(1-x) \sum S_k x^k$ может быть сделано

III. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЧИСЕЛ, РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ

§ 8. Числовые неравенства

1. Для любых двух чисел a и b и любого $p \geq 1$ имеем

$$|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p). \quad (8.1)$$

Действительно, если

$$|a| > |b|,$$

то

$$|a + b| \leq 2|a|$$

и

$$|a + b|^p \leq 2^p |a|^p \leq (|a|^p + |b|^p) \cdot 2^p.$$

Если же

$$|a| \leq |b|,$$

то

$$|a + b| \leq 2|b|$$

и

$$|a + b|^p \leq 2^p |b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

2. Для любых двух чисел a и b и $0 \leq p < 1$ имеем

$$|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p. \quad (8.2)$$

Положим

$$t = \left| \frac{b}{a} \right|.$$

Неравенство будет справедливо, если мы докажем, что

$$(1 + t)^p \leq 1 + t^p \quad \text{при} \quad 0 \leq p < 1. \quad (8.3)$$

Но неравенство (8.3) справедливо потому, что функция $(1 + t)^p - (1 + t^p)$ обращается в нуль при $t = 0$ и убывает с ростом t , значит она всюду неположительна.

3. Если a и b — любые положительные, а p и q такие, что $p > 1$, $q > 1$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

то

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (8.4)$$

Положим $p = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, и построим график функции $y = x^\alpha$ (рис. 3). Так как это

функция возрастающая, то обратная функция $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ определена однозначно. Так как

$$S_1 = \frac{a^p}{p} = \int_0^a x^\alpha dx$$

и

$$S_2 = \frac{b^q}{q} = \int_0^b y^{\frac{1}{\alpha}} dy$$

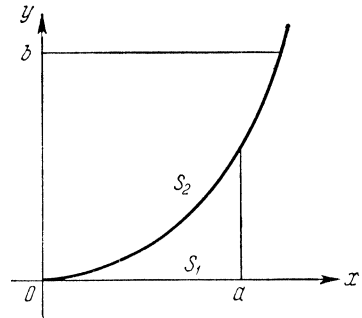


Рис. 3

(потому что $1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$), то нужное неравенство вытекает из того, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превосходит суммы площадей $S_1 + S_2$.

В случае $b = a^a$ и только в этом случае неравенство превращается в равенство.

Совершенно так же можно доказать, что если $\varphi(u)$ непрерывна при $u \geq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)$ возрастает и $\varphi(u) \rightarrow \infty$, а $\psi(u) \rightarrow \infty$ — обратная к ней функция, то, полагая

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) du, \quad \Psi(y) = \int_0^y \psi(v) dv,$$

имеем

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b) \quad (8.5)$$

для любых положительных a и b .

Такие функции Φ и Ψ иногда называют взаимно дополнительными. (В предыдущем примере было $\varphi(u) = u^a$, где $a = p - 1$, $\psi(v) = v^{\frac{1}{a}}$). Неравенство (8.5) называется *неравенством Юнга*.

§ 9. Неравенство Гельдера

Пусть

$$f(x) \in L^p[\alpha, \beta], \quad \varphi(x) \in L^q[\alpha, \beta],$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (9.1)$$

Докажем справедливость неравенства

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (9.2)$$

или кратко

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q \quad (9.3)$$

(см. обозначения для норм).

Действительно, полагая для краткости

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_q},$$

имеем в силу (8.4)

$$|f(x) \varphi(x)| = \|f\|_p \|\varphi\|_q a b \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right). \quad (9.4)$$

Но

$$a^p = \frac{|f(x)|^p}{\int_{\alpha}^{\beta} |f|^p dx}, \quad b^q = \frac{|\varphi(x)|^q}{\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi|^q dx}.$$

Интегрируя по x , находим

$$\int_{\alpha}^{\beta} a^p dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\beta} b^q dx = 1$$

и в соединении с (9.1) и (9.4) дает

$$\int_a^\beta |f(x) \varphi(x)| dx \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q,$$

а это и есть (9.3).

З а м е ч а н и е 1. Полагая $p = q = 2$, получаем известное неравенство Буняковского

$$\left| \int_a^\beta f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \left(\int_a^\beta |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^\beta |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.5)$$

или

$$\left| \int_a^\beta f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности чисел, причем ряды

$$\sum_1^\infty |a_n|^p \quad \text{и} \quad \sum_1^\infty |b_n|^q$$

сходятся, то совершенно также имеем

$$\sum_1^\infty |a_n b_n| \leq \left(\sum_1^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^\infty |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (9.6)$$

при

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

З а м е ч а н и е 2. Неравенство (9.3) сохраняет силу при $p = 1$ и $q = \infty$, если условиться считать

$$\|\varphi\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|\varphi\|_q. \quad (9.7)$$

Покажем, что предел в правой части (9.7) существует, если функция существенно ограничена, и он равен ее существенной верхней грани. При этом под существенной верхней гранью понимается такое число M , что почти всюду на (α, β) имеем

$$|\varphi(x)| \leq M \quad (9.8)$$

и, с другой стороны, для любого $M' < M$ найдется такое множество E , $mE > 0$, где $|\varphi(x)| > M'$.

Действительно, если (9.8) выполнено почти всюду, то

$$\|\varphi\|_q = \left\{ \int_a^\beta |\varphi(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M (\beta - \alpha)^{\frac{1}{q}},$$

и поэтому

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \|\varphi\|_q \leq M.$$

С другой стороны, если $M' < M$ и $|\varphi(x)| > M'$ на E , то

$$\|\varphi\|_q \geq M' (mE)^{\frac{1}{q}},$$

а потому

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\varphi\|_q \geq M',$$

а так как M' любое, лишь бы $M' < M$, то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\varphi\|_q \geq M,$$

откуда и вытекает

$$M = \lim_{q \rightarrow \infty} \|\varphi\|_q = \|\varphi\|_{\infty}. \quad (9.9)$$

Теперь мы видим, что если B — класс существенно ограниченных функций, то для $f \in L$ и $\varphi \in B$ неравенство (9.3) справедливо, если понимать под $\|\varphi\|_{\infty}$ существенную верхнюю грань для φ , определяемую формулой (9.9).

Из неравенства Гельдера выведем одно следствие, весьма полезное в дальнейшем.

Пусть $g(t)$ ограниченная, периодическая с периодом 2π , неотрицательная и такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = 1. \quad (9.10)$$

Пусть $f(x) \in L^p$. Если

$$\sigma(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t-x) dt,$$

то

$$\|\sigma(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p. \quad (9.11)$$

Действительно, в силу неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} |\sigma(x)|^p &\leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| g(t-x) dt \right\}^p = \\ &= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left\{ g(t-x) \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ g(t-x) \right\}^{\frac{1}{q}} dt \right\}^p \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x) dt \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g(t-x) dt \right\}^{\frac{p}{q}} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x) dt \right\} dx$$

и, меняя порядок интегрирования,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g(t-x) dx \right\} dt. \quad (9.12)$$

В силу периодичности $g(t)$ имеем из (9.10) и (9.12)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^p dt$$

и, возводя в степень $\frac{1}{p}$, получим искомое неравенство.

§ 10. Неравенство Минковского

Пусть $f(x) \in L^p[a, b]$ и $\varphi(x) \in L^p[a, b]$ для $p > 1$. Покажем, что тогда

$$\left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (10.1)$$

т. е.

$$\|f + \varphi\|_p \leq \|f\|_p + \|\varphi\|_p. \quad (10.2)$$

Прежде всего заметим, что если $\Psi(x) \in L^p$, то $|\Psi(x)|^{p-1} \in L^q$. Действительно,

$$(|\Psi(x)|^{p-1})^q = |\Psi(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} = |\Psi(x)|^p.$$

Поэтому, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p dx &\leq \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{p-1} |\varphi(x)| dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

Если разделить обе части полученного неравенства на $\left(\int_a^b |f + \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$,

то получим

$$\left(\int_a^b |f + \varphi|^p dx \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

и так как $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, то это заканчивает доказательство.

Совершенно также можно доказать, что при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (10.3)$$

В неравенстве Минковского был оценен интеграл от степени суммы двух функций, когда эта степень $p \geq 1$. Если $p < 1$, то это неравенство теряет силу. Но имеет место неравенство

$$\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)|^p dx + \int_a^b |\varphi(x)|^p dx \quad (0 \leq p < 1). \quad (10.4)$$

Это немедленно следует из (8.2).

Совершенно аналогично имеем для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \quad \text{для} \quad 0 \leq p < 1. \quad (10.5)$$

§ 11. *O*- и *o*-соотношения для рядов и интегралов

Пользуясь принятым теперь в математической литературе обозначением, мы будем писать

$$u_n = o(v_n),$$

если $v_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если же $\frac{u_n}{v_n}$ ограничено, то будем писать

$$u_n = O(v_n).$$

Если существуют две положительные константы A и B , для которых при достаточно больших n

$$A \leq \frac{u_n}{v_n} \leq B,$$

то будем писать

$$u_n \sim v_n,$$

и, наконец,

$$u_n \approx v_n$$

будет означать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

(в этом случае принято говорить, что u_n и v_n асимптотически равны).

Докажем, что

$$1) \text{ из } u_n = O(v_n) \quad \text{следует} \quad \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right),$$

$$2) \text{ из } u_n \sim v_n \quad \text{следует} \quad \sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k.$$

Действительно, для случая 1) это вытекает из неравенства

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^n |u_k|}{\sum_{k=0}^n v_k} \leq M,$$

а для случая 2) из неравенства

$$A \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \leq B.$$

Для случая $u_n = o(v_n)$ и $u_n \approx v_n$ аналогичные соотношения вообще не имеют места, однако

$$3) \text{ если } \sum_{k=0}^n v_k \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad u_n = o(v_n), \quad \text{то} \quad \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right);$$

$$4) \text{ если } \sum_{k=0}^n v_k \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad u_n \approx v_n, \quad \text{то} \quad \sum_{k=0}^n u_k \approx \sum_{k=0}^n v_k.$$

Для доказательства 3), если $\varepsilon > 0$ задано, найдем такое N , что

$$|u_n| \leq \varepsilon v_n \quad \text{для} \quad n \geq N.$$

Имеем

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^N u_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^N u_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k,$$

откуда

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^N u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} + \varepsilon. \quad (11.1)$$

Но знаменатель в правой части (11.1) стремится в бесконечность при $n \rightarrow \infty$, а числитель постоянен, значит вся правая часть может быть сделана меньше 2ε , если n достаточно велико, а так как ε произвольно, то левая часть как угодно мала, а это и надо было доказать.

Аналогично доказывается 4). Надо только выбрать N так, чтобы

$$(1 - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon) v_n \quad \text{для} \quad n \geq N$$

и принять во внимание, что

$$\frac{\sum_{k=0}^N v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Очевидно также, что

5) если $v_n > 0$, $\sum v_n < +\infty$ и $u_n = o(v_n)$, то ряд $\sum u_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_k\right).$$

Действительно, при любом $\varepsilon > 0$, если n достаточно велико, то $|u_k| < \varepsilon v_k$, откуда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_k \right| < \varepsilon \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_k \right).$$

Совершенно аналогично вместо сравнения членов двух последовательностей можно сравнивать две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, из которых одна положительна; например, $\varphi(x) > 0$.

Мы пишем

$$f(x) = o(\varphi(x)), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 0, \quad (11.2)$$

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ ограничено,} \quad (11.3)$$

$$f(x) \sim \varphi(x), \quad \text{если } A < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < B, \quad (11.4)$$

где A и B положительны, и

$$f(x) \approx \varphi(x), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1.$$

При этом в соотношениях (11.2), (11.3) и (11.4) мы можем рассматривать как случай, когда $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), так и случай $x \rightarrow x_0$, где x_0 какое-то фиксированное.

Имеет место утверждение, аналогичное предыдущим, а именно:

Л е м м а 1. *Если*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt,$$

то из

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{на} \quad a \leq x \leq b$$

следует

$$F(x) = O[\Phi(x)] \quad \text{на} \quad a \leq x \leq b.$$

Действительно,

$$|F(x)| = \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M \int_a^x \varphi(t) dt = M \Phi(x),$$

где M постоянное.

Такое же утверждение при замене O на o вообще неверно, но становится справедливым, если $\Phi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b$; точнее имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Пусть $\varphi(x) > 0$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на $a \leq x < b$ и суммируемы на $a \leq x \leq b - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда, если*

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow b$$

и

$$\Phi(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow b,$$

то

$$F(x) = o[\Phi(x)] \quad \text{при} \quad x \rightarrow b.$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти такое x_0 , что

$$|f(x)| < \varepsilon \varphi(x) \quad \text{для} \quad a < x_0 \leq x < b.$$

Тогда

$$|F(x)| \leq \int_a^{x_0} |f(t)| dt + \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \int_a^{x_0} |f(t)| dt + \varepsilon \Phi(x),$$

откуда

$$\left| \frac{F(x)}{\Phi(x)} \right| < \frac{\int_a^{x_0} |f(t)| dt}{\Phi(x)} + \varepsilon.$$

Так как $\Phi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b$, то первое слагаемое правой части станет меньше ε , как только x станет достаточно близким к b , а потому тогда

$$|F(x)| < 2\varepsilon \Phi(x)$$

и в силу произвольности ε наша лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Разумеется, можно было бы совершенно также установить справедливость утверждения, если бы $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \rightarrow a$.

IV. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

§ 12. О верхнем пределе последовательности множеств

Л е м м а. Если для последовательности множеств E_n имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} m E_n < +\infty, \quad \text{то} \quad m \overline{\lim} E_n = 0.$$

Действительно,

$$\overline{\lim} E_n = (E_1 + E_2 + \dots)(E_2 + \dots) \dots (E_n + \dots) \dots$$

Поэтому

$$m \overline{\lim} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n + \dots).$$

Но

$$m(E_n + \dots) \leq m E_n + m E_{n+1} + \dots$$

и так как $\sum m E_n < +\infty$, то правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, значит, $m \overline{\lim} E_n = 0$.

§ 13. Сходимость по мере

Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность функций, измеримых и конечных почти всюду на $[a, b]$. Пусть $f(x)$ также измерима и конечна почти всюду на $[a, b]$.

Следуя Ф. Риссу, говорят, что последовательность $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m E(|f - f_n| \geq \sigma) = 0.$$

Лебег доказал, что если последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, то она сходится и по мере к $f(x)$. Эта теорема необратима (см., например, Натансон^[М. 16.1], стр. 106—108).

§ 14. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега

1. **Теорема 1 (теорема Лебега).** Если $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ есть последовательность измеримых функций, ограниченных в совокупности на множестве E , т. е.

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{на} \quad E \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на} \quad E,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad (14.1)$$

(См., например, Натансон^[М. 16.], стр. 139 *).)

2. Теорема 2. То же соотношение (14.1) справедливо, если вместо ограниченности в совокупности функций $f_n(x)$ предполагается, что

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x) \quad \text{почти всюду на } E,$$

где $\Phi(x)$ положительная и суммируемая на E функция.

(См., например, Натансон^[М. 16.], стр. 166*.)

3. Теорема 3 (теорема Фат у). Если последовательность измеримых и неотрицательных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ сходится к функции $F(x)$ почти всюду на E , то

$$\int_E F(x) dx \leq \sup \left\{ \int_E f_n(x) dx \right\}. \quad (14.2)$$

(См. Натансон^[М. 16.], стр. 155.)

Теорема 4. Если $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ — последовательность неотрицательных функций таких, что

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$$

и

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx, \quad (14.1)$$

причем если $f(x)$ несуммируема на E , то соотношение (14.1) сохраняет силу в том смысле, что оба члена равенства становятся равны $+\infty$.

Действительно, если $f(x)$ суммируема, то это утверждение мгновенно вытекает из теоремы 2. Если же $f(x)$ не суммируема, то, полагая $(f)_N = f(x)$ при $f(x) \leq N$ и $(f)_N = N$ при $f(x) > N$, видим, что $\int_E (f)_N dx \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Если для каждой f_n определить функцию $(f_n)_N$ так же, как $(f)_N$ для f , то $|(f_n)_N| \leq N$ ($n = 1, 2, \dots$) и $(f_n)_N \rightarrow (f)_N$ при $n \rightarrow \infty$, а потому по теореме 1

$$\int_E (f_n)_N dx \rightarrow \int_E (f)_N dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, $\int_E (f_n)_N dx$ может быть сделан как угодно большим при достаточно большом N , а тогда и подавно это верно для $\int_E f_n(x) dx$, откуда и следует, что левая часть (14.1) равна $+\infty$.

В качестве следствия этой теоремы получаем

4. Теорема 5. Если $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ есть последовательность неотрицательных суммируемых на E функций и если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) dx \leq +\infty, \quad (14.3)$$

то ряд $\sum u_n(x)$ сходится почти всюду на E к неотрицательной суммируемой функции $f(x)$.

*) Теорема там доказана в предположении, что $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, но так как всякая последовательность, сходящаяся почти всюду, сходится и по мере (см. § 13), то наше утверждение и подавно справедливо.

Действительно, полагая $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, видим, что $S_1(x) \leq S_2(x) \leq \dots \leq S_n(x) \leq \dots$. Полагая $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, где $f(x)$ конечна или бесконечна, имеем по теореме 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Но так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_E u_k(x) dx < +\infty,$$

то отсюда следует, что $\int_E f(x) dx < +\infty$, а тогда $f(x)$ суммируема.

§ 15. Точки Лебега

Условимся говорить, что точка x есть *точка Лебега* для суммируемой функции $f(x)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0. \quad (15.1)$$

Ясно, что любая точка, где $f(x)$ непрерывна, есть точка Лебега; действительно, если $\varepsilon > 0$ любое, а в точке x функция $f(x)$ непрерывна, то можно найти такое δ , что $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ для $|h| \leq \delta$, а тогда для тех же значений x

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon,$$

откуда и следует нужное утверждение.

Однако у суммируемой функции может не быть ни одной точки непрерывности. Тем не менее справедлива следующая

Теорема Лебега. Если $f(x)$ суммируема на $[a, b]$, то почти все точки этого отрезка являются точками Лебега для $f(x)$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала любое число r и пусть

$$F(u) = \int_0^u |f(t) - r| dt.$$

Тогда для почти всех $x \in [a, b]$ имеем (по теореме о производной от неопределенного интеграла Лебега)

$$F'(x) = |f(x) - r|,$$

т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| dt = |f(x) - r|. \quad (15.2)$$

Пусть r рационально и E_r — множество тех x отрезка $[a, b]$, где соотношение (15.2) нарушается; следовательно, $mE_r = 0$. Пусть $E = \sum E_{r_n}$, где r_n пробегает все рациональные числа; тогда $mE = 0$. Докажем, что всякая точка, не принадлежащая к E , в которой $f(x)$ конечна, есть точка Лебега для $f(x)$.

Действительно, пусть x_0 такая точка и $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти такое рациональное r_n , что

$$|f(x_0) - r_n| < \varepsilon. \quad (15.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| dt + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |r_n - f(x_0)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| dt + \varepsilon. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Но так как $x_0 \in E$, то $x_0 \in E_{r_n}$ и, значит,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| dt = |f(x_0) - r_n|,$$

следовательно,

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n| dt - |f(x_0) - r_n| \right| < \varepsilon, \quad (15.5)$$

если $|h|$ достаточно мало.

Соединяя (15.3), (15.4) и (15.5), видим, что

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq 3\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Полагая $t = x + u$ или $t = x - u$, мы видим, что во всякой точке Лебега

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x \pm u) - f(x)| du = 0,$$

т. е.

$$\int_0^h |f(x \pm u) - f(x)| du = o(h).$$

Положим

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |f(x + 2u) + f(x - 2u) - 2f(x)| du. \quad (15.6)$$

Тогда из теоремы Лебега вытекает, что

$$\Phi_x(h) = o(h) \quad (15.7)$$

почти всюду.

З а м е ч а н и е. Если x есть точка Лебега, то в этой точке $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла.

Действительно, если

$$F(x) = C_0 + \int_a^x f(t) dt,$$

то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

а потому для $h \neq 0$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| = o(1).$$

Обратное предложение не имеет места.

§ 16. Интеграл Римана—Стилтьеса

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и конечны на $[a, b]$. Раздробим отрезок $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Пусть ξ_i — любая точка на $[x_i, x_{i+1}]$. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)]. \quad (16.1)$$

Если σ стремится к пределу при $\max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ и этот предел не зависит ни от способа дробления отрезка, ни от выбора точек ξ_k , то этот предел обозначается

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

и называется *интегралом Римана—Стилтьеса* от $f(x)$ по $g(x)$.

Доказывается, что

если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $g(x)$ имеет на нем ограниченное изменение, то интеграл имеет смысл (см., например, Натансон^[М. 16], стр. 251). Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dg = (L) \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (16.2)$$

где интеграл справа есть интеграл Лебега.

(См., например, Натансон^[М. 16], стр. 290.)

Имеет место

Т е о р е м а. Пусть $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность непрерывных функций, сходящаяся равномерно на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg = \int_a^b f(x) dg. \quad (16.3)$$

Действительно, для любого ε найдется такое N , что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geq N \quad \text{и} \quad a \leq x \leq b.$$

Поэтому

$$\left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dg \right| \leq \varepsilon \operatorname{var}_{[a, b]} g \quad \text{для} \quad n \geq N,$$

и теорема доказана.

§ 17. Две теоремы Хелли

Первая теорема Хелли. Пусть $\{f(x)\}$ — некоторое семейство функций с ограниченным изменением на $[a, b]$. Если сами эти функции и их полные изменения ограничены в совокупности на $[a, b]$, т. е.

$$|f(x)| < M$$

и

$$V_a^b(f) < M$$

$$(a \leq x \leq b),$$

то из семейства $\{f(x)\}$ можно выделить последовательность $f_n(x)$, сходящуюся

в каждой точке $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$, также имеющей ограниченное изменение на $[a, b]$.

(См. Натансон [М. 16], стр. 242.)

Вторая теорема Хелли. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а последовательность $g_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) состоит из функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, причем

$$V_a^b(g_n) < M < +\infty.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$, где $g(x)$ конечна всюду на $[a, b]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x). \quad (17.1)$$

(См. Натансон [М. 16], стр. 254.)

§ 18. Теорема Фубини

Если $f(x, y)$ суммируема в прямоугольнике $R [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$, то для почти всех $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$ и для почти всех y функция $f(x, y)$ суммируема по x на $[a, b]$; имеет место формула

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (18.1)$$

(См., например, Натансон [М. 16], стр. 379 и стр. 385.)

Заметим, что оба повторных интеграла, входящих в правую часть (18.1), могут существовать и быть равны без того, чтобы существовал двойной интеграл в левой части (18.1) (см., например, Натансон [М. 16], стр. 385), но возможен и случай, когда каждый из этих интегралов существует, но они неравны, т. е. перемена порядка интегрирования незаконна (см. Натансон [М. 16], стр. 386.)

Однако для функций, сохраняющих знак, этот случай невозможен, а именно:

Если $f(x, y) \geq 0$ и $f(x, y)$ измерима на R , то конечность одного из повторных интегралов влечет суммируемость $f(x, y)$ на R , тем самым конечность второго повторного интеграла и равенство (18.1).

(См. Натансон [М. 16], стр. 387.)

Отметим один из важных частных случаев теоремы Фубини.

Если E — плоское множество меры нуль, то почти все его сечения прямыми, параллельными осям координат, являются линейными множествами меры нуль.

(См. Натансон [М. 16], стр. 371.)

V. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

§ 19. Линейные функционалы в C

Пусть всякой функции $f \in C[a, b]$ приведено в соответствие некоторое число, которое мы обозначим $U(f)$, и известно, что

- 1) $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$,
- 2) существует такая константа M , что

$$|U(f)| \leq M \|f\|_{C[a, b]}. \quad (19.1)$$

Тогда говорят, что $U(f)$ есть линейный функционал в $C[a, b]$.

Имеет место

Т е о р е м а Р и с с а. *Всякий линейный функционал в $C[a, b]$ имеет вид*

$$U(f) = \int_a^b f(t) dg, \quad (19.2)$$

где $g(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на $[a, b]$.

(См., например, Натансон [М. 16], стр. 258.)

Нормой линейного функционала называется наименьшее значение M , для которого неравенство (19.1) справедливо.

Отметим здесь предложение, которым нам в дальнейшем придется пользоваться.

Если $U(f)$ имеет вид (19.2), то

$$\sup_{\|f\|_C \leq 1} |U(f)| = \text{var } g = V_a^b g \quad (19.3)$$

(иначе говоря, если функционал имеет вид (19.2), то его норма есть $V_a^b g$).
(См., например, Люстерник и Соболев [М. 12], стр. 167.)

§ 20. Линейные функционалы в L^p ($p > 1$)

Пусть $f(x) \in L^p[a, b]$, $p > 1$. Если каждой такой функции поставить в соответствие число $U(f)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$,
- 2) существует такое M , что

$$|U(f)| \leq M \|f\|_{L^p[a, b]}, \quad (20.1)$$

то $U(f)$ называется *линейным функционалом* в $L^p[a, b]$.

Нормой функционала называется наименьшее M , для которого (20.1) справедливо.

Имеет место

Т е о р е м а. *Если q определяется из равенства*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

то всякий линейный функционал в $L^p[a, b]$ имеет вид

$$U(f) = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad (20.2)$$

где $g(x) \in L^q[a, b]$.

(См., например, Люстерник и Соболев [М. 12], стр. 170.)

Эта теорема нам не понадобится, но нам необходимо доказать, что

$$\sup_{\|f\|_p \leq 1} |U(f)| = \|g\|_{L^q[a, b]}, \quad (20.3)$$

если $U(f)$ определено формулой (20.2).

Это последнее обстоятельство доказывается очень просто. Во-первых, в силу неравенства Гельдера имеем

$$|U(f)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^q}, \quad (20.4)$$

если $\|f\|_{L^p} \leq 1$.

Теперь докажем, что существует такая f , для которой $\|f\|_{L^p[a,b]} = 1$, и неравенство (20.4) превращается в равенство.

Действительно, положим

$$f(x) = \frac{[g(x)]^{q-1} \operatorname{sign} g(x)}{\|g\|_{L^q}^{q-1}}.$$

Так как $p(q-1) = q$, то отсюда сразу найдем

$$|f(x)|^p = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q},$$

а потому, интегрируя по $[a, b]$, сразу получаем

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 1,$$

т. е.

$$\|f\|_{L^p} = 1.$$

Теперь заметим, что

$$U(f) = \int_a^b f(x) g(x) dx = \frac{\int_a^b |g|^q dx}{\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}}} = \left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{L^q},$$

и теорема доказана.

§ 21. Сходимость по норме в пространствах L^p

Напомним ряд свойств функций, принадлежащих $L^p[a, b]$ при $p \geq 1$.

1) Для того чтобы последовательность функций $f_n(x) \in L^p[a, b]$ сходилась к функции $f(x) \in L^p[a, b]$ по норме, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p[a,b]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N , что

$$\|f_n - f_m\|_{L^p[a,b]} \leq \varepsilon \quad \text{для } n \geq N, m \geq N. \quad (21.1)$$

2) Из всякой последовательности $f_n(x)$, сходящейся по норме L^p к $f(x)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.

3) Пусть $p > 1$. Если $g(x) \in L^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то из $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Доказательства всех этих предложений можно найти, например, в книге Натансона [М. 16], гл. VII, § 2 и § 6.

Класс функций $\{f(x)\}$, принадлежащих L^p , образует всюду плотное множество в L^p , $p \geq 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любой $\varphi \in L^p$ можно найти такую функцию f , что $\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$.

Доказывается, что:

- 1) класс всех измеримых ограниченных функций,
- 2) класс всех непрерывных функций,

3) класс всех многочленов,

4) класс всех ступенчатых функций всюду плотен в L^p .

Если речь идет о классе $L^p[a, b]$, то аналогично надо и функции φ рассматривать лишь на $[a, b]$.

Доказательство см., например, Натансон [м. 16], стр. 188 и 218.

То, что класс тригонометрических полиномов всюду плотен в $L^p[-\pi, \pi]$, будет доказано в § 28 главы I.

VI. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

§ 22. Элементарные свойства тригонометрических полиномов

Тригонометрическим полиномом называется выражение вида

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx,$$

причем, если $|\alpha_n| + |\beta_n| > 0$, то число n называется порядком полинома.

Напомним следующие простые свойства тригонометрических полиномов.

1. Произведение двух тригонометрических полиномов есть тригонометрический полином (см. Натансон [м. 15], стр. 32), а следовательно $[T(x)]^k$ есть также тригонометрический полином при любом целом k .

2. Тригонометрический полином порядка n не может иметь более $2n$ действительных корней на $[0, 2\pi)$, если даже каждый из них считать столько раз, сколько единиц в его кратности (см. Натансон [м. 15], стр. 85).

Теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ непрерывна на всей бесконечной оси и $f(x + 2\pi) = f(x)$ при любом x , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Эта теорема будет нами доказана в § 27 главы I. Здесь мы упоминаем ее потому, что без нее нельзя доказывать дальнейшие теоремы.

§ 23. Неравенство Бернштейна

Для тригонометрических полиномов справедлива следующая глубокая теорема, принадлежащая С. Н. Бернштейну [1]:

Теорема Бернштейна. Если $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n и

$$|T_n(x)| \leq M \quad \text{на} \quad [0 \leq x \leq 2\pi],$$

то

$$|T'_n(x)| \leq nM \quad \text{на} \quad [0 \leq x \leq 2\pi].$$

Существует очень много различных доказательств этой теоремы. Мы приведем здесь доказательство С. Б. Стечкина [1], которое нам кажется очень простым. Именно, сначала устанавливается справедливость леммы.

Лемма. Если $\max |T_n(x)| = M$ и $T_n(x_0) = M$, то

$$T_n(x_0 + t) \geq M \cos nt \quad \text{для} \quad -\frac{\pi}{n} \leq t \leq \frac{\pi}{n}.$$

Положим

$$\psi_n(t) = T_n(x_0 + t) - M \cos nt$$

и допустим, что лемма неверна. Тогда найдется такое t_0 , — $\frac{\pi}{n} < t_0 < \frac{\pi}{n}$, что

$$\psi_n(t_0) < 0. \quad (23.1)$$

Предположим, что $0 < t_0 < \frac{\pi}{n}$ (в случае, если бы $-\frac{\pi}{n} < t < 0$, рассуждения надо было бы проводить не для $[0, 2\pi]$, а для $[-2\pi, 0]$, в остальном все сохранилось бы).

Так как $\psi_n(t)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n , то он должен иметь на $[0, 2\pi]$ не более $2n$ корней [или быть тождественно равным нулю, что противоречит (23.1)].

Между тем мы покажем, что он имеет не менее $2n + 1$ корней. Действительно, мы имеем для любого k

$$\psi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = T_n\left(x_0 + \frac{k\pi}{n}\right) - (-1)^k M,$$

а так как $|T_n(x)| \leq M$, то $\psi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ имеет знак $(-1)^{k+1}$ или $= 0$. В частности, $\psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$, а потому на отрезке $\left[t_0, \frac{\pi}{n}\right]$ функция $\psi_n(t)$ имеет корень. Кроме того, на каждом из отрезков $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, $(k = 1, 2, \dots, 2n-2)$, лежащих на $(0, 2\pi)$, она также должна иметь по корню, раз у нее в концах отрезка разные знаки (или она обращается в нуль*). Итак, у $\psi_n(t)$ мы обнаружили не менее $2n - 1$ корней. Но, кроме того, она имеет двойной корень при $t = 0$, ибо

$$\psi_n(0) = T_n(x_0) - M = 0$$

и из

$$\psi'_n(t) = T'_n(x_0 + t) + nM \sin nt$$

следует

$$\psi'_n(0) = 0,$$

так как x_0 — точка максимума для $T_n(x_0)$.

Итак, тригонометрический полином $\psi_n(t)$ имеет $2n + 1$ корень, и мы уже видели, что это приводит к противоречию. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $|T_n(x)| \leq M$. Обозначим $\max |T'_n(x)| = \mu$. Пусть x_0 — такая точка, где

$$T'_n(x_0) = \mu$$

(если $-T'_n(x_0) = \mu$, то достаточно вести рассуждения для $-T_n(x)$). Тогда по предыдущей лемме

$$T'_n(x_0 + t) \geq \mu \cos nt, \quad -\frac{\pi}{n} \leq t \leq \frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} T'_n(x_0 + t) dt = T_n\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - T_n\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) \geq \mu \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos nt dt = 2 \frac{\mu}{n}.$$

*) Заметим, что если $\psi_n(t)$ имеет один корень на двух соседних отрезках, то этот корень кратный.

Итак,

$$\mu \leq \frac{n}{2} \left[T_n \left(x_0 + \frac{\pi}{2n} \right) - T_n \left(x_0 - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Но $|T_n(x)| \leq M$, откуда $\mu \leq nM$, т. е. $|T'_n(x)| \leq nM$, а это и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Неравенство Бернштейна не может быть усилено, так как, полагая

$$T_n(x) M = \cos nx,$$

мы видим, что

$$\max |T_n(x)| = M, \text{ а } \max |T'_n(x)| = nM.$$

§ 24. Тригонометрический полином наилучшего приближения

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π . Обозначим через $T_n(x)$ любой тригонометрический полином порядка не выше n . Пусть

$$\Delta(T_n) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - T_n(x)|. \quad (24.1)$$

Рассмотрим нижнюю грань значений $\Delta(T_n)$, когда T_n пробегает совокупность всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$. Обозначим

$$E_n(f) = \inf \Delta(T_n) \quad (24.2)$$

и назовем эту величину *наилучшим приближением* $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n .

Т е о р е м а Б о р е л я. Для любой непрерывной периодической функции с периодом 2π и для любого n существует тригонометрический полином порядка не выше n , для которого

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - T_n(x)| = E_n(f) \quad (24.3)$$

(т. е. нижняя граница достигается).

Такой полином называется *полиномом наилучшего приближения*.

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге Натансона [М. 15.], стр. 94.

Легко доказывается, что

$$E_1 \geq E_2 \geq \dots \geq E_n \geq \dots \quad (24.4)$$

Кроме того, из теоремы Вейерштрасса (см. § 22) сразу следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0.$$

Если мы положим

$$\Delta^{(p)}(T_n) = \|f(x) - T_n(x)\|_{L^p[0, 2\pi]} \quad (24.5)$$

и обозначим

$$E_n^{(p)}(f) = \inf \Delta^{(p)}(T_n), \quad (24.6)$$

где снова нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам порядка не выше n , то $E_n^{(p)}(f)$ называется *наилучшим приближением* $f(x)$ в пространстве L^p .

Мы будем в дальнейшем для произвольного $p > 1$ пользоваться лишь этим определением, но не существованием полинома, для которого $\Delta^p(T_n) = E_n^{(p)}(f)$. В случае $p = 2$ такое существование доказывается очень легко; с этим мы познакомимся в § 13 главы I.

Наконец, заметим, что целесообразно рассматривать и наилучшие приближения не на $[0, 2\pi]$, а на каком-либо отрезке $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. В этом случае

$$E_n(f, a, b) = \inf_{T_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - T_n(x)| \quad (24.7)$$

и аналогично определяется

$$E_n^{(p)}(f, a, b) = \inf_{T_n} \|f(x) - T_n(x)\|_{L^p[a, b]}. \quad (24.8)$$

§ 25. Модуль непрерывности, модуль гладкости, интегральный модуль непрерывности

Модуль непрерывности. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть $\delta > 0$ любое. Рассмотрим для любых двух точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$, лишь бы $|x_1 - x_2| \leq \delta$, разность $|f(x_1) - f(x_2)|$, и пусть

$$\omega(\delta, a, b, f) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ x_1 \in [a, b] \\ x_2 \in [a, b]}} |f(x_1) - f(x_2)|. \quad (25.1)$$

Если в ходе рассуждений речь идет все время об одном и том же отрезке, то пишут кратко $\omega(\delta, f)$. Это число называют *модулем непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$* .

Если не налагать на $f(x)$ никаких ограничений, то $\omega(\delta)$ может оказаться и бесконечным. Но если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то очевидно, что $\omega(\delta, f)$ конечно при любом δ и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta, f) = 0. \quad (25.2)$$

Очевидно из определения, что

$$\omega(\delta, f_1 + f_2) \leq \omega(\delta, f_1) + \omega(\delta, f_2), \quad (25.3)$$

если функции рассматриваются на одном и том же отрезке.

Отметим ряд почти очевидных свойств модуля непрерывности (для краткости знак f опускается и пишем просто $\omega(\delta)$):

- 1) $\omega(\delta)$ монотонно возрастает,
- 2) если n целое, то

$$\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), \quad (25.4)$$

а если λ любое положительное, то

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta), \quad (25.5)$$

- 3) если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ (см. *Обозначения*), то

$$\omega(\delta) = O(\delta^\alpha) \quad (25.6)$$

и наоборот.

(См. Натансон [М. 15.], стр. 107—109.)

Если $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, \beta]$, содержащем $[a, b]$, то можно определить модуль непрерывности и так

$$\omega(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)| \quad x \in [a, b] \quad (25.7)$$

при условии брать $\delta \leq \min [a - \alpha, \beta - b]$, т. е. так чтобы точка $x \pm h$ при $x \in [a, b]$ не выходила из отрезка $[a, \beta]$. В частности, если $f(x)$ периодическая с периодом 2π и определена на отрезке длины 2π , то мы будем писать кратко $\omega(\delta, f)$, понимая под этим

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|, \quad (25.8)$$

где x уже любое.

Модуль гладкости. Если вместо первой разности $f(x+h) - f(x)$ рассматривать вторую симметрическую разность, т. е. $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$, то получаем аналогично определение модуля гладкости

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|. \quad (25.9)$$

Ясно, что и здесь имеют место свойства:

- 1) $\omega_2(\delta)$ монотонно не убывает,
- 2) для любого положительного λ

$$\omega_2(\lambda \delta) \leq (\lambda + 1) \omega_2(\delta). \quad (25.10)$$

Полезно отметить, что если для некоторой монотонно возрастающей $g(x)$ доказано соотношение

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

то справедливо и

$$\omega(\delta, f) = O[g(\delta)] \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Действительно, если δ задано, то определяем n так, чтобы

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta < \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\omega(\delta, f) \leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \omega\left(\frac{2}{n+1}, f\right) \leq 2\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \leq Cg\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq Cg(\delta),$$

где C постоянно, а это и надо было доказать.

Аналогичное утверждение справедливо для модуля гладкости.

О связи между модулем непрерывности функции и ее наилучшим приближением тригонометрическими полиномами см. Добавления, § 7.

Интегральный модуль непрерывности. Если $f(x) \in L[a, \beta]$ и $[a, b]$ лежит внутри $[a, \beta]$, то *интегральным модулем непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$* принято называть выражение

$$\omega^{(1)}(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx,$$

где снова δ взято таким, что для $x \in [a, b]$ и $0 \leq |h| \leq \delta$ имеем $x \pm h \in [a, \beta]$.

Для периодической функции с периодом 2π будем писать кратко

$$\omega^{(1)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \quad (25.11)$$

(здесь δ может уже быть любым положительным).

Для интегрального модуля непрерывности справедлива
Т е о р е м а Л е б е г а. Для любой $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega^{(1)}(\delta, f) = 0.$$

Достаточно доказать теорему для неотрицательных функций, так как каждую суммируемую можно представить как разность неотрицательных суммируемых. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать ограниченную функцию $\varphi(x)$, для которой

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + 2\varepsilon \quad (25.12)$$

и остается доказать наше утверждение для ограниченной $\varphi(x)$.

Пусть $|\varphi(x)| \leq M$. В силу C -свойства можно найти непрерывную $\psi(x)$, совпадающую с $\varphi(x)$ на совершенном множестве $P \subset [-\pi, \pi]$, $mP > 2\pi - 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{M}$. Можно выбрать $\psi(x)$ так, чтобы $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и чтобы $|\psi(x)| \leq M$ на $[-\pi, \pi]$. Затем ее надо продолжить периодически с периодом 2π . Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)| dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - \psi(x)| dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)| dx + 4\varepsilon. \end{aligned} \quad (25.13)$$

Наконец, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)| dx \leq \omega(\delta, \psi) 2\pi$$

для $0 \leq |h| \leq \delta$, откуда в силу (25.12) и (25.13)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq 6\varepsilon + 2\pi \omega(\delta, \psi) \quad \text{при} \quad 0 \leq |h| \leq \delta. \quad (25.14)$$

В силу того, что δ произвольно, а $\psi(x)$ непрерывна, т. е. $\omega(\delta, \psi) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, мы видим из (25.11) и (25.14), что

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

а это и надо было доказать.

З а м е ч а н и е. Для дальнейшего будет необходима такая

Т е о р е м а. Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, то

$$\omega^{(1)}(\delta, f) = O(\delta). \quad (25.15)$$

Действительно, разлагая $f(x)$ на разность двух монотонных $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и замечая, что

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \leq \omega^{(1)}(\delta, f_1) + \omega^{(1)}(\delta, f_2),$$

мы видим, что достаточно установить справедливость соотношения (25.15) для неубывающей $f(x)$. Но если так, то для $h > 0$ функция $f(x+h) - f(x)$ неотрицательна на $[0, 2\pi - h]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx &= \int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)] dx + \int_{2\pi-h}^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \\ &\leq 2Mh + \int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)] dx, \end{aligned}$$

где M — верхняя грань $f(x)$; далее,

$$\int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)] dx = \int_h^{2\pi} f(x) dx - \int_0^{2\pi-h} f(x) dx = \int_{2\pi-h}^{2\pi} f(x) dx - \int_0^h f(x) dx.$$

Каждый из двух последних интегралов по модулю не превосходит Mh . Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq 4Mh$$

и

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \leq \sup_{0 \leq h \leq \delta} 4M|h| = 4M\delta = O(\delta).$$

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1. Понятие о тригонометрическом ряде; сопряженные ряды

Тригонометрическим рядом называют выражение вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1.1)$$

где a_n, b_n — постоянные числа ($n = 0, 1, 2, \dots$), носящие название *коэффициентов ряда* *).

Если такой ряд сходится для всех x на $-\infty < x < +\infty$, то он изображает функцию, имеющую период 2π . Поэтому, желая изобразить функцию тригонометрическим рядом, рассматривают либо периодические функции с периодом 2π , либо берут функцию, заданную на отрезке длины 2π , а дальше продолжают ее периодически, т. е. требуют, чтобы $f(x + 2\pi) = f(x)$ при любом x .

Тригонометрические ряды играют выдающуюся роль не только в самой математике, но и в многочисленных ее приложениях. Но прежде чем говорить об этом, отметим сразу же связь между тригонометрическими и степенными рядами. Если мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1.2)$$

где $c_n = a_n - ib_n, c_0 = \frac{a_0}{2}$ и положим $z = re^{ix}$, то ряд (1.1) есть не что иное, как действительная часть ряда (1.2) на единичной окружности; чисто мнимая часть ряда (1.2) при $z = e^{ix}$ есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx, \quad (1.3)$$

который обычно называют *рядом, сопряженным с рядом (1.1)*

Если предполагать числа c_n ограниченными, то ряд (1.2) изображает аналитическую функцию внутри единичного круга, т. е. при $z = re^{ix}$, где

*) Почему свободный член пишется в виде $\frac{a_0}{2}$, станет ясно в дальнейшем (см. § 4).

$0 \leq r < 1$ и $0 \leq x \leq 2\pi$; поэтому ее действительная и мнимая части

$$u(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

и

$$v(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx) r^n$$

являются сопряженными гармоническими функциями; отсюда и произошло название «сопряженные ряды». Изучение поведения сопряженных рядов есть не что иное, как исследование поведения сопряженных гармонических функций на окружности $|z| = 1$.

§ 2. Комплексная форма тригонометрического ряда

Часто бывает более удобно придать тригонометрическому ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

иную форму. Именно, замечая, что из известного тождества Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

следует

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

мы можем записать ряд (2.1) в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2},$$

откуда, полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (2.2)$$

видим, что ряд (2.1) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}. \quad (2.3)$$

Это так называемая *комплексная форма тригонометрического ряда*. Частная сумма ряда (2.1), т. е.

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

принимает теперь вид

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikx}, \quad (2.4)$$

т. е. сходимость ряда (2.3) надо понимать как стремление к пределу сумм вида (2.4).

В некоторых задачах приходится иметь дело с тригонометрическими рядами вида (2.3), коэффициентами которых являются любые комплексные

числа. Если же предполагать, что в ряде (2.1) числа a_n и b_n все действительные, то, как показывает формула (2.2), числа c_n и c_{-n} будут сопряженными комплексными числами, т. е. $c_{-n} = \bar{c}_n$ (знак \bar{a} всегда будет обозначать число, сопряженное с a).

§ 3. Краткие исторические сведения

Задача о возможности изобразить функцию тригонометрическим рядом, по-видимому, впервые была поставлена Эйлером в 1753 г. в связи с появившейся в это время работой Даниила Бернулли «О колеблющихся струнах».

Если струну, закрепленную в двух концах, вывести из состояния равновесия и, не давая ей никакой начальной скорости, предоставить ей свободно колебаться, то, как утверждал Бернулли, положение струны в момент времени t определяется формулой

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin p \frac{\pi x}{l} \cos p k t,$$

где l — длина струны и k — некоторый коэффициент, зависящий от плотности и натяжения струны. Что же касается коэффициентов a_p , то это произвольные постоянные, и их можно подобрать так, чтобы удовлетворить начальным условиям, т. е. требованиям, чтобы в начальный момент струна занимала некоторое заданное положение.

Эйлер заметил, что это утверждение Бернулли приводит к парадоксальным — по мнению математиков его времени — результатам. Действительно, если $y = f(x)$ есть начальное положение струны, то, полагая $t = 0$, мы должны получить

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin p \frac{\pi x}{l},$$

т. е. «произвольная» функция $f(x)$ может быть разложена в ряд по синусам. Однако Эйлер и его современники делили кривые на два класса: те, которые они называли «непрерывными», и другие — «геометрические». Кривую — в отличие от принятой теперь терминологии — называли непрерывной, если y и x были связаны некоторой формулой; напротив, геометрической кривой называли любую кривую, которую можно произвольно начертить «от руки». При этом всем казалось очевидным, что если кривая задана формулой, то она, будучи определена на некотором маленьком интервале, автоматически определена и всюду дальше *). Поэтому они не сомневались, что вторая категория кривых шире первой, так как, например, ломаную линию они не могли считать «непрерывной», а лишь составленной из кусков непрерывных линий.

Если бы «произвольную» функцию можно было разложить в ряд синусов, т. е. представить формулой — это значило бы, что всякая «геометрическая» кривая есть «непрерывная» кривая, что казалось совершенно неправдоподобным. В частности, Даламбер заметил, что наиболее естественный способ вывести струну из состояния равновесия, это — взять ее за одну из ее точек и потянуть вверх, благодаря чему она займет положение, изображенное двумя прямыми, образующими между собой угол. Даламбер считал, что кривая такого рода не может быть суммой ряда из синусов **).

*) Это свойство присуще аналитическим функциям.

**) По поводу спора между Эйлером и Даламбером о том, что надо называть «произвольной функцией», возникшего в связи с решением проблемы о колеблющейся струне, см. чрезвычайно интересную статью «Функция» Н. Н. Лузина [4] (она должна также появиться в томе III Собрания сочинений Н. Н. Лузина).

Вопрос о том, какие же функции могут быть изображены тригонометрическими рядами, значительно позже был снова поставлен в работах Фурье. В связи с изучением проблем теплопроводности ему пришлось поставить перед собой следующую задачу: пусть задана функция

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{на } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{на } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Требуется представить ее в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \quad (3.1)$$

Фурье указал формулы, при помощи которых надо определить a_n так, чтобы ряд (3.1) мог иметь $f(x)$ своей суммой. Именно, это ряд вида

$$\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} + \dots \right].$$

Фурье не доказал, что ряд обязан сходиться к функции $f(x)$, однако более поздними изысканиями этот вопрос был решен в положительном смысле. Во всяком случае важно, что Фурье впервые решил вопрос, как надо определить коэффициенты тригонометрического ряда, для того чтобы он мог иметь суммой заданную функцию. Совершенно другой вопрос — будет ли действительно такой ряд сходиться и иметь эту функцию своей суммой.

§ 4. Формулы Фурье

Допустим, что функция $f(x)$ не только является суммой тригонометрического ряда, но этот ряд сходится равномерно на $-\pi \leq x \leq \pi$; тогда определить его коэффициенты очень легко. Для этого следует только, умножив равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

на $\cos kx$ или на $\sin kx$, проинтегрировать его в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ (что законно) и заметить, что

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= 0, & m \neq n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 0, & m \neq n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0, & m \neq n \text{ и } m = n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

В результате получаем *)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (4.2)$$

*) Свободный член ряда надо было писать в виде $\frac{a_0}{2}$, чтобы a_0 получалось из a_n при $n = 0$.

Формулы (4.2) называются *формулами Фурье **), числа a_n и b_n — коэффициентами Фурье, наконец, ряд, коэффициенты которого определяются по формулам Фурье, отправляясь от функции $f(x)$, носит название *ряда Фурье* для функции $f(x)$. Мы будем его обозначать $\sigma(f)$.

§ 5. Комплексная форма ряда Фурье

Если ряд, изображающий $f(x)$, задан в комплексной форме (см. § 2 **), т. е. если мы предполагаем, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, \quad (5.1)$$

то коэффициенты c_n определяются формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (5.2)$$

которые можно получить либо отправляясь от равенств (2.2) и подставляя значения a_n и b_n из формул Фурье, либо аналогично тому, как выводились сами формулы Фурье. Именно, предполагая, что

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (5.3)$$

где сходимость равномерная, умножая обе части равенства (5.3) на e^{-inx} и интегрируя почленно, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } k = n, \end{cases} \quad (5.4)$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi c_n,$$

что и доказывает справедливость формулы (5.2).

Числа c_n называют *комплексными коэффициентами Фурье функции $f(x)$* .

§ 6. Проблемы теории рядов Фурье; ряды Фурье—Лебега

В §§ 4 и 5 мы решили только вопрос, как должны быть определены коэффициенты тригонометрического ряда, если мы знаем, что он сходится равномерно к некоторой функции $f(x)$. Оказалось, что в таком случае этот ряд имеет коэффициенты, определяемые по формулам Фурье, т. е. является рядом Фурье от $f(x)$.

*) Собственно говоря, эти формулы были известны еще Эйлеру, но Фурье стал ими пользоваться систематически, поэтому по традиции их называют формулами Фурье и соответствующий ряд — рядом Фурье.

**) При ссылках на параграф или формулу из той же главы номер главы не указывается.

Однако для того, чтобы функция могла быть суммой равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, необходимо, чтобы она была непрерывной. Поэтому могло бы показаться, что желая изобразить функцию рядом Фурье, мы вынуждены ограничиться тем случаем, когда она непрерывна. Мы увидим, что на самом деле теория рядов Фурье охватывает гораздо более широкий класс функций. Но прежде всего условимся точнее, что надо понимать под рядом Фурье.

В формулах Фурье фигурируют интегралы. Мы знаем, что понятие интеграла, начиная от Коши, развивалось и в связи с этим становился все шире класс интегрируемых функций. В этой книге под классом «интегрируемых функций» мы всегда будем понимать функции, интегрируемые по Лебегу. Такие функции, как известно, носят название суммируемых; составленные для них ряды называют рядами Фурье—Лебега. Для краткости мы все же будем просто говорить «ряды Фурье», но иметь в виду, что рассматриваемые функции всегда суммируемы.

Пусть $f(x)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$. Тогда для нее всегда можно определить по формулам Фурье числа a_n, b_n и составить ряд, который мы будем называть рядом Фурье для этой функции и писать

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (6.1)$$

или

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (6.2)$$

Знак \sim указывает на то, что мы построили этот ряд чисто формальным образом, отправляясь от $f(x)$ и пользуясь формулами Фурье, но мы ничего не знаем о сходимости этого ряда. Возникает целый ряд проблем: должен ли ряд Фурье сходиться (на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ или в заданной точке, или на некотором множестве) и если да, то сходится ли он к функции $f(x)$ или нет? В каких случаях сходимость будет абсолютной, когда она будет равномерной? Что можно сказать о расходящихся рядах Фурье (дают ли они возможность все же как-то судить о функции?). Этим и многим другим проблемам и будут посвящены следующие главы книги.

Следует еще отметить, что бывают случаи, когда тригонометрический ряд задан своими коэффициентами, но мы не знаем, является ли он рядом Фурье от некоторой функции, или нет. Это — одна из очень интересных, но трудных проблем теории тригонометрических рядов.

§ 7. Разложение в тригонометрический ряд функций с периодом $2l$

До сих пор мы рассматривали разложение в тригонометрический ряд функций с периодом 2π . Если функция $f(x)$ имеет период $2l$, где l — некоторое действительное число, то, производя замену переменного,

$$x = \frac{lt}{\pi},$$

мы получим функцию

$$\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right),$$

которая будет уже иметь период 2π .

Если мы найдем ее ряд Фурье

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt,$$

то, возвращаясь снова к переменному x , получим

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx, \quad n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

а потому функции $f(x)$ будет отвечать ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x, \quad (7.2)$$

где числа a_n и b_n определены формулами (7.1).

Все, что будет говорить в дальнейшем о сходимости обычных тригонометрических рядов, вполне применимо и к рядам вида (7.2).

Наконец рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ не периодическая. Если она определена на некотором отрезке $[a, b]$, где $-\pi < a < b < \pi$ (рис. 4),

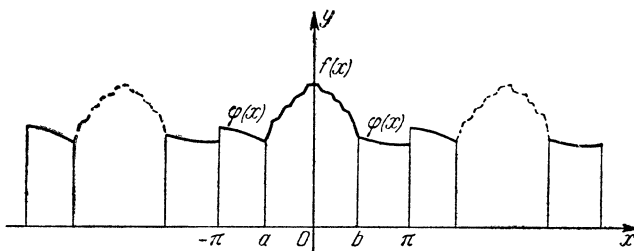


Рис. 4

и суммируема на нем, то можно разложить ее в тригонометрический ряд так: построить функцию $\varphi(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $[a, b]$ и определенную на $(-\pi, a)$ и (b, π) как угодно, лишь бы она была суммируема. Полагая затем $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$, мы разлагаем $\varphi(x)$ в ряд Фурье. Допустим, что этот ряд будет сходиться к $\varphi(x)$ в некоторой точке x , $a < x < b$; значит сумма его в этой точке будет равна $f(x)$. Ясно, что, продолжая $f(x)$ разными способами за пределы (a, b) , мы будем получать разные функции $\varphi(x)$. Однако впоследствии (см. § 33) будет доказано, что ряды Фурье от всех этих функций будут вести себя одинаково, т. е. если хоть один из них сходится к $f(x)$ в рассматриваемой точке, то и все остальные также.

§ 8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если $f(x)$ четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, а $g(x)$ — нечетная, т. е. $g(-x) = -g(x)$, то $f(x)g(x)$, очевидно, нечетная; напротив, если $f(x)$ и $g(x)$ обе четные или обе нечетные, то $f(x)g(x)$ — четная.

Это простое замечание позволяет сразу заключить, что у всякой четной функции ряд Фурье содержит одни косинусы, а у нечетной — одни синусы. Действительно, для любой нечетной функции $\varphi(x)$ и для любого $a > 0$ имеем

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 0,$$

а потому для четных $f(x)$ имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

а для нечетных $f(x)$ имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Кроме того, для любой четной $\varphi(x)$ и для любого $a > 0$ имеем

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 2 \int_0^a \varphi(x) dx.$$

Поэтому окончательно: если $f(x)$ четная, то

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

если $f(x)$ нечетная, то

$$\sigma(f) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

§ 9. Ряд Фурье по ортогональной системе

Когда мы ставили перед собой задачу, как определить коэффициенты тригонометрического ряда для того, чтобы он мог сходиться к заданной функции $f(x)$, мы рассматривали лишь частный случай гораздо более общей проблемы. Чтобы сформулировать, в чем она заключается, введем понятие ортогональной системы.

Некоторая система функций $\varphi_n(x) \in L^2(a, b)$ ($n = 1, 2, \dots$) называется *ортogonalной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx &= 0 & m \neq n; m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots \\ \int_a^b \varphi_n^2(x) dx &\neq 0 & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Соотношения (4.1) суть не что иное, как доказательство ортогональности тригонометрической системы

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Ортogonalная система называется *нормированной*, если

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Примером нормированной ортогональной системы может служить *система Радемахера* (Rademacher^[1]), которая строится так: отрезок $[0, 1]$ делится на 2^n равных отрезков и функция $r_n(x)$ полагается равной $+1$ на первом, третьем, \dots , $(2^n - 1)$ -м интервале, и равной -1 на втором, четвертом, \dots , 2^n -м интервале (т. е. она попеременно принимает значения $+1$ и -1), а в концах интервалов ее считают равной нулю. И так для всех значений n ($n = 1, 2, \dots$). Ортogonalность полученной системы $\{r_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$ следует из того, что если $m \neq n$ (пусть $m < n$), то функция $r_n(x)$ на каждом интервале постоянства $r_m(x)$ принимает столько же раз значение $+1$, сколько и -1 и длины интервалов, на которых она постоянна, все равны между собой. Таким образом мы убеждаемся, что

$$\int_0^1 r_m(x) r_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Так как при любом n имеем $r_n^2(x) = 1$ всюду, кроме конечного числа точек, то система $\{r_n(x)\}$ нормирована.

В дальнейшем при изучении свойств тригонометрических рядов система Радемахера окажется очень полезной *).

Тригонометрическая система не является нормированной, но становится нормированной, если первую функцию умножить на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, а все остальные на $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, т. е. система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

уже является нормированной ортогональной системой.

Мы не будем рассматривать вопроса о том, почему именно представляется чрезвычайно интересным и важным изучение ортогональных систем. Этому вопросу посвящены специальные книги. Здесь же мы хотим лишь указать,

*) Ознакомиться подробно со свойствами системы Радемахера читатель может по книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

что целый ряд теорем из теории тригонометрических рядов может быть получен весьма просто, исходя из гораздо более общих результатов, касающихся так называемых ортогональных рядов.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (9.2)$$

где c_n — постоянные коэффициенты, а $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная ортогональная система функций, называется *рядом по ортогональной системе* $\{\varphi_n(x)\}$ или, короче, *ортогональным рядом*.

Подобно тому, как мы спрашивали себя, как найти коэффициенты тригонометрического ряда, если мы знаем, что он сходится к некоторой функции $f(x)$, можно поставить вопрос о том, каковы коэффициенты c_n , если мы знаем, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (9.3)$$

Допустим снова, что ряд равномерно сходится. Будем предполагать систему $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональной и нормированной на (a, b) . Тогда, умножив обе части равенства (9.3) на $\varphi_m(x)$ и интегрируя в пределах от a до b , найдем*)

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x) dx = c_m,$$

т. е.

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (9.4)$$

Эти формулы также называют *формулами Фурье*, и если для некоторой функции $f(x)$ по формулам (9.4) найдены числа c_n и из них образован ряд (9.2), то его называют *рядом Фурье от функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$* .

Здесь, как и для случая тригонометрической системы, гипотеза равномерной сходимости ряда была крайне ограничительной. Мы можем рассматривать ряд Фурье для функции $f(x)$ при единственном предположении, что интегралы (9.4) имеют смысл, и писать тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Так же как и в теории тригонометрических рядов, возникает вопрос о сходимости ряда Фурье и о том, в какой мере он характеризует функцию $f(x)$.

Прежде всего ясно, что для того, чтобы ряд Фурье мог в какой бы то ни было мере определять свойства функции, необходимо, чтобы у двух разных функций не могло быть одинаковых рядов Фурье. Для выяснения вопроса, когда это имеет место, нам необходимо изучить понятие о полноте ортогональной системы. Этот вопрос будет рассматриваться в § 10. Здесь же мы хотим еще указать, что надо понимать под ортогональной системой в случае, когда функции $\varphi_n(x)$ являются комплексными.

*) Здесь функции $\varphi_n(x)$ и $f(x)$ предполагаются такими, что интегралы (9.4) имеют смысл.

Если функции $\varphi_n(x)$ являются комплексными функциями действительного переменного x , то их называют *ортogonalными*, когда

$$\int_a^b \varphi_m(x) \bar{\varphi}_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (9.5)$$

и

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9.6)$$

Система *нормирована*, если

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В случае комплексных функций формулы Фурье принимают вид

$$c_n = \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_n(x) dx \quad (9.7)$$

для нормированной системы и

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \bar{\varphi}_n(x) dx}{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx}$$

для ненормированной системы.

Важнейшим примером ортогональной системы из комплексных функций является система $\{e^{inx}\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); она ортогональна на любом отрезке длины 2π (см. § 5). Если ввести множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, т. е. рассмотреть систему

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\} \quad (n = 0, \pm 1, \dots),$$

то она будет и нормированной.

§ 10. Полнота ортогональной системы

Введем следующее важное определение *).

О п р е д е л е н и е. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, называется *полной* в $L^p[a, b]$ ($p \geq 1$) (или в $C[a, b]$), если не существует ни одной функции $f(x) \in L^p[a, b]$ (или $f(x) \in C[a, b]$), которая ортогональна ко всем функциям этой системы без того, чтобы $f(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (для случая пространства C — всюду на $[a, b]$).

Иначе говоря, для полной системы из равенств

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10.1)$$

и из $f(x) \in L^p[a, b]$ должно следовать $f(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (для пространства C аналогично, но уже слова «почти всюду» надо заменить на «всюду»).

*) Относительно всех употребляемых здесь обозначений см. «Обозначения» (стр. 15).

Для того чтобы интегралы, входящие в (10.1), имели смысл для любой $f(x) \in L[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы все $\varphi_n(x)$ были ограничены на $[a, b]$; если $f(x) \in L^p[a, b]$, то необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_n(x) \in L^q[a, b]$ ($n = 1, 2, \dots$), где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. § 9 Вводного материала и § 3 Добавлений), наконец, для $f(x) \in C$ от функций $\varphi_n(x)$ требуется одна лишь суммируемость.

Понятие полноты вводится без предположения ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$, но мы будем интересоваться тем случаем, когда она ортогональна.

Если функции $\varphi_n(x)$ комплексные, то определение сохраняет силу, только вместо равенств (10.1) следует писать

$$\int_a^b f(x) \bar{\varphi}_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если две функции $f(x) \in L^p[a, b]$ и $g(x) \in L^p[a, b]$ отличны на множестве меры больше нуля, то они не могут иметь одинаковых рядов Фурье по полной в $L^p[a, b]$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ (при $p \geq 1$). Действительно, если бы это имело место, то разность $\psi(x) = f(x) - g(x)$ была бы функцией, принадлежащей к $L^p[a, b]$ и ортогональной ко всем $\{\varphi_n(x)\}$, причем условие $\psi(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ не выполнено, а это противоречит определению полноты системы.

§ 11. Полнота тригонометрической системы в пространстве L

Мы докажем, что тригонометрическая система полна в пространстве $L(-\pi, \pi)$, т. е. убедимся, что две суммируемые функции имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье только в том случае, когда они совпадают почти всюду на $(-\pi, \pi)$.

Для этого мы предварительно докажем, что, если уже известна полнота тригонометрической системы в C , то отсюда мгновенно получается и ее полнота в L .

В самом деле, допустим, что $f(x) \in L$ и

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= 0 & (n = 0, 1, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= 0 & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Тогда, обозначая через a_n и b_n коэффициенты Фурье от $f(x)$, имеем

$$\begin{aligned} a_n &= 0 & (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= 0 & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$$

на

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

и

$$F(x + 2\pi) = F(x).$$

Ясно, что $F(\pi) = \pi a_0 = 0$ и $F(-\pi) = 0$, следовательно, $F(x)$ непрерывна не только на $[-\pi, \pi]$, но и на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Ее коэффициенты Фурье A_n и B_n находим, интегрируя по частям, именно

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

(в силу (11.1)) и аналогично

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, у $F(x)$ все коэффициенты Фурье, кроме A_0 , должны быть равны нулю. Раз $F(x)$ непрерывна, то, полагая $\Phi(x) = F(x) - \frac{A_0}{2}$, мы видим, что $\Phi(x)$ непрерывна и имеет все коэффициенты Фурье равными нулю, т. е. она ортогональна ко всем функциям тригонометрической системы. Но мы предположили уже известным, что тригонометрическая система полна в C . Значит, $\Phi(x) \equiv 0$, а потому $F(x) = \frac{A_0}{2} = \text{const}$. Но так как $F'(x) = f(x)$ почти всюду, то $f(x) = 0$ почти всюду, а это и требовалось доказать.

Докажем теперь полноту тригонометрической системы в C .

Мы условились (Вводный материал, § 22) называть тригонометрическим полиномом всякое выражение вида

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx. \quad (11.2)$$

Ясно, что если $f(x)$ ортогональна ко всем функциям тригонометрической системы, то она ортогональна и к любому тригонометрическому полиному, т. е. для любого $T_n(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \, dx = 0. \quad (11.3)$$

Мы покажем, что если $f(x)$ непрерывна, но не есть тождественный нуль, то тригонометрический полином $T_n(x)$ можно подобрать так, чтобы интеграл в левой части равенства (11.3) был положителен; тогда ясно, что избежать противоречия можно, только считая $f(x) \equiv 0$.

Итак, пусть $f(x) \not\equiv 0$; тогда найдется такая точка ξ , где $f(\xi) = c \neq 0$. Не нарушая общности, можно предполагать $c > 0$ (так как в противном случае достаточно было бы доказать, что $-f(x) \equiv 0$). Можно также предположить, что $\xi = 0$, так как если мы умеем для функции $\varphi(x)$, у которой $\varphi(0) > 0$, найти полином $T_n^*(x)$, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) T_n(x) \, dx > 0,$$

то полагая $\varphi(x) = f(\xi + x)$ и $T_n(x) = T_n^*(x - \xi)$, видим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_n(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x) T_n(\xi + x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) T_n^*(x) \, dx > 0.$$

Итак, остается доказать, что если $f(0) = c > 0$, то можно найти полином $T_n(x)$, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \, dx > 0. \quad (11.4)$$

Но если $f(0) = c > 0$, то найдется, в силу непрерывности $f(x)$, такой интервал $(-\delta, +\delta)$, где $f(x) \geq \frac{c}{2}$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{-\delta} f(x) T_n(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} f(x) T_n(x) dx.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то она ограничена, т. е.

$$|f(x)| \leq M \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (11.5)$$

где M постоянное.

Пусть $A > 0$ задано. Допустим, что удалось подобрать $T_n(x)$ так, чтобы удовлетворились условия

$$T_n(x) \geq 1 \quad \text{на } (-\delta, \delta), \quad (11.6)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x) dx > A \quad (11.7)$$

и

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{на } (-\pi, \delta) \quad \text{и} \quad (\delta, \pi). \quad (11.8)$$

Возьмем $A > \frac{4M\pi}{c}$, где M взято из условия (11.5). Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx > \frac{cA}{2} - M \cdot 2\pi > 0$$

и, значит, (11.4) имеет место, а тогда доказательство будет закончено.

Итак, осталось подобрать тригонометрический полином $T_n(x)$ такой, что удовлетворены условия (11.6), (11.7) и (11.8).

Чтобы найти такой полином, заметим, что если

$$T(x) = 1 + \cos x - \cos \delta,$$

то $T(x) \geq 1$ на $(-\delta, \delta)$ и $|T(x)| \leq 1$ вне $(-\delta, \delta)$, а стало быть, и для

$$T_n(x) = [T(x)]^n$$

имеем

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{вне } (-\delta, \delta) \quad \text{и} \quad T_n(x) \geq 1 \quad \text{на } (-\delta, \delta).$$

Кроме того, на $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ имеем

$$T(x) > 1 + \cos \frac{\delta}{2} - \cos \delta = q > 1,$$

а потому

$$\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x) dx > \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} T_n(x) dx > q^n \delta \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$ и, значит, при любом A , выбирая n достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства (11.7).

Осталось доказать, что $T_n(x)$ тригонометрический полином. Но так как $T(x) = \cos x + c$, где c — постоянное, то $[T(x)]^n$ есть тригонометрический полином при любом n (см. § 22 Вводного материала).

Итак, наша теорема полностью доказана. Из самого определения полноты системы в пространстве L^p следует, что если $p' > p$, то полнота в L^p влечет полноту в $L^{p'}$. В частности, тригонометрическая система, будучи полной в L (§ 11), будет полна и в L^p при любом $p > 1$.

§ 12. Равномерно сходящиеся ряды Фурье

Из полноты тригонометрической системы в C вытекает следующее простое, но важное следствие:

Т е о р е м а. *Если ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ равномерно сходится, то сумма этого ряда совпадает с $f(x)$.*

Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем $f(x)$ непрерывна, а ряд в правой части сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $S(x)$ его сумму. Ясно, что $S(x)$ непрерывна. Но мы видели (см. § 4), что если $S(x)$ есть сумма равномерно сходящегося тригонометрического ряда, то его коэффициенты a_n и b_n получаются из $S(x)$ при помощи формул Фурье. С другой стороны, по условию, a_n и b_n получаются из $f(x)$ по формулам Фурье. Отсюда следует, что $S(x)$ и $f(x)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Следовательно, в силу полноты тригонометрической системы в C они должны совпадать тождественно.

Впоследствии (см. § 48) мы убедимся, что в этой теореме требование равномерной сходимости можно отбросить и утверждать, что если $f(x)$ непрерывна, то во всякой точке, где ее ряд Фурье сходится, он сходится именно к $f(x)$.

В данный момент, поскольку мы уже говорим о равномерно сходящихся рядах, целесообразно сразу же доказать одну лемму, которая будет часто применяться впоследствии.

Л е м м а. *Пусть тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

имеет подпоследовательность частных сумм, сходящуюся равномерно к некоторой функции $f(x)$. Тогда этот ряд есть ее ряд Фурье (в частности, это тем более верно, когда сам ряд равномерно сходится к $f(x)$).

Действительно, пусть $S_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) сходится равномерно к $f(x)$. Тогда и подалвно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_{n_k}(x)| dx \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда для любого m имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n_k}(x)] \cos mx dx \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n_k}(x)] \sin mx dx \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

и аналогично для $\sin mx$. Но в силу ортогональности тригонометрической системы, если $n_k \geq m$, то имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx \, dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi a_m,$$

а потому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx \, dx = \pi a_m$$

и, значит,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

и аналогично для b_m . Лемма доказана.

§ 13. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя

Вернемся теперь к общему случаю, т. е. к рассмотрению ряда Фурье по любой ортогональной системе. Мы займемся ортогональными системами полными в L^2 , так как они обладают рядом важных свойств, к изучению которых мы переходим.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2[a, b]$, ортогональна и нормирована на этом отрезке. Поставим перед собой следующую задачу: дана функция $f(x) \in L^2$; берем n функций системы $\{\varphi_n(x)\}$ и рассматриваем всевозможные выражения вида $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$, которые условимся называть полиномами n -го порядка относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. Мы хотим знать, как надо выбрать константы a_1, a_2, \dots, a_n для того, чтобы полином $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ давал наилучшее приближение для $f(x)$ в метрике L^2 , т. е. чтобы норма разности

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\|_{L^2}$$

была минимальной. Мы докажем теорему.

Т е о р е м а. Среди всех полиномов n -го порядка по нормированной ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ наилучшее приближение в метрике L^2 для $f(x) \in L^2$ дается n -й частной суммой ее ряда Фурье по этой системе.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, которую мы для общности будем доказывать, предполагая $\varphi_n(x)$ комплексными, мы напомним, применяя тождество $|A|^2 = A \cdot \bar{A}$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 &= \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)|^2 dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)] [\bar{f}(x) - \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \bar{\varphi}_k(x)] dx = \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b \bar{f}(x) \varphi_k(x) dx - \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_k(x) dx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_j(x) dx; \end{aligned}$$

и так как

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_j(x) dx &= 0 \quad \text{для} \quad k \neq j, \\ \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx &= 1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2,$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Иначе говоря (добавляя и вычитая $\sum_{k=1}^n |c_k|^2$),

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (13.1)$$

Ясно, что правая часть (13.1) будет минимальной в том и только том случае, когда

$$\alpha_k = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и теорема доказана.

Подставляя в (13.1) вместо α_k числа c_k , мы как следствие получаем

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (13.2)$$

Так как левая часть равенства (13.2) неотрицательна, то и правая тоже, а потому

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

Это неравенство справедливо при любом n , а потому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2. \quad (13.3)$$

Неравенство (13.3) носит название *неравенства Бесселя*. Оно справедливо для любой нормированной ортогональной системы и для любой $f(x) \in L^2$.

§ 14. Сходимость ряда Фурье в метрике L^2

Как следствие из неравенства Бесселя легко получается важная теорема.

Т е о р е м а. Для всякой функции с интегрируемым квадратом ряд Фурье по любой нормированной ортогональной системе сходится в метрике L^2 .

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, напомним (см. § 21 Вводного материала), что для сходимости последовательности $f_n(x)$ в метрике L^2 необходимо и достаточно, чтобы при любом ε можно было найти такое N , что

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{L^2} < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geq N \text{ и } m \geq N.$$

Покажем, что этот критерий выполнен, если роль функций $f_n(x)$ играют частные суммы $s_n(x)$ ряда Фурье для $f(x) \in L^2$.

Имеем для любого целого n и $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \\ &= \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2, \end{aligned}$$

так как система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна и нормирована. Но в силу неравенства Бесселя мы знаем, что если $f(x) \in L^2$, то $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что $\sum_{n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon$ при $n \geq N$, а тогда

$$\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|_{L^2} < \varepsilon,$$

что и заканчивает доказательство сходимости ряда Фурье для $f(x) \in L^2$.

Однако следует обратить внимание, что была доказана только сходимость ряда Фурье в метрике L^2 . Ниоткуда не видно, что сумма в смысле метрики L^2 этого ряда должна быть равна функции $f(x)$. Это и действительно не всегда имеет место. Вопрос о том, когда ряд Фурье в метрике L^2 сходится именно к заданной функции, связан с вопросом о так называемой замкнутости ортогональной системы в пространстве L^2 . К изучению этого вопроса мы сейчас и переходим.

§ 15. Понятие о замкнутости системы. Связь между замкнутостью и полнотой

Условимся говорить, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в пространстве C на $[a, b]$ или в L^p ($p \geq 1$) на $[a, b]$, если любую функцию $f(x) \in C$ (или $f(x) \in L^p$) можно в этом пространстве с наперед заданной степенью точности представить в виде полинома по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Говоря точнее, система $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в C (или в L^p), если для любой $f(x) \in C$ (или $f(x) \in L^p$) и для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, чтобы

$$|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad a \leq x \leq b$$

или

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Мы здесь не будем доказывать, а только сформулируем две теоремы, указывающие на связь между замкнутостью и полнотой, а именно: если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то каждая система, замкнутая в L^p ($p > 1$) (или в C), является полной в L^q (или в L). Обратно, каждая система, полная в L^p ($p > 1$), является замкнутой в L^q *).

Мы рассмотрим подробно лишь тот наиболее важный случай, когда $p = 2$. В этом случае $q = 2$ и сформулированная нами теорема приводит к выводу:

*) Доказательство этих теорем можно найти, например, в книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

Т е о р е м а. В пространстве L^2 полнота и замкнутость системы эквивалентны, т. е. каждая полная система замкнута, и наоборот.

Это предложение может быть доказано для произвольных систем, состоящих из функций, входящих в L^2 . Но мы ограничимся рассмотрением того случая, когда заданная система ортогональна. Кроме того, так как и замкнутость системы и ее полнота не могут ни исчезнуть, ни появиться, если мы все функции системы умножим на любые константы, то можно предполагать систему нормированной.

Итак, пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированная ортогональная система на отрезке $[a, b]$. Мы видели в § 14, что для любой $f(x) \in L^2[a, b]$ ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в метрике L^2 . Обозначим через $F(x)$ его сумму, тогда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (15.1)$$

где знак равенства понимается в смысле сходимости в метрике L^2 .

Докажем, что числа c_n являются коэффициентами Фурье функции $F(x)$. В самом деле, умножая обе части равенства (15.1) на $\bar{\varphi}_n(x)$ и интегрируя (а это законно в силу теоремы Рисса, см. § 21 Вводного материала), имеем

$$\int_a^b F(x) \bar{\varphi}_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_n(x) dx. \quad (15.2)$$

Учитывая ортогональность и нормированность $\{\varphi_n(x)\}$, выводим отсюда, что

$$c_n = \int_a^b F(x) \bar{\varphi}_n(x) dx.$$

Отсюда мы заключаем, что функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют все коэффициенты Фурье одинаковыми. Если предположить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ полная, то это возможно только в том случае, когда $f(x) = F(x)$ почти всюду, а потому мы получаем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x).$$

Здесь знак равенства снова понимается в смысле сходимости в L^2 . Следовательно,

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\|_{L^2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Но $f(x)$ была любая функция из L^2 . Следовательно, согласно определению замкнутости, мы видим, что $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в L^2 .

Итак, мы доказали, что полнота системы в L^2 влечет ее замкнутость в L^2 . Обратное предложение доказывается совсем просто.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — замкнутая в L^2 система и $f(x)$ — любая функция из L^2 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать числа a_1, a_2, \dots, a_n , что

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\| < \varepsilon.$$

Но было доказано (см. § 13), что среди всех полиномов порядка n по системе $\{\varphi_n(x)\}$ наилучшее приближение к $f(x)$ в метрике L^2 дает полином $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье от $f(x)$. Поэтому

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\| \leq \|f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\| < \varepsilon.$$

Но так как мы знаем (см. (13.2)), что

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2,$$

то

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 < \varepsilon^2,$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2. \quad (15.3)$$

Мы видели раньше (§ 13), что для любой нормированной ортогональной системы справедливо неравенство Бесселя (13.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Теперь мы видим, что в случае замкнутой системы это неравенство превращается в равенство (15.3); его обычно называют *равенством Парсеваля*.

Итак, если система замкнута, то для любой $f(x) \in L^2$ имеет место равенство Парсеваля.

Но отсюда мгновенно следует и полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ в L^2 , так как если функция $f(x) \in L^2$ ортогональна ко всем функциям системы $\{\varphi_n(x)\}$, то

$$c_n = \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

т. е. все ее коэффициенты Фурье равны нулю; но тогда и $\|f\|^2 = 0$ в силу (15.3), т. е.

$$\int_a^b |f|^2 dx = 0,$$

а это возможно только, если $f(x) = 0$ почти всюду.

Итак, замкнутость системы в L^2 влечет ее полноту в L^2 , и доказательство полностью закончено.

§ 16. Теорема Фишера—Рисса

Мы видели в § 13, что для всякой функции $f(x) \in L^2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, составленный из квадратов модулей ее коэффициентов Фурье, при любой ортогональной нормированной системе сходится. Кроме того, в случае, когда рассматриваемая система полна, то (см. 15.3)

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Но имеет место следующая гораздо более глубокая теорема:

Теорема Фишера—Рисса. Пусть c_n ($n = 1, 2, \dots$) — любая последовательность чисел, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — любая нормированная ортогональная система. Тогда существует такая $f(x) \in L^2$, для которой числа c_n являются ее коэффициентами Фурье по этой системе; если система полная, то такая $f(x)$ только одна.

Для доказательства заметим, что если составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, то он должен сходиться в метрике L^2 ; действительно, раз $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь большое N , что $\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 < \varepsilon$. Но тогда

$$\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon \quad (n \geq N, p > 0)$$

(аналогичное рассуждение мы уже проводили в § 14); следовательно, последовательность $S_n(x)$ сходится в метрике L^2 . Итак, найдется такая $f(x)$, для которой $\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Повторяя рассуждения § 15, мы видим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ есть ряд Фурье для $f(x)$, причем, если система полная, то такая $f(x)$ только одна.

§ 17. Теорема Фишера—Рисса и равенство Парсеваля для тригонометрической системы

Как теорема Фишера—Рисса, так и равенство Парсеваля были нами доказаны для нормированных систем функций. Поэтому они справедливы для системы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Следовательно, если a_0, a_n, b_n — последовательность чисел, для которых

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty, \quad (17.1)$$

то можно найти такую $F(x)$, для которой

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(x) dx; \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx; \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Отсюда, полагая $f(x) = \sqrt{\pi} F(x)$, видим, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Итак, если ряд (17.1) сходится, то существует $f(x) \in L^2$, для которой ряд с коэффициентами a_n, b_n является рядом Фурье.

Равенство Парсеваля для тригонометрической системы принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \quad (17.2)$$

Отметим еще, что в силу минимального свойства частных сумм ряда Фурье (см. § 13) мы, в частности для случая тригонометрического ряда, можем утверждать, что среди всех тригонометрических полиномов порядка не выше n наилучшее приближение в метрике L^2 для любой $f(x) \in L^2$ дается n -й частной суммой ряда $\sigma(f)$.

В § 24 Вводного материала мы обозначили через $E_n^{(p)}(f)$ наилучшее приближение $f(x) \in L^p$ в метрике L^p тригонометрическими полиномами порядка не выше n ; значит,

$$E_n^{(2)}(f) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (17.3)$$

Эта формула будет в дальнейшем полезна.

§ 18. Равенство Парсеваля для произведения двух функций

В этом параграфе мы будем рассматривать функции, принимающие лишь действительные значения.

Мы хотим отметить еще одно полезное равенство, легко выводимое из равенства Парсеваля.

Если $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$, система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональная, нормированная и полная на (a, b) , причем c_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, а d_n — коэффициенты Фурье для $g(x)$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \quad (18.1)$$

Действительно, если $f \in L^2$ и $g \in L^2$, то это же верно для их суммы и, применяя равенство Парсеваля к $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$, имеем

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad \int_a^b g^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2, \quad (18.2)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2. \quad (18.3)$$

Раскрывая скобки в левой части (18.3), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2. \end{aligned}$$

Вычитая равенства (18.2) из (18.3) и деля на 2, получим нужную формулу (18.1).

Для случая тригонометрической системы формула (18.1) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n + b_n b_n,$$

где a_n, b_n — коэффициенты для $f(x)$, а a_n, b_n — коэффициенты для $g(x)$.

§ 19. Стремление к нулю коэффициентов Фурье

Мы видели, что если $f(x) \in L^2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ и отсюда сразу следует, что $|c_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это справедливо для любой ортогональной системы. Мало того, теорема Фишера—Рисса показывает, что если для каких-то c_n имеем $\sum c_n^2 < +\infty$, то эти c_n — обязательно коэффициенты Фурье от некоторой функции $f(x) \in L^2$.

Значительно сложнее обстоит дело, если $f(x) \in L$, но $f^2(x)$ несуммируема. Тогда мы можем очень мало сказать о коэффициентах Фурье от $f(x)$. Точно так же, если дана последовательность чисел c_n , для которой $\sum c_n^2 = +\infty$, то мы даже не знаем, существует ли функция, имеющая эти числа своими коэффициентами Фурье.

Укажем здесь простые факты, позволяющие все же хоть в некоторой мере судить о коэффициентах Фурье.

Теорема Мерсера. Если у ортогональной нормированной системы *) $\{\varphi_n(x)\}$ функции ограничены в своей совокупности, т. е.

$$|\varphi_n(x)| \leq M \quad a \leq x \leq b \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то коэффициенты Фурье любой суммируемой функции по этой системе стремятся к нулю.

Пусть $f(x)$ суммируема и $\varepsilon > 0$ наперед задано; найдем сначала такую функцию $F(x)$, для которой $\int_a^b |f(x) - F(x)| dx < \varepsilon$, причем $F(x)$ ограничена. Это всегда возможно в силу самого определения интеграла Лебега.

Так как всякая ограниченная функция заведомо принадлежит L^2 , то ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю, значит, для достаточно большого N будем иметь

$$\left| \int_a^b F(x) \varphi_n(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N.$$

Кроме того,

$$\left| \int_a^b [f(x) - F(x)] \varphi_n(x) dx \right| \leq M\varepsilon.$$

а тогда

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right| < \varepsilon(1 + M) \quad \text{для} \quad n > N,$$

а следовательно,

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

и теорема доказана.

*) Здесь будет идти речь о функциях, принимающих лишь действительные значения.

Так как тригонометрическая система состоит из функций, которые ограничены в своей совокупности, то отсюда, в частности, вытекает

Т е о р е м а. *Для любой суммируемой функции ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе стремятся к нулю.*

Этот факт имеет очень большое значение, так как в дальнейшем (см. § 62) мы увидим, что те тригонометрические ряды, коэффициенты которых не стремятся к нулю, могут сходиться только на множестве меры нуль. Однако одного только стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда все же недостаточно для того, чтобы он сходилсся (см. § 63); мало того, мы увидим дальше (глава V, § 20), что и ряды Фурье могут расходиться в каждой точке. Таким образом, проблема сходимости тригонометрических рядов подлежит серьезному исследованию.

§ 20. Лемма Фейера

Теорема § 19 о стремлении к нулю коэффициентов Фурье является частным случаем следующего общего результата, принадлежащего Фейеру (Féjér^[11]).

Л е м м а Ф е й е р а *). *Если $f(x) \in L$ имеет период 2π , а $g(x)$ имеет период 2π и ограничена, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx. \quad (20.1)$$

Здесь $n \rightarrow \infty$, принимая любые, а не только целые значения (полагая $g(x) = \cos x$ или $g(x) = \sin x$, мы сразу видим, что утверждение, касающееся коэффициентов Фурье, справедливо).

Для доказательства леммы Фейера заметим сначала, что если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую $\varphi(x)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon \quad (20.2)$$

и если для $\varphi(x)$ равенство (20.1) уже доказано, то оно верно и для $f(x)$.

В самом деле, имеем для любого n

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) g(nx) dx \right| < M \varepsilon, \quad (20.3)$$

где M — верхняя грань $g(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Далее, раз (20.1) справедливо для $\varphi(x)$, то найдется такое N , что

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) g(nx) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right| < \varepsilon \text{ для } n > N. \quad (20.4)$$

Наконец, из (20.2) заключаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right| < \\ < \frac{\varepsilon}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right| < \varepsilon M. \end{aligned} \quad (20.5)$$

*) Эту лемму можно в первом чтении пропустить. Она понадобится лишь в главе XIII).

Следовательно, из (20.3), (20.4) и (20.5)

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right| < (2M + 1) \varepsilon \quad (20.6)$$

при любом $n > N$. А так как ε как угодно мало, то из (20.6) следует (20.1).

Так как класс ступенчатых функций всюду плотен в классе функций $f \in L$ (см. Вводный материал, § 21), то мы видим, на основании только что доказанного, что равенство (20.1) достаточно доказать для ступенчатых функций. Но для них его доказать уже легко, так как отрезок $[-\pi, \pi]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых $f(x)$ постоянна, а тогда, если δ_j такой отрезок, $f(x) = c_j$ на нем, и k — число отрезков δ_j , то равенство (20.1) принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k c_j \int_{\delta_j} g(nx) dx = \sum_{j=1}^k c_j \delta_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \quad (20.7)$$

и оно будет доказано, если мы убедимся, что для любого интервала δ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta} g(nx) dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx. \quad (20.8)$$

Пусть $\delta = (a, b)$. Имеем $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b g(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx, \quad (20.9)$$

принимая во внимание, что $|g(x)| < M$ и $g(x)$ периодическая с периодом 2π .

С этой целью заметим сначала, что

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(nx) dx = \frac{1}{n(b-a)} \int_{na}^{nb} g(t) dt. \quad (20.10)$$

Пусть m_1 и m_2 такие целые числа (каждое из них может быть положительно, отрицательно или равно нулю), что

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot 2\pi &\leq na < (m_1 + 1) 2\pi, \\ m_2 \cdot 2\pi &\leq nb < (m_2 + 1) 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

Так как

$$\int_{na}^{nb} g(t) dt = \int_{m_1 \cdot 2\pi}^{m_2 \cdot 2\pi} g(t) dt + \int_{m_2 \cdot 2\pi}^{nb} g(t) dt - \int_{na}^{m_1 \cdot 2\pi} g(t) dt \quad (20.12)$$

и длина интервалов интегрирования в двух последних интегралах формулы (20.12) не превосходит 2π , то

$$\left| \int_{na}^{nb} g(t) dt - \int_{m_1 \cdot 2\pi}^{m_2 \cdot 2\pi} g(t) dt \right| < 4M\pi, \quad (20.13)$$

Далее

$$\int_{m_1 \cdot 2\pi}^{m_2 \cdot 2\pi} g(t) dt = (m_2 - m_1) \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \quad (20.14)$$

в силу периодичности $g(t)$. Значит, из (20.13) и (20.14)

$$\left| \int_{na}^{nb} g(t) dt - (m_2 - m_1) \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \right| < 4M\pi. \quad (20.15)$$

Но из (20.11)

$$(m_2 - m_1 - 1)2\pi < n(b - a) < (m_2 - m_1 + 1)2\pi,$$

а потому

$$n(b - a) = (m_2 - m_1 + \theta)2\pi, \quad \text{где } |\theta| < 1.$$

Иначе говоря,

$$m_2 - m_1 = \frac{n(b - a)}{2\pi} - \theta, \quad (20.16)$$

а потому из (20.15) и (20.16)

$$\left| \frac{1}{n(b - a)} \int_{na}^{nb} g(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \frac{\theta}{n(b - a)} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \right| < \frac{4M\pi}{n(b - a)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(b - a)} \int_{na}^{nb} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$$

и, принимая во внимание (20.10), видим, что (20.9) доказано и таким образом доказательство леммы закончено.

§ 21. Оценка коэффициентов Фурье через интегральный модуль непрерывности функции

Мы видели в § 19, что для любой суммируемой функции $f(x)$ коэффициенты Фурье a_n, b_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Однако иногда знания одного этого факта недостаточно и приходится оценивать скорость, с которой они стремятся к нулю.

Напомним, что в § 25 Вводного материала мы определили понятие интегрального модуля непрерывности $\omega_1(\delta, f)$ для $f(x)$ и доказали, что для любой $f \in L$ имеем $\omega_1(\delta, f) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть c_n — комплексные коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21.1)$$

Заменяя x через $x + \frac{\pi}{n}$ можем написать

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx. \quad (21.2)$$

Складывая (21.1) и (21.2) и деля на два, получаем

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx} dx,$$

откуда

$$|c_n| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx \leq \frac{1}{4\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Итак, для комплексных коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеем

$$|c_n| \leq \frac{1}{4\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21.3)$$

В случае действительных коэффициентов Фурье имеем, рассуждая совершенно аналогично,

$$\left. \begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \\ |b_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (21.4)$$

Формулы (21.4) дают новое доказательство того, что коэффициенты Фурье от любой $f(x) \in L$ стремятся к нулю, но они, кроме того, позволяют судить о скорости этого стремления в зависимости от свойств функции, так как, грубо говоря, чем функция «лучше», тем быстрее стремится к нулю ее интегральный модуль непрерывности.

Если $f(x)$ периодическая и непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то из определения модуля непрерывности (см. § 25 Вводного материала) сразу заключаем

$$\omega_1(\delta, f) \leq \omega(\delta, f) \cdot 2\pi,$$

а потому для непрерывной $f(x)$ имеем

$$\left. \begin{aligned} |a_n| &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \\ |b_n| &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (21.5)$$

§ 22. Коэффициенты Фурье для функций с ограниченным изменением

Пусть $f(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$. Если V — ее полное изменение на $[0, 2\pi]$, то мы имеем

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq V. \quad (22.1)$$

Но рассуждая, как в § 21, мы имеем

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx, \\ |b_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx, \end{aligned}$$

а так как в силу периодичности $f(x)$ имеем для любого k

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| dx = \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx,$$

то можно также написать

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| dx.$$

Складывая все такие неравенства для $k = 1, 2, \dots, 2n$ и деля затем на $2n$, найдем, принимая во внимание (22.1),

$$|a_n| \leq \frac{1}{4\pi n} \cdot \int_0^{2\pi} V dx = \frac{V}{2n} \quad (22.2)$$

и аналогично

$$|b_n| \leq \frac{V}{2n}. \quad (22.3)$$

Отсюда выводим: для любой функции с ограниченным изменением

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (22.4)$$

(обозначение $O\left(\frac{1}{n}\right)$ см. в § 11 Вводного материала).

Если потребовать от $f(x)$, чтобы, кроме ограниченности изменения, она была еще непрерывна, то возникает вопрос, нельзя ли улучшить эту оценку? Оказывается это не так, в чем мы убедимся в § 2 главы II.

§ 23. Формальные операции над рядами Фурье

Мы видели (см. § 11), что тригонометрическая система полна в L , т. е. две суммируемые функции могут иметь одинаковые ряды Фурье, только если они равны почти всюду. Таким образом ряд Фурье, даже если он не является сходящимся, все же тесно связан только с одной функцией. Мы сейчас убедимся, что с рядами Фурье, хотя бы и расходящимися, во многих случаях можно совершать такие же операции, как если бы они сходились к тем функциям, от которых они являются рядами Фурье.

1) Сложение и вычитание рядов Фурье. Если нам нужно составить ряд Фурье от суммы или разности двух функций, то достаточно сложить (или вычесть) ряды Фурье от этих функций. Действительно, если

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

и

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx},$$

то

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (c_n \pm \gamma_n) e^{inx},$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) \pm g(x)] e^{-inx} dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = c_n \pm \gamma_n. \end{aligned}$$

Так же, если бы ряд Фурье был записан в действительной форме, мы убедились бы, что если a_n и b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, а c_n и d_n — коэффициенты Фурье для $g(x)$, то для $f(x) \pm g(x)$ коэффициенты имеют вид $a_n \pm c_n$ и $b_n \pm d_n$.

2) Умножение на постоянную. Сразу видно, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx},$$

то

$$kf(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} k c_n e^{inx},$$

где k — любое постоянное число. Доказательство проводится, как в предыдущем случае.

3) Ряд Фурье для $f(x+a)$. Если a — любое постоянное, то из

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx}$$

следует

$$f(x+a) \sim \sum (c_n e^{ina}) e^{inx} \sim \sum c_n e^{in(x+a)}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in(t-a)} dt = e^{ina} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Следовательно, ряд Фурье для $f(x+a)$ выглядит так, как если бы мы просто в ряде Фурье для $f(x)$ подставили вместо x величину $x+a$.

Читатель легко убедится, что такой же результат имеет место, если ряд Фурье задан в действительной форме.

4) Ряд Фурье для $f(x)e^{imx}$, где m — целое. Имеем

$$f(x)e^{imx} \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{n-m} e^{inx},$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{imx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(n-m)x} dx.$$

Отсюда снова следует, что коэффициенты Фурье определяются так, как если бы мы имели право оперировать с рядом, как со сходящимся: в этом случае имели бы

$$f(x)e^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} e^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i(n+m)x} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{k-m} e^{ikx}.$$

5) Ряд Фурье для $\bar{f}(x)$. Если

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx},$$

то

$$\bar{f}(x) = \sum \bar{c}_n e^{inx},$$

что проверяется непосредственно по формулам Фурье.

6) Ряд Фурье для «свертки». Допустим, что $f(x)$ и $g(x)$ — две периодические функции,

$$f(x) \in L[-\pi, \pi] \text{ и } g(x) \in L[-\pi, \pi].$$

Рассмотрим произведение $f(x+t)g(t)$. Если не налагать на $f(x)$ и $g(x)$ никаких дополнительных ограничений, то оно может оказаться несуммируемой функцией переменного t . Но мы докажем, следуя Юнгу (Young^[31]), что это произведение для почти всех x есть суммируемая функция от t на $[-\pi, \pi]$ и, полагая

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)dt, \quad (23.1)$$

имеем $Q(x) \in L[0, 2\pi]$. Эта функция $Q(x)$ называется *сверткой* для $f(x)$ и $g(x)$.

Достаточно, разумеется, рассмотреть случай $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$.

Положим

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t)dt.$$

Тогда функция

$$\int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) - F(t-\pi)]g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \left[\int_{-\pi}^x f(t+u)g(t)du \right]$$

существует и конечна для всякого x . Полагаем

$$f(t, u, M) = \begin{cases} f(t+u)g(t), & \text{если } f(t+u)g(t) \leq M, \\ M, & \text{если } f(t+u)g(t) > M. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^x f(t+u)g(t)du &= \int_{-\pi}^{\pi} dt \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^x f(t, u, M)du = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^x f(t, u, M)du = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^x du \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)dt = \\ &= \int_{-\pi}^x du \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)dt. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Предел $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)dt$ может оказаться равным $+\infty$, но в силу равенства (23.2) это может иметь место лишь для точек некоторого множества меры нуль. В тех же точках, где он конечен, он равен $\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)g(t)dt$.

Итак, мы убедились, что свертка $Q(x)$ почти всюду определена и суммируема. Теперь выразим коэффициенты ее ряда Фурье через коэффициенты рядов для $f(x)$ и $g(x)$.

Если

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum c_n e^{inx}, \\ g(x) &\sim \sum d_n e^{inx}, \end{aligned}$$

то коэффициенты Фурье μ_n для $Q(x)$ имеют вид

$$\mu_n = c_n d_{-n}. \quad (23.3)$$

Действительно,

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)dt \right\} e^{-inx} dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) e^{-inx} dx \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-in(z-t)} dz \right\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int} c_n dt = c_n d_{-n}.\end{aligned}$$

(Перемена порядка интегрирования здесь законна, так как по теореме Фубини (см. § 18 Вводного материала) такую перемену всегда можно производить над неотрицательными суммируемыми функциями, но $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$, а $\cos nx$ и $\sin nx$ меняют знак лишь конечное число раз на $[-\pi, \pi]$, поэтому рассматриваемые интегралы распадаются на такие, для которых перестановка порядка законна.)

Итак,

$$Q(x) \sim \sum c_n d_{-n} e^{inx}. \quad (23.4)$$

Полезно отметить здесь же, что если $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$, то $\sum |c_n|^2 < +\infty$ и $\sum |d_n|^2 < +\infty$, а потому и $\sum |c_n d_{-n}| < +\infty$. Теперь покажем, что в сделанных предположениях $Q(x)$ непрерывна. Для этого сначала разобьем $g(t)$ на два слагаемых, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, так, чтобы $g_1(t)$ была ограничена, а $\int_{-\pi}^{\pi} g_2^2(t) dt < \varepsilon^2$, где $\varepsilon > 0$, задано. Имеем

$$\begin{aligned}Q(x+h) - Q(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+h) - f(x+t)] g_1(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+h) - f(x+t)] g_2(t) dt = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Если $|g_1(t)| \leq M$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), то

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| dt = \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)| dt \leq \frac{M}{2\pi} \omega_1(\delta, f)\end{aligned}$$

для $0 \leq |h| \leq \delta$, где $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(x)$ и, значит, I_1 может быть сделан как угодно малым, если δ достаточно мало.

Для I_2 находим

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+h) - f(x+t)]^2 dt} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} g_2^2(t) dt} \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt}.$$

Итак, $|Q(x+h) - Q(x)|$ может быть сделано как угодно малым, если h достаточно мало.

Теперь заметим, что раз $Q(x)$ непрерывна и ряд (23.4) сходится абсолютно и равномерно, то этот ряд, в силу теоремы § 12, сходится к $Q(x)$ в каждой точке. В частности, отсюда получаем, полагая $x = 0$,

$$Q(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n d_{-n}. \quad (23.5)$$

7) Ряд Фурье для произведения. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{inx}.$$

Допустим, что $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$. Тогда $f(x)g(x) \in L$.
Полагая

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx},$$

покажем, что

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k}. \quad (23.5')$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-inx} dx,$$

а потому, полагая

$$h(x) = g(x)e^{-inx}, \quad (23.6)$$

имеем

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h(x) dx.$$

Если обозначить через μ_n коэффициенты Фурье от $h(x)$, то по формуле (23.4)

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \mu_{-k}. \quad (23.7)$$

Но так как на основании пункта 4) этого параграфа из (23.6) следует

$$\mu_k = d_{k+n},$$

то

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k},$$

а это и есть формула (23.5'), которую мы хотели доказать.

З а м е ч а н и е. Напомним, что для числовых рядов доказывалась справедливость следующей теоремы: если $u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$ абсолютно сходится, и сумма его равна u , а $v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots$ абсолютно сходится, и сумма его равна v , то ряд

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + v_0 u_1) + \dots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0) + \dots$$

абсолютно сходится и сумма его есть uv .

Нетрудно проверить, что если бы мы составили ряд для произведения $f(x)g(x)$, пользуясь этой формулой умножения рядов, то коэффициенты этого ряда как раз и выражались бы формулой (23.7), т. е. мы видим, что с рядами Фурье здесь можно обращаться так, как если бы они абсолютно сходились.

С л е д с т в и е. Если мы имеем $\sum |c_n| < +\infty$ и $\sum |d_n| < +\infty$, то и $\sum |\gamma_n| < +\infty$, так как известно, что произведение двух абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно; кроме того, $\sum |\gamma_n| \leq \sum |c_n| \sum |d_n|$, так как в абсолютно сходящемся ряде можно члены переставлять как угодно, и от этого его сумма не изменится.

Позже (см. § 61) мы увидим, что абсолютная сходимость тригонометрического ряда на $[-\pi, \pi]$ имеет место тогда и только тогда, когда сходится ряд из абсолютных величин его коэффициентов. Поэтому имеет место

Т е о р е м а. Если $f(x)$ и $g(x)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды, то этим свойством обладает и их произведение.

8) **И н т е г р и р о в а н и е** р я д о в Ф у р ь е. Пусть $f(x)$ — периодическая суммируемая функция, а $F(x)$ — ее неопределенный интеграл Лебега

$$F(x) = C + \int_0^x f(t) dt.$$

Мы ставим себе целью найти разложение $F(x)$ в ряд Фурье, если ряд для $f(x)$ уже найден:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}.$$

Прежде всего заметим, что

$$F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi c_0,$$

а потому если $c_0 \neq 0$, то $F(x)$ не будет периодической. Поэтому рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = F(x) - c_0 x. \quad (23.8)$$

Так как

$$\begin{aligned} \Phi(x + 2\pi) &= F(x + 2\pi) - c_0(x + 2\pi) = C + \int_0^{2\pi+x} f(t) dt - c_0 x - c_0 2\pi = \\ &= C + \int_0^x f(t) dt - c_0 x = \Phi(x), \end{aligned}$$

то $\Phi(x)$ уже периодическая. Она абсолютно непрерывна, как и $F(x)$, и

$$\Phi'(x) = F'(x) - c_0 = f(x) - c_0 \text{ почти всюду.}$$

Найдем коэффициенты Фурье для $\Phi(x)$; имеем для $n \neq 0$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\Phi(x) e^{-inx}}{-in} \right\} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx - \frac{c_0}{2\pi in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx \end{aligned} \quad (23.9)$$

(интегрирование по частям было законно в силу абсолютной непрерывности $\Phi(x)$). Так как $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$, то отсюда сразу получаем

$$C_n = \frac{c_n}{in}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23.10)$$

Мы можем теперь написать

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum' \frac{c_n}{in} e^{inx}, \quad (23.11)$$

где знак \sum' означает, что пропущен член с $n = 0$.

Из (23.8) и (23.11) заключаем

$$F(x) - c_0 x \sim C_0 + \sum' \frac{c_n}{in} e^{inx}. \quad (23.12)$$

Ясно, что если бы мы совершенно формально проинтегрировали ряд $\sigma(f)$, то получили бы для $F(x)$ тот же ряд (23.12).

Если бы ряд для $f(x)$ был написан в действительной форме

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то так же получили бы

$$F(x) - \frac{a_0}{2} x \sim C + \sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}.$$

9) Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е р я д о в Ф у р ь е. Р я д ы Ф у р ь е — С т и л ь е с а. Пусть $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и имеет период 2π . Если

$$F(x) \sim \sum c_n e^{inx},$$

то для ее производной найдем

$$F'(x) \sim \sum in c_n e^{inx}. \quad (23.13)$$

Действительно, достаточно применить формулу (23.10), полагая $f(x) = F(x)$.

Таким образом, ряд Фурье для производной от $F(x)$ получается так, как если бы мы продифференцировали ряд Фурье для $F(x)$.

Аналогично, если

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$F'(x) \sim \sum n (b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Заметим, однако, что эти формулы верны, лишь если $F(x)$ абсолютно непрерывна, в противном случае она не является неопределенным интегралом Лебега от своей производной, даже если эта производная существует и суммируема.

В случае, когда $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то, полагая,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (23.14)$$

где интеграл в формуле (23.14) есть интеграл Римана—Стилтьеса (см. Вводный материал, § 16), пишут

$$dF \sim \sum c_n e^{inx} \quad (23.15)$$

и называют этот ряд (23.15) *рядом Фурье—Стилтьеса от dF* .

Если мы положим

$$\Phi(x) = F(x) - c_0 x,$$

то $\Phi(x)$ тоже с ограниченным изменением, и притом периодическая. Пусть C_n — коэффициенты Фурье для $\Phi(x)$; тогда при $n \neq 0$, интегрируя по частям, находим

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi = \frac{c_n}{in},$$

так как $d\Phi = dF - c_0 dx$. Следовательно, если

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum' C_n e^{inx},$$

где знак \sum' указывает, что член с $n = 0$ отсутствует, то

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum' \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

и

$$F(x) - C_0 x \sim C_0 + \sum' \frac{c_n}{in} e^{inx}. \quad (23.16)$$

Из формул (23.15) и (23.16) следует, что ряд Фурье—Стилтьеса для dF с точностью до константы совпадает с результатом дифференцирования ряда Фурье от $F(x) - C_0 x$.

§ 24. Ряды Фурье от многократно дифференцируемых функций

Допустим, что $k \geq 2$, функция $f(x)$ имеет производные до порядка $k - 1$ включительно, и производная $(k - 1)$ -го порядка абсолютно непрерывна; тогда k -я производная суммируема. Обозначая через $c_n^{(k)}$ коэффициенты Фурье для $f^{(k)}(x)$, находим по формуле (23.10)

$$c_n^{(k-1)} = \frac{c_n^{(k)}}{in}; \quad c_n^{(k-2)} = \frac{c_n^{(k-1)}}{in} = \frac{c_n^{(k)}}{(in)^2},$$

и т. д., наконец,

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(in)^k}.$$

Отсюда сразу ясно, что чем больше функция имеет производных, тем быстрее ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю.

В частности, если $f^{(k)}(x)$ почти всюду определена и суммируема, то $c_n^{(k)}$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \pm \infty$, как коэффициенты Фурье от суммируемой функции, а тогда

$$c_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right). \quad (24.1)$$

Такая же оценка, естественно, имеет место, если ряд Фурье имеет действительную форму, т. е.

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right). \quad (24.2)$$

§ 25. О коэффициентах Фурье для аналитических функций

Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, аналитическая на отрезке $[-\pi, \pi]$ и периодическая с периодом 2π . Оценим ее коэффициенты Фурье. Мы покажем, что они убывают со скоростью геометрической прогрессии; точнее, найдется такое θ , $0 < \theta < 1$, и такое постоянное A , что

$$|c_n| \leq A \theta^{|n|} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (25.1)$$

или в действительной форме

$$|a_n| \leq A \theta^n \quad \text{и} \quad |b_n| \leq A \theta^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (25.2)$$

Числа θ и A зависят, вообще говоря, от рассматриваемой функции $f(x)$.

Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что в силу условий, наложенных на $f(x)$, имеем

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При вычислении коэффициентов Фурье для функции, имеющей k производных, мы видели (см. § 24), что

$$|c_n| = \frac{1}{|n|^k} |c_n^{(k)}|,$$

где $c_n^{(k)}$ — коэффициенты Фурье от $f^{(k)}(x)$. Но

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} dx.$$

Поэтому, если обозначить через M_k максимум модуля $f^{(k)}(x)$, то

$$|c_n| \leq \frac{M_k}{|n|^k}.$$

Но для чисел M_k справедливо такое неравенство:

$$M_k < B^k k! \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где B — константа *). Поэтому

$$|c_n| \leq \frac{B^k k!}{|n|^k} \leq \left(\frac{Bk}{|n|}\right)^k \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (25.3)$$

Выберем число p так, чтобы

$$\frac{B}{p} < 1, \quad (25.4)$$

и положим

$$\theta_1 = \frac{B}{p}. \quad (25.5)$$

*) В самом деле, из сделанных относительно $f(x)$ предположений вытекает, что ее можно аналитически продолжить на некоторую плоскую область, содержащую отрезок $[-\pi, \pi]$. Если мы обозначим через C произвольный спрямляемый контур, охватывающий отрезок $[-\pi, \pi]$ и лежащий в области аналитичности $f(z)$, то по формуле Коши

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz.$$

Если длина контура C есть l , $\max_C |f(z)| = M$ и минимум расстояния точек z на C от точек x на $[-\pi, \pi]$ равен δ , то

$$|f^{(k)}(x)| \leq M l \frac{1}{2\pi} k! \frac{1}{\delta^{k+1}} < B^k k!,$$

если выбрать B так, чтобы $B > \frac{1}{\delta}$ и $B > \frac{M l}{8\pi\delta^2}$:

Число k в формуле (25.3) находится в нашем распоряжении, так как функция $f(x)$ имеет производные всех порядков. Поэтому при заданных n и p мы можем найти целое k из условия

$$k \leq \frac{|n|}{p} < k + 1.$$

Если так, то $|n| \geq pk$ и, принимая во внимание (25.3) и (25.5),

$$|c_n| \leq \left(\frac{B}{p}\right)^k = \theta_1^k = \frac{\theta_1^{k+1}}{\theta_1} < \frac{\theta_1^{\frac{|n|}{p}}}{\theta_1}, \quad (25.6)$$

так как в силу (25.4) и (25.5) имеем $\theta_1 < 1$; обозначая через θ число, которое удовлетворяет условию

$$\theta_1^{\frac{1}{p}} < \theta < 1, \quad (25.7)$$

и полагая

$$A = \frac{1}{\theta_1},$$

имеем из (25.6) и (25.7)

$$|c_n| < A \theta^{|n|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

а это и требовалось доказать (см. 25.1)).

Если мы берем ряд Фурье в действительной форме, то неравенства принимают вид

$$|a_n| \leq A \theta^n \quad \text{и} \quad |b_n| \leq A \theta^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Справедливо и обратное предложение, а именно: если у функции $f(x)$ коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству (25.1), где A постоянно, а $0 < \theta < 1$, то $f(x)$ — функция аналитическая на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Действительно, ряд $\sum |c_n| < +\infty$, и мы имеем тогда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}.$$

Дифференцируя это равенство k раз, где k любое, получаем

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (i)^k n^k e^{inx}.$$

Дифференцирование почленно законно, так как получаемый ряд сходится абсолютно и равномерно ввиду того, что

$$|c_n (i)^k n^k| \leq A \theta^{|n|} |n|^k,$$

и так как k постоянно, то сходимость ряда $\sum \theta^{|n|} |n|^k$ вытекает хотя бы из применения к нему признака Коши.

Итак, $f(x)$ имеет производные всех порядков. Но, кроме того,

$$M_k = \max |f^{(k)}(x)| \leq 2A \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n n^k.$$

Отсюда можно вывести справедливость неравенства

$$M_k < B^k k!$$

при некотором B . Действительно,

$$\int_0^{\infty} \theta^x x^k dx = -\frac{k}{\ln \theta} \int_0^{\infty} \theta^x x^{k-1} dx = \frac{k(k-1)}{\ln^2 \theta} \int_0^{\infty} \theta^x x^{k-2} dx = \dots$$

$$\dots = (-1)^k \frac{k!}{\ln^k \theta},$$

откуда и вытекает нужное неравенство.

Пусть теперь x_0 — любая точка $[-\pi, \pi]$. Пусть x — любая другая точка, для которой

$$|x - x_0| < \frac{1}{B}.$$

На основании формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^n,$$

где $0 < \theta' < k$. Но

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{B^n n!}{n!} (x - x_0)^n = (B|x - x_0|)^n.$$

В силу $|x - x_0| < \frac{1}{B}$ правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, значит,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

т. е. $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 ; но x_0 — любая точка из $[-\pi, \pi]$, значит, $f(x)$ — аналитическая функция на $[-\pi, \pi]$.

§ 26. Простейшие случаи абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье

Начнем со следующего простого замечания. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (26.1)$$

Если

$$\sum |a_n| + |b_n| < +\infty, \quad (26.2)$$

то он сходится абсолютно (и равномерно) на $[-\pi, \pi]$.

Полезно отметить (мы уже указывали на это в § 23), что сходимость ряда (26.2) не только достаточна, но и необходима *) для того, чтобы ряд (26.1) сходиллся абсолютно на $[-\pi, \pi]$.

Остановимся сейчас на рассмотрении некоторых конкретных случаев, когда ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно. Если это имеет место, то этот ряд имеет суммой ту функцию $f(x)$, для которой он служит рядом Фурье (см. § 12). В частности, отсюда вытекает, что

*) В § 61 будет показано, что для сходимости (26.2) достаточно абсолютной сходимости (26.1) не на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, а лишь на множестве положительной меры.

Если $f(x)$ имеет суммируемую производную второго порядка, то ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$.

Действительно (см. § 24) в этом случае

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В дальнейшем мы увидим, что наложенные на $f(x)$ требования слишком ограничительны и можно получить равномерную сходимость в гораздо более общих предположениях, но пока целесообразно отметить эту теорему, так как даже и в такой форме она оказывается полезной.

Отметим здесь еще один простой, но важный случай, когда легко обнаружить абсолютную и равномерную сходимость ряда Фурье, а именно:

Т е о р е м а. Если $F(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $F'(x) = f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, то ряд Фурье от $F(x)$ сходится абсолютно и равномерно.

Действительно, в этом случае, если коэффициенты Фурье от $f(x)$ обозначить через a_n, b_n , то $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ (см. § 13), а по формуле (23.10), обозначая через A_n и B_n коэффициенты Фурье от $F(x)$, имеем

$$|A_n| = \left| \frac{b_n}{n} \right| \quad \text{и} \quad |B_n| = \left| \frac{a_n}{n} \right|,$$

а потому

$$|A_n| \leq \frac{1}{2} |b_n|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad |B_n| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| < +\infty,$$

и теорема доказана.

В § 3 главы IX эта теорема обобщается, именно вместо гипотезы $f'(x) \in L^2$ рассматривается случай $f'(x) \in L^p$ ($p > 1$) и показывается, что результат сохраняет силу. Там же дается ряд гораздо более сильных теорем об абсолютной сходимости рядов Фурье.

В качестве очень частного случая доказанной теоремы можно сказать, что если $F(x)$ изображается непрерывной ломаной линией, то ее ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

В самом деле, в этом случае $F'(x)$ есть функция, которая имеет всюду, кроме конечного числа точек, производную, и эта производная $f(x)$ состоит из конечного числа ступенек, а потому она ограничена, а, стало быть, тем более $f^2(x)$ суммируема.

§ 27. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если мы ее продолжим периодически с периодом 2π , она будет непрерывной на всей оси Ox . Условимся в дальнейшем называть функцию с периодом 2π непрерывной периодической функцией в том и только в том случае, когда она остается непрерывной и после ее периодического продолжения; если же $f(x)$ непрерывна только на некотором отрезке длины 2π , но в его концах имеет разные значения, а следовательно становится разрывной, если ее продолжить периодически (см. рис. 4 на стр. 60), то мы уже не будем называть ее непрерывной периодической функцией.

После этого уточнения мы можем высказать теорему:

Теорема Вейерштрасса. Для любой непрерывной периодической функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (27.1)$$

Существует очень много доказательств этой важной теоремы. Приведем здесь одно из них.

В силу непрерывности $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ можно найти такое δ , что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x' - x''| \leq \delta, \quad (27.2)$$

где x' и x'' — любые две точки на $[-\pi, \pi]$.

Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на m равных частей, выбрав m так, чтобы $\frac{2\pi}{m} < \delta$. Обозначим через $\psi(x)$ ломаную линию, совпадающую с $f(x)$ в точках $k \frac{\pi}{m}$, где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m$, и положим $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$ для любых x ($-\infty < x < +\infty$). Из (27.2) ясно, что

$$|f(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x' - x''| \leq \delta$$

и в силу периодичности обеих функций это справедливо и для любых x , $-\infty < x < +\infty$.

Так как $\psi(x)$ — ломаная линия, то по доказанному в конце § 26 ее ряд Фурье сходится равномерно к ней. Поэтому, обозначая через $S_n(x)$ сумму первых n членов ее ряда Фурье, можно выбрать n столь большим, чтобы

$$|\psi(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ясно, что $S_n(x)$ — тригонометрический полином и, обозначая его через $T(x)$, видим, что теорема доказана.

§ 28. Плотность класса тригонометрических полиномов в пространствах L^p ($p \geq 1$)

Только что доказанную теорему Вейерштрасса можно рассматривать как доказательство того, что класс тригонометрических полиномов всюду плотен в пространстве C непрерывных периодических функций.

Но отсюда же вытекает, что этот класс всюду плотен в любом пространстве L^p ($p \geq 1$).

Действительно, если $f(x) \in L^p$, то для любого ε (см. Вводный материал, § 21) можно найти такую непрерывную $\varphi(x)$, что

$$\|f - \varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon,$$

с другой стороны, можно найти тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

а потому и

$$\|\varphi - T\|_{L^p} < \varepsilon$$

(предполагается, что норма вычисляется на отрезке длины 2π). Поэтому по неравенству Минковского (см. Вводный материал, § 10).

$$\|f - T\|_{L^p} < 2\varepsilon,$$

и теорема доказана.

§ 29. Ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро

При изучении сходимости тригонометрических рядов важную роль играют функции

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx \quad (29.1)$$

и

$$\bar{D}_n(x) = \sin x + \dots + \sin nx. \quad (29.2)$$

Функция $D_n(x)$ может быть записана так:

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (29.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} D_n(x) &= \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \\ &= \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)x \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x, \end{aligned}$$

откуда после деления на $2 \sin \frac{x}{2}$ и получается формула (29.3).

Выражение (29.3) называется *ядром Дирихле*, так как Дирихле впервые стал им пользоваться при изучении сходимости рядов Фурье (см. § 31).

Аналогично $\bar{D}_n(x)$ называется *ядром, сопряженным с ядром Дирихле*; оно имеет вид

$$\bar{D}_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad (29.4)$$

в чем также легко убедиться непосредственной проверкой.

Из формул (29.3) и (29.4) сразу видно, что если $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, то

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad (29.5)$$

и

$$|\bar{D}_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}. \quad (29.6)$$

Заметим теперь, что функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает на отрезке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (в чем можно убедиться простым дифференцированием), а потому

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Значит,

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi} \quad \text{для } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (29.7)$$

Применяя (29.5) и (29.6), получаем

$$|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2x} \quad \text{для } 0 < |x| \leq \pi \quad (29.8)$$

и

$$|\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{x} \quad \text{для } 0 < |x| \leq \pi. \quad (29.9)$$

Этими формулами мы будем в дальнейшем часто пользоваться. Чаще всего будет достаточно оценки

$$D_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{и} \quad \bar{D}_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow 0; \quad (29.10)$$

иногда же будет важно, что если $\delta \leq |x| \leq \pi$, то

$$|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{и} \quad |\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{\delta}. \quad (29.11)$$

В силу периодичности $D_n(x)$ и $\bar{D}_n(x)$ можно также сказать, что (29.11) имеет место, если $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

§ 30. Ряды по синусам или по косинусам с монотонно убывающими коэффициентами

Прежде чем переходить к изучению случаев, когда проблема сходимости тригонометрического ряда требует тонких исследований, мы рассмотрим некоторые случаи, когда судить о сходимости очень легко.

Начнем с рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (30.1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (30.2)$$

т. е. рядов, состоящих либо только из косинусов, либо только из синусов. Мы прежде всего рассмотрим важный случай, когда эти ряды имеют монотонно убывающие и стремящиеся к нулю коэффициенты, что будем записывать так:

$$a_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad b_n \downarrow 0.$$

При изучении этих рядов мы воспользуемся оценками $D_n(x)$ и $\bar{D}_n(x)$, данными в § 29, и леммой Абеля (см. § 1 Вводного материала). Это позволит нам доказать теорему:

Т е о р е м а 1. Если $a_n \downarrow 0$, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$$

сходится всюду, кроме, быть может, точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$; при любом $\delta > 0$ он сходится равномерно на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

Если $b_n \downarrow 0$, то ряд

$$\sum b_n \sin nx$$

сходится всюду; при любом $\delta > 0$ он сходится равномерно на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

Действительно, полагая в лемме Абеля

$$u_n = a_n, \quad v_0 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad v_n(x) = \cos nx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

имеем

$$V_n(x) = D_n(x),$$

а так как из формулы (29.11) следует равномерная ограниченность функций $D_n(x)$ на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$, то ряд сходится равномерно на этом отрезке. Если $0 < x < 2\pi$, то можно всегда взять δ столь малым, чтобы $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$, и, значит, ряд (30.1) сходится в точке x .

При $x = 0$ ряд (30.1) сходится в том и только в том случае, когда $\sum a_n < +\infty$.

Для ряда (30.2) доказательство проходит аналогично; надо только в лемме Абеля положить $u_n = b_n$ и $v_n(x) = \sin nx$; тогда $V_n(x) = D_n(x)$ и снова применение неравенства (29.11) дает доказательство равномерной сходимости ряда (30.2) на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$, а следовательно, и его сходимости в каждой точке, кроме точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но в этих последних он также сходится, потому что все члены ряда равны нулю.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. В силу обобщения леммы Абеля (см. § 1 Вводного материала) ряды (30.1) и (30.2) равномерно сходятся на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ (а значит и сходятся на $0 < x < 2\pi$) и в том случае, когда вместо $a_n \downarrow 0$ или $b_n \downarrow 0$ мы предполагаем только, что $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ есть последовательность с ограниченным изменением и притом $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$.

Вернемся к случаю монотонного убывания. Ясно, что если

$$a_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum a_n < +\infty,$$

то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ сходится абсолютно и равномерно уже на всем отрезке $0 \leq x \leq 2\pi$ (и даже для $-\infty < x < +\infty$). С другой стороны, если условие $\sum a_n < +\infty$ не соблюдается, то не только равномерной, но и простой сходимости на всей оси быть не может, так как в точках $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ряд (30.1) расходится.

Для ряда $\sum b_n \sin nx$ вопрос о равномерной сходимости решается иначе. Именно, имеет место

Т е о р е м а 2. Если $b_n \downarrow 0$, то для равномерной сходимости ряда $\sum b_n \sin nx$ на $[0, 2\pi]$ необходимо и достаточно, чтобы $nb_n \rightarrow 0$.

У с л о в и е н е о б х о д и м о. Если ряд (30.2) равномерно сходится на $[0, 2\pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое m , что

$$\left| \sum_{m+1}^{2m} b_n \sin nx \right| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Положим $x = \frac{\pi}{4m}$; тогда при $m+1 \leq n \leq 2m$ имеем $\frac{\pi}{4} \leq nx \leq \frac{\pi}{2}$, а потому $\sin nx \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m+1}^{2m} b_n < \varepsilon,$$

а так как b_n монотонно убывают, то $\frac{1}{\sqrt{2}} mb_{2m} < \varepsilon$, т. е. $mb_{2m} < \sqrt{2}\varepsilon$ и, значит, $mb_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Необходимость доказана.

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Мы уже знаем, что ряд (30.2) сходится равномерно на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ при любом δ (при единственном условии $b_n \downarrow 0$). Значит, если мы докажем, что добавление условия $nb_n \rightarrow 0$ влечет равномерную сходимость на $(-a, a)$, где $a > 0$ любое, то все будет доказано. Кроме того, в силу нечетности $\sin x$ достаточно брать $0 \leq x \leq a$. Мы докажем равномерную сходимость ряда на $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Пусть $\varepsilon_n = \max_{k \geq n} kb_k$. Ряд (30.2), как известно, сходится при всяком x ; обозначим

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Мы докажем, что $|r_n(x)| \leq K \varepsilon_n$ на $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, где K постоянное, откуда и будет следовать равномерная сходимость ряда (30.2) на $[0, 2\pi]$.

Прежде всего $r_n(0) = 0$, если же $x \neq 0$, то всегда можно найти такое целое N , что $\frac{1}{N} < x \leq \frac{1}{N-1}$. Если $N > n$, то мы напишем

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{N-1} b_k \sin kx + \sum_{k=N}^{\infty} b_k \sin kx = r_n^{(1)}(x) + r_n^{(2)}(x).$$

Если же $N \leq n$, то пусть $r_n^{(1)}(x) = 0$, а $r_n^{(2)}(x) = r_n(x)$. Произведем оценку $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$ отдельно.

Имеем, в силу $|\sin kx| \leq k|x|$,

$$|r_n^{(1)}(x)| \leq \sum_{k=n}^{N-1} kb_k x \leq x \varepsilon_n (N - n) \leq \frac{N - n}{N - 1} \varepsilon_n \leq \varepsilon_n.$$

Для оценки $r_n^{(2)}(x)$ рассмотрим отдельно два случая:

1) Если $n < N$, то, применяя преобразование Абеля (см. Вводный материал, § 1), найдем

$$|r_n^{(2)}(x)| \leq \sum_{k=N}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) |\bar{D}_k(x)| + b_N |\bar{D}_{N-1}(x)|.$$

Но так как (см. (29.9))

$$|\bar{D}_k(x)| \leq \frac{\pi}{x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leq \pi,$$

то

$$|r_n^{(2)}(x)| \leq \frac{2\pi}{x} b_N \leq 2\pi N b_N \leq 2\pi \varepsilon_n$$

в силу $n < N$ и определения ε_n .

2) Если $N \leq n$, то $r_n^{(2)}(x) = r_n(x)$ и тогда те же вычисления показывают, что

$$|r_n(x)| = |r_n^{(2)}(x)| \leq 2\pi \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$|r_n(x)| \leq |r_n^{(1)}(x)| + |r_n^{(2)}(x)| \leq (2\pi + 1) \varepsilon_n,$$

значит нужное неравенство доказано.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы мгновенно выводится следствие:

Существуют тригонометрические ряды, сходящиеся равномерно на $[-\pi, \pi]$, без того, чтобы сходиться абсолютно на этом отрезке.

Действительно, рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}. \quad (30.3)$$

Так как $b_n = \frac{1}{n \ln n}$, то $nb_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, кроме того, $b_n \downarrow 0$. Значит, указанный ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, но он не сходится абсолютно на $[-\pi, \pi]$, так как иначе должен был бы сходиться ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$, а этот ряд расходится *).

Это небольшое замечание мы делаем потому, что чрезвычайно часто для доказательства равномерной сходимости функциональных рядов применяется критерий Вейерштрасса (сравнение членов данного ряда с членами сходящегося числового ряда), а в этом случае сразу имеет место и абсолютная, и равномерная сходимость.

В частности, для тригонометрического ряда $\sum b_n \sin nx$, где $\sum |b_n| < +\infty$, имеет место и абсолютная и равномерная сходимость на $[-\pi, \pi]$, а в рассматриваемом примере этого нет.

Можно даже построить тригонометрический ряд, сходящийся равномерно на $[-\pi, \pi]$, но не имеющий на этом отрезке ни одной точки абсолютной сходимости (см. об этом в главе IX, § 3).

По поводу рядов вида (30.2), где $b_n \downarrow 0$, полезно отметить еще одну теорему:

Т е о р е м а 3. Если $b_n \downarrow 0$ и числа nb_n ограничены, то частные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ограничены в совокупности на $-\infty < x < +\infty$.

В силу периодичности и нечетности всех членов ряда достаточно рассматривать отрезок $[0, \pi]$, а так как при $x = 0$ и $x = \pi$ все члены обращаются в нуль, то можно ограничиться случаем $0 < x < \pi$.

*) Из теоремы Лузина—Данжуа, которая будет доказана в § 61, вытекает, что ряд (30.3) может абсолютно сходиться только на множестве меры нуль (потому что

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится). Более того, легко показать, что ряд (30.3) не является абсолютно сходящимся при любом $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Действительно, если бы при таком x имели

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n \ln n} < +\infty,$$

то и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n \ln n} < +\infty.$$

поэтому

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2nx)}{n \ln n} < +\infty,$$

а так как $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n \ln n}$ сходится, если $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то отсюда вытекало бы сходимость

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, и мы пришли бы к противоречию.

Мы имеем по условию

$$|kb_k| < M \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (30.4)$$

где M постоянно. Положим

$$\nu = \left[\frac{\pi}{x} \right]. \quad (30.5)$$

Если $n \leq \nu$, то

$$|S_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=1}^n |kb_k| x \leq M x \nu \leq M\pi.$$

Если же $n > \nu$, то

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\nu} b_k \sin kx + \sum_{k=\nu+1}^n b_k \sin kx = S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x),$$

где $S_n^{(1)}(x)$ оценивается, как в предыдущем случае, т. е.

$$|S_n^{(1)}(x)| \leq M\pi, \quad (30.6)$$

а к $S_n^{(2)}(x)$ мы применим следствие из преобразования Абеля (см. Вводный материал, § 1). Заметив, что (29.9)

$$|\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leq \pi,$$

мы находим в силу (30.4) и (30.5)

$$|S_n^{(2)}(x)| \leq 2b_{\nu+1} \frac{\pi}{x} \leq 2M \frac{\pi}{x(\nu+1)} \leq 2M. \quad (30.7)$$

Из (30.6) и (30.7) следует

$$|S_n(x)| \leq M\pi + 2M = M(\pi + 2),$$

и теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. *Имеем при любых n и x*

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| < C, \quad (30.8)$$

где C — абсолютная константа.

Действительно, здесь мы имеем дело с частными суммами ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (30.9)$$

у которого $b_n = \frac{1}{n}$, т. е. $b_n \downarrow 0$ и $nb_n = 1$.

Ряд (30.9) играет важную роль во многих вопросах теории тригонометрических рядов; в § 41, в частности, мы исследуем его поведение в окрестности точки $x = 0$, так как это даст нам возможность получить некоторые сведения о поведении рядов Фурье от функций с ограниченным изменением в тех точках, где они разрывны.

В этом параграфе мы рассмотрели лишь очень немногие вопросы, касающиеся рядов по синусам и косинусам с монотонными коэффициентами. Детальному изучению этого класса рядов будет посвящена глава X. Здесь же мы хотим, чтобы не отсылать читателя к главе X, доказать еще одну важную теорему, касающуюся таких рядов.

Теорема 4. Если $a_n \downarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx \quad (30.1)$$

сходится всюду, кроме, быть может, $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, к неотрицательной суммируемой функции $f(x)$ и является рядом Фурье от этой функции.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx$$

и применим преобразование Абеля; это дает

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) D_j(x) + a_n D_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta a_j D_j(x) + a_n D_n(x), \quad (30.10)$$

где $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$. Полагая $\Delta^2 a_j = \Delta a_j - \Delta a_{j+1}$ и снова применяя преобразование Абеля, найдем

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-2} \Delta^2 a_j \sum_{p=0}^j D_p(x) + \Delta a_{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(x) + a_n D_n(x). \quad (30.11)$$

Выражение вида

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^j D_p(x) \quad (30.12)$$

принято называть *ядром Фейера порядка j* . Мы будем его изучать подробно в § 47. Здесь же сошлемся на то, что $K_j(x) \geq 0$ для всех x (см. (47.5)). Из (30.11) и (30.12) сразу следует

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \Delta^2 a_j K_j(x) + n \Delta a_{n-1} K_{n-1}(x) + a_n D_n(x). \quad (30.13)$$

Если $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, то в силу $a_n \rightarrow 0$ последний член правой части (30.13) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ в силу (30.12) и (29.3) $K_n(x)$ также остается конечным при $n \rightarrow \infty$, а $n \Delta a_{n-1} \rightarrow 0$ для выпуклых последовательностей $\{a_n\}$ (см. Вводный материал, § 3), а потому и $n \Delta a_{n-1} K_{n-1}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда для $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \Delta^2 a_j K_j(x). \quad (30.14)$$

Самое существование предела нам доказывать не надо, так как сходимость ряда (30.1) для всех x , кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, была установлена при $a_n \downarrow 0$, без гипотезы выпуклости $\{a_n\}$, в теореме 1 этого параграфа. Таким образом из (30.14) заключаем, что сумма $f(x)$ ряда (30.14) есть неотрицательная функция, поскольку все $\Delta^2 a_j \geq 0$ и $K_j(x) \geq 0$ для всех x .

Нам осталось доказать, что ряд (30.1) является рядом Фурье от $f(x)$. С этой целью мы заметим, что раз

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (30.15)$$

и в силу $a_n \downarrow 0$ ряд в правой части (30.15) сходится равномерно на (ε, π) при любом $\varepsilon > 0$, то

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{\varepsilon}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos nx dx = \frac{a_0}{2} (\pi - \varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\varepsilon}{n}. \quad (30.16)$$

Из $a_n \downarrow 0$ в силу теоремы 2 следует, что ряд $\sum a_n \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$, значит, его сумма непрерывна на этом отрезке, и потому ряд в правой части (30.16) имеет сумму, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \pi. \quad (30.17)$$

Но так как $f(x) \geq 0$, то из существования предела, стоящего в левой части (30.17), следует суммируемость $f(x)$ на $[0, \pi]$, а поскольку $f(x)$ четная, то это дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Теперь докажем, что при любом $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

С этой целью, умножая обе части (30.15) на $\cos kx$ и интегрируя по отрезку $[\varepsilon, \pi]$, находим

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{k-1} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + \\ &+ a_k \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos^2 kx dx + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \cos nx dx. \end{aligned} \quad (30.18)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ каждый из интегралов $\int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx dx$ и $\int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \cos nx dx$ ($n = 1, 2, \dots, k-1$) стремится к нулю. Далее

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{\pi}{2}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos(k+n)x + \cos(n-k)x}{2} dx = \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \left[\frac{\sin(k+n)\varepsilon}{2(k+n)} + \frac{\sin(n-k)\varepsilon}{2(n-k)} \right] \end{aligned} \quad (30.19)$$

и, рассуждая аналогично предыдущему, мы видим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ правая часть (30.19) стремится к нулю.

Таким образом, из (30.18) получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \frac{\pi}{2}$$

и, учитывая четность $f(x)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Итак, ряд (30.1) есть ряд Фурье от $f(x)$, и доказательство, таким образом, закончено.

С л е д с т в и е. Так как последовательность $\frac{1}{\ln n}$ ($n = 2, 3, \dots$) выпукла, то из доказанной теоремы, в частности, следует: *ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n} \quad (30.20)$$

есть ряд Фурье.

Между тем ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ заведомо не есть ряд Фурье (см. § 40), поэтому мы видим, что ряд, сопряженный к ряду Фурье, не обязан быть рядом Фурье.

З а м е ч а н и е. Для дальнейшего нам будет полезно отметить, что у ряда (30.20) частные суммы удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx < C, \quad (30.21)$$

где C — абсолютная константа.

Действительно, из формулы (30.13) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx &\leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \Delta^2 a_j \int_0^{2\pi} K_j(x) \, dx + n \Delta a_{n-1} \int_0^{2\pi} K_{n-1}(x) \, dx + a_n \int_0^{2\pi} |D_n(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Но так как $\int_0^{2\pi} |D_n(x)| \, dx < A \ln n$, где A — постоянно (см. § 35), а

$$\int_0^{2\pi} K_j(x) \, dx = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^j \int_0^{2\pi} D_p(x) \, dx = \pi,$$

то

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx \leqslant \pi \left[\sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \Delta^2 a_j + n \Delta a_{n-1} \right] + A a_n \ln n.$$

Эта формула справедлива при любых $a_n \downarrow 0$ и образующих выпуклую последовательность. Поэтому, учитывая, что для таких последовательностей $\sum_{j=1}^{\infty} (j+1) \Delta^2 a_j < +\infty$ (см. § 3 Вводного материала), имеем

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx < A a_n \ln n + B,$$

где A и B — постоянные. Для рассматриваемого нами случая, когда $a_n = \frac{1}{\ln n}$, следовательно, полагая $A + B = C$, видим, что (30.21) справедливо, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{\ln k} \right| dx \leq C \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (30.22)$$

§ 31. Интегральные выражения для частных сумм ряда Фурье и сопряженного ряда

Чтобы изучить вопрос о сходимости ряда Фурье на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ или в какой-либо его точке, оказывается очень удобным представить частную сумму этого ряда в той форме, которую ей придал Дирихле.

Пусть

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (31.1)$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (31.2)$$

Подставляя в (31.2) выражения a_k и b_k из формул Фурье, находим

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \end{aligned} \quad (31.3)$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле (см. § 29), а потому

$$D_n(u) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}}. \quad (31.4)$$

Полагая $t - x = u$, мы из (31.3) и (31.4) получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (31.5)$$

Если нам будет нужно одновременно рассматривать ряды Фурье от нескольких функций, например, f, g, ψ , мы будем, чтобы отличать их частные суммы, писать $S_n(x, f), S_n(x, g), S_n(x, \psi)$. Приняв это обозначение, заметим сразу, что из (31.5) непосредственно вытекает

$$\left. \begin{aligned} S_n(x, f_1 + f_2) &= S_n(x, f_1) + S_n(x, f_2), \\ S_n(x, Cf) &= CS_n(x, f), \end{aligned} \right\} \quad (31.6)$$

и если $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, где ряд равномерно сходится, то

$$S_n(x, f) = \sum_{k=1}^{\infty} S_n(x, f_k) \quad (31.7)$$

(потому что равномерно сходящиеся ряды можно интегрировать почленно). Заметим еще, что так как

$$|D_n(x)| \leq n + \frac{1}{2}$$

при любых x , то во всяком случае

$$|S_n(x, f)| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^{2\pi} |f(t)| dt, \quad (31.8)$$

и хотя эта оценка в большинстве случаев груба, но иногда и этого бывает достаточно.

Обычно для исследования проблем сходимости формулу (31.5) подвергают ряду преобразований, но прежде чем перейти к этому вопросу, отметим здесь же, что аналогично можно записать частную сумму ряда, сопряженного к (31.1), т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx.$$

Именно, полагая

$$\bar{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n -b_k \cos kx + a_k \sin kx,$$

находим, рассуждая аналогично предыдущему,

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \bar{D}_n(t-x) dt, \quad (31.9)$$

где

$$\bar{D}_n(u) = \sum_{k=1}^n \sin ku.$$

Ядро $\bar{D}_n(u)$, сопряженное к ядру Дирихле, как мы видели (см. § 29), имеет вид

$$\bar{D}_n(x) = \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \quad (31.10)$$

следовательно,

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t-x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (31.11)$$

или

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du. \quad (31.12)$$

Теперь для преобразования формул (31.5) и (31.12) к более удобному виду, докажем одну важную лемму.

Л е м м а. Если $f(x)$ суммируема, $g(x)$ ограничена и обе имеют период 2π , то интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos nt \, dt \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin nt \, dt \quad (31.13)$$

стремятся к нулю равномерно при $n \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\psi_x(t) = f(x+t) g(t).$$

Если x фиксировано, то $\psi_x(t)$ есть суммируемая функция переменного t , и поэтому ясно, что рассматриваемые интегралы лишь на постоянный множитель $\frac{1}{\pi}$ отличаются от коэффициентов Фурье этой функции. Таким образом для каждого x интегралы (31.13) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но смысл леммы — доказать равномерность этого стремления.

Рассуждая так же, как в § 21, имеем

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi_x(t) \cos nt \, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \psi_x\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t) \right| dt$$

и аналогично для $\sin nt$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \psi_x\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t) \right| dt \quad (31.14)$$

стремится к нулю равномерно относительно x при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \psi_x\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t) \right| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + t + \frac{\pi}{n}\right) g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - f(x+t) g(t) \right| dt \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + t + \frac{\pi}{n}\right) - f(x+t) \right| \left| g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| dt + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t) \right| \left| g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| dt. \end{aligned} \quad (31.15)$$

Замечая, что $g(t)$ ограничена и имеет период 2π , следовательно $|g(t)| \leq M$ для любого t , а также вспоминая, что и $f(t)$ имеет период 2π , находим для первого из интегралов правой части (31.15)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t) \right| \left| g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) \right| dt &\leq \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t) \right| dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - f(t) \right| dt \leq \\ &\leq M \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad (31.16) \end{aligned}$$

где $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности $f(x)$ (см. Вводный материал, § 25); мы уже знаем, что $\omega_1(\delta, f)$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ для любой суммируемой $f(x)$. Заметив, что в правой части неравенства (31.16) x уже больше не фигурирует, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t) \right| \left| g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) \right| dt \rightarrow 0$$

равномерно относительно x при $n \rightarrow \infty$.

Что касается второго интеграла формулы (31.15), то для его оценки мы возьмем любое $\varepsilon > 0$ и разложим $f(x)$ на сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, из которых первая ограничена, например, $|f_1(x)| \leq K$, а для второй

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| dt < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t) \right| \left| g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| dt &\leq \\ &\leq K \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)| \left| g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| dt \leq \\ &\leq K \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right) + 2M \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)| dt \leq K \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right) + 2M\varepsilon. \quad (31.17) \end{aligned}$$

Так как $\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right) \rightarrow 0$, число ε произвольно и в правую часть (31.17) x не входит, то левая часть (31.17) стремится к нулю равномерно и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 1. Наша лемма сохраняет силу, если вместо интегралов (31.13) рассмотреть интегралы

$$\int_a^b f(x+t) g(t) \cos nt dt \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x+t) g(t) \sin nt dt,$$

где a и b — любые две точки на $[-\pi, \pi]$. Действительно, достаточно положить

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{на } [a, b], \\ 0 & \text{вне } [a, b], \end{cases}$$

чтобы свести этот случай к предыдущему.

З а м е ч а н и е 2. В проведенном доказательстве мы нигде не пользовались тем, что n целое. Поэтому лемма сохраняет силу, если $n \rightarrow \infty$, пробегая все действительные значения.

З а м е ч а н и е 3. Для будущего полезно отметить, что наша лемма сохраняет силу, если вместо $g(t)$ рассмотреть функцию $g_x(t)$, для которой выполнены условия

$$\text{а) } |g_x(t)| \leq M \quad \text{для} \quad \begin{aligned} &-\pi \leq x \leq \pi, \\ &-\pi \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

и, кроме того, при $h \rightarrow 0$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} |g_x(t+h) - g_x(t)| dt \rightarrow 0$$

равномерно относительно x на $[-\pi, \pi]$.

Действительно, в этом случае доказательство леммы проходит слово в слово.

З а м е ч а н и е 4. Если $f(x)$ — непрерывная функция, то из проведенного доказательства получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos nt dt \right| &\leq A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right), \\ \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin nt dt \right| &\leq A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right), \end{aligned}$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности $f(x)$, а A и B — постоянные.

Действительно, в формуле (31.16) в случае непрерывности $f(x)$ можно $\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$ заменить через $2\pi\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$, а второй интеграл формулы (31.15) ввиду ограниченности $f(x)$ не превосходит $B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right)$, где B — постоянно.

§ 32. Упрощение выражений для $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$

Мы сейчас применим доказанную в § 31 лемму для упрощения выражений для $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$ (см. (31.5) и (31.11)).

Прежде всего заметим, что

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\sin nu \cos \frac{u}{2} + \cos nu \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} + \frac{1}{2} \cos nu. \quad (32.1)$$

Далее заметим, что функция

$$g(u) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \quad (32.2)$$

непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Действительно, могла бы вызвать сомнение лишь точка $u = 0$; но, применяя правило Лопиталя, легко находим, что

$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 0$. Потребуем еще, чтобы $g(u + 2\pi) = g(u)$; тогда $g(u)$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Из (32.1) и (32.2) получаем

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{u} + g(u) \sin nu + \frac{1}{2} \cos nu. \quad (32.3)$$

Поэтому из (31.5) получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) g(u) \sin nu du + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \cos nu du. \quad (32.4)$$

Два последних интеграла формулы (32.4) стремятся к нулю равномерно при $n \rightarrow \infty$ на основании леммы § 31 и ограниченности $g(u)$. Поэтому

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (32.5)$$

где $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю равномерно. Этим фактом мы будем часто пользоваться.

З а м е ч а н и е. Иногда важно оценить величину $o(1)$ более точно; поэтому укажем здесь же, что если $f(x)$ непрерывна, то, в силу замечания 4, сделанного в конце § 31, каждый из двух последних интегралов в (32.4) по модулю не превосходит

$$A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right), \quad (32.6)$$

где A и B постоянные. Но так как $g(u)$ есть функция с ограниченным изменением, а для таких функций интегральный модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ имеет порядок $O(\delta)$ (см. Вводный материал, § 25), то (32.6) есть величина порядка

$$O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (32.7)$$

Наконец, заметив, что для любой непрерывной функции $f(x)$ модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ не может превзойти $O(\delta)$, мы заключаем, что в (32.7) второй член либо того же порядка, как первый, либо бесконечно малое более высокого порядка. Поэтому окончательно, полагая

$$\tilde{S}_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du, \quad (32.8)$$

находим из (32.5) для непрерывной $f(x)$

$$S_n(x, f) = \tilde{S}_n(x, f) + O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\right]. \quad (32.9)$$

В случае $f(x)$ любой суммируемой иногда бывает полезна оценка

$$|S_n(x, f) - \tilde{S}_n(x, f)| \leq C \int_0^{2\pi} |f(x)| dx, \quad (32.10)$$

где C — абсолютная константа. Эта оценка получается непосредственно из (32.4) и (32.8), если учесть ограниченность функции $g(u)$.

После этого замечания, которое будет использовано позже, вернемся к упрощению формул для частных сумм. Мы хотим еще упростить выражение для $\bar{S}_n(x)$. С этой целью заметим, что (см. (31.10))

$$\begin{aligned} \bar{D}_n(u) &= \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \cos nu}{2 \sin \frac{u}{2}} + \frac{\sin nu}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} + \frac{\sin nu}{2}. \end{aligned} \quad (32.11)$$

Отсюда, если воспользоваться леммой § 31, сразу получим

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{1 - \cos nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} du + o(1).$$

Если снова воспользоваться функцией $g(u)$, то можно получить другое выражение для $\bar{S}_n(x)$. Именно, если написать

$$\bar{D}_n(u) = \frac{1 - \cos nu}{u} + g(u)(1 - \cos nu) + \frac{\sin nu}{2},$$

то, снова применяя лемму § 31, получим

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{1 - \cos nu}{u} du - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) g(u) du + o(1),$$

а так как второй интеграл есть $O(1)$, то

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{1 - \cos nu}{u} du + O(1) \quad (32.12)$$

или

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)] \frac{1 - \cos nu}{u} du + O(1). \quad (32.13)$$

Для дальнейшего будет также полезно заметить, что, если $\delta > 0$ любое, а $f(x)$ ограничена, то можно (32.13) переписать в виде

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) - f(x-u)] \frac{1 - \cos nu}{u} du + O(1), \quad (32.14)$$

так как отброшенный интеграл \int_{δ}^{π} есть $O(1)$.

§ 33. Принцип локализации Римана

В § 32 мы нашли удобное выражение для частной суммы ряда Фурье, из которого можно легко вывести одно важное следствие. Прежде всего, взяв произвольное $\delta > 0$ и обозначив через $g(u)$ функцию, определяемую так:

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{на } (-\delta, \delta), \\ \frac{1}{u} & \text{на } (-\pi, -\delta) \text{ и } (\delta, \pi), \end{cases}$$

$$g(u + 2\pi) = g(u),$$

мы можем на основании (32.5) написать

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) g(u) \sin nu du + o(1),$$

а так как $g(u)$ ограниченная и периодическая, то отсюда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (33.1)$$

где снова $o(1)$ равномерно стремится к нулю*). Эта формула позволяет уже высказать следующее весьма важное предложение, носящее название *принципа локализации Римана*.

Т е о р е м а Римана. *Сходимость или расходимость ряда Фурье в точке x зависит только от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x .*

В самом деле, значения функции $f(x)$ вне интервала $(x - \delta, x + \delta)$ совершенно не фигурируют в формуле (33.1), а потому вопрос о том, стремится ли $S_n(x)$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, зависит только от поведения $f(x)$ на этом интервале. Более того, так как в формуле (33.1), как было доказано, $o(1)$ равномерно стремится к нулю, можно и о равномерной сходимости $S_n(x)$ на каком-либо интервале судить по тому, стремится ли равномерно к пределу интеграл, стоящий в правой части (33.1).

Этот же результат удобно высказать в такой форме:

Т е о р е м а. *Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают на некотором отрезке $[a, b]$, то во всяком отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, их ряды Фурье являются равномерно равносходящимися, т. е. разность этих рядов равномерно сходится к нулю.*

Действительно, пусть

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

*) Обращаем внимание читателя на работу Hille and Klein [1], где доказывается, что

$$\left| S_n(x, f) - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{K}{\delta} \left[\int_0^{2\pi} |f(x)| dx + 1 \right] \omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Здесь $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности $f(x)$, а K — абсолютная константа.

Тогда $f(x) = 0$ на $[a, b]$. Пусть число $\delta > 0$ выбрано так, что $\delta \leq \varepsilon$ и x — любая точка отрезка $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Тогда $u + x \in [a, b]$ для $-\delta \leq u \leq \delta$, а потому $f(u + x) = 0$ и по формуле (33.1):

$$S_n(x) = o(1) \quad \text{на} \quad [a + \varepsilon, b - \varepsilon],$$

где $o(1)$ равномерно стремится к нулю на $[0, 2\pi]$. Значит, ряд Фурье от $f(x)$ равномерно сходится к нулю на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

§ 34. Теорема Штейнгауза

Из предыдущих результатов можно вывести одно полезное следствие. Оно принадлежит Штейнгаузу (см. Steinhaus^[3]) и может быть высказано в следующей форме:

Если $\lambda(x)$ — периодическая функция, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1, то ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x) \sigma(f)$ являются равномерно равносходящимися на $[-\pi, \pi]$.

В самом деле, имеем

$$S_n(\lambda f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

$$\lambda(x) S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(x) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

Следовательно, полагая

$$g_x(t) = \frac{\lambda(x+t) - \lambda(x)}{t},$$

имеем

$$S_n(\lambda f) - \lambda(x) S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g_x(t) \sin nt dt + o(1). \quad (34.1)$$

Чтобы убедиться в том, что правая часть (34.1) равномерно стремится к нулю, достаточно применить лемму § 31, вернее замечание 3 к ней, проверив только, что выполнены наложенные там на $g_x(t)$ ограничения. Но условие

$$|g_x(t)| \leq M$$

равномерно по x и t есть результат того, что $g_x(t)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, остается доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_x(t+h) - g_x(t)| dt = o(1)$$

равномерно относительно x при $h \rightarrow 0$.

Для этого, задав $\varepsilon > 0$, возьмем интервал длины $(-\varepsilon, \varepsilon)$; на нем имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_x(t+h) - g_x(t)| dt \leq 4M\varepsilon.$$

Если же $t \in (-\pi, -\varepsilon)$ или $t \in (\varepsilon, \pi)$, то для любого η можно найти такое h , что подынтегральное выражение для всех t в рассматриваемом интервале будет меньше η , а тогда соответствующий интеграл меньше $\pi\eta$. Этим заканчивается доказательство теоремы.

§ 35. Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Константы Лебега

Прежде чем идти дальше в изучении вопроса о сходимости ряда Фурье, нам необходимо отметить некоторые свойства выражения

$$D_n^*(t) = \frac{\sin nt}{t}, \quad (35.1)$$

которое мы будем называть *упрощенным ядром Дирихле*. Заметим сначала, что из формулы (33.1), принимая во внимание четность упрощенного ядра Дирихле, сразу находим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (35.2)$$

Если мы рассмотрим случай $f(x) \equiv 1$, то $S_n(x) \equiv 1$ при любом n , а потому

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (35.3)$$

Полагая $nu = t$, находим отсюда

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt + o(1),$$

а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда сразу следует

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad (35.4)$$

т. е. этот несобственный интеграл имеет смысл, и мы даже знаем его величину.

Заметим теперь же, что из существования этого интеграла вытекает: если $\delta > 0$ и $\delta' > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^{\delta'} \frac{\sin nt}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\delta}^{n\delta'} \frac{\sin t}{t} dt = 0. \quad (35.5)$$

Эта формула нам понадобится позже.

Заметим, что существование интеграла (35.4) необходимо ясно понимать геометрически, поэтому мы несколько остановимся на этом вопросе, хотя он и должен быть известен читателю из курса анализа.

Сходимость интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ можно было бы доказать и иначе.

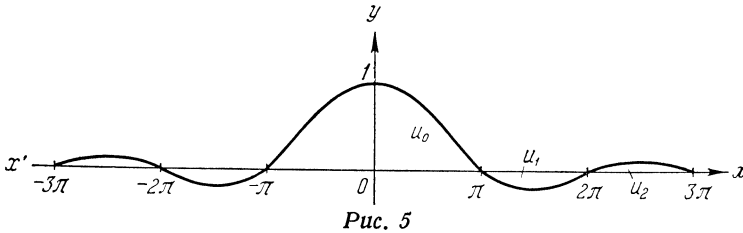
Полагая (рис. 5)

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

мы видим, что

$$u_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t + k\pi)}{t + k\pi} dt = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt,$$

откуда следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ знакочередующийся, причем члены его моно-



тонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, так как

$$|u_k| = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt < \frac{1}{k\pi} \pi = \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Но по известной теореме Лейбница такой ряд должен сходиться. С другой стороны ясно, что когда сумма $\sum u_k$ имеет смысл, то она есть интеграл (35.4). Итак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < u_0,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} < u_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du < \pi. \quad (35.6)$$

Так же, пользуясь монотонностью u_n и чередованием их знаков, видим, что если A и B — любые два числа, лишь бы $0 \leq A < B$, то

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right| < \pi. \quad (35.7)$$

В силу четности $\frac{\sin t}{t}$ это же верно, если $A < B \leq 0$.

Наконец, если A и B разных знаков, то, разбивая интеграл на два, именно от A до 0 и от 0 до B , находим

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right| < 2\pi.$$

Это простое замечание будет для нас в дальнейшем очень важно, так как из него вытекает, что для любых a и b имеем

$$\left| \int_a^b \frac{\sin nt}{t} dt \right| < 2\pi, \quad (35.8)$$

потому что

$$\left| \int_a^b \frac{\sin nt}{t} dt \right| = \left| \int_{na}^{nb} \frac{\sin t}{t} dt \right| < 2\pi \quad (35.9)$$

в силу (35.7).

Заметим теперь, что ограниченность интеграла (35.8) обязана исключительно интерференции положительных и отрицательных волн синусоиды. Если подынтегральное выражение взять по модулю, то результат будет совершенно другой. Докажем, что

$$\int_0^\pi \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt$$

неограниченно возрастает с ростом n и даже оценим точно порядок его роста. Это нам будет очень важно для дальнейшего.

Пусть

$$I_n = \int_0^\pi \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt = \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du. \quad (35.10)$$

Ясно, что тогда

$$I_{n+1} - I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v + n\pi} dv$$

и так как при $0 \leq v \leq \pi$ имеем

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \leq \frac{1}{v+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi} \quad (n=1, 2, \dots),$$

а

$$\int_0^\pi \sin v dv = 2,$$

то

$$\frac{2}{\pi(n+1)} \leq I_{n+1} - I_n \leq \frac{2}{n\pi}. \quad (35.11)$$

Заставляя n пробегать значения $1, 2, \dots, m-1$ и складывая равенства (35.11), найдем

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{m-1} (I_{n+1} - I_n) \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n}$$

или

$$I_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n} \leq I_m \leq I_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n}.$$

Но, принимая во внимание, что

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \approx \ln m,$$

где \approx означает асимптотическое равенство (см. Вводный материал, § 11), находим $I_m \approx \ln m$. Итак, находим

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = I_n \approx \frac{2}{\pi} \ln n. \quad (35.12)$$

Таким образом I_n не только бесконечно возрастает с ростом n , но мы видим точно порядок этого роста.

Заметим, что из (35.12) сразу следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du = +\infty,$$

т. е. интеграл

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty, \quad (35.13)$$

значит, интеграл (35.4) заведомо сходится только условно, но не абсолютно.

Из формулы (35.12) выведем одно следствие, которое будет играть в дальнейшем важную роль.

Условимся называть *константами Лебега* выражения

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt, \quad (35.14)$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле.

Так как $D_n(t)$ — функция четная, то

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Но мы знаем (см. § 32), что

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + O(1),$$

а потому

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt + O(1),$$

откуда

$$L_n = \frac{2}{\pi} I_n + O(1)$$

и в силу (35.12)

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

Итак,

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n. \quad (35.15)$$

Аналогично можно доказать, что и для ядра, сопряженного с ядром Дирихле, интеграл от модуля имеет тот же порядок роста, т. е. растет как $\ln n$.

Чтобы убедиться в этом, вычислим один вспомогательный интеграл, именно

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt. \quad (35.16)$$

Так как

$$\frac{\sin^2 nt}{\sin t} = \sum_{k=1}^n \sin (2k-1)t$$

(что проверяется непосредственно умножением обеих частей на $\sin t$ и заменой произведения синусов на разность косинусов), то

$$J_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k-1)t dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sim \ln n \quad (35.17)$$

(здесь и в дальнейшем мы не будем подсчитывать точно констант, а писать просто $u_n \sim v_n$, если $A < \frac{u_n}{v_n} < B$, где A и B — положительные постоянные).

Рассмотрим теперь

$$e_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{D}_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\bar{D}_n(t)| dt.$$

Так как (см. (32.11))

$$\bar{D}_n(t) = \frac{1 - \cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \frac{\sin nt}{2},$$

то мы имеем

$$\bar{D}_n(t) = \frac{1 - \cos nt}{2 \sin \frac{t}{2}} + O(1) = \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} + O(1)$$

(потому что

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\cos \frac{t}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{4}.$$

Следовательно,

$$e_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt + O(1) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nu}{\sin u} du + O(1) = \frac{4}{\pi} J_n + O(1),$$

а потому

$$e_n \sim \ln n.$$

Итак,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{D}_n(t)| dt \sim \ln n, \quad (35.18)$$

а это мы и хотели доказать.

§ 36. Оценка частных сумм ряда Фурье от ограниченной функции

Из результатов предыдущего параграфа мгновенно получаем следующую теорему:

Теорема Лебега. Если $f(x)$ — ограниченная функция

$$|f(x)| \leq M,$$

то для $n = 2, 3, \dots$

$$|S_n(x)| \leq CM \lg n, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (36.1)$$

и

$$|\bar{S}_n(x)| \leq CM \ln n, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (36.2)$$

где C — абсолютная константа.

Действительно (см. (31.3) и (35.15)),

$$|S_n(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \right| \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-x)| dt = ML_n < CM \ln n$$

и аналогично (см. (31.9) и (35.18))

$$|\bar{S}_n(x)| < CM \ln n.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Можно было бы подумать, что формула (36.1) чересчур груба; в самом деле, может показаться, что для ограниченной функции частные суммы ряда Фурье должны быть ограниченными. Однако это неверно даже для непрерывных функций. Если бы ряд Фурье от непрерывной функции равномерно сходилась к ней, то такая ограниченность должна была бы иметь место; но мы увидим дальше, что для непрерывных функций ряды Фурье могут сходиться неравномерно, а также могут расходиться и даже на бесконечном множестве точек иметь неограниченные частные суммы.

З а м е ч а н и е 2. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$ и $|f(x)| \leq M$ на некотором $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, то на любом $[a', b']$, $a < a' < b' < b$, имеем

$$|S_n(x)| \leq AM \ln n + \frac{1}{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (36.3)$$

где A — абсолютная константа, а $\delta = \min(a' - a, b - b')$.

Действительно, так как

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi, \pi] - (-\delta, \delta)} f(x+t) D_n(t) dt, \end{aligned} \quad (36.4)$$

то, выбрав δ так, чтобы $\delta = \min(a' - a, b - b')$, видим, что при $x \in [a', b']$ аргумент $t+x$ в первом интеграле не выходит из $[a, b]$ и, значит,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) D_n(t) dt \right| \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq AM \ln n, \quad (36.5)$$

где A — абсолютная константа.

Нотак как вне $(-\delta, \delta)$ имеем $|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{\delta}$, то для второго интеграла в (36.4) находим

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi, \pi] - (-\delta, \delta)} f(x+t) D_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt. \quad (36.6)$$

Соединяя (36.4), (36.5) и (36.6), получаем (36.3). Вместо (36.3) можно также написать

$$|S_n(x)| \leq CM \ln n \quad \text{при} \quad n \geq N,$$

где N зависит от M , δ и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$, так как, если N достаточно велико, то при $n \geq N$ второй член формулы (36.3) станет меньше первого.

§ 37. Критерий сходимости ряда Фурье

Вернемся к вопросу о сходимости рядов Фурье. Мы хотим найти условия, при которых $\sigma(f)$ сходится в некоторой точке x к какому-то числу S .

С этой целью прежде всего заметим, что из (33.1) следует

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1), \quad (37.1)$$

где $o(1)$ означает величину, равномерно стремящуюся к нулю на $[-\pi, \pi]$. Кроме того, умножая на S обе части равенства (35.3), имеем

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} S \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (37.2)$$

Из (37.1) и (37.2) теперь находим

$$S_n(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (37.3)$$

Отсюда ясно, что для сходимости $\sigma(f)$ к числу S в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (37.4)$$

Если же мы хотим, чтобы в точке x ряд $\sigma(f)$ имел «естественную сумму», т. е. сумму, равную $f(x)$, то для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (37.5)$$

Полагая

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \quad (37.6)$$

мы можем, следовательно, сформулировать такое предложение:

Для того чтобы в некоторой точке x ряд $\sigma(f)$ сходиллся к $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0, \quad (37.7)$$

где $\delta > 0$, а $\varphi_x(u)$ определено формулой (37.6).

Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a, b) , то можно ставить вопрос о равномерной сходимости ряда $\sigma(f)$ к $f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ любое. Из непрерывности $f(x)$ на интервале (a, b) следует ее непрерывность, а значит, и ограниченность на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Поэтому, если умножить (35.3) на $f(x)$, то имеем

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} f(x) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1), \quad (37.8)$$

где $o(1)$ стремится к нулю равномерно на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Из (37.1) и (37.8) выводим тогда

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (37.9)$$

Здесь δ можно брать любым. Поэтому, если мы возьмем $\delta < \varepsilon$, то при $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ и $|u| \leq \delta$ будем иметь $u + x \in (a, b)$ и $u - x \in (a, b)$, а тогда $\varphi_x(u)$, определяемая формулой (37.6), будет все еще непрерывна на (a, b) . Отсюда, пользуясь (37.9), можно заключить:

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $\varepsilon > 0$ любое, то для равномерной сходимости ряда $\sigma(f)$ на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

равномерно на $[a, b]$; здесь δ любое, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \varepsilon$, а $\varphi_x(u)$ — функция, определяемая равенством (37.6) и непрерывная для

$$a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon, \quad |u| \leq \delta.$$

§ 38. Признак Дини

Полученные условия сходимости (и равномерной сходимости) хотя и являются необходимыми и достаточными, однако их очень трудно применять. Поэтому мы выведем из них ряд признаков, которые хотя и будут лишь достаточными для сходимости (или для равномерной сходимости), но в простых и важных случаях часто оказываются очень полезны.

Прежде чем выводить эти признаки, введем одно определение.

О п р е д е л е н и е. Следуя Лебегу, назовем точку x_0 *регулярной*, если $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и если

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Ясно, что всякая точка непрерывности есть регулярная; регулярными будут и те точки разрыва 1-го рода, в которых величина функции есть среднее арифметическое ее пределов слева и справа.

Докажем следующую теорему:

Признак Дини. Ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ во всякой регулярной точке x , где интеграл

$$\int_0^{\delta} |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \frac{du}{u}$$

имеет смысл.

Действительно, если этот интеграл имеет смысл, то можно для любого $\varepsilon > 0$ выбрать η столь малым, что

$$\int_0^{\eta} |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \frac{du}{u} < \varepsilon.$$

Тогда при любом n , в силу $|\sin nu| \leq 1$, имеем

$$\left| \int_0^{\eta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < \varepsilon.$$

Но в силу замечания 1 к лемме § 31

$$\int_{\eta}^{\delta} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)}{u} \right] \sin nu \, du \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

и из (37.9) следует, что сходимость доказана.

В частности, если снова положить

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x),$$

то критерий Дини дает: если в точке x функция $f(x)$ непрерывна и

$$\int_0^{\delta} \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt \quad (38.1)$$

имеет смысл, то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Отсюда можно вывести ряд следствий. Например, если $f(x)$ в окрестности точки x удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, т. е. если

$$|f(x+u) - f(x)| \leq K |u|^{\alpha}$$

для $|u| \leq \delta$, то интеграл (38.1) имеет смысл, а значит, $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет в точке x конечную производную, то в окрестности этой точки она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$, а потому:

В точке x , где $f(x)$ имеет конечную производную, ее ряд Фурье сходится к ней.

В частности, если $f(x)$ дифференцируема всюду на $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится всюду на этом интервале.

§ 39. Признак Жордана

Как известно, всякая функция с ограниченным изменением есть разность двух неубывающих ограниченных функций. Если функция монотонна, то она имеет только разрывы 1-го рода. Кроме того, если функция с ограниченным изменением непрерывна, то ее можно представить как разность двух непрерывных неубывающих функций.

Этим мы воспользуемся при доказательстве следующей теоремы:

Т е о р е м а Ж о р д а н а . Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на некотором интервале (a, b) , то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого интервала. Его сумма есть $f(x)$ в точке непрерывности и $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точке разрыва. Наконец, если (a', b') лежит целиком внутри интервала (a, b) , где $f(x)$ непрерывна, то ряд Фурье сходится равномерно на (a', b') .

В силу сделанных ранее замечаний ясно, что достаточно доказать теорему для случая неубывающей $f(x)$. В этом случае, полагая

$$S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

мы видим из

$$f(x+u) + f(x-u) - 2S = [f(x+u) - f(x+0)] + [f(x-u) - f(x-0)],$$

что при фиксированном x каждая из скобок есть монотонная функция от u . Оценим теперь

$$\int_0^\delta [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin nu}{u} du. \quad (39.1)$$

Здесь δ выбирается так, чтобы $x \pm \delta \in (a, b)$. Но каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно взять $\delta_1 < \delta$ столь малым, чтобы

$$|f(x+u) - f(x+0)| < \varepsilon \quad 0 \leq u \leq \delta_1.$$

Так как $f(x+u) - f(x+0)$ не убывает и неотрицательна, то, применяя вторую теорему о среднем, видим, что

$$\int_0^{\delta_1} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin nu}{u} du = [f(x+\delta_1) - f(x+0)] \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin nu}{u} du, \quad (39.2)$$

где $0 < \delta_2 < \delta_1$. Но так как (см. (35.7))

$$\left| \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin nu}{u} du \right| < \pi$$

при любых положительных δ_1 и δ_2 , то интеграл (39.2) по модулю не превосходит $\pi\varepsilon$.

На основании леммы § 31 тогда

$$\left| \int_0^\delta [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < 2\pi\varepsilon,$$

если n достаточно велико.

Точно также оценивается

$$\int_0^\delta [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\sin nu}{u} du.$$

Поэтому для достаточно больших n

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du \right| \leq 4\pi\epsilon,$$

где ϵ как угодно мало, а тогда на основании критерия сходимости § 37 мы видим, что ряд сходится в точке x к числу S .

Пусть теперь $f(x)$ непрерывна на некотором интервале $[a, b]$, и $[a', b']$ — любой отрезок, лежащий строго внутри (a, b) .

Можно выбрать δ_1 столь малым, чтобы

$$|f(x+u) - f(x)| < \epsilon \quad \text{и} \quad |f(x-u) - f(x)| < \epsilon,$$

если $a' \leq x \leq b'$ и $0 \leq u \leq \delta_1$. Если так, то в предыдущих оценках интегралов x может быть взято любым из (a', b') и, следовательно,

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du \right| \leq 4\pi\epsilon$$

для $a' \leq x \leq b'$, а это в силу критерия § 37 и значит, что ряд сходится равномерно на (a', b') .

Теорема Жордана доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывна на нем, причем $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $-\infty < x < +\infty$.

Следовательно: ряд Фурье для всякой периодической абсолютно-непрерывной функции сходится равномерно к ней на $-\infty < x < +\infty$.

З а м е ч а н и е. Важный частный случай доказанной теоремы был рассмотрен Дирихле. Он изучал случай, когда функция $f(x)$ ограничена и имеет лишь конечное число максимумов и минимумов и не более чем конечное число точек разрыва. Для этих функций он доказал сходимость ряда Фурье в каждой точке. Ясно, что эти функции все имеют ограниченное изменение.

§ 40. Интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ суммируема и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Обозначим через $F(x)$ примитивную от $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}, \quad (40.1)$$

причем ряд в правой части сходится равномерно.

Эта теорема принадлежит Лебегу. Чтобы ее доказать, достаточно заметить, что $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ есть примитивная от $f(x) - \frac{a_0}{2}$, она абсолютно непрерывна и имеет период 2π (см. § 23, п° 8).

Следовательно, ряд Фурье от $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ сходится равномерно к ней. Но он имеет вид (см. § 23, п° 8)

$$\sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}.$$

Это и заканчивает доказательство.

Как следствие, получаем для любых a и b

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} \Big|_a^b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n} \Big|_a^b,$$

т. е. ряды Фурье (даже расходящиеся) можно интегрировать почленно по любому интервалу.

С л е д с т в и е. В формуле (40.1) ряд сходится для всех x ; в частности при $x = 0$; но это означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Итак: для всякого ряда Фурье—Лебега ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ сходится.

Эта теорема дает возможность в некоторых случаях сразу установить, что заданный ряд не является рядом Фурье—Лебега. Так, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не есть ряд Фурье—Лебега, хотя в силу теоремы 1 § 30 он сходится в каждой точке.

Напротив, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ может и расходиться, в частности ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n},$$

для которого ряд $\sum \frac{a_n}{n} = \sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится, все же является рядом Фурье—Лебега (это было доказано в § 30).

§ 41. Явление Гиббса

Мы доказали в § 39, что у функции с ограниченным изменением ряд Фурье сходится в каждой точке, и в частности в точках разрыва. Мы хотим изучить более детально поведение частных сумм ряда $\sigma(f)$ в тех точках, где $f(x)$ разрывна. Начнем с изучения одного специального случая, а затем перейдем к общему.

Пусть $f(x) = x$ на $(-\pi, \pi)$ и $f(x)$ имеет период 2π . Так как $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье состоит из одних синусов и (см. § 8)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 2(-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$f(x) \sim 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right].$$

Так как $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то ее ряд Фурье всюду сходится и притом к $f(x)$ в ее точках непрерывности и к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точках разрыва 1-го рода. Поэтому мы имеем для $x \neq \pm \pi$

$$x = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \pm \frac{\sin nx}{n} \mp \dots \right],$$

если же $x = \pm \pi$, то ряд сходится к 0 (что очевидно и непосредственно, ибо все его члены тогда равны нулю).

Если мы сделаем замену переменного $x = \pi - t$, то когда x пробегает отрезок $[-\pi, \pi]$, переменное t будет пробегать отрезок $[0, 2\pi]$, откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{\pi - t}{2} &= \frac{\sin(\pi - t)}{1} - \frac{\sin 2(\pi - t)}{2} + \frac{\sin 3(\pi - t)}{3} - \dots \pm \frac{\sin n(\pi - t)}{n} \mp \dots = \\ &= \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin nt}{n} + \dots, \end{aligned} \quad (41.1)$$

если $t \neq 0$ и $t \neq 2\pi$. В этих же точках ряд в правой части (41.1) сходится к нулю.

Мы уже говорили в § 30, что этот ряд будет играть большую роль во многих вопросах теории тригонометрических рядов. В § 30 было доказано, что частные суммы ряда (41.1) ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа C , для которой

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq C, \quad -\infty < x < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Однако для дальнейшего нам нужно изучить более детально поведение этих частных сумм в окрестности точки $x = 0$.

Имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \int_0^x \left[D_n(t) - \frac{1}{2} \right] dt,$$

где, как всегда, $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Следовательно,

$$S_n(x) = \int_0^x D_n(t) dt - \frac{x}{2}. \quad (41.2)$$

Но мы знаем, что (см. (32.3))

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt,$$

где $g(t)$ ограничена.

Полагая

$$\psi_x(t) = \begin{cases} g(t) & \text{для } 0 \leq t \leq x, \\ 0 & \text{для } x < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$\psi_x(t + 2\pi) = \psi_x(t)$$

и, пользуясь замечанием 3 к лемме § 31, заключаем отсюда, что

$$\int_0^x \dot{D}_n(t) dt = \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (41.3)$$

равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$; поэтому из (41.2) и (41.3)

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + o(1)$$

или

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t} dt + o(1). \quad (41.4)$$

Если

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\pi - x}{2} \quad \text{на } 0 < x < 2\pi, \\ \psi(x + 2\pi) &= \psi(x), \end{aligned} \quad (41.5)$$

то функция $\psi(x)$ имеет вид, указанный на рис. 6. Мы уже видели, что ряд

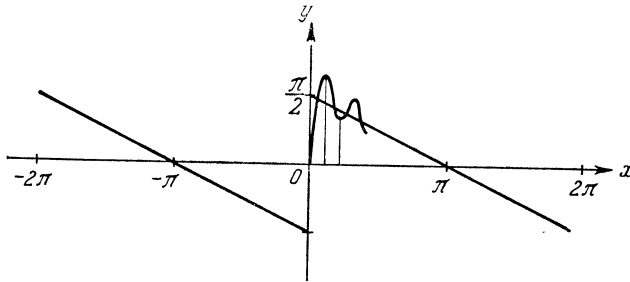


Рис. 6

(41.1) есть $\sigma(\psi)$ и он сходится всюду к $\psi(x)$, кроме точек $x = 0$ и $x = 2\pi$, где он сходится к нулю.

Заставляя x принимать значения

$$x = \frac{\pi}{n}, \quad x = \frac{2\pi}{n}, \dots, x = \pi,$$

мы видим из (41.4), что

$$\left. \begin{aligned} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{2n} &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + o(1), \\ S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt + o(1), \\ &\dots\dots\dots \\ S_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{k\pi}{2n} &= \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt + o(1). \end{aligned} \right\} \quad (41.6)$$

Учитывая то, что говорилось в § 35 по поводу поведения кривой $y = \frac{\sin x}{x}$, сразу видим, что кривые $y = S_n(x)$ проходят через начало координат, колеблются около прямой $y = \psi(x)$ и хотя при любом x , $0 < x < \pi$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \psi(x),$$

однако из (41.6) видно, что кривые $y = S_n(x)$ справа от точки $x = 0$ сгущаются около отрезка $(0, l)$, где

$$l = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Такая же картина наблюдается и слева от $x = 0$, так как все $S_n(x)$ нечетные функции. Поэтому около точки $x = 0$ кривые колеблются не между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как можно было думать, а сгущаются около отрезка $[-l, l]$. Но вычисления показывают, что $l = 1,8519\dots$, а так как $\frac{\pi}{2} = 1,57\dots$, то длина отрезка $[-l, l]$ превосходит длину $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Это обстоятельство впервые было отмечено Гиббсом (см. Gibbs^[1]) почему его принято называть *явлением Гиббса*, а отношение l к $\frac{\pi}{2}$ *константой Гиббса*; эта константа равна $1,17\dots$

Покажем, что явление Гиббса наблюдается и для любой функции с ограниченным изменением около ее точек разрыва, если только они изолированы. Действительно, у функции с ограниченным изменением точки разрыва бывают только 1-го рода.

Пусть $f(x)$ — такая функция и x_0 — изолированная точка разрыва. Если $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = d$, то функция

$$\varrho(x) = f(x) - \frac{d}{\pi} \psi(x - x_0)$$

непрерывна в достаточно малой окрестности точки x_0 , так как $\varrho(x_0 \pm 0) = f(x_0 \pm 0) - \frac{d}{\pi} \psi(\pm 0)$, а потому

$$\varrho(x_0 + 0) - \varrho(x_0 - 0) = d - \frac{d}{\pi} [\psi(+0) - \psi(-0)] = 0.$$

Так как других точек разрыва у $f(x)$ в рассматриваемой окрестности нет, если эта окрестность была выбрана достаточно малой, то $\varrho(x)$ непрерывна в этой окрестности и имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$. Значит, ее ряд Фурье равномерно сходится в достаточно малой окрестности x_0 , а потому поведение частных сумм ряда Фурье для $f(x)$ около x_0 будет такое же, как у $\frac{d}{\pi} \psi(x - x_0)$, т. е. как у $\frac{d}{\pi} \psi(x)$ около $x = 0$; следовательно, явление Гиббса здесь также должно быть налицо.

В силу принципа локализации Римана (см. § 33) это же справедливо, если $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$ и x_0 — изолированная точка разрыва $f(x)$ на $[a, b]$.

§ 42. Определение величины скачка функции по ее ряду Фурье

Допустим, что в некоторой точке x функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, причем

$$f(x+0) - f(x-0) = d. \quad (42.1)$$

Величину этого скачка можно определить из следующей формулы (см. Lukács^[1]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n(x)}{\ln n} = -\frac{d}{\pi}. \quad (42.2)$$

В самом деле, имеем

$$f(x+t) - f(x-t) = d + \varepsilon(t), \quad \text{где } \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Но из формулы (31.9) в силу нечетности $\bar{D}_n(t)$ имеем

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \bar{D}_n(t) dt,$$

поэтому

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{d}{\pi} \int_0^\pi \bar{D}_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varepsilon(t) \bar{D}_n(t) dt. \quad (42.3)$$

Докажем прежде всего, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^\pi \bar{D}_n(t) dt = 1. \quad (42.4)$$

Действительно, полагая $\nu = \left[\frac{n-1}{2} \right]$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \bar{D}_n(t) dt &= -\sum_{k=1}^n \frac{\cos kt}{k} \Big|_0^\pi = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\nu+1} \right) = \\ &= 2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu+1} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu} \right) \right] \approx \\ &\approx 2 \left[\ln \nu - \frac{1}{2} \ln \nu \right] = \ln \nu \approx \ln n. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Итак, формула (42.4) доказана.

Докажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^\pi \varepsilon(t) \bar{D}_n(t) dt = 0. \quad (42.6)$$

Для этого возьмем $\eta > 0$ произвольно и выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|\varepsilon(t)| < \eta \quad \text{при } 0 \leq t \leq \delta.$$

Тогда

$$\left| \int_0^\delta \varepsilon(t) \bar{D}_n(t) dt \right| < \eta \int_0^\delta |\bar{D}_n(t)| dt < C \eta \ln n \quad (42.7)$$

(в силу (35.18)), где C постоянно. Кроме того, так как

$$\left| \overline{D}_n(t) \right| \leq \frac{\pi}{\delta} \quad \text{при} \quad \delta \leq t \leq \pi \quad (42.8)$$

в силу (29.11), то

$$\int_{\delta}^{\pi} \varepsilon(t) \overline{D}_n(t) dt = O(1),$$

а потому из (42.7) и (42.8) следует (42.6). Из (42.3), (42.4) и (42.6) теперь следует справедливость формулы (42.2).

С л е д с т в и е 1. *Во всякой точке разрыва 1-го рода ряд, сопряженный к ряду Фурье для $f(x)$, расходится.*

Действительно, в этой точке

$$\overline{S}_n(x, f) = -\frac{d}{\pi} \ln n + \varepsilon_n \ln n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

С л е д с т в и е 2. *Если $f(x)$ непрерывна в точке x , то $\overline{S}_n(f, x) = o(\ln n)$; если $\overline{S}_n(x, f) = o(\ln n)$, то точка x не может быть точкой разрыва 1-го рода.*

С л е д с т в и е 3. *Если у функции $f(x)$ коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то у нее не может быть точек разрыва первого рода.*

Действительно, тогда

$$\overline{S}_n(f, x) = o\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = o(\ln n)$$

(см. Вводный материал, § 11).

Отсюда, в частности, заключаем:

Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение и коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то она непрерывна.

Действительно, у функции $f(x)$ с ограниченным изменением точки разрыва могут быть только 1-го рода; но в силу следствия 3 таких точек быть не может, а потому $f(x)$ непрерывна.

Однако нельзя утверждать, что если $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение, то ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом мы убедимся в § 2 главы II.

§ 43. Особенности рядов Фурье от непрерывных функций. Полиномы Фейера

Мы хотим показать, что если на функцию $f(x)$ не налагать никаких ограничений, кроме непрерывности, то ее ряд Фурье может и расходиться в некоторой точке, и сходиться неравномерно около некоторой точки, хотя он сходится всюду. Первые примеры такого рода были даны Дю-Буа-Реймоном *) и Лебегом, поэтому принято называть эти факты *особенностью Дю-Буа-Реймона* (для случая расходимости) и *особенностью Лебега* (для случая неравномерной сходимости).

Мы построим здесь, следуя Фейеру (см. Fejer [2]), некоторые тригонометрические полиномы, из которых будут строиться функции, обладающие либо одной, либо другой из этих особенностей. Впоследствии (в главе IV) те же

*) Du Bois-Reymond [1].

полиномы Фейера будут служить для построения значительно более сложных примеров, а именно: непрерывных функций, у которых ряд Фурье расходится на всюду плотном множестве, или на множестве мощности континуума, а также непрерывных функций, у которых ряд всюду сходится, но неравномерно на любом интервале δ , лежащем на $[-\pi, \pi]$.

Э л е м е н т ы п о с т р о е н и я. Рассмотрим два тригонометрических полинома

$$Q(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \left[\frac{\cos(2n+1)x}{1} + \frac{\cos(2n+2)x}{2} + \dots + \frac{\cos 3nx}{n} \right], \quad (43.1)$$

$$\bar{Q}(x, n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{1} - \left[\frac{\sin(2n+1)x}{1} + \frac{\sin(2n+2)x}{2} + \dots + \frac{\sin 3nx}{n} \right]. \quad (43.2)$$

Отметим следующие их свойства:

а) Существует такая константа C , что

$$|Q(x, n)| \leq C \quad \text{и} \quad |\bar{Q}(x, n)| \leq C \quad (43.3)$$

для любых x и n .

Действительно,

$$Q(x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} = 2 \sin 2nx \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k},$$

$$\bar{Q}(x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2n-k)x - \sin(2n+k)x}{k} = -2 \cos 2nx \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Но, как известно (см. (30.8)), мы имеем

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq M \quad (-\infty < x < +\infty, n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому, полагая $C = 2M$, видим, что свойство а) доказано.

б) Если через $\varphi(x, Q)$ или $\varphi(x, \bar{Q})$ обозначим любую частную сумму полинома $Q(x)$ или $\bar{Q}(x)$ (т. е. сумму любого числа первых слагаемых в этом полиноме), то

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} |\varphi(x, Q)| &\leq 2(1 + \ln n) \\ |\varphi(x, \bar{Q})| &\leq 2(1 + \ln n), \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

потому что

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

в) Если $\delta \leq x \leq \pi$, то

$$|\varphi(x, Q)| \leq M_\delta \quad \text{и} \quad |\varphi(x, \bar{Q})| \leq M_\delta, \quad (43.5)$$

где M_δ — константа, зависящая только от δ .

Действительно, всякая сумма $\varphi(x, Q)$ либо имеет вид

$$\sum_{k=0}^p \frac{\cos(n+k)x}{n-k} \quad \text{для } p \leq n-1,$$

либо вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{n-k} - \sum_{k=1}^p \frac{\cos(2n+k)x}{k} \quad \text{для } p \leq n.$$

Значит, каждая из сумм, входящих в выражение $\varphi(x, Q)$, имеет вид $\sum \alpha_k \cos(n+k)x$, где числа α_k положительны, монотонно убывают или монотонно возрастают и притом не превосходят 1; поэтому, применяя следствие из преобразования Абеля (см. Вводный материал, § 1), мы видим, что каждая такая сумма не превосходит константы, зависящей только от δ . Это же рассуждение справедливо для $\varphi(x, \bar{Q})$, так как там все сохраняет силу, только косинусы заменены синусами.

г) Наконец, положим

$$P(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1}, \quad (43.6)$$

$$\bar{P}(x, n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{1}, \quad (43.7)$$

т. е. $P(x, n)$ — сумма первых n членов $Q(x, n)$, а $\bar{P}(x, n)$ — сумма первых n членов $\bar{Q}(x, n)$. Тогда мы имеем

$$P(0, n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n, \quad (43.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) &= \frac{\sin n \frac{\pi}{4n}}{n} + \dots + \frac{\sin(2n-1) \frac{\pi}{4n}}{1} > \\ &> \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \ln n, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\bar{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) > \frac{\ln n}{\sqrt{2}}. \quad (43.9)$$

Этими фактами мы воспользуемся для построения нужных примеров.

§ 44. Непрерывная функция с рядом Фурье, сходящимся всюду, но неравномерно

Пусть $a > 1$ целое, которое мы подберем позже. Положим

$$n_k = a^{k^2} \quad (44.1)$$

и обозначим

$$\bar{Q}_k(x) = \bar{Q}(x, n_k), \quad (44.2)$$

где $\bar{Q}(x, n)$ — тригонометрический полином, определенный формулой (43.2). Положим

$$g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x) \quad (44.3)$$

и докажем, что если a подобрано надлежащим образом, то $g(x)$ есть функция со свойствами, указанными в заглавии параграфа.

Действительно, в силу (43.3) для всех x и k

$$|\bar{Q}_k(x)| < C, \quad (44.4)$$

а потому ряд (44.3) сходится абсолютно и равномерно, значит $g(x)$ непрерывна. Так как при любом $a > 1$ и при $k \geq 2$ имеем

$$a^{k^2} > 3a^{(k-1)^2},$$

т. е. (см. (44.1))

$$n_k > 3n_{k-1},$$

то, в силу (44.2) ни при каком n член, содержащий $\sin nx$, не входит одновременно в два разных $\bar{Q}_k(x)$, поэтому в ряде (44.3) все синусы, как в обычном тригонометрическом ряде, расположены в порядке возрастания множителя n при x .

На основании леммы § 12 ряд (44.3) есть ряд Фурье от $g(x)$, поскольку его частные суммы с номерами $3n_k$ сходятся равномерно к $g(x)$.

Докажем, что частные суммы $S_n(x, g)$ ряда Фурье для $g(x)$ ограничены в своей совокупности.

Действительно, каждая такая сумма имеет вид

$$S_n(x, g) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x) + \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) \quad (44.5)$$

(в частных случаях второе слагаемое суммы (44.5) может отсутствовать). Но тогда на основании (44.2) и (43.3) имеем

$$\left| \sum_{k=2}^m \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x) \right| \leq C \sum_{k=2}^m \frac{1}{k^2} < A, \quad (44.6)$$

где A — абсолютная константа. Далее, на основании (44.2), (43.2) и (43.4) имеем

$$\left| \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) \right| \leq \frac{1}{(m+1)^2} 2(1 + \ln a^{(m+1)^2}) < 2(1 + \ln a) \quad (44.7)$$

и, следовательно, из (44.5), (44.6) и (44.7)

$$|S_n(x, g)| \leq B \quad (n = 0, 1, \dots; 0 \leq x \leq 2\pi), \quad (44.8)$$

где B — абсолютная константа.

Кстати заметим (это нам понадобится в главе IV), что, полагая

$$S_n(x, g) - g(x) = R_n(x, g),$$

имеем

$$|R_n(x, g)| \leq K \quad (n = 1, 2, \dots; -\pi \leq x \leq \pi), \quad (44.9)$$

где K — абсолютная константа, что вытекает из ограниченности $g(x)$ и из (44.8).

Перейдем к изучению сходимости ряда $\sigma(g)$.

Заметим сначала, что для любого $\delta > 0$ на отрезке $\delta \leq x \leq \pi$ (а значит, и $-\pi \leq x \leq -\delta$) ряд Фурье от $g(x)$ сходится равномерно.

Действительно, из той же формулы (44.5) видно, что

$$R_n(x, g) = \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) - \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x),$$

а тогда из (43.3) и (43.5) следует

$$|R_n(x, g)| \leq C \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{M_\delta}{(m+1)^2} < \varepsilon,$$

если n , а следовательно и m , достаточно велико.

Мы видим таким образом, что ряд Фурье от $g(x)$ сходится при любом $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но для $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ он также должен сходиться, так как состоит из одних синусов.

Нам остается доказать, что ряд $\sigma(g)$ сходится неравномерно около $x = 0$.

С этой целью рассмотрим его частные суммы с номерами

$$v_m = 2n_m - 1.$$

Каждая такая сумма имеет вид

$$S_{v_m}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x) + \frac{1}{m^2} \bar{P}(x, n_m),$$

поэтому

$$R_{v_m}(x) = S_{v_m}(x) - g(x) = \frac{1}{m^2} \bar{P}(x, n_m) - \sum_m^{\infty} \frac{1}{k^2} \bar{Q}_k(x).$$

Полагая

$$x_m = \frac{\pi}{4n_m},$$

находим из (43.3) и (43.9)

$$R_{v_m}(x_m) > \frac{1}{m^2} \bar{P}\left(\frac{\pi}{4n_m}, n_m\right) - C \sum_m^{\infty} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{m^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln a^{m^2} - \frac{C}{m} = \frac{\ln a}{\sqrt{2}} - C > 1,$$

если только выбрать a так, чтобы

$$\ln a > \sqrt{2} (1 + C).$$

Итак,

$$R_{v_m}(x_m) > 1 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (44.10)$$

для некоторой последовательности точек x_m , стремящихся к 0, а это и значит, что ряд Фурье от $g(x)$ сходится неравномерно около $x = 0$.

Теорема доказана.

§ 45. Непрерывная функция с рядом Фурье, расходящимся в одной точке (пример Фейера)

Мы рассмотрим полиномы Фейера $Q(x, n)$, введенные в § 43, и, пользуясь ими, будем строить ряды Фурье от непрерывных функций, расходящиеся при $x = 0$; при этом будем получать по желанию ряды, имеющие либо ограниченные, либо неограниченные частные суммы. Те и другие примеры будут позже (в главе IV) использованы для построений более сложного характера.

Возьмем сначала, как и в предыдущем параграфе,

$$n_k = a^{k^2},$$

где a — целое и $a \geq 2$; положим

$$Q_k(x) = Q(x, n_k) \quad (45.1)$$

и пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(x). \quad (45.2)$$

Мы видим снова, как в предыдущем параграфе, что $f(x)$ непрерывна, и ряд (45.2), если в нем рассматривать каждый член всякого полинома $Q_k(x)$ отдельно (а не группировать их в суммы), есть ее ряд Фурье.

Мы видим, так же как при доказательстве (44.8), что

$$|S_n(x, f)| \leq B \quad (45.3)$$

для любых n и x и что ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(-\pi \leq x \leq -\delta)$ и $(\delta \leq x \leq \pi)$, т. е. сходится при любом $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но при $x = 0$ он расходится, так как, полагая

$$\nu_m = 2n_m - 1, \quad \mu_m = 3n_{m-1},$$

имеем

$$S_{\nu_m}(0) - S_{\mu_m}(0) = \frac{P(0, n_m)}{m^2} > \frac{\ln n_m}{m^2} = \frac{m^2 \ln a}{m^2} = \ln a > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, не выполнен критерий сходимости Коши.

Итак, $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$, хотя его частные суммы ограничены в своей совокупности в силу (45.3).

Если бы вместо $n_k = a^{k^2}$ мы положили бы

$$n_k = a^{k^3} \quad (a > 2),$$

то получили бы

$$S_{\nu_m}(0) - S_{\mu_m}(0) = \frac{P(0, n_m)}{m^2} > \frac{m^3 \ln a}{m^2} = m \ln a,$$

т. е. ряд не только расходился бы в точке $x = 0$, но и имел бы в этой точке неограниченные частные суммы.

§ 46. Расходимость в одной точке (пример Лебега)

Предыдущие примеры Фейера (см. § 45) хотя и удобны для дальнейших построений, но они обладают одним недостатком: так как соответствующие функции построены чисто аналитическим путем, при помощи формул, то не удается их изобразить кривыми и понять геометрически, почему произошла расходимость ряда Фурье.

Поэтому мы изложим здесь пример Лебега (лишь слегка измененный для сокращения доказательства), где функцию уже можно, хотя бы приблизительно, изобразить графически.

Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — последовательность целых чисел, которые мы подберем позже. Положим

$$a_0 = 1, \quad a_k = n_1 n_2 \dots n_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Обозначим

$$I_k = \left(\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}} \right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Выберем позже последовательность чисел c_k , пока будем предполагать только $c_k \downarrow 0$.

Пусть

$$f(x) = c_k \sin a_k x \quad \text{на} \quad I_k,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(-x) = f(x).$$

Ясно, что $f(x)$ определена всюду на $[-\pi, \pi]$, она непрерывна на каждом I_k и обращается в 0 в его концах, т. е. не имеет разрывов и в конечных точках; наконец, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ (рис. 7) в силу $c_k \downarrow 0$, и, значит, $f(x)$ непрерывна всюду.

Покажем, что ее ряд Фурье сходится всюду на $[-\pi, \pi]$, кроме $x = 0$. Так как $f(x)$ имеет лишь конечное число максимумов и минимумов на $[\delta, \pi]$, то она имеет ограниченное изменение на этом отрезке (также и на

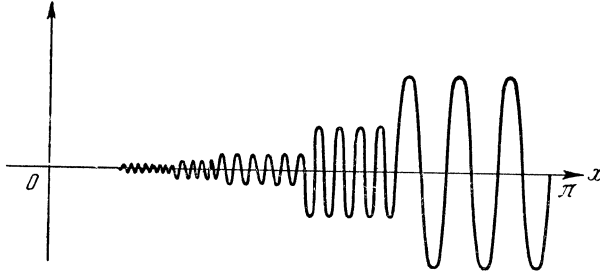


Рис. 7

$[-\pi, -\delta]$). Значит, ее ряд Фурье сходится в каждой точке $[-\pi, \pi]$, кроме $x = 0$.

Покажем, что при надлежащем подборе чисел c_k и n_k ряд $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$.

Как известно, для любой $f(x)$ имеем

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

значит, при $x = 0$

$$S_n(0, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

Наша $f(x)$ четная, поэтому

$$S_n(0, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1). \quad (46.1)$$

Покажем, что при надлежащем подборе c_k и n_k имеем

$$J_k = \int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (46.2)$$

Если так, то $S_{a_k}(0, f) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ (как видно из (46.1)), и тогда ряд $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$.

Чтобы оценить J_k , мы разобьем его на три слагаемых

$$J_k = \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt = J'_k + J''_k + J'''_k. \quad (46.3)$$

Имеем

$$\left| \frac{\sin a_k t}{t} \right| \leq a_k.$$

Значит,

$$(J'_k) \leq \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{a_k}} |f(t)| a_k \frac{\pi}{a_k} = \pi c_{k+1} = o(1), \quad (46.4)$$

так как $c_k \downarrow 0$.

До сих пор мы не определили еще чисел c_k и n_k . Мы предположим теперь, что $n_1 = 2$, $c_1 = 1$. Если c_1, c_2, \dots, c_{k-1} и n_1, n_2, \dots, n_{k-1} уже определены, то $f(t)$ определена на I_1, I_2, \dots, I_{k-1} , т. е. на $\left(\frac{\pi}{a_{k-1}}, \pi\right]$. Она на этом полуинтервале непрерывна, а $t \geq \frac{\pi}{a_{k-1}}$, поэтому $\frac{f(t)}{t}$ ограничена. Следовательно, если n достаточно велико, то

$$\int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} \frac{f(t)}{t} \sin nt \, dt$$

может быть сделан как угодно малым (см. § 19).

Так как $a_k = n_1 n_2 \dots n_k$, то при n_1, \dots, n_{k-1} уже фиксированных, n_k еще в нашем распоряжении и, значит, увеличивая его, мы можем сделать a_k как угодно большим, в частности таким, что

$$\left| J_k''' \right| \leq \left| \int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt \right| < \frac{1}{k}, \quad (46.5)$$

откуда следует, что $J_k''' = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Остается оценить J_k'' . Имеем

$$\begin{aligned} J_k'' &= \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} c_k \sin a_k t \frac{\sin a_k t}{t} dt = \frac{c_k}{2} \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{1 - \cos 2 a_k t}{t} dt = \\ &= \frac{c_k}{2} \ln n_k - \frac{c_k}{2} \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{\cos 2 a_k t}{t} dt. \end{aligned}$$

Но по второй теореме о среднем, учитывая, что $\frac{1}{t}$ положительно и монотонно убывает на интервале интегрирования, находим

$$\left| \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{\cos 2 a_k t}{t} dt \right| \leq \frac{a_k}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\xi} \cos 2 a_k t \, dt \right| \leq \frac{a_k}{\pi} \frac{2}{2 a_k} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому из $c_k \rightarrow 0$ следует

$$J_k'' = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1),$$

откуда, в силу (46.4) и (46.5),

$$J_k = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1).$$

Мы можем теперь положить хотя бы $c_k = \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}}$, тогда $c_k \downarrow 0$ и

$$J_k = \frac{1}{2} \sqrt{\ln n_k} + o(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, доказательство завершено.

Из рис. 7 видно, что функция $f(x)$ по мере приближения x к нулю совершает все более и более частые колебания; таким образом, наглядно обнаруживается, что расходимость ряда $\sigma(f)$ при $x = 0$ вызвана тем, что $f(x)$ имеет в окрестности этой точки неограниченное изменение.

З а м е ч а н и е. Впоследствии (в главе V, § 22) нам будет нужен пример непрерывной функции, у которой ряд Фурье сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi]$, вне некоторого отрезка $[a, b]$, сходится в каждой точке (a, b) и расходится либо только в a , либо только в b , либо в обоих концах интервала (a, b) , и притом имеет в точках расходимости неограниченные частные суммы (будем говорить кратко: неограниченно расходится). Все такие примеры легко получить, отправляясь от построенного примера Лебега.

Действительно, если положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } [-\pi, 0], \\ f(x) & \text{на } [0, \pi], \end{cases}$$

то

$$S_n(0, \varphi) = \frac{1}{2} S_n(0, f),$$

а потому $\sigma(\varphi)$ неограниченно расходится при $x = 0$; кроме того, $\sigma(\varphi)$ сходится на $0 < x \leq \pi$ и сходится к нулю на $(-\pi, 0)$, что вытекает из принципа локализации (см. § 33). Если положить

$$\varphi_a(x) = \varphi(x - a),$$

то получим функцию, для которой $\sigma(\varphi_a)$ расходится при $x = a$, сходится к нулю на $[a - \pi, a]$ и сходится на $(a, a + \pi)$.

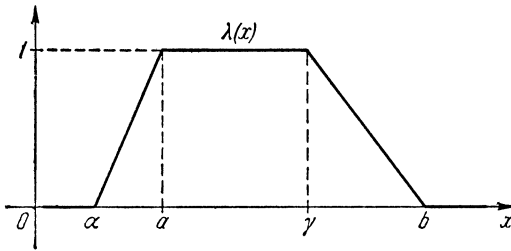


Рис. 8

Функция $\Psi(x) = \varphi(-x)$ имеет ряд Фурье, сходящийся всюду, кроме $x = 0$, где он неограниченно расходится, и, кроме того, этот ряд сходится к нулю при $0 < x \leq \pi$.

Поэтому

$$\Psi_b(x) = \Psi(x - b)$$

имеет ряд, сходящийся всюду, кроме $x = b$, где он неограниченно расходится, причем он сходится к нулю на $(b, b + \pi)$.

Пусть теперь $0 < a < b < 2\pi$. Построим $\lambda(x)$ следующим образом. Выберем точки α и γ так, чтобы $0 < \alpha < a < \gamma < b$ и пусть

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } (a, \gamma), \\ 0 & \text{вне } (a, b), \end{cases}$$

$\lambda(x)$ интерполируется линейно на (α, a) и (γ, b) (рис. 8).

По теореме Штейнгауза (§ 34) ряд $\sigma(\lambda\varphi_a)$ является равносходящимся с $\lambda(x) \sigma(\varphi_a)$, а потому он сходится всюду, кроме $x = a$, где он неограниченно расходится, причем вне $[a, b]$ он всюду сходится к нулю (либо в силу $\lambda(x) = 0$, либо в силу $\varphi_a(x) = 0$).

Совершенно также, если через $\lambda^*(x)$ обозначить функцию, равную 1 на (γ, b) , равную 0 вне (a, β) и интерполируемую линейно на (a, γ) и (b, β) , где

$$0 < a < \gamma < b < \beta < 2\pi,$$

то мы увидим, что $\sigma(\lambda^* \Psi_b)$ является равносходящимся с $\lambda^*(x) \sigma(\Psi_b(x))$, а потому он расходится неограниченно при $x = b$, сходится всюду, кроме $x = b$ и сходится к нулю вне $(a, b]$.

Наконец, полагая

$$F(x) = \lambda \varphi_a(x) + \lambda^* \Psi_b(x),$$

мы увидим, что $F(x)$ непрерывна и $\sigma(f)$ расходится неограниченно при $x = a$ и $x = b$, а всюду в других точках сходится, и притом сходится к нулю всюду, вне $[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Коэффициенты Фурье у тех рядов, которые мы строили в §§ 45 и 46, стремились к нулю по довольно сложному закону. В связи с решением некоторых задач из теории интегральных уравнений возникла проблема: можно ли найти такую непрерывную четную функцию $f(x)$, у которой

$$\sigma(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{где } |a_n| \downarrow 0$$

и притом $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$. Салем (см. Salem^[14]) дал утвердительный ответ на этот вопрос. Мы не будем приводить здесь доказательства, так как оно основано на изучении некоторых теоретико-числовых неравенств, которые увели бы нас слишком далеко от материала этой книги.

§ 47. Суммирование ряда Фурье методом Фейера

Мы видели, что даже ряды Фурье от непрерывных функций имеют точки расходимости (§§ 45 и 46). Возникает вопрос, в какой мере ряд Фурье может тогда быть использован для вычисления значений функции $f(x)$? Здесь естественно, как всегда, когда встречаются с расходящимися рядами, прибегнуть к тем или иным методам суммирования.

Напомним (см. Вводный материал, § 6), что функциональный ряд называется *суммируемым методом* $(C, 1)$, если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x),$$

где

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x), \quad (47.1)$$

а $S_n(x)$ — частные суммы ряда.

Применение этого метода к рядам Фурье принято называть *суммированием методом Фейера*, так как Фейер первый обратил внимание на целесообразность использования чезаровских сумм в этом случае и доказал основную теорему. Позже она была обобщена Лебегом.

Мы знаем (см. (31.3)), что частная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье от функции $f(x)$ выражается формулой

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt,$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле. Поэтому чезаровская сумма, определяемая (47.1), должна иметь вид

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt, \quad (47.2)$$

где

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u). \quad (47.3)$$

Следовательно,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_n(u) du. \quad (47.4)$$

Функция $K_n(u)$ называется *ядром Фейера*; мы сейчас найдем для нее удобное выражение.

Так как

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{4 \sin^2 \frac{u}{2}},$$

то

$$\begin{aligned} K_n(u) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{4 \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 - \cos(n+1)u}{(n+1) 4 \sin^2 \frac{u}{2}} = \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2. \quad (47.5)$$

Из этого выражения выведем сразу ряд свойств ядра.

1) $K_n(u) \geq 0$.

Это свойство в дальнейшем играет существенную роль.

2) Имеем

$$K_n(u) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{u}{2}} \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2} \quad \text{для } 0 < |u| \leq \pi, \quad (47.6)$$

а потому

$$K_n(u) = O\left(\frac{1}{nu^2}\right) \quad \text{для } 0 < |u| \leq \pi \quad (47.7)$$

и

$$K_n(u) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2} \quad \text{для } 0 < \delta \leq |u| \leq \pi, \quad (47.8)$$

откуда при любом $\delta > 0$, полагая

$$M_n(\delta) = \max_{\delta \leq u \leq \pi} K_n(u),$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0. \quad (47.9)$$

3) Имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1. \quad (47.10)$$

Это вытекает из (47.3) и из

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) du = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

4) Если $\delta > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u) du = 1. \quad (47.11)$$

Это сразу следует из (47.9) и (47.10).

Опираясь на эти свойства, мы сможем доказать следующую теорему, касающуюся суммирования рядов Фурье методом Фейера.

Т е о р е м а Ф е й е р а. Если x есть точка непрерывности функции $f(x)$ или точка разрыва первого рода, то в этой точке $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера соответственно к $f(x)$ или к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$; если (a, b) есть интервал, где $f(x)$ непрерывна, то $\sigma(f)$ равномерно суммируем методом Фейера к $f(x)$ во всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри интервала (a, b) .

Наконец, если $f(x)$ всюду непрерывна, то ее ряд Фурье равномерно суммируем методом Фейера на $[-\pi, \pi]$, т. е. $\sigma_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке.

Для доказательства этой теоремы мы будем опираться на лемму, которая окажется полезной и в других случаях.

Л е м м а. Пусть

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Psi_n(t) dt, \quad (47.12)$$

где функция $\Psi_n(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Psi_n(t)$ — четная функция;
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(t)| dt \leq C \quad (n = 1, 2, \dots)$, где C — постоянно;
- 3) полагая для $\delta > 0$

$$M_n(\delta) = \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\Psi_n(t)|,$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0;$$

$$4) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t) dt = 1.$$

Тогда: если x — точка разрыва первого рода для $f(x)$, то

$$f_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$.

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) , то $f_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерно на $[\alpha, \beta]$ для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Для доказательства леммы заметим сначала, что из свойства 4) функции $\Psi_n(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \Psi_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+0) + f(x-0)] \Psi_n(t) dt \end{aligned} \quad (47.13)$$

в силу четности $\Psi_n(t)$. Из (47.12) и четности $\Psi_n(t)$ заключаем

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \Psi_n(t) dt. \quad (47.14)$$

Поэтому из (47.13) и (47.14)

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)] \Psi_n(t) dt. \end{aligned} \quad (47.15)$$

Покажем, что интеграл в правой части (47.15) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и притом, если $f(x)$ непрерывна в (a, b) , то стремится равномерно на $[a, \beta]$ при $a < a < \beta < b$. С этой целью выберем число δ так, чтобы

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x+0)| &< \varepsilon, \\ |f(x-t) - f(x-0)| &< \varepsilon \end{aligned} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \delta. \quad (47.16)$$

Это возможно для всякого фиксированного x ; если же $f(x)$ непрерывна на (a, b) (в этом случае $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$), то можно выбрать δ так, чтобы оно не зависело от x , $a \leq x \leq \beta$ и неравенства (47.16) были справедливы. Выбрав так δ , разобьем интеграл формулы (47.15) на два: интеграл I_1 по интервалу $(0, \delta)$ и интеграл I_2 по интервалу (δ, π) . Имеем на основании (47.16)

$$|I_1| < 2\varepsilon \int_0^{\pi} |\Psi_n(t)| dt < 2\varepsilon C$$

в силу свойства 2) функции $\Psi_n(t)$.

Для I_2 находим

$$|I_2| \leq M_n(\delta) \int_{\delta}^{\pi} \{|f(x+t)| + |f(x+0)| + |f(x-t)| + |f(x-0)|\} dt. \quad (47.17)$$

При постоянном x интеграл в (47.17) конечен, а множитель перед ним стремится к нулю в силу свойства 3) функций $\Psi_n(t)$, значит, $I_2 \rightarrow 0$. Кроме того, если $x \in [a, \beta] \subset (a, b)$, то интеграл в (47.17) при любом x не превосходит

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt + 2\pi |f(x)|,$$

а так как $f(x)$ непрерывна на (a, b) и, следовательно, ограничена на $[a, \beta]$, то $I_2 \rightarrow 0$ равномерно. Лемма полностью доказана.

Для того чтобы вывести из этой леммы сформулированную выше теорему Фейера, достаточно доказать, что ядро Фейера удовлетворяет свойствам,

указанным в лемме; тогда, полагая $f_n(x) = \sigma_n(x)$, придем к нужному заключению.

Но свойство 1) для ядер Фейера выполнено; 3) и 4) нами были доказаны (см. (47.9) и (47.10)), а 2) следует из того, что для ядер Фейера

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi$$

в силу $K_n(t) \geq 0$ и свойства 3). Итак, теорема Фейера полностью доказана.

§ 48. Следствия теоремы Фейера

Из теоремы Фейера можно вывести ряд интересных следствий. Прежде всего она дает новое доказательство классической теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическим полиномом (см. § 27).

Действительно, так как мы убедились, что для непрерывной $f(x)$ функции $\sigma_n(x)$ равномерно стремятся к $f(x)$, то, выбрав n достаточно большим, можем утверждать, что

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Но $\sigma_n(x)$ есть, очевидно, тригонометрический полином, а потому теорема доказана.

Далее заметим, что метод $(C, 1)$ регулярен (см. Вводный материал, § 6), т. е. сходимость ряда к числу S влечет его суммируемость методом $(C, 1)$ к тому же числу S . Отсюда сразу следует, что:

Если $\sigma(f)$ сходится в точке непрерывности функции $f(x)$, то он сходится именно к $f(x)$; аналогично, в точке разрыва 1-го рода, если $\sigma(f)$ сходится, то непременно к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Наконец, фейеровские суммы позволяют в некоторых случаях составить суждение и об обыкновенных частных суммах ряда Фурье. Так, например, можно доказать теорему:

Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением частные суммы ряда $\sigma(f)$ ограничены в своей совокупности.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что, если

$$m \leq f(x) \leq M, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (48.1)$$

то для фейеровских сумм имеем также

$$m \leq \sigma_n(x) \leq M, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (48.2)$$

Действительно, принимая во внимание положительность ядра Фейера, мы из формулы (47.4) и из (48.1) сразу находим, что

$$m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt \leq \sigma_n(x) \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt,$$

а тогда формула (47.10) сразу показывает справедливость нашего утверждения.

Заметив это, сравним теперь $\sigma_n(x)$ и $S_n(x)$. Мы имеем (см. Вводный материал, § 6)

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (48.3)$$

Отсюда следует

$$|S_n(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|).$$

Но если $f(x)$ с ограниченным изменением, то, как мы знаем (см. § 22),

$$|a_k| \leq \frac{V}{K} \quad \text{и} \quad |b_k| \leq \frac{V}{K},$$

где V — полное изменение $f(x)$; поэтому

$$|S_n(x) - \sigma_n(x)| \leq 2V,$$

откуда

$$2V - M \leq S_n(x) \leq 2V + M. \quad (48.4)$$

Формула (48.4) не только доказывает ограниченность в совокупности частных сумм ряда Фурье для функции с ограниченным изменением, но и указывает границы, в которых они заключены, в зависимости от границ этой функции и ее полного изменения.

З а м е ч а н и е. Мы видели (см. (48.1) и (48.2)), что если $f(x)$ заключена между m и M на отрезке длины 2π , то и $\sigma_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) на этом отрезке заключены между m и M . Для дальнейшего нам будет полезно оценить $\sigma_n(x)$, зная только границы $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$. Докажем, что

Если

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{на} \quad a \leq x \leq b,$$

то для любого $\delta > 0$ найдется такое N_0 (зависящее от δ), что

$$m - \delta \leq \sigma_n(x) \leq M + \delta \quad \text{при} \quad n \geq N_0(\delta), \quad a + \delta \leq x \leq b - \delta. \quad (48.5)$$

Действительно, из (47.4) находим

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(x+u) K_n(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) K_n(u) du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} f(x+u) K_n(u) du = I'_n + I''_n + I'''_n. \end{aligned} \quad (48.6)$$

В силу (47.7)

$$I'_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+u)| du = O\left(\frac{1}{n}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)| du = o(1) \quad (48.7)$$

и такое же заключение имеет место для I'''_n .

Для оценки I''_n заметим, что если $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ и $|u| \leq \delta$, то $x + u \in [a, b]$, а тогда

$$m \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u) du \leq I''_n \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u) du.$$

Но мы знаем (47.11), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u) du = 1.$$

Значит, можно выбрать N_0 (зависящее от δ) столь большим, чтобы, например, иметь

$$m - \frac{\delta}{3} \leq I''_n \leq M + \frac{\delta}{3}, \quad n \geq N_0,$$

и, кроме того (см. (48.7)),

$$|I'_n| \leq \frac{\delta}{3} \quad \text{и} \quad |I'''_n| < \frac{\delta}{3},$$

откуда в силу (48.6) видим, что (48.5) доказано.

§ 49. Теорема Фейера—Лебега

Теорема Фейера, доказанная в § 47, дает возможность судить о суммируемости ряда $\sigma(f)$ лишь в тех точках, где $f(x)$ либо непрерывна, либо имеет разрывы 1-го рода. Однако произвольная суммируемая функция может не иметь ни одной точки указанного типа. Лебег обобщил результат Фейера и доказал следующую теорему.

Теорема Фейера—Лебега. Для любой суммируемой функции $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется почти всюду методом Фейера к $f(x)$.

Для доказательства теоремы положим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad (49.1)$$

и

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du. \quad (49.2)$$

Докажем, что ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера к $f(x)$ во всякой точке x , где

$$\Phi_x(t) = o(t). \quad (49.3)$$

Для этого заметим (см. § 47), что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt \quad (49.4)$$

и докажем, что при выполнении (49.3) интеграл в правой части (49.4) стремится к нулю. С этой целью заметим, что

$$|K_n(t)| \leq 2n \quad (n \geq 1), \quad (49.5)$$

так как

$$|D_k(t)| \leq k + \frac{1}{2} < 2n \quad \text{для любого} \quad k \leq n,$$

а

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t).$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt \right| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi_x(t)| dt = \frac{2n}{\pi} \Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) = o(1) \quad (49.6)$$

в силу (49.3).

Далее, в силу (47.6)

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^\pi |\varphi_x(t)| \frac{dt}{t^2}. \quad (49.7)$$

В интеграле правой части (49.7) произведем интегрирование по частям; получим, опять опираясь на (49.3) (см. Вводный материал, § 11),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |\varphi_x(t)| \frac{dt}{t^2} &= \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\Phi_x(\pi)}{\pi^2} - \frac{\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \right] + \frac{2\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Phi_x(t) \frac{dt}{t^3} = \\ &= o(1) + \frac{1}{n} o\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^2}\right) = o(1). \end{aligned} \quad (49.8)$$

Из (49.6) и (49.8) в силу (49.4) вытекает

$$\sigma_n(x) - f(x) = o(1)$$

в каждой точке, где выполнено (49.3).

Нам остается убедиться, что условие (49.3) имеет место почти всюду. Но в § 15 Вводного материала было отмечено, что это соотношение выполняется во всякой точке Лебега, следовательно, почти всюду.

Теорема Фейера—Лебега доказана.

В качестве следствия получаем следующую важную теорему.

Если $\sigma(f)$ сходится на некотором множестве E , $mE > 0$, то его сумма равна $f(x)$ почти всюду на E .

Действительно, мы знаем, что метод $(C, 1)$ регулярен. Поэтому в точке, где $\sigma(f)$ имеет некоторую сумму S , он должен суммироваться к тому же числу S методом Фейера. Но так как методом Фейера он суммируется к $f(x)$ почти всюду, то множество точек из E , где сумма ряда $\sigma(f)$ отлична от $f(x)$, имеет меру нуль.

З а м е ч а н и е. Мы видели, что ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера во всякой точке Лебега. Известно, что в этих точках $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла. Можно поставить вопрос, должен ли ряд $\sigma(f)$ суммироваться методом Фейера в такой точке, где это последнее условие выполнено. Лебег (см. Lebesgue^[1]) показал, что это уже не должно иметь места, однако здесь имеет место суммируемость $(C, 2)$.

§ 50. Оценка частных сумм ряда Фурье

В § 49 мы показали, что в точках, где выполнено условие

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| du = o(h) \quad (50.1)$$

ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера. Было также отмечено, что условие (50.1) выполняется почти всюду. Сейчас мы хотим оценить рост частных сумм $S_n(x)$ в этих точках.

Покажем, что во всякой точке x , где выполнено (50.1), имеем

$$S_n(x) = o(\ln n). \quad (50.2)$$

Следовательно, оценка (50.2) также справедлива почти всюду.

Мы видели (см. (37.9)), что

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (50.3)$$

где $o(1)$ стремится к нулю, а δ — любое положительное фиксированное число. Полагая $\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |\varphi(x)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du &= \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| \frac{\sin nu}{u} du + \int_{\frac{1}{n}}^\delta |\varphi(u)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du \leq \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| du + \int_{\frac{1}{n}}^\delta |\varphi(u)| \frac{1}{u} du. \end{aligned} \quad (50.4)$$

Но из (50.1)

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |\varphi(u)| du, \quad (50.5)$$

поэтому (индекс x пока, для краткости, опускаем)

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| du = \Phi\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (50.6)$$

и

$$\int_{\frac{1}{n}}^\delta |\varphi(u)| \frac{du}{u} = \left. \frac{\Phi(t)}{t} \right|_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt. \quad (50.7)$$

Из (50.4), (50.6) и (50.7) следует

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |\varphi(u)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du &\leq \\ &\leq n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\Phi(\delta)}{\delta} + n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt = O(1) + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt. \end{aligned} \quad (50.8)$$

Если при заданном $\varepsilon > 0$ выбрать δ так, чтобы $\Phi(t) < \varepsilon t$ для $0 \leq t \leq \delta$, что возможно в силу (50.1), то

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt < \varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\delta}{n}} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln n \delta = o(\ln n), \quad (50.9)$$

поскольку ε как угодно мало. Но $o(1)$ также есть $o(\ln n)$, поэтому из (50.3), (50.8) и (50.9) находим

$$|S_n(x) - f(x)| = o(\ln n).$$

Но так как x фиксировано, то $f(x)$ постоянно, т. е. $|f(x)| = o(\ln n)$ и окончательно

$$S_n(x) = o(\ln n),$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. В § 36 было доказано, что для ограниченной функции, а значит для непрерывной, имеем при всех x и $n > 1$

$$|S_n(x)| \leq CM \ln n \quad (n = 2, 3, \dots),$$

если $|f(x)| \leq M$ (C — абсолютная константа). Если $f(x)$ непрерывна, то условие (50.1) выполняется, и даже равномерно, а потому для непрерывных функций ранее найденная оценка заменяется более сильной: вместо $O(\ln n)$ появляется $o(\ln n)$.

§ 51. Множители сходимости

Принято говорить, что числа $\{\mu_n\}$ являются *множителями сходимости* для некоторого ряда

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

на отрезке $[a, b]$, если ряд

$$\sum u_n(x) \mu_n$$

сходится почти всюду на $[a, b]$.

Результаты §§ 49 и 50 позволяют доказать, что в качестве множителей сходимости для ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ могут быть выбраны числа

$$\mu_n = \frac{1}{\ln n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

(μ_0 и μ_1 можно взять как угодно), т. е. имеет место

Т е о р е м а. Если a_k и b_k — коэффициенты Фурье ($k = 1, 2, \dots$), то ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{\ln k}$$

сходится почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Для доказательства заметим, что в § 50 было доказано $S_n(x) = o(\ln n)$ почти всюду. Поэтому в силу того, что последовательность μ_n выпукла (определение и свойства выпуклых последовательностей даны в § 3 Вводного материала), то остается, полагая $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, применить теорему 6 (см. Добавления, § 12).

§ 52. Сравнение ядер Дирихле и Фейера

Мы знаем (см. §§ 45 и 46), что существуют непрерывные функции, у которых ряд Фурье расходится в некоторой точке. С другой стороны, для любой непрерывной функции $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется к $f(x)$ во всякой точке (см. § 47).

Мы хотим объяснить, почему происходит такое явление, а для этого сравним ядра Дирихле и Фейера. Как известно,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \quad (52.1)$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt, \quad (52.2)$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле, а $K_n(u)$ — ядро Фейера.

Если в точке x_0 ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$, то это значит, что $S_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$; если он суммируется методом Фейера к $f(x)$, то $\sigma_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

Естественно поэтому поставить вопрос так: пусть $f(x)$ непрерывна и

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_n(t-x) dt, \quad (52.3)$$

где $\Phi_n(u)$ — некоторая функция, которую мы также будем называть *ядром*; спросим себя, от каких свойств этого ядра зависит равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

или существование таких точек x_0 , где $f_n(x_0)$ не стремится к $f(x_0)$ или вообще не стремится ни к какому пределу?

Прежде чем ответить на этот вопрос, покажем, что и проблема сходимости ряда Фурье по произвольной ортогональной системе приводит к задаче того же типа, а потом будем решать обе эти задачи вместе.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая ортонормированная система на (a, b) . Желая изучить сходимость ряда Фурье от некоторой функции $f(x)$ по этой системе, мы рассматриваем частную сумму этого ряда, т. е.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

иначе говоря,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt = \int_a^b f(t) \left[\sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right] dt.$$

Полагая

$$\Phi_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x),$$

мы назовем функцию $\Phi_n(t, x)$ ядром системы $\{\varphi_n(x)\}$. Мы имеем

$$S_n(x) = \int_a^b f(t) \Phi_n(t, x) dt. \quad (52.4)$$

Лебег первый обратил внимание на важность изучения поведения функций вида

$$e_n(x) = \int_a^b |\Phi_n(t, x)| dt, \quad (52.5)$$

которые теперь обычно называют «функциями Лебега» для заданной системы. Роль этих функций в вопросе о сходимости ряда Фурье станет совершенно ясной, если доказать теорему (см. Lebesgue^[21]).

Т е о р е м а. Если для некоторой точки x_0 последовательность $e_n(x_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) неограничена, то существует непрерывная функция $f(x)$, для которой ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ неограниченно расходится в точке x_0 .

Эта теорема будет мгновенно доказана, если мы установим справедливость следующего более общего предложения:

Л е м м а. Пусть

$$f_n(x, f) = \int_a^b f(t) \Phi_n(t, x) dt, \quad (52.6)$$

где $\Phi_n(t, x)$ при каждом фиксированном x суммируема по переменному t , а $f(t)$ ограничена. Тогда, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} e_n(x_0) = +\infty, \quad (52.7)$$

то найдется непрерывная функция $f(x)$, для которой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0, f)| = +\infty. \quad (52.8)$$

Действительно, прежде всего, полагая при заданном n

$$g(t) = \text{sign } \Phi_n(t, x_0),$$

имеем

$$f_n(x_0, g) = \int_a^b g(t) \Phi_n(t, x_0) dt = \int_a^b |\Phi_n(t, x_0)| dt = e_n(x_0). \quad (52.9)$$

Значит, существует для всякого n такая функция $g(t)$, что $|g(t)| \leq 1$ и для нее

$$f_n(x_0, g) = e_n(x_0). \quad (52.10)$$

Если бы это была одна и та же функция $g(t)$ для всех n и если бы она была непрерывна, то теорема была бы уже доказана, так как в силу (52.7) мы имели бы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0, g)| = +\infty.$$

Поэтому прежде всего позаботимся о том, чтобы заменить $g(t)$ непрерывной функцией $g^*(t)$, для которой $f_n(x_0, g^*)$ «велико», а затем будем переходить от разных функций для разных n к одной функции.

Подберем сначала для заданного n непрерывную $g^*(t)$ так, чтобы для $f_n(x, g^*)$ иметь

$$f_n(x_0, g^*) \geq \frac{1}{2} e_n(x_0). \quad (52.11)$$

Для этого достаточно взять такое ε , что

$$\int_E |\Phi_n(t, x_0)| dt \leq \frac{1}{4} e_n(x_0), \quad (52.12)$$

если $mE < \varepsilon$, что возможно, так как при фиксированных n и x_0 функция под знаком интеграла есть суммируемая функция от t , а потому ее интеграл как угодно мал, если множество, по которому интегрируют, имеет достаточно малую меру. В силу C -свойства мы можем найти непрерывную функцию $g^*(t)$, совпадающую с $g(t)$ на совершенном множестве P , $mP > (b-a) - \varepsilon$, и такую, что $|g^*(t)| \leq 1$. Тогда для нее в силу (52.6)

$$f_n(x_0, g^*) = \int_a^b g^*(t) \Phi_n(t, x_0) dt.$$

Из (52.12) следует, что

$$\begin{aligned} |f_n(x_0, g^*) - f_n(x_0, g)| &= \left| \int_{CP} [g^*(t) - g(t)] \Phi_n(t, x_0) dt \right| \leq \\ &\leq 2 \int_{CP} |\Phi_n(t, x_0)| dt \leq \frac{1}{2} e_n(x_0) \end{aligned} \quad (52.13)$$

и, значит, из (52.9) и (52.13) вытекает (52.11).

Обозначим для каждого n через $g_n(t)$ функцию, которая обладает свойствами:

- а) $g_n(t)$ непрерывна,
- б) $|g_n(t)| \leq 1$,
- в) $f_n(x_0, g_n) > \frac{1}{2} e_n(x_0)$.

Мы уже видели, что такую функцию для каждого n построить можно. Пусть теперь ε_n — последовательность чисел таких, что

$$\varepsilon_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty, \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \leq \frac{1}{6} \varepsilon_n \quad (52.14)$$

(например, можно взять $\varepsilon_n = \frac{1}{7^n}$); пусть n_k — возрастающая последовательность целых чисел, которые мы подберем позже. Тогда, полагая

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_{n_k}(x), \quad (52.15)$$

мы видим, что $f(x)$ непрерывна, так как $g_n(x)$ непрерывны и все $|g_n(x)| \leq 1$ и $\sum \varepsilon_k < +\infty$, а значит, ряд (52.15) сходится равномерно. Ясно, что

$$f_n(x_0, f) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_{n_k}(t) \Phi_n(t, x_0) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \int_a^b g_{n_k}(t) \Phi_n(t, x_0) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_n(x_0, g_{n_k}).$$

Здесь почленное интегрирование законно в силу равномерной сходимости ряда (52.15).

Покажем теперь, что при разумном подборе чисел n_k будем иметь

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0, f)| = +\infty. \quad (52.8)$$

Если хотя бы для одной из функций $g_m(x)$ имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0, g_m)| = +\infty,$$

то теорема уже доказана. Допустим, что этого нет. Обозначим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0, g_m)| = \gamma_m. \quad (52.16)$$

Выберем по индукции числа n_k так, чтобы

$$\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \rightarrow \infty \quad (52.17)$$

и

$$\sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p} \leq \frac{1}{12} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0). \quad (52.18)$$

Это возможно, так как $\{\varrho_n(x_0)\}$ неограничена в силу (52.7) и, значит, числа n_k можно подобрать так, чтобы $\varrho_{n_k}(x_0) \rightarrow \infty$ и притом достаточно быстро для того, чтобы условия (52.17) и (52.18) были удовлетворены. Так как

$$\left| f_n \left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p} \right) \right| = \left| \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p f_n(x_0, g_{n_p}) \right| < 2 \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p}$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу (52.16), то можно взять n_k столь большим, что

$$\left| f_{n_k} \left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p} \right) \right| < 2 \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p} \leq \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \quad (52.19)$$

в силу (52.18).

С другой стороны,

$$\left| f_{n_k} \left(x_0, \sum_{p=k+1}^{\infty} \varepsilon_p g_{n_p} \right) \right| < \sum_{p=k+1}^{\infty} \varepsilon_p \varrho_{n_k}(x_0) \leq \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0), \quad (52.20)$$

потому что $|g_{n_p}(x)| \leq 1$, а значит,

$$\left| \int_a^b g_{n_p}(t) \Phi_{n_k}(t, x_0) dt \right| \leq \int_a^b |\Phi_{n_k}(t, x_0)| dt = \varrho_{n_k}(x_0)$$

и, кроме того, имеем (52.14).

Отсюда в силу свойства в) функций $g_n(x)$, (52.19) и (52.20)

$$\begin{aligned} \left| f_{n_k}(x_0, f) \right| &\geq f_{n_k}(x_0, \varepsilon_k g_{n_k}) - \left| f_{n_k}\left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p}\right) \right| - \left| f_{n_k}\left(x_0, \sum_{k+1}^{\infty} \varepsilon_p g_{n_p}\right) \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) - \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) - \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \geq \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0), \end{aligned}$$

а это стремится к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$ в силу (52.17). Значит, (52.8) справедливо и лемма доказана*).

Отсюда немедленно вытекает и справедливость формулированной выше теоремы Лебега. Действительно, если в доказанной лемме роль $\Phi_n(t, x)$ играет ядро заданной ортогональной системы, то $f_n(t, f)$ превращается в частную сумму ряда Фурье от $f(x)$ по этой системе (в силу (52.4) и (52.3)), а потому, если в некоторой точке выполнено (52.7), то найдется непрерывная $f(x)$ с расходящимся в этой точке рядом Фурье. Таким образом теорема Лебега доказана.

Рассмотрим теперь специально случай тригонометрической системы. Если ее нормировать, т. е. взять систему

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots,$$

то роль ее ядра должна играть функция

$$\begin{aligned} \Phi_n(t, x) &= \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt}{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) = \frac{1}{\pi} D_n(t-x), \end{aligned}$$

а потому функции Лебега (см. (52.5)) имеют вид

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-x)| dt.$$

Но в силу периодичности $D_n(u)$ имеем

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt,$$

т. е. функции Лебега не зависят от x и превращаются в ранее рассмотренные нами константы Лебега L_n (см. § 35). Но мы знаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = +\infty$

*) Так как при умножении $f(t)$ на некоторую константу $f_n(x, f)$ умножится на ту же константу в силу (52.6), то можно всегда найти $f(x)$, удовлетворяющую условиям леммы, и такую, что $|f(t)| \leq 1$. Это замечание не понадобится для теоремы Лебега, но будет использовано позже в главе IV.

(потому что $L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n$), и поэтому теперь мы видим, что существование непрерывных функций с рядами Фурье, расходящимися в некоторой точке, объясняется именно тем, что константы Лебега неограниченно растут с ростом n . Заметим еще, что так как

$$e_n(x) = L_n$$

при любом x , то можно для любой точки x найти непрерывную $f(x)$ с рядом Фурье, расходящимся в этой точке.

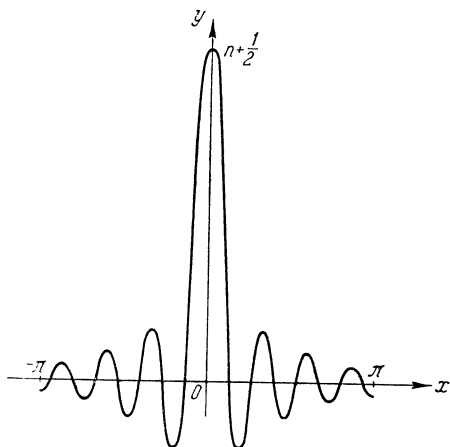


Рис. 9

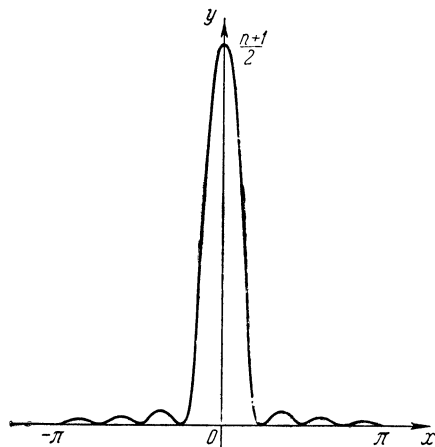


Рис. 10

Теперь вернемся к вопросу о суммируемости ряда Фурье методом Фейера. Сравнивая формулы (52.5) и (52.2), мы видим, что если бы для

$$e_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t-x)| dt$$

хотя бы при одном значении x_0 было выполнено (52.7), то можно было бы найти непрерывную $f(x)$, для которой $\sigma_n(x, f)$ не стремилось бы ни к какому конечному пределу при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\sigma(f)$ был бы несуммируем методом Фейера в этой точке. Но в силу периодичности $K_n(u)$ и его положительности имеем

$$e_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt,$$

а тогда в силу свойства 3) ядер Фейера (см. § 47)

$$e_n(x) \equiv 1$$

для всех n и x . Таким образом, для ядра Фейера выполнение (52.7) ни в какой точке невозможно.

В § 2 главы VII мы увидим, почему метод Фейера применим почти всюду (теорема Фейера—Лебега, § 49), тогда как существуют всюду расходящиеся ряды Фурье (глава V, § 20) — это также результат разного поведения ядер Фейера и Дирихле.

Заканчивая этот параграф, мы считаем целесообразным изобразить геометрически ядра Дирихле и Фейера (см. рис. 9 и 10).

§ 53. Суммирование рядов Фурье методом Абеля—Пуассона

Укажем здесь еще один классический и очень важный метод суммирования рядов Фурье. Для этого напомним (см. Вводный материал, § 7), что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ называется суммируемым методом Абеля в точке x_0 к числу S , если при всяком r , $0 \leq r < 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) r^n$ сходится и, полагая

$$S(x_0, r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) r^n,$$

имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1} S(x_0, r) = S.$$

Пуассон применил этот метод суммирования к рядам Фурье, поэтому указанный метод, когда его прилагают к тригонометрическим рядам, обычно называют *методом Пуассона или Абеля—Пуассона*.

Так как мы знаем (см. Вводный материал, § 7), что метод Абеля сильнее метода (C, 1), то из теорем Фейера и Фейера—Лебега (см. §§ 47 и 49) мгновенно следует

Т е о р е м а. *Для любой суммируемой $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется почти всюду методом Абеля—Пуассона к этой функции $f(x)$; он суммируется к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ во всякой точке разрыва 1-го рода и к $f(x)$ во всякой точке непрерывности.*

Может показаться, что после этих теорем уже больше нечего сказать о суммировании рядов Фурье методом Пуассона; однако мы увидим в § 55 и § 56, что можно получить гораздо более глубокие результаты. Сначала выведем те вспомогательные формулы, которые нам будут для этого нужны.

Для произвольного тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (53.1)$$

назовем «пуассоновскими суммами» функции

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n, \quad (53.2)$$

когда ряд в правой части (53.2) сходится. В случае, когда ряд (53.1) есть ряд Фурье от некоторой функции $f(x)$, эти функции можно выразить через $f(x)$ в интегральной форме, подобно тому, как это делалось для частных сумм и фейеровских сумм ряда Фурье. Этим мы займемся в следующем параграфе. Далее в § 57 воспользуемся полученными результатами для решения одной важной задачи, называемой проблемой Дирихле.

§ 54. Ядро Пуассона и интеграл Пуассона

Прежде всего найдем удобное выражение для $f(r, x)$, если (53.1) есть $\sigma(f)$. Имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

а потому

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-x) dt.$$

Но так как $0 \leq r < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x)$ при фиксированном r сходится равномерно относительно t , а потому по теореме Лебега (Вводный материал, § 14) его можно почленно интегрировать даже после умножения на $f(x)$; поэтому

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x) \right] dt. \quad (54.1)$$

Найдем теперь более простое выражение для ряда, стоящего в квадратных скобках в (54.1). Пусть

$$P(r, \alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha.$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

и положим $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Если $|z| = r < 1$, то этот ряд сходится и

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} = \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1-r^2 + 2ir \sin \alpha}{2[1-2r \cos \alpha + r^2]}.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Поэтому, отделяя действительные и чисто мнимые части, найдем

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \frac{1-r^2}{2[1-2r \cos \alpha + r^2]}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = -\frac{r \sin \alpha}{1-2r \cos \alpha + r^2}.$$

Итак, мы установили, что

$$P(r, \alpha) = \frac{1-r^2}{2[1-2r \cos \alpha + r^2]}. \quad (54.2)$$

Это выражение принято называть *ядром Пуассона*, а выражение

$$Q(r, \alpha) = \frac{r \sin \alpha}{1-2r \cos \alpha + r^2} \quad (54.3)$$

сопряженным с ним ядром.

Для всего дальнейшего будет очень важен тот факт, что ядро Пуассона при $0 \leq r < 1$ есть положительная величина (как и ядро Фейера). В самом деле, так как

$$1-r^2 > 0 \text{ и } 1-2r \cos \alpha + r^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0,$$

то $P(r, \alpha) > 0$ при $0 \leq r < 1$.

Вернемся к формуле (54.1). Имеем

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, t-x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt. \quad (54.4)$$

Интеграл в правой части (54.4) называется *интегралом Пуассона*.

Очень важно уяснить себе геометрический смысл ядра Пуассона (см. рис. 11). С этой целью возьмем на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом 1; если через точку M с полярными координатами (r, ω) провести радиус и взять перпендикуляр к нему, то, обозначая через Q одну из точек его пересечения с окружностью, найдем

$$\overline{MQ} = 1 - r^2.$$

Если P — точка с полярными координатами $(1, t)$, то

$$\overline{MP}^2 = 1 - 2r \cos(\omega - t) + r^2,$$

а потому

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\omega - t) + r^2} = \left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}} \right)^2.$$

Таким образом, мы снова видим, что ядро Пуассона есть положительная величина, а интеграл Пуассона можно записать в виде

$$f(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}} \right)^2 dt.$$

Теорему § 53 можно было бы высказать так: если точка $M(r, \omega)$ стремится к точке $P(1, \omega)$, т. е. к точке окружности, лежащей на одном радиусе с ней, то почти для всех значений ω имеем

$$f(r, \omega) \rightarrow f(\omega) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1$$

и это верно, в частности, для всех тех ω , где $f(\omega)$ непрерывна. Но мы хотим показать, что имеет место значительно более общее предложение. К этому сейчас и переходим.

§ 55. Поведение интеграла Пуассона в точках непрерывности функции

Докажем следующую теорему Фату (см. Fatou^[1]).

Теорема. Если $f(\omega)$ непрерывна в некоторой точке $P(1, \omega_0)$, то для интеграла Пуассона

$$f(r, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \omega - t) dt \quad (55.1)$$

имеем

$$f(r, \omega) \rightarrow f(\omega_0)$$

как бы точка $M(r, \omega)$ ни стремилась к $P(1, \omega_0)$, лишь бы она оставалась внутри окружности радиуса 1.

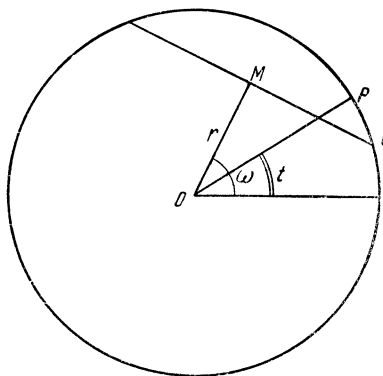


Рис. 11

Прежде всего отметим следующие свойства ядра Пуассона:

а) $P(r, t) \geq 0$ при любом t и $0 \leq r < 1$.

б) Имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1.$$

Действительно, из (54.4), полагая $f(t) \equiv 1$, найдем

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t - \omega) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt. \quad (55.2)$$

в) Если $|t| \geq \delta$, то имеем

$$m(r, \delta) = \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} P(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1. \quad (55.3)$$

Действительно,

$$1 - 2r \cos t + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 \quad \text{при} \quad \delta \leq |t| \leq \pi,$$

а потому

$$0 \leq P(r, t) \leq \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \delta + r^2)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Отсюда и из б) сразу следует для любого $\delta > 0$

$$\text{г)} \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} P(r, t) dt = 1. \quad (55.4)$$

Действительно, в силу четности $P(r, t)$ имеем из б)

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(r, t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} P(r, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P(r, t) dt,$$

а последний интеграл не превосходит $\frac{2}{\pi} m(r, \delta)$.

Теперь для доказательства теоремы заметим сначала, что, умножив (55.2) на $f(\omega_0)$, имеем

$$f(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0) P(r, t - \omega) dt.$$

Вычитая это равенство из (55.1), находим

$$f(r, \omega) - f(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(\omega_0)] P(r, t - \omega) dt. \quad (55.5)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем δ так, чтобы

$$|f(t) - f(\omega_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t - \omega_0| < \delta, \quad (55.6)$$

и разобьем интеграл (55.5) на три: по интервалу $\omega_0 - \delta < t < \omega_0 + \delta$ и по интервалам $(-\pi < t < \omega_0 - \delta)$ и $(\omega_0 + \delta < t < \pi)$. Имеем в силу положительности ядра Пуассона, (55.6) и (55.2)

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} [f(t) - f(\omega_0)] P(r, t - \omega) dt \right| < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} P(r, t - \omega) dt < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t - \omega) dt = \varepsilon.$$

Что же касается интегралов по остальным интервалам, то на них $|t - \omega| \geq \delta$, а потому в силу (55.3) можно добиться, чтобы

$$P(r, t - \omega) < \varepsilon,$$

если только r взять достаточно близко к 1. Тогда каждый из этих интегралов по модулю не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|f(t)| + |f(\omega_0)|] dt,$$

т. е. может быть сделан как угодно малым.
Теорема доказана.

§ 56. Поведение интеграла Пуассона в общем случае

Мы убедились в § 55, что если $f(\omega)$ непрерывна при $\omega = \omega_0$, то интеграл Пуассона стремится к $f(\omega_0)$ каким бы путем точка $M(r, \omega)$ ни стремилась к точке $P(1, \omega_0)$ (оставаясь внутри единичной окружности).

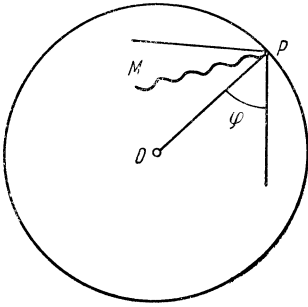


Рис. 12

В случае, когда $f(\omega)$ не является непрерывной при $\omega = \omega_0$, дело обстоит сложнее. Однако и здесь можно получить хорошие результаты, если только устремлять M к P не по каким угодно, а только по некасательным к окружности путям. Это значит, что мы разрешаем точке M двигаться к P , оставаясь все время внутри некоторого угла величины $2\varphi < \pi$ с биссектрисой, совпадающей с OP (см. рис. 12).

Прежде чем изучать поведение интеграла Пуассона в общем случае, докажем одну теорему Фату, касающуюся поведения частной производной от $f(r, \omega)$ по ω .

Теорема 1. Если $f(\omega)$ имеет в точке $P(1, \omega_0)$ конечную производную, то

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \rightarrow f'(\omega_0),$$

если точка $M(r, \omega) \rightarrow P(1, \omega_0)$ по любому некасательному пути.

Чтобы убедиться в этом, докажем сначала лемму:

Лемма 1. Пусть $f(u)$ имеет ограниченную производную $f'(\omega)$ на некотором интервале (ω', ω'') и пусть $f'(\omega)$ непрерывна в некоторой точке ω_0 этого интервала. Тогда

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \rightarrow f'(\omega_0),$$

когда $M(r, \omega) \rightarrow P(1, \omega_0)$ как угодно, лишь бы она оставалась внутри единичной окружности.

Мы имеем из (55.1)

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt. \quad (56.1)$$

Так как

$$\frac{\partial P(r, u)}{\partial u} = \frac{-(1 - r^2) 2r \sin u}{[1 - 2r \cos u + r^2]^2}, \quad (56.2)$$

то $\frac{\partial P(r, u)}{\partial u}$ есть нечетная функция, отрицательная или равная нулю на $[0, \pi]$, причем для любого $\delta > 0$ имеем

$$\max_{\delta \leq |u| \leq \pi} \left| \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right| \leq \frac{2(1 - r^2)}{[1 - 2r \cos \delta + r^2]^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1. \quad (56.3)$$

Выберем δ так, чтобы $(\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta)$ содержался внутри (ω', ω'') и разобьем интеграл (56.1) на два по интервалу $(\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta)$ и по оставшейся части окружности. Во втором интеграле при любом $\varepsilon > 0$, как только M станет достаточно близкой к P , множитель $\frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega}$ в силу (56.3) станет по модулю меньше ε , а значит, весь этот интеграл будет не превосходить $\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$. Что же касается первого интеграла, то, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt &= -\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial t} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} [f(t) P(r, t - \omega)] \Big|_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f'(t) P(r, t - \omega) dt. \end{aligned}$$

Здесь обинтегрированный член стремится к нулю, когда $M \rightarrow P$, потому что ядро Пуассона стремится к 0, а $f(t)$ ограничена, что же касается интеграла, то его можно рассматривать как интеграл Пуассона от функции, равной $f'(t)$ на $(\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta)$ и нулю на оставшейся части окружности; эта функция, по предположению, непрерывна при $\omega = \omega_0$, а потому, на основании результатов предыдущего параграфа, этот интеграл стремится к $f'(\omega_0)$, как бы M ни стремилось к P .

Таким образом наше утверждение относительно $\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega}$ справедливо, и лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Следовательно, мы теперь откажемся от гипотезы, что $f'(\omega)$ непрерывна в ω_0 , а ограничимся тем, что она существует и конечна; зато будем рассматривать движение по некасательным путям.

Для простоты рассуждений предположим $\omega_0 = 0$ и $f(0) = f'(0) = 0$ (это не уменьшает общности, так как можно было бы рассмотреть вместо $f(\omega)$ функцию $f_1(\omega) = f(\omega) - f(0) - \omega f'(0)$ и изучить для нее поведение интеграла Пуассона).

Итак, мы должны доказать, что если $f(0) = f'(0) = 0$, то

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \rightarrow 0, \quad (56.4)$$

если $M(r, \omega) \rightarrow P(1, 0)$ по любому некасательному пути.

Прежде всего заметим, что в силу наших условий имеем $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{f(t)}{t} \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq \delta \quad (56.5)$$

Для дальнейшего удобно считать $\delta < \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\Psi(t) = 0$ на $(-\delta, \delta)$, $\Psi(t) = f(t)$ на $\delta \leq |t| \leq \pi$ и $\Psi(t + 2\pi) = \Psi(t)$. Ясно тогда, что, обозначая через $\Psi(r, \omega)$ ее интеграл Пуассона, имеем

$$\frac{\partial \Psi(r, \omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt. \quad (56.6)$$

С другой стороны, так как $\Psi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1 на $(-\delta, \delta)$ и $\Psi'(0) = 0$, то $\frac{\partial \Psi(r, \omega)}{\partial \omega} \rightarrow 0$, когда $M(r, \omega) \rightarrow P(1, 0)$ как угодно. Отсюда следует, что интеграл в правой части (56.6) стремится к нулю, а потому из (56.1) следует, что (56.4) будет иметь место, если мы убедимся, что интеграл

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt$$

может быть сделан меньше $C\varepsilon$, где C постоянное. Но в силу (56.5) имеем

$$|I| < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| t \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} \right| dt.$$

Мы сейчас докажем, что выражение

$$Q = t \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} \quad (56.7)$$

остается ограниченным на $-\delta \leq t \leq \delta$, когда точка $M(r, \omega) \rightarrow P(1, 0)$ по любому некасательному пути.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что на основании (56.2)

$$|Q| = |t| \frac{|2r \sin(t - \omega)(1 - r^2)|}{|e^{it} - re^{i\omega}|^2} \leq \frac{2|t| |\sin(t - \omega)|}{|e^{it} - re^{i\omega}|^2}.$$

Так как

$$|e^{it} - re^{i\omega}| = |e^{i(t-\omega)} - r| \geq |\sin(t - \omega)|,$$

потому что модуль комплексного числа не меньше модуля его мнимой части, то

$$|Q| \leq \frac{2|t|}{|e^{it} - re^{i\omega}|}.$$

Кроме того, заметим, что $\delta \leq \frac{\pi}{2}$, а потому $|t| \leq \frac{\pi}{2} |\sin t|$, откуда

$$|Q| \leq \pi \frac{|\sin t|}{|e^{it} - re^{i\omega}|}. \quad (56.8)$$

Мы можем ограничиться рассмотрением случая $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$, поскольку $M(r, \omega) \rightarrow P(1, 0)$. Рис. 13 выполнен для $\omega > 0$, но случай $\omega < 0$ рассматривается совершенно аналогично.

Так как речь будет идти о некасательных путях, то существует угол KPK' с вершиной в P и биссектрисой OP такой, что точка M при своем приближении к P не может выйти из этого угла. Обозначая $\alpha = KPy'$, где Py' параллельна к оси Oy , проходящая через P , видим, что вектор PM образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ , где $\varphi \geq \frac{\pi}{2} + \alpha$ (если $\omega < 0$, то будем иметь $\varphi \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha$).

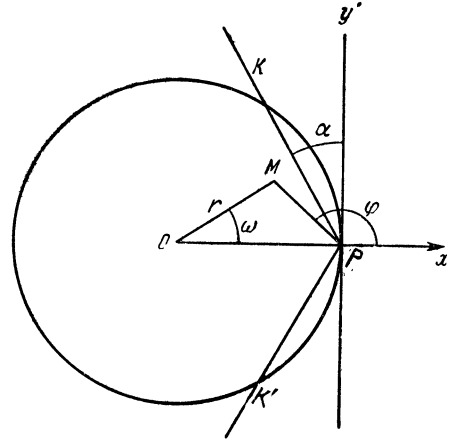


Рис. 13

Отсюда ясно, что $re^{i\omega} = 1 + \rho e^{i\varphi}$, где ρ — длина вектора MP и $\frac{\pi}{2} + \alpha \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha$, т. е. $\alpha \leq \varphi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \alpha$.

Таким образом,

$$\rho e^{i\varphi} = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = i\rho e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = i\rho e^{i\psi},$$

где $\alpha \leq \psi \leq \pi - \alpha$. Поэтому

$$\begin{aligned} |e^{it} - re^{i\omega}| &= |e^{it} - 1 - i\rho e^{i\psi}| = \left| \frac{e^{it} - 1}{i} e^{-i\psi} - \rho \right| = \\ &= \left| \frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{2i} 2e^{i(\frac{t}{2} - \psi)} - \rho \right| = \left| 2 \sin \frac{t}{2} e^{i(\frac{t}{2} - \psi)} - \rho \right| \geq \\ &\geq 2 \left| \sin \frac{t}{2} \sin \left(\frac{t}{2} - \psi \right) \right|. \end{aligned} \quad (56.9)$$

(Здесь снова пользуются тем, что модуль комплексного числа не меньше модуля его мнимой части.)

Теперь из (56.8) и (56.9) заключаем

$$|Q| \leq \pi \frac{|\sin t|}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \left| \sin \left(\frac{t}{2} - \psi \right) \right|} \leq \frac{\pi}{\left| \sin \left(\frac{t}{2} - \psi \right) \right|}.$$

Если $|t| < \alpha$, то $\left| \sin \left(\frac{t}{2} - \psi \right) \right| \geq \sin \frac{\alpha}{2}$ и тогда

$$|Q| \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

т. е. Q ограничено. Если же $\delta \geq |t| \geq \alpha$, то при $M(r, \omega) \rightarrow P(1, 0)$ знаменатель в (56.8) ограничен снизу, значит $|Q|$ снова ограничено. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

Пользуясь доказанной теоремой 1, мы можем теперь получить результат, касающийся поведения интеграла Пуассона для любой суммируемой функции $f(x)$. Именно мы докажем следующую теорему, также принадлежащую Фату:

Т е о р е м а 2. *Во всякой точке ω_0 , где $f(\omega)$ является производной от своего неопределенного интеграла, интеграл Пуассона $f(\omega, r) \rightarrow f(\omega_0)$, если точка $M(r, \omega)$ стремится к точке $P(1, \omega_0)$, следуя по любому некасательному пути.*

В частности, отсюда следует, что ряд Фурье от любой суммируемой функции суммируется методом Пуассона к этой функции почти всюду*).

Чтобы убедиться в этом, положим

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(t) dt.$$

Имеем, интегрируя по частям

$$f(r, \omega) = \frac{1}{\pi} [F(t) P(r, t - \omega)] \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial}{\partial t} [P(r, t - \omega)] dt.$$

Обынтегрированный член стремится к нулю, когда $M \rightarrow P(1, \omega_0)$, если только $\omega \neq -\pi$ и $\omega \neq \pi$. Что касается интеграла, то его можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) P(r, t - \omega) dt \right\} = \frac{\partial}{\partial \omega} F(r, \omega), \quad (56.10)$$

а потому на основании только что полученного результата, если $M(r, \omega) \rightarrow P(1, \omega_0)$ по некасательному пути, то выражение (56.10) стремится к $F'(\omega_0)$ всюду, где $F'(x)$ существует и конечна. Следовательно, во всякой точке, где $f(\omega_0) = F'(\omega_0)$, имеем $f(r, \omega) \rightarrow f(\omega_0)$, а это и требовалось доказать.

Так как из теории интеграла Лебега известно, что равенство $F'(\omega) = f(\omega)$ имеет место почти всюду, то отсюда, в частности, вытекает, что почти для всех значений ω

$$f(r, \omega') \rightarrow f(\omega),$$

когда $M(r, \omega') \rightarrow P(1, \omega)$ по любому некасательному пути. Тем более это имеет место, когда $M(r, \omega) \rightarrow P(1, \omega)$ при $r \rightarrow 1$, откуда видно, что теорема § 53 есть следствие теоремы Фату.

Мы теперь укажем на роль, которую играет интеграл Пуассона при решении знаменитой проблемы Дирихле.

§ 57. Проблема Дирихле

Эта проблема была поставлена Дирихле в следующей форме: дан замкнутый контур и функция $f(x)$, непрерывная на нем. Требуется найти функцию, гармоническую**) внутри этого контура и стремящуюся к заданным на

) Более того, он суммируется почти всюду к $f(x)$ методом A^ (см. определение A^* в § 7 Вводного материала).

**) То есть удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

контуре значениям, когда точка любым способом стремится изнутри к периферии.

Рассмотрим тот частный случай, когда рассматриваемый контур есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Если обозначим через x и y декартовы координаты точки $M(r, \omega)$, то будем иметь

$$F(x, y) = f(r, \omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) r^n,$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, и, следовательно, $F(x, y)$ есть действительная часть аналитической внутри круга радиуса 1 функции, определяемой степенным рядом

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n, \quad z = re^{i\omega}.$$

Но известно, что действительная (и мнимая) часть всякой аналитической функции есть функция гармоническая, значит, теорема § 55 позволяет утверждать, что функция $F(x, y)$ дает решение задачи Дирихле для круга.

Если расширить постановку задачи Дирихле, не требуя уже того, чтобы значения функции, заданные на границе, определяли непрерывную функцию, но при этом позволять точке стремиться изнутри к периферии лишь по некасательным путям, то $F(x, y)$ стремится к $f(\omega)$ почти всюду и, таким образом, дает решение обобщенной проблемы Дирихле.

§ 58. Суммирование методом Пуассона продифференцированного ряда Фурье

Пусть

$$\sigma(F) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos nx + B_n \sin nx. \quad (58.1)$$

Мы знаем, что ряд

$$\sum n (B_n \cos nx - A_n \sin nx), \quad (58.2)$$

полученный от дифференцирования (58.1), вовсе не должен быть рядом Фурье, так как его коэффициенты

$$a_n = nB_n \quad \text{и} \quad b_n = -nA_n$$

даже не должны стремиться к нулю. Поэтому к ряду (58.2) нельзя применять предыдущие теоремы. Но имеет место следующая

Теорема Фату. Если в некоторой точке x функция $F(x)$ имеет симметрическую производную, равную числу l , то, продифференцировав ряд $\sigma(F)$, получим ряд, который в точке x суммируется к числу l методом Пуассона.

Так как симметрической производной называется $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$, если этот предел существует, то по условию теоремы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = l. \quad (58.3)$$

Полагая, как всегда

$$F(r, x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) r^n,$$

можем написать

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos nx - A_n \sin nx) r^n. \quad (58.4)$$

Здесь почленное дифференцирование законно, так как при $r < 1$ ряд (58.4) сходится равномерно относительно x . Нам надо доказать, что

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \rightarrow l \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1.$$

Но

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial P(r, t-x)}{\partial x} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial P(r, t-x)}{\partial t} dt, \quad (58.5)$$

а так как $\frac{\partial P(r, u)}{\partial u}$ есть функция нечетная (см. (56.2)), то

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+u) \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [F(x+u) - F(x-u)] \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du.$$

В силу (56.3) для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно выбрать $r_0 < 1$ так, чтобы $\left| \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right| < \varepsilon$ для $\delta \leq u \leq \pi$ и $r_0 \leq r < 1$. Поэтому

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [F(x+u) - F(x-u)] \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du + I_1, \quad (58.6)$$

где

$$|I_1| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)| dt < C\varepsilon, \quad (58.7)$$

где C — постоянно. В силу (58.3) число δ можно, кроме того, предположить столь малым, чтобы

$$\left| \frac{F(x+u) - F(x-u)}{2u} - l \right| < \varepsilon. \quad (58.8)$$

Тогда из (58.6), (58.7) и (58.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{F(x+u) - F(x-u)}{2u} 2u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du + I_1 = \\ &= I_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left[\frac{F(x+u) - F(x-u)}{2u} - l \right] 2u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du - \\ &\quad - \frac{l}{\pi} \int_0^{\delta} 2u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (58.9)$$

В силу (58.8) имеем

$$|I_2| < \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\delta} \left| u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right| du < C_1 \varepsilon, \quad (58.10)$$

где C_1 постоянно. Действительно, из (56.2) видим, что

$$\left| u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right| \leq \left| \frac{2u \sin u}{\sin^2 u} \right| \leq \pi, \quad \text{для} \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Для I_3 , интегрируя по частям, находим

$$I_3 = -\frac{2l}{\pi} \int_0^\delta u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du = -\frac{2l}{\pi} \delta P(r, \delta) + \frac{2l}{\pi} \int_0^\delta P(r, u) du \rightarrow l. \quad (58.11)$$

в силу того, что $P(r, \delta) \rightarrow 0$ и формулы (55.4).

Теперь из (58.7), (58.10) и (58.11) получаем

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \rightarrow l \quad \text{при } r \rightarrow 1,$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Так как наличие обыкновенной производной в некоторой точке обеспечивает существование симметрической производной в той же точке и их равенство, то отсюда, в частности, следует:

Если в некоторой точке x производная $F'(x)$ существует и конечна, то $\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \rightarrow F'(x)$ при $r \rightarrow 1$, т. е. там, где $F(x)$ имеет конечную производную, проинтегрированный ряд Фурье суммируется к этой производной методом Пуассона.

В § 56 мы, в сущности, уже получили этот результат (только формулировали его в других терминах). Теперь мы видим, что требование существования $F'(x)$ можно заменить более слабым — требованием существования симметрической производной. Зато в теореме настоящего параграфа уже $M(r, x_0) \rightarrow P(1, x_0)$ по радиальному пути, а в § 56 допускалось $M(r, x) \rightarrow P(1, x_0)$ по любому некасательному пути.

§ 59*). Интеграл Пуассона—Стилтьеса

Будем называть *интегралом Пуассона—Стилтьеса* выражение

$$u(re^{i\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t - \omega) d\Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$. Интегрируя по частям, получим

$$u(re^{i\omega}) = \frac{1}{\pi} P(r, t - \omega) \Psi(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t - \omega) dt.$$

Если $\omega \neq \pm \pi$, то обинтегрированный член при $r \rightarrow 1$ стремится к нулю. Что касается интеграла, то по теореме 1 § 56 он должен стремиться к $\Psi'(\omega_0)$ во всякой точке ω_0 , где $\Psi'(\omega)$ существует и конечна, если только точка $M(re^{i\omega})$ стремится к точке $P(e^{i\omega_0})$ по любому некасательному пути.

В частности,

$$u(re^{i\omega}) \rightarrow \Psi'(\omega) \quad \text{при } r \rightarrow 1,$$

если $\Psi'(\omega)$ существует и конечна.

Отсюда в качестве следствия получаем: *ряд Фурье—Стилтьеса суммируем методом Абеля—Пуассона почти всюду.*

Для дальнейшего нам будет полезно доказать, что если $\omega \neq \pm \pi$ и $\Psi'(\omega) = +\infty$, то мы имеем

$$u(re^{i\omega}) \rightarrow +\infty \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

*) Этот параграф в первом чтении можно пропустить.

Чтобы убедиться в этом, в силу того, что уже было сказано об обынтегрированном члене, достаточно доказать, что

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t - \omega) dt \rightarrow +\infty \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Это такой же интеграл, как (58.5), поэтому сразу видим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [\Psi(\omega + u) - \Psi(\omega - u)] \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du + I_1 = I_1 + I_2,$$

где $|I_1| < \varepsilon$, если δ фиксировано и r взято достаточно близким к 1. Теперь представим I_2 в виде

$$\begin{aligned} I_2 = & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [\Psi(\omega + u) - \Psi(\omega)] \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du - \\ & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [\Psi(\omega) - \Psi(\omega - u)] \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} du = I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (59.1)$$

Покажем, что $I_3 \rightarrow +\infty$ и $I_4 \rightarrow +\infty$. Доказательство для обоих интегралов совершенно одинаково. Проведем его для I_3 .

Так как $\Psi'(x) = +\infty$, мы можем, если A задано, предположить δ столь малым, что

$$\Psi(\omega + u) - \Psi(\omega) > Au \quad \text{для } 0 \leq u \leq \delta.$$

Имеем

$$I_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\Psi(\omega + u) - \Psi(u)}{u} \left[u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right] du,$$

но $-u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \geq 0$ (см. (56.2)), поэтому

$$I_3 > A \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left[-u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right] du$$

и мы видели (см. (58.11)), что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \left[-u \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right] du \rightarrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow +1,$$

отсюда следует, что при $r \rightarrow 1$ можно сделать $I_3 > \frac{A}{2}$, где A наперед задано, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. То, что ряд Фурье—Стилтьеса или ряд, получающийся после дифференцирования ряда Фурье от функции с ограниченным изменением (см. § 23), может не быть рядом Фурье, видно хотя бы из такого простого примера: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

как мы знаем (см. § 41), есть ряд Фурье от функции, монотонной на $[0, 2\pi]$, и однако после его дифференцирования получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx,$$

который не есть ряд Фурье, поскольку его коэффициенты не стремятся к нулю.

§ 60. Фейеровские и пуассоновские суммы для различных классов функций

Мы докажем сейчас ряд теорем, которые показывают, как можно судить о свойствах функции, изучая последовательность ее фейеровских или пуассоновских сумм.

Теорема 1. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его фейеровских сумм $\{\sigma_n(x)\}$ сходилась равномерно.*

Необходимость условия есть просто теорема Фейера (см. § 47). Для доказательства его достаточности заметим, что если заданный тригонометрический ряд есть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (60.1)$$

а потому для $k \leq n$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t) \cos kt \, dt, \\ \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t) \sin kt \, dt. \end{aligned} \right\} \quad (60.2)$$

Если последовательность $\sigma_n(x)$ равномерно сходится, то, полагая $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$, видим, что $f(x)$ непрерывна. При $n \rightarrow \infty$ из равенств (60.2) путем перехода к пределу получаем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

а это и надо было доказать.

Теорема 2. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от ограниченной функции, необходимо и достаточно, чтобы нашлась константа K , для которой*

$$|\sigma_n(x)| \leq K \quad (n = 1, 2, \dots; 0 \leq x \leq 2\pi).$$

Необходимость этого условия была доказана в § 48. Для доказательства достаточности заметим, что если оно удовлетворено, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2(x) dx \leq 2K^2.$$

Но в силу равенства Парсеваля из (60.1) получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

Отсюда следует, что если m любое целое, $m \leq n$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \leq 2K^2.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ и оставляя m постоянным, заключаем отсюда, что

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2) \leq 2K^2$$

и так как m любое, то ряд $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$.

Значит, рассматриваемый тригонометрический ряд есть ряд Фурье от некоторой функции $f(x) \in L^2$. Но так как $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, то из $|\sigma_n(x)| \leq K$ следует $|f(x)| \leq K$, и теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leq K \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (60.3)$$

где K постоянно.

Для доказательства необходимости заметим, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt.$$

Поэтому, замечая, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1$ и что $K_n(u) \geq 0$ и применяя лемму,

доказанную в § 9 Вводного материала, сразу находим

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leq \|f(x)\|_{L^p} \quad (60.4)$$

и так как правая часть (60.4) не зависит от n , то доказательство закончено.

Для доказательства достаточности рассмотрим функции

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t) dt \quad (60.5)$$

и докажем, что они равномерно абсолютно непрерывны, т. е. для любого ε существует такое δ , что для любой системы неперекрывающихся интервалов (a_i, b_i) с суммой $\sum (b_i - a_i) < \delta$ имеем

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| < \varepsilon. \quad (60.6)$$

Действительно, обозначая через S эту систему интервалов, имеем в силу (60.3)

$$\begin{aligned} \sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| &\leq \sum \int_{a_i}^{b_i} |\sigma_n(t)| dt = \int_S |\sigma_n(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_S |\sigma_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_S 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \delta^{\frac{1}{q}} \|\sigma_n\|_{L^p} \leq \delta^{\frac{1}{q}} K < \varepsilon, \end{aligned}$$

если δ достаточно мало.

Рассуждая так же, видим, что и полные изменения этих функций ограничены в совокупности. Поэтому по теореме Хелли (см. Вводный материал, § 17) из них можно выделить подпоследовательность $F_{n_j}(x)$, сходящуюся в каждой точке к некоторой функции $F(x)$; по теореме Хелли она должна иметь ограниченное изменение, но из равномерной абсолютной непрерывности функций $F_n(x)$ сразу следует, что она абсолютно непрерывна.

В самом деле, если в формуле (60.6) вместо n написать n_j и перейти к пределу при $j \rightarrow \infty$, то получим

$$\sum |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Покажем теперь, что рассматриваемый ряд есть $\sigma(f)$, где $f(x) = F'(x)$. Действительно, имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_n(t) \cos kt dt = F_n(t) \cos kt \Big|_0^{2\pi} + k \int_0^{2\pi} F_n(t) \sin kt dt = F_n(2\pi) + k \int_0^{2\pi} F_n(t) \sin kt dt$$

и

$$\int_0^{2\pi} \sigma_n(t) \sin kt dt = -k \int_0^{2\pi} F_n(t) \cos kt dt.$$

Заставляя $n \rightarrow \infty$ по последовательности n_j , для которой $F_{n_j}(x) \rightarrow F(x)$, мы получаем из формул (60.2)

$$a_k = \frac{1}{\pi} F(2\pi) + \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin kt dt, \quad b_k = -\frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos kt dt$$

(переход к пределу под знаком интеграла здесь законен в силу теоремы Лебега (см. Вводный материал, § 14)).

После интегрирования по частям двух последних интегралов заключаем отсюда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt,$$

а это и надо было доказать.

Остается доказать, что $f(x) \in L^p$. Но для этого достаточно заметить, что $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, тогда, пользуясь неравенствами (60.3) и леммой Фату (см. Вводный материал, § 14), сразу получаем $\|f(x)\|_{L^p} \leq K$.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, то

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (60.7)$$

Мы уже знаем (см. (60.4)), что если $f(x) \in L^p$, то

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leq \|f(x)\|_{L^p}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти (см. § 28) такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$\|f(x) - T(x)\|_{L^p} < \varepsilon. \quad (60.8)$$

Следовательно, при любом n

$$\|\sigma_n(x, f) - T\|_{L^p} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\|\sigma_n(x, f) - \sigma_n(x, T)\|_{L^p} < \varepsilon. \quad (60.9)$$

Но раз $T(x)$ — тригонометрический полином, то непрерывная функция $\sigma_n(x, T)$ стремится к $T(x)$ равномерно, и тем более

$$\|\sigma_n(x, T) - T(x)\|_{L^p} < \varepsilon \quad (60.10)$$

как только n станет достаточно большим. Поэтому из (60.8), (60.9) и (60.10) имеем

$$\begin{aligned} \|f(x) - \sigma_n(x, f)\|_{L^p} &\leq \|f(x) - T(x)\|_{L^p} + \|T(x) - \sigma_n(x, T)\|_{L^p} + \\ &\quad + \|\sigma_n(x, T) - \sigma_n(x, f)\|_{L^p} \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

если n достаточно велико, и тем самым (60.7) доказано.

Ниже при доказательстве теоремы 4 мы увидим, что это утверждение остается в силе и при $p = 1$, т. е., если $f(x) \in L$, то

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Однако теорема 3 справедлива лишь при $p > 1$. В самом деле, если $p = 1$, т. е. если

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)| dx \leq K,$$

то мы не можем утверждать, что рассматриваемый ряд есть ряд Фурье (см. ниже замечание к теореме 5). Случай ряда Фурье рассматривается в следующей теореме:

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_m(x) - \sigma_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \text{ и } n \rightarrow \infty.$$

Мы знаем (см. § 47), что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] K_n(t) dt.$$

Поэтому, полагая

$$\Psi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)| dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) K_n(t) dt. \end{aligned} \quad (60.11)$$

Если обозначить через $\sigma_n^*(x)$ фейеровскую сумму для $\sigma(\Psi)$, то

$$\sigma_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t+x) K_n(t) dt,$$

а потому из (60.11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)| dx \leq \sigma_n^*(0).$$

Но так как $\Psi(t)$ непрерывна и $\Psi(0) = 0$, то $\sigma_n^*(0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0. \quad (60.12)$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_m(x)| dx \rightarrow 0$$

и необходимость нашего условия доказана.

Для доказательства его достаточности заметим, что из

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

следует существование константы K , для которой

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)| dx \leq K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Полагая, как в теореме 3,

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t) dt,$$

мы, как и там, будем доказывать, что последовательность функций $F_n(x)$ равномерно абсолютно непрерывна. Здесь, сохраняя обозначения теоремы 3, имеем

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| \leq \int_S |\sigma_n(t)| dt. \quad (60.13)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_S |\sigma_n(t)| dt &\leq \int_S |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)| dt + \int_S |\sigma_k(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)| dt + \int_S |\sigma_k(t)| dt. \end{aligned} \quad (60.14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия теоремы можно взять k столь большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad n \geq k. \quad (60.15)$$

Фиксируем теперь k ; тогда, взяв δ достаточно малым, можем добиться того, чтобы $\int_S |\sigma_p(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}$ при $p \leq k$, как только $mS < \delta$. Но если так, то из (60.14) и (60.15)

$$\int_S |\sigma_n(t)| dt < \varepsilon$$

и, следовательно, из (60.13)

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \sum (b_i - a_i) < \delta.$$

Теперь, как в теореме 3, мы видим, что из последовательности $\{F_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой $F(x)$, которая должна оказаться абсолютно непрерывной и притом рассматриваемый ряд есть ряд Фурье от $F'(x)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В процессе доказательства мы установили, что для любой $f(x) \in L$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (60.16)$$

Наконец, докажем еще одну теорему.

Т е о р е м а 5. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье—Стилтьеса*), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)| dx \leq K \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где K — постоянное.

Необходимость условия вытекает из того, что для ряда Фурье—Стилтьеса имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dF(t) \quad (60.17)$$

(эта формула выводится так же, как (47.2)). Поэтому

$$|\sigma_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) |dF|,$$

где $|dF|$ есть не что иное, как $dV(t)$, если под $V(t)$ понимать полное изменение $F(x)$ на $0 \leq x \leq t$. Отсюда, меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)| dx &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t-x) |dF(t)| \right\} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} |dF(t)| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t-x) dx = \int_0^{2\pi} |dF| = V, \end{aligned}$$

где V — полное изменение $F(x)$ на $[0, 2\pi]$.

Итак, необходимость доказана.

Для доказательства достаточности мы снова вводим в рассмотрение функции $F_n(x)$, уже рассмотренные в теоремах 3 и 4. Правда, мы уже не сможем доказать, что они равномерно абсолютно непрерывны, но все же они имеют равномерно ограниченные изменения, поскольку

$$\sum |F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)| \leq \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\sigma_n(t)| dt = \int_0^{2\pi} |\sigma_n(t)| dt \leq K$$

для любого разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ точками x_i . Поэтому в силу первой теоремы Хелли (см. Вводный материал, § 17) существует подпоследовательность p_j такая, что $F_{n_j}(x) \rightarrow F(x)$ для любого x из $[0, 2\pi]$, где $F(x)$ имеет

*) См. § 23, п. 9.

ограниченное изменение. Остается доказать, что данный ряд есть ряд Фурье—Стилтьеса от dF .

Для этого, как при доказательстве теоремы 3, пишем

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_n(t) \cos kt \, dt = \frac{F_n(2\pi)}{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) \sin kt \, dt$$

и затем интегрированием по частям получаем

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kt \, dF_n(t).$$

Заставляя n стремиться к бесконечности по подпоследовательности n_j , находим

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kt \, dF(t)$$

и аналогично для b_k (переход к пределу был законен в силу второй теоремы Хелли, § 17 Вводного материала).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы знаем (см. § 59), что не всякий ряд Фурье—Стилтьеса есть ряд Фурье. Таким образом, условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)| \, dx \leq K \quad (n = 1, 2, \dots)$$

не является достаточным для того, чтобы ряд был рядом Фурье, и это показывает, что при $p = 1$ теорема 3 теряет силу.

Учитывая, что ряд Фурье—Стилтьеса есть результат дифференцирования ряда Фурье от функции с ограниченным изменением, мы получаем в качестве следствия теоремы 5 следующую теорему:

Т е о р е м а 6. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от функции с ограниченным изменением, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |\sigma'_n(x)| \, dx \leq K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Все доказанные теоремы относились к рассмотрению фейеровских сумм. Если вместо них мы рассмотрим пуассоновские суммы, т. е.

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

и заметим, что

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, t - x) \, dt,$$

где $P(r, u)$ — ядро Пуассона, то можно будет доказать совершенно аналогичные теоремы; действительно, при доказательстве мы все время пользовались выражением $\sigma_n(x)$ в виде

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t - x) \, dt$$

и опирались только на то, что $K_n(u) \geq 0$ и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1.$$

Но мы также имеем $P(r, u) \geq 0$ и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, u) du = 1.$$

Поэтому все рассуждения проходят слово в слово (то что $r \rightarrow 1$ не по последовательности, а пробегая все значения, не играет роли, так как можно было бы рассматривать последовательность $r_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ и рассуждать с ядрами $P(r_k, u)$).

Таким образом получаются следующие теоремы.

Теорема 1'. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы его пуассоновские суммы $f(r, x)$ стремились равномерно к пределу при $r \rightarrow 1$.

Теорема 2'. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от ограниченной функции, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K , для которой

$$|f(r, x)| \leq K, \quad \begin{aligned} 0 &\leq r < 1, \\ 0 &\leq x \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Теорема 3'. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье для $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\|f(r, x)\|_{L^p} \leq K, \quad 0 \leq r < 1.$$

Кроме того, если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то

$$\|f(r, x)\|_{L^p} \leq \|f(x)\|_{L^p}. \quad (60.18)$$

Имеем также

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - f(r, x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1, \quad (60.19)$$

причем это справедливо как при $p > 1$, так и при $p = 1$.

Теорема 4'. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |f(r, x) - f(q, x)| dx \rightarrow 0 \quad \begin{aligned} &\text{при } r \rightarrow 1 \\ &\text{и } q \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Для случая ряда Фурье—Стилтьеса рассуждение несколько сложнее. Мы не будем его проводить и ограничимся формулировкой теоремы, аналогичной теореме 5, а именно

Теорема 5'. Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье—Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |f(r, x)| dx \leq K, \quad 0 \leq r < 1.$$

Отметим еще, что в главе VIII (§ 14 и § 20) вместо фейеровских или пуассоновских сумм ряда Фурье мы будем изучать его частные суммы $S_n(x)$ и для них рассматривать вопрос о поведении $\|S_n\|_{L^p}$ и $\|f - S_n\|_{L^p}$ при $p \geq 1$.

§ 61. Общие тригонометрические ряды. Теорема Лузина—Данжуа

До сих пор мы изучали ряды Фурье. Теперь мы будем рассматривать тригонометрические ряды самого общего вида и докажем относительно них ряд очень простых, но важных теорем. Начнем с рассмотрения вопроса о том, когда тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве положительной меры. Здесь имеет место теорема, доказанная одновременно и независимо Н. Н. Лузиным^[3] и А. Данжуа (см. Denjoy^[2]).

Теорема Лузина—Данжуа. Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (61.1)$$

сходится абсолютно на множестве E , $mE > 0$, то

$$\sum |a_n| + |b_n| < +\infty.$$

Обозначим $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) и положим

$$a_0 = 0, \frac{a_0}{2} = \varrho_0, \quad a_n = \varrho_n \cos \alpha_n, \quad b_n = \varrho_n \sin \alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда ряд (61.1) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n \cos (nx - \alpha_n). \quad (61.2)$$

Абсолютная сходимость ряда (61.2) на E означает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n |\cos (nx - \alpha_n)| < +\infty \quad \text{для } x \in E. \quad (61.3)$$

По теореме Егорова можно найти совершенное множество $P \subset E$, $mP > 0$, на котором ряд (61.3) сходится равномерно. Пусть $S(x)$ — его сумма на P , тогда в силу равномерной сходимости (61.3)

$$\int_P S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n \int_P |\cos (nx - \alpha_n)| dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_P |\cos (nx - \alpha_n)| dx &\geq \int_P \cos^2 (nx - \alpha_n) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_P [1 + \cos 2(nx - \alpha_n)] dx = \frac{1}{2} mP + \frac{1}{2} \int_P \cos 2(nx - \alpha_n) dx. \end{aligned}$$

Если обозначить через $f(x)$ функцию, равную 1 на P и нулю вне его, то

$$\begin{aligned} \int_P \cos 2(nx - \alpha_n) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2(nx - \alpha_n) dx = \\ &= \cos 2\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx + \sin 2\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2nx dx, \end{aligned} \quad (61.4)$$

а потому

$$\int_P \cos 2(nx - \alpha_n) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

так как интегралы в правой части (61.4) отличаются лишь ограниченным множителем от коэффициентов Фурье для $f(x)$.

Из этого вытекает, что

$$\int_P |\cos(nx - \alpha_n)| dx > \frac{1}{4} mP$$

при n достаточно большим, а значит сходимость ряда (61.3) влечет сходимость ряда $\sum e_n$, откуда следует и

$$\sum |a_n| < +\infty, \quad \sum |b_n| < +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 62. Теорема Кантора—Лебега

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно сказать о коэффициентах тригонометрического ряда, если он уже не абсолютно, а просто сходится на множестве меры больше нуля.

Здесь имеет место

Т е о р е м а К а н т о р а — Л е б е г а. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве E , $mE > 0$, то его коэффициенты стремятся к нулю.*

В самом деле, если

$$\sum e_n \cos(nx - \alpha_n) \quad (62.1)$$

сходится на E , $mE > 0$, то имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n \cos(nx - \alpha_n) = 0 \quad \text{для } x \in E.$$

Если найдется такая последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, для которой

$$e_{n_k} \geq \delta > 0, \quad (62.2)$$

то имеем очевидно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0, \quad x \in E.$$

Покажем, что этого не может быть. Действительно, тогда и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0, \quad x \in E.$$

По теореме Лебега о законности перехода к пределу под знаком интеграла для случая, когда речь идет о функциях, ограниченных в своей совокупности, имеем, интегрируя по множеству E

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0.$$

Но так как, рассуждая, как в § 61, мы имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) dx = \frac{1}{2} mE,$$

а $mE > 0$, то мы приходим к противоречию.

Следовательно, нельзя было предполагать (62.2), поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0, \quad (62.3)$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Название этой теоремы объясняется тем, что Кантор доказал ее для случая, когда ряд сходится на некотором отрезке $[a, b]$, а

Лебег обобщил на случай любого множества положительной меры. Мы считаем целесообразным привести здесь отдельно доказательство теоремы Кантора, так как оно даже не требует знакомства с интегралом Лебега.

Итак, пусть ряд (62.1) сходится на некотором отрезке $[a, b]$. Перепишем его для удобства в виде

$$\sum e_n \cos n(x - a_n). \quad (62.4)$$

Надо доказать, что $e_n \rightarrow 0$. Допустим, что это неверно; тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$e_n \geq \delta \quad (62.5)$$

для бесконечного множества значений n .

Обозначим через d длину отрезка $[a, b]$. Когда x пробегает $[a, b]$, то $x - a_n$ пробегает отрезок той же длины d . Взяв такое n_1 , для которого $n_1 d > 2\pi$, мы видим, что $\cos n_1(x - a_{n_1})$ успевает пробежать все свои значения, пока x пробегает $[a, b]$, значит, можно найти такой отрезок $[a_1, b_1]$ внутри $[a, b]$, где этот косинус $\geq \frac{1}{2}$. Если при этом n выбрано таким, что для него удовлетворено (62.5), то

$$e_{n_1} \cos n_1(x - a_{n_1}) \geq \frac{\delta}{2}, \quad a_1 \leq x \leq b_1.$$

Положим $d_1 = b_1 - a_1$. Рассуждая аналогично предыдущему, можем выбрать n_2 так, чтобы для него удовлетворялось (62.5) и чтобы $n_2 d_1 > 2\pi$, а тогда в отрезке $[a_1, b_1]$ найдется отрезок $[a_2, b_2]$, для которого $\cos n_2(x - a_{n_2}) \geq \frac{1}{2}$, а потому

$$e_{n_2} \cos n_2(x - a_{n_2}) \geq \frac{\delta}{2}, \quad a_2 \leq x \leq b_2.$$

Этот процесс можно продолжить неограниченно, так как чисел n , удовлетворяющих неравенству (62.5), имеется бесконечное множество. Мы получаем последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, вложенных друг в друга, причем

$$e_{n_k} \cos n_k(x - a_{n_k}) \geq \frac{\delta}{2}. \quad (62.6)$$

Существует точка ξ , принадлежащая всем этим отрезкам одновременно. В такой точке ξ неравенство (62.6) выполнено для всех k ($k = 1, 2, \dots$), а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n \cos n(x - a_n) \neq 0,$$

а значит ряд $\sum e_n \cos n(x - a_n)$ должен расходиться в точке ξ . Между тем ξ лежит в отрезке $[a, b]$, где ряд сходится, и мы пришли к противоречию.

§ 63. Пример всюду расходящегося ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю

Возникает вопрос, должен ли тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходиться на множестве положительной меры. Этот вопрос был поставлен Фату (Fatou^[1]) и первый ответ на него был дан Н.Н. Лузиным^[1]. Именно Н.Н. Лузин построил пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящегося почти всюду (подробнее об этом см. §§ 1 и 2 главы VII). Затем Штейнгауз (Steinhaus^[1]) дал пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящегося в каждой точке.

Мы здесь изложим пример Штейнгауза из его более поздней работы (Steinhaus^[51]).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k(x - \ln \ln k)}{\ln k}. \quad (63.1)$$

Положим $l_k = [\ln k]$, $v_k = \ln \ln k$ и

$$g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{\cos k(x - v_k)}{\ln k}; \quad g_n = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{1}{\ln k}.$$

Прежде всего заметим, что

$$g_n - g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{1}{\ln k} [1 - \cos k(x - v_k)] = 2 \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{\sin^2 k \left(\frac{x - v_k}{2} \right)}{\ln k},$$

откуда

$$0 \leq g_n - g_n(x) \leq \frac{1}{2 \ln n} \sum_{k=n+1}^{n+l_n} k^2 (x - v_k)^2,$$

так как $|\ln u| \leq |u|$. Пусть $v_n \leq x \leq v_{n+1}$ ($n \geq 3$); тогда для $n+1 \leq k \leq n+l_n$ имеем в силу монотонного возрастания чисел v_k :

$$v_n < v_k \leq v_{n+l_n},$$

а потому

$$|x - v_k| \leq v_{n+l_n} - v_n.$$

Применяя к разности $v_{n+l_n} - v_n = \ln \ln(n+l_n) - \ln \ln n$ теорему о среднем значении, находим

$$|x - v_k| \leq \frac{l_n}{n \ln n} \leq \frac{1}{n},$$

а потому для $v_n \leq x \leq v_{n+1}$

$$g_n - g_n(x) \leq \frac{1}{2 \ln n} \frac{1}{n^2} l_n (n+l_n)^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l_n}{n}\right)^2. \quad (63.2)$$

Правая часть неравенства (63.2) стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$; поэтому для любого ε можно найти такое N , что

$$0 \leq g_n - g_n(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \text{для } n \geq N. \quad (63.3)$$

С другой стороны,

$$g_n \geq \frac{l_n}{\ln(n+l_n)} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

поэтому

$$g_n \geq 1 - \varepsilon \quad \text{для } n \geq N, \quad (63.4)$$

если N достаточно велико. Если взять $\varepsilon < \frac{1}{8}$, то из (63.3) и (63.4)

$$g_n(x) > \frac{1}{2} - 2\varepsilon > \frac{1}{4} \quad \text{для } v_n \leq x \leq v_{n+1} \text{ и } n \geq N. \quad (63.5)$$

Пусть теперь x — любая точка отрезка $[0, 2\pi]$. Покажем, что найдется бесконечное множество таких значений n , для которых $g_n(x) > \frac{1}{4}$. В самом деле, если мы отметим на оси абсцисс точки $v_3, v_4, \dots, v_n, \dots$, то они стре-

мятся монотонно к бесконечности, значит, отрезки $[v_n, v_{n+1}]$ ($n \geq 3$) покрывают всю ось абсцисс.

Следовательно, каждая точка вида $x + p \cdot 2\pi$ непременно лежит в некотором интервале вида $[v_n, v_{n+1}]$; но $g_n(x + p \cdot 2\pi) = g_n(x)$, а потому в точке x удовлетворено неравенство (63.5), если $n \geq N$.

Но для достаточно больших p неравенство $x + p \cdot 2\pi < v_{n+1}$ требует, чтобы n было достаточно велико, поэтому для бесконечного множества значений $n \geq N$ действительно будем иметь $g_n(x) > \frac{1}{4}$. Значит, в рассматриваемом ряде (63.1) имеется бесконечное множество «кусков», у которых сумма членов имеет величину, превосходящую $\frac{1}{4}$, а потому ряд расходится. Раз это доказано для любого x на $[0, 2\pi]$, то ряд расходится в каждой точке.

§ 64. Изучение сходимости одного класса тригонометрических рядов

Фату (Fatou^[1]) доказал целый ряд важных теорем, касающихся рядов, у которых

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (64.1)$$

Но оказывается, что многие из этих теорем сохраняют силу, если удовлетворяется менее сильное требование, а именно

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n). \quad (64.2)$$

Ясно, что из (64.1) следует (64.2), но обратное, вообще говоря, не имеет места.

Тригонометрические ряды, коэффициенты которых удовлетворяют условию (64.2), обладают целым рядом интересных свойств. Они могут не быть рядами Фурье (см. глава VI, § 3), но имеет место такая теорема:

Т е о р е м а 1. Если ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами, удовлетворяющими (64.2), есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду; если он $\sigma(f)$, где $f(x)$ непрерывна, то этот ряд сходится равномерно.

В самом деле, известно, что если для тригонометрического ряда $S_n(x)$ — частные, а $\sigma_n(x)$ — фейеровские суммы, то

$$\begin{aligned} |S_n(x) - \sigma_n(x)| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(1) \end{aligned} \quad (64.3)$$

в силу (64.2). Поэтому $S_n(x) - \sigma_n(x) \rightarrow 0$ равномерно в силу (64.3). Но для любого ряда Фурье $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, поэтому и $S_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду. Если же $f(x)$ непрерывна, то $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерно, а тогда и $S_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерно, и теорема доказана.

В качестве следствия выведем теорему

Т е о р е м а 2 (Ф а т у). Если тригонометрический ряд имеет коэффициенты вида

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то он сходится почти всюду.

Если он, кроме того, есть ряд Фурье от непрерывной функции, то он сходится равномерно.

Действительно, прежде всего ясно, что наш ряд есть ряд Фурье, так как $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$. Кроме того, как мы уже говорили, из (64.1) следует (64.3) и, значит, мы находимся в условиях применимости предыдущей теоремы.

З а м е ч а н и е. Гипотеза относительно непрерывности является дополнительным требованием, а не вытекает из (64.1). Можно показать, что существуют функции, у которых коэффициенты Фурье удовлетворяют условию (64.1) и, однако, они неограничены на любом интервале δ , лежащем на $[-\pi, \pi]$ (см. глава VIII, § 13).

§ 65. Лакунарные последовательности и лакунарные ряды

Выведем еще некоторые следствия из теоремы 1 § 64. Для этого напомним, что в § 4 Вводного материала мы условились называть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ удовлетворяющей условию (L), если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty$$

и

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = O\left(\frac{1}{n_m}\right) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Последовательность $\{n_k\}$ была названа лакунарной, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (65.1)$$

Наконец, было показано, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L).

Теперь введем определение лакунарного ряда.

О п р е д е л е н и е. Ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (65.2)$$

называется *лакунарным*, если натуральные числа $\{n_k\}$ образуют лакунарную последовательность (т. е. удовлетворяют условию (65.1)).

Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то мы будем говорить, что ряд (65.2) есть (L)-ряд (таким образом, всякий лакунарный ряд есть (L)-ряд, но обратное, вообще, не имеет места).

Докажем, что если коэффициенты (L)-ряда стремятся к нулю, то он входит в класс рядов, изученных в § 64. Действительно, функция $\tau(n)$, определенная в § 64 (см. (64.2)), в данном случае принимает вид

$$\tau(n) = \sum_{n_k \leq n} n_k (|a_k| + |b_k|).$$

Покажем, что $\tau(n) = o(n)$, тогда мы будем находиться в условиях § 64. Так как $a_k \rightarrow 0$ и $b_k \rightarrow 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое p , что $|a_k| \leq \varepsilon$ и

$|b_k| \leq \varepsilon$ при $k \geq p$. Если n_m — наибольшее из чисел последовательности $\{n_k\}$, не превосходящее n , то

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^m n_k (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^p n_k (|a_k| + |b_k|) + 2\varepsilon \sum_{k=p+1}^m n_k. \quad (65.3)$$

Так как первое слагаемое правой части (65.3) не зависит от n , то можно взять n_0 столь большим, чтобы это слагаемое было меньше εn для $n \geq n_0$. Тогда

$$\frac{\tau(n)}{n} \leq \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n_m} \sum_{k=p+1}^m n_k < c\varepsilon \quad (\text{для } n \geq n_0),$$

где c постоянно, потому что для последовательностей $\{n_k\}$, удовлетворяющих условию (L), имеем

$$\sum_{k=1}^m n_k = O(n_m)$$

(см. Вводный материал, § 4).

Итак,

$$\tau(n) \leq c\varepsilon_n,$$

а так как ε как угодно мало, то

$$\tau(n) = o(n)$$

и наше утверждение доказано.

Из доказанного утверждения и теоремы 1 § 64 сразу получаем

С л е д с т в и е 1. Если (L)-ряд есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду; если он ряд Фурье от непрерывной функции, то сходится равномерно.

Из сделанного выше замечания о том, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L) и из следствия 1 получаем теорему Колмогорова^[6].

Если лакунарный ряд есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду.

Кроме того, из следствия 1 также сразу получаем: если лакунарный ряд есть ряд Фурье от непрерывной функции, то он сходится равномерно.

В главе XI, § 6 будет доказано более сильное предложение, а именно, что в указанных условиях ряд должен сходиться и абсолютно.

Укажем еще одну теорему, касающуюся последовательностей, удовлетворяющих условию (L).

Т е о р е м а. Пусть $\{n_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (L), и $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом. Тогда

$$S_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{почти всюду при } k \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— ряд Фурье от $f(x)$, $S_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ — его частные и фейеровские суммы. Так как $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду, то достаточно убедиться, что $S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x) \rightarrow 0$ почти всюду.

Мы покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2 dx < +\infty, \quad (65.3')$$

тогда по теореме Лебега (см. Вводный материал, § 14) будет иметь место сходимость почти всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2,$$

а следовательно, и стремление к нулю его общего члена.

Итак, остается доказать сходимость ряда (65.3'). Как известно,

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n m(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2 dx = \frac{1}{(n_k+1)^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2).$$

Оценим сумму первых p членов ряда (65.3'); имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p \int_{-\pi}^{\pi} [S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)]^2 dx &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n_k+1)^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2) < \\ &< \sum_{k=1}^p \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2). \end{aligned} \quad (65.4)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$v_m = m^2 (a_m^2 + b_m^2).$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m = \sum_{k=1}^{n_1} v_k \sum_{m=1}^p \frac{1}{n_m^2} + \sum_{n_1+1}^{n_2} v_k \sum_{m=2}^p \frac{1}{n_m^2} + \dots + \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} v_k \frac{1}{n_p^2}. \quad (65.5)$$

Но последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), поэтому и $\{n_k^2\}$ также (см. Вводный материал, § 4), а потому

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} < C \frac{1}{n_m^2}, \quad (65.6)$$

где C — постоянное. Но тогда, полагая $n_0 = 0$, находим из (65.5) и (65.6)

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m < C \sum_{k=1}^p (v_{n_{k-1}+1} + \dots + v_{n_k}) \frac{1}{n_k^2}.$$

Наконец, из определения v_m ясно, что

$$v_{n_{k-1}+1} + \dots + v_{n_k} < n_k^2 \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} (a_m^2 + b_m^2) \quad (65.7)$$

и, следовательно, из (65.5) и (65.7)

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m < C \sum_{k=1}^p \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} (a_m^2 + b_m^2) = C \sum_{m=1}^{n_p} (a_m^2 + b_m^2) \leq C \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

при любом p . Отсюда следует сходимость ряда в правой части (65.4), и этим заканчивается доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 2. Из доказанного предложения вытекает теорема Колмогорова^[6].

Если $\{n_k\}$ есть лакунарная последовательность и $f(x) \in L^2$, то

$$S_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ почти всюду.}$$

§ 66. Гладкие функции

Для дальнейшего изучения рядов, которые мы уже рассматривали в § 64, а также и во многих других вопросах, нам будет полезно ввести понятие гладкой функции.

О п р е д е л е н и е. Функция $F(x)$ называется *гладкой в точке x* , если

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (66.1)$$

Обозначая для краткости

$$\Delta_h^2 F = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x),$$

можем сказать, что гладкость $F(x)$ характеризуется равенством

$$\Delta_h^2 F = o(h).$$

Если равенство (66.1) выполнено равномерно относительно x на некотором отрезке $[a, b]$, то мы будем говорить, что $F(x)$ *равномерно гладкая* на этом отрезке.

Слово «гладкая» было, по-видимому, введено для того, чтобы выразить такую мысль: если $F(x)$ гладкая в некоторой точке, то эта точка не может быть угловой. Действительно, если $\Delta_h^2 F = o(h)$ в точке x , то

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} = o(1),$$

т. е. если существует производная справа в точке x , то в ней должна существовать и производная слева и они должны быть равны между собой. Мало того, если в некоторой точке $F(x)$ гладкая, то в этой точке

$$D^+ F = D^- F = \overline{DF} \text{ и } D_+ F = D_- F = \underline{DF},$$

где $D^+ F$ и $D^- F$ означают верхнее правое и верхнее левое производные числа, \overline{DF} — верхнюю производную (когда они равны), и аналогично для левых производных чисел.

Заметим, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , или хотя бы только «симметрически непрерывна», т. е.

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

то примитивная $F(x)$ от $f(x)$ удовлетворяет условию гладкости в этой точке, так как

$$F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0) = \int_0^h [f(x_0 + t) - f(x_0 - t)] dt = o(h)$$

при $h \rightarrow 0$.

Однако гладкие функции, несмотря на свое название, вовсе не должны иметь почти всюду производную; более того, они могут быть лишены производной почти всюду, как мы увидим дальше (см. главу XI, § 4). Однако имеет место теорема.

Теорема 1. Если $F(x)$ — непрерывная и гладкая на некотором интервале (a, b) , то она имеет производную $F'(x)$ на множестве E мощности континуума в любом интервале (a, β) , лежащем внутри (a, b) .

Чтобы доказать это, прежде всего заметим, что, если функция $F(x)$ имеет в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$ максимум или минимум, то $F'(x_0)$ существует и равна нулю. В самом деле, имеем

$$\frac{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)}{h} = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} + \frac{F(x_0 - h) - F(x_0)}{h} \quad (66.2)$$

Но в точке максимума (или минимума) оба члена правой части (66.2) не положительны при $h > 0$ достаточно малом (соответственно неотрицательны). Поэтому из стремления к нулю их суммы следует, что каждый из них стремится к нулю, а тогда $F'(x_0)$ существует и равна нулю.

Пусть теперь $[a, \beta]$ — любой отрезок внутри (a, b) , и $L(x) = mx + n$ — линейная функция, совпадающая с $F(x)$ для $x = a$ и $x = \beta$. Разность $g(x) = F(x) - L(x)$ есть гладкая функция, обращающаяся в нуль в концах a и β . Значит, $g(x)$ имеет абсолютный максимум или минимум в некоторой точке x_0 внутри (a, β) . Поэтому $g'(x_0) = 0$, значит, $F'(x_0)$ существует и равна m . Отсюда, в частности, вытекает, что для непрерывных и гладких функций справедлива теорема Лагранжа о конечном приращении, т. е.

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Мы убедились, что в любом $[a, \beta]$ внутри (a, b) есть точки, где $F'(x)$ существует. Но можно показать и больше, именно, что множество этих точек имеет мощность континуума. Действительно, пусть γ таково, что $a < \gamma < \beta$. Найдется точка x_0 в (a, γ) , где $F'(x_0)$ существует и равна тангенсу угла наклона хорды соединяющей точки $(a, F(a))$ и $(\gamma, F(\gamma))$. Если наклоны, отвечающие разным γ , различны, то и соответствующие точки x_0 различны. Но если кривая $y = F(x)$ не является прямолинейным отрезком на (a, β) (а в этом случае теорема уже доказана), то тогда величины тангенсов этих наклонов образуют интервал, т. е. их множество имеет мощность континуума, а потому и точек дифференцируемости $F(x)$ имеется множество мощности континуума во всяком интервале. Теорема доказана.

Для дальнейшего введем такое определение.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция $f(x)$ обладает свойством D на некотором множестве E , если для любых двух $\alpha \in E$ и $\beta \in E$ и для любого числа C , заключенного между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, найдется такая точка $\gamma \in E$, лежащая между α и β , что $f(\gamma) = C$.

Буква D происходит от имени Дарбу, так как он отметил, что этим свойством обладают не только функции, непрерывные на некотором отрезке, но и некоторые разрывные; в частности, если $f(x)$ есть точная производная, т. е. если существует такая $F(x)$, что $f(x) = F'(x)$ в каждой точке некоторого отрезка, то она обладает свойством D на этом отрезке.

Докажем теорему.

Теорема 2. Если $F(x)$ — непрерывная и гладкая на некотором интервале (a, b) , то ее производная $F'(x)$ обладает свойством D на множестве E тех точек, где она существует.

Это множество E , как мы видим, по теореме 1, не только не пусто, но имеет мощность континуума в каждом отрезке $[a, \beta]$ внутри (a, b) .

Пусть $\alpha \in E$, $\beta \in E$

$$A = F'(\alpha), \quad B = F'(\beta)$$

и пусть C заключено между A и B ; например, для определенности, $A < C < B$. Мы должны доказать существование такого x_0 , $\alpha < x_0 < \beta$, $x_0 \in E$,

что $F'(x_0) = C$. Если вычесть Cx из $F(x)$, то можно принять $C = 0$, а тогда $A < 0 < B$.

Положим при фиксированном h

$$g(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Выберем h так, чтобы $0 < h < b - \beta$ и, кроме того, предположим его достаточно малым для того, чтобы

$$g(\alpha) < 0, \quad g(\beta) > 0, \quad \frac{F(\beta) - F(\beta - h)}{h} > 0.$$

Так как $g(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то на этом отрезке $[\alpha, \beta]$ есть точки, где она обращается в нуль. Пусть γ — самая левая из таких точек. Из

$$g(\gamma) = \frac{F(\gamma+h) - F(\gamma)}{h} = 0$$

следует $F(\gamma+h) = F(\gamma)$. Если x_0 есть точка на $(\gamma, \gamma+h)$, где $F(x)$ достигает максимума или минимума, то $F'(x_0) = 0 = C$. Но так как

$$g(\alpha) < 0 \quad \text{и} \quad g(\beta - h) = \frac{F(\beta) - F(\beta - h)}{h} > 0$$

в силу сделанного выбора h , то

$$\alpha < \gamma < \beta - h$$

и, значит, $(\gamma, \gamma+h)$ лежит внутри $[\alpha, \beta]$, поэтому и x_0 внутри $[\alpha, \beta]$. Кроме того, раз $F'(x_0)$ существует, то $x_0 \in E$. Итак, мы нашли точку $x_0 \in E$, где $F'(x_0) = C$, и доказательство закончено.

Приложим полученные результаты к изучению поведения суммы тригонометрического ряда, рассмотренного в § 64. Прежде всего докажем такую теорему:

Т е о р е м а 3. Если коэффициенты ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (66.3)$$

удовлетворяют условию

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \quad (66.4)$$

то сумма обьнтегрированного ряда

$$F(x) = \frac{a_0}{2}x + C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n} \quad (66.5)$$

есть функция непрерывная и равномерно гладкая на $[0, 2\pi]$. Ряд (66.3) сходится в тех и только тех точках, где $F'(x)$ существует и притом, если $N = \left[\frac{1}{h}\right]$, то имеет место равенство

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (66.6)$$

равномерно относительно x на $[0, 2\pi]$.

Для того чтобы иметь право говорить о сумме обьнтегрированного ряда, надо убедиться, что он сходится. Но поскольку

$$|a_k| + |b_k| = \frac{\tau(k) - \tau(k-1)}{k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то ряд (66.5) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k) - \tau(k-1)}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = O \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) < +\infty$$

(мы здесь применили преобразование Абеля). Отсюда ясно, что ряд (66.5) сходится абсолютно и равномерно. Пусть $F(x)$ — его сумма, следовательно, она непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Теперь для доказательства теоремы положим

$$A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad B_k = b_k \cos kx - a_k \sin kx.$$

Тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - S_N(x) = \sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{\sin kh}{kh} - 1 \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \frac{\sin kh}{kh} = P + Q.$$

Так как в окрестности точки $u = 0$ имеем

$$\left| \frac{\sin u}{u} - 1 \right| = O(u^2) < C|u|,$$

то

$$|P| < C|h| \sum_{k=1}^N (|a_k| + |b_k|)k \leq C \frac{1}{N} \tau(N) = o(1),$$

$$\begin{aligned} |Q| &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} \leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau(k) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{|h|} \sum_{k=N+1}^{\infty} o\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{|h|} o\left(\frac{1}{N}\right) = o(1) \end{aligned}$$

и таким образом (66.6) действительно выполнено и притом равномерно относительно x на $[0, 2\pi]$.

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h} &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\sin^2 kh}{kh} = \\ &= \sum_{k=1}^N B_k \frac{\sin^2 kh}{kh} + \sum_{k=N+1}^{\infty} B_k \frac{\sin^2 kh}{kh} = P_1 + Q_1. \end{aligned}$$

Так как $|\sin u| \leq |u|$, то

$$|P_1| \leq |h| \sum_{k=1}^N |B_k|k \leq |h| \sum_{k=1}^N (|a_k| + |b_k|)k = |h| \tau_N = o(1),$$

$$|Q_1| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} = o(1),$$

как мы уже видели при оценке Q ; поэтому

$$F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x) = o(h),$$

т. е. $F(x)$ равномерно гладкая на $[0, 2\pi]$.

Наконец, из (66.6) ясно, что ряд (66.3) сходится в тех и только в тех точках, где существует симметрическая производная от $F(x)$, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

и сумма $S(x)$ этого ряда равна этой симметрической производной.

Но так как для гладких функций, где есть симметрическая производная, там есть и обычная, то и последнее утверждение теоремы доказано.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема справедлива для лакунарных рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, так как для них выполняется условие теоремы 3 (см. § 65).

С л е д с т в и е 1. Если для тригонометрического ряда выполнено условие теоремы 3, то ряд сходится на множестве мощности континуума во всяком интервале $(a, b) \in [0, 2\pi]$ и его сумма $S(x)$ обладает свойством D на множестве тех точек, где она существует.

В частности, этим свойством обладает всякий лакунарный ряд, если только его коэффициенты стремятся к нулю.

Действительно, в силу теоремы 3 $S(x)$ существует там и только там, где существует $F'(x)$ для гладкой функции $F(x)$, определяемой равенством (66.5) и притом $S(x) = F'(x)$; остается сослаться на теорему 2 и доказательство закончено.

С л е д с т в и е 2. Если коэффициенты тригонометрического ряда удовлетворяют условию теоремы 3, то его сумма не может иметь точек разрыва 1-го рода.

Действительно, в окрестности точки разрыва не было бы выполнено свойство D .

Для случая, когда коэффициенты удовлетворяют более сильному требованию

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (66.7)$$

аналогичный результат нами был уже получен (см. § 42).

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 3 можно получить новое доказательство теоремы Фату (см. § 64) о том, что ряд с коэффициентами, удовлетворяющими (66.7), сходится почти всюду. Действительно, так как из (66.7) следует $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то ряд $F(x)$ есть ряд Фурье. Поэтому сумма $F(x)$ интегрированного ряда есть абсолютно непрерывная функция (см. § 40) и, следовательно, $F'(x)$ почти всюду существует. А тогда в силу теоремы 3 ряд (66.3) сходится почти всюду.

З а м е ч а н и е 2. Если выполнено только условие (66.4), но не выполнено условие (66.7), то ряд (66.3) может даже почти всюду расходиться. Примеры этого рода мы встретим в § 3 главы XI.

§ 67. Вторая производная Шварца

Изученное нами в § 66 понятие гладкой функции будет играть большую роль в дальнейшем: но прежде чем переходить к его приложениям, нам надо ввести еще одно новое понятие.

О п р е д е л е н и е. Пусть функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x ; если существует предел отношения

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \quad (67.1)$$

при $h \rightarrow 0$, то говорят, что $F(x)$ имеет в точке x вторую производную Шварца и пишут

$$D^2F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}. \quad (67.2)$$

Если отношение (67.1) не стремится к пределу при $h \rightarrow 0$, то числа

$$\overline{D^2} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

и

$$\underline{D^2} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

называют соответственно *верхней и нижней производной Шварца в точке x* .

Покажем, что если $F(x)$ имеет обыкновенную вторую производную $F''(x)$ в точке x , то $D^2 F(x)$ существует и

$$D^2 F(x) = F''(x). \quad (67.3)$$

Действительно, если $F''(x)$ существует в точке x , то $F'(x)$ непрерывна в точке x и потому $F'(u)$ ограничена в окрестности точки x . Ясно, что

$$\Delta_h^2 F = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = \int_0^h [F'(x+t) - F'(x-t)] dt. \quad (67.4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_h^2 F}{h^2} - F''(x) \right| &= \left| \int_0^h \frac{2t}{h^2} \left[\frac{F'(x+t) - F'(x-t)}{2t} - F''(x) \right] dt \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in (0, h)} \left| \frac{F'(x+t) - F'(x-t)}{2t} - F''(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т. е. (67.3) доказано.

С другой стороны ясно, что $D^2 F(x)$ может существовать без того, чтобы $F''(x)$ существовала; например, если $F(x)$ — непрерывная нечетная функция, то в точке $x = 0$ имеем

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = F(h) + F(-h) = 0$$

для всех h , значит, и $D^2 F = 0$ при $x = 0$, тогда как $F''(0)$ может и не существовать, если мы требуем от $F(x)$ только непрерывности и нечетности.

Итак, вторая производная Шварца является прямым обобщением обычной второй производной.

Заметим теперь, что, как и в случае обычной второй производной, имеем: если x есть точка максимума и в ней $D^2 F(x)$ существует, то $D^2 F(x) \leq 0$, а в точке минимума $D^2 F(x) \geq 0$. Это непосредственно следует из того, что $\Delta_h^2 F(x) \leq 0$ при достаточно малом h в точке максимума и $\Delta_h^2 F(x) \geq 0$ в точке минимума.

Аналогия идет еще дальше. Именно имеет место теорема.

Т е о р е м а. Если $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $D^2 F(x) \equiv 0$ на $a < x < b$, то $F(x)$ линейна на этом отрезке.

Чтобы доказать это, возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-b).$$

Ясно, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Покажем, что она не может принимать положительных значений на $[a, b]$. Действительно, если бы это было неверно, то в силу непрерывности $\varphi(x)$ она достигала бы своего максимума где-то внутри $[a, b]$, т. е. нашлась бы такая точка x_0 внутри этого отрезка, где заведомо имели бы $D^2 \varphi(x_0) \leq 0$. Но, с другой стороны,

$$D^2 \varphi(x_0) = D^2 F(x_0) + 2\varepsilon,$$

так как вторая производная Шварца от суммы равна сумме вторых производных Шварца, а у слагаемого $\varepsilon(x-a)(x-b)$ есть обычная вторая производная, равная 2ε , значит, и вторая производная Шварца имеет ту же величину.

Но $D^2\varphi(x_0) \leq 0$, $D^2F(x_0) = 0$, и мы получаем $\varepsilon \leq 0$, что противоречит выбору ε .

Итак, $\varphi(x) \leq 0$ всюду на $[a, b]$, т. е.

$$F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon(x-a)(b-x) \leq \varepsilon(b-a)^2.$$

Если бы в выражении для $\varphi(x)$ мы взяли перед ε знак $-$, мы бы доказали совершенно так же, что $\varphi(x) \geq 0$ всюду, т. е.

$$F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) \geq -\varepsilon(x-a)(b-x) \geq -\varepsilon(b-a)^2.$$

Поэтому

$$\left| F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) \right| \leq \varepsilon(b-a)^2. \quad (67.5)$$

Но ε совершенно произвольно, поэтому левая часть неравенства (67.5) должна быть равна нулю, откуда

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a),$$

а это и значит, что $F(x)$ линейна. Теорема доказана.

Мы теперь применим понятие второй производной Шварца к одному методу суммирования тригонометрических рядов.

§ 68. Метод суммирования Римана

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (68.1)$$

коэффициенты которого стремятся к нулю (или хотя бы только ограничены). Тогда, интегрируя его почленно два раза, получим

$$\frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Ясно, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно (в силу ограниченности a_n и b_n); обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которую мы будем называть *функцией Римана* для тригонометрического ряда (68.1). Итак,

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (68.2)$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет Шварцеву производную $D^2F(x_0)$. Тогда мы условимся говорить, что *ряд (68.1) суммируется в точке x_0 методом Римана* и его римановская сумма равна $D^2F(x_0)$.

Для того чтобы оправдать это определение, мы докажем теорему Римана:

Т е о р е м а 1. *Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходится в точке x_0 к числу S , то он суммируется в этой точке методом Римана к тому же числу S .*

Для доказательства мы прежде всего заметим, что из формулы (68.2) после элементарных тригонометрических преобразований сразу следует

$$\frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \quad (68.3)$$

Положим для краткости

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0.$$

Из формулы (68.3) непосредственно видно, что для суммируемости ряда (68.1) методом Римана в точке x_0 к числу S необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = S.$$

Таким образом, теорема 1 будет доказана, как только мы докажем теорему 2:

Теорема 2. Пусть ряд $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и S — его сумма; тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = S. \quad (68.4)$$

Переходим к доказательству этого последнего утверждения. Положим

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k.$$

Из сходимости ряда $\sum A_n$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N. \quad (68.5)$$

Напишем теперь

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \quad (68.6)$$

Если n фиксировано, а $h \rightarrow 0$, то $\frac{\sin nh}{nh} \rightarrow 1$, а потому при достаточно малом h

$$\left| A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - (A_0 + A_1 + \dots + A_N) \right| < \varepsilon. \quad (68.7)$$

Кроме того,

$$\left| S - \sum_{k=0}^N A_k \right| = |R_N| < \varepsilon \quad (68.8)$$

в силу (68.5), а потому из (68.7) и (68.8)

$$\left| A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - S \right| < 2\varepsilon, \quad (68.9)$$

как только h станет достаточно малым.

Таким образом для доказательства (68.4) достаточно убедиться, что и последнее слагаемое в правой части формулы (68.6) может быть сделано как угодно малым при $h \rightarrow 0$. Но мы имеем $A_n = R_{n-1} - R_n$, значит,

$$\begin{aligned} \sum_{N+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 &= \sum_{N+1}^{\infty} (R_{n-1} - R_n) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \\ &= R_N \left(\frac{\sin (N+1)h}{(N+1)h} \right)^2 - \sum_{N+1}^{\infty} R_n \left[\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (68.10)$$

(употребленное здесь преобразование Абеля законно, так как при $n \rightarrow \infty$ и h любом $R_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \rightarrow 0$. Но в силу (68.5) из (68.10) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{N+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right| &\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right| = \\ &= \varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \left| \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{(N+1)h}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \right| dt < \varepsilon + \varepsilon \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \right| dt \end{aligned} \quad (68.11)$$

и остается доказать, что последний интеграл конечен, тогда вся правая часть (68.11) меньше $C\varepsilon$, где C постоянно, и так как это верно при любом h , то верно и при $h \rightarrow 0$. Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = 2 \frac{\sin t}{t} \frac{t \cos t - \sin t}{t^2},$$

то в окрестности $t = 0$ подынтегральная функция ограничена, кроме того, при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \right| < 2 \frac{t+1}{t^3} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

а потому интеграл в формуле (68.11) действительно имеет смысл и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 2 мы рассматривали ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ как числовой ряд, не интересуясь тем, как он получился из заданного тригонометрического. Можно вообще говорить, что *числовой ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируем методом Римана к числу S , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = S.$$

В таком случае теорема 2 есть утверждение, что *метод Римана регулярен*.

Теперь условимся говорить, что *функциональный ряд* $\sum u_n(x)$ суммируется методом Римана равномерно к $S(x)$ на множестве E , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = S(x)$$

равномерно относительно x на E .

Из доказательства теоремы 2 сразу видно, что равномерная сходимость $\sum u_n(x)$ на E к $S(x)$ влечет его равномерную суммируемость методом Римана к $S(x)$ на E .

Это замечание будет существенно использовано в § 71.

Вернемся теперь к изучению функции Римана $F(x)$ и докажем еще одну теорему Римана.

Т е о р е м а 3. *Если коэффициенты тригонометрического ряда стремятся к нулю, то его функция Римана является равномерно гладкой на $[-\pi, \pi]$.*

Эта теорема является немедленным следствием результатов § 66. Действительно, если мы проинтегрируем ряд

$$-\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (68.12)$$

где $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, то получим ряд с коэффициентами порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{a_0}{2}x + C - \sum \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}. \quad (68.13)$$

Интегрируя ряд (68.13), получим по теореме § 66 такой ряд, сумма которого должна быть равномерно гладкой. Но эта сумма $F(x)$ есть сумма ряда, получающегося от двукратного интегрирования (68.12), а потому это и есть функция Римана для ряда (68.12), и теорема доказана.

Этой теоремой мы воспользуемся в § 70, а пока рассмотрим применение метода Римана к рядам Фурье.

§ 69. Приложение метода суммирования Римана к рядам Фурье

Метод Римана, как и методы Фейера и Абеля—Пуассона, в приложении к рядам Фурье дает следующий результат:

Т е о р е м а. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x)$ суммируется методом Римана почти всюду к этой функции.*

Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (69.1)$$

Имеем $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$, так как это коэффициенты Фурье. По теореме § 40 ряд Фурье можно почленно интегрировать; иначе говоря, если

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt,$$

то

$$F(x) = C + \frac{a_0}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}, \quad (69.2)$$

причем в силу абсолютной непрерывности $F(x)$ ряд (69.2) всюду сходится к ней и даже равномерно на $[-\pi, \pi]$. Далее, если $\Phi(x)$ — неопределенный интеграл от $F(x)$, то

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

и, следовательно, функция Римана $\Phi(x)$ для ряда (69.1) есть результат двукратного интегрирования $f(x)$. Но так как $F(x)$ непрерывна, то $\Phi'(x) = F(x)$

в каждой точке; далее $F'(x) = f(x)$ почти всюду, таким образом $\Phi''(x) = f(x)$ почти всюду, но так как $D^2 \Phi(x) = \Phi''(x)$ там, где $\Phi''(x)$ существует (§ 67), то $D^2 \Phi(x) = f(x)$ почти всюду, а потому ряд (69.1) суммируется почти всюду к $f(x)$ методом Римана.

Теорема доказана.

Теперь мы начнем прилагать метод Римана уже к общим тригонометрическим рядам, и, в частности, к очень важному вопросу о единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

§ 70. Теорема единственности Кантора

Пользуясь методом суммирования Римана, мы можем решить следующий важный вопрос: может ли существовать два различных тригонометрических ряда, сходящихся в каждой точке к одной и той же функции $f(x)$? Ответ на этот вопрос является отрицательным. Чтобы убедиться в этом, докажем следующую важную теорему:

Теорема Кантора *). Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (70.1)$$

сходится к нулю в каждой точке x на $[0, 2\pi]$, то все его коэффициенты равны нулю.

По теореме Кантора коэффициенты ряда (70.1) стремятся к нулю (здесь можно опираться даже не на теорему Кантора — Лебега, а на теорему самого Кантора — см. § 62, замечание). Строим функцию Римана $F(x)$ для ряда (70.1), она непрерывна на всей бесконечной прямой. По теореме § 68 ряд (70.1) должен суммироваться к нулю в каждой точке, т. е.

$$D^2 F(x) = 0 \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Тогда по теореме § 67 имеем

$$F(x) = Ax + B. \quad (70.2)$$

Но, с другой стороны, раз $F(x)$ есть функция Римана для ряда (70.1), то

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (70.3)$$

Из (70.2) и (70.3) получаем

$$\frac{a_0}{4} x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \quad (70.4)$$

где A_1 и B_1 — новые константы. Но правая часть (70.4) имеет период 2π , значит и левая тоже, а это возможно только при

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = 0. \quad (70.5)$$

Теперь имеем

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (70.6)$$

Ряд (70.6) сходится равномерно; поэтому (см. § 12) его коэффициенты явля-

*) Cantor [1].

ются коэффициентами Фурье от его суммы, но она есть постоянное число B_1 , а потому

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (70.7)$$

Из (70.5) и (70.7) следует, что ряд (70.6) имеет все коэффициенты равными нулю и таким образом теорема Кантора доказана. Он сразу же обобщил эту теорему, доказав следующее предложение:

Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.

В самом деле, рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы видим, что рассматриваемый ряд имеет коэффициенты, стремящиеся к нулю, и его функция Римана $F(x)$ должна быть линейной на каждом интервале, где ряд сходится к нулю, так как там $D^2F(x) \equiv 0$. Но $F(x)$ должна быть гладкой в силу теоремы 3 § 68. Поэтому она не может иметь угловых точек. Следовательно, она не может состоять из различных прямолинейных отрезков, а должна быть просто линейной. А если так, то доказательство заканчивается, как в предыдущей теореме, т. е. доказываем, что все коэффициенты ряда равны нулю.

З а м е ч а н и е. Теорему Кантора можно высказать в следующей более общей форме: *если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется к нулю методом Римана всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

Действительно, при доказательстве теоремы мы опирались только на то, что коэффициенты ряда стремятся к нулю и $D^2F(x) = 0$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек.

С л е д с т в и е. Пусть $f(x)$ — функция с периодом 2π конечная в каждой точке $[0, 2\pi]$. Тогда не существует двух различных тригонометрических рядов, каждый из которых сходится к $f(x)$ всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, конечного числа точек.

Действительно, допустим, что существовали бы два таких тригонометрических ряда; тогда их разность есть ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (70.8)$$

у которого не все коэффициенты равны нулю, и, однако, он сходится к нулю всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Но мы уже видели, что это невозможно.

Здесь, конечно, то же требование сходимости можно заменить на суммируемость методом Римана (но при этом заранее потребовать, чтобы коэффициенты стремились к нулю).

Теорема о единственности разложения функции в тригонометрический ряд допускает значительные обобщения. Мы посвятим этому вопросу главу XIV, здесь же ограничимся формулировкой наиболее важных результатов. Для этого введем определение.

О п р е д е л е н и е. Множество E , лежащее на $[-\pi, \pi]$, назовем *M-множеством*, если существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

у которого не все коэффициенты равны нулю, сходящийся к нулю всюду на $[-\pi, \pi]$ вне множества E .

Если множество E не есть M -множество, то мы будем его называть U -множеством *).

Приняв это определение, мы можем теперь две предыдущие теоремы сформулировать так: если E есть пустое или конечное множество, то оно U -множество.

Сам Кантор доказал еще, что всякое приводимое множество (т. е. такое, у которого производное множество является конечным или счетным) есть опять U -множество. Впоследствии Юнг (Young^[1]) доказал, что любое счетное множество есть U -множество (см. § 5 главы XIV).

Напротив, легко доказать, что любое множество E , $mE > 0$, есть M -множество. В самом деле, возьмем совершенное множество $P \in E$, $mP > 0$, и положим $f(x) = 1$ на P и $f(x) = 0$ вне P . В силу принципа локализации (см. § 33) ряд $\sigma(f)$ сходится к нулю на каждом смежном к P интервале, а поэтому и всюду вне E . Таким образом, существует тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне P , но с отличными от нуля коэффициентами (например

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} mP).$$

Следовательно, E есть M -множество.

В течение долгого времени существовала гипотеза, что, напротив, любое множество меры нуль (а не только конечные и счетные) должно быть U -множеством. Эта гипотеза была опровергнута Д. Е. Меньшовым^[1], построившим первый пример совершенного M -множества меры нуль (см. доказательство в § 12 главы XIV).

§ 71. Принцип локализации Римана для общих тригонометрических рядов

Введенная в рассмотрение Риманом функция $F(x)$ играет важную роль не только в вопросе о единственности разложения функции в тригонометрический ряд, но и при изучении вопроса о его сходимости или расходимости.

Напомним, что для рядов Фурье была доказана следующая теорема (см. § 33): сходимость или расходимость ряда $\sigma(f)$ в точке x зависит только от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x .

Допустим теперь, что рассматривается уже не ряд Фурье, а произвольный тригонометрический ряд. Оказывается, что тогда можно судить о его сходимости, изучая функцию Римана. Именно имеет место теорема, которую по аналогии с предыдущим, можно высказать в такой форме:

Для любого тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходимость или расходимость ряда в некоторой точке x зависит только от поведения Римановой функции $F(x)$ в окрестности точки x .

Эта несколько расплывчатая формулировка будет далее уточнена (см. стр. 198). Риман доказал это утверждение так: он строил функцию $\lambda(x)$, равную единице на $[a, \beta]$, равную нулю вне (a, b) и имеющую на $[0, 2\pi]$ непрерывные производные до 4-го порядка включительно. После этого он доказывал, что разность

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \frac{1}{\pi} \int_a^b F(t) \lambda(t) \frac{d^2}{dt^2} D_n(t-x) dt \quad (71.1)$$

*) Из определения сразу вытекает, что всякая часть U -множества есть U -множество: напротив, множество, содержащее M -множество, есть само M -множество.

стремится к нулю равномерно на $[a, \beta]$ и отсюда уже приходил к нужному заключению.

В настоящее время идея введения функции $\lambda(x)$ полностью сохраняется, но доказательство теоремы Римана обычно проводят, пользуясь теорией *формального умножения рядов* *); кстати, эта теория дает и многие другие полезные результаты, в чем мы убедимся в главе XIV.

Итак, сначала введем понятие формального произведения двух тригонометрических рядов. Для удобства изложения будем записывать тригонометрический ряд в комплексной форме

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \quad (c_{-n} = \bar{c}_n).$$

Рассмотрим два тригонометрических ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \quad (71.2)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx}. \quad (71.3)$$

Условимся называть их *формальным произведением* ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n e^{inx}, \quad (71.4)$$

где

$$K_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p} \quad (71.5)$$

в предположении, что все ряды (71.5), определяющие K_n , сходятся ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Во всем дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда $\sum |\gamma_n| < +\infty$. При этих условиях ряд (71.3) сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ и является рядом Фурье от некоторой функции $\lambda(x)$. Что касается ряда (71.2), то он будет любым**), лишь бы

$$c_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \pm \infty.$$

Докажем следующие две леммы Райхмана:

Л е м м а 1. Если $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$ и если ряд $\sum |\gamma_n|$ сходится, то все K_n , определяемые формулой (71.5), имеют смысл и $K_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$.

*) Эта теория была создана Райхманом (см. Raichman [11], см. также Zygmund [12]).

**) Полезно здесь же отметить, что если ряд (71.2) является рядом Фурье от некоторой функции $f(x)$, то формальное произведение превращается в ряд Фурье от $f(x) \lambda(x)$. Действительно, если обозначить через K_n коэффициенты Фурье от $f(x) \lambda(x)$, то

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \lambda(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \gamma_q e^{iqt} dt = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \gamma_q \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(n-q)t} dt = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_{n-q} \gamma_q = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p}. \end{aligned}$$

Здесь почленное интегрирование было законно, так как мы предположили $\sum |\gamma_n| < +\infty$, а потому ряд $\sigma(\lambda)$ равномерно сходится.

В самом деле, если $M = \max |c_n|$, то при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |K_n| &\leq M \sum_{p=-\infty}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |\gamma_{n-p}| + \max_{p < \left[\frac{n}{2}\right]} |c_p| \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\infty} |\gamma_{n-p}| \leq \\ &\leq M \sum_{q=n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} |\gamma_q| + \max_{p > \left[\frac{n}{2}\right]} |c_p| \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} |\gamma_q| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

и аналогично проводится доказательство для $n \rightarrow -\infty$. Лемма 1 доказана.

Условимся говорить, что ряд (71.3) *быстро сходится* к S , если он сходится к S и если сходится ряд

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n + \dots,$$

где

$$\Gamma_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_k|.$$

Так, например, если коэффициенты ряда (71.3) имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, то $\Gamma_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и, следовательно, ряд (71.3) быстро сходится. Впоследствии мы будем часто брать в качестве ряда (71.3) ряд $\sigma(\lambda)$, где $\lambda(x)$ — функция, имеющая три непрерывных производных. Тогда коэффициенты ряда $\sigma(\lambda)$ будут иметь порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (см. § 24) и $\sigma(\lambda)$ будет быстро сходиться к $\lambda(x)$.

Переходим к доказательству следующей леммы.

Л е м м а 2. Если $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$ и ряд (71.3) быстро сходится к нулю на некотором множестве E , то формальное произведение (71.4) сходится к нулю равномерно на множестве E .

В самом деле, пусть $x_0 \in E$ и

$$R_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n e^{inx}.$$

Имеем для $k > 0$

$$|R_{-k}(x_0)| = \left| \sum_{n=-k}^{\infty} \gamma_n e^{inx_0} \right| = \left| \sum_{n=-(k+1)}^{-\infty} \gamma_n e^{inx_0} \right| = |R_{k+1}(x_0)| \leq \Gamma_{k+1} \quad (71.6)$$

и, значит, ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |R_k(x)|$$

сходится равномерно для $x \in E$.

Тогда

$$\begin{aligned} Q_m(x_0) &= \sum_{n=-m}^{n=+m} K_n e^{inx_0} = \sum_{n=-m}^{n=+m} e^{inx_0} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} \sum_{n=-m}^{n=+m} \gamma_{n-p} e^{i(n-p)x_0} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} \sum_{q=-m-p}^{m-p} \gamma_q e^{iqx_0} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} R_{-m-p}(x_0) - \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} R_{m-p+1}(x_0). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|Q_m(x_0)| \leq \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} |c_p| |R_{-m-p}(x_0)| + \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} |c_p| |R_{m-p+1}(x_0)|,$$

и принимая во внимание неравенства (71.6), мы теми же рассуждениями, как в лемме 1, убеждаемся, что $Q_m(x_0) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и притом равномерно для $x_0 \in E$, так как оценка $R_k(x_0)$ через Γ_k или Γ_{k+1} справедлива для всех $x \in E$.

Из этих двух лемм можно вывести теорему:

Теорема 1. Если ряд (71.3) быстро сходится к некоторой функции $\lambda(x)$, а $c_n \rightarrow 0$, то ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [K_n - \lambda(x) c_n] e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \quad (71.7)$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Чтобы убедиться в этом, положим

$$\begin{aligned} \gamma_0^* &= \gamma_0 - \lambda(x), \\ \gamma_n^* &= \gamma_n \quad \text{для } n \neq 0 \end{aligned}$$

и составим формальное произведение $\sum K_n^* e^{inx}$ рядов $\sum c_n e^{inx}$ и $\sum \gamma_n^* e^{inx}$. Правда, у последнего ряда γ_0^* не есть постоянная величина, но нетрудно убедиться, что доказательство леммы 2 не изменилось бы, если бы предположить γ_0 ограниченной функцией от x , что имеет место в нашем случае. Поэтому мы можем применить лемму 2, так как ряд $\sum \gamma_n^* e^{inx}$ быстро сходится к нулю на $[-\pi, \pi]$ и мы найдем, что $\sum K_n^* e^{inx}$ быстро сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Но

$$K_n^* = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p}^* = c_n [\gamma_0 - \lambda(x)] + \sum_{p \neq n} c_p \gamma_{n-p} = K_n - \lambda(x) c_n,$$

а поэтому

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$, и теорема 1 доказана.

Соединяя лемму 2 и только что доказанную теорему 1, мы можем высказать такое предложение, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

С л е д с т в и е 1. Пусть $\lambda(x)$ — функция, у которой ряд Фурье быстро сходится и $\sum c_n e^{inx}$ — ряд с коэффициентами $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$. Тогда формальное произведение ряда $\sum c_n e^{inx}$ и ряда Фурье для $\lambda(x)$ сходится к нулю всюду, где $\lambda(x) = 0$ (даже если ряд $\sum c_n e^{inx}$ расходится). В тех же точках, где $\lambda(x) \neq 0$, оно расходится, если расходится ряд $\sum c_n e^{inx}$ и сходится к $\lambda(x_0) S(x_0)$, если $\sum c_n e^{inx}$ сходится к $S(x_0)$.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что это утверждение можно усилить. Именно, если предположить $\lambda(x) \neq 0$ в некоторой точке, то

$$\overline{\lim} Q_n(x_0) = \lambda(x_0) \overline{\lim} S_n(x_0), \quad \text{при } \lambda(x_0) > 0$$

$$\underline{\lim} Q_n(x_0) = \lambda(x_0) \underline{\lim} S_n(x_0)$$

и

$$\overline{\lim} Q_n(x_0) = \lambda(x_0) \overline{\lim} S_n(x_0), \quad \text{при } \lambda(x_0) < 0.$$

$$\underline{\lim} Q_n(x_0) = \lambda(x_0) \underline{\lim} S_n(x_0)$$

Это непосредственно вытекает из рассмотрения частных сумм ряда

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx},$$

который, как мы видели, сходится к нулю. Поэтому, в частности, если $\overline{\lim} |S_n(x_0)| = +\infty$, то и $\overline{\lim} |Q_n(x_0)| = +\infty$.

Этот результат будет нами существенно использован в главе XIV.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает еще

С л е д с т в и е 2. Если ряд Фурье для $\lambda(x)$ быстро сходится и $\sum c_n e^{inx}$ равномерно сходится на E к $S(x)$, то формальное произведение равномерно сходится на E к $\lambda(x) S(x)$. Если на множестве F имеем $|\lambda(x)| > a > 0$, то равномерная сходимость формального произведения на E влечет равномерную сходимость $\sum c_n e^{inx}$ на нем.

З а м е ч а н и е 2. В следствиях 1 и 2 слова «сходимость» или «равномерная сходимость» могут быть заменены на «суммируемость» или «равномерная суммируемость» методом Римана. В самом деле, по теореме 1

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [K_n - \lambda(x) c_n] e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. В силу замечания к теореме 2 § 68 отсюда следует, что этот ряд равномерно суммируем к нулю методом Римана на $[-\pi, \pi]$, а это значит, что разность рядов

$$\sum K_n e^{inx} \quad \text{и} \quad \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

равномерно суммируется к нулю методом Римана на $[-\pi, \pi]$. Отсюда сразу и вытекает нужное заключение.

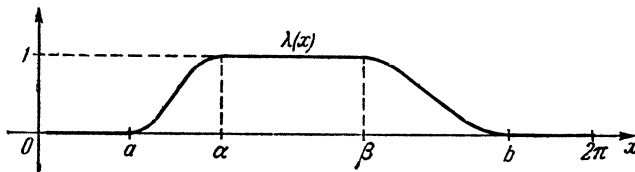


Рис. 14

Мы имеем теперь возможность доказать следующую важную теорему:

Т е о р е м а 2. Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Римана к нулю в каждой точке некоторого интервала (a, b) , то он сходится к нулю в каждой точке (a, b) и притом равномерно на всяком отрезке, целиком лежащем внутри (a, b) .

Пусть $\lambda(x) = 1$ на $[\alpha, \beta]$, $\lambda(x) = 0$ вне (a, b) и $\lambda(x)$ интерполируется между $[a, \alpha]$ и $[b, \beta]$ как угодно, лишь бы она имела непрерывные производные до 3-го порядка включительно (см. рис. 14). Мы уже говорили, что в таких условиях ряд $\sigma(\lambda)$ быстро сходится. Пусть

$$\sigma(\lambda) = \sum \gamma_n e^{inx}.$$

Составим формальное произведение (71.4) заданного ряда и ряда $\sigma(\lambda)$. Так как $\lambda(x) = 0$ вне (a, b) , то в силу следствия 1 ряд (71.4) сходится к нулю вне (a, b) и, значит, суммируется вне (a, b) к нулю методом Римана. Кроме того, в силу следствия 1 и замечания 2 о суммируемости ряд (71.4) суммируется к нулю методом Римана в каждой точке (a, b) , поскольку мы предположили, что это имеет место для ряда (71.2) на (a, b) . Итак, ряд (71.4) суммируется методом Римана к нулю в каждой точке на $[-\pi, \pi]$. Если так, то по теореме § 70 (см. замечание к ней) он имеет все коэффициенты равными нулю. Но по теореме 1 настоящего параграфа ряд

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Раз все $k_n = 0$, то это значит, что

$$\lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится равномерно к нулю на $[-\pi, \pi]$. Но $\lambda(x) = 1$ на $[a, \beta]$, поэтому $\sum c_n e^{inx}$ сходится равномерно к нулю на $[a, \beta]$, и доказательство теоремы 2 закончено.

Теперь мы можем выразить в точной форме и доказать теорему, которая несколько образно была сформулирована в начале этого параграфа. Именно мы имеем следующую теорему, известную под названием принципа локализации Римана.

Принцип локализации Римана. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции Римана для двух тригонометрических рядов, с коэффициентами, стремящимися к нулю; если эти функции равны на некотором интервале (a, b) или, хотя бы, если их разность есть линейная функция на (a, b) , то разность данных тригонометрических рядов есть ряд, сходящийся к нулю всюду на (a, b) и притом равномерно во всяком отрезке $[a, \beta]$, целиком лежащем внутри (a, b) .

Для доказательства теоремы рассмотрим два тригонометрических ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю. Пусть (71.2) есть разность этих рядов, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ их римановы функции. Тогда по условию теоремы риманова сумма $F(x)$ для ряда (71.2) есть линейная функция на (a, b) . Если так,

$$D^2 F(x) = 0 \quad \text{на } (a, b).$$

то Следовательно, ряд (71.2) суммируется к нулю методом Римана в каждой точке интервала (a, b) и остается применить теорему 2.

Из принципа локализации Римана сразу следует справедливость выказанного в начале этого параграфа утверждения: сходимости или расходимости ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, зависит лишь от поведения функции Римана.

Действительно, если для двух рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, имеем $F_1(x) = F_2(x)$ на (a, b) , то сходимости или расходимости обоих рядов в любой точке $x \in (a, b)$ может иметь место только одновременно (и притом если они сходятся, то имеют одинаковую сумму). Именно в этом смысле и надо понимать, что сходимости или расходимости зависит только от поведения функции Римана.

Полезно еще отметить, что доказанный здесь общий принцип локализации Римана содержит как частный случай принцип локализации Римана для рядов Фурье (см. § 33). Действительно, если два заданных ряда являются рядами Фурье от $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ получаются в результате двукратного интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. § 70), а потому, если $f_1(x) = f_2(x)$ на (a, b) , то $F_1(x) - F_2(x)$ будет линейной на этом интервале, и если общий принцип локализации уже доказан, то можно утверждать, что $\sigma(f_1) - \sigma(f_2)$ сходится к нулю на (a, b) всюду и притом равномерно на $[a, \beta]$, лежащем внутри (a, b) .

В главе XIV мы увидим ту роль, которую играет установленный здесь принцип локализации Римана.

§ 72. Теорема дю Буа-Реймона

Пусть $f(x)$ — функция, конечная в каждой точке $[-\pi, \pi]$. Мы уже видели (см. § 70), что не может существовать двух различных тригонометрических рядов, сходящихся к ней всюду на $[-\pi, \pi]$. Но если существует один такой ряд, должен ли он быть ее рядом Фурье?

Вопрос, разумеется, имеет смысл только для суммируемой $f(x)$, так как иначе ряд Фурье просто нельзя было бы написать (мы всегда говорим лишь о рядах Фурье — Лебега).

Заметим, что сходимость тригонометрического ряда в каждой точке вовсе не влечет того, чтобы он был рядом Фурье. Действительно, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

сходится всюду, так как это ряд по синусам с монотонно убывающими коэффициентами (см. § 30); однако он не является рядом Фурье (см. § 40).

Поэтому вопрос естественно поставить так: пусть $f(x)$ конечна в каждой точке и суммируема. Пусть существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду на $[-\pi, \pi]$. Будет ли этот ряд ее рядом Фурье?

Мы здесь дадим на этот вопрос положительный ответ в том случае, когда $f(x)$ ограниченная функция; именно в таком виде теорема была доказана Лебегом, обобщившим первоначальный результат дю Буа-Реймона*). Но прежде чем доказывать эту теорему, мы должны убедиться в справедливости следующей леммы:

Л е м м а. Если $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$m \leq D^2 F(x) \leq M \quad \text{на} \quad (a, b),$$

то для любых x_0 и h таких, что $a \leq x_0 - 2h < x_0 + 2h \leq b$, имеем

$$m \leq \frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2} \leq M.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} \Psi(x) = F(x_0) + (x - x_0) \frac{F(x_0 + 2h) - F(x_0 - 2h)}{4h} + \\ + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\Psi(x)$ есть многочлен второй степени относительно x , причем

$$\Psi(x_0 + 2h) = F(x_0 + 2h), \quad \Psi(x_0) = F(x_0) \quad \text{и} \quad \Psi(x_0 - 2h) = F(x_0 - 2h),$$

т. е. разность

$$r(x) = F(x) - \Psi(x)$$

обращается в нуль при $x = x_0 - 2h$, x_0 и $x_0 + 2h$. Кроме того, $r(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$D^2 r(x) = D^2 F(x) - \frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2}.$$

Так как $r(x)$ имеет минимум и максимум где-то внутри $(x_0 - 2h, x_0 + 2h)$, пусть в каких-то точках x_1 и x_2 , и в них заведомо $D^2 r(x_1) \geq 0$ и $D^2 r(x_2) \leq 0$, то

*) Дю Буа-Реймон (du Bois-Reymond [2]) рассматривал лишь случай ограниченных функций, интегрируемых в смысле Римана.

отсюда сразу ясно, что

$$D^2 F(x_2) \leq \frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2} \leq D^2 F(x_1),$$

откуда и следует справедливость леммы.

Мы теперь можем доказать теорему:

Теорема дю Буа-Реймона — Лебега. Если $f(x)$ ограничена на $[-\pi, \pi]$ и существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (72.1)$$

сходящийся к ней всюду на этом отрезке, то этот ряд есть ее ряд Фурье.

Прежде всего заметим, что из сходимости ряда (72.1) следует $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$ (см. § 62). Поэтому можно построить функцию Римана и получить, как в § 68

$$\frac{F(x_0 + 2h) + F(x_0 - 2h) - 2F(x_0)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \quad (72.2)$$

В силу теоремы Римана (см. § 68, теорема 1) имеем в каждой точке

$$D^2 F(x) = f(x). \quad (72.3)$$

Но $f(x)$ по условию ограничена; значит, по предыдущей лемме

$$\left| \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2} \right| \leq M, \quad (72.4)$$

где M постоянное (и это для любых h и любых x , $-\pi \leq x \leq \pi$). Далее заметим, что $f(x)$, как сумма всюду сходящегося ряда непрерывных функций, измерима, а значит, будучи измеримой и ограниченной, она суммируема.

Из равномерной сходимости (72.2) следует, что он является рядом Фурье от функции, стоящей в левой части равенства, т. е.

$$a_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2} \cos nx \, dx \quad (72.5)$$

и аналогично

$$b_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2} \sin nx \, dx. \quad (72.6)$$

Но

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2}.$$

Поэтому в силу (72.3)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2} = f(x).$$

Если мы теперь заметим, что в силу (72.4) подынтегральные выражения в интегралах (72.5) и (72.6) ограничены при любых x и h одним и тем же числом M (это верно для всякого n), то можно совершить предельный

переход под знаком интеграла, а потому

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{h \rightarrow 0} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \end{aligned}$$

и аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

а это и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Мы предположили $f(x)$ ограниченной, но указанная теорема допускает значительные обобщения. Можно также не требовать сходимости ряда в каждой точке $[0, 2\pi]$ (см. об этом главу XIV, § 4).

ГЛАВА II

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

В этой главе мы ставим перед собой следующие задачи:

А. Зная свойства функции, оценить скорость, с которой ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю (то, что они должны стремиться к нулю, было доказано в § 19 гл. I).

Б. Имея последовательности чисел

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

установить, существует ли функция, имеющая их своими коэффициентами Фурье, и если да, то каковы ее свойства.

К сожалению, эти задачи далеко не могут считаться полностью решенными. Поэтому мы вынуждены решать их частично. Так, например, мы изучаем скорость стремления к нулю для коэффициентов Фурье функции с ограниченным изменением (см. § 2) для функций из класса $Lip\ \alpha$ (см. § 3), для функций из класса L^p ($p > 1$) (§§ 4 и 5). Но в то же время мы показываем, что если $f(x)$ только суммируема, то ее коэффициенты могут стремиться к нулю как угодно медленно (§ 6). С другой стороны, мы показываем (см. § 7), что если не учитывать знаков чисел a_n и b_n , а налагать ограничение только на их абсолютные величины, то и задачу Б нельзя решить, кроме того случая, когда $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ (этот случай был уже разобран в § 16 гл. I).

Таким образом, вопрос о поведении коэффициентов Фурье для $f(x) \in L$ является очень тонким вопросом. Мы указываем все же в § 9 некоторые необходимые условия для этих коэффициентов, и даже в § 10 условия необходимые и достаточные, однако они являются очень мало прозрачными. Решение проблемы Б, или так называемой «тригонометрической проблемы моментов», служило предметом многих работ, но, к сожалению, здесь формулировки таковы, что для конкретно заданной последовательности чисел не удается выяснить, являются ли они коэффициентами Фурье, и тем более найти соответствующую функцию. Большинство теорем оказываются сведением поставленного вопроса к некоторому другому, тоже весьма трудному. Поэтому полученные результаты мы приводим в § 11 без доказательств.

§ 12 посвящен вопросу несколько иного рода: можно ли утверждать, что тригонометрический ряд должен быть рядом Фурье, если все его частные суммы неотрицательны при любом x ? Этот вопрос тоже не решен до конца, но мы сочли целесообразным изложить то, что в этом направлении известно. Наконец, в § 13 мы касаемся вопроса о преобразованиях рядов Фурье.

§ 2. Порядок коэффициентов Фурье для функций с ограниченным изменением. Критерий для непрерывности функции с ограниченным изменением

1. Порядок коэффициентов Фурье для функций с ограниченным изменением. Мы видели (см. гл. I, § 22), что если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

Мы знаем, что если $f(x)$ разрывна, то эту оценку улучшить нельзя, так как разрывы у функций с ограниченным изменением могут быть только 1-го рода, а при этих условиях улучшение оценки (1) невозможно (см. глава I, § 42).

Возникает вопрос, нельзя ли утверждать, что

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

если $f(x)$, кроме того, еще непрерывна. Мы покажем, что и это неверно.

С этой целью мы построим на отрезке $[0, 2\pi]$ множество, подобное классическому канторовскому, которое строится на отрезке $[0, 1]$, т. е. выбросим сначала из сегмента $[0, 2\pi]$ интервал $\delta_1^{(1)}$ с центром в точке π и длины $\frac{2\pi}{3}$, затем из каждых двух оставшихся сегментов выбросим интервалы $\delta_1^{(2)}$ и $\delta_2^{(2)}$ длины $\frac{2\pi}{3^2}$ с центрами в серединах отрезков $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$, из которых они выбрасывались, и т. д. Если $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2\pi) = 1$, $\Phi(x) = \frac{1}{2}$ на $\delta_1^{(1)}$, $\Phi(x) = \frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно на $\delta_1^{(2)}$ и $\delta_2^{(2)}$ и т. д. и она дополняется по непрерывности в точках канторовского множества, то получается классическая канторова ступенчатая кривая, которая возрастает от 0 до 1, причем $\Phi'(x) = 0$ почти всюду.

Если мы положим $f(x) = \Phi(x) - \frac{x}{2\pi}$, то $f(0) = f(2\pi) = 0$, а потому $f(x)$ непрерывна не только внутри отрезка $[0, 2\pi]$, но и на всей бесконечной оси, если положить $f(x + 2\pi) = f(x)$. Ясно, что она имеет ограниченное изменение и, однако, мы сейчас покажем, что ее коэффициенты Фурье не могут иметь порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а лишь $O\left(\frac{1}{n}\right)$. С этой целью мы проинтегрируем по частям интеграл в правой части равенства

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\Phi(x) - \frac{x}{2\pi} \right] e^{-inx} dx,$$

что дает

$$c_n = \frac{1}{2\pi ni} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi = \frac{P_n}{2\pi ni}$$

(здесь интеграл взят в смысле Стильеса, см. Вводный материал, § 16).

Докажем, что для $n = 3^m$ ($m = 0, 1, \dots$) все числа P_n равны между собой и отличны от нуля, откуда и будет следовать, что $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, но $c_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Имеем

$$P_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi.$$

Поэтому, так как $\Phi(x)$ постоянна на $\delta_1^{(1)}$, а на сегменте $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ она меняется так же, как на $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, только поднята на $\frac{1}{2}$ вверх, то

$$P_{3m} = \int_0^{2\pi} e^{-i3mx} d\Phi = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-i3mx} d\Phi;$$

но, совершая здесь замену переменного $3x = t$, получим

$$P_{3m} = 2 \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\Phi = P_{3^{m-1}},$$

так как $\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\Phi(x)$. Отсюда видно, что

$$P_{3^m} = P_{3^0} = P_1 = \int_0^{2\pi} e^{-ix} d\Phi.$$

Остается показать, что эта величина $P_1 \neq 0$. Для этого мы рассмотрим ее действительную часть, т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x d\Phi &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi = 2 \left(\int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos x d\Phi + \int_{\frac{4\pi}{9}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi \right) = \\ &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \left[\cos x + \cos\left(x + \frac{4\pi}{9}\right) \right] d\Phi = 4 \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos\left(x + \frac{2\pi}{9}\right) \cos \frac{2\pi}{9} x d\Phi \geq \\ &\geq 4 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \int_0^{\frac{2\pi}{9}} d\Phi = \frac{8\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} > 0, \end{aligned}$$

и таким образом наше утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. То, что коэффициенты Фурье от построенной нами функции не имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, можно вывести также из общих теорем, касающихся проблемы единственности разложения функции в тригонометрический ряд (см. глава XIV, § 7), но мы предпочли сделать это здесь непосредственным вычислением, чтобы не отсылать читателя к тонким методам там, где можно обойтись очень простыми рассуждениями.

З а м е ч а н и е 2. Возникает вопрос, нельзя ли, наоборот, по поведению коэффициентов Фурье установить, что функция имеет ограниченное изменение. Укажем здесь достаточное условие Лоренца (Lorentz^[1]):

1) если $1 \leq p \leq 2$ и

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2)$$

или

2) если $2 \leq p \leq \infty$ и

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}}\right), \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (2.3)$$

то $f(x)$ имеет ограниченное изменение. При этом Лоренц показывает на примерах, что теорема утратит силу, если в формуле (2.2) заменить $\frac{1}{n}$ на $\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha < 1$ или в (2.3) заменить $\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}$ любым меньшим числом.

2. Критерий для непрерывности функции с ограниченным изменением. Мы доказали, что существуют непрерывные функции с ограниченным изменением, у которых коэффициенты имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а не $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Возникает вопрос, нельзя ли по характеру коэффициентов Фурье заключить о непрерывности функции с ограниченным изменением? Ответ на этот вопрос можно указать в нескольких различных формах. Одной из таких форм является

Теорема Винера (Wiener^[1]). *Для того чтобы функция с ограниченным изменением была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n}{n} = 0, \quad (2.4)$$

где $e_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Мы сначала докажем, что необходимое и достаточное условие может быть записано в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{\infty} e_k^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = 0, \quad (2.5)$$

а потом докажем эквивалентность условий (2.4) и (2.5).

Если ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

то

$$f(x+t) \sim \frac{1}{2} A_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos mx + B_m(t) \sin mx,$$

где

$$A_m(t) = a_m \cos mt + b_m \sin mt, \quad A_0(t) = \frac{a_0}{2},$$

$$B_m(t) = b_m \cos mt - a_m \sin mt,$$

следовательно,

$$f(x+t) - f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(t) \cos mx + \beta_m(t) \sin mx,$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_m(t) &= A_m(t) - a_m = a_m(\cos mt - 1) + b_m \sin mt = \\ &= 2 \sin m \frac{t}{2} \cos m \frac{t}{2} b_m - 2 \sin^2 m \frac{t}{2} a_m = \\ &= \left(b_m \cos m \frac{t}{2} - a_m \sin m \frac{t}{2} \right) 2 \sin m \frac{t}{2} = B_m\left(\frac{t}{2}\right) 2 \sin m \frac{t}{2}; \\ \beta_m(t) &= B_m(t) - b_m = b_m(\cos mt - 1) - a_m \sin mt = \\ &= 2 \sin \frac{mt}{2} \left(-b_m \sin m \frac{t}{2} - a_m \cos m \frac{t}{2} \right) = -2 \sin \frac{mt}{2} A_m\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos mx - A_m\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin mx \right] \sin m \frac{\pi}{2n}$$

и, следовательно, по равенству Парсеваля

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right]^2 dx &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + B_m^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right] \sin^2 m \frac{\pi}{2n} = \\ &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

В силу периодичности подынтегрального выражения имеем для любого k

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left[x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right] \right)^2 dx = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}.$$

Заставляя k пробегать значения $1, 2, \dots, 2n$ и складывая полученные равенства, найдем

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2 dx = 8\pi n \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}. \quad (2.6)$$

Если заметить, что в случае непрерывности $f(x)$ имеем

$$\left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ (см. Вводный материал, § 25), то

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2 &\leq \\ &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq V \omega\left(\frac{\pi}{n}\right),\end{aligned}$$

где V — полное изменение $f(x)$. Поэтому в силу (2.6)

$$n \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n} \leq \frac{1}{4} V \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

и, значит, если $f(x)$ непрерывна, то условие (2.5) действительно выполняется.

Допустим теперь, что $f(x)$ разрывна. Значит, найдется такая точка ξ , что $|f(\xi + 0) - f(\xi - 0)| = d \neq 0$.

Мы условимся считать

$$f(\xi) = \frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2}.$$

Тогда для всех достаточно больших n любой отрезок $[a, \beta]$ длины $\frac{\pi}{n}$ содержащий точку ξ , таков, что в нем $|f(\beta) - f(a)| > \frac{d}{3}$, следовательно, для любого x в сумме $\sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2$ содержится член, превосходящий $\frac{d^2}{9}$, а потому и интеграл от этой суммы не меньше чем $\frac{2\pi}{9} d^2$, т. е. не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Итак, мы доказали, что условие (2.5) необходимо и достаточно для непрерывности $f(x)$.

Докажем теперь, что (2.5) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 q_k^2 = 0. \quad (2.7)$$

Возьмем целое число r , которое подберем позже, и, обозначая через P_n число, стоящее в левой части формулы (2.5), разобьем P_n на два слагаемых

$$n \sum_{k=1}^{nr} q_k^2 \sin^2 k \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad n \sum_{k=nr+1}^{\infty} q_k^2 \sin^2 k \frac{\pi}{2n}.$$

Мы видим, что

$$P_n < n \sum_{k=1}^{nr} q_k^2 \left(k \frac{\pi}{2n}\right)^2 + n \sum_{k=nr+1}^{\infty} q_k^2.$$

Обозначим через Q_n сумму, стоящую в левой части (2.7). Мы знаем (см. гл. I, § 22), что

$$|a_k| \leq \frac{V}{k} \quad \text{и} \quad |b_k| \leq \frac{V}{k},$$

откуда

$$q_k^2 \leq 2 \frac{V^2}{k^2}$$

и, значит,

$$P_n < \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2 V_n^2 \sum_{nr+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2 \frac{V^2}{r}. \quad (2.8)$$

Взяв r достаточно большим, мы можем сделать второй член правой части (2.8) как угодно малым. После этого мы r зафиксируем, а n устремим в бесконечность, тогда при $Q_n \rightarrow 0$ получим $P_n \rightarrow 0$.

Наоборот, если $P_n \rightarrow 0$, то и подавно

$$n \sum_{k=1}^n q_k^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \rightarrow 0,$$

а так как при $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin u \geq \frac{2}{\pi} u$, то и

$$n \sum_{k=1}^n q_k^2 \left(\frac{k}{n}\right)^2 \rightarrow 0,$$

а это и значит, что $Q_n \rightarrow 0$. Итак, эквивалентность (2.5) и (2.7) установлена.

Полагая

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k q_k,$$

имеем, в силу неравенства Буняковского,

$$T_n^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \varrho_k \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} n \sum_{k=1}^n (k \varrho_k)^2 \leq Q_n$$

и, значит, из $Q_n \rightarrow 0$ следует $T_n \rightarrow 0$.

С другой стороны, так как

$$\varrho_k < \sqrt{2} \frac{V}{k},$$

то

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k \varrho_k)^2 < \sqrt{2} V \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \varrho_k = \sqrt{2} V T_n,$$

а потому из $T_n \rightarrow 0$ следует $Q_n \rightarrow 0$.

Итак, (2.7) и (2.4) эквивалентны, а поэтому эквивалентны (2.5) и (2.4). Следовательно, теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы Винера вытекает, что если $f(x)$ с ограниченным изменением и

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $f(x)$ непрерывна. Это было уже доказано в § 42 главы I.

З а м е ч а н и е 2. С. М. Лозинский [2] дал другую форму условия, при котором функция с ограниченным изменением оказывается непрерывной, а именно: для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^n \varrho_k = o(\ln n),$$

где снова $\varrho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

§ 3. 0 коэффициентах Фурье для функций из класса $\text{Lip } \alpha$

Пусть

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда (см. Lorentz [1]) имеем:

Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ и $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ ($0 < p \leq 2$), то

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}.$$

Действительно, так как для $f(x+h) - f(x-h)$ ряд Фурье имеет вид

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nh, \quad (3.1)$$

то, в силу равенства Парсеваля и $f \in \text{Lip } \alpha$,

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kh = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+h) - f(t-h)]^2 dt \leq Ch^{2\alpha},$$

где C — постоянное. Поэтому при любом n

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kh \leq C |h|^{2\alpha}$$

и, полагая $h = \frac{\pi}{4n}$ и замечая, что тогда $\sin^2 kh \geq \frac{1}{2}$ при $n \leq k \leq 2n - 1$, найдем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \leq C_1 \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

где C_1 — новая константа.

Применяя неравенство Гельдера, находим отсюда

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leq \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{p}{2}} (2n)^{1-\frac{p}{2}},$$

откуда

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leq \frac{C_2}{n^{p(\alpha+\frac{1}{2})-1}}.$$

Но тогда из $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ заключаем

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} &= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j n}^{2^{j+1}n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{C_2}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p(\alpha+\frac{1}{2})-1}} \right)^j \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_3}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. В частности, при $p = 2$ отсюда получаем, что для $f \in \text{Lip } \alpha$

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

С л е д с т в и е 2. Если $\alpha > \frac{1}{2}$, то теорему можно применить при $p = 1$, откуда

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right),$$

и так как правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то отсюда вытекает теорема Бернштейна: если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно.

(Эта теорема будет также доказана иначе в гл. IX.)

Лоренц показывает на примерах, в каком смысле его теорему нельзя улучшить. Мы не будем останавливаться на этом, отсылая к работе автора, здесь же докажем другую теорему Лоренца, где, наоборот, по поведению коэффициентов Фурье можно заключить, что $f(x)$ принадлежит к некоторому классу Липшица, а именно:

Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

то $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

Действительно, из условия теоремы следует

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{C}{n^a},$$

поэтому

$$\sum_{k=n}^{2n-1} k(|a_k| + |b_k|) \leq 2Cn^{1-a}.$$

В силу того, что ряд Фурье для $f(x+h) - f(x-h)$ имеет вид (3.1), имеем

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x-h)| &\leq 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} (|a_k| + |b_k|) k|h| + 2 \sum_{k=2^n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \\ &\leq C_1 |h| \sum_{j=1}^n 2^{(1-a)(j-1)} + 2 \frac{C}{2^{an}} \leq C_2 \left(|h| 2^{(1-a)n} + \frac{1}{2^{an}} \right). \end{aligned}$$

Если мы выберем n так, чтобы

$$\frac{1}{2^n} < |h| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

то отсюда

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq \frac{K}{2^{na}} \leq K|h|^a,$$

где K — новое постоянное, и теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right),$$

то

$$f(x) \in \text{Lip } \alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Действительно, в этом случае $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$, и мы находимся в условиях предыдущей теоремы.

В работе Лоренца читатель найдет ряд других интересных теорем о функциях, принадлежащих к классу $\text{Lip } \alpha$, и некоторых их обобщениях.

§ 4. Связь между степенью суммируемости функции и коэффициентами Фурье

Известно (см. гл. I, §§ 13 и 16), что если $f(x) \in L^2$ и $\{c_n\}$ — ее коэффициенты Фурье по любой нормированной ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

и это неравенство превращается в равенство, если система полна. Напротив, если дана последовательность чисел $\{c_n\}$, для которых $\sum |c_n|^2 < +\infty$, то найдется $f(x) \in L^2$, для которой эти числа будут коэффициентами Фурье и

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Вопрос теперь ставится так: если p — любое число, лишь бы $p > 1$, и мы знаем, что $f(x) \in L^p$, то что можно сказать об ее коэффициентах Фурье?

И наоборот, если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < +\infty$, то существует ли функция, имеющая эти c_n своими коэффициентами Фурье, и какова степень ее суммируемости?

Ответы на эти вопросы для случая тригонометрической системы даются теоремой Хаусдорфа—Юнга (см. Hausdorff^[1] и W. H. Young^{[4],[5]}), для общей ортогональной — теоремой Рисса (см. F. Riesz^[2]). Прежде чем их сформулировать, введем обозначения. Мы будем писать

$$\|f\|_r = \left\{ \int_a^b |f|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}}$$

и

$$\|c\|_r = \left\{ \sum_n |c_n|^r \right\}^{\frac{1}{r}},$$

где r — любое положительное число. Будем обозначать через p число, удовлетворяющее неравенствам

$$1 < p < 2$$

и через q число, определяемое формулой

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда $q > 2$. Имеем теорему:

Т е о р е м а Х а у с д о р ф а — Ю н г а. 1) Пусть

$$f(t) \in L^p(0, 1)$$

и пусть

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.1)$$

т. е. c_n — ее коэффициенты Фурье по нормированной и ортогональной на $(0, 1)$ системе $\{e^{2\pi i n t}\}$. Тогда

$$\|c\|_q \leq \|f\|_p. \quad (4.2)$$

2) Если c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — последовательность чисел, для которой $\|c\|_p < +\infty$, то существует такая $f(t) \in L^q(0, 1)$, для которой удовлетворено условие (4.1) и

$$\|f\|_q \leq \|c\|_p. \quad (4.3)$$

Эта теорема есть частный случай более общего результата Ф. Рисса:

Т е о р е м а Ф. Р и с с а. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — нормированная ортогональная система, состоящая из функций, ограниченных в своей совокупности

$$|\varphi_n(t)| \leq M, \quad \begin{matrix} a \leq t \leq b, \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (4.4)$$

1) Если $f \in L^p(a, b)$, то коэффициенты Фурье

$$c_n = \int_a^b f \bar{\varphi}_n dt \quad (4.5)$$

от $f(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ удовлетворяют условию

$$\|c\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|f\|_p. \quad (4.6)$$

2) Если для последовательности чисел c_n имеем $\|c\|_p < +\infty$, то существует функция $f(t) \in L^q(a, b)$, удовлетворяющая (4.5) для всех n и такая, что

$$\|f\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|c\|_p. \quad (4.7)$$

Существует несколько доказательств этой теоремы*). Мы дадим здесь доказательство, принадлежащее Зигмунду и Кальдерону (см. Calderon and Zygmund^[1]) и построенное на применении принципа Фрагмена—Линделефа (см. Добавления, § 1).

Доказательство теоремы Ф. Рисса. Мы начинаем с первой части теоремы и прежде всего заметим, что, не нарушая общности, можно сделать следующие предположения:

- а) система $\{\varphi_n\}$ состоит из конечного числа функций,
- б) функция f ступенчатая,
- в) $\|f\|_p = 1$.

Действительно, мы можем всегда подобрать ступенчатую функцию $f^*(t)$ так, чтобы $\|f - f^*\|_p < \varepsilon$; обозначая через c_n^* ее коэффициенты Фурье, получаем из (4.5) по неравенству Гельдера (см. Вводный материал, § 9)

$$\begin{aligned} |c_n - c_n^*| &\leq \|f - f^*\|_p \|\varphi_n\|_q \leq \varepsilon \left(\int_a^b |\varphi_n|^{q-2} |\varphi_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \varepsilon M^{\frac{q-2}{q}} \left(\int_a^b |\varphi_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \varepsilon M^{1-\frac{2}{q}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как мы предположили, что система $\{\varphi_n(x)\}$ состоит из конечного числа функций, то отсюда следует справедливость неравенства (4.6) в общем случае, если оно было доказано только для ступенчатых функций.

Далее, если неравенство (4.5) доказано для любого конечного числа функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, то, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, видим, что оно остается справедливым.

Наконец, законность гипотезы в) следует из того, что при умножении f на константу обе части неравенства (4.5) умножаются на эту же константу.

Итак, ни одно из сделанных предположений не нарушает общности доказываемой теоремы.

Заметим теперь, что всегда можно подобрать числа d_n так, чтобы

$$\|c\|_q = \sum c_n d_n, \quad (4.9)$$

причем $\|d\|_p = 1$. Действительно, для этого достаточно принять, например,

$$d_n = |c_n|^{q-1} \frac{e^{-i \arg c_n}}{\|c\|_q^{q-1}}$$

(равенство (4.9) тогда получается мгновенно, а

$$\|d\|_p^p = \frac{\sum |c_n|^{p(q-1)}}{(\|c\|_q^{q-1})^p} = \frac{\sum |c_n|^q}{\sum |c_n|^q} = 1,$$

ибо $p(q-1) = q$).

Положим

$$d_n = D_n^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n, \quad \text{где } |\varepsilon_n| = 1, \text{ а } D_n \geq 0,$$

тогда

$$\sum D_n = 1. \quad (4.10)$$

Кроме того, положим

$$f(t) = F^{\frac{1}{p}}(t) \eta(t), \quad \text{где } F(t) \geq 0, \text{ а } |\eta(t)| = 1,$$

*) Доказательство, принадлежащее Риссу, можно найти в книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

тогда в силу $\|f\|_p = 1$ имеем

$$\int_a^b F(t) dt = 1. \quad (4.11)$$

Мы можем теперь выразить коэффициенты c_n так:

$$c_n = \int_a^b F_p^1(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt$$

и, принимая во внимание (4.9),

$$\|c\|_q = \sum D_n^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n \int_a^b F_p^1(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt.$$

Если мы теперь заменим $\frac{1}{p}$ через z , т. е. рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \sum D_n^z \varepsilon_n \int_a^b F^z(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt, \quad (4.12)$$

то каждый из интегралов в правой части равенства (4.12) (в силу того, что f — ступенчатая) есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами выражений вида λ^z , где все λ положительны. Но тогда и $\Phi(z)$ есть такая же линейная комбинация, а потому она ограничена в любой вертикальной полосе плоскости z .

Оценим верхнюю грань $\Phi(z)$ на прямых $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. Для $x = 1$ из (4.10) и (4.11) находим

$$|\Phi(z)| \leq \sum D_n |\varepsilon_n| \int_a^b F |\varphi_n| dt \leq M \sum D_n \int_a^b F dt = M.$$

Для $z = \frac{1}{2} + iy$, применяя неравенства Буняковского к правой части (4.12), найдем

$$|\Phi| \leq (\sum D_n)^{\frac{1}{2}} (\sum |\int_a^b F^{\frac{1}{2}+iy}(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

В силу неравенства Бесселя, так как интегралы в правой части неравенства (4.13) являются коэффициентами Фурье от $F^{\frac{1}{2}+iy}(t) \eta(t)$, имеем

$$|\Phi| \leq (\sum D_n)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b F dt)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Итак, $|\Phi(z)| \leq M$ на $x = 1$ и $|\Phi(z)| \leq 1$ на $x = \frac{1}{2}$. Если мы хотим применить вторую форму принципа Фрагмена—Линделефа (см. Добавления, § 1) для оценки $\Phi(z)$ в полосе $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, то надо подобрать линейную функцию $L(t)$ так, чтобы она равнялась 0 при $t = 1$ и равнялась 1 при $t = \frac{1}{2}$. Такой функцией будет $L(t) = 2(1-t)$. Полагая $M_1 = 1$ и $M_2 = M$, находим тогда $|\Phi(x_0 + iy_0)| \leq 1^{2(1-x_0)} M^{1-2(1-x_0)}$ для $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$, $-\infty < y_0 < \infty$;

отсюда, так как

$$\|c\|_q = \Phi\left(\frac{1}{p}\right),$$

находим

$$\|c\|_q \leqslant 1^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)} M_p^{\frac{2}{p}-1} = M_p^{\frac{2}{p}-1},$$

а это и заканчивает доказательство первой половины теоремы.

Для доказательства второй половины фиксируем число N и положим

$$f_N(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_N \varphi_N(t),$$

где $\{c_n\}$ — заданная последовательность чисел.

Так как $|\varphi_n| \leqslant M$, то $\varphi_n \in L^q$, значит и $f_N \in L^q$. Мы всегда можем выбрать $g(t)$ так, чтобы $\|g\|_p = 1$ и

$$\|f_N\|_q = \int_a^b \bar{f}_N g \, dt. \quad (4.14)$$

Действительно, для этого достаточно положить хотя бы

$$g(t) = |f_N(t)|^{q-1} \frac{e^{i \arg f_N(t)}}{\|f_N\|_q^{q-1}},$$

так как тогда (4.14) следует из того, что

$$\int_a^b \bar{f}_N g \, dt = \frac{\int_a^b \bar{f}_N |f_N|^{q-1} e^{i \arg f_N(t)} \, dt}{\left\{ \int_a^b |f_N|^q \, dt \right\}^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{\int_a^b |f_N|^q \, dt}{\left\{ \int_a^b |f_N|^q \, dt \right\}^{\frac{q-1}{q}}} = \|f_N\|_q$$

и при этом

$$\|g\|_p^p = \int_a^b |g|^p \, dt = \frac{\int_a^b \bar{f}_N |f_N|^{p(q-1)} \, dt}{\left(\int_a^b |f_N|^q \, dt \right)^{\frac{p(q-1)}{q}}} = \frac{\int_a^b |f_N|^q \, dt}{\int_a^b |f_N|^q \, dt} = 1.$$

Обозначая через d_n коэффициенты Фурье от $g(t)$, получаем

$$\|f_N\|_q = \int_a^b \bar{f}_N g \, dt = \sum \bar{c}_n d_n \leqslant \left(\sum_1^N |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^N |d_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Но на основании первой половины теоремы мы имеем

$$\left(\sum |d_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M_p^{\frac{2}{p}-1} \|g\|_p = M_p^{\frac{2}{p}-1},$$

а потому

$$\|f_N\|_q \leqslant M_p^{\frac{2}{p}-1} \left(\sum_1^N |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.15)$$

Раз так, то

$$\|f_{N+k} - f_N\|_q \leqslant M_p^{\frac{2}{p}-1} \left(\sum_{N+1}^{N+k} |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

при любом k , откуда следует, что $\{f_N\}$ сходится по норме пространства L^q . Значит (см. Вводный материал, § 21), найдется такая $f \in L^q$, что $\|f - f_N\|_q \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$; тогда, заставляя $N \rightarrow \infty$, мы из (4.15) получим

$$\|f\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|c\|_p$$

и остается только доказать, что числа c_n являются коэффициентами Фурье от f , чтобы теорема была полностью доказана.

Но так как

$$\left| \int_a^b (f_N - f) \bar{\varphi}_n dt \right| \leq \|f_N - f\|_q \|\bar{\varphi}_n\|_p \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}} \|f - f_N\|_q \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, то

$$c_n = \int_a^b f \bar{\varphi}_n dt,$$

и доказательство закончено*).

З а м е ч а н и е 1. Мы здесь не изучаем вопроса о том, когда неравенства в теореме Ф. Рисса обращаются в равенства. Отсылаем интересующихся к работе Зигмунда и Кальдерона.

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы Рисса существенно использовалось предположение, что $p > 1$. Однако сама теорема Рисса, а следовательно и теорема Хаусдорфа—Юнга, остается справедливой и при $p = 1$. В этом случае $q = \infty$, и если условиться считать (см. Вводный материал, § 9)

$$\|f\|_\infty = \sup |f|$$

и аналогично принять

$$\|c\|_\infty = \max_n |c_n|,$$

то оба утверждения теоремы Рисса оказываются верны, в чем можно мгновенно убедиться.

З а м е ч а н и е 3. В доказанной теореме Рисса, как в утверждении 1), так и в утверждении 2), предполагалось $p \leq 2$ и тем самым $q \geq 2$. Таким образом из суммируемости $|f|^p$ мы заключали о сходимости $\sum |c_n|^q$ при $p \leq 2$, а также из сходимости $\sum |c_n|^p$ делали вывод о суммируемости $|f|^q$ при $p \leq 2$.

Мы хотим показать, что оба утверждения перестают быть верными, если числа p и q поменять местами, иначе говоря, если считать $p > 2$. В этом можно убедиться на примерах. Мы рассмотрим случай тригонометрической системы.

Действительно, если бы утверждение 1) было верно и для $p > 2$, то, так как непрерывная функция суммируема в любой степени p , можно было бы утверждать, что для такой функции сходится ряд

$$\sum |a_n|^q + |b_n|^q,$$

считая q как угодно близким к 1. А между тем в главе IV, § 14 мы покажем, что можно построить такую непрерывную функцию, для которой при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum |a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon} = +\infty.$$

*) Обращаем внимание читателей на работу Marcinkiewicz and Zygmund [4], где дается некоторое обобщение этой теоремы.

Точно так же и утверждение 2) перестает быть верным при $p > 2$. Действительно, если мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{\sqrt[n]{n}},$$

то

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p < +\infty$$

для любого $p > 2$.

Следовательно, если бы утверждение 2) при $p > 2$ было верным, то рассматриваемый ряд был бы рядом Фурье от $f(x) \in L^q$. А между тем в главе XI, § 3 мы убедимся, что этот ряд не может быть рядом Фурье, так как там будет доказано, что лакунарный ряд является рядом Фурье только при условии сходимости ряда из квадратов его коэффициентов, а в нашем случае этот ряд расходится.

Укажем один простой факт, вытекающий из теоремы Хаусдорфа—Юнга.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, то оба ряда

$$\sum \left| \frac{a_n}{n} \right| \quad \text{и} \quad \sum \left| \frac{b_n}{n} \right|$$

сходятся.

Действительно, если $p \geq 2$, то $f \in L^p$ влечет $f \in L^2$, а тогда достаточно заметить, что

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$$

и аналогично для b_n .

Если же $1 < p \leq 2$, то по теореме Хаусдорфа—Юнга должен сходиться ряд $\sum |a_n|^q + |b_n|^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Но тогда для любого m

$$\sum_{n=1}^m \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

где C постоянно, так как $\sum \left(\frac{1}{n} \right)^p < +\infty$ при $p > 1$. Значит, $\sum \left| \frac{a_n}{n} \right| < +\infty$; рассуждение для $\sum \frac{b_n}{n}$ совершенно такое же.

Из доказанной теоремы, в частности, следует сходимость рядов

$$\sum \frac{a_n}{n} \quad \text{и} \quad \sum \frac{b_n}{n}$$

при $f(x) \in L^p$. Что касается второго из этих рядов, то он сходится и при $f(x) \in L$ (см. глава I, § 40), но для первого, если $p = 1$, это уже неверно. Действительно, в главе I, § 30 мы доказали, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

есть ряд Фурье, а между тем $\sum \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

Укажем, что Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[5]) нашли необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на $f(x)$, чтобы ряд $\sum \frac{a_n}{n}$ был сходящимся, а также доказали, что если они выполнены, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx.$$

Что касается суммы ряда $\sum \frac{b_n}{n}$, то легко доказать равенство

$$\sum \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx.$$

Эта формула получается применением равенства Парсеваля к функции $f(x)$ и функции

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

(см. гл. I, § 41), причем применение равенства законно, как будет доказано в § 5, так как эта функция с ограниченным изменением.

Заканчивая этот параграф, посвященный связи между степенью суммируемости функции и ее коэффициентами Фурье, мы укажем без доказательства еще две теоремы Пэли (см. Paley^[1]).

Введем следующие обозначения: если c_1, c_2, \dots — любая последовательность чисел (действительных или комплексных), то будем обозначать через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ числа $|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|, \dots$, расположенные в порядке убывания; если несколько чисел $|c_n|$ равны между собой, то в последовательности γ_n будет соответствующее количество повторяющихся членов.

Имеют место следующие теоремы:

Теоремы Пэли. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная нормированная система на $[a, b]$ и $|\varphi_n(x)| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), $a \leq x \leq b$.

1) Если $1 < p \leq 2$, $f(x) \in L^p$ и $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\varphi_n(x)$, то

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p n^{p-2} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_a^b |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где A_p зависит только от p и M .

2) Если $q \geq 2$ и $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — последовательность чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q n^{q-2} < +\infty,$$

то существует функция $f(x) \in L^q(a, b)$, для которой числа c_n являются коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и

$$\left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq B_q \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q n^{q-2} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где B_q зависит только от q и M .

Доказательства этих теорем, кроме работы автора, можно найти и в книге Зигмунда [М. 6] (см. § 9.4).

Близкому с этими результатами вопросу посвящена и работа Литтльвуда (Littlewood [5]).

Наконец, необходимо отметить теоремы Харди и Литтльвуда, относящиеся к вопросу о связи между степенью суммируемости функции и ее коэффициентами Фурье (см. также Зигмунд [М. 6] § 9.5). Некоторые частные случаи их результатов разобраны нами в § 3 главы X.

§ 5. Обобщение равенства Парсеваля для произведения двух функций

Мы видели в главе I, § 18, что если $f(x) \in L^2$ и $\varphi(x) \in L^2$, причем a_n и b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, a_n и β_n — для $\varphi(x)$, то имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n). \quad (5.1)$$

Докажем, что формула сохраняет силу, если $f \in L^p$, $\varphi \in L^q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p > 1$). Мы уже знаем (см. Вводный материал, § 9), что в этом случае произведение $f(x) \varphi(x)$ суммируемо.

Обозначим через $S_n(x)$ частную сумму ряда Фурье для $f(x)$. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right\} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k + b_k \beta_k. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \varphi(x) dx$$

или, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - S_n(x)] dx = 0.$$

Но в главе VIII, § 20 будет доказано, что при $p > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

если $f(x) \in L^p$. Если так, то по неравенству Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|f(x) - S_n(x)\|_p \|\varphi(x)\|_q \rightarrow 0,$$

поскольку $\varphi(x) \in L^q$.

Пользуясь этим равенством, можем получить следующий критерий для того, чтобы некоторый ряд был рядом Фурье от $f(x) \in L^p$.

Т е о р е м а. Для того чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (5.2)$$

был рядом Фурье от функции $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), необходимо и достаточно чтобы для каждой функции $\varphi(x) \in L^q$ с коэффициентами α_n, β_n ряд

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n + b_n \beta_n \quad (5.3)$$

был сходящимся.

У с л о в и е н е о б х о д и м о. Это было только что доказано. Мы даже показали, что сумма этого ряда есть

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx.$$

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in L^q$ с рядом

$$\sigma(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \quad (5.4)$$

Обозначим через $\sigma_n(x)$ и τ_n соответственно средние (С, 1) для рядов (5.2) и (5.3). Ясно, что

$$\tau_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sigma_n(t) dt.$$

Но $\tau_n = \tau_n(\varphi)$ — линейный функционал в L^q , потому что $\sigma_n(t)$, как тригонометрический полином, принадлежит L^p при любом p , норма этого функционала есть $\frac{1}{\pi} \|\sigma_n\|_p$ (см. Вводный материал, § 20).

Так как ряд (5.3) сходится, значит тем более (С, 1) суммируем, то числа $\tau_n(\varphi)$ ограничены для каждой $\varphi \in L_q$, т. е.

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sigma_n(t) dt \right| \leq M(\varphi) < +\infty,$$

где M — константа, зависящая от φ (но не от n).

Следовательно, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\varphi) < +\infty$. Поэтому на основании теоремы Банаха—Штейнгауза (см. Добавления, § 4) нормы функционалов $\tau_n(\varphi)$ ограничены, т. е.

$$\|\sigma_n\|_p \leq K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда по теореме 3 § 60 главы I следует, что ряд (5.2) есть ряд Фурье от некоторой $f \in L^p$, и доказательство закончено.

Вернемся к равенству Парсеваля и докажем теорему:

Равенство Парсеваля сохраняет силу, если $f(x)$ имеет ограниченное изменение, а $\varphi(x) \in L$.

Действительно, в этом случае и $f(x)$ ограничена, и функции $S_n(x)$ ограничены в совокупности, а потому произведение $\varphi(x) [f(x) - S_n(x)]$ мажорируется суммируемой функцией. С другой стороны, $S_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду. На основании теоремы Лебега о законности перехода к пределу под знаком интеграла имеем тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - S_n(x)] dx = 0,$$

и доказательство заканчивается как в предыдущем случае.

Это рассуждение уже не годится, если $f(x)$ только ограничена, но не с ограниченным изменением. Однако и в этом случае, т. е. при $\varphi(x) \in L$ и $f(x)$ — ограниченной, равенство Парсеваля справедливо, если только вместо сходимости ряда, стоящего в правой части, рассматривать его $(C, 1)$ суммируемость.

Действительно, пусть $\sigma_n(x)$ — фейеровские суммы ряда Фурье от $f(x)$. Тогда $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду и $|\sigma_n(x) - f(x)| \leq M$, а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - \sigma_n(x)] dx = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sigma_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} dx = \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) [a_k \alpha_k + b_k \beta_k] \end{aligned}$$

и правая часть этого равенства есть не что иное, как n -я чезаровская сумма для ряда (5.3). Поэтому нужное утверждение доказано.

Возвращаясь к случаю, когда $f(x)$ имеет ограниченное изменение, выведем одну теорему, которая часто бывает полезной.

Всякий ряд Фурье после умножения на любую функцию с ограниченным изменением можно интегрировать почленно по любому отрезку, т. е. если $\varphi(x)$ с ограниченным изменением и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_a^b \varphi(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi(x) \cos nx dx + b_n \int_a^b \varphi(x) \sin nx dx. \quad (5.5)$$

Прежде всего заметим, что достаточно доказывать формулу (5.5) для случая $[a, b] \equiv [0, 2\pi]$. В самом деле, если $0 < a < b < 2\pi$, то достаточно считать $\varphi(x) = 0$ вне (a, b) , и тогда можно производить интегрирование по отрезку $[0, 2\pi]$; если же длина отрезка $[a, b]$ превосходит 2π , то его можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых формула уже доказана.

Итак, достаточно доказать, что

$$\int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx + \sum a_n \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx dx + \sum b_n \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx. \quad (5.6)$$

После умножения обеих частей (5.6) на $\frac{1}{\pi}$, мы видим, что эта формула превращается в равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} a_0 + \sum a_n a_n + b_n b_n,$$

справедливость которого для $f(x) \in L$ и $\varphi(x)$ с ограниченным изменением уже была доказана*).

§ 6. О скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье от суммируемых функций

Поставим вопрос так: можно ли найти такую функцию $\lambda(n) \uparrow \infty$, что для любой суммируемой функции имеем

$$a_n = o\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right). \quad (6.1)$$

Оказывается, что на этот вопрос приходится дать отрицательный ответ; более того, можно для любой $\lambda(n) \uparrow \infty$ построить непрерывную $f(x)$, у которой коэффициенты Фурье не удовлетворяют соотношению (6.1). В самом деле, выберем числа n_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < +\infty$$

и положим $a_{n_k} = \frac{1}{\lambda(n_k)}$, $b_{n_k} = \frac{1}{\lambda(n_k)}$; $a_n = b_n = 0$, если $n \neq n_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Тогда ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum \frac{1}{\lambda(n_k)} [\cos n_k x + \sin n_k x]$$

есть ряд Фурье от непрерывной функции, поскольку он сходится абсолютно и равномерно, но в то же время соотношения (6.1) не имеют места, так как

$$a_{n_k} \lambda(n_k) = 1 \quad \text{и} \quad b_{n_k} \lambda(n_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Итак, даже для непрерывных функций нельзя утверждать, что коэффициенты Фурье обязаны стремиться к нулю с некоторой определенной «скоростью».

Однако, если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то мы видели (§ 5), что при $p \leq 2$ имеем $\sum |a_n|^q + |b_n|^q < +\infty$, а при $p > 2$ уже во всяком случае $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2 < +\infty$, т. е. все таки a_n и b_n не могут быть «слишком велики» для больших значений n .

Иначе обстоит дело для случая $f(x) \in L$, а именно:

Если $f(x)$ только суммируема, то ее коэффициенты Фурье могут стремиться к нулю как угодно медленно. Точнее:

*) Можно вместо ограниченности изменения накладывать на $f(x)$ другие ограничения. Так, например, равенство Парсеваля сохраняет силу, если $\varphi(x) \in L$, $f(x)$ ограничена, и, кроме того, $\int_0^h [f(x+u) - f(x-u)] du = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right)$ равномерно относительно x (см. Izumi and Sato [1]).

Если $\varepsilon_n \downarrow 0$ как угодно медленно, то можно найти такой ряд Фурье вида

$$\sum a_n \cos nx,$$

у которого $a_n \geq \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Это будет показано в § 2 главы X.

Банах (Banach^[1]) отметил также, что можно построить последовательность положительных λ_n , стремящихся к $+\infty$, и суммируемую $f(x)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n}) = +\infty.$$

Можно ли все же указать какие-либо *необходимые* условия для коэффициентов Фурье от суммируемой функции?

Здесь мы только напомним, что ряд $\sum \frac{b_n}{n}$ должен сходиться (см. глава I, § 40), но для $\sum \frac{a_n}{n}$ это уже неверно (см. § 4); таким образом, коэффициенты a_n и b_n неравноправны. В главе VIII мы увидим, что ряд, сопряженный к ряду Фурье, не должен быть рядом Фурье. К вопросу о необходимых условиях мы вернемся в § 9 настоящей главы. А сейчас поставим вопрос о *достаточных* условиях. К сожалению, и здесь приходится говорить почти только об отрицательных фактах.

Известно, что условие $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ является достаточным. Но, как отметил Орлич (Orlicz^[1]), можно найти последовательность положительных чисел γ_n , $\gamma_n \rightarrow 2$, при $n \rightarrow \infty$, такую, что ряд

$$\sum (|a_n|^{\gamma_n} + |b_n|^{\gamma_n}) < +\infty,$$

однако $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ не есть ряд Фурье.

Далее заметим, что никакое условие вида

$$a_n = O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right),$$

где $\lambda(n) \uparrow \infty$, не может оказаться достаточным для того, чтобы ряд $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ оказался рядом Фурье. В этом мы убедимся в § 8.

Далее напомним, что в § 4 настоящей главы было отмечено: никакое условие вида

$$\sum |a_n|^q + |b_n|^q < +\infty,$$

где $q > 2$, не является достаточным для того, чтобы ряд $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ был рядом Фурье.

Обратим еще внимание на следующий факт: если в ряде Фурье некоторые коэффициенты заменить нулями, то он может перестать быть рядом Фурье. Действительно, пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$, тогда ряд $\sum a_n \cos nx$ является рядом Фурье (см. § 30 главы I). Теперь заменим нулями все a_n , для которых $n \neq 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$). Получим ряд $\sum a_{2^k} \cos 2^k x$, который будет лакунарным; если бы он был рядом Фурье, то (см. глава XI, § 3) мы должны были бы иметь $\sum (a_{2^k})^2 < +\infty$, а между тем

$$\sum (a_{2^k})^2 \geq \sum \frac{1}{k \ln 2} = +\infty.$$

Это и доказывает наше утверждение.

В § 8 мы укажем бóльшие трудности на пути к решению вопроса о достаточных условиях для коэффициентов Фурье. Но для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные теоремы.

§ 7. Вспомогательные теоремы о системе Радемахера

В § 9 главы I было дано определение функций Радемахера. Сейчас мы докажем несколько теорем, касающихся этих функций, и применим их затем к изучению тригонометрических рядов.

Т е о р е м а 1 *). Если $\sum c_n^2 < +\infty$, то ряд

$$\sum c_n \varphi_n(t), \quad (7.1)$$

где $\varphi_n(t)$ есть n -я функция Радемахера, сходится почти всюду.

В самом деле, из $\sum c_n^2 < +\infty$ следует, что ряд (7.1) есть ряд Фурье от некоторой $f(x) \in L^2$, для которой

$$\int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда при помощи неравенства Буняковского выводим

$$\int_0^1 |f(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0.$$

Пусть (a, b) — любой интервал на $[0, 1]$; тогда

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |S_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

т. е.

$$\int_a^b S_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.2)$$

Теперь обозначим через $F(t)$ неопределенный интеграл от $f(t)$, тогда $F'(t) = f(t)$ всюду, кроме некоторого множества E , $mE = 0$. Пусть \mathcal{E} — получается из E добавлением всех точек t вида $t = \frac{p}{2^k}$, где p и k — любые целые; снова $m\mathcal{E} = 0$. Докажем, что ряд (7.1) сходится всюду вне \mathcal{E} . Действительно, пусть $t \notin \mathcal{E}$. Тогда $t \in \left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$, где k — какое-то целое и p принимает одно из значений $0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$.

Для любого $j \geq k$ на интервале $I = \left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$ имеем

$$\int_I \varphi_j(x) dx = 0,$$

поэтому

$$\int_I S_n(x) dx = \int_I S_{k-1}(x) dx \quad (n \geq k)$$

и в силу (7.2) отсюда $\int_I f(x) dx = \int_I S_{k-1}(x) dx$. Но $S_{k-1}(x)$ постоянна на I а потому

$$S_{k-1}(t) = \frac{1}{I} \int_I S_{k-1}(x) dx = \frac{1}{I} \int_I f(x) dx. \quad (7.3)$$

*) См. Rademacher [1], а также Paley and Zygmund [1], Колмогоров [4].

Если $k \rightarrow \infty$, то длина интервала I стремится к нулю и поскольку $t \in E$, то правая часть (7.3) стремится к $f(t)$, а значит

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1}(t) = f(t),$$

а это и заканчивает доказательство теоремы.

Т е о р е м а 2 (Zygmund^[7]). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (7.4)$$

где $\varphi_n(t)$ — функция Радемахера, суммируется методом $(C, 1)$ на множестве E , $mE > 0$, то $\sum c_n^2 < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем для n -й цезаровской суммы ряда

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) c_k \varphi_k(t) \quad (7.5)$$

и по условию $\sigma_n(t)$ сходится на E , $mE > 0$. Значит, найдется такое \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, где $\sigma_n(t)$ сходится равномерно к $\sigma(t)$ и $\sigma(t)$ непрерывна. Поэтому для достаточно большого N имеем при $n > N$, например,

$$|\sigma_n(t)| < |\sigma(t)| + 1, \quad t \in \mathcal{E},$$

т. е. найдется такое M , что

$$|\sigma_n(t)| < M \quad \text{для } n > N \text{ и } t \in \mathcal{E},$$

и, следовательно, найдется такое M_1 , что

$$|\sigma_n(t)| < M_1 \quad \text{для } t \in \mathcal{E} \text{ и } n = 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Отсюда

$$\int_{\mathcal{E}} \sigma_n^2(t) dt < M_1^2 m\mathcal{E} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.7)$$

Значит,

$$M_1^2 m\mathcal{E} \geq \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \int_{\mathcal{E}} \varphi_k^2(t) dt + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) c_k c_j \int_{\mathcal{E}} \varphi_k \varphi_j dt. \quad (7.8)$$

Из определения функций Радемахера легко вывести, что система $\{\varphi_k(x) \varphi_j(x)\}$, где $k \neq j$, также ортогональна. Числа

$$b_{kj} = \int_{\mathcal{E}} \varphi_k(t) \varphi_j(t) dt$$

суть коэффициенты Фурье по этой системе от функции $f(x)$, характеристической для множества \mathcal{E} (т. е. $f(x) = 1$ на \mathcal{E} и $f(x) = 0$ на $C\mathcal{E}$). Значит, $\sum \sum b_{kj}^2 < +\infty$. При рассмотрении суммируемости ряда (7.5) методом $(C, 1)$, а также сходимости ряда $\sum c_n^2$ конечное число первых членов не играет роли, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что для некоторого N_1 имеем $c_n = 0$ для $n \leq N_1$.

Это число N_1 можно предположить столь большим, что

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \sum_{\substack{j=N_1+1 \\ (k \neq j)}}^{\infty} b_{kj}^2 < \left(\frac{m\mathcal{E}}{2}\right)^2. \quad (7.9)$$

Из-за выбрасывания членов в сумме $\sigma_n(t)$ (т. е. предположения $c_1 = c_2 = \dots = c_{N_1} = 0$) константу M_1 в формуле (7.6), может быть, придется изменить на некоторую M_2 .

Применяя к последней сумме в неравенстве (7.8) неравенство Буняковского и учитывая (7.9), получаем

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (k \neq j)}}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) c_k c_j \int_{\mathcal{E}} \varphi_k \varphi_j dt \right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 c_j^2 \left(\frac{m\mathcal{E}}{2}\right)^2} = \frac{m\mathcal{E}}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2,$$

поэтому, замечая еще, что $\varphi_n^2(t) = 1$ почти всюду для любого n , найдем из (7.8)

$$M_2^2 m \mathcal{E} \geqslant \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 m \mathcal{E} - \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \frac{m\mathcal{E}}{2} = \frac{m\mathcal{E}}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \leqslant 2 M_2^2$$

при любом n . Пусть N_2 произвольно.

Если $N_3 > N_2$, то

$$\sum_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{k}{N_3}\right)^2 c_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N_3} \left(1 - \frac{k}{N_3}\right)^2 c_k^2 \leqslant 2 M_2^2.$$

Но N_3 можно взять как угодно большим; отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{N_3} c_k^2 \leqslant 2 M_2^2,$$

а так как N_2 любое, то $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорему 2 можно несколько усилить, а именно высказать ее в такой форме:

Если для ряда $\sum c_n \varphi_n(t)$ чезаровские суммы удовлетворяют условию

$$|\sigma_n(t)| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.10)$$

на некотором \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, то $\sum c_n^2 < +\infty$.

Действительно, при доказательстве теоремы 2 мы сначала обнаружили существование множества положительной меры, где выполнено условие (7.10), а дальше опирались только на этот факт.

З а м е ч а н и е 2. Мы для упрощения доказательства проводили рассуждение с методом (С, 1). На самом деле справедлива гораздо более общая теорема.

Т е о р е м а. Если ряд $\sum c_n \varphi_n(t)$ суммируем каким-либо методом T , или даже T^* на множестве меры больше нуля, то $\sum c_n^2 < +\infty$ *).

Для случая сходимости эта теорема была доказана Колмогоровым и Хинчиным [1].

) О методах T и T^ см. § 5 Вводного материала.

§ 8. Отсутствие критериев, налагаемых на модули коэффициентов

Мы хотим показать, что если не заботиться о знаках чисел a_n и b_n , а учитывать только их модули, то никакое условие, кроме $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, не достаточно для того, чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

оказался рядом Фурье. Впервые этот факт был обнаружен Литтльвудом (Littlewood^[1]), показавшим, что если ряд $\sum e_n^2$ расходится ($e_n^2 = a_n^2 + b_n^2$), то можно так подобрать числа a_n , что ряд

$$\sum e_n \cos (nx - \alpha_n)$$

не будет рядом Фурье. Затем Сидон (Szidon^[5]) дал такое усиление теоремы Литтльвуда:

Если все ряды

$$\pm \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (8.1)$$

где знаки $+$ и $-$ можно выбирать как угодно, являются рядами Фурье, то $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$.

Другими словами, если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то можно всегда так подобрать знаки $+$ или $-$, чтобы получить среди рядов (8.1) такой, который не является рядом Фурье.

Этот результат в свою очередь содержится в гораздо более сильном результате Зигмунда. Для того чтобы его сформулировать, введем в рассмотрение функции Радемахера. Положим

$$A_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm A_n(x). \quad (8.2)$$

Если мы исключим из рассмотрения все те случаи, когда либо $+1$, либо -1 в качестве множителя у $A_n(x)$ встречается лишь конечное число раз, то выкинем лишь счетное множество рядов вида (8.2). Все остальные ряды могут быть записаны в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \varphi_n(t), \quad (8.3)$$

где $\varphi_n(t)$ есть n -я функция Радемахера, а t — некоторое число на интервале $(0, 1)$, причем $t \neq \frac{p}{2^q}$, где p и q — целые. В самом деле, для любого $t \neq \frac{p}{2^q}$ имеем $\varphi_n(t) = +1$ или $\varphi_n(t) = -1$ при любом n и, значит, ряд (8.3) принимает форму (8.2); обратно, если дан ряд (8.2) и в нем знаки $+$ и $-$ встречаются бесконечное множество раз, то, как легко видеть, найдется одно вполне определенное $t_0 \neq \frac{p}{2^q}$, для которого $\varphi_n(t_0) = +1$ или $\varphi_n(t_0) = -1$ и принимает именно такой знак, который стоит у $A_n(x)$.

Условимся говорить, что почти все ряды вида (8.2) обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают ряды (8.3) для почти всех значений t на интервале $(0, 1)$.

Приняв эту формулировку, мы можем теорему Зигмунда сформулировать так:

Т е о р е м а 1 *). Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \infty$, то почти все ряды

$$\pm \frac{a_0}{2} + \sum \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

не суммируемы $(C, 1)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, не являются рядами Фурье.

Эта теорема действительно с избытком покрывает выше сформулированную теорему Сидона.

В свою очередь, она может быть получена из теоремы 2 § 7. В самом деле, допустим, что $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$. Докажем сначала, что тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x) = +\infty$$

для почти всех значений x .

Действительно, допустим, что это неверно. Тогда найдется такое E , $mE > 0$, что $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x)$ сходится на E . Можно тогда выбрать внутри E такое \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, на котором сумма $\sum A_n^2(x)$ ограничена. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x) < M \quad \text{на } \mathcal{E}.$$

Полагая $A_n(x) = \varrho_n \cos(nx + \alpha_n)$, можем интегрировать ряд $\sum A_n^2(x)$ почленно по множеству \mathcal{E} ; тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \int_{\mathcal{E}} \cos^2(nx + \alpha_n) dx < M m\mathcal{E}. \quad (8.4)$$

Но

$$\int_{\mathcal{E}} \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} [1 + \cos 2(nx + \alpha_n)] dx \rightarrow \frac{1}{2} m\mathcal{E}$$

при $n \rightarrow \infty$; значит, для достаточно большого N каждый член ряда в левой части (8.4) при $n \geq N$ превосходит $\varrho_n^2 a$, где $a > 0$, поэтому

$$\sum \varrho_n^2 < +\infty,$$

а это противоречит гипотезе $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$.

Итак, мы убедились, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то $\sum A_n^2(x) = +\infty$ для почти всех значений x .

Теперь обозначим через E плоское множество точек (x, t) , обладающих таким свойством: если $(x_0, t_0) \in E$, то ряд

$$\sum A_n(x_0) \varphi_n(t_0)$$

суммируется методом $(C, 1)$, т. е. соответствующий ряд

$$\sum \pm A_n(x_0)$$

суммируется методом Фейера. Докажем, что $mE = 0$.

) Зигмунд доказал более общую теорему, а именно несуммируемость этих рядов любым методом T^ . Однако, поскольку мы в доказательстве опираемся на теорему 2 § 7, а она была доказана лишь для метода $(C, 1)$, то и здесь мы получаем более слабый результат.

Действительно, $\sum A_n^2(x_0) = +\infty$ для почти всех x . Пусть \mathcal{E} — множество тех x , для которых это имеет место, тогда $m\mathcal{E} = 2\pi$. Если $x_0 \in \mathcal{E}$, то по предыдущей теореме Зигмунда множество тех t , для которых $\sum A_n(x_0) \varphi_n(t)$ суммируется методом $(C, 1)$, имеет меру нуль. Значит, множество точек $(x_0, t) \in E$ имеет меру нуль, и это верно для всех $x_0 \in \mathcal{E}$. Следовательно, для почти всех x_0 на $[0, 2\pi]$ вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает E по множеству меры нуль. Но тогда по теореме Фубини (см. Вводный материал, § 18) имеем $mE = 0$. Если так, то, снова по теореме Фубини, почти всякая горизонтальная прямая пересекает E по множеству меры нуль, т. е. для почти всех t_0 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \varphi_n(t_0)$ может суммироваться методом $(C, 1)$ лишь для множества

точек, имеющего меру нуль. Но это значит, что «почти все ряды» $\sum \pm A_n(x)$ суммируются методом Фейера лишь на множестве меры нуль, а так как ряд Фурье должен суммироваться методом Фейера почти всюду, то почти все ряды $\sum \pm A_n(x)$ не являются рядами Фурье, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 1. Полезно отметить, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то для почти всех рядов $\sum \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ частные суммы ряда почти всюду неограничены. Действительно, если ряд $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \varphi_n(t)$ имеет ограниченные частные суммы на плоском множестве E , $mE > 0$, то тогда на основании замечания к теореме 2 § 7 на множестве положительной меры $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2 < +\infty$, а это противоречит гипотезе $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$.

Этим замечанием мы воспользуемся в главе V, § 23.

З а м е ч а н и е 2. Мы доказали, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то почти все ряды

$$\sum \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

не являются рядами Фурье. Интересно отметить, что *когда $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то почти все эти ряды сходятся*. Этот результат является немедленным следствием теоремы 1 § 7.

§ 9. Некоторые необходимые условия для коэффициентов Фурье

В § 6 мы уже говорили о трудностях нахождения необходимых условий для коэффициентов Фурье от суммируемых функций.

Здесь мы, следуя Салему (Salem^[1]), укажем некоторые необходимые условия, которые могут представить известный интерес.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (9.1)$$

есть ряд Фурье от некоторой суммируемой функции $f(x)$. Пусть $\varphi(x)$ — функция с ограниченным изменением, a_n и β_n — ее коэффициенты Фурье; мы будем предполагать $a_0 = 0$. Тогда справедливо равенство Парсеваля (§ 5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

Пусть μ — переменный параметр; рассмотрим функцию, равную $\varphi(\mu x)$ на $(-\pi, \pi)$ и с периодом 2π . Если $a_n(\mu)$, $\beta_n(\mu)$ — ее коэффициенты Фурье, то мы будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(\mu x) dx = \pi \left[\frac{a_0 \alpha_0(\mu)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(\mu) + b_n \beta_n(\mu) \right]. \quad (9.2)$$

Пользуясь леммой Фейера (см. глава I, § 20) и тем, что $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0$, мы видим, что интеграл в левой части (9.2) стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\alpha_0(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mu x) dx = \frac{1}{\mu\pi} \int_0^{\mu 2\pi} \varphi(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty$$

снова в силу $\alpha_0 = 0$. Поэтому из (9.2) получаем:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \alpha_n(\mu) + b_n \beta_n(\mu)] = 0$$

является необходимым условием для того, чтобы a_n, b_n были коэффициентами Фурье.

В частности, если положить $\varphi(x) = \cos x$ или $\varphi(x) = \sin x$ и считать μ не целым, то найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x dx &= 2 \mu \sin \mu \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\mu^2 - n^2} + \frac{a_0 \sin \mu \pi}{\mu}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \mu x dx &= 2 \sin \mu \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n b_n}{\mu^2 - n^2}. \end{aligned}$$

Если вместо $f(x)$ рассмотреть $f(x + \pi)$, то мы избавимся от множителя $(-1)^n$. Заставим теперь $\mu \rightarrow \infty$, принимая значения, не приближающиеся ни к каким целым числам; например, положим

$$\mu = p + \frac{1}{2},$$

где p пробегает все целые числа.

Отсюда имеем такие *необходимые условия для того, чтобы числа a_n и b_n были коэффициентами Фурье*:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.3)$$

Из первого из этих условий можно, в частности, извлечь такое следствие: Если $a_n \downarrow 0$, то для того чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx$$

был рядом Фурье, необходимо чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+1}) \ln n = 0. \quad (9.4)$$

Для доказательства этого утверждения покажем сначала, что если $a_n \downarrow 0$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.5)$$

Действительно, все члены ряда в формуле (9.5) отрицательны, поэтому ряд

$$\sum_{2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2}$$

знакоположителен, и в силу $a_n \downarrow 0$ его сумма не превосходит

$$a_{2p+1} \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2};$$

но при $n \geq 2p+1$ имеем $n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4}n^2$, а потому

$$\sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{4}{3} \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Следовательно,

$$p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2} \leq p a_{2p+1} O\left(\frac{1}{p}\right) = o(1),$$

и это доказывает (9.5).

Отсюда следует, что при $a_n \downarrow 0$ необходимое условие (9.3) можно переписать в виде

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.6)$$

Но так как

$$\frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = \frac{2}{2p+1} \left[\frac{1}{2p+1+2n} + \frac{1}{2p+1-2n} \right],$$

то условие (9.6) равносильно условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2p} a_n \left[\frac{1}{2p+1+2n} + \frac{1}{2p+1-2n} \right] = 0. \quad (9.7)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{2p} a_n \frac{1}{2p+1+2n} < \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} a_n \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, поскольку $a_n \rightarrow 0$, то условие (9.7) принимает вид

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{2p+1-2n} = 0$$

или

$$\frac{a_1}{2p-1} + \frac{a_2}{2p-3} + \dots + \frac{a_p}{1} - \left[\frac{a_{p+1}}{1} + \frac{a_{p+2}}{3} + \dots + \frac{a_{2p}}{2p-1} \right] \rightarrow 0,$$

или

$$\frac{a_p - a_{p+1}}{1} + \frac{a_{p-1} - a_{p+2}}{3} + \dots + \frac{a_1 - a_{2p}}{2p-1} \rightarrow 0. \quad (9.8)$$

Но, полагая $\Delta_n = a_n - a_{n+1}$, мы сразу видим, что каждый из числителей дробей в (9.8) не меньше Δa_p (поскольку все $\Delta a_n \geq 0$ по условию), а потому (9.8) влечет

$$\Delta a_p \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \rightarrow 0.$$

Но тогда и

$$\Delta a_p \ln p \rightarrow 0,$$

и наше утверждение доказано.

Это необходимое условие позволяет построить пример ряда из косинусов:

$$\sum a_n \cos nx,$$

у которого $a_n \downarrow 0$, и однако он не является рядом Фурье *). Для этого достаточно положить, например,

$$a_n = \frac{1}{m} \quad \text{для} \quad 2^{(m-1)^2} \leq n < 2^{m^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда монотонность налицо, но

$$(a_{2^{m^2-1}} - a_{2^{m^2}}) \ln 2^{m^2} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) m^2 \ln 2 \rightarrow \ln 2$$

при $m \rightarrow \infty$ и необходимое условие не соблюдено.

§ 10. Необходимые и достаточные условия Салема

Мы хотим теперь указать некоторые условия, которые хотя и не являются прозрачными, но все же представляют интерес как необходимые и достаточные. Они были выведены Салемом (Salem ^[1]).

Обозначим через $\{M\}$ класс функций

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

непрерывных, дифференцируемых, $|\omega(x)| \leq 1$, и таких, что ряд Фурье от $\omega'(x)$ абсолютно сходится.

Т е о р е м а. Для того чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{10.1}$$

был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы 1) формально проинтегрированный ряд

$$\sum -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

сходилась к непрерывной функции $F(x)$;

2) выражение

$$\sum a_n a_n + b_n b_n$$

стремилось к нулю, когда ω , находясь в классе $\{M\}$, меняется так, что

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2)$ стремится к нулю.

*) Первый пример такого ряда был построен Сидоном (см. Szidon ^[1]).

Условия необходимы. Допустим, что (10.1) есть ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$. Необходимость условия 1) есть классический результат. Пусть теперь $\omega(x)$ принадлежит $\{M\}$ и пусть

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 = \varepsilon. \quad (10.2)$$

Мы имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \omega(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n + b_n \beta_n. \quad (10.3)$$

Применение равенства Парсеваля законно (см. § 5), так как $\omega'(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, а потому $\omega(x)$ не только с ограниченным изменением, но и абсолютно непрерывна (более того, ряд в правой части (10.3) даже абсолютно сходится).

Пусть E — множество точек, где $|\omega(x)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{3}}$; тогда из

$$\frac{1}{\pi} \int_E \omega^2(x) dx \geq \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\pi} mE$$

и из равенства (10.2) следует, что $mE < \pi \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Обозначая через CE дополнение к E и принимая во внимание то, что $|\omega(x)| \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \omega(x) dx \right| &\leq \left| \int_E f(x) \omega(x) dx \right| + \left| \int_{CE} f(x) \omega(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_E |f(x)| dx + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

а так как $\varepsilon \rightarrow 0$, то необходимость 2) доказана.

Условия достаточны. Достаточно будет доказать, что $F(x)$ абсолютно непрерывна; действительно, тогда $F(x)$ есть неопределенный интеграл от некоторой суммируемой $f(x)$, и так как $-\frac{b_n}{n}$ и $\frac{a_n}{n}$ являются коэффициентами Фурье от $F(x)$, то, интегрируя по частям, убедимся, что a_n и b_n — коэффициенты Фурье от $f(x)$.

Пусть $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_r, d_r)$ — некоторая система неперекрывающихся интервалов, лежащих на $[-\pi, \pi]$. Выберем функцию $\omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$ следующим образом: пусть p — целое положительное как угодно большое число. Положим для $i = 1, 2, \dots, r$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2} \frac{p\pi}{c_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{c_i} x\right) \text{ для } c_i < x < c_i \left(1 + \frac{1}{2p}\right),$$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2} \frac{p\pi}{d_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{d_i} x\right) \text{ для } d_i \left(1 - \frac{1}{2p}\right) < x < d_i$$

и $\omega'(x) = 0$ во всех остальных точках $[-\pi, \pi]$.

Ясно, что свободный член ряда Фурье от $\omega'(x)$ равен 0, что ее ряд Фурье сходится абсолютно и что

$$|\omega(x)| = \left| \int_0^x \omega'(x) dx \right| < 1,$$

т. е. $\omega(x)$ принадлежит к классу $\{M\}$. Пусть

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда коэффициенты ряда Фурье для $\omega'(x)$ имеют вид $n\beta_n$ и $-na_n$, поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n}\right) n \beta_n - \left(\frac{a_n}{n}\right) n a_n = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n + b_n \beta_n. \quad (10.3')$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \beta_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x) dx < \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^v (d_i - c_i),$$

так как $\omega(x) = 0$ вне всех (c_i, d_i) и $|\omega(x)| < 1$ всюду.

Поэтому, если $\sum_{i=1}^v (d_i - c_i)$ стремится к нулю, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \beta_n^2 \rightarrow 0$, а тогда, в силу условия теоремы, и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n + b_n \beta_n) \rightarrow 0$, а потому из (10.3')

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx \rightarrow 0. \quad (10.4)$$

Мы докажем, что из этого следует $\sum_{i=1}^v |F(d_i) - F(c_i)| \rightarrow 0$, а тогда абсолютная непрерывность $F(x)$ будет установлена. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \sum_{i=1}^v \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} F(x) \omega'(x) dx + \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} F(x) \omega'(x) dx.$$

Применяя первую теорему о среднем значении и обозначая через γ_i некоторую точку, такую, что $c_i < \gamma_i < c_i(1 + \frac{1}{2p})$, и через δ_i такую точку, что $d_i(1 - \frac{1}{2p}) < \delta_i < d_i$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} F(x) \omega'(x) dx &= F(\gamma_i) \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} \frac{1}{2} \frac{p\pi}{c_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{c_i} x\right) dx = \frac{1}{2} F(\gamma_i), \\ \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} F(x) \omega'(x) dx &= F(\delta_i) \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} \frac{1}{2} \frac{p\pi}{d_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{d_i} x\right) dx = -\frac{1}{2} F(\delta_i). \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^v [F(\gamma_i) - F(\delta_i)]. \quad (10.5)$$

Но выражение в правой части (10.5) как угодно близко к $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^v [F(d_i) - F(c_i)]$, если p достаточно велико, и, значит, из того, что интеграл в левой части (10.5) стремится к нулю (см. (10.4)), вытекает, что $\sum_{i=1}^v [F(d_i) - F(c_i)] \rightarrow 0$, а это заканчивает доказательство.

§ 11. Тригонометрическая проблема моментов

Вопрос о том, когда заданные числа $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ могут быть коэффициентами Фурье или, более специальный вопрос, когда они являются коэффициентами Фурье от функции, удовлетворяющей дополнительным требованиям (например, ограниченной или неотрицательной, или монотонной), может быть поставлен в терминах так называемой «тригонометрической проблемы моментов».

Принято называть «моментами» функции $f(x)$ числа

$$\mu_n = \int_a^b f(x) x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11.1)$$

и «тригонометрическими моментами» числа

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11.2)$$

Проблемой моментов называется такой вопрос: задана последовательность чисел μ_n , существует ли такая $f(x)$, для которой справедливы равенства (11.1)? Аналогично ставится и тригонометрическая проблема моментов. Так как система $\{e^{int}\}$ полна на $[0, 2\pi]$, то равенство нулю всех моментов функции возможно только, если она равна нулю почти всюду, а потому функция однозначно задается своими тригонометрическими моментами. Но, разумеется, далеко не всякая последовательность чисел может быть последовательностью моментов некоторой функции. Проблемой моментов занимался целый ряд авторов, начиная с П. Л. Чебышева. Основные сведения о степенной проблеме моментов читатель найдет в книге И. П. Натансона [М.15] часть II, глава VII. Подробное изложение результатов, относящихся как к степенной, так и к тригонометрической проблеме моментов, можно найти в книге Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [М.2]. Мы здесь не имеем возможности излагать эти результаты, так как это потребовало бы слишком много места. Ограничимся для примера формулировкой одного из них. Для этого надо сначала ввести одно определение.

Пусть c_0 — действительное, $c_0 \neq 0$, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — комплексные числа. Рассмотрим тригонометрические полиномы

$$T_n(z) = \sum_{k=-n}^n A_k e^{ikt} \quad (z = e^{it})$$

с, вообще говоря, комплексными коэффициентами; пусть

$$\sigma(T_n) = \sum_{k=-n}^n A_k c_k,$$

где

$$c_{-k} = \bar{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, что если $T_n(e^{it})$ есть тригонометрический полином с действительными коэффициентами ($A_{-k} = \bar{A}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$), то и $\sigma(T_n)$ есть действительное число.

Условимся называть *конечную* последовательность

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$$

ненегативной на окружности $0 \leq t \leq 2\pi$, если из соотношений

$$T_n(e^{it}) \neq 0, \quad T_n(e^{it}) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

всегда следует

$$\sigma(T_n) \geq 0.$$

Бесконечную последовательность

$$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$$

назовем *ненегативной на окружности*, если при любом n этим свойством обладает последовательность

$$c_0, c_1, \dots, c_n.$$

Можно указать ряд критериев для того, чтобы последовательность c была ненегативной на окружности, например критерий Теплица: для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\sum_0^m c_{i+k} x_i x_k, \quad \text{где } m = \left[\frac{n}{2} \right],$$

была неотрицательна.

Приняв это определение, сформулируем следующую теорему Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [М.2].

Для того чтобы существовала функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} -L &\leq f(t) \leq L, \\ c_k &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad (k = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-2\pi L < c_0 < 2\pi L$$

и чтобы была ненегативна на окружности последовательность

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots,$$

где

$$\gamma_0 = 2 \cos \frac{c_0}{4L},$$

а последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ определяется с помощью разложения

$$e^{\frac{i}{2L}(c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + \dots)} = \gamma + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots$$

Таким образом, с одной стороны, задача для случая ограниченной функции казалось бы полностью решена, но, с другой стороны, практически крайне трудно проверить, существует ли для заданной последовательности чисел ограниченная функция, имеющая их своими коэффициентами Фурье, и тем более ее найти.

Существуют и другие критерии, носящие столь же законченный характер с точки зрения чисто теоретической, но в то же время затруднительные для применения к конкретным случаям. Такова, например, теорема Каратеодори (см. Carathéodory [1], [2]).

Для того чтобы числа $1, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ были коэффициентами Фурье от положительной функции, необходимо и достаточно, чтобы точка $(a_1, a_2; \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ в $2n$ -мерном пространстве принадлежала телу K_n , являющемуся наименьшим выпуклым телом, содержащим кривую

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & x_2 &= 2 \cos 2\varphi, & \dots, & & x_n &= 2 \cos n\varphi, \\ y_1 &= -2 \sin \varphi, & y_2 &= -2 \sin 2\varphi, & \dots, & & y_n &= -2 \sin n\varphi \\ & & & & & & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

В том же направлении имеется работа Байада (Bajada [1]), см. также Гизетти (Ghizzetti [1], [2], [3]), Паньи (Pagni [1]).

§ 12. Коэффициенты тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами

В работе Хелсона (см. Nelson^[1]) указано, что Штейнгаузом был поставлен следующий вопрос:

Пусть у тригонометрического ряда

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (12.1)$$

все частные суммы $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ неотрицательны при любом x . Следует ли отсюда, что это ряд Фурье?

Этот вопрос возник в связи с тем, что Штейнгауз^[4] доказал теорему: если тригонометрический ряд сходится всюду и сумма его положительна, то этот ряд есть ряд Фурье *).

Вопрос в этой форме до сих пор не решен. Мы хотим изложить здесь два результата, тесно связанных с решением поставленной проблемы. Прежде всего заметим, что если проблема Штейнгауза решается положительно, то во всяком случае из

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \geq 0 \quad \text{при всех } N \text{ и } x \quad (12.2)$$

должно следовать $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Здесь будет доказано, что это действительно имеет место. Этот результат будет следовать из теоремы Хелсона, в которой доказывается даже более сильное утверждение (см. ниже теорему Хелсона).

С другой стороны, будет дан пример, принадлежащий Турану (см. Turán^[1]) и показывающий, что при неотрицательности частных сумм ряда (12.1) возможен все же случай $\sum c_n^2 = +\infty$. Следовательно, при выполнении (12.2) ряд не обязан быть рядом Фурье от $f \in L^2$. Должен ли он все же быть рядом Фурье — остается еще не выясненным **).

Сформулируем теперь теорему Хелсона:

Т е о р е м а Х е л с о н а. Если

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| dx < A \quad (12.3)$$

при $N \rightarrow \infty$, то $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в случае, когда выполнено (12.2), то и условие (12.3) выполнено, так как тогда

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} dx = c_0 \cdot 2\pi.$$

*) Доказательство этой теоремы Штейнгауза (и даже более общего результата) будет нами дано в § 4 главы XIV.

**) Для случая, когда ряд сходится всюду, кроме одной точки, к неотрицательной функции $f(x)$, можно только утверждать, что $f(x) \in L$, но нельзя утверждать, что $f(x) \in L^p$ для $p > 1$. Действительно, мы знаем (см. § 30 главы I), что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ сходится всюду, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, и его сумма $f(x)$ неотрицательна. Однако $f(x) \notin L^p$, каково бы ни было $p > 1$, так как, если бы $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то (см. § 4) имели бы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < +\infty,$$

что при $a_n = \frac{1}{\ln n}$ не имеет места.

Поэтому из теоремы Хелсона немедленно следует, что если у тригонометрического ряда все частные суммы неотрицательны при любом x , то его коэффициенты стремятся к нулю.

Доказательство теоремы Хелсона. Если обозначить через $\sigma_N(x)$ фейеровские суммы ряда (12.1), то из условия (12.3) сразу следует

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_N(x)| dx < A, \quad (12.4)$$

а потому (см. § 60 гл. I) рассматриваемый ряд (12.1) есть ряд Фурье—Стилтьеса от некоторой функции $\mu(x)$, т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (12.5)$$

Допустим противное тому, что мы хотим доказать, т. е. $c_n \not\rightarrow 0$. Это значит, что найдется такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность целых n_j , что

$$|c_{n_j}| \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

Если определить функции $g_n(x)$ условием

$$g_n(x) = \int_0^x e^{-int} d\mu,$$

то $\{g_{n_j}(x)\}$ ограничены в совокупности и имеют одно и то же полное изменение, а потому по первой теореме Хелли (см. Вводный материал, § 17) из последовательности $\{g_{n_j}(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке к некоторой $\gamma(x)$ с ограниченным изменением. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что уже вся последовательность $\{n_j\}$ обладает этим свойством. Тогда в силу теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла Стилтьеса (см. Вводный материал, § 17) имеем для любой непрерывной $\varphi(x)$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-in_j x} d\mu. \quad (12.7)$$

Если мы разложим $\mu(x)$ на сумму двух функций, из которых одна сингулярная (см. Добавления, § 17), а другая — абсолютно непрерывная, то равенство (12.7) остается в силе для сингулярной части, так как для абсолютно непрерывной соответствующий интеграл должен стремиться к нулю.

Будем в формуле (12.7) рассматривать в качестве $\varphi(x)$ такие непрерывные функции, которые по модулю не превосходят единицу и обращаются в нуль вне некоторого интервала (a, b) . Имеем

$$\sup_{\varphi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_a^b \varphi(x) d\gamma = \text{Var } \gamma_{(a,b)}$$

в силу свойств норм линейных функционалов (см. § 19 Вводного материала). Но из (12.7) видим, что для таких φ

$$\left| \int_a^b \varphi(x) d\gamma \right| = \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma \right| \leq \left| \int_a^b d\mu \right| = \text{Var } \mu_{(a,b)}, \quad (12.8)$$

т. е.

$$\text{Var } \gamma_{(a,b)} \leq \text{Var } \mu_{(a,b)}. \quad (12.9)$$

Так как $\mu(x)$ сингулярна, то и $\text{Var } \mu$ есть сингулярная функция x (см. (0,x)

Добавления, § 17), а потому, поскольку (12.9) справедливо для любых a и b , мы имеем

$$\left| \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} \right| \leq \frac{\text{Var } \gamma(x)}{[x, x+h] h} \leq \frac{\text{Var } \mu(x)}{[x, x+h] h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

для почти всех x . Поэтому $\gamma'(x) = 0$ почти всюду. Покажем, что $\gamma(x)$ сингулярна. Для этого надо только убедиться, что $\gamma(x) \neq \text{const}$. Но, полагая в (12.7) $\varphi(x) = 1$, мы видим, что в силу (12.5) и (12.6)

$$\int_0^{2\pi} d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-in_j x} d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} 2\pi c_{n_j} \neq 0,$$

а тогда ясно, что $\gamma(x) \neq \text{const}$. Итак, $\gamma(x)$ сингулярна.

Рассмотрим теперь для тех же n_j функции $h_n(x)$, определенные так:

$$h_n(x) = \int_0^x e^{-int} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} dt.$$

В силу условия (12.3) их полные изменения ограничены в совокупности, и сами они тоже, а потому можно, рассуждая по предыдущему, утверждать, что найдется такая $\gamma^*(x)$, для которой при любой непрерывной $\varphi(x)$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (e^{-im_j x} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{inx}) \varphi(x) dx.$$

Здесь последовательность $\{m_j\}$ содержится в $\{n_j\}$.

Покажем, что для всякого $k > 0$ имеем

$$a_k^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma^* = 0,$$

т. е. коэффициенты Фурье—Стилтьеса a_k^* от $\gamma^*(x)$ обращаются в нуль для всех $k > 0$.

Действительно, мы имеем

$$2\pi a_k^* = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x} dx = 0, \quad (12.8')$$

так как $n - m_j \leq 0$ и, следовательно, $n - m_j - k < 0$ при $k > 0$, а потому каждый интеграл в правой части (12.8') равен нулю.

Покажем теперь, что если a_k — коэффициенты Фурье—Стилтьеса для $\gamma(x)$, то

$$a_k^* = a_k \quad \text{при } k \leq 0.$$

Действительно, с одной стороны

$$2\pi a_k^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x} dx = 2\pi \lim_{j \rightarrow \infty} c_{m_j+k}, \quad (12.9')$$

так как только при $n = m_j + k$ интеграл в правой части (12.9') отличен от нуля. С другой стороны, в силу (12.7), подставляя $\varphi(x) = e^{-ikx}$, находим

$$2\pi a_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_j+k)x} d\mu = 2\pi \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}.$$

Раз $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}$ существует, а последовательность $\{m_j\}$ содержится в $\{n_j\}$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{m_j+k} = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}$, а потому

$$a_k = a_k^*, \quad k \leq 0.$$

Следовательно, у функции $\gamma(x) - \gamma^*(x)$ все коэффициенты Фурье—Стилтьеса с неположительными индексами равны нулю, а потому $\gamma(x) - \gamma^*(x)$ абсолютно непрерывна по теореме Ф. и М. Рисса (см. глава VIII, § 12). Но по той же теореме из $a_k^* = 0$ при $k > 0$ следует, что $\gamma^*(x)$ абсолютно непрерывна. Значит, и $\gamma(x)$ абсолютно непрерывна, а мы доказали ранее, что она сингулярна.

Из полученного противоречия вытекает, что (12.3) и (12.6) несовместны, а потому

$$\lim |c_n| = 0 \quad \text{при} \quad |n| \rightarrow +\infty,$$

и теорема доказана.

Остается открытым вопрос, не должна ли при наличии условия (12.3) функция $\mu(x)$ быть абсолютно непрерывной. Если бы это было верно, то справедливость гипотезы Штейнгауза была бы доказана, потому что ряд $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ оказался бы просто рядом Фурье.

З а м е ч а н и е. Не только для тригонометрических рядов, удовлетворяющих лишь условию $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$, но даже для рядов Фурье условие Хелсона

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx < C$$

(где $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда), вообще говоря, не имеет места. Это будет доказано в § 22 главы VIII. Таким образом, теорема Хелсона заведомо необратима.

Мы теперь переходим к построению примера Турана, упомянутого в начале этого параграфа и показывающего, что неотрицательность частных сумм тригонометрического ряда во всяком случае не влечет то, что он есть ряд Фурье от $f(x) \in L^2$.

Т е о р е м а Т у р а н а. *Существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (12.10)$$

у которого частные суммы $S_n(x) \geq 0$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), $n = 1, 2, \dots$, и, однако,

$$\sum a_n^2 = +\infty.$$

В качестве коэффициентов a_n Туран берет коэффициенты разложения в ряд Тейлора для $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$, как известно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n, \quad (12.11)$$

причем ряд сходится для $|z| < 1$. Полагая

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (12.12)$$

покажем, что ряд (12.10) удовлетворяет условиям теоремы Турана.

Для этого прежде всего заметим, что

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n + \theta_n}, \quad \text{где } 0 < \theta_n < 1$$

(как доказывается при выводе формулы Валлиса, см., например, Фихтенгольц, т. II, стр. 169), откуда сразу следует для $n = 1, 2, \dots$

$$a_n^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n + \theta_n}, \quad (12.13)$$

а потому

$$\sum a_n^2 = +\infty.$$

Теперь надо показать, что частные суммы ряда (12.10) все неотрицательны.

С этой целью заметим сначала, что в силу (12.13)

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.14)$$

Теперь докажем лемму:

Л е м м а. Если

$$g(x) = d_0 + d_1 \cos x + \dots + d_n \cos nx$$

— тригонометрический полином, у которого коэффициенты положительны и монотонно убывают (или возрастают), то $g(x)$ не обращается в нуль в интервале

$$0 < x < \frac{\pi}{n}. \quad (12.15)$$

Для доказательства запишем $g(x)$ в виде

$$g(x) = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} d_v \cos vx + \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n d_v \cos vx.$$

В первой сумме число членов не меньше, чем во второй, и притом в силу (12.15) все эти члены неотрицательны. Следовательно, если сложить каждый член $d_v \cos vx$ второй суммы с членом $d_{n-v} \cos(n-v)x$ первой суммы, то

$$g(x) \geq \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n [d_v \cos vx + d_{n-v} \cos(n-v)x]. \quad (12.16)$$

Но для рассматриваемых значений v в силу (12.15), очевидно,

$$0 \leq (n-v)x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того,

$$(n-v)x < vx < \pi - (n-v)x.$$

Следовательно,

$$|\cos vx| < |\cos(n-v)x| = \cos(n-v)x. \quad (12.17)$$

Так как мы коэффициенты полинома $g(x)$ предположили монотонно убывающими, то

$$d_v \leq d_{n-v},$$

а отсюда и из (12.17) следует, что все члены суммы, стоящей в квадратных скобках в (12.16), положительны, а потому лемма доказана.

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Если мы возьмем частную сумму $S_n(x)$ ряда (12.10), то так как числа a_n положительны и монотонно убывают (см. (12.12)), мы находимся в условиях леммы, т. е. заведомо имеем

$$S_n(x) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}.$$

В силу четности полинома $S_n(x)$ достаточно теперь доказывать его неотрицательность для $\frac{\pi}{n} < x \leq \pi$.

Кроме того, для $n \leq 2$ утверждение очевидно, так как

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{8},$$

и полиномы

$$S_0 = 1, \quad S_1(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x, \quad S_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x$$

неотрицательны просто потому, что $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) > 0$.

Итак, достаточно рассматривать $S_n(x)$ при

$$n \geq 3 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{n} < x \leq \pi. \quad (12.18)$$

Так как коэффициенты в разложении $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ монотонно убывают, то по теореме Абеля ряд (12.11) сходится не только для $|z| < 1$, но и для $z = e^{it}$, если только $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Следовательно, в этих условиях

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{it\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{it}}}, \quad 0 < t < 2\pi.$$

Отделив действительную часть, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{it\nu} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu t = \operatorname{Re} \left[(1 - e^{it})^{-\frac{1}{2}} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{t}{4}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{t}{4}} \left(-2i \sin \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \operatorname{Re} \frac{e^{i\frac{\pi-t}{4}}}{\sqrt{2 \sin \frac{t}{2}}} = \frac{\cos \frac{\pi-t}{4}}{\sqrt{2 \sin \frac{t}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $0 < x < 2\pi$

$$S_n(x) = \frac{\cos \frac{\pi-x}{4}}{2\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x.$$

Но в силу (12.18) во всяком случае $\cos \frac{\pi-x}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда

$$S_n(x) > \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x. \quad (12.19)$$

Мы теперь займемся оценкой сверху ряда, стоящего в правой части (12.19).

В силу леммы Абеля (см. Вводный материал, § 1) и учитывая, что

$$|D_\nu(x)| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad \nu = 1, 2, \dots; \quad 0 < x \leq \pi,$$

имеем

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \right| \leq \frac{a_{n+1}}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (12.20)$$

Но так как в силу (12.14) имеем

$$a_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}, \quad (12.21)$$

то из (12.19), (12.20) и (12.21) следует

$$S_n(x) > \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)\sin \frac{x}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}}} \right). \quad (12.22)$$

Из этого мы должны теперь заключить, что $S_n(x) \geq 0$. Пусть сначала

$$\frac{4}{n} < x \leq \pi.$$

Тогда

$$\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi} > \frac{4}{n\pi},$$

а потому

$$\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}} > 2,$$

и это в силу (12.22) влечет $S_n(x) > 0$.

Теперь рассмотрим случай

$$\frac{\pi}{n} < x \leq \frac{4}{n}. \quad (12.23)$$

В этом случае, так как при $x > 0$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

имеем в силу (12.23)

$$\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} \geq \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{24} \cdot \frac{16}{n^2} \right) \geq \frac{\pi}{2n} \left(1 - \frac{2}{3n^2} \right). \quad (12.24)$$

Но мы уже отмечали, что достаточно рассматривать случай $n \geq 3$, а между тем уже при $n \geq 2$ имеем в силу (12.24)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \left(1 - \frac{2}{3n^2} \right)}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \left(1 - \frac{1}{6} \right)}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{12}{5}} < \frac{1}{2},$$

а потому из (12.22) снова заключаем, что $S_n(x) > 0$, и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Автор отмечает, что в последнем пункте доказательства было существенно использовано неравенство

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

так как если бы взять, например, $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$, то уже данный ход рассуждений не привел бы к цели.

З а м е ч а н и е 2. Если бы в лемме рассмотреть вместо интервала $0 < x < \frac{\pi}{n}$ меньший интервал $0 < x < \frac{\pi}{2n}$, то необращение $g(x)$ в нуль было бы тривиальным; однако этого факта было бы недостаточно для доказательства теоремы.

С другой стороны, хотя для доказательства теоремы это и не нужно, можно отметить, что расширить интервал $(0, \frac{\pi}{n})$ уже нельзя. Действительно, если для $n \geq 1$ рассмотреть полином

$$g_0(x) = 1 + \cos x + \dots + \cos nx,$$

то так как

$$g_0(x) = \frac{1}{2} + D_n(x),$$

где $D_n(x)$ — ядро Дирихле, видим, что

$$g_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Но отсюда ясно, что $g_0(x)$ обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{n}$, а между тем он удовлетворяет условиям леммы.

Ряд интересных замечаний и дополнений к данному вопросу содержится в уже упомянутой работе Турана (Turán^[1]).

§ 13. Преобразования рядов Фурье

Ряд авторов изучал следующий вопрос: допустим, что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (13.1)$$

При каких условиях, наложенных на числа λ_n , ряд

$$\frac{a_0}{2} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \lambda_n \quad (13.2)$$

снова является рядом Фурье, и если он есть $\sigma(F)$, то что можно сказать об этой функции $F(x)$, зная свойства $f(x)$? Мы не будем рассматривать здесь те случаи, которые уже разобраны в книге Зигмунда^[М.6], § 4.60, и хотим указать некоторые более поздние работы в том же направлении.

Так, например, Салем (Salem^[1]) показывает, что можно всегда выбрать λ_n так, чтобы $\lambda_n \uparrow \infty$, последовательность $\{\lambda_n\}$ была вогнутой и при этом ряд от непрерывной $f(x)$ преобразовывался в ряд от непрерывной F и аналогично для случая $f \in L$ и $F \in L$.

А. Ф. Тиман^[3] указал эффективное необходимое условие для $\{\lambda_n\}$, чтобы ряд Фурье любой ограниченной функции, или непрерывной, или интегрируемой преобразовывался в ряд Фурье функции того же класса (а также ряд Фурье—Стилтьеса в ряд Фурье—Стилтьеса). Это условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{|k-n|} - \lambda_{k+n}}{k},$$

сходится равномерно относительно n . В частности, если $\{\lambda_n\}$ монотонна, то отсюда $\lambda_n - \lambda_{n+1} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.

А. А. Конюшков^[1] показал, что если $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, т. е.

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = O(h^\alpha),$$

то для любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ ряд (13.2) будет рядом Фурье от $F \in \text{Lip}(\alpha, p)$, т. е.

$$\|F(x+h) - F(x)\|_p = o(h^\alpha).$$

Проблему преобразования ряда Фурье можно обобщить, а именно: дана матрица $\|a_{kj}\|$. Совершаем преобразование, определяемое этой матрицей, над коэффициентами a_n и b_n , т. е. берем

$$A_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} a_j; \quad B_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} b_j. \quad (13.3)$$

Предполагая, что эти ряды сходятся, т. е. A_k и B_k определены для любого k , спрашиваем себя, при каких условиях, наложенных на матрицу, ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (13.4)$$

будет снова рядом Фурье, и какова определяемая им функция.

В частности, Харди^[2] первый рассмотрел этот вопрос для случая, когда

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

(т. е. матрица является той, которая употребляется в методе (C, 1)). Харди показал, что такая матрица преобразует ряд Фурье в ряд Фурье, и если $f(x) \in L^p$ ($1 < p < \infty$), то и $F(x) \in L^p$. Далее Беллман (Bellman^[2]) рассматривал случай, когда

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

В этом случае для произвольного ряда Фурье числа A_k могут уже не иметь смысла, но если $f \in L^p$ при $p > 1$, то он показал, что вновь полученный ряд будет рядом Фурье от $F \in L^p$. Матрица Беллмана является транспонированной по отношению к матрице Харди.

Другие авторы рассматривали также матрицу Харди, но для ряда из синусов, а также и матрицу Беллмана для этого случая, и при этом налагали на $f(x)$ те или иные условия.

Не имея возможности останавливаться на всех частных результатах, отметим один достаточно общий результат Юнга (F. Young^[1]). Он изучал произвольные матрицы $\|a_{kj}\|$ и указал условия, при которых они преобразуют ряд от $f \in L^p$ в ряд от $F \in L^p$. В частности, из его результатов вытекает, что если матрица обладает этим свойством, то и транспонированная тоже, а потому теорема Беллмана могла бы быть выведена из теоремы Харди.

Укажем еще, что в уже упомянутой работе А. А. Конюшкова есть теорема, аналогичная теореме Беллмана, а именно:

Если $g(x) \sim \sum b_n \sin nx$ и $g(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то и для $G(x) \sim \sum B_n \sin nx$, где $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k}$, имеем $G(x) \in \text{Lip } \alpha$.

Там же имеются и теоремы о преобразованиях рядов Фурье для функций из классов $\text{Lip } (\alpha, p)$.

Наконец, говоря о преобразованиях рядов Фурье, отметим работу Рудина (Rudin^[1]), где ставится вопрос, при каких условиях, наложенных на функцию $\varphi(z)$ из того, что $\sum c_n e^{inx}$ есть ряд Фурье, следует, что и $\sum \varphi(c_n) e^{inx}$ есть ряд Фурье. Оказывается для этого необходимо, чтобы $\varphi(z)$ удовлетворяла условию Липшица в окрестности нуля. Это условие недостаточно, так как $\varphi(z) = |z|$ удовлетворяет условию $\text{Lip } 1$, а между тем $\sum |c_n| e^{inx}$ может и не быть рядом Фурье; это вытекает из результатов Кагана (Kahane^[1]).

Г Л А В А III

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ В ТОЧКЕ

§ 1. Введение

В главе I мы уже рассматривали некоторые признаки для сходимости ряда Фурье в заданной точке. Мы имеем в виду здесь рассмотреть еще ряд признаков, а также сравнить различные признаки между собой. Принято говорить, что некоторый достаточный признак *A сильнее* признака *B*, если

1) каждый раз, когда можно вывести сходимость ряда из признака *B*, можно получить тот же результат из признака *A*, но

2) существуют случаи, когда признак *A* позволяет доказать сходимость, тогда как признак *B* применить невозможно.

Если условие 1) выполнено, а относительно 2) ничего не известно, то говорят, что признак *A не слабее* признака *B*.

Два признака *A* и *B* называются *несравнимыми*, если можно указать случаи, когда *A* применим, а *B* — нет, точно так же, как и обратно.

Мы заканчиваем главу некоторыми замечаниями, касающимися равномерной сходимости; более подробно равномерная сходимость будет изучена в главе IV.

§ 2. Сравнение признаков Дини и Жордана

В § 38 главы I было установлено, что если x точка регулярности для $f(x)$ и если

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt$$

имеет смысл, то ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в этой точке (п р и з н а к Д и н и).

С другой стороны, из теоремы Жордана (глава I, § 39) следует, что если $f(x)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки x и x — точка регулярности, то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в этой точке.

Покажем, что *признаки Дини и Жордана несравнимы*.

Действительно, положим

$$f(x) = \frac{1}{\left| \ln \frac{x}{2\pi} \right|} \quad \text{на } 0 < x \leq \pi,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(-x) = f(x).$$

Тогда ясно, что $f(x)$ монотонна на $(0, \pi)$ и на $(-\pi, 0)$, а потому она с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$. Она, кроме того, всюду непрерывна, в част-

ности при $x = 0$. Поэтому, применяя признак Жордана, мы видим, что ее ряд Фурье сходится к ней всюду и, в частности, при $x = 0$.

Однако признак Дини не применим при $x = 0$, так как интеграл

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt = 2 \int_0^{\delta} \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_0^{\delta} \frac{dt}{t \left| \ln \frac{t}{2\pi} \right|} = +\infty.$$

Напротив, если рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \quad \text{на } 0 < x \leq \pi, \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi(-x) &= \psi(x), \end{aligned}$$

то для нее признак Дини показывает, что ряд Фурье сходится в точке 0, так как интеграл

$$2 \int_0^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t} dt \leq 2 \int_0^{\delta} \frac{\sqrt{t}}{t} dt = 2 \int_0^{\delta} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

имеет смысл. Однако функция $\psi(x)$ имеет неограниченное изменение в любой окрестности точки 0, а потому признак Жордана не применим.

Мы укажем в следующих параграфах еще ряд признаков для сходимости в точке. Напомним (см. § 37 главы I), что для сходимости $\sigma(f)$ к $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du,$$

где

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x).$$

Этим критерием и будем пользоваться.

§ 3. Признак Валле-Пуассена *), сравнение его с признаками Дини и Жордана

Пусть

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_x(u) du, \quad \chi(0) = 0$$

и

$$\chi(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Если $\chi(t)$ есть функция с ограниченным изменением на некотором отрезке $0 \leq t \leq \delta$, то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Имеем по определению

$$t \chi(t) = \int_0^t \varphi_x(u) du,$$

а потому

$$\varphi_x(t) = [t \chi(t)]' \quad \text{почти всюду.}$$

*) Vallee-Poussin [1].

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du &= \int_0^{\delta} [u\chi(u)]' \frac{\sin nu}{u} du = \\ &= \int_0^{\delta} u\chi'(u) \frac{\sin nu}{u} du + \int_0^{\delta} \chi(u) \frac{\sin nu}{u} du = \\ &= \int_0^{\delta} \chi'(u) \sin nu du + \int_0^{\delta} \chi(u) \frac{\sin nu}{u} du. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первый из интегралов правой части (3.1) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ потому, что $\chi(u)$ с ограниченным изменением, а значит $\chi'(u)$ суммируема на $(0, \delta)$. Покажем, что и второй интеграл стремится к нулю. Для этого заметим, что $\chi(u)$ непрерывна в точке 0 и имеет в ее окрестности ограниченное изменение. Поэтому $\sigma(\chi)$ сходится к 0 при $u = 0$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [\chi(0+u) + \chi(0-u) - 2\chi(0)] \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [\chi(u) + \chi(-u)] \frac{\sin nu}{u} du = 0,$$

а так как $\varphi_x(u)$ четная, то и $\chi(u)$ четная, значит, отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \chi(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0.$$

Мы видим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0,$$

а потому $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$, и теорема доказана.

Докажем теперь, что

Признак Валле-Пуссена сильнее признаков Дини и Жордана.

Действительно, если $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то и $\varphi_x(u)$ также. Отсюда следует, что $\varphi_x(u)$ является разностью двух монотонных, но тогда и $\chi(t)$ тоже окажется разностью двух монотонных и, следовательно, будет иметь ограниченное изменение. Кроме того, $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Действительно, если $f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, то $\varphi_x(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$, следовательно, и $\chi(t) \rightarrow 0$.

Таким образом, если выполнен признак Жордана, то и признак Валле-Пуссена выполнен.

Теперь допустим, что выполнен признак Дини. Так как

$$\chi'(t) = \frac{1}{t} \varphi_x(t) - \frac{1}{t^2} \int_0^t \varphi_x(u) du \quad \text{почти всюду,}$$

то

$$|\chi'(t)| \leq \left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right| + \frac{1}{t^2} \int_0^t |\varphi_x(u)| du. \quad (3.2)$$

Первый член правой части (3.2) суммируем в силу условия Дини. Затем, интегрируя по частям

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left\{ \frac{1}{t^2} \int_0^t |\varphi_x(u)| du \right\} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} |\varphi_x(u)| du - \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} |\varphi_x(u)| du + \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du, \quad (3.3)$$

мы видим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ правая часть (3.3) стремится к пределу, поэтому и второй член правой части в (3.2) суммируем на $(0, \delta)$, значит, $\chi'(t)$ суммируема на $(0, \delta)$. Отсюда следует, что $\chi(t)$ имеет ограниченное изменение на $(0, \delta)$.

Кроме того, $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, так как

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_x(u) du \right| \leq \int_0^t \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Таким образом, если признак Дини выполнен, то выполнен и признак Валле-Пуссена.

Мы доказали, что признак Валле-Пуссена не слабее признака Жордана и не слабее признака Дини. Но так как эти два признака несравнимы (см. § 2), то признак Валле-Пуссена сильнее каждого из них.

§ 4. Признак Юнга *)

Пусть выполнены следующие условия:

- а) $\varphi_x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,
- б) функция

$$\theta(t) = t\varphi_x(t)$$

имеет ограниченное изменение на некотором интервале $(0, \delta)$,

- в) обозначая через $V(h)$ полное изменение $\theta(t)$ на интервале $(0, h)$, имеем

$$V(h) = O(h).$$

Тогда $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Для доказательства мы снова будем опираться на критерий сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = 0,$$

причем за δ примем такое число, что $\theta(t)$ имеет ограниченное изменение на $(0, \delta)$.

Имеем

$$\int_0^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^{k \frac{\pi}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt. \quad (4.1)$$

Здесь k — некоторое фиксированное число, которое мы подберем позже. В силу условия а) мы знаем, что

$$\sup_{0 \leq t \leq k \frac{\pi}{n}} |\varphi_x(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

*) W. H. Young [7].

а потому

$$\left| \int_0^{k\frac{\pi}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq n \sup_{0 \leq t \leq k\frac{\pi}{n}} |\varphi_x(t)| k\frac{\pi}{n} = o(1), \quad (4.2)$$

и остается оценить второй интеграл в (4.1).

Положим

$$\xi_n(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_x(t)}{t} = \frac{\theta(t)}{t^2} & \text{на } \left(k\frac{\pi}{n}, \delta\right), \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Тогда функция $\xi_n(t)$ имеет ограниченное изменение в силу б). Если мы обозначим через W_n ее полное изменение на $[-\pi, \pi]$, то так как

$$\int_{k\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \xi_n(t) \sin nt dt,$$

мы видим (см. глава I, § 22), что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{k\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{W_n}{n}.$$

Заметим, что W_n зависит от того, как мы выбираем число k . Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать k , что

$$W_n < \varepsilon n.$$

Если это будет доказано, то будем иметь

$$\left| \int_{k\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \pi \varepsilon,$$

и в силу (4.1) и (4.2) теорема будет доказана.

Итак, осталось оценить полное изменение W_n функции ξ_n . Имеем

$$\xi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\theta\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} = \frac{\frac{k\pi}{n} \varphi_x\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} = \frac{n}{k\pi} \varphi_x\left(\frac{k\pi}{n}\right) = o(n)$$

и $\xi_n(\delta) = \frac{\theta(\delta)}{\delta^2} = o(1)$; поэтому, если мы покажем, что полное изменение $\xi_n(t)$ на $\left(\frac{k\pi}{n}, \delta\right)$ есть $o(n)$ при надлежащем выборе k , то это будет верно и для $(-\pi, \pi)$, поскольку скачки функции в точках $\frac{k\pi}{n}$ и δ равны $o(n)$ и $O(1)$.

Для проведения этой оценки заметим, что в силу условия в) имеем для полного изменения $V(t)$ функции $\theta(t)$ неравенство $V(t) < At$, где A — постоянное. Поэтому $\theta(t)$ можно представить в виде $\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, где θ_1 и θ_2 монотонны и

$$|\theta_1(t)| < At, \quad |\theta_2(t)| < At.$$

При любом разбиении отрезка $\left(\frac{k\pi}{n}, \delta\right)$ точками деления

$$t_0 = \frac{k\pi}{n}, t_1, t_2, \dots, t_m = \delta$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\theta_1(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{\theta_1(t_i)}{t_i^2} \right| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1}^2} \left| \theta_1(t_{i+1}) - \theta_1(t_i) \right| + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \theta_1(t_i) \right| \left| \frac{1}{t_{i+1}^2} - \frac{1}{t_i^2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1}^2} \left| V(t_{i+1}) - V(t_i) \right| + 2 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{|\theta_1(t)|}{t^3} dt \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dV(t)}{t^2} + 2A \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива для $\theta_2(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\theta(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{\theta(t_i)}{t_i^2} \right| &\leq 2 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dV(t)}{t^2} + 4A \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} = \\ &= 2 \frac{V(t)}{t^2} \Big|_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} + 4 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{V(t)}{t^3} dt + 4A \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \leq 2 \frac{V(\delta)}{\delta^2} + 8A \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{2V(\delta)}{\delta^2} + 8A \frac{n}{k\pi}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\theta(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{\theta(t_i)}{t_i^2} \right| < \frac{2V(\delta)}{\delta^2} + \varepsilon n = o(n)$$

при достаточно большом n , а потому

$$W(n) = o(n),$$

а это и надо было доказать.

§ 5. Взаимоотношения между признаком Юнга и признаками Дини, Жордана, Валле-Пуссена *)

Покажем, что *признак Юнга сильнее признака Жордана*.

Действительно, если $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то и $\varphi_x(t)$ также. Если в рассматриваемой точке x значение функции есть $f(x)$, то $\varphi_x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Функция $\theta(t) = t\varphi_x(t)$ есть функция с ограниченным изменением, как произведение двух функций с ограниченным изменением.

Наконец, для оценки полного изменения $V(h)$ функции $\theta(t)$ на $(0, h)$ заметим, что для любых двух функций $\psi(t)$ и $g(t)$ с ограниченным изменением и любого отрезка (a, b)

$$\text{Var}_{(a,b)} \psi(t)g(t) \leq \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| \text{Var}_{(a,b)} \psi + \max_{a \leq t \leq b} |\psi(t)| \text{Var}_{(a,b)} g$$

(где $\text{Var}_{(a,b)} F$ обозначает полное изменение F на (a, b)), а потому, если $|\varphi_x(t)| \leq M$ на $0 \leq t \leq h$, то

$$V(h) = hM + h \text{Var}_{0 \leq t \leq h} \varphi_x(t) = O(h),$$

т. е. признак Юнга выполнен и, следовательно, доказано, что признак Юнга не слабее признака Жордана.

Ниже будет показано, что существуют случаи, когда признак Юнга применить можно, а признак Валле-Пуссена уже не применим; следова-

*) Сравнение различных признаков сходимости сделано Харди (Hardy [4]).

тельно, тем более тогда не применим и признак Жордана, а потому мы видим, что

Признак Юнга не только не слабее, но и сильнее признака Жордана.
Наше утверждение доказано.

Покажем теперь, что

Признак Юнга не сильнее признака Дини.

Действительно, рассмотрим пример, который уже фигурировал при сравнении признаков Дини и Жордана (см. § 2):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \quad \text{на } 0 < x \leq \pi, \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi(-x) &= \psi(x).\end{aligned}$$

Ясно, что, полагая $x = 0$, имеем $\varphi_0(t) = 2\sqrt{t} \sin \frac{1}{t}$. Поэтому

$$\theta(t) = 2t^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{t}.$$

Значит,

$$d\theta(t) = \left(3\sqrt{t} \sin \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} \cos \frac{1}{t}\right) dt.$$

Если бы признак Юнга был удовлетворен, то мы должны были бы иметь

$$\int_0^h |d\theta(t)| = O(h),$$

а между тем

$$\int_0^h \frac{\left|\cos \frac{1}{t}\right|}{\sqrt{t}} dt \geq C \sqrt{h},$$

где C — положительная постоянная, т. е. признак Юнга не выполнен, хотя признак Дини можно применить.

С другой стороны, признак Дини не сильнее признака Юнга. Действительно, мы давали пример, когда признак Дини не применим, а признак Жордана применим. Но в таком случае применим и признак Юнга.

Из двух последних утверждений вытекает

С л е д с т в и е. *Признак Юнга и признак Дини несравнимы.*

Перейдем к сравнению признака Юнга с признаком Валле-Пуссена. Докажем сначала, что

Признак Юнга не сильнее признака Валле-Пуссена.

Действительно, если бы признак Юнга был сильнее признака Валле-Пуссена, то в силу результатов § 3 он был бы и подавно сильнее признака Дини, но мы только что убедились в неверности этого.

Покажем теперь, что и обратно:

Признак Валле-Пуссена не сильнее признака Юнга.

Действительно, возьмем любое число a , $0 < a < 1$, и положим

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sin |\ln x|}{|\ln x|} \quad \text{на } 0 < x \leq a, \\ f(x) &= 0 \quad \text{при } a < x \leq \pi, \\ f(0) &= 0, \\ f(-x) &= f(x).\end{aligned}$$

В силу этого определения

$$\varphi_0(t) = 2f(t) = 2 \frac{\sin |\ln t|}{|\ln t|} \quad \text{на } 0 < t \leq a$$

и

$$\theta(t) = 2t \frac{\sin |\ln t|}{|\ln t|} = 2t \frac{\sin \ln t}{\ln t}.$$

Так как

$$\theta'(t) = 2 \frac{\sin \ln t}{\ln t} + 2 \frac{\cos \ln t}{\ln t} - 2 \frac{\sin \ln t}{\ln^2 t}$$

остается ограниченным при $t \rightarrow 0$, то $\theta(t)$ имеет ограниченное изменение и

$$V(h) \leq \int_0^h |\theta'(t)| dt = O(h),$$

т. е. признак Юнга выполнен.

Если положить

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_0(u) du = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du,$$

то для выполнения признака Валле-Пуссена надо было бы, чтобы $\chi(t)$ имела ограниченное изменение на некотором $(0, \delta)$, а тогда $\chi'(t)$ должна было бы быть суммируемой на $(0, \delta)$. А мы покажем, что $\chi'(t)$ несуммируема около точки $t = 0$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\chi'(t) = -\frac{2}{t^2} \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du + \frac{2}{t} \frac{\sin \ln t}{\ln t}. \quad (5.1)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du &= \int_0^t \frac{u}{\ln u} \sin \ln u d \ln u = -\frac{t}{\ln t} \cos \ln t + \int_0^t \cos \ln u \frac{\ln u - 1}{\ln^2 u} du = \\ &= -\frac{t}{\ln t} \cos \ln t + \int_0^t \cos \ln u \frac{du}{\ln u} - \int_0^t \frac{\cos \ln u}{\ln^2 u} du. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Также находим

$$\int_0^t \frac{\cos \ln u}{\ln u} du = \frac{t}{\ln t} \sin \ln t - \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du + \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln^2 u} du,$$

откуда, подставляя в (5.2), получаем

$$2 \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du = \frac{t}{\ln t} [\sin \ln t - \cos \ln t] + \int_0^t \frac{\sin \ln u - \cos \ln u}{\ln^2 u} du. \quad (5.3)$$

Так как при малых и положительных значениях u функция $\ln^2 u$ убывает с ростом u , то

$$\left| \int_0^t \frac{\sin \ln u - \cos \ln u}{\ln^2 u} du \right| \leq \frac{2t}{\ln^2 t},$$

а потому из (5.3)

$$\frac{2}{t} \int_0^t \frac{\sin \ln u}{\ln u} du = \frac{\sin \ln t - \cos \ln t}{\ln t} + O\left(\frac{1}{\ln^2 t}\right)$$

и, подставляя в (5.1), находим

$$\chi'(t) = \frac{\sin \ln t + \cos \ln t}{t \ln t} + O\left(\frac{1}{t \ln^2 t}\right).$$

Но так как $\frac{1}{t \ln^2 t}$ суммируема около $t = 0$, то остается доказать, что

$$\frac{\sin \ln t + \cos \ln t}{t \ln t}$$

не суммируема около $t = 0$. Это значит, что

$$\int_0^\delta \left| \frac{\sin \ln t + \cos \ln t}{t \ln t} \right| dt = +\infty.$$

Полагая $\ln t = -u$, получаем

$$\int_0^\delta \left| \frac{\sin \ln t + \cos \ln t}{t \ln t} \right| dt = \int_{\ln \frac{1}{\delta}}^\infty \frac{|\cos u - \sin u|}{u} du = \sqrt{2} \int_{\ln \frac{1}{\delta}}^\infty \frac{\left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - u \right) \right|}{u} du = +\infty$$

(см. глава I, § 41).

Следовательно, мы убедились в несуммируемости $\chi'(t)$, и теорема доказана.

Из двух последних теорем вытекает, что *признаки Юнга и Валле-Пуссена несравнимы*.

§ 6. Признак Лебега

Лебег получил признак сходимости, более сильный, чем все предыдущие. Этот признак самим Лебегом был высказан в нескольких различных формах. Мы докажем его сначала в следующем виде:

Т е о р е м а Л е б е г а. *Если*

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| du \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

при $h \rightarrow +0$, то ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Мы будем опираться на следующую лемму:

Л е м м а 1. *Если условие (6.1) выполнено, то, полагая*

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du, \quad (6.2)$$

имеем

$$\Phi_x(t) = o(t). \quad (6.3)$$

Для доказательства заметим, что из (6.1) тем более следует

$$\int_h^\delta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u+h} du - \int_h^\delta \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du \rightarrow 0. \quad (6.4)$$

Совершая в первом интеграле (6.4) замену переменного $u = v - h$, находим после элементарных вычислений

$$\int_h^{2h} \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем h_0 так, чтобы

$$\int_h^{2h} \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du < \varepsilon \quad \text{при} \quad h \leq h_0.$$

Тогда и подалее

$$\frac{1}{2h} \int_h^{2h} |\varphi_x(u)| du < \varepsilon$$

или

$$\int_h^{2h} |\varphi_x(u)| du \leq 2\varepsilon h \quad \text{при} \quad h \leq h_0.$$

Это удобно переписать в виде

$$\int_{\frac{h_1}{2}}^{h_1} |\varphi_x(u)| du \leq \varepsilon h_1 \quad \text{при} \quad h_1 < 2h_0. \quad (6.6)$$

Пусть теперь $t \leq 2h_0$. Тогда в силу (6.6) имеем при любом $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_{\frac{t}{2^{n+1}}}^{\frac{t}{2^n}} |\varphi_x(u)| du < \varepsilon \frac{t}{2^n}.$$

Но отсюда

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{t}{2^{n+1}}}^{\frac{t}{2^n}} |\varphi_x(u)| du < \varepsilon t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon t,$$

т. е.

$$\Phi_x(t) \leq 2\varepsilon t,$$

а это и значит, что

$$\Phi_x(t) = o(t),$$

т. е. (6.3) доказано.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы Лебега. Чтобы доказать справедливость этой теоремы, достаточно убедиться в том, что для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du = 0. \quad (6.7)$$

С этой целью положим

$$I = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du. \quad (6.8)$$

Покажем сначала, что

$$I = \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\delta + \frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du + o(1). \quad (6.9)$$

Действительно, в силу леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu \, du \right| &\leq n \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} |\varphi_x(u)| \, du = \\ &= n \left[\Phi\left(2\frac{\pi}{n}\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \leq n \Phi\left(2\frac{\pi}{n}\right) = o(1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Кроме того,

$$\int_{\delta}^{\delta + \frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu \, du = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (6.11)$$

потому что $\frac{\varphi_x(u)}{u}$ суммируема на (δ, π) .

Из (6.10) и (6.11) вытекает справедливость (6.9).

Теперь, заменяя в (6.9) переменное u на $u + \frac{\pi}{n}$, найдем

$$I = - \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \sin nu \, du + o(1). \quad (6.12)$$

Складывая (6.8) и (6.12), получаем

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left[\frac{\varphi_x(u)}{u} - \frac{\varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \right] \sin nu \, du + o(1).$$

Но тогда

$$|I| \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u)}{u} - \frac{\varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \right| du + o(1) = o(1), \quad (6.13)$$

что вытекает из (6.1), где $h = \frac{\pi}{n}$.

Кроме того, мы имеем

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu \, du \right| \leq n \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\varphi_x(u)| \, du = o(1), \quad (6.14)$$

потому что, в силу леммы 1, из (6.1) следует (6.3). Но

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu \, du = I + \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu \, du,$$

а потому из (6.13) и (6.14) следует (6.7), и теорема доказана.

Мы хотим показать, что признак сходимости Лебега, выраженный условием (6.1), можно высказать в несколько иной форме, более удобной для применения к конкретным случаям*). Докажем такую лемму:

Л е м м а 2. Условие

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| du = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

эквивалентно совокупности двух условий

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t), \quad (6.3)$$

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| du = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6.15)$$

Иначе, говоря, можно высказать следующее утверждение, которое также может быть названо признаком сходимости Лебега:

Если в некоторой точке x выполнены условия (6.3) и (6.15), то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в этой точке.

Чтобы доказать лемму 2, заметим, прежде всего, что если (6.1) выполнено, то выполнено и (6.3) — это было содержанием леммы 1. Далее, мы имеем

$$\frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} = \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} - h \frac{\varphi_x(u+h)}{(u+h)u}. \quad (6.16)$$

Покажем, что из (6.3) следует

$$h \int_h^\delta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u(u+h)} du = o(1). \quad (6.17)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\eta > 0$ столь малым, чтобы $\Phi_x(t) < \varepsilon t$ при $t \leq 2\eta$ (что возможно в силу (6.3)). Так как

$$h \int_\eta^\delta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{(u+h)u} du \leq \frac{h}{\eta^2} \int_\eta^\delta |\varphi_x(u+h)| du < \varepsilon, \quad (6.18)$$

если h достаточно мало, то остается оценить

$$h \int_h^\eta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u(u+h)} du.$$

Но

$$\int_0^t |\varphi_x(u+h)| du = \Phi_x(t+h) - \Phi_x(h),$$

а потому

$$\int_h^\eta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u(u+h)} du \leq \int_h^\eta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u^2} du = \frac{\Phi_x(u+h)}{u^2} \Big|_h^\eta + 2 \int_h^\eta \frac{\Phi_x(u+h) - \Phi_x(h)}{u^3} du. \quad (6.19)$$

*) Что касается данной формы, то она удобна для сравнения этого признака с другими (см. § 7).

В силу выбора числа η имеем при $h \leq u \leq \eta$

$\Phi_x(u+h) - \Phi_x(h) \leq \Phi_x(u+h) < \varepsilon(u+h) < 2\varepsilon u$,
поэтому

$$2 \int_h^\eta \frac{\Phi_x(u+h) - \Phi_x(h)}{u^3} du < 4\varepsilon \int_h^\eta \frac{du}{u^2} < \frac{4\varepsilon}{h}. \quad (6.20)$$

Кроме того, обинтегрированный член есть

$$\frac{\Phi_x(\eta+h)}{\eta^2} - \frac{\Phi_x(2h)}{h^2} \leq \frac{\Phi_x(2\eta)}{\eta^2} + \frac{\Phi_x(2h)}{h^2} < \frac{2\varepsilon}{\eta} + \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (6.21)$$

Из (6.19), (6.20) и (6.21) следует, что

$$h \int_h^\eta \frac{|\varphi_x(u+h)|}{u(u+h)} du < 6\varepsilon + 2\varepsilon \frac{h}{\eta} \leq 8\varepsilon$$

в силу $h \leq \eta$, и, принимая во внимание (6.18), видим, что интеграл (6.17) может быть сделан меньше 9ε , а так как ε произвольно мало, то (6.17) доказано.

Итак, мы убедились, что из (6.3) следует (6.17). Но так как из (6.16) имеем

$$\left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| \leq \left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| + \left| h \frac{\varphi_x(u+h)}{u(u+h)} \right|,$$

то, интегрируя по u от h до δ , видим, что из (6.1) и (6.17) следует (6.3) и (6.13). Окончательно: (6.1) влечет (6.3) и (6.15).

Напротив, если выполнены (6.3) и (6.15), то, так как (6.3) влечет (6.17), а из (6.16) имеем

$$\left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| \leq \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| + \left| h \frac{\varphi_x(u+h)}{(u+h)u} \right|,$$

мы совершенно также убеждаемся, что (6.1) имеет место.

Итак, (6.1) влечет (6.3) и (6.15), а они в свою очередь влекут (6.1), и лемма 2 доказана.

§ 7. Сравнение признака Лебега со всеми предыдущими

Мы хотим теперь доказать, что *признак Лебега сильнее признаков Жордана, Дини, Валье-Пуссена и Юнга*.

Для этого мы прежде всего, следуя Харди (Hardy^[4]), докажем, что признак Лебега не слабее признаков Валье-Пуссена и Юнга.

Признак Лебега не слабее признака Валье-Пуссена.

Для доказательства этого предложения покажем, что если

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_x(u) du \quad (7.1)$$

есть функция с ограниченным изменением на некотором $(0, \delta)$ и $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| du = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (7.2)$$

С этой целью заметим, что почти всюду

$$\varphi_x(t) = [t\chi(t)]' = \chi(t) + t\chi'(t), \quad (7.3)$$

а потому (7.2) будет справедливо, если

$$\int_h^\delta \left| \frac{\chi(u+h)}{u+h} - \frac{\chi(u)}{u} \right| du = o(1) \quad (7.4)$$

и

$$\int_h^\delta |\chi'(u+h) - \chi'(u)| du = o(1). \quad (7.5)$$

Доказывать (7.5) не надо, так как, если $\chi(t)$ имеет ограниченное изменение на $(0, \delta)$, то $\chi'(t)$ суммируема на $(0, \delta)$, а тогда (см. Вводный материал, § 25) даже

$$\int_0^\delta |\chi'(u+h) - \chi'(u)| du = o(1).$$

Таким образом, все сводится к доказательству (7.4).

Но так как, по условию, $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то и по-прежнему

$$\int_0^t |\chi(u)| du = o(t),$$

а потому из леммы 2 (§ 6) будет следовать *, что (7.4) справедливо, если мы докажем, что

$$\int_h^\delta \left| \frac{\chi(t+h) - \chi(t)}{t} \right| dt = o(1). \quad (7.6)$$

Заметим теперь, что из (7.1) сразу видно, что на любом отрезке, не содержащем точку $t = 0$, функция $\chi(t)$ абсолютно непрерывна. Поэтому если $t > 0$, то

$$|\chi(t+h) - \chi(t)| \leq \int_t^{t+h} |\chi'(u)| du,$$

а потому для любого $\eta > h$

$$\begin{aligned} \int_h^\eta \left| \frac{\chi(t+h) - \chi(t)}{t} \right| dt &\leq \int_h^\eta \left\{ \int_t^{t+h} |\chi'(u)| du \right\} \frac{dt}{t} = \\ &= \left[\ln t \int_t^{t+h} |\chi'(u)| du \right]_h^\eta - \int_h^\eta \ln t [|\chi'(t+h)| - |\chi'(t)|] dt = \\ &= \ln \eta \int_\eta^{\eta+h} |\chi'(u)| du - \ln h \int_h^{2h} |\chi'(u)| du - \int_{2h}^{\eta+h} \ln(t-h) |\chi'(t)| dt + \\ &+ \int_h^\eta \ln t |\chi'(t)| dt = \int_h^{2h} \ln\left(\frac{t}{h}\right) |\chi'(t)| dt + \int_{2h}^\eta \ln \frac{t}{t-h} |\chi'(t)| dt + \int_\eta^{\eta+h} \ln \frac{\eta}{t-h} |\chi'(t)| dt. \end{aligned}$$

*) При доказательстве леммы 2 нигде не были использованы свойства $\varphi_x(u)$, поэтому лемма справедлива для любой суммируемой функции, в частности для $\chi(t)$.

В каждом из этих трех интегралов логарифмический множитель ограничен, а потому сумма всех этих интегралов не превосходит некоторую константу, умноженную на

$$\int_h^{\eta+h} |\chi'(u)| du$$

и, следовательно, может быть сделана как угодно малой, если взять η достаточно малым. Если же η фиксировано, то

$$\int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{\chi(t+h) - \chi(t)}{t} \right| dt = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

и, значит, (7.6) справедливо, и доказательство закончено.

Докажем теперь следующую теорему (см. Hardy [4]):

Признак Лебега не слабее признака Юнга.

Пусть выполнены условия теоремы Юнга, т. е.

а) $\varphi_x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,

б) функция $\theta(t) = t \varphi_x(t)$ имеет ограниченное изменение на $(0, 2\delta)$,

в) полное изменение $V(h)$ функции $\theta(t)$ на интервале $(0, h)$ удовлетворяет условию

$$V(h) = O(h).$$

В силу а) имеем

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t),$$

а потому достаточно доказать, что

$$\int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| du = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

чтобы убедиться, что выполнены условия, входящие в признак Лебега, а тогда теорема будет доказана.

В силу б) мы можем представить $\theta(t)$ в виде

$$\theta(t) = g_1(t) - g_2(t),$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — монотонно неубывающие, $g_1(0) = g_2(0) = 0$, и

$$g_1(t) + g_2(t) = V(t),$$

а следовательно, в силу в),

$$\frac{g_1(t)}{t} = O(1) \quad \text{и} \quad \frac{g_2(t)}{t} = O(1). \quad (7.7)$$

Пусть m — целое число, для которого $mh < \delta$; мы его подберем позже. Имеем

$$\int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)}{t} \right| dt = \int_h^{mh} \left| \frac{\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)}{t} \right| dt + \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)}{t} \right| dt = I_1 + I_2. \quad (7.8)$$

Если положить

$$\mu = \sup_{[h, (m+1)h]} |\varphi_x(t)|,$$

то

$$I_1 = \int_h^{mh} \frac{|\varphi_x(t+h)|}{t} dt + \int_h^{mh} \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt \leq 2\mu \ln m. \quad (7.9)$$

Но если m фиксировано, а $h \rightarrow 0$, то из $\varphi_x(t) \rightarrow 0$ следует $\mu \rightarrow 0$, а потому

$$I_1 = o(1). \quad (7.10)$$

Теперь в силу $\varphi_x(t) = \frac{\theta(t)}{t}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{\theta(t+h)}{t+h} - \frac{\theta(t)}{t} \right| \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{g_1(t+h)}{t+h} - \frac{g_1(t)}{t} \right| \frac{dt}{t} + \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{g_2(t+h)}{t+h} - \frac{g_2(t)}{t} \right| \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ясно, что оба интеграла оцениваются одинаково, поэтому достаточно оценить первый; имеем

$$\begin{aligned} \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{g_1(t+h)}{t+h} - \frac{g_1(t)}{t} \right| \frac{dt}{t} &\leq \\ &\leq \int_{mh}^{\delta} \left| \frac{g_1(t+h) - g_1(t)}{(t+h)t} \right| dt + \int_{mh}^{\delta} |g_1(t)| \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h} \right) \frac{dt}{t} = I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Если

$$k = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left| \frac{g_1(t)}{t} \right|$$

(а эта величина конечная в силу (7.7)), то

$$I_4 < k \ln \frac{t}{t+h} \Big|_{mh}^{\delta} = k \ln \frac{\delta(m+1)h}{(\delta+h)mh} < k \ln \frac{m+1}{m}. \quad (7.13)$$

Эту величину можно сделать как угодно малой, если m выбрать достаточно большим, но выбор m мы сделаем позже.

Оценим теперь I_3 . Его можно в силу монотонности $g_1(t)$ записать так:

$$I_3 = \int_{mh}^{\delta} \frac{g_1(t+h) - g_1(t)}{(t+h)t} dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{mh}^{\delta} \frac{g_1(t+h)}{(t+h)t} dt - \int_{mh}^{\delta} \frac{g_1(t)}{t(t+h)} dt = \\ &= \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u-h)} du - \int_{mh}^{\delta} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du = \\ &= \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du + 2h \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u^2-h^2)} du - \int_{mh}^{\delta} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du = \\ &= \int_{\delta}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du - \int_{mh}^{(m+1)h} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du + 2h \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u^2-h^2)} du. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Так как во всех этих интегралах $\left| \frac{g_1(u)}{u} \right| \leq k$, то

$$\left| \int_{\delta}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du \right| \leq k \ln(u+h) \Big|_{\delta}^{\delta+h} \leq k \ln \frac{\delta+2h}{\delta+h} \quad (7.15)$$

может быть сделано как угодно малым, если h достаточно мало; далее

$$\left| \int_{mh}^{(m+1)h} \frac{g_1(u)}{u(u+h)} du \right| \leq k \ln(u+h) \Big|_{mh}^{(m+1)h} = k \ln \frac{m+2}{m+1} \quad (7.16)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \left| 2h \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{g_1(u)}{u(u^2-h^2)} du \right| &\leq 2kh \int_{(m+1)h}^{\delta+h} \frac{du}{u^2-h^2} = k \ln \frac{u-h}{u+h} \Big|_{(m+1)h}^{\delta+h} = \\ &= k \ln \frac{\delta(m+2)h}{(\delta+2h)mh} \leq k \ln \frac{m+2}{m}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Если мы сначала выберем m так, чтобы

$$k \ln \frac{m+2}{m} < \eta, \quad (7.18)$$

где $\eta > 0$ задано, после этого возьмем h так, чтобы

$$k \ln \frac{\delta+2h}{\delta+h} < \eta \quad \text{при} \quad mh < \delta, \quad (7.19)$$

и, наконец, потребуем, чтобы

$$2\mu \ln m < \eta \quad (7.20)$$

(что возможно, так как $\mu \rightarrow 0$, если $mh \rightarrow 0$), то будем иметь в силу (7.13) и (7.18)

$$|I_4| < \eta$$

и в силу (7.14)—(7.19)

$$|I_3| < 3\eta,$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Мы убедились, что признак Лебега не слабее признака Валле-Пуссена и не слабее признака Юнга. Покажем теперь, что

Признак Лебега сильнее признаков Жордана, Дини, Валле-Пуссена и Юнга.

Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать простое замечание: мы знаем, что признаки Валле-Пуссена и Юнга несравнимы. Значит, можно указать случай, когда признак Валле-Пуссена применить можно, а признак Юнга нельзя. Но признак Лебега не слабее признака Валле-Пуссена, значит и он в рассматриваемом случае может быть применен. Итак, признак Лебега сильнее признака Юнга. Совершенно также заключаем, что он сильнее признака Валле-Пуссена. Но этот последний сильнее признаков Дини и Жордана. Значит, признак Лебега сильнее этих двух, и доказательство нашего утверждения закончено.

К сожалению, как было отмечено и самим Лебегом, практическое применение его признака довольно затруднительно, поэтому и приходится часто прибегать к признакам более слабым, но зато более удобными для проверки. Лебег сделал также следующее полезное замечание: если нам удастся разбить функцию $f(x)$ на сумму двух, к каждой из которых применим какой-нибудь признак, то ряд $\sigma(f)$ сходится, как сумма двух сходящихся рядов. Что касается его собственного признака, то он автоматически выполнен для суммы, если выполнен для каждого из слагаемых.

§ 8. Признак Лебега—Гергена

Можно доказать следующую теорему*), в которой вводится несколько менее ограничительное условие, чем в признаке Лебега:

Т е о р е м а. Если

$$\int_0^t \varphi_x(u) du = o(t)$$

и

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| du = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Следовательно, здесь, сохраняя второе условие теоремы Лебега, мы в первом заменяем $|\varphi_x(u)|$ через $\varphi_x(u)$. Для доказательства теоремы, как всегда, будем доказывать, что при некотором δ имеем

$$\int_0^\delta \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8.1)$$

Снова, положив

$$I = \int_{\frac{\pi}{n}}^\delta \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du, \quad (8.2)$$

покажем, что

$$I = \int_{2\frac{\pi}{n}}^{\delta + \frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du + o(1). \quad (8.3)$$

Действительно, так как $\frac{\varphi_x(u)}{u}$ суммируема на (δ, π) , то добавленный интеграл

$$\int_\delta^{\delta + \frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du = o(1).$$

Что касается интеграла

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du, \quad (8.4)$$

то здесь будем рассуждать так: полагая

$$\Phi_x^*(t) = \int_0^t \varphi_x(u) du,$$

имеем теперь $\Phi_x^*(t) = o(t)$. Далее

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = \Phi_x^*(u) \frac{\sin nu}{u} \Big|_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}} - \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}} \Phi_x^*(u) \frac{d}{du} \left(\frac{\sin nu}{u} \right) du. \quad (8.5)$$

*) Эту теорему некоторые авторы называют признаком Лебега—Гергена, хотя Герген (Gergen [1]) рассматривал несколько иное условие.

Обынтегрированный член равен нулю. Под знаком интеграла $\Phi_x^*(u) = o(u)$, а

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin nu}{u} \right) = \frac{nu \cos nu - \sin nu}{u^2} = O\left(\frac{n}{u}\right).$$

Поэтому, замечая еще, что длина интервала интегрирования есть $\frac{\pi}{n}$, видим, что интеграл в (8.5) есть $o(1)$.

Итак, (8.3) установлено. Снова из (8.2) и (8.3) находим (как в доказательстве теоремы Лебега)

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left[\frac{\varphi_x(u)}{u} - \frac{\varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \right] \sin nu \, du + o(1). \quad (8.6)$$

Иначе это можно записать

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left[\frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \right] \sin nu \, du + \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(u) \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u + \frac{\pi}{n}} \right] \sin nu \, du + o(1). \end{aligned} \quad (8.7)$$

В силу второго условия нашей теоремы имеем

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u + \frac{\pi}{n}} \sin nu \, du \right| \leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u} \right| du = o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$, а потому из (8.7)

$$I = \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du + o(1). \quad (8.8)$$

Докажем, что

$$\frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du = o(1). \quad (8.9)$$

Действительно, здесь доказательство такое же, как при оценке интеграла (8.4), только

$$\frac{d}{du} \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)} = O\left(\frac{n}{u^2}\right),$$

а потому

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du &= - \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \Phi_x^*(u) \frac{d}{du} \left(\frac{\sin nu}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} \right) du = \\ &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} o(u) O\left(\frac{n}{u^2}\right) du = o(n) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{du}{u} = o(n) \ln 2 = o(n). \end{aligned}$$

Следовательно (8.9) доказано. Кроме того, очевидно, что

$$\int_{\delta}^{\delta + \frac{\pi}{n}} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du = o(1) \quad (8.10)$$

даже без умножения на $\frac{\pi}{2n}$; поэтому из (8.9) и (8.10) следует, что можно (8.8) переписать так:

$$\begin{aligned} I &= o(1) + \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta + \frac{\pi}{n}} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du = \\ &= o(1) - \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\sin nu}{\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \left(u + \frac{2\pi}{n}\right)} du. \quad (8.11) \end{aligned}$$

Складывая два разных выражения для I , а именно (8.8) и (8.11), получим

$$I = o(1) + \frac{\pi}{4n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left[\frac{\varphi_x(u)}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} - \frac{\varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \left(u + \frac{2\pi}{n}\right)} \right] \sin nu \, du.$$

Здесь снова отделим кусок, который можно оценить по второму условию теоремы, а именно напомним

$$\begin{aligned} I &= o(1) + \frac{\pi}{4n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left[\frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \left(u + \frac{2\pi}{n}\right)} \right] \sin nu \, du + \\ &\quad + \frac{\pi}{4n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(u) \left[\frac{1}{u \left(u + \frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \left(u + \frac{2\pi}{n}\right)} \right] \sin nu \, du. \end{aligned}$$

Первый интеграл по модулю меньше, чем

$$\frac{\pi}{4n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u^2} \right| du \leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u) - \varphi_x\left(u + \frac{\pi}{n}\right)}{u} \right| du = o(1),$$

а потому

$$I = o(1) + \frac{\pi^2}{2n^2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\left(u + 2\frac{\pi}{n}\right)} du. \quad (8.12)$$

Снова будем интегрировать по частям; учитывая, что $\Phi_x^*(u) = o(u)$, а

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\left(u + 2\frac{\pi}{n}\right)} \right) = O\left(\frac{n}{u^3}\right),$$

найдем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\left(u + 2\frac{\pi}{n}\right)} du &= \Phi_x^*(u) \frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\left(u + 2\frac{\pi}{n}\right)} \Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} - \\ &- \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \Phi_x^*(u) \frac{d}{du} \left[\frac{\sin nu}{u\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\left(u + 2\frac{\pi}{n}\right)} \right] du = O(1) + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} o(u) O\left(\frac{n}{u^3}\right) du = o(n^2). \end{aligned}$$

Подставляя это в (8.12), находим

$$I = o(1).$$

Но интеграл в левой части (8.1) отличается от I на величину $o(1)$, так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi_x(u)}{u} \sin nu du &= \Phi_x^*(u) \frac{\sin nu}{u} \Big|_0^{\frac{\pi}{n}} - \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Phi_x^*(u) d\left(\frac{\sin nu}{u}\right) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} o(u) O\left(\frac{n}{u}\right) du = o(1) \end{aligned}$$

(здесь рассуждение то же, что и при оценке интеграла (8.4)). Это и заканчивает доказательство.

З а м е ч а н и е. Признак, только что нами доказанный, выглядит несколько сильнее признака Лебега, однако это усиление незначительно. Важно заметить, что условие

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t)$$

выполняется почти всюду для любой суммируемой функции $f(x)$ (см. Вводный материал, § 15), поэтому хотя в индивидуальной точке это условие и не обязательно выполняется, но множество тех точек, где его нет, имеет лишь меру нуль. Таким образом впоследствии, когда мы будем изучать сходимость

рядов Фурье на множествах, а не в индивидуальной точке, превосходство признака Лебега—Гергена над признаком Лебега не может ощущаться.

Однако в данный момент речь идет о сходимости в индивидуальной точке *).

Отметим еще один признак сходимости, принадлежащий Идзуми (Izumi^[1]), а именно: если $f(x)$ — четная периодическая функция и

$$\int_0^t |f(x)| dx = o(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0 \quad (8.13)$$

и если выполнено условие

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(n, t) dt = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.14)$$

где

$$\psi(n, t) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \int_{t + \frac{2k\pi}{n}}^{t + \frac{(2k+1)\pi}{n}} \frac{f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{n}\right)}{x} dx,$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится в точке $x = 0$.

Это условие является обобщением критерия Лебега, так как, если выполнено (8.13) и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\pi} |f(t + \delta) - f(t)| \frac{dt}{t} = 0,$$

то и (8.14) имеет место.

Автор утверждает также, что если для четной $f(x)$ выполнено (8.13), то для сходимости ряда Фурье от $f(x)$ в точке $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(n, t) \cos nt dt = 0.$$

§ 9. О необходимых условиях сходимости в точке

Возникает вопрос, в какой мере найденные достаточные условия сходимости являются необходимыми. Мы сейчас убедимся, что не только условие

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t),$$

но даже менее ограничительное

$$\Phi_x^*(t) = \int_0^t \varphi_x(u) du = o(t)$$

не является необходимым для сходимости ряда Фурье в точке x .

Точнее, имеет место следующая теорема (см. Идзуми, Мацуяма и Цутикура (Izumi, Matsuyama, Tsuchikura^[1])).

*) По поводу сравнения различных признаков сходимости в точке см. также работу Morse and Transue^[1].

Теорема. Для любой функции $\varepsilon(t)$, лишь бы $\varepsilon(t) \geq 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, существует суммируемая $f(x)$ такая, что ряд $\sigma(f)$ сходится в точке x и в то же время

$$\left| \int_0^t \varphi_x(u) du \right| \geq \varepsilon(t) \quad (9.1)$$

для бесконечного множества значений t .

Доказательство. Мы будем предполагать $x = 0$, $f(0) = 0$ и брать $f(x)$ четной, тогда

$$\varphi_x(t) = \varphi_0(t) = 2f(t).$$

Рассмотрим последовательность положительных чисел t_n , $t_n \downarrow 0$, и две последовательности положительных чисел $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(t_n) < +\infty, \quad (9.2)$$

$$\frac{v_n}{u_n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (9.3)$$

и интервалы

$$(t_n - u_n, t_n + u_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.4)$$

взаимно не пересекаются и лежат на $(0, \pi)$.

Рассмотрим множества

$$\Delta_n = (t_n - u_n, t_n - v_n) + (t_n + v_n, t_n + u_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Определим четную функцию $f(t)$ так:

$$f(t) = \frac{c_n t}{t_n - t} \quad \text{при} \quad t \in \Delta_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.5)$$

и $f(t) = 0$ в остальных точках $(0, \pi)$, где $\{c_n\}$ — последовательность положительных чисел, которую мы определим позже.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |f(t)| dt &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{\Delta_n} \left| \frac{t}{t_n - t} \right| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt + c_n \int_{t_n + v_n}^{t_n + u_n} \frac{t}{t - t_n} dt \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[-(u_n - v_n) - t_n \ln |t_n - t| \Big|_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} + (u_n - v_n) + t_n \ln |t - t_n| \Big|_{t_n + v_n}^{t_n + u_n} \right] = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n} < +\infty, \quad (9.6)$$

то функция $f(x)$ суммируема.

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \frac{\sin mt}{t} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{\Delta_n} \frac{\sin mt}{t_n - t} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{\Delta_n} \frac{\sin m t_n \cos m(t - t_n) + \cos m t_n \sin m(t - t_n)}{t_n - t} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos m t_n \int_{\Delta_n} \frac{\sin m(t - t_n)}{t_n - t} dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos m t_n \int_{v_n}^{u_n} \frac{\sin mt}{t} dt, \quad (9.7) \end{aligned}$$

потому что два интервала, составляющие Δ_n , расположены симметрично относительно t_n , и мы учитываем четность косинуса и нечетность синуса.

Предположим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad (9.8)$$

и покажем, что тогда правая часть (9.7) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Действительно, так как

$$\left| \int_a^{\beta} \frac{\sin mt}{t} dt \right| \leq \pi$$

при любых a и β на $(0, \infty)$ (см. глава I § 41) и, кроме того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^{\beta} \frac{\sin mt}{t} dt = 0, \quad (9.9)$$

если a и β положительны, то можно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое N , что

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon,$$

а тогда

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} c_n \cos mt_n \int_{u_n}^{v_n} \frac{\sin mt}{t} dt \right| < \varepsilon \pi;$$

кроме того, когда N фиксировано,

$$\sum_{n=1}^N c_n \cos mt_n \int_{u_n}^{v_n} \frac{\sin mt}{t} dt = o(1),$$

так как каждый член есть $o(1)$ в силу (9.9).

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n} f(t) dt &= c_n \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt + c_n \int_{t_n + v_n}^{t_n + u_n} \frac{t}{t_n - t} dt = \\ &= -c_n(u_n - v_n) - c_n t_n \ln |t_n - t| \Big|_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} - \\ &\quad - c_n(u_n - v_n) - c_n t_n \ln |t_n - t| \Big|_{t_n + v_n}^{t_n + u_n} = 2c_n(v_n - u_n) \end{aligned} \quad (9.10)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n - u_n}^{t_n} f(t) dt \right| &= c_n \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt = c_n \left(t_n \ln \frac{u_n}{v_n} - (u_n - v_n) \right) \geq \\ &\geq c_n t_n \left(\ln \frac{u_n}{v_n} - \frac{u_n}{t_n} \right) \geq c_n t_n \left(\ln \frac{u_n}{v_n} - 1 \right) \geq \frac{1}{2} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Допустим, что выполнено условие

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i (u_i - v_i) < \frac{1}{8} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n}, \quad (9.12)$$

а также, что

$$\frac{1}{4} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n} \geq \varepsilon(t_n). \quad (9.13)$$

Тогда мы получим в силу (9.11), (9.13), (9.12) и (9.10)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_n} f(u) du \right| &= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{\Delta_i} f(t) dt + \int_{t_n-u_n}^{t_n} f(t) dt \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n} - 2 \sum_{n+1}^{\infty} c_i (u_i - v_i) \geq \frac{1}{4} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n} \geq \varepsilon(t_n). \end{aligned}$$

Мы теперь поступим так: предполагая, что t_n подобраны как угодно, лишь бы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(t_n) < +\infty,$$

мы потребуем, чтобы

$$\frac{1}{4} c_n t_n \ln \frac{u_n}{v_n} = \varepsilon(t_n), \quad (9.14)$$

тогда (9.13) заведомо удовлетворено. Соотношение (9.14) дает еще больший простор для подбора c_n , u_n и v_n . Мы выберем c_n столь малыми, чтобы

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i < \frac{1}{2} \varepsilon(t_n).$$

Тогда (9.12), которое в силу (9.14) принимает вид

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i (u_i - v_i) < \frac{1}{2} \varepsilon(t_n),$$

будет справедливо, лишь бы $u_i \leq 1$ и, кроме того, будет справедливо (9.8). Наконец, заметим, что, уменьшая c_n , мы только заставляем расти $\frac{u_n}{v_n}$, значит, можно всегда удовлетворить (9.3), а, разумно подбирая u_n (достаточно $u_n + v_{n+1} < t_n - t_{n+1}$), мы убедимся, что и (9.4) справедливо. Таким образом все условия будут удовлетворены и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы убедились, что сходимость ряда $\sigma(f)$ к $f(x)$ в некоторой точке x не влечет за собой выполнение условия

$$\int_0^t \varphi_x(u) du = o(t). \quad (9.15)$$

Однако можно заметить, что если наложить некоторые ограничения на коэффициенты ряда, или на быстроту его сходимости, то условие (9.15) окажется уже необходимым.

Так, например, Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[9]) доказали, что если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{и} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right), \quad \delta > 0$$

и, кроме того,

$$|S_n(x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

то условие (9.15) выполняется.

П. Л. Ульянов^[10], не налагая никаких ограничений на коэффициенты ряда, а лишь на быстроту его сходимости, также получил необходимость (9.15); точнее, он доказал, что из

$$|S_n(x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{\ln^{1+\varepsilon} n}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

следует

$$\int_0^t \varphi_x(u) du = O\left(\frac{t}{\ln^{\varepsilon} \frac{1}{t}}\right).$$

§ 10. Достаточные признаки сходимости в точке при дополнительных ограничениях на коэффициенты ряда

В признаках сходимости, рассмотренных в §§ 2—8, мы налагали только ограничения на функцию $f(x)$, для которой изучается сходимость ряда $\sigma(f)$. Если сделать дополнительные предположения, касающиеся скорости стремления к нулю коэффициентов ряда, то можно получить ряд новых признаков. Напомним, что уже в § 64 гл. I было доказано, что для сходимости ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (10.1)$$

при условии

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n)$$

необходимо и достаточно существование производной $F'(x)$ от функции $F(x)$, получающейся в результате интегрирования ряда (10.1).

Можно указать и другие условия в таком роде. Например, Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[14]) доказали, что если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то необходимым и достаточным условием сходимости ряда к $f(x)$ в точке x является условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = f(x).$$

Мы здесь дадим доказательство другой теоремы, также принадлежащей Харди и Литтлвуду (Hardy and Littlewood^[9]) и дающей достаточный признак сходимости, основанный как на поведении функции в рассматриваемой точке, так и на скорости стремления к нулю коэффициентов ряда.

Признак Харди и Литтлвуда. Если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right), \quad \delta > 0, \quad (10.2)$$

и если

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right), \quad (10.3)$$

то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x .

Будем, как всегда, доказывать, что при некотором a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = 0. \quad (10.4)$$

В силу условия (10.3) имеем

$$\varphi_x(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0,$$

а потому тем более

$$\int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t)$$

и, значит,

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| < n \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi_x(u)| du = o(1). \quad (10.5)$$

Далее из (10.3) следует, что

$$|\varphi_x(t)| \ln \frac{1}{t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Положим $r = \frac{\delta}{2}$, где δ — число, входящее в (10.2). Можно всегда считать $\delta < 1$, так как, если коэффициенты ряда удовлетворяют условию (10.2) при $\delta \geq 1$, то и подавно при $\delta < 1$. Поэтому $r < 1$. Имеем

$$\left| \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^r}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^r}} |\varphi_x(t)| \ln \frac{1}{t} \frac{dt}{t \ln \frac{1}{t}} = o(1) \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^r}} \frac{dt}{t \ln \frac{1}{t}} = o(1) \ln \frac{1}{r} = o(1). \quad (10.6)$$

Наконец, остается оценить интеграл по отрезку $\left(\frac{1}{n^r}, a\right)$. Если мы докажем, что

$$\int_{\frac{1}{n^r}}^a \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = o(1), \quad (10.7)$$

то, складывая (10.5), (10.6) и (10.7), увидим, что (10.4) доказано. Итак, остается доказать (10.7).

Из определения $\varphi_x(t)$ ясно, что у нее коэффициенты Фурье того же порядка, что и у $f(x)$; кроме того, она четная.

Итак,

$$\sigma[\varphi_x(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Но всякий ряд Фурье, после умножения на функцию с ограниченным изменением можно интегрировать почленно (см. глава II, § 5), поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n^r}}^a \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt &= \frac{a_0}{2} \int_{\frac{1}{n^r}}^a \frac{\sin nt}{t} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\frac{1}{n^r}}^a \frac{\cos kt \sin nt}{t} dt = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{\frac{1}{n}}^a \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{2} a_n \int_{\frac{1}{n^r}}^a \frac{\sin 2nt}{t} dt + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} a_k \int_{\frac{1}{n^r}}^a \frac{\sin(n+k)t + \sin(n-k)t}{t} dt. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Но для любого $m \neq 0$, применяя вторую теорему о среднем значении, имеем

$$\int_{\frac{1}{n^r}}^a \frac{\sin mt}{t} dt = \frac{1}{|m|} O(n^r),$$

а потому из (10.2) и (10.8) заключаем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n^r}}^a \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt &= O(n^{r-1}) + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) n^{r-1} + O\left(\sum'_{k \neq n} \frac{1}{k^\delta} n^r \frac{k}{|k-n|}\right) = \\ &= o(1) + O\left(\sum'_{k \neq n} \frac{1}{k^\delta |k-n|}\right) n^{\frac{\delta}{2}}, \end{aligned}$$

потому, что $r = \frac{\delta}{2}$.

Но

$$\begin{aligned} \sum'_{k \neq n} \frac{1}{k^\delta |k-n|} &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^\delta (n-k)} + \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n} \frac{1}{k^\delta |k-n|} + \sum_{2n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\delta (k-n)} = \\ &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

$$S_1 < \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^\delta} = \frac{2}{n} O(n^{-\delta+1}) = O(n^{-\delta}),$$

$$S_2 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^\delta \sum_1^{2n} \frac{1}{|k-n|} < 2 \left(\frac{2}{n}\right)^\delta \sum_1^n \frac{1}{k} = O\left(\frac{\ln n}{n^\delta}\right),$$

$$S_3 \leq 2 \sum_{2n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\delta+1}} = O(n^{-\delta})$$

и так как $r - \delta = -\frac{\delta}{2}$, то окончательно

$$\int_{\frac{1}{n^r}}^a \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = o(1) + n^r O(n^{-\delta} \ln n) = o(1),$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Важно заметить, что если бы мы предполагали выполненным только второе условие теоремы Харди и Литтлвуда, т. е.

$$f(x+h) - f(x) = o\left[\left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right],$$

то ряд $\sigma(f)$ не обязан был бы сходиться в рассматриваемой точке x . В этом мы убедимся в § 4 главы IV.

§ 11. Замечание о равномерной сходимости ряда Фурье на некотором отрезке

Еще в 1905 г. Фату (Fatou^[1]) отметил, что каждое условие сходимости в точке может быть переделано в условие равномерной сходимости на некотором интервале, если только требуемое условие выполняется равномерно на этом интервале или на несколько большем, его содержащем. Уточним, что под этим понимать.

Известно (см. глава I, § 37), что для ограниченных функций

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

где $o(1)$ следует понимать как величину, равномерно стремящуюся к нулю на $0 \leq x \leq 2\pi$. Таким образом, для равномерной сходимости $\sigma(f)$ на некотором $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$ имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = 0 \quad (11.1)$$

равномерно на $a \leq x \leq b$.

Во всех признаках сходимости в точке доказательство всегда велось по такому принципу: если некоторое условие A выполнено в данной точке x , то для этого x справедливо (11.1), а потому ряд сходится. Мысль Фату заключается в том, что обычно, когда условие A выполнено равномерно на (a, b) , то и (11.1) имеет место равномерно на (a, b) . Здесь только следует не упустить одно важное обстоятельство.

Для того чтобы ряд равномерно сходилась на (a, b) , необходимо, чтобы $f(x)$ была непрерывна на (a, b) , включая и его концы, если же в концах имеются разрывы, то можно ожидать равномерной сходимости лишь на отрезке $[a', b']$, целиком лежащем внутри (a, b) . Поэтому и все признаки равномерной сходимости формулируются соответствующим образом. Мы не будем повторять все заново и ограничимся одним примером.

Всматриваясь в доказательство справедливости признака Лебега, можно получить теорему:

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) , включая и его концы, и если

$$\int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| du \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

равномерно на (a, b) , то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ равномерно на (a, b) .

Отметим теперь, что обратный переход от интервала к точке уже недопустим, т. е. если некоторое условие, которому функция удовлетворяет равномерно на интервале, влечет равномерную сходимость ряда внутри этого интервала, то отсюда не следует, что выполнение его в одной точке влечет сходимость в этой точке.

Например, в главе IV, § 4 будет доказано, что если

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right) \quad (11.2)$$

на некотором $[a, b]$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно на всяком $[a', b']$, целиком лежащем внутри (a, b) . Однако в конце предыдущего параграфа мы уже отметили, что выполнение условия (11.2) в одной точке не гарантирует сходимости ряда в этой точке.

Наконец отметим, что ряд условий равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке $[a, b]$ может быть получен из условий равномерной сходимости на $[0, 2\pi]$ при помощи принципа локализации, разумно использованного в каждом отдельном случае. Этот вопрос будет освещен в § 9 главы IV. В той же главе будут рассмотрены условия равномерной сходимости на всем отрезке $[0, 2\pi]$.

ГЛАВА IV

РЯДЫ ФУРЬЕ ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Мы уже знаем (см. глава I, §§ 44, 45), что ряд Фурье от непрерывной функции не только не должен сходиться равномерно, но даже может расходиться. Эту главу мы начнем с изучения тех условий, при которых ряд сходится равномерно. Эти условия могут быть разделены на следующие четыре типа:

1) Условия, наложенные на коэффициенты тригонометрического ряда, из которых следует его равномерная сходимость. Если не считать таких сильных ограничений, при которых уже имеет место абсолютная, а значит тем самым и равномерная сходимость ряда, то можно, в качестве примера указать такое условие: если $b_n \downarrow 0$ и $nb_n \rightarrow 0$, то $\sum b_n \sin nx$ сходится равномерно (см. глава I, § 30).

2) Условия, наложенные на функцию, при которых ее ряд оказывается равномерно сходящимся, например признак Жордана (см. глава I, § 39), его обобщение (см. § 5 настоящей главы), признак Дини—Липшица и его обобщение (мы их изучим в § 4 и § 8).

3) Смешанные условия, а именно такие, где заранее известно, что $f(x)$ непрерывна и, кроме того, ее коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям (например теоремы Пэли, Саса и некоторые другие—см. § 2), признак Сато (§ 10).

4) Условия, вытекающие из сравнения данной функции с другими, имеющими равномерно сходящиеся ряды Фурье (см., например, § 11).

Сравнение функций с другими полезно и при изучении вопроса, когда данный ряд сходится равномерно на некотором интервале длины меньшей, чем 2π (см. § 9).

В § 13 и 15 изучается вопрос о том, как получить ряд Фурье от непрерывной функции либо за счет расстановки знаков у членов ряда, либо за счет подбора в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos (nx - a_n)$ аргументов a_n при фиксированных ϱ_n .

§ 16 посвящен вопросу о том, что вообще можно сказать о коэффициентах Фурье от непрерывной функции.

Мы ставим также вопрос о том, какие операции можно совершать над непрерывными функциями, чтобы получать равномерно сходящиеся ряды Фурье. Этому вопросу посвящен § 12.

Мы переходим далее к изучению тех особенностей, которые могут наблюдаться у рядов Фурье от непрерывных функций. Мы показываем (см. § 18), что они могут сходиться неравномерно не только около одной точки, как это

наблюдалось в § 44 главы I, но и в любом интервале Δ , лежащем на $[0, 2\pi]$. Также и расходимость ряда от непрерывной функции может иметь место как на любом счетном множестве (§ 21), так и на множестве мощности континуума (§ 20 и 22). При этом такое явление может иметь место, например, для $f^2(x)$, хотя $\sigma(f)$ сходится равномерно (§ 23).

Наконец, в §§ 24 и 25 рассматривается вопрос о разбиении ряда Фурье от непрерывной функции на два, каждый из которых уже обладает некоторыми «хорошими» свойствами.

§ 2. Достаточные условия для равномерной сходимости, выраженные через коэффициенты Фурье

Мы не будем здесь указывать столь сильные ограничительные условия, при которых уже имеет место

$$\sum |a_n| + |b_n| < +\infty,$$

так как это приводит к абсолютной сходимости тригонометрического ряда; изучению абсолютной сходимости будет посвящена глава IX. Существуют условия гораздо менее ограничительные, например: если $b_n \downarrow 0$ и $nb_n \rightarrow 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

сходится равномерно. Это было уже доказано (см. § 30 главы I).

Сейчас мы хотим указать некоторые условия, налагаемые на коэффициенты ряда, которые гарантируют его равномерную сходимость, если мы заранее знаем, что это ряд Фурье от непрерывной функции.

Сюда относится, в первую очередь, такая простая теорема, уже доказанная в § 64 главы I.

Т е о р е м а. Если $f(x)$ непрерывна и для ее коэффициентов Фурье выполняется условие

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \quad (2.1)$$

то ее ряд Фурье сходится равномерно*).

Отсюда, в частности, следует, что если $f(x)$ непрерывна и ее ряд Фурье лакунарный, то он сходится равномерно. Правда, в главе XI будет доказано, что для непрерывной $f(x)$ лакунарный ряд Фурье сходится абсолютно, но это тонкий результат Сидона со сложным доказательством, здесь же теорема получается очень легко.

Отметим, что в доказанной теореме требование непрерывности было существенным, так как даже такие ряды, где вместо условия (2.1) коэффициенты удовлетворяют более сильному требованию

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

могут быть рядами Фурье от функций, неограниченных на любом интервале (см. главу VIII, § 13) и, следовательно, тогда не могут сходиться равномерно.

*) В § 2 главы II мы видели, что если функция с ограниченным изменением непрерывна, то для нее выполнено условие (2.1), а потому, пользуясь только что сформулированной теоремой, можно получить новое доказательство того, что ряд Фурье от непрерывной функции с ограниченным изменением равномерно сходится.

Докажем теперь следующую теорему Пэли (Paley^[2]):

Т е о р е м а П э л и. Если $f(x)$ непрерывна и ее коэффициенты Фурье неотрицательны, то ее ряд Фурье сходится равномерно.

Для доказательства теоремы представляется целесообразным рассмотреть отдельно случай четных и нечетных функций. Докажем две вспомогательные теоремы:

Т е о р е м а 1. Если $f(x)$ четная и ограниченная, причем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_n \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ и, значит, ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Имеем для фейеровской суммы порядка $2n$ в точке $x = 0$

$$\sigma_{2n}(0) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_k(0) \geq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(0) \geq \frac{n+1}{2n+1} S_n(0) \geq \frac{1}{2} S_n(0),$$

а так как $\sigma_n(x)$ для ограниченной функции ограничены, то $S_n(0) \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), где M — постоянно, т. е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k < M \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Кстати, достаточно было бы предполагать ограниченность $f(x)$ лишь вблизи точки $x = 0$.

Т е о р е м а 2. Если $f(x)$ нечетная и ограниченная, причем

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то частные суммы ряда Фурье от $f(x)$ ограничены в совокупности. Если $f(x)$, кроме того, непрерывна, то ее ряд Фурье равномерно сходится.

Пусть $|f(x)| \leq M$, тогда и $|\sigma_n(x)| \leq M$, но

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k \sin kx.$$

Полагая $n = 2m$ и $x = \frac{\pi}{4m}$, получим для $1 \leq k \leq 2m$ неравенство

$$\sin k \frac{\pi}{4m} \geq \frac{2}{\pi} k \frac{\pi}{4m} = \frac{k}{2m}$$

и, значит, из

$$0 \leq \sum_{k=1}^{2m} \left(1 - \frac{k}{2m+1}\right) b_k \sin k \frac{\pi}{4m} \leq M$$

следует

$$0 \leq \sum_{k=1}^{2m} \left(1 - \frac{k}{2m+1}\right) k b_k \leq 2m M. \quad (2.2)$$

Но для $1 \leq k \leq m$ все величины в скобках в формуле (2.2) не меньше, чем $\frac{1}{2}$, а потому

$$0 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k b_k \leq 2m M$$

и, значит, тем более

$$\left| \sum_{k=1}^m k b_k \sin kx \right| \leq 4m M.$$

Но так как

$$|\sigma_m(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) b_k \sin kx \right| \leq M,$$

то отсюда следует

$$\left| \sum_{k=1}^m b_k \sin kx \right| \leq 5M.$$

Итак, равномерная ограниченность частных сумм для ограниченной $f(x)$ доказана.

Пусть теперь $f(x)$ непрерывна, тогда $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерно. Следовательно, если ε задано, то можно найти такое n , что

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Так как все $b_k \geq 0$, а коэффициенты в разложении $\sigma_n(x)$ имеют вид $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k$ (для $m = 1, 2, \dots, n$), то функция $g(x) = f(x) - \sigma_n(x)$ имеет неотрицательные коэффициенты Фурье. Кроме того, $|g(x)| < \varepsilon$. Поэтому, по только что доказанному для частных сумм $S_m(g, x)$ ее ряда Фурье, мы должны иметь

$$|S_m(g, x)| < 5\varepsilon \quad \text{для любых } m \text{ и } x.$$

С другой стороны, если $p \geq n$, то

$$S_p(\sigma_n, x) = \sigma_n(x),$$

а потому для любых p и q , если $q > p \geq n$, имеем $S_q(\sigma_n, x) = S_p(\sigma_n, x)$, а тогда

$$\begin{aligned} S_q(f, x) - S_p(f, x) &= S_q(\sigma_n, x) - S_q(\sigma_n, x) + S_q(g, x) - S_p(g, x) = \\ &= S_q(g, x) - S_p(g, x) \end{aligned}$$

и, значит,

$$|S_q(f, x) - S_p(f, x)| \leq |S_q(g, x)| + |S_p(g, x)| \leq 10\varepsilon.$$

Следовательно, ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно.

З а м е ч а н и е. Ясно, что в случае нечетной $f(x)$ требование непрерывности было необходимым, так как, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

с положительными коэффициентами сходится неравномерно (см. § 41, гл. I).

Теперь для доказательства теоремы Пэли остается заметить, что если $f(x)$ непрерывна, то и обе функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

будут непрерывны. Одна из них имеет ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$, другая $\sum b_n \sin nx$. В силу доказанных теорем 1 и 2, так как все a_n и b_n неотрицательны, ряды Фурье от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равномерно сходятся, а значит, это верно и для ряда $\sigma(f)$, так как $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

Теорема Пэли была обобщена Сасом (Szász^[2]) доказавшим, что
Если $f(x)$ непрерывна и

$$\begin{aligned} na_n &\geqslant -K, \\ nb_n &\geqslant -K, \end{aligned}$$

где $K > 0$, то ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно *).

§ 3. Достаточное условие для равномерной сходимости в терминах наилучших приближений

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $E_n(f)$ — ее наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n .

Прежде всего установим справедливость следующего неравенства Лебега (см. Lebesgue^[М.30]):

Если $R_n(x, f) = f(x) - S_n(x, f)$, то

$$|R_n(x, f)| < CE_n(f) \ln n, \quad (3.1)$$

где C — абсолютная константа.

В самом деле, пусть $T_n(x)$ — тот тригонометрический полином порядка n , который дает для $f(x)$ наилучшее приближение; тогда

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant E_n. \quad (3.2)$$

Рассмотрим частную сумму с номером n для ряда Фурье от $f(x) - T_n(x)$; имеем

$$S_n(x, f - T_n) = S_n(x, f) - S_n(x, T_n) = S_n(x, f) - T_n(x), \quad (3.3)$$

так как n -я частная сумма ряда Фурье от полинома порядка n совпадает с этим полиномом.

Но по теореме Лебега (см. глава I, § 36) имеем в силу (3.2)

$$|S_n(x, f - T_n)| \leqslant C_1 E_n \ln n, \quad (3.4)$$

где C_1 — абсолютная константа, а тогда в силу (3.2), (3.3) и (3.4)

$$\begin{aligned} |R_n(x, f)| &= |S_n(x, f) - f(x)| \leqslant |S_n(x, f) - T_n(x)| + |T_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant E_n(f)(1 + C_1 \ln n) < CE_n(f) \ln n, \end{aligned}$$

а это и требовалось доказать.

В качестве следствия неравенства Лебега получаем теорему:

Т е о р е м а. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) \ln n = 0, \quad (3.5)$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно.

Действительно, из (3.5) и (3.1) сразу следует, что $R_n(x, f) \rightarrow 0$ равномерно.

З а м е ч а н и е. Если мы будем рассматривать наилучшее приближение $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то можно также получить некоторую оценку $R_n(x, f)$, которая несколько сложнее, но все же бывает полезна. Именно, полагая $f_1(x) = f(x)$ на $a \leqslant x \leqslant b$ и выбирая ее на $(0, a)$ и $(b, 2\pi)$

*) См. также Szász [3] и указанную там литературу.

как-нибудь, лишь бы она была непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f_1(0) = f_1(2\pi)$, мы имеем

$$|R_n(x, f)| \leqslant AE_n(f_1) \ln n + o(1) \quad (3.6)$$

равномерно на всяком $[a', b'] \subset (a, b)$; здесь A — абсолютная константа.

Это следует из того, что при $x \in [a', b']$

$$|R_n(x, f)| = |S_n(x, f) - f(x)| \leqslant |S_n(x, f) - S_n(x, f_1)| + |S_n(x, f_1) - f_1(x)|,$$

а так как $S_n(x, f) - S_n(x, f_1) = o(1)$ равномерно на (a', b') , а ко второму члену приложима формула (3.1), то отсюда следует (3.6).

Поэтому, если можно $f_1(x)$ выбрать так, чтобы $E_n(f_1) \ln n \rightarrow 0$, то $R_n(x, f) \rightarrow 0$ равномерно на $[a', b']$, т. е. ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $[a', b'] \subset (a, b)$.

§ 4. Признак Дини—Липшица

Как следствие теоремы § 3 можно мгновенно получить

П р и з н а к Д и н и — Л и п ш и ц а. Если

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right) \quad (4.1)$$

равномерно на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно на этом отрезке.

Если условие (4.1) выполнено равномерно на некотором $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно на всяком $[a', b']$, $a < a' < b' < b$.

В самом деле, из равномерного выполнения условия (4.1) на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ сразу следует, что для модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ рассматриваемой функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0. \quad (4.2)$$

Но на основании теоремы Джексона (см. Добавления § 7)

$$E_n \leqslant C\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

а так как из (4.2) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \ln n = 0$$

и тогда мы находимся в условиях теоремы § 3; значит, $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Если условие (4.1) выполнено равномерно на $[a, b]$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \omega(\delta, f, a, b) \ln \frac{1}{\delta} = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}, f, a, b\right) \ln n = 0.$$

Поэтому, если взять $f_1(x)$ непрерывной на всем отрезке $[0, 2\pi]$ и совпадающей с $f(x)$ на (a, b) , то по теореме Джексона

$$E_n(f_1) \ln n \leqslant C\omega\left(\frac{1}{n}, f_1\right) \ln n \leqslant C\omega\left(\frac{1}{n}, f, a, b\right) \ln n.$$

а тогда мы находимся в условиях замечания к теореме § 3, и следовательно $\sigma(f)$ равномерно сходится на любом $[a', b']$, $a < a' < b' < b$.

З а м е ч а н и е. Признак Дини—Липшица может быть доказан и без теории приближения функций (например, опираясь на признак Лебега (глава III, § 6)). Но мы считали целесообразным показать, как легко его получить, применяя результаты этой теории. Отметим еще, что ниже (в § 5 и § 8) будут даны теоремы, из которых признак Дини—Липшица выводится как следствие.

Сейчас мы хотим подчеркнуть, что признак Дини—Липшица должен выполняться *равномерно* на всем отрезке $[0, 2\pi]$ или на некотором отрезке $[a, b]$, для того чтобы можно было выводить заключения о сходимости ряда. Напротив, если условие (4.1) выполнено только в некоторой точке, то отсюда не следует, что $\sigma(f)$ сходится в этой точке.

Чтобы убедиться в этом, докажем такую теорему.

Т е о р е м а. Пусть $\mu(t)$ положительна, непрерывна на

$[0, \pi]$, $\mu(0) = 0$, $\frac{\mu(t)}{t}$ возрастает при $t \rightarrow 0$ и $\frac{\mu(t)}{t}$ не суммируема около $t = 0$. Тогда существует непрерывная $f(t)$, для которой

$$|f(t) - f(0)| \leq \mu(t),$$

и однако ее ряд Фурье расходится при $t = 0$.

Если эта теорема будет доказана, то, полагая, например,

$$\mu(t) = \frac{1}{\ln \frac{2\pi}{|t|} \ln \ln \frac{2\pi}{|t|}},$$

видим, что $\mu(t)$ удовлетворяет условиям теоремы и, кроме того, $\mu(h) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right)$, а поэтому будет доказана справедливость утверждения, высказанного относительно условия Дини—Липшица.

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы.

Л е м м а 1. Если $\mu(t)$ положительна, непрерывна на $(0, \pi)$, $\frac{\mu(t)}{t}$ возрастает при $t \rightarrow 0$ и не суммируема около $t = 0$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left| \frac{\mu(t) \sin nt}{t} \right| dt = +\infty.$$

Доказательство основано на том же принципе, на котором построено доказательство того, что константы Лебега неограниченно растут с ростом n (рис. 15).

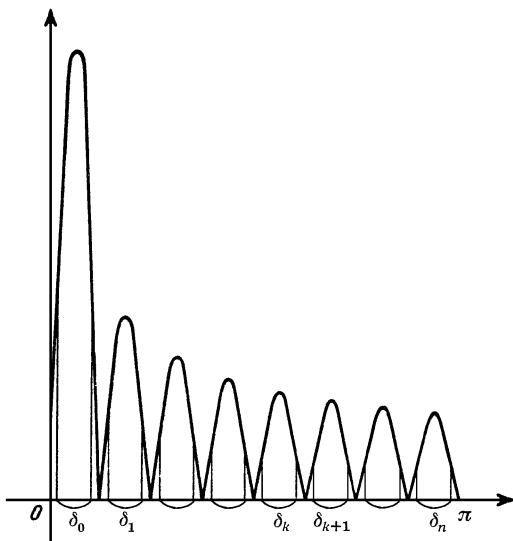


Рис. 15

Рассмотрим те интервалы δ_p ($p = 0, 1, \dots, n-1$), лежащие на $(0, \pi)$, где $|\sin nt| \geq \frac{1}{2}$. Это будет для

$$p\pi + \frac{\pi}{6} \leq nt \leq \frac{5}{6}\pi + p\pi,$$

т. е.

$$\delta_p = \left(\pi \frac{\frac{1}{6} + p}{n}, \pi \frac{\frac{5}{6} + p}{n} \right) \quad (p = 0, 1, \dots, n-1).$$

Имеем для этих интервалов

$$\int_{\delta_p} \left| \frac{\mu(t) \sin nt}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \int_{\delta_p} \frac{\mu(t)}{t} dt.$$

Если мы обозначим через σ_p сегмент, лежащий между δ_{p-1} и δ_p , т. е.

$$\sigma_p = \left[\pi \frac{\frac{5}{6} + (p-1)}{n}, \pi \frac{\frac{1}{6} + p}{n} \right],$$

то

$$\int_{\delta_p} \frac{\mu(t)}{t} dt \geq \int_{\sigma_{p+1}} \frac{\mu(t)}{t} dt,$$

так как длина σ_{p+1} меньше длины δ_p и, кроме того, $\frac{\mu(t)}{t}$ убывает с ростом t . Отсюда

$$\frac{1}{2} \int_{\delta_p} \frac{\mu(t)}{t} dt \geq \frac{1}{4} \int_{\delta_p + \sigma_{p+1}} \frac{\mu(t)}{t} dt,$$

следовательно,

$$\int_0^\pi \left| \frac{\mu(t) \sin nt}{t} \right| dt \geq \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{n-1} \int_{\delta_p + \sigma_{p+1}} \frac{\mu(t)}{t} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6n}}^{\pi + \frac{\pi}{6n}} \frac{\mu(t)}{t} dt,$$

а эта величина стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$ в силу несуммируемости $\frac{\mu(t)}{t}$ около $t = 0$.

Л е м м а 2. Пусть $\mu(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда существует непрерывная $g(t)$, $|g(t)| \leq 1$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi g(t) \mu(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| = +\infty.$$

Для доказательства леммы 2 достаточно выбрать $\Phi_n(t, x)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям леммы § 52 главы I и

$$\Phi_n(t, 0) = \mu(t) \frac{\sin nt}{t}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

затем положить $x = 0$ и принять во внимание, что можно считать $|g(t)| \leq 1$ (см. замечание в конце доказательства указанной леммы).

Лемма 2 доказана.

Теперь для доказательства теоремы, сформулированной на стр. 281, взяв $g(t)$ из леммы 2, положим

$$f(t) = g(t) \mu(t) \quad \text{на} \quad (0, \pi)$$

и

$$f(-t) = f(t).$$

Тогда $f(t)$ непрерывна, $f(0) = 0$ (потому, что мы предположили $\mu(0) = 0$), значит

$$|f(t) - f(0)| = |f(t)| \leq \mu(t),$$

поскольку $|g(t)| \leq 1$, и остается доказать, что ряд Фурье от $f(t)$ расходится при $t = 0$.

Но в силу четности $f(t)$ имеем

$$S_n(f, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) \mu(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

а мы видели, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi g(t) \mu(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| = +\infty,$$

и теорема доказана.

§ 5. Признак Салема. Функции с Φ -ограниченным изменением

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$. Докажем следующую теорему Салема (Salem^[1]):

Пусть n — любое нечетное. Если выражение

$$T_n(x) = \frac{f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)}{1} + \frac{f\left(x + 2\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + 3\frac{\pi}{n}\right)}{3} + \dots \\ \dots + \frac{f\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) - f(x + \pi)}{n}, \quad (5.1)$$

а также и выражение $Q_n(x)$, получающееся из него заменой π на $-\pi$, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Для доказательства этого предложения напомним, что

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю равномерно, а

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Если мы докажем, что в условиях нашей теоремы имеет место равномерная сходимость к нулю интегралов

$$\int_0^\pi [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin nt}{t} dt \quad (5.2)$$

и

$$\int_0^\pi [f(x-t) - f(x)] \frac{\sin nt}{t} dt, \quad (5.3)$$

то теорема будет доказана. Полагая

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x),$$

будем доказывать, что интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \rightarrow 0$ равномерно относительно x .

Если мы обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности нашей функции $f(x)$, то

$$|\psi_x(t)| \leq \omega(\delta, f), \quad \text{если} \quad 0 \leq t \leq \delta,$$

а потому

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \pi \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) = o(1) \quad (5.4)$$

равномерно по x , откуда ясно, что достаточно рассматривать интеграл в пределах от $\frac{\pi}{n}$ до π .

Имеем

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \psi_x\left(t + k\frac{\pi}{n}\right) \frac{(-1)^k \sin nt}{t + k\frac{\pi}{n}} dt. \end{aligned}$$

Совершая замену переменного $nt = u$, находим

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\pi}^{2\pi} \psi_x\left(\frac{u + k\pi}{n}\right) (-1)^k \frac{\sin u}{u + k\pi} du.$$

Поэтому, если мы убедимся, что

$$\sum_{k=0}^{n-2} \psi_x\left(\frac{u + k\pi}{n}\right) (-1)^k \frac{1}{u + k\pi} \quad (5.5)$$

стремится к нулю равномерно по x и по u на $\pi \leq x \leq 2\pi$, то будем иметь $I_n \rightarrow 0$ равномерно по x , что в соединении с (5.4) докажет равномерное стремление к нулю интеграла (5.2).

В сумме (5.5) имеется $n-1$ член; если n нечетно, т. е. $n-1$ четно, мы сможем их соединить попарно. Если же n четно, то мы добавим к этой сумме член с номером $k = n-1$, так как $f(x)$ непрерывна, то $|f(x)| \leq M$, где M — некоторая константа, а тогда $|\psi_x(t)| \leq 2M$ и добавленный член по модулю не превосходит $\frac{2M}{n}$ для $\pi \leq u \leq 2\pi$, т. е. он равномерно стремится к нулю. Таким образом, можно, не нарушая общности, ограничиться рассмотрением случая, когда n нечетно. Тогда сумму (5.5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left[\psi_x\left(\frac{u + k\pi}{n}\right) \frac{1}{u + k\pi} - \psi_x\left(\frac{u + (k+1)\pi}{n}\right) \frac{1}{u + (k+1)\pi} \right], \quad (5.6)$$

где знак \sum' означает, что k пробегает одни четные числа.

Для оценки суммы (5.6) заметим, что

$$\begin{aligned} \psi_x\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) \frac{1}{u+k\pi} - \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \frac{1}{u+(k+1)\pi} = \\ = \left[\psi_x\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \right] \frac{1}{u+k\pi} + \end{aligned}$$

$$\text{Но} \quad + \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \left[\frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{u+(k+1)\pi} \right].$$

$$\left| \frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{u+(k+1)\pi} \right| < \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{при} \quad \pi \leq u \leq 2\pi;$$

далее $|\psi_x(t)| \leq 2M$ при любом t , и, наконец, для $u \leq 2\pi$ имеем

$$\left| \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{(k+3)\pi}{n}\right) \leq \omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right),$$

если $k+3 \leq \sqrt{n}$, а потому, полагая $\nu = [\sqrt{n} - 3]$, находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \left[\frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{u+(k+1)\pi} \right] \right| \leq \\ \leq \omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{(k+1)^2} + 2M \sum_{k=\nu+1}^{n-2} \frac{1}{(k+1)^2} = o(1), \end{aligned}$$

поскольку $\nu \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, отбрасывая величину, равномерно стремящуюся к нулю, мы можем сумму (5.6) заменить суммой

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left[\psi_x\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \right] \frac{1}{u+k\pi}. \quad (5.7)$$

Сделаем последнее преобразование, а именно заменим здесь $\frac{1}{u+k\pi}$ через $\frac{1}{(k+1)\pi}$; поскольку

$$\begin{aligned} \left| \psi_x\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \right| = \\ = \left| f\left(x + \frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{u+(k+1)\pi}{n}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

а

$$\left| \frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} \right| \leq \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{при} \quad \pi \leq u \leq 2\pi,$$

то мы совершаем ошибку, которая не превосходит

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < C \omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где C — абсолютная константа, т. е. ошибка снова равномерно стремится к нулю. Но тогда сумма (5.7) заменяется выражением

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\psi_x\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - \psi_x\left(\frac{u+(k+1)\pi}{n}\right)}{k+1},$$

т. е. выражением

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{f\left(x + \frac{u}{n}\right) - f\left(x + \frac{u + \pi}{n}\right)}{1} + \frac{f\left(x + \frac{u + 2\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{u + 3\pi}{n}\right)}{3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{f\left(x + \frac{u + (n-3)\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{u + (n-2)\pi}{n}\right)}{(n-2)} \right]. \quad (5.8)$$

Если к выражению (5.8) добавить член

$$\frac{f\left(x + \frac{u + (n-1)\pi}{n}\right) - f(x + \pi)}{n},$$

который по абсолютной величине не превосходит $\frac{2M}{n}$, т. е. равномерно стремится к нулю, то это выражение станет равно $\frac{1}{\pi} T_n\left(x + \frac{u}{n}\right)$, где $T_n(x)$ — функция, входившая в условия теоремы. Но так как $T_n(x)$ по условию равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то это же верно для (5.8), а значит и интеграл (5.2) равномерно стремится к нулю.

Для интеграла (5.3) надо заменить $\psi_x(t)$ на $\psi_x(-t)$ и тогда все рассуждения проходят совершенно так же, поскольку предполагалось, что после замены в выражении $T_n(x)$ числа π на $-\pi$ получается выражение $Q_n(x)$, снова равномерно стремящееся к нулю.

Теорема доказана.

Полученный признак равномерной сходимости с первого взгляда может показаться мало удобным для применения. Однако из него можно вывести ряд интересных следствий.

Прежде всего докажем, что он содержит в себе как признак Дини — Липшица, так и признак Жордана.

Действительно, если выполнен признак Дини — Липшица, то

$$\omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = o(1)$$

и, значит,

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \ln \frac{n}{\pi} = o(1).$$

Но в выражении для $T_n(x)$ и для $Q_n(x)$ каждый числитель по модулю не превосходит $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, а потому

$$|T_n(x)| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = O(\ln n) \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) = o(1)$$

и также

$$|Q_n(x)| = o(1),$$

откуда и следует, что $\sigma(f)$ равномерно сходится.

Что касается признака Жордана, то здесь можно рассуждать следующим образом: сначала выбираем число m так, чтобы $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, но

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \ln m \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Этого всегда можно добиться, если только m устремлять к бесконечности достаточно медленно. Затем сумму $T_n(x)$ разбиваем на два слагаемых:

в первой сумме знаменатели меняются от 1 до m , во второй больше или равны $m + 1$. Тогда

$$|T_n(x)| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} + \frac{V}{m+1},$$

где через V обозначено полное изменение функции $f(x)$; в силу (5.9) $T_n(x)$ равномерно стремится к нулю.

Теперь покажем, что признак Салема дает результат значительно более общий, чем признак Жордана. Введем определение.

О п р е д е л е н и е. Функцию $f(x)$ будем называть *функцией с Φ -ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$* , если сумма

$$\sum_i \Phi[|f(x_{i+1}) - f(x_i)|]$$

остаётся ограниченной, как бы мы ни выбирали точки разбиения x_i на отрезке $[a, b]$ (классический случай $\Phi(t) = t$); здесь функция $\Phi(t)$ предполагается непрерывной, возрастающей при $t \geq 0$ и $\Phi(0) = 0$. Это понятие было введено Юнгом (L. C. Young^[1]).

Мы не будем здесь рассматривать вопрос, при каких условиях, наложенных на $\Phi(t)$, ряд Фурье от функции с Φ -ограниченным изменением равномерно сходится; этим вопросом Салем занимался в уже упомянутой работе (Salem^[1], гл. VI). Мы здесь ограничимся одним простым примером.

Пусть

$$\Phi(t) = t^p \quad (p > 1).$$

Обозначим через $V_p[a, b]$ верхнюю грань чисел

$$\left\{ \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Она должна быть конечна, если $f(x)$ имеет Φ -ограниченное изменение при $\Phi(t) = t^p$. Можно доказать (так же как доказывается, что у непрерывной функции с ограниченным изменением на $[a, b]$ полное изменение на отрезке $[a, x]$ есть непрерывная функция от x), что $V_p[a, t]$ — непрерывная функция от t , если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Докажем, что если $f(x)$ непрерывна и $V_p(0, 2\pi)$ конечно, то $\sigma(f)$ сходится равномерно. Положим $m = [\sqrt[n]{n}] - 1$ и напомним

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{1}{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^m \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{1}{k+1} + \\ &\quad + \sum_{m+1}^n \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Выбирая q так, чтобы $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{1}{k+1} &\leq \\ &\leq \left\{ \sum_{k=0}^m \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)^q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C V_p\left(x, \frac{\pi}{\sqrt[n]{n}}\right), \end{aligned}$$

потому, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^q}$ сходится. Но $V_p\left(x, \frac{\pi}{\sqrt[n]{n}}\right)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \frac{1}{k+1} &\leq \\ &\leq \left\{ \sum_{k=m+1}^n \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k+1) \frac{\pi}{n}\right) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{(k+1)^q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq V_p(0, 2\pi) o(1) = o(1) \end{aligned}$$

опять в силу сходимости $\sum \frac{1}{(k+1)^q}$ и $m \rightarrow \infty$.

Таким образом $T_n(x)$ равномерно стремится к нулю; для $Q_n(x)$ рассуждение то же самое. Применяя признак Салема, видим, что $\sigma(f)$ равномерно сходится.

§ 6. Тождество Рогозинского

Прежде чем переходить к изучению новых признаков равномерной сходимости рядов Фурье, мы докажем несколько общих теорем о сходимости и суммируемости функциональных рядов, а также выведем одно тождество, принадлежащее Рогозинскому; в дальнейшем оно будет чрезвычайно полезно.

Пусть $\Phi(a)$ — непрерывная функция, имеющая две непрерывные производные при $a \geq 0$.

Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ — бесконечный ряд, состоящий из функций, непрерывных на некотором отрезке $a \leq x \leq b$. Положим

$$t_n(x, a) = \sum_{k=0}^n u_k(x) \Phi(ka) \quad (6.1)$$

и докажем следующие теоремы:

Теорема 1. Если в точке x ряд $\sum u_k(x)$ сходится к $S(x)$, то при любом постоянном A

$$t_n(x, a) \rightarrow S(x) \Phi(0) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно a на $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$.

Теорема 1'. Если ряд $\sum u_k(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $a \leq x \leq b$, то

$$t_n(x, a) \rightarrow S(x) \Phi(0)$$

равномерно на $a \leq x \leq b$ и $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$.

Теорема 2. Если в точке x ряд $\sum u_k(x)$ суммируется к $S(x)$ методом $(C, 1)$, то

$$t_n(x, a) - S(x) \Phi(0) = [S_n(x) - S(x)] \Phi(na) + R_n(x, a), \quad (6.2)$$

где

$$R_n(x, a) \rightarrow 0$$

равномерно на $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$.

Т е о р е м а 2'. Если $\sum u_k(x)$ суммируется к $S(x)$ методом $(C, 1)$ равномерно на $a \leq x \leq b$, то

$$R_n(x, a) \rightarrow 0$$

равномерно на $a \leq x \leq b$ и $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$.

Для доказательства всех этих теорем выведем сначала одно тождество. Пусть

$$\Delta_k(a) = \Phi(ka) - \Phi[(k+1)a], \quad \Delta^2(ka) = \Delta_k(a) - \Delta_{k+1}(a).$$

Если $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$, где A — постоянно, то по теореме Лагранжа сразу получаем

$$\Delta_k(a) = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad \Delta_k^2(a) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (6.3)$$

равномерно при $k < n$.

Обозначим через $S_n(x)$ частные, а через $\sigma_n(x)$ — чезаровские суммы ряда $\sum u_k(x)$. Докажем теперь, что если $R_n(x, a)$ определено формулой (6.2), то мы имеем

$$R_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n-2} [\sigma_k(x) - S(x)] (k+1) \Delta_k^2(a) + [\sigma_{n-1}(x) - S(x)] n \Delta_{n-1}(a). \quad (6.4)$$

Действительно, на основании преобразования Абеля мы можем написать

$$t_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \Delta_k(a) + S_n(x) \Phi(na).$$

Так как

$$\Phi(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(a) + \Phi(na),$$

то, умножая на $S(x)$, находим

$$S(x) \Phi(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(a) S(x) + S(x) \Phi(na)$$

и, следовательно,

$$t_n(x, a) - S(x) \Phi(0) = \sum_{k=0}^{n-1} [S_k(x) - S(x)] \Delta_k(a) + [S_n(x) - S(x)] \Phi(na). \quad (6.5)$$

Поэтому из (6.2) и (6.5) имеем

$$R_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n-1} [S_k(x) - S(x)] \Delta_k(a).$$

Снова применяя преобразование Абеля и замечая, что

$$\sum_{p=0}^k [S_p(x) - S(x)] = (k+1) [\sigma_k(x) - S(x)],$$

находим

$$R_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n-2} [\sigma_k(x) - S(x)] (k+1) \Delta_k^2(a) + [\sigma_{n-1}(x) - S(x)] n \Delta_{n-1}(a),$$

а это и есть (6.4).

Теперь перейдем к доказательству сформулированных теорем. Заметим прежде всего, что из формул (6.3) следует

$$(k+1)\Delta_k^2(a) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq \frac{A}{n} \quad \text{и} \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$n\Delta_{n-1}(a) = O(1) \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq \frac{A}{n},$$

а потому из (6.4) получаем

$$|R_n(x, a)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-2} |\sigma_k(x) - S(x)| + O(1) |\sigma_{n-1}(x) - S(x)|. \quad (6.6)$$

Отсюда мы легко выведем теоремы 2 и 2'. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. В условиях теоремы 2 имеем для достаточно большого N

$$|\sigma_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n > N,$$

а в условиях теоремы 2' это неравенство имеет место равномерно на $[a, b]$. Но из (6.6) получаем

$$|R_n(x, a)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^N |\sigma_n(x) - S(x)| + O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=N+1}^{n-2} |\sigma_k(x) - S(x)| + \\ + O(1) |\sigma_{n-1}(x) - S(x)|. \quad (6.7)$$

Так как во второй сумме в (6.7) число членов меньше n , а каждый из них меньше ε , то вся вторая сумма меньше ε ; то же справедливо для последнего члена формулы (6.7); то и другое имеет место равномерно, если мы находимся в условиях теоремы 2'. Остается рассмотреть первую сумму. Но функции $u_n(x)$ непрерывны, значит, и $\sigma_n(x)$ тоже (при $k=0, 1, 2, \dots, N$), и в условиях теоремы 2' это же верно для $S(x)$ на $[a, b]$. Поэтому найдется такое C , что

$$|\sigma_k(x) - S(x)| < C, \quad a \leq x \leq b, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

(и это же верно в точке x , если мы находимся в условиях теоремы 2). Отсюда ясно, что первый член формулы (6.7) не превосходит $C \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$.

Мы убедились, что в условиях теоремы 2 имеем $R_n(x, a) = o(1)$, и что это имеет место равномерно на $[a, b]$, если мы находимся в условиях теоремы 2', т. е. обе эти теоремы доказаны.

Чтобы доказать теоремы 1 и 1', достаточно заметить, что если ряд сходится к $S(x)$, то и $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$, а тогда $R_n(x, a) \rightarrow 0$ и, по доказанному, это имеет место равномерно на $[a, b]$, если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ равномерно, что в свою очередь должно иметь место в условиях теоремы 1'. Поэтому из формулы (6.2) в силу ограниченности $\Phi(a)$ сразу видим, что $t_n(x) - S(x) \Phi(0)$ стремится к нулю в случае теоремы 1 и притом равномерно в случае теоремы 1'. Таким образом все теоремы доказаны.

Мы теперь применим полученные результаты к тому важному частному случаю, когда рассматриваемый ряд есть тригонометрический, а роль $\Phi(a)$ играет $\cos a$. Итак, пусть

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2},$$

$$u_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\Phi(a) = \cos a.$$

Мы находимся в условиях применимости доказанных теорем. Но в рассматриваемом случае, как показывает простое вычисление,

$$t_n(x, a) = \sum_{k=0}^n u_k(x) \cos ka = \frac{1}{2} [S_n(x+a) + S_n(x-a)],$$

откуда, применяя формулу (6.2), находим

$$\frac{1}{2} [S_n(x+a) + S_n(x-a)] - S(x) = [S_n(x) - S(x)] \cos na + R_n(x, a). \quad (6.8)$$

Формулу (6.8) будем называть *тождеством Рогозинского*. Важно заметить, что из доказанных теорем следует:

$R_n(x, a) \rightarrow 0$ равномерно относительно $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$, если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ и это имеет место равномерно на $a \leq x \leq b$, если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ равномерно на $a \leq x \leq b$.

Сам Рогозинский использовал этот результат для изучения одного метода суммирования (см. глава VII, § 4), но его тождество может быть применено для получения целого ряда других интересных теорем. В частности, мы применим его в следующем параграфе для изучения вопросов, связанных с равномерной сходимостью ряда Фурье.

§ 7. Признак равномерной сходимости, использующий обынтегрированный ряд

Пусть $F(x)$ — периодическая функция и

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Имеют место следующие теоремы (см. Salem ^[13]):

Если $f(x)$ непрерывна и

$$|S_n(F, x) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (7.1)$$

равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$|S_n(F, x) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (7.2)$$

равномерно на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Для краткости обозначим через $s_n(x)$ частные суммы ряда $\sigma(f)$ и через $S_n(x)$ частные суммы ряда $\sigma(F)$. Если $f(x)$ непрерывна всюду, то $\sigma_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на всем отрезке $[0, 2\pi]$; если же она непрерывна лишь на $[a, b]$, то $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому, применяя тождество Рогозинского (см. § 6), видим, что

$$\frac{1}{2} [s_n(x+a) + s_n(x-a)] - f(x) = [s_n(x) - f(x)] \cos na + R_n(x, a), \quad (7.3)$$

где $R_n(x, a) \rightarrow 0$ равномерно на $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$ и равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$ в первом случае, во втором же равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Если мы проинтегрируем равенство (7.3) по α от 0 до h , где $h \leq \frac{A}{n}$, то получим

$$\frac{1}{2} [S_n(x+h) - S_n(x-h)] - f(x)h = [s_n(x) - f(x)] \frac{\sin nh}{h} + \int_0^h R_n(x, \alpha) d\alpha. \quad (7.4)$$

Если $\frac{A}{n} < \varepsilon$, то в силу (7.2)

$$\frac{1}{2} [S_n(x+h) - S_n(x-h)] = \frac{1}{2} [F(x+h) - F(x-h)] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ (и это же справедливо равномерно на $[0, 2\pi]$, если выполнено (7.1)).

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} [F(x+h) - F(x-h)] = [f(x) + o(1)]h$$

также равномерно на $[0, 2\pi]$, если $f(x)$ непрерывна всюду, и равномерно на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, если $f(x)$ непрерывна на (a, b) , а $h \leq \frac{A}{n} < \varepsilon$.

Отсюда следует, что левая часть формулы (7.4) есть $o\left(\frac{1}{n}\right) + o(h) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, поскольку $h = O\left(\frac{1}{n}\right)$, и, значит, из (7.4)

$$[s_n(x) - f(x)] \frac{\sin nh}{h} + \int_0^h R_n(x, \alpha) d\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7.5)$$

Но в силу уже отмеченных выше свойств $R_n(x, \alpha)$ для любого $\eta > 0$ можно найти такое N , что

$$|R_n(x, \alpha)| < \eta \quad \text{для } n > N$$

при $0 \leq x \leq 2\pi$ в случае (7.1) и при $a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon$ в случае (7.2). Следовательно,

$$\left| \int_0^h R_n(x, \alpha) d\alpha \right| < \eta h < \eta \frac{A}{n} \quad (7.6)$$

равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$ или на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Так как η может быть взято как угодно малым, то из (7.5) и (7.6) заключаем

$$[s_n(x) - f(x)] \frac{\sin nh}{h} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$ или на $a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon$.

Полагая теперь $h = \frac{\pi}{2n}$, находим

$$s_n(x) - f(x) = o(1)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$ в случае (7.1) и на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ в случае (7.2), и обе теоремы доказаны.

З а м е ч а н и е. Доказательства этих теорем даны Салемом, но, как отмечено им самим, идея интегрировать тождество Рогозинского принадлежит Зигмунду, использовавшему эту мысль в другом случае.

§ 8. Обобщение признака Дини—Липшица (в интегральной форме)

Докажем следующую теорему:

Т е о р е м а. Если $f(x)$ непрерывна и условие

$$\frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}\right) \quad (8.1)$$

выполнено равномерно на $[0, 2\pi]$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

В таком виде эта теорема была доказана Салемом (Salem^[13]), однако ее можно сформулировать несколько иначе, и тогда она примет вид, в котором была доказана С. Б. Стечкиным*), а именно:

Если $f(x)$ непрерывна,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

и для симметрического модуля гладкости**) имеем

$$\omega_2(\delta, F) = o\left(\frac{\delta}{\ln \frac{1}{\delta}}\right),$$

то $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Эквивалентность обеих формулировок сразу следует из того, что

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt$$

и из определения симметрического модуля гладкости.

Докажем теперь, что если

$$\omega_2(\delta, F) = o\left(\frac{\delta}{\ln \frac{1}{\delta}}\right), \quad (8.2)$$

то для $R_n(F, x) = F(x) - S_n(x, F)$ имеем

$$R_n(F, x) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (8.3)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$.

Действительно, из формулы (3.1) имеем

$$|R_n(F, x)| \leqslant C E_n(F) \ln n,$$

где C — постоянное. Но по теореме Джексона (см. Добавления, § 7)

$$E_n(F) \leqslant C_1 \omega_2\left(\frac{1}{n}, F\right), \quad (8.4)$$

где C_1 — снова постоянное. Поэтому

$$|R_n(F, x)| = O\left(\ln n \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

*) Стечкин получил свою теорему и изложил ее доказательство в докладе на семинаре по теории функций действительного переменного в Московском Университете в 1954 году до знакомства с работой Салема.

**) См. Вводный материал, § 25.

и в нашем случае в силу (8.2)

$$|R_n(F, x)| = O(\ln n) o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$. Но тогда по теореме предыдущего параграфа, полагая $R_n(f, x) = f(x) - S_n(x, f)$, находим

$$|R_n(f, x)| = o(1)$$

равномерно относительно x , и теорема доказана.

Можно, не пользуясь теорией приближения, доказать предыдущую теорему непосредственно. Это было сделано В. И. Черейской [1*].

В следующем параграфе мы дополним эту теорему, рассмотрев случай, когда условие (8.1) выполнено не на всем отрезке $[0, 2\pi]$, а лишь на некотором $[a, b]$, содержащемся в нем. В данный же момент мы хотим указать, почему эта теорема является обобщением признака Дини—Липшица.

Прежде всего ясно, что если признак Дини—Липшица выполнен, то из

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leq 2\omega(h, f) \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq h$$

мы находим

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x-t)| dt \leq 2\omega(h, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}\right)$$

и, значит, выполнено условие (8.1) теоремы Салема—Стечкина. Но, с другой стороны, условие (8.1) может быть выполнено без того, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию Дини—Липшица. Чтобы доказать это, рассмотрим следующий пример (Салем пишет, что этот пример принадлежит Зигмунду).

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{n^{1+a}}, \quad 0 < a < 1. \quad (8.5)$$

Ясно, что $f(x)$ непрерывна, так как ряд сходится абсолютно и равномерно. Имеем

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n n^{1+a}}.$$

Докажем, что $F(x)$ имеет модуль гладкости $\omega_2(\delta, F)$, удовлетворяющий условию (8.1). Действительно,

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2^{n-1}h)}{2^n n^{1+a}} \sin 2^n x.$$

Выберем N так, чтобы

$$2^N \leq \frac{1}{h} < 2^{N+1}.$$

Имеем

$$|F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)| \leq 4 \left[\sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(2^{n-1}h)}{2^n n^{1+a}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^{1+a}} \right]. \quad (8.6)$$

Но

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^{1+a}} \leq \frac{1}{2^N N^{1+a}} = O\left(\frac{h}{\left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1+a}}\right). \quad (8.7)$$

*) Аналогичный результат был получен М. Сато. Позднее он дал также некоторое обобщение этой теоремы (см. Sato [1]).

Покажем, что и первая сумма в (8.6) имеет тот же порядок. В самом деле, во-первых,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\sin^2(2^{n-1}h)}{2^n n^{1+a}} &\leq h^2 \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2^{2n-2}}{2^n n^{1+a}} = \frac{h^2}{4} \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2^n}{n^{1+a}} < \\ &< \frac{2^{\frac{N}{2}} h^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} = O(h^2 \cdot 2^{\frac{N}{2}}) = O(h^{\frac{3}{2}}) = o\left(\frac{h}{\left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1+a}}\right), \end{aligned} \quad (8.8)$$

потому, что $h^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1+a} = o(1)$; во-вторых,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^N \frac{\sin^2(2^{n-1}h)}{2^n n^{1+a}} &\leq \frac{h^2}{4} \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^N \frac{2^n}{n^{1+a}} \leq \\ &\leq \frac{h^2}{4 \left(\frac{N}{2}\right)^{1+a}} \sum_{n=1}^N 2^n = O\left(\frac{h^2 \cdot 2^N}{N^{1+a}}\right) = O\left(\frac{h}{\left(\ln \frac{1}{h}\right)^{1+a}}\right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Складывая (8.8) и (8.9), мы видим, что и первая сумма в правой части (8.6) имеет тот же порядок, что и вторая, и окончательно

$$\omega_2(F, \delta) = O\left(\frac{\delta}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{1+a}}\right),$$

откуда ясно, что условие (8.1) удовлетворено.

Теперь мы хотим показать, что условие Дини–Липшица не имеет места, т. е. что

$$\omega(\delta, f) \neq o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right). \quad (8.10)$$

Чтобы доказать это, заметим, что, как показал С. Б. Стечкин^[2], если

$$R_n(f) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - S_n(x)|,$$

то для лакунарного ряда, у которого $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda$, имеем

$$E_n(f) > C R_n(f), \quad (8.11)$$

где C — постоянная, зависящая только от λ .

В нашем случае ряд для $f(x)$ лакунарный. Если мы для заданного n определим N из неравенства

$$2^N \leq n < 2^{N+1}, \quad (8.12)$$

то $S_n(x) = S_{2^N}(x)$ при всех n , удовлетворяющих (8.12). Но мы имеем

$$f(x) - S_{2^N}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^N \frac{\cos 2^k x}{k^{1+a}} = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\cos 2^k x}{k^{1+a}},$$

а потому для тех же n

$$R_n(f) = \max |f(x) - S_n(x)| \geq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+a}} > a \frac{1}{N^a},$$

где $a > 0$ постоянно. В силу (8.11) отсюда следует

$$E_n(f) > C_1 \frac{1}{N^a} \quad \text{при} \quad 2^N \leq n < 2^{N+1},$$

где C_1 — новая константа, $C_1 > 0$. Из неравенства Джексона тогда следует

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) > C_2 E_n(f) > C_3 \frac{1}{N^a}.$$

Так как $(N + 1) \ln 2 > \ln n$ в силу (8.12), то отсюда

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) > C_4 \frac{1}{(\ln n)^a}. \quad (8.13)$$

Отсюда следует, что условие

$$\omega(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right)$$

не может выполняться, поскольку из него вытекало бы

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

что противоречит (8.13), поскольку мы предположили, что $a < 1$.

Итак, условие Дини—Липшица не выполнено, и наше утверждение доказано.

§ 9. Равномерная сходимость на отрезке $[a, b]$

В ряде случаев бывает, что некоторая функция $f(x)$, вообще только суммируемая, оказывается непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ длины, меньшей чем 2π , и удовлетворяет на нем тем или иным дополнительным условиям. Можно ставить тогда вопрос о том, сходится ли ее ряд Фурье равномерно на всяком отрезке $[a_1, b_1]$, целиком лежащем внутри $[a, b]$ (если в концах отрезка $[a, b]$ функция имеет разрывы, то, разумеется, уже не может быть равномерной сходимости на всем $[a, b]$).

Здесь часто бывает удобно применять метод *продолжения функций* *), суть которого заключается в следующем: мы строим функцию $f_1(x)$ так, чтобы она совпадала с $f(x)$ на $[a, b]$, и продолжаем ее вне этого отрезка так, чтобы в результате она обладала на всем отрезке $[0, 2\pi]$ тем «хорошим» свойством, которое она имела на $[a, b]$. Если это свойство настолько «хорошее», что благодаря ему ряд $\sigma(f_1)$ сходится равномерно, то, в силу принципа локализации Римана (см. глава I, § 33), ряд $\sigma(f)$ будет сходиться равномерно, во всяком $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$. Иногда такое продолжение не удастся, но можно взять $f_1(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, и продолжить ее так, чтобы «хорошее» свойство наблюдалось на $[0, 2\pi]$. После этого мы видим, что $\sigma(f_1)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$, а тогда $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Как же можно «продолжить» функцию с сохранением заданного свойства? Для этого применяют идею, впервые использованную Риманом при доказательстве принципа локализации: строят функцию $\lambda(x)$, равную единице на $[a_1, b_1]$, равную нулю вне $[a, b]$ и проинтерполированную между a и a_1 , b_1 и b либо просто линейно (рис. 16), либо как-нибудь более деликатно,

*) Ряд интересных теорем, касающихся «продолжения функций», можно найти в статье П. Л. Ульянова [5].

если нужно заботиться о наличии у нее производных до некоторого порядка (в частности, в точках a, a_1, b_1 и b они тогда должны быть равны нулю). После этого, полагая

$$f_1(x) = \lambda(x)f(x),$$

обнаруживают (если $\lambda(x)$ удачно подобрано), что $f_1(x)$ уже обладает на $[0, 2\pi]$ такими свойствами, как $f(x)$ на $[a, b]$.

Разумеется, этот метод в каждом отдельном случае требует специального изучения, так как в общем виде нельзя ответить на вопрос, будет ли так построенная $f_1(x)$ решать поставленную задачу: все зависит от того, каким именно свойством обладала $f(x)$ на $[a, b]$.

Мы здесь рассмотрим лишь один пример для иллюстрации описанного метода; именно, мы хотим показать, что имеет место теорема:

Т е о р е м а. Если $f(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$ и непрерывна на $[a, b]$, причем

$$\frac{1}{h} \int_0^h \{f(x+t) - f(x-t)\} dt = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}\right) \quad (9.1)$$

равномерно относительно x на $a \leq x \leq b$, то для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Эта теорема, так же как и теорема § 8, была доказана как Стечкиным (см. сноску на стр. 293), так и Салемом (Salem [13]). Метод продолжения функции в данном случае был применен Стечкиным, тогда как Салем проводил для этого случая специальное доказательство.

Покажем, что если $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы, то можно построить такую $f_1(x)$, которая совпадает с $f(x)$ на $(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$, и для нее удовлетворено условие (9.1) равномерно на $[0, 2\pi]$. Для этого строим $\lambda(x)$ так: $\lambda(x) = 1$ на $(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$; $\lambda(x) = 0$ вне $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$; $\lambda(x)$ линейно интерполируется на $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$ и на $(b - 2\varepsilon, b - \varepsilon)$ (рис. 17); и полагаем

$$f_1(x) = f(x)\lambda(x).$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f_1(x)$ непрерывна всюду на $[0, 2\pi]$. Имеем

$$\begin{aligned} f_1(x+t) - f_1(x-t) &= f(x+t)\lambda(x+t) - f(x-t)\lambda(x-t) = \\ &= f(x+t)[\lambda(x+t) - \lambda(x-t)] + [f(x+t) - f(x-t)]\lambda(x-t). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Пусть x лежит на $\left[0, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ или на $\left[b - \frac{\varepsilon}{2}, 2\pi\right]$ и $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$; тогда первое слагаемое в правой части (9.2) равно нулю, так как $\lambda(x+t) - \lambda(x-t) = 0$. Если же $x \in \left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ и $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$, то $f(x+t)$ ограничена в силу не-

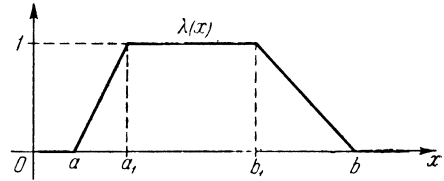


Рис. 16

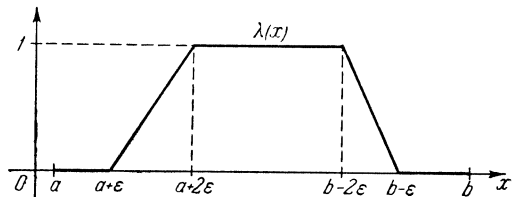


Рис. 17

прерывности $f(x)$ на $[a, b]$, тогда как $\lambda(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, значит, $|\lambda(x+t) - \lambda(x-t)| < K|t|$, где K постоянно. Соединяя оба эти результата, получаем

$$|f(x+t)[\lambda(x+t) - \lambda(x-t)]| \leq K_1|t|$$

для $0 \leq x \leq 2\pi$ и $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$, где K_1 — новое постоянное. Но тогда, взяв $h \leq \frac{\varepsilon}{2}$, находим

$$\left| \int_0^h [f_1(x+t) - f_1(x-t)] dt \right| \leq \left| \int_0^h \lambda(x-t) [f(x+t) - f(x-t)] dt \right| + O(h^2) \quad (9.3)$$

и таким образом все сводится к оценке интеграла

$$I(x) = \int_0^h \lambda(x-t) [f(x+t) - f(x-t)] dt.$$

Если $x \in \left[0, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ или $x \in \left[b - \frac{\varepsilon}{2}, 2\pi\right]$ и $|h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, то $I(x) = 0$, потому что $\lambda(x-t) = 0$. Если $x \in [a + 3\varepsilon, b - 3\varepsilon]$, а $|h| \leq \varepsilon$, то $\lambda(x-t) = 1$, а тогда

$$I(x) = \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right)$$

по условию теоремы.

Если же $x \in \left[a + \frac{\varepsilon}{2}, a + 3\varepsilon\right]$ и $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, то в силу монотонного убывания $\lambda(x-t)$ при t возрастающем имеем по второй теореме о среднем значений, замечая, что $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ всюду:

$$|I(x)| \leq |\lambda(x)| \int_0^{\xi} [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{\xi}{\ln \frac{1}{\xi}}\right) = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right)$$

при $0 < \xi < h$.

Аналогичное рассуждение проводим для $x \in \left[b - 3\varepsilon, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, в этом случае $\lambda(x-t)$ будет возрастающей функцией от t и мы найдем

$$|I(x)| = |\lambda(x-h)| \int_{\xi}^h [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right),$$

потому что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi}^h [f(x+t) - f(x-t)] dt \right| &= \\ &= \left| \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt - \int_0^{\xi} [f(x+t) - f(x-t)] dt \right| \leq \\ &\leq o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right) + o\left(\frac{\xi}{\ln \frac{1}{\xi}}\right) = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right). \end{aligned}$$

Итак, мы убедились, что для $f_1(x)$ условие (9.1) удовлетворено равномерно на $0 \leq x \leq 2\pi$. Значит, по теореме § 8, имеем: $\sigma(f_1)$ равномерно сходится

на $[0, 2\pi]$. Но $f_1(x) = f(x)$ на $(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$. Значит, $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(a + 3\varepsilon, b - 3\varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если на некотором $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ выполнен признак Дини—Липшица, т. е.

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}\right) \quad (9.4)$$

равномерно на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Действительно, рассуждая как в § 8, мы убедимся, что если выполнено (9.4), то выполнено и (9.1) и остается применить только что доказанную теорему.

§ 10. Признаки Сато

Вернемся к вопросу о равномерной сходимости на всем отрезке $[0, 2\pi]$. Мы видели, что существуют признаки, выражаемые только через коэффициенты ряда, и признаки, выражаемые только через свойства функции. Укажем теперь одну теорему Сато, из которой получаются признаки смешанного типа, т. е. такие, в которых фигурируют как свойства функции, так и условия, наложенные на коэффициенты Фурье.

Сначала введем определение.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\Phi(n)$ — положительная функция целочисленного аргумента n . Функция $f(x)$ принадлежит классу $\Phi(n)$, если

$$\Phi(n) \int_a^b f(x+t) \cos nt \, dt = O(1) \quad (10.1)$$

равномерно относительно x, n, a, b при $b - a \leq 2\pi$.

Имеет место следующая теорема *):

Т е о р е м а С а т о (Sato^[1]). Пусть $f(x)$ принадлежит классу $\Phi(n)$, где $\Phi(n) = O(n)$, и $f(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Тогда для любой монотонно возрастающей $\Theta(n)$, где $1 \leq \Theta(n) \leq \Phi(n)$, найдутся три абсолютные константы A, B и C , для которых

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left[A \ln \Theta(n) + B \ln \frac{n}{\Phi(n)} \right] + \frac{C}{\Theta(n)}. \quad (10.2)$$

Для доказательства заметим (см. (32.9) из главы I), что

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \varepsilon_n, \quad (10.3)$$

где

$$\varepsilon_n = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

(см. Вводный материал, § 25). Таким образом достаточно доказать, что интеграл в (10.3) по модулю не превосходит правую часть (10.2). Но можно это доказывать, предварительно заменив нижний предел интегрирования через $\frac{\pi}{n}$, так как, полагая

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

*) См. также работу Нэша (Nash^[1]).

имеем

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right| \leq 2 \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) n \frac{\pi}{n} = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right].$$

Итак, будем доказывать существование таких A, B и C , что

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left[A \ln \Theta(n) + B \ln \frac{n}{\Phi(n)} \right] + \frac{C}{\Theta(n)}. \quad (10.4)$$

Прежде всего напомним

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k \frac{\pi}{n}}^{(k+1) \frac{\pi}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \sum_{k=1}^{n-1} I_k \quad (10.5)$$

и будем соединять числа I_k попарно, как это делал Салем (см. § 5). Так как

$$I_k = \int_{\frac{\pi}{n}}^{2 \frac{\pi}{n}} \varphi_x\left(t + \frac{k-1}{n} \pi\right) \frac{(-1)^{k-1} \sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k-1}{n} \pi}{2}} dt,$$

то можно написать для любого нечетного k

$$\begin{aligned} I_k + I_{k+1} &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{2 \frac{\pi}{n}} \varphi_x\left(t + \frac{k-1}{n} \pi\right) \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k-1}{n} \pi}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k}{n} \pi}{2}} \right] \sin nt dt + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{n}}^{2 \frac{\pi}{n}} \left[\varphi_x\left(t + \frac{k-1}{n} \pi\right) - \varphi_x\left(t + \frac{k}{n} \pi\right) \right] \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k}{n} \pi}{2}} \sin nt dt. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Но в силу определения $\varphi_x(t)$ имеем для $\frac{\pi}{n} \leq t \leq 2 \frac{\pi}{n}$

$$\left| \varphi_x\left(t + \frac{k-1}{n} \pi\right) \right| \leq 2 \omega\left(\frac{k+1}{n} \pi\right) \leq 2(k+1) \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) = O\left[k \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (10.7)$$

$$\left| \varphi_x\left(t + \frac{k-1}{n} \pi\right) - \varphi_x\left(t + \frac{k}{n} \pi\right) \right| \leq 2 \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (10.8)$$

Кроме того,

$$\left| \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k-1}{n} \pi}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t + \frac{k}{n} \pi}{2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{n}{k^2}, \quad (10.9)$$

а потому из (10.6), (10.7), (10.8) и (10.9) получаем

$$|I_k + I_{k+1}| = O\left[\frac{n}{k^2} \omega\left(\frac{1}{n}\right) k \frac{\pi}{n}\right] = O\left[\frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Обозначим через q наибольшее нечетное число, для которого

$$q \leq \frac{(n-2)\Theta(n)}{\Phi(n)}.$$

Тогда $q \leq n-2$ и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q (I_k + I_{k+1}) &= O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} \right] = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \ln q \right] = \\ &= O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \left\{ \ln \frac{n}{\Phi(n)} + \ln \Theta(n) \right\} \right], \end{aligned}$$

где знак \sum' означает, что k пробегает лишь нечетные числа. Но

$$\sum_{k=1}^q (I_k + I_{k+1}) = \int_{\frac{\pi}{n}}^{(q+2)\frac{\pi}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

значит, остается доказать, что

$$I = \int_{(q+2)\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = O \left[\frac{1}{\Theta(n)} \right],$$

и тогда неравенство (10.4) будет доказано.

Полагая для краткости $\beta = (q+2)\frac{\pi}{n}$, видим, в силу определения q , что $\beta \leq \pi$ и

$$\beta > \frac{\pi}{n} (n-2) \frac{\Theta(n)}{\Phi(n)} > \frac{\pi}{2} \frac{\Theta(n)}{\Phi(n)} \quad \text{для } n \geq 4. \quad (10.10)$$

Так как $f(x)$ принадлежит к классу $\Phi(n)$, то

$$\left| \int_a^b \varphi_x(t) \sin nt dt \right| = O \left[\frac{1}{\Phi(n)} \right] \quad (10.11)$$

при любых a, b и x . Но по второй теореме о среднем для некоторого η , $\beta < \eta < \pi$, имеем

$$I = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \int_{\beta}^{\eta} \varphi_x(t) \sin nt dt,$$

откуда в силу (10.10) и (10.11)

$$|I| \leq \frac{1}{\beta} O \left[\frac{1}{\Phi(n)} \right] = O \left(\frac{1}{\Theta(n)} \right) \quad (\text{для } n \geq 4).$$

Если $n < 4$, то формула (10.4) тривиальна, значит, теорема полностью доказана.

Из этой теоремы мгновенно получается

С л е д с т в и е 1. Пусть $f(x)$ принадлежит классу $\Phi(n)$, где $\Phi(n) = O(n)$, и ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию $\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{\Phi(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; пусть, кроме того, для некоторой монотонно возрастающей и стремящейся к бесконечности $\Theta(n)$ имеем $\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln \Theta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда ряд Фурье от $f(x)$ сходится к ней равномерно.

Отсюда сразу же вытекает признак Дини—Липшица. Действительно, достаточно положить $\Phi(n) = \Theta(n) = \ln n$, чтобы убедиться, что при $\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n \rightarrow 0$ выполнены условия, сформулированные в следствии 1, а тогда имеет место равномерная сходимость.

Можно высказать и такое

С л е д с т в и е 2. Если для модуля непрерывности $f(x)$ имеем

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\ln \ln n}\right)$$

и если

$$\int_a^b f(x+t) \cos nt \, dt = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно.

Действительно, достаточно положить $\Phi(n) = \frac{n}{\ln n}$ и $\Theta(n) = \ln n$.

§ 11. О равномерной сходимости около каждой точки отрезка

Отметим справедливость следующей простой теоремы:

Т е о р е м а. Пусть $f(x)$ обладает следующим свойством: для каждой точки x_0 отрезка $[0, 2\pi]$ найдется такая окрестность I_{x_0} и такая функция $g(x) = g_{x_0}(x)$, что $f(x) = g(x)$ на $I(x_0)$ и ряд Фурье от $g(x)$ сходится равномерно. Тогда ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно.

По теореме Гейне—Бореля мы можем найти конечное число точек x_1, x_2, \dots, x_m таких, что интервалы $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_m}$ перекрываются и покрывают весь отрезок $[0, 2\pi]$. Пусть $I_{x_k} = (u_k, v_k)$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$u_k < v_{k-1} < u_{k+1} < v_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

причем $(u_{m+1}, v_{m+1}) \equiv (u_1, v_1) \pmod{2\pi}$.

Пусть $\lambda_k(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π , равная 1 на (v_{k-1}, u_{k+1}) , равная 0 вне (u_k, v_k) и линейная на интервалах (u_k, v_{k-1}) и (u_{k+1}, v_k) . Нетрудно видеть, что

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \dots + \lambda_m(x) = 1.$$

Ясно, что

$$\sigma(f) = \sigma[f(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)] = \sigma(f\lambda_1) + \dots + \sigma(f\lambda_m),$$

поэтому достаточно доказать равномерную сходимость каждого из рядов $\sigma(f\lambda_k)$. Но в силу определения $\lambda_k(x)$ имеем

$$\sigma(f\lambda_k) = \sigma[g_{x_k} \lambda_k],$$

а относительно $\sigma(g_{x_k})$ предполагалось, что этот ряд сходится равномерно.

Если теперь заметить, что $\lambda_k(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, так как она — непрерывная ломаная, то по теореме Штейнгауза (см. глава I, § 34) мы видим, что $\sigma(g_{x_k}, \lambda_k)$ и $\lambda_k(x) \sigma(g_{x_k})$ равномерно сходящиеся, и, значит, $\sigma(g_{x_k}, \lambda_k)$ сходится равномерно. Это и заканчивает доказательство.

§ 12. Об операциях над функциями для получения равномерно сходящихся рядов Фурье

Ясно, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две функции с равномерно сходящимися рядами Фурье, то это же имеет место для их суммы или разности. Мы увидим в главе IX, что в случае, когда речь идет об абсолютной сходимости, то и произведение $f_1(x)$ на $f_2(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Для равномерной сходимости это уже неверно: в § 23 мы увидим пример функции $f(x)$, у которой ряд Фурье сходится равномерно, а у $f^2(x)$ ряд Фурье расходится на множестве мощности континуума. Тот же пример показывает, что если

$$\Phi(x) = g[f(x)],$$

где ряд для $f(x)$ сходится равномерно, то для $\Phi(x)$ это не имеет места даже в таком простом случае, как $g(u) = u^2$ (а для абсолютной сходимости мы имеем положительный результат в случае достаточно хорошей $g(u)$ см. § 11, главы IX).

Таким образом, даже, казалось бы, незначительное ухудшение функции нарушает ее свойство иметь равномерно сходящийся ряд Фурье. Тем более интересно указать, что можно за счет разумно подобранного монотонного преобразования независимого переменного превратить любую непрерывную функцию в такую, у которой ряд Фурье сходится равномерно. Мы имеем в виду следующую теорему Бора (Bohr^[11]):

Т е о р е м а. Пусть $\Phi(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Тогда существует такая строго монотонная и непрерывная $t(\theta)$, что

$$f(\theta) = \Phi[t(\theta)]$$

имеет равномерно сходящийся ряд Фурье.

Заметим, что сначала Ж. Паль (Pál^[11]) доказал несколько более слабую теорему, именно он для любой непрерывной $\Phi(t)$ определил $t(\theta)$ с указанными выше свойствами так, что ряд для $f(\theta)$ оказался равномерно сходящимся на $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$ для любого $\delta > 0$. Затем Бор получил теорему, сформулированную выше.

Мы здесь приводим не доказательство Бора, а доказательство Салема (Salem^[10]), так как оно проще и короче. Как и доказательство Палая, оно опирается на результаты Фейера из теории конформных отображений. Прежде всего нам понадобится одна теорема Фейера (Féjér^[3]):

Т е о р е м а Фейера. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — степенной ряд, сходящийся для $|z| < 1$. Пусть функция $f(z)$ непрерывна для $|z| \leq 1$. Допустим, что $w = f(z)$ — однолистная функция, осуществляющая конформное отображение круга $|z| < 1$ на некоторую конечную область плоскости w . Тогда ряд $\sum a_k z^k$ сходится равномерно на $|z| = 1$ (а значит и равномерно для $|z| \leq 1$).

Докажем сначала, что если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

где ряд сходится при $|z| < 1$, то имеет место равенство

$$\iint_{(C_r)} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}, \quad (12.1)$$

где $0 \leq r < 1$ и интегрирование распространяется на круг C_r радиуса r с центром в начале координат.

Действительно, переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{(C_r)} |f'(z)|^2 dx dy &= \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \\ &= \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \varrho^{(k-1)} e^{i(k-1)\varphi} \right|^2 d\varphi = 2\pi \int_0^r \varrho \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 \varrho^{2k-2} \right) d\varrho = \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}. \end{aligned}$$

Здесь все операции законны, так как подынтегральная функция неотрицательна, значит, можно перейти от двойного интеграла к повторному; кроме того, интегрируются ряды с положительными членами. Итак, (12.1) доказано.

Рассмотрим случай, когда $f(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$ и $w = f(z)$ есть однолистная функция, дающая конформное отображение круга $|z| < 1$ на некоторую область плоскости w . Тогда

$$\iint_{(C_r)} |f'(z)|^2 dx dy$$

определяет площадь T_r образа круга (C_r) на плоскости w . Но в этом случае T_r обязательно остается конечной, когда $r \rightarrow 1$. Значит, на основании (12.1) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 < +\infty. \quad (12.2)$$

Теперь покажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ на $|z| = 1$ равномерно суммируем $(C, 1)$. Действительно, $f(z)$ непрерывна в круге $|z| \leq 1$, поэтому $f(\varrho e^{i\varphi})$ равномерно стремится к $f(e^{i\varphi})$ при $\varrho \rightarrow 1$. То же самое справедливо для их действительных и мнимых частей. Следовательно, по теореме § 60 главы I действительная и мнимая части ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\varphi}$ являются рядами Фурье от непрерывных функций. Поэтому они равномерно суммируемы методом $(C, 1)$, а значит, тогда и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\varphi}$ равномерно суммируем методом $(C, 1)$ к $f(e^{i\varphi})$.

Теперь из (12.2) и равномерной суммируемости $(C, 1)$ на окружности $|z| = 1$ заключаем в силу леммы Фейера (см. Добавления, § 12), что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ равномерно сходится для $|z| = 1$, и теорема Фейера доказана.

Переходим к доказательству теоремы Бора.

Пусть $\Phi(t)$ периодическая с периодом 2π . Не нарушая общности, можно добавить к $\Phi(t)$ константу так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t) dt = 0.$$

В таком случае $\Phi(t)$ должна где-то обращаться в нуль. Пусть это будет при $t = 0$ (этого можно достичь сдвигом). Тогда $\Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0$. Так как $\int_0^{2\pi} \Phi(t) dt = 0$, то найдется по крайней мере одно значение a ($0 < a < 2\pi$), где $\Phi(a) = 0$.

Допустим сначала, что в открытом интервале $(0, 2\pi)$ точка a единственная, где $\Phi(t)$ обращается в нуль. Тогда $\Phi(t)$ существенно положительна в

одном из двух интервалов $(0, a)$ и $(a, 2\pi)$ и существенно отрицательна в другом*). Пусть $\alpha(t)$ — любая непрерывная с периодом 2π и такая, что $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = 0$, причем $\alpha(t)$ существенно возрастает в $(0, a)$ и существенно убывает в $(a, 2\pi)$. Тогда уравнения

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \Phi(t) \end{cases} \quad (12.3)$$

изображают простую замкнутую жорданову кривую. Пусть $w = f(z)$ — однолистная функция, осуществляющая конформное отображение круга $|z| < 1$ на область, ограниченную этой кривой (12.3). Такая $f(z)$ существует по теореме Римана (см. Добавления, § 6). В силу теоремы Каратеодори (см. Добавления, § 6) граница круга перейдет в жорданову кривую (12.3) взаимно однозначно и непрерывно. Рассмотрим $f(z)$ на $|z| = 1$, т. е. $z = e^{i\varphi}$. При изменении φ от 0 до 2π можно считать, что $t(\varphi)$ изменяется от 0 до 2π непрерывно и существенно возрастаая (по теореме Каратеодори). Если так, то для мнимой части $f(e^{i\varphi})$ имеем

$$y = \operatorname{Im} f(e^{i\varphi}) = \Phi[t(\varphi)],$$

где $t(\varphi)$ непрерывна и существенно возрастает. Но по доказанной теореме Фейера, если

$$f(z) = \sum a_k z^k,$$

то этот ряд сходится равномерно на $|z| = 1$. Отсюда следует, что ряд Фурье от $\Phi[t(\varphi)]$ сходится равномерно, и тогда теорема доказана.

Допустим теперь, что a не есть единственная точка открытого интервала $(0, 2\pi)$, где $\Phi(t)$ обращается в нуль.

Пусть M_1 — максимум $|\Phi(t)|$ для $0 \leq t \leq a$ и пусть t_1 — точка, на $(0, a)$, где $|\Phi(t_1)| = M_1$. Пусть далее M_2 — максимум $|\Phi(t)|$ на $(a, 2\pi)$ и t_2 — точка на $(a, 2\pi)$, где $|\Phi(t_2)| = M_2$. Определим функцию $w(t)$ следующим образом:

$$w(t) = \begin{cases} \max_{0 \leq t' \leq t} |\Phi(t')| + \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) & \text{для } 0 \leq t \leq t_1, \\ \max_{t \leq t' \leq a} |\Phi(t')| + \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) & \text{для } t_1 \leq t \leq a \end{cases}$$

и аналогично

$$w(t) = \begin{cases} -\max_{a \leq t' \leq t} |\Phi(t')| - \sin\left[\frac{\pi(t-a)}{2\pi-a}\right] & \text{для } a \leq t \leq t_2, \\ -\max_{t \leq t' \leq 2\pi} |\Phi(t')| - \sin\left[\frac{\pi(t-a)}{2\pi-a}\right] & \text{для } t_2 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

и далее будем ее продолжать периодически.

Сразу видно, что $w(t)$ непрерывна, с ограниченным изменением, что $\Phi_1(t) = \Phi(t) + w(t)$ на $[0 \leq t \leq 2\pi]$, обращается в нуль только при $t = 0$, $t = a$, $t = 2\pi$ и что $\Phi_1(t)$ существенно положительна на открытом интервале $(0, a)$ и существенно отрицательна на $(a, 2\pi)$. Поэтому, применяя к ней только что полученный результат, видим, что существует монотонная $t(\theta)$ нужного вида, для которой ряд Фурье от $\Phi_1[t(\theta)]$ сходится равномерно на $[0 \leq t \leq 2\pi]$. Но так как $w(t)$ непрерывна и с ограниченным изменением, то тот же результат справедлив для $\Phi(t)$, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Остается нерешенной проблема, поставленная Н. Н. Лузиным: можно ли для любой непрерывной $\Phi(t)$ подобрать не просто

*) Мы считаем, что $\Phi(t) \not\equiv 0$ (в противном случае теорема тривиальна).

непрерывную монотонную, а абсолютно непрерывную и монотонную $t = t(\theta)$ так, чтобы для

$$f(\theta) = \Phi[t(\theta)]$$

ряд Фурье сходиллся равномерно?

Н. Н. Лузин ставил также другую проблему: можно ли для любой непрерывной $\Phi(t)$ подобрать монотонную $t(\theta)$ так, чтобы ряд Фурье от $f(\theta) = \Phi[t(\theta)]$ сходиллся абсолютно?

Оба эти вопроса не решены.

Можно еще поставить вопрос, нельзя ли для каждой непрерывной $\Phi(x)$ подобрать непрерывную монотонную $F(y)$ так, чтобы ряд Фурье для $F[\Phi(x)]$ сходиллся равномерно?

§ 13. О равномерной сходимости при расстановке знаков у членов ряда

Можно ставить вопрос еще так: дан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (13.1)$$

Рассмотрим все те ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (13.2)$$

которые можно получить из данного путем произвольного изменения знаков его членов. При каких условиях, наложенных на a_n, b_n , можно добиться того, чтобы какой-либо из рядов (13.2) оказался равномерно сходящимся?

Исчерпывающий ответ на этот вопрос дан в работе Зигмунда и Салема (Salem and Zygmund^[6]). В § 8, главы II мы разъяснили смысл выражения «почти все ряды» вида (13.2). С этим разъяснением теорему Салема и Зигмунда можно сформулировать так:

Т е о р е м а. Пусть

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k^2.$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{R_n}}{n \sqrt{\ln n}} < +\infty, \quad (13.3)$$

то почти все ряды (13.2) сходятся равномерно и, следовательно, являются рядами Фурье от непрерывных функций.

Если r_n монотонно убывает и если при некотором $p > 1$ имеем $R_n (\ln n)^p \uparrow$, то условие (13.3) является и необходимым для того, чтобы почти все ряды (13.2) были рядами Фурье от непрерывных функций.

Мы не будем здесь давать доказательства этой теоремы, так как оно требует большого вспомогательного материала*). Укажем лишь, что в качестве простого следствия этого результата получается теорема, ранее доказанная Зигмундом и Пэли (Paley and Zygmund^[1]), а именно

*) Доказательство содержится в упомянутой работе Зигмунда и Салема [6], где есть также много других интересных результатов.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln^{1+\varepsilon} n < +\infty, \quad \varepsilon > 0,$$

то почти все ряды (13.2) сходятся равномерно.

В самом деле, при выполнении условий теоремы Зигмунда и Пэли имеем

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\ln^{1+\varepsilon} n} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ln^{1+\varepsilon} k = o\left(\frac{1}{\ln^{1+\varepsilon} n}\right)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{R_n}}{n \sqrt{\ln n}} < +\infty, \quad \text{поскольку } \sqrt{R_n} = O\left(\frac{1}{\ln^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} n}\right).$$

Теорема перестает быть верна, если $\varepsilon = 0$.

Действительно, достаточно рассмотреть ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \pm \frac{\sin a^k x}{k \ln k},$$

где a — любое целое, лишь бы $a > 1$. Ясно, что для него, полагая $b_n = 0$, если $n \neq a^k$, $b_{a^k} = \frac{1}{k \ln k}$, если $k = 2, 3, \dots$, имеем

$$\sum b_n^2 \ln n = \sum \frac{1}{k^2 \ln^2 k} \ln a^k = \ln a \sum \frac{1}{k \ln^2 k} < +\infty.$$

Между тем этот ряд ни при какой расстановке знаков не может оказаться равномерно сходящимся, так как иначе его сумма оказалась бы непрерывной функцией, а тогда, поскольку это ряд лакунарный, он должен был бы сходиться абсолютно (см. глава XI, § 6), чего нет, так как

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = +\infty.$$

§ 14. Экстремальные свойства некоторых тригонометрических полиномов

Для дальнейшего изучения равномерной сходимости тригонометрических рядов нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые имеют такую же и самостоятельный интерес.

Поставим такую задачу: пусть числа $r_p \geq 0$ ($p = 1, 2, \dots, n$) заданы. Полагаем

$$f(x) = \sum_{p=1}^n r_p \cos(px - \alpha_p). \quad (14.1)$$

Требуется подобрать числа α_p так, чтобы $\max |f(x)|$ был минимальным.

Когда x меняется, то $|f(x)|$ имеет максимум, являющийся положительной и непрерывной функцией от α_p , обозначим ее $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; когда α_p меняются, то эта функция имеет минимум μ ; мы будем искать для него оценку сверху. Покажем, что

$$\mu < C \sqrt{\ln n} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2},$$

где C — абсолютная константа. С этой целью установим справедливость леммы

Л е м м а. Пусть

$$f(x) = r_1 \cos(x - \alpha_1) + r_2 \cos(2x - \alpha_2) + \dots + r_n \cos(nx - \alpha_n),$$

где числа $r_p \geq 0$ заданы. Тогда можно подобрать числа α_p ($p = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы

$$|f(x)| \leq C \sqrt{\ln n} \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}, \quad (14.2)$$

где C — абсолютная константа.

Эту лемму можно доказывать разными способами (см., например, Littlewood^[1]); мы здесь даем доказательство Салема (Salem^[1]).

Заметим прежде всего, что

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi (r_1^2 + \dots + r_n^2). \quad (14.3)$$

Отсюда ясно, что

$$r_1^2 + \dots + r_n^2 \leq 2M^2. \quad (14.4)$$

Рассмотрим теперь для любого целого положительного k интеграл $I_k = \int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx$. Если его рассматривать как функцию от α_p , то эта функция имеет минимум, и в точке, где он достигается, необходимо $\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha_p^2} \geq 0$ для $p = 1, 2, \dots, n$. Это неравенство дает

$$\int_0^{2\pi} 2k(2k-1) f^{2k-2}(x) r_p^2 \sin^2(px - \alpha_p) dx - \int_0^{2\pi} 2k f^{2k-1}(x) r_p \cos(px - \alpha_p) dx \geq 0,$$

откуда тем более

$$\int_0^{2\pi} f^{2k-1}(x) r_p \cos(px - \alpha_p) dx \leq (2k-1) r_p^2 \int_0^{2\pi} f^{2k-2}(x) dx.$$

Если написать такие неравенства для всех $p = 1, 2, \dots, n$, то после сложения их получим

$$\int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx \leq (2k-1) (r_1^2 + \dots + r_n^2) \int_0^{2\pi} f^{2k-2}(x) dx. \quad (14.5)$$

Но, применяя к последнему интегралу неравенство Гельдера, найдем

$$\int_0^{2\pi} f^{2k-2}(x) dx \leq (2\pi)^{\frac{1}{k}} \left\{ \int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx \right\}^{\frac{k-1}{k}},$$

что в соединении с неравенством (14.5) дает

$$\left(\int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx \right)^{\frac{1}{k}} \leq (2\pi)^{\frac{1}{k}} (2k-1) (r_1^2 + \dots + r_n^2). \quad (14.6)$$

Если мы рассмотрим ту функцию $|f(x)|$, для которой интеграл I_k имеет минимальное значение, то она достигает своего максимума M , по крайней мере, в одной точке x_0 и имеет величину $M\lambda$ ($0 < \lambda < 1$), по крайней мере, в двух точках a и b , из которых одна левее, а другая правее x_0 , причем между ними $|f|$ превосходит $M\lambda$ (это следует из того, что $f(x)$ имеет нули на $[0, 2\pi]$). Тогда

$$2(M - M\lambda) < \int_a^b |f'(x)| dx < \sqrt{b-a} \left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{b-a} \pi \left(\sum_{p=1}^n p^2 r_p^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$b - a > \frac{4M^2(1-\lambda)^2}{\pi^2 \sum p^2 r_p^2}.$$

Но тогда в силу (14.4) имеем:

$$b - a > \frac{2}{\pi^2} \frac{(1 - \lambda)^2 \sum p^2 r_p^2}{\sum p^2 r_p^2},$$

а потому

$$\int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx \geq \int_a^b f^{2k}(x) dx \geq (M\lambda)^{2k} (b - a) > (M\lambda)^{2k} \frac{2}{\pi^2} \frac{(1 - \lambda)^2 \sum p^2 r_p^2}{\sum p^2 r_p^2}. \quad (14.7)$$

Так как λ здесь пока еще произвольно, $0 < \lambda < 1$, мы выберем его так, чтобы $\lambda^{2k}(1 - \lambda)^2$ было максимальным; для этого надо взять $\lambda = \frac{k}{k+1}$.

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} f^{2k}(x) dx \geq M^{2k} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{2k} \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(k+1)^2} \frac{\sum p^2 r_p^2}{\sum p^2 r_p^2}. \quad (14.8)$$

Сравнивая неравенство (14.8) с неравенством (14.6), находим

$$M^2 < Ak \left(\frac{\sum p^2 r_p^2}{\sum r_p^2} \right)^{\frac{1}{k}} (r_1^2 + \dots + r_n^2), \quad (14.9)$$

где A — абсолютная константа.

Если выбрать k так, чтобы правая часть (14.9) была минимальной, то мы найдем

$$M < B \sqrt{\ln \left(\frac{\sum p^2 r_p^2}{\sum r_p^2} \right)} \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}$$

и тем более аналогичное неравенство имеет место для $\mu = \min M$ (B — абсолютная константа). Но так как

$$\frac{\sum p^2 r_p^2}{\sum r_p^2} < n^2,$$

то, упрощая, можно написать

$$\mu < C \sqrt{\ln n} \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}, \quad (14.10)$$

где C снова абсолютная константа.

Итак, лемма доказана.

Как показал С. Н. Бернштейн [4], найденная оценка (14.10) не может быть улучшена.

§ 15. Подбор аргументов при заданных модулях членов ряда

В § 13 мы рассматривали вопрос, можно ли подбором знаков \pm добиться того, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сделался равномерно сходящимся и, следовательно, стал рядом Фурье от непрерывной функции. Указанная там теорема Зигмунда и Салема была дана без доказательства; здесь же мы рассмотрим близкий к этому вопрос, где решается хотя и менее трудная задача, но зато дается ее решение с подробным доказательством.

Вопрос ставится так: пусть числа $r_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) заданы. Требуется подобрать a_n ($n = 1, 2, \dots$) так, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nx - a_n) \quad (15.1)$$

был рядом Фурье от непрерывной функции.

Этот вопрос был поставлен Салемом и он дал на него ответ в следующей форме (Salem^[1]).

Теорема Салема. Если

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{R_n}}{n \sqrt{\ln n}} < +\infty, \quad (15.2)$$

то всегда можно подобрать числа a_n так, чтобы ряд (15.1) оказался рядом Фурье от непрерывной функции.

Действительно, сначала покажем, что существуют целые числа n_k , для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\ln n_{k+1}} \sqrt{R_{n_k}} < +\infty. \quad (15.3)$$

В качестве таких чисел можно взять $n_k = 2^{2^k}$. Действительно, на основании теоремы Коши (см. Вводный материал, § 4), если $u_n \geq 0$ и $u_n \downarrow 0$, то ряды $\sum u_n$ и $\sum 2^n u_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно. Поэтому, если выполнено (15.2), то сходится и ряд

$$\sum \frac{\sqrt{R_{2^{2^k}}}}{\sqrt{2^{2^k}}},$$

а тогда, снова применяя теорему Коши, видим, что сходится и ряд $\sum \sqrt{2^n} \sqrt{R_{2^{2^n}}}$, а это и влечет сходимость (15.3) при $n_k = 2^{2^k}$.

Теперь положим

$$f_k(x) = \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} r_p \cos(px - a_p), \quad k = 1, 2, \dots$$

На основании леммы § 14 мы можем для всякого k выбрать a_p ($p = n_k + 1, \dots, n_{k+1}$) так, чтобы

$$|f_k(x)| < C \sqrt{\ln n_{k+1}} \sqrt{R_{n_k}},$$

а если так, то $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно, а потому функция

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} r_p \cos(px - a_p)$$

непрерывна и это решает в положительном смысле поставленную Салемом задачу. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Салем доказал также (Salem^[1]), что его теорема в известном смысле не может быть улучшена. Точнее: если $R_n^0 \downarrow 0$, причем $R_n^0 \ln n$ изменяется монотонно, и $\sum \frac{\sqrt{R_n^0}}{n \sqrt{\ln n}} = +\infty$, то можно построить ряд $\sum_{p=1}^{\infty} r_p \cos(px - a_p)$, для которого $R_n \leq R_n^0$, и однако ни при каком выборе чисел a_p этот ряд не является рядом Фурье от непрерывной функции.

Салем показал также, что если числа r_n убывают достаточно регулярно, то на быстроту стремления r_n к нулю можно не налагать никаких ограниче-

ний и все же добиться подбором аргументов α_n нужного результата. Точнее: если $r_n \downarrow 0$, а $\left\{\frac{1}{r_n}\right\}$ — вогнутая последовательность, то можно подобрать α_n так, чтобы ряд $\sum r_n \cos(nx - \alpha_n)$ был рядом Фурье от непрерывной функции.

Вопрос о том, будет ли иметь место аналогичная теорема для рядов вида $\sum \pm r_n \cos nx$, остается открытым.

§ 16. О коэффициентах Фурье от непрерывных функций

Возникает вопрос: можно ли сказать что-либо о скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье от непрерывных функций?

Еще Лебегом было отмечено, что какова бы ни была последовательность положительных чисел ε_n , лишь бы $\varepsilon_n \rightarrow 0$, можно найти непрерывную функцию, у которой для бесконечного множества значений n модули коэффициентов Фурье удовлетворяют условию

$$|a_n| + |b_n| \geq \varepsilon_n.$$

Действительно, достаточно выбрать числа n_k столь быстро растущими, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} < +\infty$$

и положить, например,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} \cos n_k x.$$

Ясно, что $f(x)$ непрерывна и

$$|a_{n_k}| = \varepsilon_{n_k} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее вопрос можно ставить так: раз для любой $f(x) \in L^2$ имеем $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то это верно для всякой непрерывной $f(x)$. Но, может быть, можно для каждой непрерывной $f(x)$ найти такое $\varepsilon > 0$, что уже

$$\sum |a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon} < +\infty.$$

Этот вопрос поставил Карлеман (Carleman^[1]), и сам дал на него отрицательный ответ. Более того, он доказал следующую теорему.

Теорема Карлемана. *Существует непрерывная функция $f(x)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\sum |a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon} = +\infty,$$

где a_n и b_n — ее коэффициенты Фурье.

Мы не будем здесь приводить доказательства Карлемана, а получим его теорему из результата Салема, изложенного в § 15.

Положим

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{n} (\ln n)^\beta},$$

где $\beta > 1$. Тогда, полагая

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} r_p^2 = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p(\ln p)^{2\beta}},$$

видим, что

$$R_n = O\left(\frac{1}{(\ln n)^{2\beta-1}}\right),$$

а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{R_n}}{n \sqrt{\ln n}} < +\infty.$$

Но тогда по теореме Салема можно подобрать числа α_n так, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nx - \alpha_n)$$

был рядом Фурье от непрерывной функции.

Но так как для этого ряда

$$a_n^2 + b_n^2 = r_n^2 = \frac{1}{n(\ln n)^{2\beta}},$$

то

$$\sum r_n^{2-\varepsilon} = +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$, откуда и следует справедливость теоремы Карлемана.

Более того, тот же пример может служить для доказательства теоремы Банаха (Banach^[1]): *существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и непрерывная функция $f(x)$, для коэффициентов Фурье которой имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon_n} + |b_n|^{2-\varepsilon_n} = +\infty.$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем только что построенную функцию и подберем ε_n так, чтобы

$$\sum r_n^{2-\varepsilon_n} = +\infty.$$

Тогда наш результат будет доказан. Для удобства оценок будем вместо ε_n писать $2\varepsilon_n$. Так как $r_n^2 = \frac{1}{n(\ln n)^{2\beta}}$, то достаточно выбрать ε_n так, чтобы

$$\sum \frac{1}{n^{1-\varepsilon_n} (\ln n)^{2\beta(1-\varepsilon_n)}} = +\infty.$$

Но это заведомо будет иметь место, например, если, начиная с некоторого n_0 ,

$$\frac{n^{\varepsilon_n}}{(\ln n)^{2\beta}} > \frac{1}{\ln n},$$

т. е.

$$n^{\varepsilon_n} > (\ln n)^{2\beta-1} \quad \text{для} \quad n \geq n_0,$$

для чего достаточно взять

$$\varepsilon_n \ln n > (2\beta - 1) \ln \ln n,$$

а это можно сделать, хотя бы взяв $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$.

Отметим, что Банах получил свою теорему, опираясь на один результат, доказанный в той же работе и представляющий самостоятельный интерес. Именно, он доказал, что *если $\{n_k\}$ — любая лакунарная последовательность и числа α_k и β_k любые, лишь бы $\sum \alpha_k^2 + \beta_k^2 < +\infty$, то всегда можно найти непрерывную функцию, для которой $a_{n_k} = \alpha_k$ и $b_{n_k} = \beta_k$ (т. е. на заданных лакунарной последовательностью местах коэффициенты Фурье могут быть выбраны как угодно, лишь бы ряд из их квадратов сходиллся)*).*

*) Отметим еще одну теорему Банаха (Banach^[1]), а именно: если $\alpha_k \rightarrow 0$ и $\beta_k \rightarrow 0$ то всегда существует суммируемая функция $f(x)$, для которой $a_{n_k} = \alpha_k$, $b_{n_k} = \beta_k$.

Доказательство этого предложения, кроме работы автора, можно найти в книге Зигмунда^[М.6], § 9.6.

Далее, отметим следующую теорему Пэли (Paley^[3]).

Т е о р е м а П э л и. *Каковы бы ни были числа $d_n \geq 0$, $\sum d_n^2 = +\infty$, можно найти такую непрерывную $f(x)$, что для ее ряда Фурье*

$$\sum r_n \cos(nx - a_n)$$

имеем

$$\sum r_n d_n = +\infty.$$

Теорема Пэли может быть получена как следствие более общего результата, принадлежащего Орличу *) (Orlicz^[2]).

Т е о р е м а О р л и ч а. *Пусть $d_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = +\infty$. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная и нормированная на $[0, 1]$ система, для которой*

$$|\varphi_n(x)| \leq A \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (16.1)$$

Тогда существует непрерывная функция $f(x)$, для которой коэффициенты Фурье a_n по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |a_n| = +\infty. \quad (16.2)$$

Для доказательства этой теоремы установим следующую лемму Орлича (см. Orlicz^[1]):

Л е м м а. *Пусть для некоторой последовательности $f_n(x) \in L$ имеем при любых n_1, n_2, \dots, n_m :*

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^m f_{n_i}(x) \right| dx < K, \quad (16.3)$$

где K — постоянное. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x) \quad (16.4)$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность $r_n(t)$ функций Радемахера. Покажем, что из (16.3) следует

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) r_j(t) \right| dx < 2K \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (16.5)$$

Действительно, при всяком t имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) r_j(t) \right| dx &= \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) - \sum_{j=1}^m f_j(x) \right| dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left| \sum_i f_{n'_i}(x) \right| dx + \int_0^1 \left| \sum_i f_{n''_i}(x) \right| dx \leq 2K \end{aligned}$$

*) Оба результата получены независимо и почти одновременно.

(здесь через n'_i обозначены те значения j , при которых $r_j(t) = +1$, и через n''_i — значения j , при которых $r_j(t) = -1$).

В силу известного соотношения (см. Хинчин^[2] или Качмаж и Штейнгауз^[М.7], теорема^[4.5.7]) имеем для функций Радемахера и любых c_j

$$\left| \sum_{j=1}^m c_j^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m c_j r_j(t) \right| dt. \quad (16.6)$$

Полагая в (16.6) $c_j = f_j(x)$ и интегрируя по x , получим в силу (16.5)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j^2(x) \right|^{\frac{1}{2}} dx &\leq 8 \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) r_j(t) \right| dt \right\} dx = \\ &= 8 \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) r_j(t) \right| dx \right\} dt \leq 16K. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Если бы ряд (16.4) расходился на множестве положительной меры, то можно было бы найти такое множество E , $mE > 0$, на котором ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x)$ расходился бы равномерно, т. е. можно было бы для любого A взять столь большое m , что $\sum_{j=1}^m f_j^2(x) > A$ для $x \in E$. Но это находится в противоречии с (16.7), а потому лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы Орлича. Допустим, что теорема неверна. Тогда для любой $f(x) \in C$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |a_n| = C_1(f) < +\infty. \quad (16.8)$$

Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — любая последовательность натуральных чисел. Из (16.8) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{n_k} |a_{n_k}| < C_1(f).$$

Но так как

$$\sum_{k=1}^m d_{n_k} a_{n_k} = \int_0^1 f(t) \sum_{k=1}^m d_{n_k} \varphi_{n_k}(t) dt,$$

то мы имеем при любом m и любых n_k

$$\left| \int_0^1 f(t) \left[\sum_{k=1}^m d_{n_k} \varphi_{n_k}(t) \right] dt \right| \leq C_1(f).$$

Поскольку это справедливо для любой $f \in C$, то в силу леммы § 52 главы 1 имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m d_{n_k} \varphi_{n_k}(t) \right| dt < K < +\infty, \quad (16.9)$$

где K — постоянное, не зависящее от $\{n_k\}$.

Положим $f_j(x) = d_j \varphi_j(x)$. Тогда из (16.9) следует: существует такая константа K , что

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m f_{nk}(t) \right| dt < K.$$

Но тогда по лемме Орлича имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x)$$

сходится почти всюду, следовательно

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j^2 \varphi_j^2(x)$$

сходится почти всюду. По теореме Егорова для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать множество P , $mP > 1 - \varepsilon$, на котором сходимость равномерна. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j^2 \int_P \varphi_j^2(x) dx < +\infty.$$

Но так как, в силу (16.1), если взять $\varepsilon < \frac{1}{2A^2}$, получим

$$\int_{CP} \varphi_j^2(x) dx \leq A^2 \varepsilon < \frac{1}{2},$$

откуда

$$\int_P \varphi_j^2(x) dx > \frac{1}{2},$$

то $\sum_{j=1}^{\infty} d_j^2 < +\infty$, а это противоречит условиям теоремы.

В качестве следствия получаем теорему:

Т е о р е м а. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — любая ортонормированная система, для которой

$$|\varphi_n(x)| \leq A,$$

то найдется непрерывная $f(x)$, у которой коэффициенты Фурье a_n по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} = +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Действительно, возьмем $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и найдем по теореме Орлича такую непрерывную $f(x)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |a_n| = +\infty, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано.

Обозначим $r = 2 - \varepsilon$. Не нарушая общности, можно считать $r > 1$. Найдем r' такое, что $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Тогда $r' > 2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{r'}} \right\}^{\frac{1}{r'}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{r'} \right\}^{\frac{1}{r'}} \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{r'} \right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Поскольку левая часть равна $+\infty$, то, следовательно, и правая тоже.

Для случая тригонометрической системы это дает новое доказательство теоремы Карлемана.

Вернемся к теореме Пэли.

Условимся говорить, что $F(z) \in C$, если $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Для доказательства своей теоремы Пэли установил, что если $d_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = +\infty$, то существует такая $F(z) \in C$, что

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |c_n| = +\infty.$$

С. Б. Стечкин^[11] изучал более общую проблему, а именно: при каких условиях, наложенных на систему неотрицательных функций Φ_n , существует функция $F(z) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|) = +\infty.$$

При этом он опирался на теорему Пэли (см. Стечкин^[10]), но получил результаты, обобщающие как теоремы Пэли, так и теоремы Карлемана и Банаха. Среди многих доказанных С. Б. Стечкиным предложений отметим следующее:

Пусть $d_n \geq 0$ и $0 < \varepsilon_n < 2$ ($n = 1, 2, \dots$). Для того чтобы существовала $F(z) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\varepsilon_n} |c_n|^{2-\varepsilon_n} = +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \eta^{\frac{1}{\varepsilon_n}}$$

расходился для любого $\eta > 0$.

В частности, при $\varepsilon_n \geq \varepsilon > 0$ это условие, очевидно, эквивалентно расходимости ряда $\sum d_n^2$.

§ 17. Об особенностях рядов Фурье от непрерывных функций

Мы до сих пор изучали те условия, при которых ряды Фурье от непрерывных функций оказываются равномерно сходящимися. Однако мы уже знаем (см. глава I, §§ 44, 45), что можно построить ряд Фурье от непрерывной функции, сходящийся всюду, но неравномерно около одной точки, или расходящийся в одной точке. Сейчас мы хотим усилить эти примеры, т. е. применить метод «сгущения особенностей» и таким образом показать, что ряд Фурье от непрерывной функции может сходиться неравномерно уже в любом интервале (a, b) , лежащем на $[0, 2\pi]$, а также может расходиться как на счетных всюду плотных множествах, так и на множествах, имеющих мощность континуума.

18. Непрерывная функция с рядом Фурье, сходящимся неравномерно во всяком интервале

Рассмотрим непрерывную функцию $g(x)$ с рядом Фурье, сходящимся всюду, но неравномерно около $x = 0$ (см. глава I, § 44).

Пусть $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ — все рациональные точки отрезка $[-\pi, \pi]$.

Выберем положительные ε_k так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1$, и положим

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g(x - r_k). \quad (18.1)$$

Ряд (18.1) сходится равномерно и, значит, $G(x)$ непрерывна. В силу равномерной сходимости ряда (18.1) имеем

$$S_n(G, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k S_n(g, x - r_k),$$

поэтому

$$\begin{aligned} R_n(G, x) &= S_n(G, x) - G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k [S_n(g, x - r_k) - g(x - r_k)] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k R_n(g, x - r_k). \end{aligned} \quad (18.2)$$

Пусть $\eta > 0$ задано. Берем такое N , что

$$\sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_k < \eta.$$

Так как по формуле (44.9) главы I

$$|R_n(g, x - r_k)| \leq K, \quad (18.3)$$

то

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_k R_n(g, x - r_k) \right| \leq K\eta. \quad (18.4)$$

С другой стороны, так как ряд для $g(x)$ сходится в каждой точке, то $R_n(g, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом x , а потому

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k R_n(g, x - r_k) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (18.5)$$

Из (18.4) и (18.5) следует, что

$$R_n(G, x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

и при любом x , т. е. ряд Фурье для $G(x)$ сходится в каждой точке.

Докажем теперь, что он сходится неравномерно около каждой точки r_j ($j = 1, 2, \dots$), а так как их множество всюду плотно, то значит неравномерно во всяком интервале Δ , лежащем на $[-\pi, \pi]$, как бы мал он ни был.

Пусть r_j фиксировано. Окружим его столь малым интервалом Δ , чтобы все точки r_k для $k = 1, 2, \dots, N$, но $k \neq j$, находились от Δ на некотором расстоянии $\delta > 0$. Следовательно, если $x \in \Delta$, то $|x - r_k| \geq \delta$ для $k = 1, 2, \dots, N$ и $k \neq j$.

Но так как ряд для $g(x)$ сходится равномерно вне $(-\delta, \delta)$ при любом $\delta > 0$, то это значит, что для всякого $k \neq j$, $k = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$|R_n(g, x - r_k)| < \eta \quad \text{для} \quad x \in \Delta, \quad (18.6)$$

для всех $n \geq n_0$, где n_0 зависит только от η .

Но из (18.2) находим

$$R_n(G, x) = \varepsilon_j R_n(g, x - r_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N'} \varepsilon_k R_n(g, x - r_k) + \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_k R_n(g, x - r_j).$$

Поэтому для $x \in \Delta$ из (18.6) и (18.4)

$$|R_n(G, x)| \geq \varepsilon_j |R_n(g, x - r_j)| - \eta \sum_{k=1}^N \varepsilon_k - K\eta \geq \varepsilon_j |R_n(g, x - r_j)| - \eta(K+1).$$

Так как η в нашем распоряжении, мы можем его взять столь малым, чтобы

$$(K+1)\eta < \frac{\varepsilon_j}{2}.$$

Пусть теперь r_m и x_m — те числа, которые входят в неравенство (44.10) главы I. Полагая

$$\xi_m = r_j + x_m$$

для выбранного нами r_j , найдем

$$|R_n(G, \xi_m)| \geq \varepsilon_j |R_n(g, x_m)| - \frac{\varepsilon_j}{2},$$

и так как по формуле (44.10) главы I

$$|R_{r_m}(g, x_m)| \geq 1 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

то

$$|R_{r_m}(G, \xi_m)| \geq \frac{\varepsilon_j}{2} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (18.7)$$

Итак, мы нашли последовательность чисел ξ_m , $\lim \xi_m = r_j$ (поскольку $\lim x_m = 0$) и таких, что (18.7) имеет место. Это значит, что ряд Фурье от $G(x)$ сходится неравномерно около r_j , и так как это справедливо при любом j , то доказательство закончено.

§ 19. О множестве точек расходимости для тригонометрического ряда

Прежде чем переходить к построению рядов Фурье от непрерывных функций, расходящихся на всюду плотном множестве или на множестве мощности континуума, докажем некоторые общие теоремы о структуре множества точек расходимости для любого ряда из непрерывных функций.

Введем определение:

О п р е д е л е н и е. Последовательность функций $f_n(x)$ будем называть *ограниченно расходящейся* в точке x_0 , если

$$-\infty < \underline{\lim} f_n(x_0) < \overline{\lim} f_n(x_0) < +\infty,$$

и *неограниченно расходящейся*, если

$$\overline{\lim} |f_n(x_0)| = +\infty.$$

Будем говорить, что последовательность расходится, если нет необходимости различать случай ограниченной и неограниченной расходимости.

Докажем теорему.

Т е о р е м а. Если функции $f_n(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$, то множество E точек неограниченной расходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ есть множество типа G_δ .

Доказательство. Обозначим через CE множество, дополнительное к E . В каждой точке $x_0 \in CE$ имеем

$$\overline{\lim} |f_n(x_0)| < +\infty.$$

Пусть

$$F_n^{(k)} = E\{|f_n(x)| \leq K\}.$$

Ясно, что $F_n^{(k)}$ замкнуто, а потому и

$$F^{(k)} = \prod_{n=1}^{\infty} F_n^{(k)}$$

замкнуто. Но для $x_0 \in F^{(k)}$ все $|f_n(x)|$ не превосходят K , а потому $\overline{\lim} |f_n(x_0)| \leq K$, т. е. $x_0 \in CE$. Поэтому и

$$\sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)} \subset CE.$$

Но и обратно, $CE \subset \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}$, так как если $\overline{\lim} |f_n(x_0)| < +\infty$, то можно найти такое k , что $|f_n(x_0)| \leq k$ для $n = 1, 2, \dots$, т. е. если $x_0 \in CE$, то $x_0 \in F^{(k)}$ при некотором k . Итак, $CE = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}$, но каждое $F^{(k)}$ замкнуто, значит, CE есть множество типа F_σ , а потому E есть множество типа G_δ .

Из этой теоремы получаем:

С л е д с т в и е. Если ряд из непрерывных на $[a, b]$ функций неограниченно расходится на множестве всюду плотном на $[a, b]$, то множество точек неограниченной расходимости имеет мощность континуума на любом отрезке, принадлежащем $[a, b]$.

Действительно, мы только что видели, что множество CE , дополнительное ко множеству E точек неограниченной расходимости, есть множество типа F_σ , т. е.

$$CE = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)},$$

где все $F^{(k)}$ замкнуты. Но если бы хоть одно из $F^{(k)}$ было где-нибудь плотным, оно должно было бы содержать отрезок, а это противоречит тому, что E всюду плотно.

Значит, все $F^{(k)}$ нигде не плотны. Но тогда CE есть множество первой категории, а значит, E второй категории, а потому имеет мощность континуума на любом отрезке, лежащем в $[a, b]$ (см. Добавления, § 5).

Впоследствии (глава V, § 22) мы коснемся вопроса о строении множества точек расходимости (без требования неограниченной расходимости) для ряда из непрерывных функций. Сейчас, чтобы не разбивать хода изложения, вернемся к рядам Фурье от непрерывных функций.

§ 20. Непрерывная функция с рядом Фурье, расходящимся на множестве мощности континуума

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную рядом (45.2) главы I, где положено $p_k = a^{k^3}$. В полиноме $Q_k(x)$ заменим аргумент x через $k!x$, т. е. рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(k!x). \quad (20.1)$$

Она снова непрерывна, ибо все $Q_k(x)$ ограничены в своей совокупности (см. глава I, формула (43.3)).

Прежде всего заметим, если в ряде (20.1) каждый косинус рассматривать как отдельный член ряда, то это обычный тригонометрический ряд, т. е. в нем все косинусы расположены так, что их порядки возрастают. Действительно, так как $Q_k(x) = Q(x, n_k)$ и мы видели, что $n_k > 3n_{k-1}$, то тем более $k!n_k > 3(k-1)!n_{k-1}$, т. е. косинусы, входящие в $Q_k(k!x)$, не встречаются в $Q_{k-1}((k-1)!x)$, а значит и подавно в предыдущих членах. Отсюда, принимая во внимание и равномерную сходимость (20.1), мы видим, что это ряд Фурье от $\Phi(x)$.

Покажем сначала, что ряд $\sigma(\Phi)$ расходится во всех точках, соизмеримых с π , и имеет в них неограниченные частные суммы. Действительно, пусть

$$x = \pm \frac{p}{q} \pi.$$

Тогда, как только $k \geq q$, будем иметь

$$k!x \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Но если мы положим

$$l'_k = k!(2n_k - 1), \quad l''_k = 3n_{k-1}(k-1)!,$$

то, сохраняя обозначения § 43 главы I, получим

$$S'_{l'_k}(\Phi, x) - S'_{l''_k}(\Phi, x) = \frac{1}{k^2} P(k!x, n_k),$$

поэтому при $k \geq q$

$$S'_{l'_k}\left(\Phi, \frac{p}{q}\pi\right) - S'_{l''_k}\left(\Phi, \frac{p}{q}\pi\right) = \frac{1}{k^2} P(0, n_k) > \frac{\ln n_k}{k^2} = k \ln a.$$

Итак, в рассматриваемой точке x имеем

$$S'_{l'_k}(\Phi, x) - S'_{l''_k}(\Phi, x) > k \ln a$$

для всех достаточно больших k . Отсюда ясно, что в этой точке ряд Фурье от $\Phi(x)$ расходится и, кроме того, имеет неограниченные частные суммы. Это мы в предыдущем параграфе назвали неограниченной расходимостью. Итак, ряд Фурье от $\Phi(x)$ неограниченно расходится во всех точках, соизмеримых с π , т. е. на множестве, всюду плотном на $[0, 2\pi]$, а потому на основании следствия к теореме предыдущего параграфа он расходится (и притом неограниченно) на множестве мощности континуума.

До сих пор остается неизвестным, можно ли построить непрерывную функцию, у которой ряд Фурье расходится на множестве положительной меры.

§ 21. Расходимость на заданном счетном множестве

В примере § 20, установив расходимость ряда на множестве всюду плотном, мы автоматически получили и расходимость на множестве мощности континуума. Так было и в целом ряде других примеров, строившихся разными авторами, так как все они добивались неограниченной расходимости на всюду плотном множестве, а тогда (в силу теоремы § 19) она уже распространялась на множество второй категории.

Недер (Neder^[1]) поставил вопрос, можно ли построить тригонометрический ряд, расходящийся на заданном счетном множестве и сходящийся всюду вне его?

Докажем, что ответ на этот вопрос оказывается положительным.
Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

— заданное счетное множество на $[0, 2\pi)$. Возьмем функцию $f(x)$, непрерывную и такую, что ее ряд Фурье расходится при $x = 0$, сходится во всех остальных точках и имеет ограниченные частные суммы. Такую функцию мы строили в § 45 главы I. Пусть ε_n — положительные числа и $\sum \varepsilon_n < +\infty$. Положим

$$F(x) = \sum \varepsilon_k f(x - x_k). \quad (21.1)$$

Так как ряд (21.1) сходится равномерно, то $F(x)$ непрерывна. Докажем сначала, что ее ряд Фурье расходится в каждой точке x_j ($j = 1, 2, \dots$).

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Для рассматриваемой точки x_j выберем столь большое p , чтобы $p > j$ и

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon. \quad (21.2)$$

В § 45 главы I мы видели, что для ряда Фурье функции $f(x)$ существуют две последовательности целых чисел ν_m и μ_m , для которых

$$S_{\nu_m}(f, 0) - S_{\mu_m}(f, 0) > \ln a \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (21.3)$$

Так как при любом n в силу равномерной сходимости ряда (21.1) имеем

$$S_n(F, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k S_n(f, x - x_k),$$

то

$$S_n(F, x_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \varepsilon_k S_n(f, x_j - x_k) + \varepsilon_j S_n(f, 0) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \varepsilon_k S_n(f, x_j - x_k).$$

Значит,

$$\begin{aligned} S_{\nu_m}(F, x_j) - S_{\mu_m}(F, x_j) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \varepsilon_k [S_{\nu_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k)] + \\ &+ \varepsilon_j [S_{\nu_m}(f, 0) - S_{\mu_m}(f, 0)] + \sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k [S_{\nu_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k)]. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Напоминаем, что у функции $f(x)$ частные суммы ограничены в совокупности, т. е.

$$|S_n(f, x)| < A \quad n = 1, 2, \dots, -\pi \leq x \leq \pi. \quad (21.5)$$

Отсюда из (21.2) и (21.5) следует

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k [S_{\nu_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k)] \right| < 2A\varepsilon. \quad (21.6)$$

Так как ряд для $f(x)$ сходится всюду, кроме $x = 0$, то $S_n(f, x_j - x_k) \rightarrow f(x_j - x_k)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \neq j$ и $k = 1, 2, \dots, p$. Отсюда следует, что $S_{\nu_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k) \rightarrow 0$ при любом $k \neq j$, $k \leq p$ и при $m \rightarrow \infty$. Но тогда

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \varepsilon_k [S_{\nu_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k)] \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Итак, для любого $\eta > 0$ можно взять m столь большим, что

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \varepsilon_k [S_{r_m}(f, x_j - x_k) - S_{\mu_m}(f, x_j - x_k)] \right| < \eta. \quad (21.7)$$

Если предположить ε выбранным так, что $2A\varepsilon < \eta$, то из (21.3)—(21.7) находим

$$S_{r_m}(F, x_j) - S_{\mu_m}(F, x_j) > \varepsilon_j \ln a - 2\eta > \frac{\varepsilon_j}{2} \ln a, \quad (21.8)$$

если выбрать η так, что $2\eta < \frac{\varepsilon_j}{2} \ln a$.

Из формулы (21.8), справедливой для всех достаточно больших m , следует, что ряд Фурье от $F(x)$ расходится при $x = x_j$, т. е. во всех точках заданного счетного множества.

Легко видеть, что если $\xi \in [0, 2\pi)$ и $\xi \neq x_j$ ни при каком j , то ряд Фурье от $F(x)$ сходится при $x = \xi$. Действительно, тогда, сохраняя предыдущие обозначения, имеем для любых n и $n + q$

$$\begin{aligned} |S_{n+q}(F, \xi) - S_n(F, \xi)| &\leq \sum_{k=1}^p \varepsilon_k |S_{n+q}(f, \xi - x_k) - S_n(f, \xi - x_k)| + \\ &+ \sum_{p+1}^{\infty} \varepsilon_k |S_{n+q}(f, \xi - x_q) - S_n(f, \xi - x_k)|. \end{aligned} \quad (21.9)$$

Но каждый член, входящий в первое слагаемое (21.9), может быть сделан как угодно малым при n достаточно большом, ибо $\xi - x_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$), а потому ряд Фурье для f сходится в точке $\xi - x_k$, следовательно, первое слагаемое (21.9) есть $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, а второе не превосходит $2A\varepsilon < \eta$. Следовательно, $S_{n+q}(F, \xi) - S_n(F, \xi)$ можно сделать как угодно малым, и теорема доказана.

§ 22. Расходимость на множестве мощности континуума при ограниченности частных сумм

Мы строили в § 20 пример ряда $\sigma(f)$ от непрерывной функции, расходящегося на множестве мощности континуума. Его частные суммы были не ограничены. Мы строили в § 21 ряд с ограниченными частными суммами, но расходящийся на заданном счетном множестве.

Можно поставить вопрос так: существует ли непрерывная функция $f(x)$, у которой $\sigma(f)$ расходится на множестве мощности континуума, но частные суммы ряда все же ограничены? Положительный ответ на этот вопрос дается в работе Тандори *) (Tandori [14]). И снова элементом построения служат полиномы Фейера (см. § 43 главы I).

Рассмотрим последовательность точек x_k , которые мы выберем позже, и пусть

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q(x - x_k, n_k),$$

где, как и в примере § 45 главы I,

$$n_k = a^{k^2}.$$

*) Тандори отмечает, что Зигмунд (Zygmund [15]) уже строил пример ограниченной функции с рядом Фурье, расходящимся на множестве мощности континуума и имеющим ограниченные частные суммы.

Здесь, как и в указанном примере, имеем очевидно

$$|S_n(F, x)| \leq B.$$

Так как, повторяя рассуждение, которое проводилось в § 45 главы I, мы видим, что

$$S_{\nu_m}(F, x) - S_{\mu_m}(F, x) = \frac{1}{m^2} P(x - x_m, n_m)$$

и

$$\frac{1}{m^2} P(0, n_m) > \ln a,$$

то можно окружить точку x_m столь малым интервалом I_m , внутри которого в силу непрерывности полинома $P(x, n_m)$ будем иметь

$$S_{\nu_m}(F, x) - S_{\mu_m}(F, x) > \frac{1}{2} \ln a, \quad x \in I_m. \quad (22.1)$$

Выберем теперь точки x_m следующим образом: берем x_1, x_2 и x_3 так, чтобы $I_2 \subset I_1$, $I_3 \subset I_1$, а интервалы I_2 и I_3 не перекрывались; далее x_4, x_5, x_6 и x_7 так, чтобы $I_4 \subset I_2$, $I_5 \subset I_2$ и I_3 с I_5 не перекрывались, также I_6 и I_7 не перекрываются и $I_6 \subset I_3$, $I_7 \subset I_3$ и т. д. Всего этого можно добиться, если брать все I_m достаточно малыми.

Ясно, что, продолжая этот дихотомический процесс, мы получим совершенное множество P , каждая точка которого содержится в бесконечном множестве интервалов типа I_m . Поскольку в каждой такой точке справедливо неравенство (22.1) для бесконечного множества значений m , то в такой точке ряд Фурье от $F(x)$ расходится, и доказательство теоремы закончено.

Можно усилить теорему, построив точки расходимости так, чтобы их множество было мощности континуума во всяком интервале. Для этого последовательность $\{n_k\}$ разбиваем на счетное множество последовательностей $\{n_{i_k}\}$ ($i = 1, 2, \dots$). Затем перенумеруем все двоичные интервалы

$$\left(\frac{2\pi k}{2^n}, \frac{2\pi(k+1)}{2^n} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

в виде одной последовательности $J_1, J_2, \dots, J_l, \dots$. Для всякого l построим на J_l совершенное множество P_l при помощи последовательности $\{n_{i_k}\}$.

Ясно, что $E = \sum_{l=1}^{\infty} P_l$ имеет мощность континуума в любом интервале на $[0, 2\pi]$, и при этом ряд Фурье расходится в каждой точке множества E .

§ 23. Расходимость для ряда от $f^2(x)$

Обозначим через S класс непрерывных функций, у которых ряд Фурье всюду сходится. Что можно сказать об операциях, не выводящих из этого класса?

Оказывается, здесь, кроме совершенно тривиального факта, что операция суммы или разности не выводит из класса S , ничего положительного сказать нельзя. Уже операция умножения выводит нас из этого класса. Более того, операция умножения выводит из класса S даже тогда, когда у множителей ряды Фурье сходятся равномерно.

Дадим, следуя Салему (Salem^[7]), пример непрерывной функции $f(x)$, у которой ряд Фурье сходится равномерно, тогда как ряд Фурье от $f^2(x)$ расходится на множестве мощности континуума.

Пусть функция $\omega(x)$ определена на $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ и обладает свойствами

а) она непрерывна, возрастает, нечетная,

б) $\frac{\omega(t)}{t}$ несуммируема на $(0, \pi)$ и убывает.

Пусть $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ — множество всех чисел вида $r = 2\pi \frac{\alpha}{\beta}$, где дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ правильная, несократимая, $\alpha \neq 0$ и β — нечетное. Ясно, что это множество всюду плотно на $(0, 2\pi)$.

Полагаем

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \omega(x - r_k) \quad \text{на} \quad [0, 2\pi],$$

где ряд $\sum \gamma_k < +\infty$ и все $\gamma_k > 0$. Ясно, что $\eta(x)$ непрерывна и возрастает на $[0, 2\pi]$.

Пусть

$$\xi(x) = \eta(x) - \eta(0) - \frac{\eta(2\pi) - \eta(0)}{2\pi} x \quad \text{на} \quad [0, 2\pi]. \quad (23.1)$$

Тогда $\xi(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$ и $\xi(2\pi) = \xi(0) = 0$. Если мы потребуем, чтобы $\xi(x + 2\pi) = \xi(x)$, то она будет всюду непрерывна и с ограниченным изменением. Поэтому ее ряд Фурье равномерно сходится, а также и ряд Фурье от $\xi^2(x)$, так как она тоже непрерывна и с ограниченным изменением.

Пусть, далее,

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \sin m_p x, \quad (23.2)$$

где $c_p > 0$ и $\sum c_p < +\infty$, а числа m_p — целые; мы подберем их позже.

Ясно, что ряд Фурье для $g(x)$ сходится абсолютно, поэтому и ряд Фурье для $g^2(x)$ обладает тем же свойством, а, стало быть, ряд для $g^2(x)$ сходится и равномерно.

Мы теперь положим

$$f(x) = \xi(x) + g(x)$$

и докажем, что ряд Фурье для $\xi(x)g(x)$ расходится во всех точках r_k ; тогда из

$$f^2(x) = \xi^2(x) + 2\xi(x)g(x) + g^2(x)$$

будет следовать, что и ряд Фурье для $f^2(x)$ расходится во всех этих точках, поскольку ряды для $\xi^2(x)$ и $g^2(x)$ сходятся равномерно. Если мы, кроме того, обнаружим, что частные суммы ряда Фурье для $\xi(x)g(x)$ неограничены во всех точках r_k , то это же будет верно и для ряда от $f^2(x)$, а тогда он будет расходиться на множестве мощности континуума, поскольку множество $\{r_k\}$ всюду плотно (см. следствие к теореме § 19).

Итак, переходим к изучению ряда Фурье для

$$\Phi(x) = \xi(x)g(x).$$

Обозначая через $S_n(F, x)$ и $\bar{S}_n(F, x)$ частные суммы ряда Фурье от F и сопряженного к нему ряда, имеем в точке r_k

$$S_n(\Phi, r_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [\xi(r_k + t)g(r_k + t) + \xi(r_k - t)g(r_k - t)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1), \quad (23.3)$$

где δ можно взять как угодно малым.

В частности, нам удобно выбрать δ так, чтобы

$$\delta < \min(r_k, 2\pi - r_k).$$

Тогда $r_k - t$ и $r_k + t$ при $0 < t < \delta$ не выходят оба из $(0, 2\pi)$.

Так как ряд (23.2) сходится равномерно, то можно, подставив его вместо $g(x)$ в формулу (23.3), произвести интегрирование почленно, а это дает

$$\begin{aligned} \pi S_n(\Phi, r_k) &= \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) \sin m_p(r_k+t) + \xi(r_k-t) \sin m_p(r_k-t)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1). \end{aligned}$$

Раскрывая синус суммы и разности, найдем

$$\begin{aligned} \pi S_n(\Phi, r_k) &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p \sin m_p r_k \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) + \xi(r_k-t)] \frac{\sin nt \cos m_p t}{t} dt + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} c_p \cos m_p r_k \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t)] \frac{\sin nt \sin m_p t}{t} dt + o(1). \end{aligned} \quad (23.4)$$

Так как

$$\cos m_p t \sin nt = \frac{1}{2} [\sin(n + m_p)t + \sin(n - m_p)t],$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) + \xi(r_k-t)] \frac{\cos m_p t \sin nt}{t} dt &= \\ &= \frac{1}{2} S_{n+m_p}(\xi, r_k) \pm \frac{1}{2} S_{|n-m_p|}(\xi, r_k) + o(1). \end{aligned}$$

Но $\xi(t)$ — функция с ограниченным изменением, поэтому частные суммы ее ряда Фурье ограничены в совокупности и, значит, первое слагаемое в правой части формулы (23.4) остается ограниченным при $n \rightarrow \infty$.

Положим теперь $n = m_q$; будем иметь

$$\begin{aligned} \pi S_{m_q}(\Phi, r_k) &= c_q \cos m_q r_k \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t)] \frac{\sin^2 m_q t}{t} dt + \\ &+ \sum'_{p \neq q} c_p \cos m_p r_k \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t)] \frac{\sin m_p t \sin m_q t}{t} dt + O(1). \end{aligned} \quad (23.5)$$

Но

$$\sin m_p t \sin m_q t = [1 - \cos(m_p + m_q)t] - [1 - \cos(m_p - m_q)t],$$

а потому

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t)] \frac{\sin m_p t \sin m_q t}{t} dt &= \\ &= \frac{1}{2} \bar{S}_{m_p+m_q}(\xi, r_k) - \frac{1}{2} \bar{S}_{|m_p-m_q|}(\xi, r_k) + O(1), \end{aligned}$$

так как (см. (32.14) главы I) имеем для любой ограниченной $f(x)$

$$\bar{S}_n(f, x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1 - \cos nt}{t} dt + O(1),$$

где $\delta > 0$ — любое. Но $\xi(t)$ — функция с ограниченным изменением; значит, ее коэффициенты Фурье имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а потому

$$|\bar{S}_{m_p+m_q}(\xi, r_k) - \bar{S}_{|m_p-m_q|}(\xi, r_k)| \leq C \sum_{|m_p-m_q|}^{m_p+m_q} \frac{1}{n} \leq C \ln \frac{m_p+m_q}{|m_p-m_q|}, \quad (23.6)$$

где C — постоянное.

До сих пор мы не налагали на целые числа m_p никаких ограничений. Теперь предположим, что они образуют лакунарную последовательность. Тогда выражение в правой части формулы (23.6) остается ограниченным. Действительно, пусть для определенности $p < q$, тогда $m_p < m_q$, и если $\frac{m_{k+1}}{m_k} > \lambda$ ($k = 1, 2, \dots$), то

$$\frac{m_p+m_q}{m_q-m_p} = \frac{1+\frac{m_p}{m_q}}{1-\frac{m_p}{m_q}} < \frac{2}{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Следовательно, ряд, стоящий в правой части формулы (23.5), имеет сумму ограниченную с ростом m_q , т. е.

$$\pi S_{m_q}(\Phi, r_k) = c_q \cos m_q r_k \int_0^\delta [\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t)] \frac{\sin^2 m_q t}{t} dt + O(1).$$

Но так как δ было выбрано таким, что r_k+t и r_k-t не выходят за $[0, 2\pi]$, то по формуле (23.1)

$$\xi(r_k+t) - \xi(r_k-t) = \eta(r_k+t) - \eta(r_k-t) - \frac{\eta(2\pi) - \eta(0)}{\pi} t,$$

а потому

$$\pi S_{m_q}(\Phi, r_k) = c_q \cos m_q r_k \int_0^\delta [\eta(r_k+t) - \eta(r_k-t)] \frac{\sin^2 m_q t}{t} dt + O(1).$$

Но из определения $\eta(x)$ вытекает, что выражение в скобках в последнем интеграле положительно и больше, чем

$$\gamma_k [\omega(t) - \omega(-t)] = 2\gamma_k \omega(t),$$

поэтому

$$|\pi S_{m_q}(\Phi, r_k)| > 2\gamma_k |\cos m_q r_k| c_q \int_0^\delta \frac{\omega(t) \sin^2 m_q t}{t} dt + O(1). \quad (23.7)$$

Если мы интеграл в формуле (23.7) заменим на

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t} \sin^2 m_q t dt, \quad (23.8)$$

то так как $\frac{\omega(t)}{t}$ суммируемо на (δ, π) , мы изменяем интеграл на величину порядка $O(1)$, а потому

$$|\pi S_{m_q}(\Phi, r_k)| > 2\gamma_k |\cos m_q r_k| c_q \int_0^\pi \frac{\omega(t) \sin^2 m_q t}{t} dt + O(1), \quad (23.9)$$

где член $O(1)$ зависит от r_k , но не от m_q .

В силу несуммируемости $\frac{\omega(t)}{t}$ интеграл (23.8) стремится к ∞ при $q \rightarrow \infty$ (здесь надо провести рассуждение такого же типа, как в лемме 1 § 4).

Лакунарную последовательность $\{m_q\}$ можно выбрать так быстро стремящейся к бесконечности, как нам угодно, и благодаря этому добиться чтобы

$$c_q \int_0^{\pi} \frac{\omega(t)}{t} \sin^2 m_q t dt \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad q \rightarrow \infty.$$

Тогда и левая часть неравенства (23.9) будет стремиться к бесконечности, если только $\cos m_q r_k$ не стремится к нулю. Однако, благодаря нашему выбору r_k этого не может случиться, так как

$$r_k = 2\pi \frac{\alpha}{\beta},$$

где β нечетное, а потому для любого целого l имеем

$$\left| (2l+1) \frac{\pi}{2} - m_q r_k \right| = \left| (2l+1) \frac{\pi}{2} - m_q 2\pi \frac{\alpha}{\beta} \right| = \pi \left| \frac{(2l+1)\beta - 4\alpha m_q}{2\beta} \right| \geq \frac{\pi}{2\beta}$$

(потому что из нечетного вычитается четное, т. е. разность по модулю не меньше единицы). Отсюда

$$|\cos m_q r_k| \geq \sin \frac{\pi}{2\beta} > \frac{1}{\beta}.$$

Итак,

$$S_{m_q}(\Phi, r_k) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad q \rightarrow \infty,$$

т. е. частные суммы ряда Фурье для $\Phi(x)$ не ограничены в точке r_k , и это справедливо для всех r_k . Мы уже видели, что этого достаточно для того, чтобы теорема была доказана.

§ 24. Подпоследовательности частных сумм рядов Фурье от непрерывных функций

Д. Е. Меньшовым было отмечено следующее обстоятельство. Все авторы которые строили примеры непрерывных функций с расходящимися где-либо рядами Фурье, обычно доказывали самую непрерывность этих функций, опираясь на то, что их ряды Фурье имели равномерно сходящуюся подпоследовательность частных сумм.

Поэтому Д. Е. Меньшов поставил вопрос: нельзя ли для любой непрерывной функции найти в ее ряде Фурье равномерно сходящуюся подпоследовательность частных сумм? Однако он сам же дал отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, он показал, что *существуют непрерывные функции, у которых в ряде Фурье любая подпоследовательность частных сумм расходится хотя бы в одной точке.*

За недостатком места и ввиду сложности доказательства мы отсылаем читателя к работе Д. Е. Меньшова [6].

Тем не менее можно любую непрерывную функцию разложить на сумму двух непрерывных, для каждой из которых соответствующий ей ряд Фурье содержит подпоследовательность частных сумм, сходящуюся равномерно.

Этот результат, полученный Д. Е. Меньшовым в той же работе, напротив, очень легко доказывается, и мы дадим здесь его доказательство.

Пусть

$$\varepsilon_1 = 1, \quad n_1 = 1, \quad T_1(x) \equiv 1.$$

Построим рекуррентным способом последовательности положительных чисел $\varepsilon_j \rightarrow 0$, целых n_j монотонно возрастающих и тригонометрических полиномов

$T_j(x)$ следующим образом: если $\varepsilon_s, n_s, T_s(x)$ уже определены для $s = 1, 2, \dots, j-1$, то выбираем n_j так, чтобы

$$\begin{aligned} n_j &> n_s & (1 \leq s \leq j-1), \\ n_j &> v_s & (1 \leq s \leq j-1), \end{aligned}$$

где v_s — порядок полинома $T_s(x)$.

Положим

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2^j n_j}$$

и выберем по теореме Вейерштрасса тригонометрический полином $T_j(x)$ так, чтобы

$$|f(x) - T_j(x)| < \varepsilon_j \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (24.1)$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция.

Ясно, что числа $\{n_j\}$ монотонно возрастают и что $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Ясно также, что

$$f(x) = T_1(x) + [T_2(x) - T_1(x)] + \dots + [T_j(x) - T_{j-1}(x)] + \dots,$$

где ряд сходится равномерно потому, что выполнено (24.1).

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= T_1(x) + [T_3(x) - T_2(x)] + \dots + [T_{2j+1}(x) - T_{2j}(x)] + \dots, \\ f_2(x) &= [T_2(x) - T_1(x)] + \dots + [T_{2j}(x) - T_{2j-1}(x)] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (24.2)$$

Так как

$$\begin{aligned} |T_l(x) - T_{l-1}(x)| &\leq |T_l(x) - f(x)| + |f(x) - T_{l-1}(x)| < \\ &< \varepsilon_l + \varepsilon_{l-1} < 2\varepsilon_{l-1} = \frac{1}{2^{l-2} n_{l-1}}, \end{aligned} \quad (24.3)$$

то оба ряда (24.2), сходятся равномерно, а потому $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны. Ясно также, что

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

в силу самого построения этих функций.

Положим

$$m'_k = n_{2k}, \quad m''_k = n_{2k+1}$$

и докажем, что

$$\begin{aligned} S_{m'_k}^{\prime}(f_1, x) &\text{ сходится равномерно к } f_1(x), \\ S_{m''_k}^{\prime\prime}(f_2, x) &\text{ сходится равномерно к } f_2(x). \end{aligned}$$

В силу условий, наложенных на числа n_j , имеем

$$\begin{aligned} m'_k &> v_s, & 1 \leq s \leq 2k-1, \\ m''_k &> v_s, & 1 \leq s \leq 2k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} S_{m'_k}^{\prime}(T_s, x) &= T_s(x), & 1 \leq s \leq 2k-1, \\ S_{m''_k}^{\prime\prime}(T_s, x) &= T_s(x), & 1 \leq s \leq 2k. \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

Полагаем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)}(x) &= T_1(x) + \sum_{j=1}^{k-1} [T_{2j+1}(x) - T_{2j}(x)], & R_k^{(1)}(x) &= \sum_{j=k}^{\infty} [T_{2j+1}(x) - T_{2j}(x)], \\ \varphi_k^{(2)}(x) &= \sum_{j=1}^k [T_{2j}(x) - T_{2j-1}(x)], & R_k^{(2)}(x) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} [T_{2j}(x) - T_{2j-1}(x)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$f_1(x) = \varphi_k^{(1)}(x) + R_k^{(1)}(x),$$

$$f_2(x) = \varphi_k^{(2)}(x) + R_k^{(2)}(x)$$

и, значит,

$$\begin{cases} S_{m'_k}(f_1) = S_{m'_k}[\varphi_k^{(1)}] + S_{m'_k}[R_k^{(1)}], \\ S_{m''_k}(f_2) = S_{m''_k}[\varphi_k^{(2)}] + S_{m''_k}[R_k^{(2)}]. \end{cases} \quad (24.5)$$

Но в силу (24.4) имеем

$$\begin{cases} S_{m'_k}[\varphi_k^{(1)}] = \varphi_k^{(1)}(x), \\ S_{m''_k}[\varphi_k^{(2)}] = \varphi_k^{(2)}(x). \end{cases} \quad (24.6)$$

Кроме того,

$$S_{m'_k}(R_k^{(1)}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_k^{(1)}(x+t) D_{m'_k}(t) dt,$$

$$S_{m''_k}(R_k^{(2)}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_k^{(2)}(x+t) D_{m''_k}(t) dt,$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле.

Так как в силу (24.3)

$$|R_k^{(1)}(t)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |T_{2j+1} - T_{2j}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2}{2^{2j} n_{2j}} < \frac{1}{n_{2k}} \frac{2^{\frac{1}{2k-1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \frac{1}{n_{2k} 2^{2k}},$$

$$|D_n(t)| \leq n + \frac{1}{2} < 2n,$$

то

$$|S_{m'_k}(R_k^{(1)})| < \frac{1}{\pi} \frac{8}{3} \frac{2 m'_k}{n_{2k} 2^{2k}} 2\pi = \frac{C}{2^{2k}},$$

так как $m'_k = n_{2k}$ (C — постоянное).

Значит, $S_{m'_k}(R_k^{(1)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и притом равномерно, а потому из (24.5) и (24.6) заключаем, что

$$S_{m'_k}(f_1) = \varphi_k^{(1)}(x) + o(1) \rightarrow f_1(x)$$

равномерно, и совершенно также доказывается, что

$$S_{m''_k}(f_2) \rightarrow f_2(x)$$

равномерно.

Доказательство закончено.

§ 25. Разбиение на сумму двух рядов, сходящихся на множествах положительной меры

В предыдущем параграфе у нас уже возникал вопрос о разложении непрерывной функции на сумму двух, обладающих «более хорошими» рядами Фурье (именно такими, у которых существует равномерно сходящаяся подпоследовательность частных сумм).

Здесь мы укажем другую теорему такого рода, а именно:

Т е о р е м а. *Всякую непрерывную на $[0, 2\pi]$ функцию можно представить в виде суммы двух функций, у каждой из которых ряд Фурье сходится на множестве, мера которого положительна на любом интервале $[a, b] \subset [0, 2\pi]$.*

Этот факт непосредственно вытекает из следующей теоремы (см. Н. К. Бари^[2]):

Всякую функцию, непрерывную на $[a, b]$, можно разбить на сумму двух функций, каждая из которых имеет производную на множестве E , мера которого положительна в любом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем на $[a, b]$.

Если вспомнить, что в точке, где функция имеет производную, ее ряд Фурье сходится (см. глава I, § 38), то и получается нужное утверждение.

Сделаем еще одно замечание. В той же работе Н. К. Бари доказана следующая теорема.

Всякая непрерывная функция $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)] + f_3[\varphi_3(x)], \quad (25.1)$$

где все функции f_i и φ_i ($i = 1, 2, 3$) абсолютно непрерывны (число слагаемых в формуле (25.1) не может быть сведено к двум в общем случае).

Таким образом, если бы удалось доказать, что всякая функция вида $f[\varphi(x)]$, где f и φ — абсолютно непрерывны, имеет ряд Фурье, сходящийся почти всюду, то это было бы верно и для любой непрерывной $F(x)$. Однако вопрос о справедливости подобной гипотезы остается открытым.

Изучение функций, являющихся суперпозициями абсолютно непрерывных функций, может быть сведено к тому случаю, когда наружная функция f монотонна, а внутренняя $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, так как любая суперпозиция двух абсолютно непрерывных функций может быть представлена именно в таком виде (см., например, ту же работу Н. К. Бари^[2] или работу Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова^[1]). Значит, у $\varphi(x)$ ряд Фурье не только сходится равномерно, но даже и абсолютно (см. глава IX, § 2). Однако из этого мы пока ничего не умеем вывести относительно $f[\varphi(x)]$, зная только, что f монотонна и абсолютно непрерывна.

ГЛАВА V

СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ НА МНОЖЕСТВЕ

§ 1. Введение

Мы посвящаем эту главу изучению вопроса о сходимости ряда Фурье на некотором множестве, лежащем на $[0, 2\pi]$. Начнем с рассмотрения условий, при которых имеет место сходимость почти всюду.

Условимся называть *признаками типа Вейля* следующие теоремы: если $W(n)$ монотонно не убывает и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) W(n) < +\infty, \quad (1.1)$$

то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.2)$$

сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Название это было предложено Н. Н. Лузиным потому, что Вейль первый обратил внимание на признаки такого рода. Было доказано Фату (Fatou^[1]), что за $W(n)$ можно принять n ; потом Вейль (Weyl^[1]) показал, что

можно взять $W(n) = \sqrt[3]{n}$, Гобсон (Hobson^[1]) получил $W(n) = n^\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$; Планшерель (Plancherel^[1]) обнаружил, что можно взять $W(n) = \ln^3 n$ и Харди (Hardy^[1]) снизил этот множитель до $\ln^2 n$.

Так обстояло дело в то время, когда Н. Н. Лузин писал свою диссертацию^[м.9]. Он отчетливо подчеркнул, что чем медленнее возрастает функция Вейля, тем шире класс рядов, сходящихся почти всюду в силу этого признака и, следовательно, тем более сильным является этот признак сходимости. А поэтому он настаивал на важности снижения множителя Харди. Он высказал гипотезу*), что ряд Фурье от любой функции с интегрируемым квадратом сходится, и, если бы это оказалось верным, то всякая возрастающая функция была бы функцией Вейля. Гипотеза Н. Н. Лузина до сих пор не подтвердилась, но и не опровергнута, хотя прошло более 40 лет с тех пор, как она была высказана. Что касается множителя Харди, то он был понижен в 1925 г. до $\ln n$ в работе Колмогорова и Селиверстова^[1] и независимо от них в работе А. И. Плесснера (Plessner^[1]). Ниже $\ln n$ множитель Вейля до сих пор спустить не удалось, но и невозможность такого снижения не доказана.

Настоящую главу мы начинаем с доказательства теоремы Колмогорова—Селиверстова и Плесснера (§ 2).

*) В главе VIII мы будем говорить о том, что именно привело Н. Н. Лузина к такой гипотезе.

Как показал Плесснер, условие $\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n$ можно заменить эквивалентным ему условием

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty,$$

где $f(x)$ — функция, для которой $\sigma(f)$ есть ряд Фурье (см. § 5). Этот признак сходимости для рядов Фурье от функций из L^2 перенесен Марцинкевичем на случай функций из L^p ($1 \leq p \leq 2$) (см. § 8). В § 9 мы указываем другие формы признака сходимости для рядов Фурье из L^2 и переносим их затем (§ 10) на случай, когда речь идет не о сходимости почти всюду на $[0, 2\pi]$, а лишь почти всюду на некотором отрезке длины, меньшей чем 2π .

Возвращаясь к вопросу о поведении рядов Фурье для функций из L^2 на $[0, 2\pi]$, мы изучаем вопрос о связи между ростом множителя Вейля и существованием некоторой почти всюду сходящейся подпоследовательности частных сумм ряда Фурье (§ 11).

В § 12 к той же проблеме сходимости для функций из L^2 мы подходим с другой стороны, а именно изучаем те множества меры нуль, на которых все же может расходиться ряд $\sigma(f)$, если коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют условию типа (1.1). «Густота» или «разреженность» этого множества меры нуль находится в зависимости от роста функции Вейля $W(n)$.

В §§ 13—16, отказываясь от гипотезы, что $f(x) \in L^2$ или хотя бы от $f(x) \in L^p$ при $p > 1$, мы указываем некоторые признаки, когда $\sigma(f)$ сходится почти всюду или на множестве меры больше нуля. В § 17 доказывается, что существуют ряды Фурье, расходящиеся почти всюду, а из результата § 19 следует, что это возможно даже и тогда, когда ряд, сопряженный к ряду Фурье, сам оказывается рядом Фурье. В § 20 дается построение ряда Фурье, расходящегося уже в каждой точке. Построение такого примера сложнее, чем примеров, где расходимость имеет место почти всюду (и поэтому мы изложили их построение независимо), однако без него нельзя обойтись, если желать построить пример ряда Фурье, сходящегося на заданном множестве и расходящегося вне его (см. об этом в § 22).

В § 21 мы решаем вопрос, в каком смысле можно и в каком нельзя говорить о переносе принципа локализации со случая отрезка на случай множества положительной меры.

Наконец, заканчивая главу (§ 23), мы приводим некоторые результаты, показывающие, насколько в вопросах сходимости важен порядок, в котором расположены члены ряда Фурье.

§ 2. Теорема Колмогорова—Селиверстова и Плесснера

Изучение условий, при которых ряд Фурье сходится почти всюду, мы начнем со следующей важной теоремы, найденной одновременно и независимо А. И. Плесснером (Plessner^[1]), с одной стороны, А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым^[1], с другой стороны.

Т е о р е м а. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty,$$

то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

сходится почти всюду.

Приводимое ниже доказательство принадлежит А. И. Плесснеру. Начнем с установления следующей леммы:

Л е м м а 1. Пусть последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ состоит из суммируемых функций, определенных на множестве E , $mE > 0$. Пусть для $n \geq m$

$$\Phi_{mn} = \sup(f_m - f_m, f_{m+1} - f_m, \dots, f_n - f_m),$$

$$\varphi_{mn} = \inf(f_m - f_m, f_{m+1} - f_m, \dots, f_n - f_m)$$

и

$$J_{mn} = \int_E \Phi_{mn}(x) dx, \quad j_{mn} = \int_E \varphi_{mn}(x) dx.$$

Положим

$$J_m = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{mn}, \quad j_m = \lim_{n \rightarrow \infty} j_{mn}$$

(эти пределы существуют, потому, что Φ_{mn} может только расти с ростом n , а φ_{mn} только убывать, значит, это же верно для J_{mn} и j_{mn}).

Если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} j_m = 0, \quad (2.2)$$

то последовательность $f_n(x)$ сходится к конечному пределу почти всюду на E .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\Phi_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{mn}(x).$$

Этот предел существует, так как $\Phi_{mn}(x)$ может лишь расти с ростом n ; ясно, что

$$J_m = \int_E \Phi_m(x) dx.$$

Выберем числа m_k так, чтобы

$$0 \leq J_{m_k} < \frac{1}{2^k},$$

что возможно в силу (2.2). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{m_k} < +\infty,$$

а потому, так как $\Phi_{m_k}(x) \geq 0$ для всех x , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{m_k}(x) \quad (2.3)$$

сходится почти всюду на E (см. Вводный материал, § 14).

Пусть x_0 — точка множества \mathcal{E} , $m\mathcal{E} = mE$, где ряд (2.3) сходится. Тогда $\Phi_{m_k}(x_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Значит, для любого ε можно выбрать k так, чтобы

$$0 \leq \Phi_{m_k}(x_0) < \varepsilon.$$

Но так как $\Phi_{mn}(x) \leq \Phi_m(x)$ при любом $n > m$, то

$$0 \leq \Phi_{m_k n}(x_0) < \varepsilon, \quad n > m_k,$$

т. е.

$$f_n(x_0) - f_{m_k}(x_0) < \varepsilon, \quad n > m_k.$$

Совершенно аналогично, рассматривая $\varphi_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{mn}(x)$, получаем

$$-\varepsilon < f_n(x_0) - f_{m_k}(x_0)$$

для любого $x_0 \in \mathcal{E}_1$, где \mathcal{E}_1 — некоторое множество $m\mathcal{E}_1 = mE$. Следовательно, если $x_0 \in \mathcal{E}_1$, то

$$|f_n(x_0) - f_{m_k}(x_0)| < \varepsilon,$$

если только m_k достаточно велико и $n > m_k$, а это и значит, что последовательность сходится при $x = x_0$. Но x_0 — любая точка $\mathcal{E}\mathcal{E}_1$, значит почти всюду на E последовательность сходится. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы Колмогорова—Селиверстова—Плесснера.

Без ограничения общности можно предполагать, что

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0.$$

Мы будем пользоваться леммой 1, где роль множества E будет играть отрезок $[0, 2\pi]$, а роль функций $f_n(x)$ — частные суммы $S_n(x)$ ряда (2.1).

Если мы докажем, что

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq J_{mn} = \int_0^{2\pi} \Phi_{mn}(x) dx \leq K \sqrt{\sum_{k=m+1}^n (a_k^2 + b_k^2) \ln k}, \\ 0 &\geq j_{mn} = \int_0^{2\pi} \varphi_{mn}(x) dx \geq -K \sqrt{\sum_{k=m+1}^n (a_k^2 + b_k^2) \ln k}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где K — абсолютная константа, то сходимость ряда (2.1) почти всюду будет установлена. Мы ограничимся доказательством первого из неравенств (2.4), второе совершенно аналогично.

Далее, так как

$$\Phi_{mn} = \max(S_m - S_m, S_{m+1} - S_m, \dots, S_n - S_m)$$

совпадает с

$$\Phi_{1n} = \max(0, S_2 - S_1, \dots, S_n - S_1) = \max(0, S_2, S_3, \dots, S_n), \quad (2.5)$$

если предположить, что $a_0 = a_1 = b_1 = \dots = a_m = b_m = 0$, то достаточно доказать, что

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}(x) dx \leq K \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \ln k}, \quad (2.6)$$

чтобы (2.4) было справедливо при любом m . Но если всмотреться в формулу (2.5), определяющую $\Phi_{1n}(x)$, то станет ясным, что при всяком x величина $\Phi_{1n}(x)$ совпадает с некоторой $S_p(x)$, где $p = 1, 2, \dots, n$. Иначе говоря, можно написать

$$\Phi_{1n}(x) = \sum_{k=2}^{p(x)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где число членов суммы при разных x различно (поэтому мы обозначили его через $p(x)$), но $p(x)$ может принимать лишь значения $2, 3, \dots, n$.

Итак, наша теорема будет доказана, если будет доказано такое предложение:

Л е м м а 2. Если $p(x)$ есть целочисленная функция, принимающая для каждого x лишь одно из значений $1, 2, \dots, n$, то *)

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=2}^{p(x)} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx \leq K \sqrt{\sum_{k=2}^n (a_k^2 + b_k^2) \ln k}. \quad (2.7)$$

*) Для случая, когда $p(x) = 1$, надо считать, что

$$\sum_{k=2}^{p(x)} a_k \cos kx + b_k \sin kx = 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости неравенства (2.7), рассмотрим тригонометрический полином

$$F_n(x) = \sum_{k=2}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sqrt{\ln k}. \quad (2.8)$$

Так как

$$a_k \sqrt{\ln k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) \cos kt \, dt, \quad b_k \sqrt{\ln k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) \sin kt \, dt,$$

то

$$\sum_{k=2}^{p(x)} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dt,$$

а потому выражение I из левой части неравенства (2.7), которое мы должны доказать, имеет вид

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dt \right\} dx,$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} F_n(t) \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dx \right\} dt.$$

Применяя неравенство Буняковского, находим

$$I^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} F_n^2(t) \, dt \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dx \right]^2 dt$$

и так как, в силу (2.8)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n^2(t) \, dt = \sum_{k=2}^n (a_k^2 + b_k^2) \ln k,$$

то неравенство (2.7) будет доказано, если мы убедимся, что

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dx \right]^2 dt < C, \quad (2.9)$$

где C — абсолютная константа.

Интеграл J в левой части неравенства (2.9) можно переписать так:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dx \right] \left[\int_0^{2\pi} \sum_{m=2}^{p(y)} \frac{\cos m(t-y)}{\sqrt{\ln m}} \, dy \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\ln k}} \, dx \right] \left[\int_0^{2\pi} \sum_{m=2}^{p(y)} \frac{\cos m(t-y)}{\sqrt{\ln m}} \, dy \right] \right\} dx \, dy. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \cos k(t-x) \cos m(t-y) dt = 0,$$

если $m \neq k$ и

$$\int_0^{2\pi} \cos k(t-x) \cos k(t-y) dt = \pi \cos k(x-y),$$

то, обозначая через $p(x, y)$ наименьшее из чисел $p(x)$ и $p(y)$, мы имеем

$$J = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{p(x,y)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} dx dy.$$

Обозначим через E множество тех точек квадрата $[0 \leq x \leq 2\pi]$, $[0 \leq y \leq 2\pi]$, где $p(x) \leq p(y)$, и через CE его дополнение. Тогда на E имеем $p(x, y) = p(x)$, и на CE имеем $p(x, y) = p(y)$ и

$$J = \pi \iint_E \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} dx dy + \pi \iint_{CE} \sum_{k=2}^{p(y)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} dx dy,$$

а потому

$$\begin{aligned} J &\leq \pi \iint_E \left| \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} \right| dx dy + \pi \iint_{CE} \left| \sum_{k=2}^{p(y)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} \right| dx dy \leq \\ &\leq \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=2}^{p(x)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} \right| dx dy + \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=2}^{p(y)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} \right| dx dy = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=2}^{p(y)} \frac{\cos k(x-y)}{\ln k} \right| dx dy, \end{aligned} \quad (2.10)$$

так как, меняя x и y ролями во второй строке (2.10), мы видим, что второй интеграл совпадает с первым. Так как $p(y)$ уже не зависит от x , то неравенство (2.10) повлечет за собой неравенство (2.9), если мы докажем, что при любом n имеем

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=2}^n \frac{\cos kx}{\ln k} \right| dx < M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где M — абсолютная константа. Но этот факт доказан в § 30 главы I (см. 30.21). Таким образом теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in L^2$, то

$$|S_n(x)| = o(\sqrt{\ln n}) \quad (2.11)$$

почти всюду.

Пусть $f(x) \in L^2$ и

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

По теореме Колмогорова—Селиверстова и Плесснера ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\sqrt{\ln n}} \quad (2.12)$$

должен сходиться почти всюду, так как для его коэффициентов

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{\ln n}}$$

выполнено условие $\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \ln n < +\infty$ в силу $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$.

Пусть x_0 — точка, где ряд (2.12) сходится. Полагая

$$u_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0, \quad l_n = \sqrt{\ln n} \quad (2.13)$$

и применяя теорему 4 из § 25 Добавлений, видим, что

$$S_n(x_0) = o(\sqrt{\ln n}).$$

Но так как ряд (2.12) сходится почти всюду, то для почти всех точек отрезка выполнено (2.11), и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Напомним, что в главе I, § 50 было доказано для любой суммируемой f

$$S_n(x) = o(\ln n).$$

Теперь мы видим, что если $f \in L^2$, то это условие усиливается: можно $\ln n$ заменить на $\sqrt{\ln n}$.

§ 3. Признак сходимости, выраженный через первые разности коэффициентов

Следующее простое замечание принадлежит Салему (Salem^[1]): если для тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots, \quad (3.1)$$

даже не являющегося рядом Фурье, имеем $a_n \rightarrow 0$, то к нему можно применить преобразование Абеля, что дает возможность утверждать для всех точек, кроме точек вида $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, одновременную сходимость этого ряда и ряда

$$(a_0 - a_1) \sin \frac{x}{2} + (a_1 - a_2) \sin 3 \frac{x}{2} + \dots + (a_n - a_{n+1}) \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \dots \quad (3.2)$$

Поэтому если ряд (3.1) сходится почти всюду, то и ряд (3.2) тоже, и наоборот.

Отсюда, в частности, в силу теоремы § 2 вытекает, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})^2 \ln n < +\infty,$$

то ряд (3.1) сходится почти всюду (это верно, даже если он не является рядом Фурье).

Такое же рассуждение справедливо для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (3.3)$$

т. е. если $b_n \rightarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})^2 \ln n < +\infty$, то ряд (3.3) сходится почти всюду.

Наконец, для сходимости почти всюду общего тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum \varrho_n \cos (nx - \alpha_n)$$

при $\varrho_n \rightarrow 0$ достаточно сходимости

$$\sum [(a_n - a_{n+1})^2 + (b_n - b_{n+1})^2] \ln n,$$

а это равносильно выполнению двух условий:

$$\left. \begin{aligned} \sum (\varrho_n - \varrho_{n+1})^2 \ln n &< +\infty, \\ \sum \varrho_n^2 (a_n - a_{n+1})^2 \ln n &< +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Это можно хотя и не точно, но наглядно выразить словами, что здесь при переходе от одного члена ряда к другому «мало» меняются и амплитуды ϱ_n и фазы α_n . Если M_n — точка плоскости с координатами (a_n, b_n) , то теорема Колмогорова—Селиверстова и Плесснера утверждает сходимость ряда почти всюду, если

$$\sum (\overline{OM_n})^2 \ln n < +\infty,$$

а высказанные Салемом условия (3.4) означают, что $\overline{OM_n} \rightarrow 0$ и

$$\sum (\overline{M_n M_{n+1}})^2 \ln n < +\infty.$$

Эти условия могут быть, в свою очередь, заменены другими, в которые входят вторые, третьи и т. д. разности коэффициентов. См. например, ту же работу Салема, а также Джваршейшвили^[1].

§ 4. Множители сходимости

Последовательность чисел $\{\mu_n\}$ назовем *множителями сходимости* для класса функций $\{f(x)\}$, если каждый раз, как $f(x)$ входит в рассматриваемый класс и

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4.1)$$

есть ее ряд Фурье, то ряд

$$\frac{a_0}{2} \mu_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \mu_n \quad (4.2)$$

сходится почти всюду.

Из теоремы Колмогорова—Селиверстова и Плесснера сразу следует, что для функций, входящих в класс L^2 , множителями сходимости являются числа

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(μ_0 и μ_1 могут быть любые).

Действительно,

$$\sum (a_n^2 \mu_n^2 + b_n^2 \mu_n^2) \ln n = \sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty,$$

если $f(x) \in L^2$ и достаточно применить теорему Колмогорова—Селиверстова и Плесснера, чтобы получить сходимость ряда (4.2) почти всюду.

Если $f(x) \in L$, то (см. глава I, § 51) в качестве множителей сходимости можно принять числа

$$\mu_n = \frac{1}{\ln n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

§ 5. Другие формы условия, входящего в теорему Колмогорова—Селиверстова и Плесснера

Следуя Плесснеру (Plessner^[1]), докажем, что если

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty, \quad (\text{A})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty, \quad (\text{B})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]^2}{t} dt dx < +\infty \quad (\text{C})$$

являются эквивалентными. После того как это будет установлено, можно утверждать, что

ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду, если $f(x)$ удовлетворяет условию (B), или условию (C).

Чтобы убедиться в эквивалентности соотношений (A), (B) и (C), положим

$$\psi(x, t) = f(x+t) - f(x-t); \quad \Psi(t) = \int_0^{2\pi} [\psi(x, t)]^2 dx,$$

$$\varphi(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x); \quad \Phi(t) = \int_0^{2\pi} [\varphi(x, t)]^2 dx.$$

Надо доказать, что если (A) выполнено, то интегралы

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Psi(t)}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)}{t} dt$$

конечны, и, обратно, если они конечны, то (A) имеет место.

Мы будем проводить доказательство для $\Psi(t)$; для $\Phi(t)$ оно совершенно аналогично.

Если разложить $\psi(x, t)$ в ряд Фурье по переменному x , то

$$\psi(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2(b_k \cos kx - a_k \sin kx) \sin kt.$$

Поэтому на основании равенства Парсеваля

$$\Psi(t) = \int_0^{2\pi} \psi^2(x, t) dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kt. \quad (5.1)$$

Положим

$$\Psi_n(t) = 4\pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kt.$$

Тогда ясно, что

$$\frac{\Psi_1(t)}{t} \leq \frac{\Psi_2(t)}{t} \leq \dots \leq \frac{\Psi_n(t)}{t} \leq \dots,$$

причем все эти функции неотрицательны, интегрируемы и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_n(t)}{t} = \frac{\Psi(t)}{t}.$$

Поэтому на основании известной теоремы об интегрировании возрастающих последовательностей неотрицательных функций мы заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Psi(t)}{t} dt \quad (5.2)$$

конечен в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\Psi_n(t)}{t} dt$$

конечен. Но так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Psi_n(t)}{t} dt = 4\pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 kt}{t} dt,$$

то существование интеграла (5.2) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 kt}{t} dt.$$

Но ясно, что $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 kt}{t} dt \sim \ln k$, а потому существование интеграла (5.2)

или, что то же, интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx$$

эквивалентно сходимости ряда (A), а это и требовалось доказать.

§ 6. Следствия теоремы Плесснера

а) Мы убедились, что для функций, удовлетворяющих условию (A), интегралы (B) и (C) существуют. Но по теореме Фубини (см. Вводный материал, § 18) из существования этих двойных интегралов вытекает, что *интегралы*

$$\int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt \quad (\alpha)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]^2}{t} dt \quad (\beta)$$

существуют для почти всех значений x [и суммируемы по x на $(0, 2\pi)$].

Факт существования интегралов (α) и (β) почти всюду вовсе не является тривиальным. В главе VIII, § 7 будет показано, что хотя

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

существует почти всюду не только для $f \in L^2$, но и для $f \in L$, однако

$$\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{t} dt$$

может быть равен $+\infty$ для всех x , даже для непрерывной $f(x)$ (см. ниже § 8); это же можно было бы показать для

$$\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt \quad \text{и для} \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt.$$

б) Отметим далее такое следствие из теоремы Плесснера:

Если

$$\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}\right), \quad (6.1)$$

то ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду.

Действительно, в этом случае

$$f(x+t) - f(x) = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{|t|}\right)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}\right)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$, т. е. (в обозначениях § 5)

$$\psi^2(x, t) = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{|t|}\right)^{1+2\varepsilon}}\right)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$, а значит

$$\int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t} dt < +\infty.$$

Можно было бы доказать то же самое, предполагая лишь

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}\right)$$

и рассуждая над $\varphi^2(x, t)$ вместо $\psi^2(x, t)$.

Теорему *) о сходимости почти всюду ряда $\sigma(f)$, если $f(x)$ удовлетворяет условию (6.1), мы доказали здесь лишь потому, что она мгновенно получается из теоремы Плесснера. Однако следует отметить, что позднее Марцинкевичем был получен гораздо более общий результат, а именно: если

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f(x+t) - f(x)| dt = O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{t}}\right) \quad (6.2)$$

для $x \in E$, то $\sigma(f)$ сходится почти всюду на E (см. ниже, § 15).

*) Она была доказана Плесснером.

Полезно здесь же отметить, что условия типа (6.1) или (6.2) налагают ограничения на поведение $f(x+t) - f(x)$ или равномерно на $[0, 2\pi]$, или на некотором множестве меры больше нуля и позволяют высказываться о поведении $\sigma(f)$ на отрезке или на множестве; это вполне аналогично тому, что признак Дини—Липшица

$$\omega(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right)$$

или более общий признак Салема—Стечкина (см. § 8 главы IV)

$$\omega_2(\delta, F) = o\left(\frac{\delta}{\ln \frac{1}{\delta}}\right), \quad \text{где} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

позволяют судить о поведении ряда на целом отрезке, или почти всюду на нем, но условие

$$|f(x+t) - f(x)| = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{t}}\right),$$

выполненное в индивидуальной точке, не гарантирует сходимости $\sigma(f)$ в этой точке (см. глава IV, § 4).

§ 7. Об эквивалентности некоторых условий, выражаемых через интегралы и через ряды

Мы видели в § 5, что существование интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty \quad (B)$$

и сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty, \quad \text{где} \quad \sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (A)$$

являются условиями эквивалентными. Оба эти условия достаточны для сходимости почти всюду ряда $\sigma(f)$.

Обобщая результат Плесснера об эквивалентности условий (A) и (B), Ульянов^[2] доказал, что если на функцию $\alpha(t)$ наложить некоторые ограничения, которые мы перечислим ниже, и положить

$$\omega(k) = \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi} \alpha(t) dt,$$

то условия

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt dx < +\infty \quad (7.1)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \omega(k) < +\infty \quad (7.2)$$

являются эквивалентными.

В качестве таких условий, налагаемых на $\alpha(t)$, можно принять:

- 1) $\alpha(t)$ неотрицательна и не возрастает на $[0, 2\pi]$,
- 2) $\int_0^{2\pi} \alpha(t) dt = +\infty$,
- 3) существует такая константа C , что для всех достаточно малых δ имеем

$$\frac{1}{\delta^2} \int_0^{\delta} t^2 \alpha(t) dt \leq C \int_{\delta}^{2\pi} \alpha(t) dt.$$

Последнее условие выглядит несколько искусственным (в противоположность первым двум); смысл его в том, что $\alpha(t)$ при $t \rightarrow 0$ возрастает не слишком быстро.

Докажем, что при выполнении требований 1), 2) и 3) условия (7.1) и (7.2) равносильны.

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kt.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx dt = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt.$$

Таким образом остается доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt \sim \omega(k) = \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) dt.$$

В силу условия 3) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) \sin^2 kt dt + \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) \sin^2 kt dt \leq \\ &\leq k^2 \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) t^2 dt + \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) dt \leq (4\pi^2 C + 1) \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) dt. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt &= \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\frac{2\pi}{k}n}^{\frac{2\pi}{k}(n+1)} \alpha(t) \sin^2 kt dt = \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha\left(t + \frac{2\pi}{k}n\right) \sin^2 k\left(t + \frac{2\pi}{k}n\right) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sin^2 kt \left[\sum_{n=0}^{k-1} \alpha\left(t + \frac{2\pi}{k}n\right) \right] dt. \end{aligned} \quad (7.3)$$

С другой стороны,

$$\int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \alpha(t) dt = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\frac{2\pi}{k}n}^{\frac{2\pi}{k}(n+1)} \alpha(t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sum_{n=1}^{k-1} \alpha\left(t + \frac{2\pi}{k}n\right) dt \leq \frac{2\pi}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \alpha\left(\frac{2\pi}{k}n\right) \quad (7.4)$$

в силу того, что $\alpha(t)$ не возрастает. Значит, для $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha\left(t + \frac{2\pi}{k} n\right) &\geq \sum_{n=0}^{k-1} \alpha\left(\frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k} n\right) = \sum_{n=0}^{k-1} \alpha\left[\frac{2\pi}{k}(n+1)\right] = \\ &= \sum_{n=1}^k \alpha\left(\frac{2\pi}{k} n\right) \geq \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi} \alpha(t) dt \end{aligned}$$

в силу (7.4). Поэтому из (7.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt &\geq \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sin^2 kt dt \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi} \alpha(t) dt = M \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi} \alpha(t) dt \\ \left(\text{где } M = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \sin^2 kt dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt \sim \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi} \alpha(t) dt,$$

и теорема доказана.

В частном случае $\alpha(t) = \frac{1}{t}$ все условия удовлетворены и мы возвращаемся к теореме Плесснера.

Смысл доказанной теоремы Ульянова в том, что если бы удалось усилить результат Колмогорова—Селиверстова и Плесснера, т. е. получить сходимость ряда Фурье из условия

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt dx < +\infty,$$

где $\alpha(t)$ при $t \rightarrow 0$ растет медленнее, чем $\frac{1}{t}$, то это означало бы, что ту же сходимость ряда Фурье можно вывести из условия

$$\sum (a_k^2 + b_k^2) \omega(k) < +\infty,$$

где уже $\omega(k)$ растет медленнее, чем $\ln k$.

Например, сходимость интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t \ln \frac{1}{t}} dt dx < +\infty$$

эквивалентна сходимости ряда

$$\sum (a_k^2 + b_k^2) \ln \ln k < +\infty.$$

Однако вопрос о том, достаточно ли подобное условие для сходимости почти всюду ряда Фурье, остается открытым.

В качестве приложения приведенного выше исследования эквивалентности сходимости рядов и интегралов докажем следующую теорему Ульянова [9, 12]:

Т е о р е м а. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{1+\varepsilon}}\right), \quad (7.5)$$

то ряд $\sigma(f)$ после любой перестановки его членов сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Орлич доказал*), что если a_k и b_k — коэффициенты Фурье для $f(x)$, то при любом $\varepsilon > 0$ из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln^{2+\varepsilon} n \quad (7.6)$$

следует, что $\sigma(f)$ сходится почти всюду при любой перестановке его членов. Поэтому нам достаточно доказать, что условие (7.5) влечет сходимость ряда (7.6). Но по предыдущей теореме Ульянова, полагая

$$\alpha(t) = \frac{\left(\ln \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}{t},$$

мы видим, что сходимость ряда (7.6) эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\ln \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx dt, \quad (7.7)$$

а так как из (7.5)

$$[f(x+t) - f(x-t)]^2 = O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{t}\right)^{2+2\varepsilon}}\right),$$

то сходимость интеграла (7.7) имеет место, и теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, ($\alpha > 0$), то ряд $\sigma(f)$ после любой перестановки его членов сходится почти всюду**).

Это сразу вытекает из только что доказанной теоремы.

З а м е ч а н и е. Мы знаем, что если

$$\omega(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right),$$

то ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно (признак Дини—Липшица).

В только что доказанной теореме Ульянова на функцию $f(x)$ накладывается немного более сильное ограничение, но зато сходимость почти всюду ряда $\sigma(f)$ имеет место и после любой перестановки его членов.

*) См. Качмаж и Штейнгауз^[М.7], стр. 193.

**) Однако он не должен сходиться абсолютно, если $\alpha \leq \frac{1}{2}$, как будет показано в § 4 главы IX. Поэтому множество меры нуль, где он может расходиться, зависит от сделанной перестановки членов.

§ 8. Признак сходимости почти всюду для функций из $L^p(1 \leq p \leq 2)$

Марцинкевич (Marcinkiewicz^[4]) получил одно интересное обобщение теоремы Плесснера, а именно он доказал теорему:

Теорема. Если $1 \leq p \leq 2$ и

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dt dx < +\infty, \quad (8.1)$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду.

Для случая $p = 2$ это теорема Плесснера. Если $p = 1$, то наше утверждение сводится к признаку Дини (глава 1, § 38).

Действительно, если (8.1) выполнено, то в силу периодичности $f(x)$ и нечетности подынтегральной функции в (8.1) мы имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dt dx &\geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|t|} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^p dx \right\} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|t|} \left\{ \int_{-t}^{2\pi-t} |f(u+2t) - f(u)|^p du \right\} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|t|} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(u+2t) - f(u)|^p du \right\} dt = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(u+2t) - f(u)|^p}{|2t|} dt \right\} du = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{|f(u+v) - f(u)|^p}{|v|} dv \right\} du. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь, меняя порядок интегрирования, мы пользовались теоремой Фубини (см. Вводный материал, § 18); так как из (8.1) и (8.2) следует

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \frac{f(u+v) - f(u)}{|v|} \right| dv \right\} du < +\infty,$$

то снова по теореме Фубини

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \frac{f(u+v) - f(u)}{v} \right| dv < +\infty \quad (8.3)$$

для почти всех $u \in [0, 2\pi]$, а тогда для почти всех u выполнен признак Дини.

Таким образом остается рассмотреть случай $1 < p < 2$.

Не нарушая общности, можно предположить, что $f(x) \geq 0$, так как, полагая

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где $f_1(x) = f(x)$ при $f(x) \geq 0$, $f_1(x) = 0$ в остальных случаях, мы видим сразу, что каждая из неотрицательных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ должна удовлетворять условию (8.1).

Обозначим через A_n , B_n и C_n множества точек, где соответственно

$$f(x) \leq n, \quad n < f(x) \leq n+1, \quad f(x) > n+1$$

и через C_x множество тех t , где $x+t \in C_n$ при $-\pi \leq t \leq \pi$ (здесь n фиксировано).

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in A_n + B_n, \\ n+1 & \text{для } x \in C_n, \end{cases}$$

и пусть

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Мы уже видели, что из (8.1) следует (8.2), а это влечет $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^p}{t} dt < +\infty$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, значит, тем более это верно почти всюду на A_n . Тогда и подавно

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t)-f(x)|^p}{|t|} dt < +\infty \text{ почти всюду на } A_n.$$

Но если $x \in A_n$ и $t \in C_x$, то имеем $|f(x+t)-f(x)| > 1$, а потому и подавно

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|} dt < +\infty \text{ почти всюду на } A_n. \quad (8.4)$$

С другой стороны, очевидно, что

$$|\psi(x+t)-\psi(x)| \leq |f(x+t)-f(x)|$$

для $x \in A_n$ и $t \in C_x$. Поэтому из неравенства (8.4) находим

$$\int_{C_x} \frac{|\psi(x+t)-\psi(x)|}{|t|} dt < +\infty \text{ почти всюду на } A_n.$$

Если t не входит в C_x , то $x+t$ не входит в C_n , а тогда $\psi(x+t)=0$; кроме того, $\psi(x)=0$ на A_n , значит почти всюду на A_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(x+t)-\psi(x)|}{|t|} dt = \int_{C_x} \frac{|\psi(x+t)-\psi(x)|}{|t|} dt < +\infty.$$

Тогда в силу признака Дини ряд Фурье от $\psi(x)$ сходится почти всюду на A_n .

С другой стороны, для всех x и t

$$|\varphi(x+t)-\varphi(x)| \leq |f(x+t)-f(x)|,$$

значит если условие (8.1) выполнено для $f(x)$, то оно выполнено и для $\varphi(x)$. Но $\varphi(x)$ ограничена, поэтому если условие (8.1) выполнено для $p < 2$, то оно верно и для $p = 2$.

Итак,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x-t)|^2}{t} dt dx < +\infty,$$

а тогда по теореме Плесснера ряд Фурье от $\varphi(x)$ сходится почти всюду. Так как

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду на A_n . Поскольку это верно при любом n и $m A_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$, то этот ряд сходится почти всюду на $(-\pi, \pi)$, а тогда теорема доказана.

§ 9. Выражение условий сходимости почти всюду через квадратичные модули непрерывности и наилучшие приближения

Мы уже знаем (см. § 2 и § 5), что если

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (9.1)$$

то условие

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty, \quad (9.2)$$

а также

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty \quad (9.3)$$

достаточно для сходимости почти всюду ряда (9.1), и при этом условия (9.2) и (9.3) эквивалентны.

Сейчас мы, следуя С. Б. Стечкину^[6], докажем еще несколько условий, эквивалентных (9.2) и (9.3). Эти преобразованные условия окажутся полезными для получения теорем, касающихся сходимости ряда $\sigma(f)$ уже не почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а почти всюду на некотором отрезке $[a, b]$, $-\pi < a < b < \pi$.

Условимся в обозначениях. Пусть

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|A_h f(x)\|_{L^2} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

это — квадратический модуль непрерывности;

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|A_h^2 f(x)\|_{L^2} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

— квадратический модуль гладкости. Наконец,

$$R_{n+1}^{(2)}(f) = \|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где, как всегда,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Докажем, что условия (9.2) и (9.3) эквивалентны каждому из следующих условий:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n^{(2)}(f)\}^2 < +\infty, \quad (9.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right\}^2 < +\infty, \quad (9.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right\}^2 < +\infty. \quad (9.6)$$

Прежде всего нам понадобится такая

Л е м м а. Если $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, то

$$\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right]^2 \leq \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^n k [R_k^{(2)}(f)]^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9.7)$$

Действительно, в силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kh \leq \\ &\leq 4 \left[\sum_{k=1}^n \varrho_k^2 k^2 h^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2 \right] = 4 \left[h^2 \sum_{k=1}^n k^2 \varrho_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2 \right], \end{aligned}$$

где $\varrho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left[\omega^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right]^2 &= \sup_{0 < h \leq \frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_h f(x)|^2 dx \leq 4\pi \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \varrho_k \right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2 \right] = \\ &= \frac{4\pi}{n^2} \left\{ 1^2 \varrho_1^2 + 2^2 \varrho_2^2 + \dots + n^2 \varrho_n^2 + n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2 \right\} = \\ &= \frac{4\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \sum_{m=k}^n \varrho_m^2 \leq \frac{8\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sum_{m=k}^{\infty} \varrho_m^2. \end{aligned}$$

Но

$$[R_{k+1}^{(2)}(f)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_k(x)]^2 dx = \pi \sum_{m=k+1}^{\infty} \varrho_m^2, \quad (9.8)$$

значит,

$$\left[\omega^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right]^2 \leq \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^n k [R_k^{(2)}(f)]^2,$$

и лемма доказана.

Вернемся к доказательству эквивалентности всех условий (9.2)–(9.6).

Так как

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n,$$

то сходимость ряда (9.2) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Так как члены этого ряда неотрицательны, то можно изменить порядок суммирования и убедиться на основании (9.8), что этот ряд можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \varrho_n^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [R_k^{(2)}(f)]^2,$$

а это и есть ряд (9.4). Итак, (9.2) и (9.4) эквивалентны; эквивалентность (9.2) и (9.3), как мы уже говорили (см. § 5), была доказана Плесснером.

Теперь на основании только что доказанной леммы мы видим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\omega^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right]^2 &\leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k [R_k^{(2)}(f)]^2 = 8 \sum_{k=1}^{\infty} k [R_k^{(2)}(f)]^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \\ &< C \sum_{k=1}^{\infty} k [R_k^{(2)}(f)]^2 \frac{1}{k^2} = C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [R_k^{(2)}(f)]^2, \end{aligned}$$

а потому сходимость ряда (9.4) влечет сходимость ряда (9.6).

Так как очевидно

$$\omega_2^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \leq 2 \omega^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right),$$

то сходимость (9.6) влечет сходимость (9.5).

С другой стороны, сходимость (9.5) влечет сходимость (9.4); в самом деле, если обозначить через $E_n^{(2)}(f)$ наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n в метрике пространства L^2 , т. е.

$$E_n^{(2)}(f) = \min_{T_n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то так как здесь минимум достигается (см. глава I, § 13), когда за полином $T_n(x)$ принимается частная сумма ряда Фурье, т. е. $S_n(x)$, то

$$E_n^{(2)}(f) = R_{n+1}^{(2)}(f).$$

Но по теореме Джексона для пространства L^2 (см. Добавления, § 7) мы имеем

$$E_n^{(2)}(f) \leq C \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Таким образом, сходимость (9.5) влечет сходимость (9.4) и эквивалентность всех условий (9.2)—(9.6) доказана.

§ 10. Признаки сходимости почти всюду на отрезке длины, меньшей чем 2π

Отметим ряд теорем, в которых рассматриваются условия для того, чтобы ряд Фурье от некоторой функции сходиллся почти всюду на отрезке длины меньшей, чем 2π . Здесь удастся снова воспользоваться методом «продолжения функций» (см. § 9, главы IV), чтобы свести этот случай к случаю, когда функция обладает нужными свойствами на всем отрезке $[0, 2\pi]$.

Для формулировки теорем введем обозначения. Положим

$$\omega^{(2)}(\delta, f, a, b) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|A_h f(x)\|_{(a,b)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^b |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f, a, b) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|A_h^{(2)} f(x)\|_{(a,b)} =$$

$$= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^b |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$R_{n+1}^{(2)}(f, a, b) = \left\{ \int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Разумеется, для определения $\omega^{(2)}$ или $\omega_2^{(2)}$ необходимо, чтобы $f(x) \in L^2$ не только на отрезке $[a, b]$, но и на некотором содержащем его отрезке, иначе интегралы не будут иметь смысла; но $\omega_2^{(2)}(\delta, f, a', b')$ и $\omega^{(2)}(\delta, f, a', b')$, если (a', b') строго внутри (a, b) , а δ достаточно мало, уже имеют смысл, если $f(x) \in L^2$ на $[a, b]$.

В этих обозначениях справедлива теорема С. Б. Стечкина [6].

Т е о р е м а. Если $f(x) \in L$ на $[0, 2\pi]$ и для любого (a', b') , целиком лежащего внутри $[a, b]$, имеем $f(x) \in L^2$ на (a', b') и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [R_n^{(2)}(f, a', b')]^2 < +\infty, \quad (10.1)$$

или

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f, a', b'\right) \right]^2 < +\infty, \quad (10.2)$$

или

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f, a', b'\right) \right]^2 < +\infty, \quad (10.3)$$

то ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду на (a, b) .

Заметим, что для рядов (10.2) и (10.3) приходится начинать счет не с $n = 1$, а с некоторого достаточно большого N , так как $f(x) \in L^2$ лишь на

(a', b') , а не на (a, b) , а потому интегралы, входящие в выражение для $\omega^{(2)}$ или $\omega_2^{(2)}$ при малых n могут не иметь смысла; на сходимость ряда $\sigma(f)$ это не оказывает влияния.

Мы не будем давать здесь доказательства этой теоремы, отсылая к работе автора; отметим только, что С. Б. Стечкину понадобилось «продолжить» функцию с отрезка $[a, b]$ на отрезок $[0, 2\pi]$ так, чтобы ее квадратический модуль непрерывности или квадратический модуль гладкости, грубо говоря, сохранили свой порядок. После этого можно было уже пользоваться теоремами из § 9.

Далее, если обозначить через $E_n^{(2)}(f, a, b)$ наилучшее приближение в метрике L^2 для функции $f(x)$ на отрезке (a, b) , то имеет место такая теорема [см. Н. К. Бари^[9]]:

Т е о р е м а. Если $f(x) \in L$ на $[0, 2\pi]$ и если для любого (a', b') , лежащего строго внутри (a, b) , имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_n^{(2)}(f, a', b')]^2}{n} < +\infty,$$

то $\sigma(f)$ сходится почти всюду на (a, b) .

Условие (В) из § 5 можно также перенести на отрезок $[a, b]$, что и было сделано П. Л. Ульяновым^[1], доказавшим теорему:

Т е о р е м а. Пусть $f(x) \in L[0, 2\pi]$ и $f(x) \in L^2(a', b')$ для любого $(a', b') \subset (a, b) \subset [0, 2\pi]$. Если для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{b-a}{4}$) имеем

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t} dt dx < A(\varepsilon) < +\infty, \quad (10.4)$$

то ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду на (a, b) .

Ульянов доказал эту теорему для случая, когда $f(x) \in L^p$ ($1 \leq p \leq 2$) и под знаком интеграла тоже $|f(x+t) - f(x-t)|^p$, но мы в предыдущей формулировке ограничились случаем $p = 2$ для того, чтобы дальше сравнивать эту теорему с остальными, о которых идет речь в этом параграфе.

Ввиду того, что здесь доказательство не длинное и достаточно простое, мы приведем его полностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < \delta \leq \delta_0 = \min \left\{ \frac{b-a-2\varepsilon}{4}, \varepsilon \right\}$. Положим $a_1 = a + \varepsilon$, $b_1 = b - \varepsilon$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (a_1 + \delta, b_1 - \delta), \\ 0 & \text{при } x \in \left[0, a_1 + \frac{\delta}{2}\right] + \left[b_1 - \frac{\delta}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

а в отрезках $\left[a_1 + \frac{\delta}{2}, a_1 + \delta\right]$ и $\left[b_1 - \delta, b_1 - \frac{\delta}{2}\right]$ интерполируем $\varphi(x)$ линейно; далее продолжаем ее периодически. Ясно, что $\varphi(x) \in \text{Lip } 1$, точнее

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq K |x_2 - x_1|, \quad \text{где } K = \frac{2}{\delta}. \quad (10.5)$$

Положим $F(x) = f(x)\varphi(x)$ и $F(x) = 0$, если $\varphi(x) = 0$. Очевидно, что $F(x) \in L^2[0, 2\pi]$. Докажем, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty. \quad (10.6)$$

Так как при любом $\eta > 0$ очевидно

$$\int_0^{2\pi} \int_{\eta}^{2\pi} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty,$$

то достаточно доказать, что

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty.$$

Но $F(x) = 0$ для $x \in \left[0, a_1 + \frac{\delta}{2}\right] + \left[b_1 - \frac{\delta}{2}, 2\pi\right]$, поэтому

$$I = \int_{a_1 + \frac{\delta}{4}}^{a_1 + 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} + \int_{a_1 + 2\delta}^{b_1 - 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} + \int_{b_1 - 2\delta}^{b_1 - \frac{\delta}{4}} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим сначала I_2 ; полагая в условиях теоремы $\varepsilon = 2\delta$, видим, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{a_1 + 2\delta}^{b_1 - 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx = \\ &= \int_{a_1 + 2\delta}^{b_1 - 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} dt dx \leq A(\varepsilon) < +\infty. \end{aligned}$$

Остается оценить I_1 и I_3 . Но, как видно будет из хода доказательства, оценки для интегралов I_1 и I_3 совершенно аналогичны. Рассмотрим, например,

$$I_1 = \int_{a_1 + \frac{\delta}{4}}^{a_1 + 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx.$$

Так как $|\varphi(x)| \leq 1$ и удовлетворяет (10.5), то имеем

$$\begin{aligned} [F(x+t) - F(x-t)]^2 &= [f(x+t)\varphi(x+t) - f(x-t)\varphi(x-t)]^2 = \\ &= [f(x+t)\varphi(x+t) - f(x+t)\varphi(x-t) + f(x+t)\varphi(x-t) - f(x-t)\varphi(x-t)]^2 \leq \\ &\leq 2|f(x+t)|^2[\varphi(x+t) - \varphi(x-t)]^2 + 2[f(x+t) - f(x-t)]^2 \leq \\ &\leq \frac{32t^2}{\delta^2}|f(x+t)|^2 + 2[f(x+t) - f(x-t)]^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} \leq \frac{32}{\delta^2} t |f(x+t)|^2 + 2 \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t},$$

а потому в силу выбора δ , условия $f \in L^2(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ и неравенства

$$I_1 \leq \frac{32}{\delta^2} \int_{a_1 + \frac{\delta}{4}}^{a_1 + 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} t |f(x-t)|^2 dt dx + 2 \int_{a_1 + \frac{\delta}{4}}^{a_1 + 2\delta} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t} dt dx < +\infty$$

мы видим, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[F(x+t) - F(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty,$$

а тогда по теореме Плесснера ряд Фурье от $F(x)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Но для $x \in [a_1 + \delta, b_1 - \delta]$ имеем $F(x) = f(x)$ и, значит, в силу принципа локализации Римана для рядов Фурье $\sigma(f)$ сходится почти всюду на $[a_1 + \delta, b_1 - \delta]$, т. е. почти всюду на $[a_1 + 2\varepsilon, b_1 - 2\varepsilon]$. Но $\varepsilon > 0$ произвольно, поэтому ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду на $[a, b]$. Теорема полностью доказана.

Мы применили к случаю отрезка $[a, b]$ все указанные в § 9 условия, эквивалентные условию (9.2), входящему в теорему Колмогорова—Селиверстова и Плесснера. Что касается самого этого условия (9.2), т. е.

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty,$$

то может показаться, что перенос его на случай отрезка $[a, b]$ невозможен, так как в нем нигде нет речи о поведении функции на каком-то интервале. Однако П. Л. Ульянов справедливо заметил, что уже в самих коэффициентах Фурье содержится такое условие, а поэтому естественным переносом теоремы Колмогорова—Селиверстова и Плесснера с отрезка $[0, 2\pi]$ на отрезок $[a, b]$ является такая

Т е о р е м а. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$ и $f(x) \in L^2[a, b]$, то из условия

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\int_a^b f(x) \cos nx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin nx dx \right)^2 \right] \ln n < +\infty \quad (10.7)$$

следует сходимость почти всюду на $[a, b]$ ряда Фурье от $f(x)$.

Действительно, полагая

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in [a, b], \\ 0 & \text{вне } [a, b], \end{cases}$$

видим, что если a_k и β_k — коэффициенты Фурье для $f_1(x)$, то условие (10.7) означает

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2) \ln n < +\infty,$$

а потому ряд Фурье от $f_1(x)$ сходится почти всюду. Но тогда в силу принципа локализации ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду на $[a, b]$. Теорема доказана.

Мы не останавливаемся на доказательстве эквивалентности всех выведенных здесь достаточных условий сходимости ряда Фурье почти всюду на $[a, b]$, отсылая интересующихся к уже упомянутым работам С. Б. Стечкина [6], П. Л. Ульянова [1] и Н. К. Бари [9].

Отметим еще, что вопросом о переносе условий сходимости почти всюду на случай, когда речь идет о некотором отрезке $[a, b]$, занимался Алексич (Alexits [1]). Он доказал сначала, что условие

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty$$

эквивалентно такому условию: существует положительная монотонно возрастающая функция $\lambda(x)$, для которой

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x \lambda(x)} < +\infty \quad \text{и} \quad \omega^{(2)}(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}}\right),$$

и затем, переходя к случаю отрезка $[a, b]$, получил теорему:

Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$, $f(x) \in L^2[a, b]$ и

$$\omega^{(2)}(\delta, f, a, b) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}}\right),$$

где $\lambda(x)$ положительная, монотонно возрастающая и удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\lambda(x)} < +\infty, \text{ то ряд } \sigma(f) \text{ сходится почти всюду на } [a, b].$$

Заканчивая этот параграф, мы хотим указать, что, пользуясь полученными условиями для сходимости почти всюду на некотором отрезке, можно несколько усилить результат Колмогорова—Селиверстова и Плесснера уже для классического случая сходимости почти всюду.

В самом деле, если $f(x)$ уже не принадлежит L^2 на $[0, 2\pi]$, то признак Колмогорова—Селиверстова и Плесснера применить нельзя. Однако при этом вполне может случиться, например, что на всяком смежном интервале (a_k, b_k) к некоторому замкнутому множеству F меры нуль, для любого (a', b') , лежащего в (a_k, b_k) , выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [R_n^{(2)}(f, a', b')]^2 < +\infty$$

(или любое, ему эквивалентное). Тогда $\sigma(f)$ будет сходиться почти всюду на (a_k, b_k) и поскольку это справедливо для любого k , то $\sigma(f)$ сходится почти всюду (так как $mF = 0$). Это замечание принадлежит С. Б. Стечкину.

Аналогичное замечание было сделано Ульяновым в применении к его теореме, сформулированной ранее (см. Следствие 3 на стр. 516 в работе Ульянова^[1]). Обобщая идею Ульянова, можно сформулировать такое следствие из полученных теорем:

Пусть $f(x) \in L$ на $[0, 2\pi]$ и пусть для почти всякой точки x_0 из $[0, 2\pi]$ найдется такая окрестность $\delta(x_0)$ и такая функция $\varphi(x) = \varphi(x, \delta(x_0))$, что $f(x) \equiv \varphi(x, \delta(x_0))$ на $\delta(x_0)$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на $\delta(x_0)$ одному из условий, гарантирующих сходимость почти всюду ее ряда $\sigma(\varphi)$ на этом δ ; тогда ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

В качестве таких локальных условий могут быть, в частности, взяты те, которые рассмотрены Стечкиным, Ульяновым или Алексичем.

§ 11. Индексы сходимости

Мы знаем (см. глава I, § 65), что если $f(x) \in L^2$, то для любой лакунарной последовательности $\{n_k\}$ имеем $S_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду.

С другой стороны (см. § 2), если

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty,$$

то

$$S_n(x) \rightarrow f(x) \text{ почти всюду.}$$

Салем (Salem^[1]) поставил следующий вопрос: что можно сказать о поведении частных сумм ряда Фурье от $f(x)$, если для ее коэффициентов известно, что

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n) < +\infty, \quad (11.1)$$

где $\omega(n) \uparrow \infty$, но $\omega(n)$ растет медленнее, чем $\ln n$? Чтобы ответить на этот вопрос, он ввел такое определение:

О п р е д е л е н и е. Последовательность целых чисел $\{n_k\}$ назовем *последовательностью индексов сходимости* для $f(x)$, если

$$S_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$$

почти всюду при $k \rightarrow \infty$.

Пользуясь этим определением, он доказал такую теорему:

Т е о р е м а. Если $\omega(n) \uparrow \infty$ и $\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n) < +\infty$, то найдется такая последовательность $\{n_k\}$, зависящая только от $\omega(n)$, но не от $f(x)$, что $\{n_k\}$ есть последовательность индексов сходимости для любой $f(x)$, удовлетворяющей (11.1).

Собственно говоря, вопрос идет не об отыскании какой-нибудь последовательности $\{n_k\}$, зависящей лишь от $\omega(n)$, но о последовательности как можно медленнее растущей, в противном случае можно было бы брать в качестве $\{n_k\}$ лакунарную последовательность, и тогда вопрос решался бы сразу. Естественно, что чем $\omega(n)$ растет быстрее, тем больше надежды, что $\{n_k\}$ можно сделать растущей медленно.

Изложим метод, которым Салем находил $\{n_k\}$ для заданной $\omega(n)$.

Прежде всего, как это делается и в доказательстве теоремы Колмогорова—Селиверстова и Плесснера, Салем сначала дает оценку для интеграла

$$I = \int_0^{2\pi} S_{n(x)}(f) dx, \quad (11.2)$$

где $n(x)$ меняется вместе с x , но может принимать лишь значения $1, 2, \dots, n$.

Для краткости положим

$$A_p(x) = a_p \cos px + b_p \sin px \quad (p \geq 1)$$

и будем считать $a_0 = 0$.

Функцию $S_{n(x)}(f)$ можно записать в виде

$$S_{n(x)}(f) = \sum_{p=1}^n \psi_p A_p,$$

где

$$\psi_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leq n(x), \\ 0, & \text{если } p > n(x). \end{cases}$$

Из этого определения функций $\psi_p(x)$ следует, что $\psi_p(x) \geq \psi_{p+1}(x)$. Имеем

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{p=1}^n \psi_p A_p \right] dx.$$

Мы предположили, что ряд $\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n)$ сходится. Значит, существует такая $F(x) \in L^2$, что ее ряд Фурье есть $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sqrt{\omega(n)}$. Применяя преобразование Абеля, найдем

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{\psi_p}{\sqrt{\omega(p)}} A_p \sqrt{\omega(p)} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \Delta \left(\frac{\psi_p}{\sqrt{\omega(p)}} \right) S_p(F) dx,$$

где $\Delta u_p = u_p - u_{p+1}$, если $p \neq n$, и $\Delta u_n = u_n$. Имеем

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{\Delta \psi_p S_p(F)}{\sqrt{\omega(p)}} dx + \sum_{p=1}^n \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\omega(p)}} \right) \int_0^{2\pi} \psi_{p+1} S_p(F) dx. \quad (11.3)$$

Так как $|\psi_{p+1}(x)| \leq 1$, то

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi_{p+1} S_p(F) dx \right| \leq (2\pi \int_0^{2\pi} F^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

кроме того,

$$\sum_{p=1}^n \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\omega(p)}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{\omega(1)}},$$

а потому

$$|I| \leq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{\Delta \psi_p S_p(F)}{\sqrt{\omega(p)}} dx \right| + \left(\frac{2\pi}{\omega(1)} \int_0^{2\pi} F^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.4)$$

Переходим к оценке интеграла

$$J = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{\Delta \psi_p S_p(F)}{\sqrt{\omega(p)}} dx. \quad (11.5)$$

Его можно записать в виде

$$J = \int_0^{2\pi} F(x) \left(\sum_{p=1}^n \frac{S_p(\Delta \psi_p)}{\sqrt{\omega(p)}} \right) dx.$$

Действительно $\int_0^{2\pi} F S_p(\Delta \psi_p) dx = \int_0^{2\pi} \Delta \psi_p S_p(F) dx$, так как каждый из этих интегралов в силу равенства Парсеваля есть p -я частная сумма ряда, членами которого служат произведения коэффициентов ряда Фурье для F и для $\Delta \psi_p$. Имеем

$$J^2 \leq \int_0^{2\pi} F^2 dx \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_1(\Delta \psi_1)}{\sqrt{\omega(1)}} + \dots + \frac{S_n(\Delta \psi_n)}{\sqrt{\omega(n)}} \right]^2 dx = J_0 \int_0^{2\pi} F^2(x) dx. \quad (11.6)$$

Будем изучать интеграл J_0 . Имеем

$$J_0 = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{[S_p(\Delta \psi_p)]^2}{\omega(p)} dx + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{p < q} \frac{S_p(\Delta \psi_p) S_q(\Delta \psi_q)}{\sqrt{\omega(p) \omega(q)}} dx, \quad (11.7)$$

но

$$\sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{[S_p(\Delta \psi_p)]^2}{\omega(p)} dx \leq \sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{(\Delta \psi_p)^2}{\omega(p)} dx,$$

а так как последовательность $\psi_p(x)$ монотонно убывающая и притом $\psi_p(x) = 1$ или 0, то $(\Delta \psi_p)^2 = \Delta \psi_p$ и $\sum_{p=1}^n (\Delta \psi_p)^2 = \psi_1$; кроме того, $\omega(p)$ монотонно растет, поэтому для первого члена правой части равенства (11.7) находим

$$\int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^n \frac{[S_p(\Delta \psi_p)]^2}{\omega(p)} dx \leq \frac{1}{\omega(1)} \int_0^{2\pi} \psi_1(x) dx < \frac{2\pi}{\omega(1)}. \quad (11.8)$$

Далее имеем

$$\sum_{q=p+1}^n \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p) S_q(\Delta \psi_q)}{\sqrt{\omega(p) \omega(q)}} dx = \sum_{q=p+1}^n \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p) \Delta \psi_q}{\sqrt{\omega(p) \omega(q)}} dx,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} S_p(\Delta \psi_p) \Delta \psi_q dx = \int_0^{2\pi} S_p(\Delta \psi_p) S_q(\Delta \psi_q) dx.$$

Последнее равенство вытекает из того, что каждый из интегралов левой части, в силу равенства Парсеваля и условия $p < q$, есть p -я частная сумма ряда, составленного из произведений коэффициентов Фурье для $S_p(\Delta \psi_p)$ и для $\Delta \psi_q$.

Мы можем поэтому написать

$$\sum_{q=p+1}^n \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p) \Delta \psi_q}{\sqrt{\omega(p) \omega(q)}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p)}{\sqrt{\omega(p)}} \sum_{q=p+1}^n \frac{\Delta \psi_q}{\sqrt{\omega(q)}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p)}{\omega(p)} \chi_p(x) dx,$$

где мы положили

$$\chi_p(x) = \sqrt{\omega(p)} \left[\frac{\Delta \psi_{p+1}}{\sqrt{\omega(p+1)}} + \dots + \frac{\Delta \psi_n}{\sqrt{\omega(n)}} \right].$$

Снова применяя формулу Парсеваля, убеждаемся, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta \psi_p)}{\omega(p)} \chi_p(x) dx = \int_0^{2\pi} \Delta \psi_p \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx.$$

Пусть теперь k_p и k'_p — два положительных числа, которые мы подберем позже, но такие, что

$$\frac{1}{k_p} + \frac{1}{k'_p} = 1.$$

В силу неравенства Юнга (см. Вводный материал, § 8)

$$\Delta \psi_p \frac{|S_p(\chi_p)|}{\omega(p)} \leq \frac{1}{k_p} \left[\frac{|S_p(\chi_p)|}{\omega(p)} \right]^{k_p} + \frac{1}{k'_p} (\Delta \psi_p)^{k'_p}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \Delta \psi_p \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx \right| \leq \sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{k_p} \frac{|S_p(\chi_p)|^{k_p}}{[\omega(p)]^{k_p}} dx + \int_0^{2\pi} \psi_1(x) dx.$$

Но для любой $f \in L^p$ имеем

$$\left(\int_0^{2\pi} |S_n(f)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left(\int_0^{2\pi} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где A_p — константа, зависящая только от p , причем для $p \geq 2$ имеем $A_p < 2p$ (см. глава VIII, § 14).

Если так, то, выбирая $k_p \geq 2$, можем написать

$$\int_0^{2\pi} |S_p(\chi_p)|^{k_p} dx \leq (4k_p)^{k_p} \int_0^{2\pi} (\chi_p)^{k_p} dx < 2\pi (4k_p)^{k_p},$$

потому что, как видно из определения $\chi_p(x)$, она положительна и меньше 1.

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \Delta \psi_p \frac{S_p(x_p)}{\omega(p)} dx \right| < 2\pi \sum_{p=1}^n \frac{1}{k_p} \left[\frac{4k_p}{\omega(p)} \right]^{k_p} + 2\pi. \quad (11.9)$$

Здесь k_p можно еще выбрать как угодно, лишь бы было $k_p \geq 2$.

Стремясь сделать правую часть (11.9) минимальной, мы должны были бы найти минимум выражения

$$\frac{1}{k_p} \left[\frac{4k_p}{\omega(p)} \right]^{k_p}.$$

Но это требует решения трансцендентного уравнения

$$4 \frac{k_p e}{\omega(p)} = e^{\frac{1}{k_p}}.$$

Если положить

$$k_p = \frac{\omega(p)}{4e}, \quad (11.10)$$

то это дает приближенное решение, поскольку $\omega(p) \rightarrow \infty$. Такой выбор возможен лишь при

$$\omega(p) \geq 8e,$$

что будет иметь место, как только p станет достаточно большим, пусть при $p \geq p_0$. Положим

$$k_p = 2, \quad \text{если} \quad p < p_0,$$

и определим k_p по формуле (11.10) для $p \geq p_0$. Тогда из (11.9) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=1}^n \int_0^{2\pi} \Delta \psi_p \frac{S_p(x_p)}{\omega(p)} dx \right| &\leq \\ &\leq 2\pi \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{2} \left[\frac{8}{\omega(p)} \right]^2 + 2\pi \sum_{p=p_0+1}^n \frac{4e}{\omega(p)} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{\omega(p)}{4e}} + 2\pi. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Из формулы (11.4) и выражения интеграла J формулы (11.5) сразу видно, что в левой части неравенства (11.11) числу p надо придавать лишь те значения, которые может принимать $n(x)$ в интеграле I , так как для других значений имеем $\Delta \psi_p = 0$. Поэтому если $n(x)$ пробегает только значения, входящие в некоторую последовательность $\{n_k\}$, то надо изучить, при каких условиях сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{\omega(n_k)}{4e}}.$$

Кроме того, так как числа $\omega(n_k)$ можно умножить на любую константу, не нарушая сходимости ряда $\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n)$, то левая часть неравенства (11.11) остается ограниченной, если только сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} \left(\frac{1}{A} \right)^{\omega(n_k)},$$

где A можно предполагать как угодно большим. Следовательно, при выполнении этого условия мы будем иметь

$$I < C \left(\int_0^{2\pi} F^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где C зависит от $\omega(n)$, но не от f . Отсюда тем же методом, которым доказывается теорема Колмогорова—Селиверстова и Плесснера, можно заключить, что $S_{n_k}(f)$ сходится почти всюду к $f(x)$.

Таким образом получается

Т е о р е м а. Если ряд $\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n)$ сходится и если для последовательности $\{n_k\}$ можно найти такую константу A , что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} \left(\frac{1}{A} \right)^{\omega(n_k)} < +\infty, \quad (11.12)$$

то последовательность $\{n_k\}$ есть последовательность индексов сходимости.

В частности, если $\omega(n) = \ln n$ и $n_k = k$ для $k \geq 2$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \left(\frac{1}{A} \right)^{\ln k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\ln A}} < +\infty,$$

если только взять $A > e$, и мы возвращаемся к теореме Колмогорова—Селиверстова и Плесснера.

Если положить, например, $\omega(n) = \sqrt{\ln n}$, то достаточно взять n_k растущим, как $k^{\ln k}$, чтобы ряд (11.12) оказался сходящимся. Хотя рост $k^{\ln k}$ и достаточно быстрый, но все же гораздо более медленный, чем у лакунарных последовательностей, поскольку $k^{\ln k} = e^{(\ln k)^2}$.

Салем отметил, что если $\omega(n)$ очень медленно растет и тем более, если $\omega(n) = \text{const}$, то эта оценка ничего хорошего не дает, и, в частности, не позволяет получить теорему о лакунарных подпоследовательностях ряда $\sigma(f)$ для $f \in L^2$. Однако в этом случае можно применить другой, более простой метод и тогда получить хорошую оценку. Для этого поступаем следующим образом.

Обозначим через $\sigma_n(f)$ фейеровскую сумму порядка n для ряда Фурье от $f(x)$. Если $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, то мы имеем в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} [S_n(f) - \sigma_n(f)]^2 dx = \pi \frac{\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 + \dots + n^2 \varrho_n^2}{(n+1)^2}.$$

Рассмотрим последовательность $\{n_k\}$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 + \dots + n_k^2 \varrho_{n_k}^2}{n_k^2} < +\infty. \quad (11.13)$$

Тогда мы будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f)]^2 dx < +\infty,$$

т. е. почти всюду $\sum_{k=1}^{\infty} [S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f)]^2 < +\infty$, а потому и подавно почти

$$S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f) \rightarrow 0$$

всюду, откуда следует, что $S_{n_k}(f) \rightarrow f$ почти всюду. При этом даже не требуется, чтобы $f \in L^2$.

Например, если мы предположим только $n\varrho_n^2 \rightarrow 0$ (хотя $f \notin L^2$), то можно выбрать последовательность n_k так, чтобы удовлетворялось условие (11.13). Действительно, если $n\varrho_n^2 \rightarrow 0$, то имеем

$$u_n = \frac{\varrho_1^2 + 2^2 \varrho_2^2 + \dots + n^2 \varrho_n^2}{n^2} < \frac{1}{n} [1 \varrho_1^2 + 2 \varrho_2^2 + \dots + n \varrho_n^2] \rightarrow 0,$$

как среднее арифметическое чисел, стремящихся к нулю. Поэтому можно выбрать числа n_k так, чтобы $\sum u_{n_k} < +\infty$ и, следовательно, тогда выполнено (11.13) и, значит, $\{n_k\}$ есть последовательность индексов сходимости.

Пусть теперь $f \in L^2$. Более того, пусть

$$\sum \varrho_n^2 \omega(n) < +\infty.$$

Докажем, что тогда (11.13) будет выполнено, если

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{n^2}{\omega(n)} \uparrow, \\ \text{б) } & \frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_{k+1}^2} + \dots = O\left(\frac{\omega(n_k)}{n_k^2}\right). \end{aligned}$$

В самом деле, полагая $n_0 = 0$, можно записать левую часть (11.13) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho_1^2 + 2^2 \varrho_2^2 + \dots + n_k^2 \varrho_{n_k}^2}{n_k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} j^2 \varrho_j^2 \right) \left(\frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_{k+1}^2} + \dots \right) \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} j^2 \varrho_j^2 \right) \frac{\omega(n_k)}{n_k^2} < C \sum_{s=1}^{\infty} \varrho_s^2 \omega(s), \end{aligned}$$

так как если $j \leq n_k$, то $\frac{j^2}{\omega(j)} \leq \frac{n_k^2}{\omega(n_k)}$ в силу гипотезы $\frac{n^2}{\omega(n)} \uparrow$. Таким образом выполнение условия б) при монотонном росте $\frac{n^2}{\omega(n)}$ гарантирует условие (11.13) и, в силу доказанного ранее, приводит к выводу, что $\{n_k\}$ есть последовательность индексов сходимости. Таким образом доказана

Т е о р е м а. Если $\frac{n^2}{\omega(n)}$ монотонно возрастает, то для всех функций, удовлетворяющих условию

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n) < +\infty,$$

последовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_{k+1}^2} + \dots = O\left(\frac{\omega(n_k)}{n_k^2}\right),$$

есть последовательность индексов сходимости.

В частности, полагая $\omega(n) = \text{const}$, мы видим, что за $\{n_k\}$ можно принять любую лакунарную последовательность (и даже, более того, любую последовательность, удовлетворяющую условию (L), см. глава I, § 65), и мы возвращаемся к теореме, доказанной в главе I, § 65.

Если же $\omega(n)$ растет, то получаются новые результаты.

Мы хотим теперь отметить, что в само определение последовательности индексов сходимости не входило никаких требований на $f(x)$, кроме ее суммируемости. Мы здесь рассматривали функции $f(x) \in L^2$. Но можно изучать индексы сходимости для $f(x) \in L^p$ при $1 \leq p < 2$. Укажем имеющиеся в этом направлении результаты.

Литтлвуд и Пэли (Littlewood и Paley^[1]) показали, что если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то лакунарные последовательности снова являются последовательностями индексов сходимости (как и в случае $p = 2$), но при $p = 1$ это уже неверно. Более того, как показал Зигмунд (см.^[М.6], § 10.33), вопрос о том, можно ли найти последовательность индексов сходимости, совсем не зависящую от функции $f(x)$, т. е. годную для всех $f(x) \in L$, решается отрицательно. Действительно, как отметил Зигмунд (см.^[М.6], § 10.33), для любой последовательности $\{\lambda_k\}$ положительных чисел можно найти такую $f(x) \in L$ и такую последовательность n_k , что $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$) и $S_{n_k}(x)$ почти всюду расходится. Этот результат можно получить, если исследовать внимательно метод, которым в § 17 строится функция с почти всюду расходящимся рядом Фурье.

Итак, нельзя найти последовательность индексов сходимости, годную для всех $f(x) \in L$. Однако, как показал Салем (Salem^[1]), можно найти последовательность индексов сходимости, общую для всех $f(x)$ с одинаковым интегральным модулем непрерывности. Именно, имеет место

Т е о р е м а. Для любой суммируемой $f(x)$ с интегральным модулем непрерывности $\omega^{(1)}(\delta)$ последовательность чисел $\{n_k\}$, для которых

$$\sum \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n_k}\right) \left| \ln \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n_k}\right) \right| < +\infty, \quad (11.14)$$

есть последовательность индексов сходимости.

Мы будем опираться на результат, который будет установлен в § 21 главы VIII: если $f(x) \in L$ и p любое, $0 < p < 1$, то

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx < \frac{C}{1-p} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \right)^p, \quad (11.15)$$

где C — абсолютная константа.

Рассмотрим выражение

$$B_n(x) = \frac{1}{2} \left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right].$$

В главе VII, § 4 доказывается, что $B_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$.

Имеем из (11.14) и (11.15)

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x) - B_n(x)|^p dx < \frac{C}{1-p} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2} f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{2} f\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right| dx \right)^p.$$

Но так как

$$\omega^{(1)}(\delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx,$$

то отсюда сразу следует

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x) - B_n(x)|^p dx < \frac{C}{1-p} \left[\omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right]^p \leq \frac{A}{1-p} \left[\omega^{(1)}\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p, \quad (11.16)$$

где A — некоторая новая константа, в силу свойств интегрального модуля непрерывности.

Выберем p_n так, чтобы сделать правую часть неравенства (11.16) минимальной; для этого надо взять

$$p_n = 1 - \frac{1}{\left| \ln \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n}\right) \right|}.$$

При таком выборе p_n имеем

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x) - B_n(x)|^{p_n} dx < A e \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n}\right) \left| \ln \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n}\right) \right|.$$

Если теперь взять числа n_k , удовлетворяющие (11.14), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |S_{n_k}(x) - B_{n_k}(x)|^{p_{n_k}} dx < +\infty,$$

значит, $\sum_{k=1}^{\infty} |S_{n_k}(x) - B_{n_k}(x)|^{p_{n_k}}$ сходится почти всюду, а потому тем более $|S_{n_k}(x) - B_{n_k}(x)|^{p_{n_k}} \rightarrow 0$ почти всюду. Отсюда следует, что и $|S_{n_k}(x) - B_{n_k}(x)| \rightarrow 0$ почти всюду, а так как $B_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, то $S_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Укажем здесь две работы Зигмунда, где вопрос о выборе подпоследовательности n_k , для которой $S_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, ставился в несколько иной форме. Именно, Зигмунд сначала доказал (см. Zygmund [10]), что для любой $f(x) \in L^2$ можно для почти всякого x разложить натуральный ряд на две последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ (разложение, вообще говоря, зависит от выбора точки x), чтобы $S_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, а последовательность $\{m_k\}$ удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < +\infty$. Позже (см. Zygmund [11]) он обобщил этот результат на функции $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) и отметил, что при $p = 1$ теорема теряет силу.

Этот результат, как отметил сам Зигмунд, следует считать несравнимым с предыдущими, поскольку, с одной стороны, там речь шла о последовательностях $\{n_k\}$ достаточно «редких», но зато не зависящих от выбора точки, а в его случае выбор последовательности зависит от точки, но эта последовательность «очень густая» (пропускаются лишь номера m_k , для которых $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < +\infty$).

§ 12. Выпуклая емкость множеств *)

Ряд авторов занимался изучением следующего интересного вопроса: если сходится ряд

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) W(n) < +\infty,$$

где $W(n) \uparrow \infty$, то что можно сказать о множестве E точек расходимости ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx?$$

Мы знаем (§ 2), что если $W(n)$ растет, как $\ln n$, и тем более быстрее, чем $\ln n$, то $mE = 0$. Однако возникает вопрос, нельзя ли высказать нечто большее, чем это утверждение о мере множества, зная, например, что $W(n)$ быстро растет?

Здесь возникает идея классификации множеств меры нуль и различения среди них более «толстых» и более «тонких». Эта идея будет нами далее рассматриваться и в главах XII, XIII и XIV. Здесь мы осветим ее, вводя понятия

*) Этот параграф рекомендуется читать после §§ 19 и 20 главы XIV.

о логарифмической емкости, α -емкости, и, наконец, выпуклой емкости множеств.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0, 2\pi]$.

Будем называть мерой μ всякую неотрицательную вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т. е. $\mu[0, 2\pi] = 1$. Будем говорить, что мера μ сосредоточена на B , и писать $\mu \prec B$, если $\mu(B) = 1$, т. е. если

$$\int_B d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = 1.$$

Валле-Пуссен (Vallée-Poussin^[3]) ввел понятие логарифмической емкости множеств; это понятие, изучавшееся затем в работах Фростмана (Frostman^[4]), Неванлинна^[М.17] и других авторов, оказалось очень полезным. Мы не будем здесь указывать, как надо находить величину логарифмической емкости множества, так как это нам не понадобится, нам нужно будет лишь уметь различать, имеет ли множество логарифмическую емкость положительной или равной нулю. Поэтому скажем только, что Валле-Пуссен предложил такое

О п р е д е л е н и е 1. Множество E , измеримое B , имеет *положительную логарифмическую емкость*, если существует мера μ такая, что $\mu \prec E$ и функция

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|e^{it} - re^{ix}|} d\mu \quad (12.1)$$

($0 \leq r < 1$) остается равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1^*$).

Если же при любой $\mu \prec E$ выражение $v(x, r)$ не является равномерно ограниченным по x при $r \rightarrow 1$, то мы считаем логарифмическую емкость E равной нулю.

Связь этого понятия с поставленным нами вопросом станет ясной, если мы сформулируем следующую теорему Берлинга (Beurling^[1]):

Т е о р е м а Б е р л и н г а. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) n < +\infty,$$

то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

может расходиться только на множестве, логарифмическая емкость которого равна нулю.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы, так как оно получится дальше как частный случай более общих результатов.

Фростман и другие авторы изучали также понятие α -емкости множества. Мы и здесь ограничимся тем, что будем различать случай α -емкости положительной и равной нулю, а именно:

О п р е д е л е н и е 2. Множество E , измеримое B , имеет *положительную α -емкость* ($0 < \alpha < 1$), если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{it} - re^{ix}|^\alpha} d\mu \quad (12.2)$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1$.

*) Относительно определения интеграла вида $\int_0^{2\pi} f(x) d\mu$ см. Добавления, § 8.

Если такой $\mu \prec E$, для которой это условие выполнено, не существует, то E имеет α -емкость, равную нулю*).

При таком определении имеет место

Теорема Салема и Зигмунда**). Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) n^a < +\infty \quad (0 < a < 1),$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

может расходиться только на множестве, у которого $(1 - \alpha)$ -емкость равна нулю.

Эту теорему, как и теорему Берлинга, мы получим позже из более общего результата.

Введем, следуя К. В. Темку [1], понятие выпуклой емкости множества.

Для этого рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$, обладающую свойствами: 1) $\lambda_n \rightarrow 0$ и 2) $\{\lambda_n\}$ выпукла. Известно (см. глава I, § 30), что тогда функция

$$Q(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx, \quad (12.3)$$

определяемая рядом (12.3), который сходится всюду, кроме, быть может, точки $x = 0$, есть неотрицательная суммируемая функция. Раз так, то

$$Q(r, x) = \lambda_0 + \sum \lambda_n r^n \cos nx, \quad (12.4)$$

как пуассоновская сумма от $Q(x)$, удовлетворяет условию $Q(r, x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 2\pi$ и $0 \leq r < 1$. Дадим определение, предложенное К. В. Темко:

О п р е д е л е н и е 3. Множество E , измеримое B , имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует мера $\mu \prec E$, для которой функция

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x - t) d\mu(t) \quad (12.5)$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1$; здесь $Q(r, x)$ определено формулой (12.4).

В случае отсутствия такой μ , считаем выпуклую емкость E относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

Покажем, что логарифмическую емкость и α -емкость можно рассматривать как частные случаи выпуклой емкости, если разумно подобрать последовательность $\{\lambda_n\}$.

Начнем с логарифмической емкости; мы имеем

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|e^{it} - re^{ix}|} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|1 - re^{i(x-t)}|} d\mu(t).$$

*) В § 9 главы XII рассматривается понятие размерности множества по Хаусдорфу. Отметим, что Фростман изучал связь α -емкости множества с его размерностью и доказал: если α -емкость множества E положительна, то его хаусдорфова размерность порядка α положительна; если E имеет α -емкость равной нулю, то любое его замкнутое подмножество имеет хаусдорфову размерность $\alpha + \varepsilon$ равной нулю при всяком $\varepsilon > 0$.

**) См. Salem and Zygmund [1].

Докажем, что это выражение совпадает с

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t) d\mu(t),$$

если в качестве чисел $\{\lambda_n\}$ принять $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\lambda_0 = 0$, т. е. если положить

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

В самом деле, тогда

$$Q(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} r^n,$$

$$Q(r, x-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-t)}{n} r^n = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(x-t)} r^n}{n} = \operatorname{Re} \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(x-t)} r^{n-1} dr$$

(здесь почленное интегрирование законно, поскольку $0 \leq r < 1$). Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in(x-t)} r^{n-1} = \frac{e^{i(x-t)}}{1 - re^{i(x-t)}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial r}(1 - re^{i(x-t)})}{1 - re^{i(x-t)}},$$

а потому

$$Q(r, x-t) = \operatorname{Re} \left\{ -\int_0^r \frac{d(1 - re^{i(x-t)})}{1 - re^{i(x-t)}} \right\} = -\ln |1 - re^{i(x-t)}| = \ln \frac{1}{|1 - re^{i(x-t)}|},$$

а это и надо было установить.

Итак, *логарифмическая емкость множества положительна, если положительна его выпуклая емкость относительно последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, и наоборот.*

Теперь рассмотрим случай α -емкости. Здесь также можно написать

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{|e^{it} - re^{ix}|^\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{|1 - re^{i(x-t)}|^\alpha}.$$

Если выражение $[1 - re^{i(x-t)}]^{-\alpha}$ разложить в степенной ряд по степеням r , то будем иметь

$$[1 - re^{i(x-t)}]^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n r^n e^{in(x-t)},$$

где

$$\gamma_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{n!}. \quad (12.6)$$

Ясно, что если $v(x, r)$ остается равномерно ограниченным для $r \rightarrow 1$, то это справедливо и для

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{[1 - re^{i(x-t)}]^\alpha} d\mu(t).$$

Но

$$\operatorname{Re}[1 - re^{i(x-t)}]^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n r^n \cos n(x-t),$$

а потому, полагая

$$Q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos nx, \quad (12.7)$$

мы видим, что

$$Q(r, x) = 1 + \sum \gamma_n r^n \cos nx$$

и

$$\int_0^{2\pi} Q(r, x-t) d\mu(t)$$

остается ограниченным равномерно по x при $r \rightarrow 1$, т. е. множество имеет положительную емкость относительно последовательности $\{\gamma_n\}$, причем нетрудно подсчитать, что $\Delta^2 \gamma_n \geq 0$, т. е. наша последовательность выпукла.

Напротив, если $Q(x)$ определена равенством (12.7), где числа γ_n заданы формулой (12.6), то, как мы видим, действительная часть от

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - re^{i(x-t)})^\alpha} d\mu$$

остается ограниченной равномерно по x при $r \rightarrow 1$. Но так как для любого $r < 1$ и для любого β имеем

$$1 - re^{i\beta} = |1 - re^{i\beta}| e^{i\theta},$$

где аргумент θ от $(1 - re^{i\beta})$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, то

$$(1 - re^{i\beta})^{-\alpha} = |1 - re^{i\beta}|^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta},$$

а потому

$$\operatorname{Re} (1 - re^{i\beta})^{-\alpha} = |1 - re^{i\beta}|^{-\alpha} \cos \alpha\theta,$$

причем $\cos \alpha\theta$ заключен между $\cos \alpha \frac{\pi}{2}$ и 1.

Отсюда сразу следует, что если действительная часть интеграла I равномерно ограничена при $r \rightarrow 1$, то это верно и для $v(x, r)$, т. е. тогда и α -емкость множества положительна.

Итак, случай положительной α -емкости — это случай положительной емкости относительно последовательности $\{\gamma_n\}$, определяемой формулой (12.6).

Но можно доказать*) (см. Добавления, § 9), что

$$\gamma_n = C(\alpha) \frac{1}{n^{1-\alpha}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

где $C(\alpha)$ — константа, зависящая лишь от α , а так как ряд

$$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}} \cos nx$$

сходится абсолютно и равномерно при $0 \leq \alpha < 1$, то, полагая

$$Q^*(x) = \sum \frac{1}{n^{1-\alpha}} \cos nx,$$

мы видим, что функция $Q(x)$, определяемая равенством (12.7), отличается от $C(\alpha) Q^*(x)$ на непрерывную функцию $\varphi(x)$, поэтому для

$$\int_0^{2\pi} Q^*(r, x-t) d\mu(t)$$

*) В § 9 Добавлений получена формула

$$A_n^\alpha = C(\alpha) n^\alpha + O(n^{\alpha-1}),$$

из которой и вытекает наше утверждение, если заметить, что $A_n^{\alpha-1}$ совпадает с γ_n .

равномерная ограниченность по x при $r \rightarrow 1$ имеет место одновременно с равномерной ограниченностью $\int_0^{2\pi} Q(r, x - t) d\mu(t)$. Отсюда заключаем *):

Множество E имеет положительную α -емкость тогда и только тогда, когда оно имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\left\{ \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right\}$.

Это замечание нам будет полезно в дальнейшем.

В указанных работах Берлинга, Зигмунда и Салема и Темко имеется ряд весьма интересных теорем, касающихся логарифмической емкости, α -емкости и выпуклой емкости. Не имея возможности излагать их здесь, мы перейдем к основной теореме Темко, из которой цитированные ранее теоремы Берлинга, а также Зигмунда и Салема получаются как следствия. Эту теорему мы, несколько видоизменяя формулировку Темко, выскажем в следующей форме:

Теорема 1. Пусть $W(n) \uparrow \infty$ и $\sum \frac{1}{nW(n)} < +\infty$. Если

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) W(n) < +\infty,$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

может расходиться только на множестве, имеющем выпуклую емкость равной нулю относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, где

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kW(k)}.$$

Как доказательство этой теоремы, так и вывод из нее результатов Берлинга и Салема и Зигмунда будут даны несколько позже. Пока, для упрощения доказательства, мы считаем целесообразным видоизменить понятие выпуклой емкости и для этого ввести такое определение.

О п р е д е л е н и е 4. Множество E имеет обобщенную положительную емкость относительно выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \rightarrow 0$, если существует такая мера $\mu \prec E$, для которой

$$v(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, x - y) d\mu(x) d\mu(y) \quad (12.8)$$

остается ограниченным при $r \rightarrow 1$. Здесь снова

$$Q(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^n \cos nt.$$

Ясно, что если E имеет положительную выпуклую емкость (в смысле Темко) относительно $\{\lambda_n\}$, то и его обобщенная емкость относительно той же последовательности положительна, потому что равномерная ограниченность по x для

$$\int_0^{2\pi} Q(r, x - t) d\mu(t)$$

) Идея сравнения рядов для $Q(x)$ и для $Q^(x)$ взята из вышеупомянутой работы Зигмунда и Салема.

влечет тем более ограниченность $v(r)$, определяемого формулой (12.8). Обратное же не очевидно*).

Отсюда следует, что если будет доказана теорема, аналогичная теореме Темко, но где слова «выпуклая емкость» заменены словами «обобщенная выпуклая емкость», то теорема Темко будет тоже доказана, так как, если расходимость возможна лишь на множестве обобщенной выпуклой емкости нуль, то она возможна и на множестве выпуклой емкости нуль (в смысле Темко).

Оперировать с обобщенной выпуклой емкостью значительно проще, так как здесь имеет место следующая простая теорема**):

Т е о р е м а 2. Для того чтобы множество E имело положительную обобщенную емкость относительно выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая мера $\mu \prec E$, для которой

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty, \quad (12.9)$$

где α_n и β_n — коэффициенты Фурье—Стилтьеса для меры μ , т. е.

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu.$$

В самом деле, полагая

$$Q(t) = \sum \lambda_n \cos nt; \quad Q(r, t) = \sum \lambda_n r^n \cos nt,$$

мы знаем, что $Q(r, t)$ неотрицательна и непрерывна при $0 < r < 1$. Вычислим $v(r)$:

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, x-y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \cos n(x-y) \, d\mu(x) \right] d\mu(y) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \left[\cos ny \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu(x) + \sin ny \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu(x) \right] \right\} d\mu(y) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n (\pi \alpha_n \cos ny + \pi \beta_n \sin ny) \right\} d\mu(y) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \left[\alpha_n \int_0^{2\pi} \cos ny \, d\mu(y) + \beta_n \int_0^{2\pi} \sin ny \, d\mu(y) \right] = \\ &= \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n (\alpha_n^2 + \beta_n^2). \end{aligned} \quad (12.10)$$

*) В настоящее время К. В. Темко доказала, что определения выпуклой емкости и обобщенной выпуклой емкости эквивалентны, если $n\Delta\lambda_n \downarrow$. Этот результат пока не опубликован. Таким образом, если это ограничение на λ_n введено, то, пользуясь определением 4 вместо определения 3, мы не получим более сильных результатов, однако доказательство значительно упрощается.

**) В цитированной работе (Темко^[1]) была доказана необходимость условия (12.9) для того, чтобы выпуклая емкость E была положительна. В настоящее время в работе Темко, сданной в печать, доказана и теорема текста.

Все совершаемые операции законны, ибо при $r < 1$ рассматриваемые ряды равномерно сходятся, так как числа $\{\lambda_n\}$, а также $\{|\alpha_n|\}$ и $\{|\beta_n|\}$ ограничены в совокупности.

Теперь ясно, что если обобщенная емкость положительна, то для некоторого $\mu \prec E$ левая часть (12.10) ограничена при $r \rightarrow 1$, значит и правая также, а тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty.$$

Если же, наоборот, этот ряд сходится, то правая часть равенства (12.10) ограничена при $r \rightarrow 1$, значит и левая часть тоже, а тогда обобщенная емкость положительна.

Теорема доказана *).

С л е д с т в и е 1. Если для двух разных выпуклых последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda'_n\}$ имеем

$$\lambda_n \sim \lambda'_n,$$

то множества обобщенной выпуклой емкости нуль для той и другой последовательности будут одни и те же.

Это замечание мы используем ниже для вывода теорем Берлинга и Зигмунда—Салема из теоремы Темко.

С л е д с т в и е 2. Если $\sum \lambda_n < +\infty$, то всякое B -множество имеет положительную обобщенную емкость относительно $\{\lambda_n\}$.

Действительно, для любой нормированной меры μ имеем

$$|\alpha_n| \leq \int_0^{2\pi} d\mu = 1, \quad |\beta_n| \leq \int_0^{2\pi} d\mu = 1,$$

а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty.$$

Поэтому для изучения множеств с обобщенной выпуклой емкостью, равной нулю, надо рассматривать лишь случай, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Наконец, имеет место

С л е д с т в и е 3. Всякое множество E , измеримое B , $mE > 0$, имеет положительную обобщенную емкость**) относительно любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$.

*) Отсюда легко следует, что если E имеет обобщенную выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$, равную нулю, то этим свойством обладает и любое $E_1 \subset E$. Действительно, если бы это было неверно, то нашлась бы такая $\mu \prec E_1$, что для ее коэффициентов Фурье—Стилтьеса α_n и β_n имели бы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty. \quad (*)$$

Но тогда про ту же μ можно сказать, что $\mu \prec E$ и условие (*) выполнено, значит, E имеет положительную обобщенную емкость относительно $\{\lambda_n\}$, что противоречит нашей гипотезе.

**) Темко доказывала это предложение для случая выпуклой емкости, т. е. пользуясь определением 3.

Действительно, для любого \mathcal{E} , измеримого B , положим

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{m(\mathcal{E} \cdot E)}{mE}.$$

Ясно, что $\mu(\mathcal{E})$ неотрицательна, вполне аддитивна, $\mu[0, 2\pi] = 1$ и $\mu(E) = 1$, т. е. $\mu \prec E$. Если обозначить через $\chi(x)$ характеристическую функцию для множества E , то

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi(x) \cos nx \, dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi(x) \sin nx \, dx,$$

т. е. коэффициенты Фурье—Стилтьеса от μ оказываются коэффициентами Фурье от ограниченной функции $\chi(x)$. Но если так, то

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) < +\infty,$$

а тогда для любых $\lambda_n \rightarrow 0$ и подално

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty$$

и значит E имеет положительную обобщенную емкость относительно $\{\lambda_n\}$.

Но смысл понятия обобщенной емкости выявляется на том, что, напротив, для любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ можно построить такое совершенное множество меры нуль, которое имеет обобщенную выпуклую емкость*) положительной относительно этой последовательности.

Чтобы убедиться в этом, мы будем опираться на следующую лемму, доказательство которой находится в § 24 гл. XIV.

Л е м м а 1. Пусть $\psi(n) > 0$ и $\psi(n) \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, но в остальном она произвольна. Существует совершенное множество P , $mP = 0$, и такая монотонная $F(x)$, постоянная на смежных к P интервалах, что для

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dF, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dF \quad (12.11)$$

имеем

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = O(\psi(n)). \quad (12.12)$$

(Из доказательства теоремы § 24 главы XIV видно, что это множество есть M -множество.)

Из этой леммы вытекает

С л е д с т в и е. Для любой $\psi(n) \uparrow \infty$ можно найти такую меру μ , что $\mu \prec P$, $mP = 0$, и для

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = O(\psi(n)).$$

*) Темко доказывала аналогичную теорему для выпуклой емкости (вместо обобщенной выпуклой емкости); доказательство, приводимое ниже, основано на той же идее, но значительно короче.

Действительно, полагая для любого отрезка

$$\mu(a, b) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — функция, построенная в лемме 1, и требуя от $\mu(E)$ полной аддитивности, мы можем определить $\mu(E)$ на любом борелевском множестве, лежащем на $[0, 2\pi]$. При этом $\mu[0, 2\pi] = F(2\pi) - F(0) = 1$, $\mu \prec P$, и нужное условие для коэффициентов выполнено в силу доказанной леммы.

Теперь мы имеем возможность доказать теорему:

Т е о р е м а 3. *Для любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ можно найти такое совершенное множество P , $mP = 0$, у которого обобщенная емкость положительна относительно последовательности $\{\lambda_n\}$.*

Прежде всего покажем, что можно найти такую монотонную $\psi(n)$, что

- 1) $\sum \psi(n) \Delta \lambda_n < +\infty$,
- 2) $\psi(n) \lambda_n = o(1)$.

Действительно, достаточно взять $\psi(n) = \frac{1}{\lambda_n^\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Так как при выпуклости $\{\lambda_n\}$ и $\lambda_n \rightarrow 0$ имеем $\lambda_n \downarrow 0$, то $\psi(n) \uparrow \infty$. Так как из $\lambda_n \downarrow 0$ следует $\Delta \lambda_n > 0$ и, кроме того, $\sum \Delta \lambda_n < +\infty$, то по известной теореме (см. Добавления, § 25) будет сходиться и ряд

$$\sum \frac{\Delta \lambda_n}{R_{n-1}^\alpha},$$

где $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta \lambda_k = \lambda_{n+1}$, а значит сходится ряд

$$\sum \frac{\Delta \lambda_n}{\lambda_n^\alpha} = \sum \Delta \lambda_n \psi(n)$$

и условие 1) выполнено. Кроме того,

$$\psi(n) \lambda_n = \lambda_n^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

а потому 2) также имеет место.

На основании следствия леммы 1 мы можем найти такое P , $mP = 0$, и такую меру μ , что $\mu \prec P$, и для

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu$$

имеем

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = O(\psi(n)).$$

Тогда, как мы сейчас покажем, обобщенная емкость P относительно $\{\lambda_n\}$ будет положительна.

В самом деле, полагая

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

имеем

$$S_n = O(\psi(n))$$

и на основании преобразования Абеля

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \lambda_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta \lambda_k + S_n \lambda_n = O\left(\sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \Delta \lambda_k\right) + O(\psi(n) \lambda_n),$$

а так как ряд $\sum \psi(k) \Delta \lambda_k$ сходится и $\psi(n) \lambda_n \rightarrow 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \lambda_k < +\infty,$$

а это и значит (см. теорему 2), что обобщенная емкость P относительно $\{\lambda_n\}$ положительна, и теорема доказана.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы Темко, докажем еще одну, такую принадлежащую ей, лемму:

Л е м м а 2. Пусть $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность, для которой $\lambda_n \rightarrow 0$, $n \Delta \lambda_n \downarrow 0$, и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Положим

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kx. \quad (12.13)$$

Пусть

$$\gamma_n = n \Delta \lambda_n$$

и

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cos kx.$$

Тогда для любого n

$$|\Gamma_n(x)| < A_1 H(x) + A_2, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (12.14)$$

где A_1 и A_2 — постоянные зависящие только от $\{\lambda_n\}$.

Заметим, прежде всего, что из условий леммы вытекает: $H(x)$ существует для всех x , $0 < x < 2\pi$, она неотрицательна и суммируема (см. глава I, § 30). Кроме того (см. глава X, § 7), имеем

$$H(x) \sim \int_1^{\frac{1}{x}} t \Delta \lambda(t) dt,$$

если $\lambda(n) = \lambda_n$ и $\lambda(t)$ интерполировать линейно между $\lambda(n)$ и $\lambda(n+1)$. Знак \sim понимается как всегда в смысле существования двух положительных чисел B и C таких, что

$$B < \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} t \Delta \lambda(t) dt}{H(x)} < C.$$

Пусть теперь $0 < x < 2\pi$ и $m = \left[\frac{1}{x} \right]$; тогда

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \cos kx + \sum_{m+1}^n \gamma_k \cos kx = \Gamma_n^{(1)}(x) + \Gamma_n^{(2)}(x).$$

Имеем в силу того, что $\Delta \lambda(t) \downarrow$

$$|\Gamma_n^{(1)}(x)| \leq \sum_{k=1}^m \gamma_k = \gamma_1 + \sum_{k=2}^m \frac{k}{k-1} (k-1) \Delta \lambda_k <$$

$$< \gamma_1 + 2 \sum_{k=2}^m \int_{k-1}^k t \Delta \lambda(t) dt < \gamma_1 + 2 \int_1^{\frac{1}{x}} t \Delta \lambda(t) dt < \gamma_1 + 2CH(x).$$

Далее для любого n при $x \neq 0$ в силу преобразования Абеля

$$|I_n^{(2)}(x)| = \left| \sum_{m+1}^n \gamma_k \cos kx \right| = O\left(\frac{1}{x}\right) \gamma_{m+1},$$

а потому

$$|I_n^{(2)}(x)| = O\left(\frac{1}{x}\right) \gamma_m = O\left(\frac{m \Delta \lambda_m}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x^2} \Delta \lambda_m\right).$$

Но так как $\Delta \lambda(t) \downarrow$, то

$$\int_1^{\frac{1}{x}} t \Delta \lambda(t) dt \geq \int_1^m t \Delta \lambda(t) dt \geq \Delta \lambda_m \frac{t^2}{2} \Big|_1^m = O\left(\frac{1}{x^2} \Delta \lambda_m\right) - \frac{1}{2} \Delta \lambda_m,$$

а потому и

$$|I_n^{(2)}(x)| < CH(x) + C_1$$

и, следовательно,

$$|I_n(x)| < A_1 H(x) + A_2$$

и лемма доказана.

Из доказанной леммы получим один важный факт, который является центром тяжести в теореме Темко: подобно тому, как в теореме Колмогорова—Селиверстова и Плесснера доказывалось неравенство

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{\ln k}} dx \right]^2 dt \leq C,$$

где $n(x)$ принимает любые значения $1, 2, \dots, n$, а C — абсолютная константа, так будет доказана

Л е м м а 3. Пусть

$$W(n) \uparrow \infty, \quad \sum \frac{1}{n W(n)} < +\infty,$$

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k W(k)}, \quad \text{но } \sum \lambda_n = +\infty.$$

Если для чисел

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx d\mu, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx d\mu \quad (12.15)$$

имеем

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty, \quad (12.16)$$

то для $n(x) = 1, 2, \dots, n$

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} d\mu(x) \right]^2 dt \leq C, \quad (12.17)$$

где C — абсолютная константа.

Прежде всего заметим, что

$$\Delta \lambda_n = \frac{1}{n W(n)},$$

значит,

$$n \Delta \lambda_n = \frac{1}{W(n)} \downarrow 0$$

и

$$\Delta^2 \lambda_n \geq 0,$$

поэтому все условия леммы 2 выполнены.

Далее мы имеем

$$J = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} d\mu(x) \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{n(y)} \frac{\cos m(y-t)}{\sqrt{W(m)}} d\mu(y) \right\} dt.$$

Меняя порядок интегрирования, находим

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \sum_{m=1}^{n(y)} \frac{\cos m(y-t)}{\sqrt{W(m)}} dt \right\} d\mu(x) d\mu(y).$$

Но (см. рассуждения при доказательстве теоремы Колмогорова—Селиверстова и Плесснера)

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \sum_{m=1}^{n(y)} \frac{\cos m(y-t)}{\sqrt{W(m)}} dt = \pi \sum_{k=1}^{n(x,y)} \frac{\cos k(x-y)}{W(k)},$$

где $n(x, y) = \min(n(x), n(y))$. Поэтому

$$J = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x,y)} \frac{\cos k(x-y)}{W(k)} d\mu(x) d\mu(y).$$

Опять рассуждая, как в § 2, видим, что

$$J \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n(x,y)} \frac{\cos k(x-y)}{W(k)} \right| d\mu(x) d\mu(y). \quad (12.18)$$

Но мы уже отмечали, что числа $\{\lambda_n\}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2 и так как роль чисел γ_n этой леммы теперь играют

$$\gamma_n = n \Delta \lambda_n = \frac{1}{W(n)},$$

то в силу этой леммы (см. 12.14) получаем при любом m

$$\left| \sum_{k=1}^m \frac{\cos kt}{W(k)} \right| < A_1 H(t) + A_2, \quad (12.19)$$

где A_1 и A_2 постоянны, а $H(t)$ определяется формулой (12.13).

Теперь можно, применяя формулу (12.19), написать

$$\sum_{k=1}^{n(y)} \frac{\cos k(x-y)}{W(k)} < A_1 H(x-y) + A_2.$$

Отсюда и из (12.18) находим

$$\begin{aligned} J &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_1 H(x-y) + A_2] d\mu(x) d\mu(y) = \\ &= 2\pi A_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x-y) d\mu(x) d\mu(y) + 2\pi A_2, \end{aligned} \quad (12.20)$$

ибо $\int_0^{2\pi} d\mu(x) = 1$.

Так как $H(t) = \sum \lambda_k \cos kt$ (см. (12.13)), то для α_n и β_n , определенных формулой (12.15), имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty. \quad (12.21)$$

Здесь нужно рассуждать так, как при доказательстве формулы (12.10), а затем перейти к пределу при $r \rightarrow 1$ и опираться на условие (12.16).

Из (12.20) и (12.21) получаем

$$J \leq C,$$

где C — постоянное, и лемма 3 доказана.

Мы теперь имеем возможность доказать основную теорему этого параграфа, а именно следующую:

Т е о р е м а. Пусть $W(n) \uparrow \infty$ и $\sum \frac{1}{n W(n)} < +\infty$. Пусть

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k W(k)}. \quad (12.22)$$

Если ряд

$$\sum (\alpha_n^2 + b_n^2) W(n) < +\infty, \quad (12.23)$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (12.24)$$

сходится всюду, кроме, быть может, множества E , у которого обобщенная выпуклая емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равна нулю.

То что $\{\lambda_n\}$ выпукла, мы уже видели при доказательстве леммы 3. Мы имеем право предполагать, кроме того, что $W(n)$ растет не слишком быстро, точнее, не настолько быстро, чтобы $\sum \lambda_n < +\infty$ (так как мы видели, что в этом последнем случае множеств с обобщенной емкостью, равной нулю, совсем нет). Итак,

$$\sum \lambda_n = +\infty.$$

Возьмем такую $\psi(n) \uparrow \infty$, чтобы

$$\sum (\alpha_n^2 + b_n^2) W(n) \psi(n) < +\infty.$$

Это всегда возможно (см. Добавления, § 25). Пусть

$$A_n = a_n \sqrt{\psi(n)}; \quad B_n = b_n \sqrt{\psi(n)}. \quad (12.25)$$

Имеем тогда

$$\sum (A_n^2 + B_n^2) W(n) < +\infty. \quad (12.26)$$

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos nx + B_n \sin nx. \quad (12.27)$$

Если E есть множество точек расходимости ряда (12.24), то частные суммы $S_n(x)$ ряда (12.27) должны быть неограничены в каждой точке (см. Добавления, § 12, следствие теоремы 5), потому что $\psi(n) \uparrow \infty$. Если мы докажем, что множество точек, где $S_n(x)$ не ограничены, должно иметь обобщенную емкость нуль относительно $\{\lambda_n\}$, то наша теорема будет доказана*).

*) Выше (см. подстр. прим. к теореме 2) мы видели, что часть множества обобщенной емкости нуль сама имеет обобщенную емкость, равную нулю.

Допустим, что это неверно. Тогда по теореме 2 найдется такая $\mu \prec E$, что для чисел

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu$$

будет выполнено условие

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty. \quad (12.28)$$

Мы докажем, что для такой μ , если $n(x) = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} S_{n_x}(x) \, d\mu \right| \leq C \sqrt{\sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) W(k)}. \quad (12.29)$$

Здесь снова идет рассуждение в точности, как в теореме Колмогорова—Селиверстова и Плесснера.

Рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sqrt{W(k)} \cos kx + B_k \sqrt{W(k)} \sin kx.$$

Тогда

$$S_{n_x}(x) = \int_0^{2\pi} F_n(t) \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \, dt,$$

а потому

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} S_{n_x}(x) \, d\mu = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} F_n(t) \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \, dt \right\} d\mu(x) = \\ &= \int_0^{2\pi} F_n(t) \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \, d\mu(x) \right\} dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I^2 \leq \int_0^{2\pi} F_n^2(t) \, dt \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\cos k(x-t)}{\sqrt{W(k)}} \, d\mu(x) \right]^2 dt = J \int_0^{2\pi} F_n^2(t) \, dt,$$

где J — выражение, рассмотренное в лемме 3 и относительно него было доказано, что оно не превосходит абсолютной константы C . Но тогда

$$I^2 < C \int_0^{2\pi} F_n^2(t) \, dt = C \pi \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) W(k),$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (12.29).

Поэтому, обозначая, как в теореме § 2,

$$\Phi_{1n}(x) = \max\{S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x)\},$$

видим, что и

$$\left| \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}(x) \, d\mu \right| \leq C \sqrt{\sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) W(k)}.$$

Такое же неравенство справедливо и для $\varphi_{1n}(x)$, если положить

$$\varphi_{1n}(x) = \max \{-S_1(x), -S_2(x), \dots, -S_n(x)\}.$$

Так как ряд (12.26) сходится, то мы имеем при любом n

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}(x) d\mu \right| &\leq K, \\ \left| \int_0^{2\pi} \varphi_{1n}(x) d\mu \right| &\leq K, \end{aligned} \quad (12.30)$$

где K — абсолютная константа. Но $\mu \not\prec E$, а на множестве E суммы $S_n(x)$ не ограничены в каждой точке. Это противоречит условиям (12.30), и теорема доказана.

Из этой теоремы как следствие вытекает теорема Берлинга, если положить $W(n) = n$, так как тогда

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

и, значит, в силу следствия 1 к теореме 2 при

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) n < +\infty$$

тригонометрический ряд может расходиться лишь на множестве обобщенной выпуклой емкости, равной нулю относительно $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Но тогда, как мы знаем, логарифмическая емкость этого множества тоже равна нулю, и теорема Берлинга доказана.

Если же положить $W(n) = n^a$, то

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+a}} \sim \frac{1}{n^a},$$

а потому тригонометрический ряд с коэффициентами a_n, b_n , где $\sum (a_n^2 + b_n^2) n^a < +\infty$, может расходиться лишь на множестве обобщенной емкости нуль относительно $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}$, т. е. $(1-a)$ -емкости нуль — это теорема Салема и Зигмунда.

З а м е ч а н и е. К сожалению, для случая

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty$$

теорема о выпуклой емкости ничего не дает, так как ряд

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

расходится. Но уже для случая

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) (\ln n)^{1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$, можно получить, что множество точек расходимости имеет обобщенную емкость нуль относительно $\{\lambda_n\}$, где

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{1+\varepsilon}} \sim \frac{1}{(\ln n)^\varepsilon}.$$

Мы сочли целесообразным осветить здесь детально вопрос о выпуклой емкости, так как это понятие, по-видимому, окажется полезным в ряде вопросов теории тригонометрических рядов, где приходится иметь дело с тонкими свойствами множеств меры нуль. В частности, оно встретится нам при изучении абсолютной сходимости (см. глава XIII, § 10).

§ 13. Признак сходимости, использующий обынтегрированный ряд*)

В § 7 главы IV была доказана теорема о том, что если $f(x)$ непрерывна, $F(x)$ — ее неопределенный интеграл и

$$|S_n(x, F) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$, то и

$$|S_n(x, f) - f(x)| = o(1)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$. Здесь мы докажем теорему Салема (Salem^[13]), аналогичную сформулированной, где $f(x)$ не предполагается непрерывной, но зато, конечно, и сходимость не будет равномерной; все же она имеет место почти всюду. Точнее мы докажем теорему.

Т е о р е м а. Если $f(x)$ суммируема, $F(x)$ — ее неопределенный интеграл и

$$|S_n(x, F) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (13.1)$$

на некотором множестве E (равномерность не нужна), то

$$|S_n(x, f) - f(x)| = o(1)$$

почти всюду на E .

Доказательство).** Пусть

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (13.2)$$

есть $\sigma(f)$, тогда***)

$$\sigma(F) = \sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}. \quad (13.3)$$

Так как ряд (13.3) сходится всюду к $F(x)$, поскольку $F(x)$ абсолютно непрерывна, то из условия (13.1) заключаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

почти всюду на E .

Ряд, сопряженный к (13.2), имеет вид

$$\bar{\sigma}(f) = \sum (-b_k \cos kx + a_k \sin kx), \quad (13.4)$$

и по теореме § 5 главы VIII он должен суммироваться $(C, 1)$ почти всюду на E . Далее, по теореме 4 из § 12 Добавлений, если

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и ряд $\sum u_k$ суммируем $(C, 1)$, то $\sum u_k$ сходится. Отсюда сразу следует, что ряд (13.4) сходится почти всюду на E . Теперь применяем теорему Кутнера (глава VIII, § 23): если тригонометрический ряд сходится на некотором множестве E , $mE > 0$, а его сопряженный суммируем $(C, 1)$ на E , то сопряженный ряд

*) Результат этого параграфа опирается на факты, устанавливаемые в §§ 5 и 23 главы VIII.

**) Это доказательство принадлежит Зигмунду и устно было сообщено им Салему.

***) Мы предположили в ряде (13.2) $a_0 = 0$, иначе $F(x)$ не была бы периодической.

сходится почти всюду на E . Это позволяет утверждать, что сходимость $\bar{\sigma}(f)$ на E почти всюду влечет сходимость почти всюду на E для $\sigma(f)$, а тогда наша теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Справедливо и обратное утверждение:

Если

$$|S_n(x, f) - f(x)| = o(1) \quad \text{на } E, \quad (13.5)$$

то

$$|S_n(x, F) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{почти всюду на } E.$$

Действительно, (13.5) означает, что $\sigma(f)$ сходится почти всюду на E ; следовательно, по теореме Кутнера и $\bar{\sigma}(f)$ сходится почти всюду на E . Это значит, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \quad \text{сходится почти всюду на } E,$$

а тогда в силу теоремы 3 из § 25 Добавлений

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е.

$$|S_n(x, F) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{почти всюду на } E,$$

и теорема доказана.

§ 14. Признак Салема

В главе IV, § 8 была доказана теорема, одновременно и независимо установленная Салемом и Стечкиным: если

$$\frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right) \quad (14.1)$$

равномерно на $a \leq x \leq b$ и если $f(x)$ непрерывна на (a, b) , то $\sigma(f)$ сходится на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ равномерно (здесь $\varepsilon > 0$ может быть взято любым).

Салем (Salem^[3]), отбрасывая требование непрерывности $f(x)$, доказывает следующую теорему:

Теорема Салема. *Если*

$$\frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x-t)] dt = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right)$$

равномерно на $a \leq x \leq b$, то $\sigma(f)$ сходится почти всюду на (a, b) .

Доказательство. Мы предполагаем, что в ряде $\sigma(f)$ свободный член равен нулю, так как это не уменьшит общности рассуждений. Тогда

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

будет периодической и из условия (14.1) сразу следует

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{|h|}}\right) \quad (14.2)$$

равномерно на (a, b) . Поскольку $F(x)$ непрерывна, то из (14.2) следует (см. глава IV, § 9)

$$|S_n(F, x) - F(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. На основании § 13 тогда

$$|S_n(f, x) - f(x)| = o(1)$$

почти всюду на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Но так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$S_n(f, x) - f(x) = o(1) \quad \text{почти всюду на } (a, b),$$

и теорема доказана.

§ 15. Признак Марцинкевича

В предыдущей теореме Салема (§ 14) условие (14.1) предполагалось выполненным на целом отрезке $[a, b]$ (и притом равномерно) и получалась сходимость почти всюду на $[a, b]$. Марцинкевич (см. Marcinkiewicz^[1]) ранее рассматривал некоторое условие, очень похожее на условие Салема, но предполагал его выполненным на множестве и получал сходимость почти всюду на этом множестве.

Теорема Марцинкевича. *Если*

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(x+u) - f(x)| du = O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right) \quad (15.1)$$

для $x \in E$, $hE > 0$, то $\sigma(f)$ сходится почти всюду на E .

Салему эта теорема была известна, однако он отмечает, что его результат нельзя получить из теоремы Марцинкевича, так как у последнего под знаком интеграла выражение $f(x+t) - f(x-t)$ берется по абсолютной величине.

Доказательство теоремы Марцинкевича основывается на двух леммах.

Лемма 1. Пусть P — совершенное множество на $[0, 2\pi]$, Δ_n ($n = 1, 2, \dots$) — его смежные интервалы, $h(t)$ — неотрицательная функция такая, что

$$h(t) = 0 \quad \text{на } P, \quad (15.2)$$

$$\frac{1}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} h(t) dt < \frac{A}{\ln \frac{1}{\Delta_n}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (15.3)$$

где A — постоянное, не зависящее от n ; тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(t)}{|t-x|} dt < +\infty \quad \text{почти всюду на } P. \quad (15.4)$$

Доказательство. Обозначим через x_n центр интервала Δ_n и положим

$$\delta_n = \left(x_n - \frac{\Delta_n}{6}, x_n + \frac{\Delta_n}{6}\right).$$

Определим функцию $\psi(t)$ условием

$$\psi(t) = 3h[x_n + 3(t - x_n)] \quad \text{для } t \in \delta_n$$

и

$$\psi(t) = 0 \quad \text{вне всех } \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначим через $\Phi(x)$ характеристическую функцию множества P и докажем сходимость двойного интеграла

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) \frac{\psi(t)}{|x-t|} dx dt. \quad (15.5)$$

Так как $\psi(t) = 0$ вне всех δ_n , то

$$I = \sum_{\delta_n} \int_{\delta_n} \psi(t) \left(\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)}{|x-t|} dx \right) dt = \sum_{\delta_n} \int_{\delta_n} \psi(t) \left(\int_P \frac{dx}{|x-t|} \right) dt. \quad (15.6)$$

Но если $t \in \delta_n$, а $x \in P$, то $|x-t| \geq \frac{1}{3} \Delta_n$, а потому

$$\int_P \frac{dx}{|x-t|} \leq 2 \int_{\frac{\Delta_n}{3}}^{2\pi} \frac{du}{u} = 2 \ln \frac{6\pi}{\Delta_n} = 2 \ln 6\pi + 2 \ln \frac{1}{\Delta_n} < 4 \ln \frac{1}{\Delta_n} \quad (15.7)$$

для всех $n \geq n_0$, если n_0 выбрано так, что $\frac{1}{\Delta_n} > 6\pi$ для всех $n \geq n_0$.

Заметим теперь, что

$$\int_{\delta_n} \psi(t) dt = 3 \int_{x_n - \frac{\Delta_n}{6}}^{x_n + \frac{\Delta_n}{6}} h[x_n + 3(t - x_n)] dt = \int_{x_n - \frac{\Delta_n}{2}}^{x_n + \frac{\Delta_n}{2}} h(u) du = \int_{\Delta_n} h(u) du, \quad (15.8)$$

а потому на основании (15.3), (15.7) и (15.8)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{\delta_n} \psi(t) \left(\int_P \frac{dx}{|x-t|} \right) dt \leq 4 \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{1}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} h(u) du < 4A \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n < +\infty.$$

Сопоставляя это с (15.6), видим, что двойной интеграл (15.5) имеет смысл.

Отсюда на основании известной теоремы Фубини сразу заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)}{|x-t|} dt < +\infty \quad (15.9)$$

почти всюду на P .

Докажем, что если x_0 есть точка плотности множества P , то (15.9) влечет за собой (15.4).

Действительно, из (15.9) во всяком случае следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} \frac{\psi(t)}{|x-t|} dt < +\infty.$$

Если мы положим, как в формуле (15.8), $u = x_n + 3(t - x_n)$, то, когда t пробегает δ_n , аргумент u пробегает Δ_n .

Из

$$t - x = u - x - \frac{2}{3}(u - x_n)$$

мы найдем $|t - x| < |u - x| \left(1 + \frac{2}{3} \left| \frac{u - x_n}{u - x} \right| \right)$. Но поскольку x — точка плотности для P , то $\left| \frac{u - x_n}{u - x} \right| \rightarrow 0$ при $|u - x| \rightarrow 0$, а потому можно сделать

$$|t - x| < |u - x| (1 + \varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ наперед задано (если только $t - x$ достаточно мало). Отсюда следует, что

$$\int_{\delta_n} \frac{\psi(t)}{|t-x|} dt \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Delta_n} \frac{h(u) du}{|u-x|},$$

как только δ_n будет находиться в достаточно малой окрестности точки x , а потому

$$\sum \int_{\Delta_n} \frac{h(u) du}{|u-x|} < +\infty.$$

Так как $h(x) = 0$ вне всех Δ_n , то (15.4) доказано.

Л е м м а 2. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (15.1) во всех точках E , $mE > 0$. Тогда существует такое совершенное множество P , содержащееся в E , $mP > 0$, что

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad (15.10)$$

где

$$|g(x+t) - g(x)| = O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|t|}}\right) \quad (15.11)$$

равномерно на $(0, 2\pi)$, тогда как

$$h(x) = 0 \quad \text{для } x \in P$$

и, кроме того,

$$\frac{1}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} |h(t)| dt < \frac{A}{\ln \frac{1}{\Delta_n}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15.12)$$

для некоторого постоянного A и всех смежных интервалов Δ_n множества P .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через E_n такое подмножество E , на котором

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f(x+u) - f(x)| du < \frac{n}{\ln \frac{1}{|t|}} \quad \text{при } x \in E_n \text{ и } |t| < \frac{1}{n}. \quad (15.13)$$

Ясно, что $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ и $E = \sum E_n$, а потому можно найти такое n_0 , что $mE_{n_0} > 0$. Положим $\frac{1}{n_0} = \delta$, $n_0 = B$ и рассмотрим некоторое совершенное $P \in E_{n_0}$ и диаметра меньше δ . Так как n_0 можно взять как угодно большим, то δ можно считать как угодно малым.

Пусть $\mathcal{E}(x, t, M)$ есть совокупность тех точек v из интервала $(x + \frac{1}{3}t, x + t)$, для которых

$$|f(v) - f(x)| \geq \frac{M}{\ln \frac{1}{|v-x|}}.$$

Если $x \in P$ и $|t| < \delta$, то имеет место (15.13), а потому

$$\frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(v) - f(x)| dv < \frac{B}{\ln \frac{1}{|t|}}.$$

Но для точек $\mathcal{E}(x, t, M)$ имеем $|v - x| > \frac{1}{3}|t|$, значит,

$$\frac{1}{|t|} \frac{M}{\ln \left(\frac{1}{3}|t|\right)^{-1}} m\mathcal{E} \leq \frac{1}{|t|} \int_{\mathcal{E}} |f(v) - f(x)| dv < \frac{B}{\ln \frac{1}{|t|}},$$

откуда

$$m\mathcal{E}(x, t, M) \leq \frac{B}{M} \frac{\ln \frac{1}{3} |t|}{\ln |t|} |t| \leq \frac{2B}{M} |t|,$$

если δ , а значит и $|t|$, достаточно мало. Если мы примем $M = 14B$, то получим

$$m\mathcal{E}(x, t) = m\mathcal{E}(x, t, 14B) \leq \frac{|t|}{7}. \quad (15.14)$$

Пусть теперь $x < y$ — любые две точки из P . Из (15.14) мы находим

$$m\mathcal{E}(x, y - x) < \frac{1}{7} (y - x); \quad m\mathcal{E}(y, x - y) < \frac{1}{7} (y - x).$$

Значит, на интервале $\left\{x + \frac{1}{3}(y - x), y - \frac{1}{3}(y - x)\right\}$ найдется точка ξ , которая не входит ни в $\mathcal{E}(x, y - x)$, ни в $\mathcal{E}(y, y - x)$. Поэтому

$$|f(\xi) - f(x)| \leq \frac{14B}{\ln \frac{1}{|\xi - x|}} \quad \text{и} \quad |f(\xi) - f(y)| \leq \frac{14B}{\ln \frac{1}{|\xi - y|}}.$$

Отсюда

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C}{\ln \frac{1}{|y - x|}}, \quad \text{где} \quad C = 28B.$$

Обозначим через $g(x)$ функцию, которая равна $f(x)$ на P и линейна в смежных интервалах. Легко видеть, что для нее

$$|g(x + t) - g(x)| < \frac{3C}{\ln \frac{1}{|t|}} \quad \text{при} \quad |t| < \delta$$

и таким образом условие (15.11) удовлетворено. Полагая

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

видим, что $h(x) = 0$ на P и остается доказать (15.12).

Пусть Δ — любой из смежных к P интервалов и x его левый конец. Так как $x \in P$, то имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |h(t)| dt &\leq \int_0^{\Delta} |f(x+t) - f(x)| dt + \int_0^{\Delta} |g(x+t) - g(x)| dt < \\ &< \Delta \frac{B}{\ln \frac{1}{\Delta}} + \Delta \frac{3C}{\ln \frac{1}{\Delta}} = A \frac{\Delta}{\ln \frac{1}{\Delta}}, \end{aligned}$$

где $A = B + 3C$, и лемма доказана.

После того, как эти леммы доказаны, переходим к доказательству теоремы.

На основании леммы 2 можно разбить $f(x)$ на сумму

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

причем $g(x)$ удовлетворяет условно (15.11). Но тогда

$$|g(x+t) - g(x-t)| = O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|t|}}\right) \text{ равномерно на } (0, 2\pi)$$

и, значит,

$$\int_0^{\pi} \frac{[g(x+t) - g(x-t)]^2}{t} dt < +\infty,$$

а стало быть, и по-прежнему

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[g(x+t) - g(x-t)]^2}{t} dt dx < +\infty.$$

Но тогда по теореме Плесснера (см. § 5) ряд Фурье от $g(x)$ сходится почти всюду.

С другой стороны, так как функция $|h(x)|$ удовлетворяет условиям леммы 1, то для нее на основании этой леммы почти всюду на P выполнен признак Дини (см. глава I, § 38), а потому ее ряд Фурье сходится почти всюду на P . Отсюда мы заключаем, что и ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду на P .

Так как во всяком подмножестве \mathcal{E} множества E , $m\mathcal{E} > 0$, содержится P , обладающее таким свойством, то ясно, что $\sigma(f)$ сходится почти всюду на E .

В § 18 будет доказано, что эта теорема в известном смысле не может быть усилена.

§ 16. Признак сходимости, выраженный через логарифмическую меру множества

Укажем еще один признак сходимости ряда $\sigma(f)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$; он является интересным потому, что выражен в известном смысле через структуру функции $f(x)$ и, в частности, дает указания, когда ряд Фурье от характеристической функции некоторого множества сходится почти всюду. Этот признак найден Н. М. Кайдаш^[1].

Прежде всего введем понятие логарифмической меры множества.

Рассмотрим произвольное измеримое множество E . Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покроем E такой системой интервалов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < mE + \varepsilon,$$

и рассмотрим число

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n| \quad (16.1)$$

(оно может и равняться $+\infty$).

Нижнюю грань этих чисел по всем покрытиям множества E , удовлетворяющим указанному условию, мы назовем логарифмической мерой множества E с точностью до ε и будем обозначать $L(E, \varepsilon)$. Ясно, что с уменьшением ε функция $L(E, \varepsilon)$ может только возрастать, а потому существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(E, \varepsilon) = L(E),$$

который мы назовем *логарифмической мерой множества E* . Случай $L(E) = +\infty$ не исключается.

Нашей ближайшей целью является доказательство теоремы:

Т е о р е м а. Пусть $f(x)$ неотрицательна и суммируема; положим

$$E(l) = E\{f(x) > l\}$$

и пусть $L[E(l)]$ — его логарифмическая мера. Если функция $\varphi(l) = L[E(l)]$ суммируема на $0 \leq l < +\infty$, то ряд Фурье от $f(x)$ сходится почти всюду.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. Пусть G — открытое множество на $[0, 2\pi]$.

Расположим составляющие его интервалы в порядке убывания

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n \geq \dots$$

и составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|. \quad (16.2)$$

Если этот ряд сходится, то для характеристической функции $\psi(x)$ множества G ряд Фурье сходится почти всюду и имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)}{\alpha} \right| d\alpha dx \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|, \quad (16.3)$$

где K — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ любое; рассмотрим интеграл

$$A(\gamma) = \int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} |\psi(x+\alpha) - \psi(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx. \quad (16.4)$$

Имеем

$$A(\gamma) = \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^{2\pi} |\psi(x+\alpha) - \psi(x)| dx = \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^{2\pi} [\psi(x+\alpha) - \psi(x)]^2 dx,$$

так как подынтегральная функция во внутреннем интеграле может принимать лишь значения 0 или 1. Поэтому

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\alpha} \left\{ \int_0^{2\pi} \psi^2(x+\alpha) d\alpha - 2 \int_0^{2\pi} \psi(x+\alpha) \psi(x) dx + \int_0^{2\pi} \psi^2(x) dx \right\} = \\ &= \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\alpha} \left\{ mG - 2 \int_0^{2\pi} \psi(x+\alpha) \psi(x) dx + mG \right\} = \\ &= 2 \int_{\gamma}^{2\pi} \left[mG - \int_0^{2\pi} \psi(x+\alpha) \psi(x) dx \right] \frac{d\alpha}{\alpha}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Обозначим через $N(\alpha)$ число тех интервалов δ_n , для которых $\delta_n \geq \alpha$, и покажем, что

$$\int_0^{2\pi} \psi(x+\alpha) \psi(x) dx \geq \sum_{\delta_n \geq \alpha} (\delta_n - \alpha) = \sum_{\delta_n \geq \alpha} \delta_n - N(\alpha) \alpha. \quad (16.6)$$

На всякой прямой $x + \alpha = c$ имеем

$$\psi(x+\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi(c) = 0, \\ 1, & \text{если } \psi(c) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, множество точек, где $\psi(x + \alpha) = 1$, состоит из параллельных прямых (рис. 18), пересекающих ось абсцисс в точках, принадлежащих интервалам δ_n . Произведение $\psi(x)\psi(x + \alpha)$ будет равно 1 по крайней мере во всех заштрихованных прямоугольных треугольниках с основанием

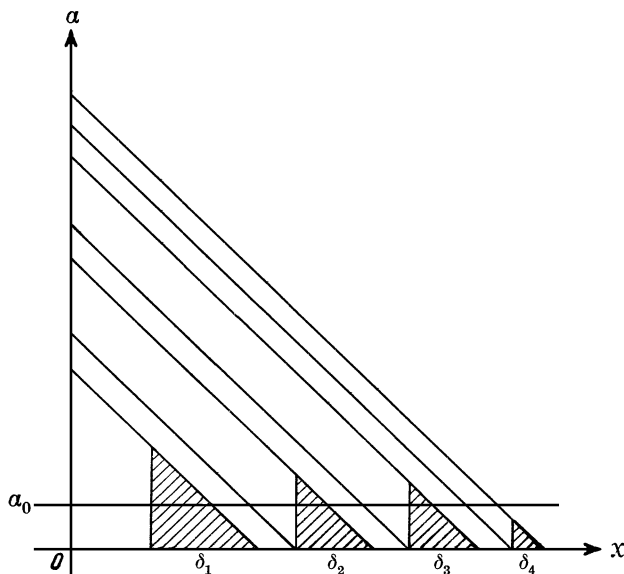


Рис. 18

δ_n и высотой δ_n . Пусть a_0 фиксировано. Рассмотрим те треугольники, которые пересекаются прямой $y = a_0$. Это будут треугольники, у которых $\delta_n > a_0$. Отсюда геометрически ясна оценка (16.6).

Возвращаясь к формуле (16.5) и подставляя (16.6), получим

$$A(\gamma) \leqslant 2 \int_{\gamma}^{2\pi} \left[mG - \sum_{\delta_n \geqslant a} \delta_n + N(a)\alpha \right] \frac{da}{\alpha}.$$

Но так как $mG = \sum \delta_n$, то

$$A(\gamma) \leqslant 2 \int_{\gamma}^{2\pi} \sum_{\delta_n < a} \delta_n \frac{da}{a} + 2 \int_{\gamma}^{2\pi} N(a) da = A_1(\gamma) + A_2(\gamma). \quad (16.7)$$

Оценим сначала интеграл $A_2(\gamma)$; имеем, обозначая $N(\gamma) = m$,

$$\begin{aligned} A_2(\gamma) &= 2 \int_{\gamma}^{2\pi} N(a) da = 2 [1(\delta_1 - \delta_2) + 2(\delta_2 - \delta_3) + \dots + m(\delta_m - \gamma)] = \\ &= 2 [\delta_1 + \dots + \delta_m - m\gamma] \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \end{aligned}$$

так как ясно, что $N(a) = k$, если $\delta_{k+1} < a \leqslant \delta_k$ (рис. 19).

Итак,

$$A_2(\gamma) \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n. \quad (16.8)$$

Переходим к оценке интеграла $A_1(\gamma)$. Если $\delta_{k+1} \leq a \leq \delta_k$, то надо в подынтегральной функции брать лишь те δ_n , индекс которых больше или равен $k+1$, поэтому (рис. 20)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_1(\gamma) &= \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{da}{a} \sum_{\delta_n < a} \delta_n = \\ &= \int_{\delta_1}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{da}{a} + \int_{\delta_2}^{\delta_1} \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n \frac{da}{a} + \int_{\delta_3}^{\delta_2} \sum_{n=3}^{\infty} \delta_n \frac{da}{a} + \dots + \int_{\gamma}^{\delta_m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \delta_n \frac{da}{a} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n (\ln 2\pi - \ln \delta_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n (\ln \delta_1 - \ln \delta_2) + \dots + \sum_{n=m+1}^{\infty} \delta_n (\ln \delta_m - \ln \gamma) = \\ &= \ln 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n - \delta_1 \ln \delta_1 - \delta_2 \ln \delta_2 - \dots - \delta_m \ln \delta_m - \ln \gamma \sum_{n=m+1}^{\infty} \delta_n \leq \\ &\leq \ln 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|, \quad (16.9) \end{aligned}$$

где K — постоянное.

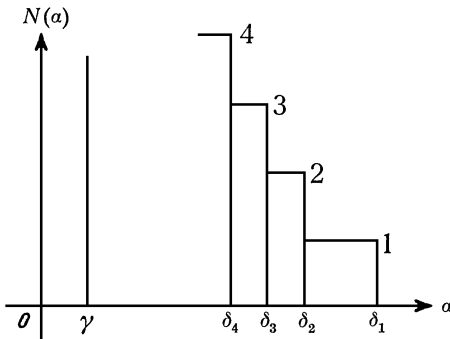


Рис. 19

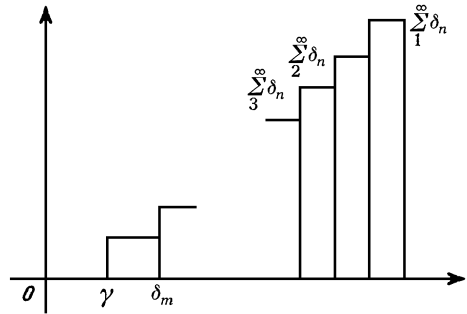


Рис. 20

Соединяя (16.8) и (16.9), найдем

$$A(\gamma) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|, \quad (16.10)$$

где C постоянно.

Точно так же находим для интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{|\psi(x-a) - \psi(x)|}{a} da dx \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|. \quad (16.11)$$

Поэтому, соединяя их вместе, найдем

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{|\psi(x+a) + \psi(x-a) - 2\psi(x)|}{a} da dx \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\ln \delta_n|. \quad (16.12)$$

Так как правая часть неравенства (16.12) не зависит от γ , то это значит, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} \frac{|\psi(x+a) + \psi(x-a) - 2\psi(x)|}{a} da dx$$

остается ограниченным при $\gamma \rightarrow 0$ и верна формула (16.3). Но подынтегральная функция неотрицательна. Отсюда следует, что она интегрируема по Лебегу в квадрате ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq x \leq 2\pi$). Тогда из теоремы Фубини следует, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)|}{\alpha} d\alpha$$

существует и конечен для почти всех значений x .

Применяя признак Дини, мы можем сказать, что в каждой точке, где этот интеграл существует, ряд Фурье от $\psi(x)$ сходится. Следовательно, он сходится почти всюду, и лемма полностью доказана.

Л е м м а 2. Пусть E есть множество с конечной логарифмической мерой. Тогда ряд Фурье для его характеристической функции $\psi(x)$ сходится почти всюду и имеет место оценка

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx \leq KL(E),$$

где $L(E)$ — логарифмическая мера, а K — постоянное.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения логарифмической меры следует, что $L(E) = \lim L(E, \varepsilon)$, где $L(E, \varepsilon)$ — логарифмическая мера с точностью до ε . Если ε фиксировано, то мы можем выбрать последовательность покрытий $G_n(\varepsilon)$ для множества E

$$G_n(\varepsilon) = \{\delta_1^{(n)}(\varepsilon), \delta_2^{(n)}(\varepsilon), \dots, \delta_k^{(n)}(\varepsilon), \dots\}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n)}(\varepsilon) < mE + \varepsilon,$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(n)}(\varepsilon) |\ln \delta_k^{(n)}(\varepsilon)| = L(E, \varepsilon).$$

Мы будем предполагать, что интервалы n -го покрытия $G_n(\varepsilon)$ целиком содержатся в интервалах $(n-1)$ -го покрытия $G_{n-1}(\varepsilon)$.

Рассмотрим характеристическую функцию $\psi_{n,\varepsilon}(x)$ для множества $G_n(\varepsilon)$ и применим к нему оценку из леммы 1. Имеем при любом $\gamma > 0$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} |\psi_{n,\varepsilon}(x+\alpha) + \psi_{n,\varepsilon}(x-\alpha) - 2\psi_{n,\varepsilon}(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} \leq K \sum \delta_k^{(n)}(\varepsilon) |\ln \delta_k^{(n)}(\varepsilon)|.$$

Оставляя γ фиксированным, перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Функции $\psi_{n,\varepsilon}(x)$ стремятся к пределу $\psi_\varepsilon(x)$ при $n \rightarrow \infty$, так как $G_n(\varepsilon) \subset G_{n-1}(\varepsilon)$, и следовательно, при каждом x имеем $\psi_{n-1,\varepsilon}(x) \geq \psi_{n,\varepsilon}(x)$. Функция $\psi_\varepsilon(x)$ есть опять характеристическая функция некоторого множества. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ под знаком интеграла законен, так как все $\psi_{n,\varepsilon}(x)$ ограничены в своей совокупности (при любом ε). Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} |\psi_\varepsilon(x+\alpha) + \psi_\varepsilon(x-\alpha) - 2\psi_\varepsilon(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx \leq KL(E, \varepsilon).$$

Если мы теперь заставим $\varepsilon \rightarrow 0$, то функции $\psi_\varepsilon(x)$ будут стремиться почти всюду к функции $\psi(x)$, характеристической для множества E , а потому

$$\int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} |\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx \leqslant KL(E).$$

Устремляя γ к нулю, видим, что нужная оценка получена.

Повторяя рассуждение, касающееся признака Дини, данное в доказательстве леммы 1, мы убедимся, что ряд Фурье от $\psi(x)$ сходится почти всюду, и лемма 2 доказана.

Наконец, отметим еще почти очевидную лемму.

Л е м м а 3. Если $f(x) \geqslant 0$ и конечна почти всюду, $\psi(x, l)$ — характеристическая функция для множества $E(l)$, где

$$E(l) = E\{f(x) > l\},$$

то для почти всех x

$$f(x) = \int_0^\infty \psi(x, l) dl.$$

Действительно, для всех тех точек (x, l) , в которых $f(x) \leqslant l$, имеем $\psi(x, l) = 0$, а если $f(x) > l$, то $\psi(x, l) = 1$. Поэтому, если x фиксировано и $f(x)$ конечна, то $\psi(x, l)$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь одну точку разрыва, ограничена и измерима, значит она интегрируема на $(0, \infty)$. Кроме того ясно, что длина того отрезка, на котором $\psi(x) = 1$ совпадает с величиной ординаты $f(x)$ нашей функции, откуда и следует, что

$$\int_0^\infty \psi(x, l) dl = \int_0^{f(x)} 1 \cdot dl = f(x),$$

а это и требовалось доказать.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Оценим двойной интеграл, применяя лемму 3:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} |f(x+\alpha) + f(x-\alpha) - 2f(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} \left| \int_0^\infty \{\psi(x+\alpha, l) + \psi(x-\alpha, l) - 2\psi(x, l)\} dl \right| \frac{d\alpha}{\alpha} dx \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} \int_0^\infty |\psi(x+\alpha, l) + \psi(x-\alpha, l) - 2\psi(x, l)| dl \frac{d\alpha}{\alpha} dx. \end{aligned}$$

Так как под знаком интеграла стоит абсолютно интегрируемая функция по трем переменным x, l, α и $\alpha > \gamma$, то можно изменить порядок интегрирования. В результате перестановок получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} |f(x+\alpha) + f(x-\alpha) - 2f(x)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx &\leqslant \\ &\leqslant \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} \int_\gamma^{2\pi} |\psi(x+\alpha, l) + \psi(x-\alpha, l) - 2\psi(x, l)| \frac{d\alpha}{\alpha} dx \right\} \cdot dl. \end{aligned}$$

Для двойного интеграла, стоящего в фигурных скобках, мы можем взять оценку из леммы 2, а это дает

$$\int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{2\pi} |f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)| \frac{da}{a} dx \leqslant \int_0^{\infty} KL[E(l)] dl = K \int_0^{\infty} \varphi(l) dl. \quad (16.13)$$

По условию теоремы функция $\varphi(l) = L[E(l)]$ суммируема на $0 \leqslant l < \infty$. Значит, правая часть (16.13) конечна, при этом она не зависит от γ . Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)| \frac{da}{a} dx < +\infty.$$

Существует, следовательно, почти всюду

$$\int_0^{2\pi} |f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)| \frac{da}{a}$$

и в силу признака Дини ряд Фурье от $f(x)$ почти всюду сходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $f(x)$ неотрицательна, непрерывна или хотя бы полунепрерывна снизу, и если область

$$E_l = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(l),$$

составленная из интервалов, на которых $f(x) > l$, такова, что

$$\int_0^M \sum \delta_n(l) |\ln \delta_n(l)| dl$$

сходится (где M верхняя грань $f(x)$ на $[0, 2\pi]$), то ряд Фурье для $f(x)$ сходится почти всюду.

Действительно, в этом случае E_l имеет логарифмическую меру, равную $\sum \delta_n(l) |\ln \delta_n(l)|$ и высказанное условие есть требование суммируемости этой логарифмической меры.

Заметим, что так как вопрос о сходимости почти всюду ряда $\sigma(f)$ не решен не только для случая, когда $f(x) \in L^2$, но даже и для случая, когда $f(x)$ ограничена, то представляет, в частности, большой интерес вопрос, когда для характеристической функции $f(x)$ некторого множества E ряд Фурье сходится почти всюду? В работе Г. П. Толстова^[2] был рассмотрен один специальный случай, когда это имеет место. Именно, если P совершенное множество и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ его смежные интервалы, расположенные в порядке убывания их длин, то в случае, когда они убывают со скоростью геометрической прогрессии, ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду, если $f(x)$ характеристическая для P .

Покажем, что теорема Г. П. Толстова вытекает из результатов Н. М. Кайдаш.

В самом деле, если δ_n убывает со скоростью геометрической прогрессии, т. е.

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{a^n}\right), \quad \text{где } a > 1,$$

то

$$\sum \delta_n |\ln \delta_n| = O\left(\sum \frac{n}{a^n}\right) < +\infty,$$

а тогда множество $G = CP$ имеет конечную логарифмическую меру. Поэтому по лемме 2 для характеристической функции $\varphi(x)$ множества G ряд $\sigma(\varphi)$ сходится почти всюду, а тогда он сходится почти всюду и для $\sigma(f)$, так как $f(x) + \varphi(x) = 1$.

З а м е ч а н и е *). Если $\psi(x)$ — характеристическая функция некоторого множества, то интегралы

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)|}{\alpha} d\alpha dx \quad (16.14)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)]^2}{\alpha} d\alpha dx \quad (16.15)$$

существуют или не существуют одновременно, так как в каждой точке x выражения $|\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)|$ и $[\psi(x+\alpha) + \psi(x-\alpha) - 2\psi(x)]^2$ либо одновременно равны нулю, либо одновременно равны 1, либо первое равно 2, а второе равно 4. С другой стороны (см. § 5), существование интеграла (16.15) эквивалентно условию

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty,$$

если a_n, b_n — коэффициенты Фурье для $\psi(x)$. Отсюда следует, что из лемм 1 и 2 можно вывести такие следствия:

1) Если $\psi(x)$ — характеристическая функция некоторого открытого множества и если для его смежных интервалов δ_n (расположенных в порядке убывания) ряд $\sum \delta_n |\ln \delta_n| < +\infty$, то для характеристической функции этого множества ряд Фурье удовлетворяет условию

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n < +\infty$$

(и следовательно, сходится почти всюду).

2) То же заключение о ряде Фурье справедливо, если $\psi(x)$ — характеристическая функция множества с конечной логарифмической мерой.

§ 17. Ряды Фурье, расходящиеся почти всюду

Мы хотим доказать, что существуют ряды Фурье, расходящиеся почти всюду **). Первый пример такого рода был построен А. Н. Колмогоровым [1]. В его примере частные суммы ряда почти всюду не ограничены.

Позднее Марцинкевич (Marcinkiewicz [1]) построил такую функцию, у которой ряд Фурье расходится почти всюду, но частные суммы ограничены.

Так как в доказательствах существования таких функций имеется много общих элементов, представляется целесообразным сначала доказать одну лемму, которая затем пригодится для построения обоих нужных примеров. Условие 3° этой леммы необходимо только для примера Марцинкевича: для примера Колмогорова достаточно, чтобы были удовлетворены условия 1°, 2° и 4°.

Л е м м а. Существует последовательность функций $\varphi_n(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ. \quad \varphi_n(x) \geq 0; \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

*) Это замечание принадлежит П. Л. Ульянову.

**) Кроме приведенных здесь, доказательство существования таких рядов имеется и в § 19. Оно короче, но геометрическая картина там менее ясна.

2°. Всякая $\varphi_n(x)$ есть функция с ограниченным изменением.

3°. Существует такая постоянная A , что

$$|S_p(x, \varphi_n)| < A \ln n \quad (p = 1, 2, \dots)$$

для всех $x \in H_n$, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m H_n = 2\pi.$$

4°. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha > 0$ и такое целое N , что для любого $n > N$ найдется множество \mathcal{E}_n , для которого

а) $m \mathcal{E}_n > 2\pi - \varepsilon$,

б) для любого $x \in \mathcal{E}_n$ найдется такое p_x , что $|S_{p_x}(x, \varphi_n)| > \alpha \ln n$,

в) $n \leq p_x \leq m_n$, где m_n зависит только от n , но не от ε .

Для доказательства леммы положим

$$A_k = k \frac{4\pi}{2n+1}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

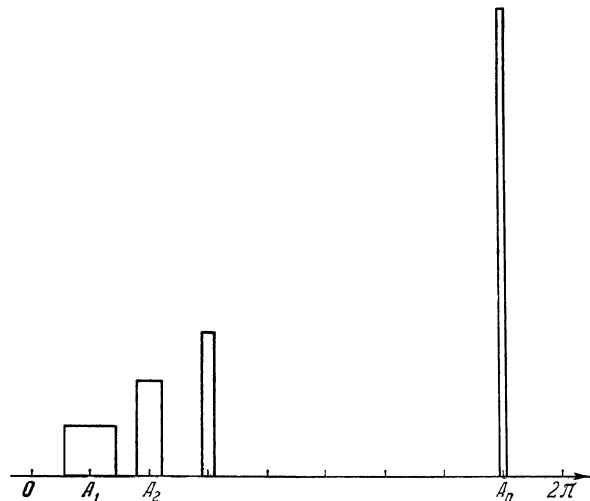


Рис. 21

— возрастающая последовательность нечетных чисел, которые мы подберем позже. Пусть

$$m_1 = n, 2m_k + 1 = \lambda_k (2n + 1) \quad (k = 2, \dots, n).$$

Полагаем

$$\Delta_k = \left(A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ясно, что отрезки Δ_k не перекрываются.

Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{m_k^2}{n} & \text{на } \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{вне всех } \Delta_k. \end{cases}$$

Мы видим (рис. 21), что прямоугольники по мере продвижения слева направо становятся все более узкими, но все более высокими. Площадь каждого из них есть

$$\frac{m_k^2}{n} \Delta_k = \frac{2}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

а потому

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} \varphi_n(x) dx = n \frac{2}{n} = 2.$$

Из построения видно, что $\varphi_n(x) \geq 0$ и $\varphi_n(x)$ с ограниченным изменением; значит, условия 1° и 2° выполнены.

Пусть для $n \geq 2$

$$d_k = \left[A_k + \frac{1}{n \ln n}, A_{k+1} - \frac{1}{n \ln n} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

и

$$H_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k.$$

Ясно, что

$$m H_n = (n-1) \left[\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n \ln n} \right] \rightarrow 2\pi \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Мы хотим оценить для $x \in H_n$ частную сумму $S_p(x, \varphi_n)$ при любом p . С этой целью мы сначала заметим, что для всякого k имеем

$$m_k \geq \lambda_k n \geq n,$$

а потому отрезки d_k (рис. 22) не только не перекрываются с Δ_j (при любых

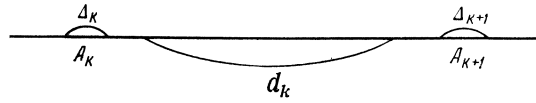


Рис. 22

k и j), но если $x \in d_k$, а $t \in \Delta_j$, то всегда при $n \geq 2$

$$|t - x| \geq \frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n \ln n}. \quad (17.1)$$

Кроме того, при $j < k$ имеем для $t \in \Delta_j$ и $x \in d_k$

$$\begin{aligned} |t - x| = x - t &= (x - A_k) + (A_k - A_j) + (A_j - t) > \\ &> (k - j) \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2} > (k - j) \frac{2\pi}{2n+1}, \end{aligned} \quad (17.2)$$

а при $j > k+1$

$$\begin{aligned} |t - x| = t - x &= (t - A_j) + (A_j - A_{k+1}) + (A_{k+1} - x) > \\ &> (j - k - 1) \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2} > (j - k - 1) \frac{2\pi}{2n+1}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Наша цель доказать, что функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условиям 3° и 4°. Неравенство (17.1) нам будет нужно для обоих этих условий. Теперь перейдем к доказательству выполнения 3°.

Мы хотим оценить для $x \in d_k$ выражение

$$S_p(x, \varphi_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) \frac{\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (17.4)$$

Вместо этого достаточно оценить

$$\tilde{S}_p(x, \varphi_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dt, \quad (17.5)$$

так как

$$|S_p(x, \varphi_n) - \tilde{S}_p(x, \varphi_n)| \leq C, \quad (17.6)$$

где C не зависит от n , поскольку $\int_0^{2\pi} \varphi_n(t) dt = 2$ (см. глава I, § 32).

Но

$$|\tilde{S}_p(x, \varphi_n)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) \frac{1}{|t-x|} dt = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_j} \varphi_n(t) \frac{1}{|t-x|} dt. \quad (17.7)$$

На основании

$$\int_{\Delta_j} \varphi_n(t) dt = \frac{2}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

из формул (17.1)–(17.3), если $x \in d_k$, находим при $j = k$ и $j = k+1$

$$\int_{\Delta_j} \varphi_n(t) \frac{1}{|t-x|} dt \leq 2n \frac{2}{n} \ln n = 4 \ln n,$$

затем

$$\int_{\Delta_j} \varphi_n(t) \frac{1}{|t-x|} dt \leq \begin{cases} \frac{2n+1}{2\pi} \frac{1}{k-j} \frac{2}{n} < \frac{2}{k-j} & \text{для } j < k, \\ \frac{2n+1}{2\pi} \frac{1}{j-k-1} \frac{2}{n} < \frac{2}{j-k-1} & \text{для } j > k+1, \end{cases}$$

а потому из (17.7)

$$\begin{aligned} |\tilde{S}_p(x, \varphi_n)| &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{k-j} + 8 \ln n + \sum_{j=k+2}^n \frac{2}{j-k-1} = \\ &= \left[8 \ln n + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=1}^{n-k-1} \frac{1}{j} \right] < 12 \ln n, \end{aligned} \quad (17.8)$$

так как каждая из сумм, входящих в квадратную скобку, не превосходит $\sum_1^n \frac{1}{j} < \ln n$.

Из (17.6) и (17.18) вытекает для $x \in d_k$

$$|S_p(x, \varphi_n)| < A \ln n, \quad (17.9)$$

где A постоянно. Но $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k$, а потому (17.9) имеет место для любого $x \in H_n$, а это значит, что условие 3° леммы выполнено.

Для доказательства 4° напомним, что числа m_k , входящие в определение $\varphi_n(x)$, пока еще не определены. Допустим, что мы задали $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1}$ и таким образом определили $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$. Мы можем выбрать m_k столь большим, чтобы

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt \right| < 1 \quad (k \geq 2) \quad (17.10)$$

для всех $x \in d_{k-1}$. Действительно, в силу (17.1) функция $\frac{\varphi_n(t)}{2 \sin \frac{t-x}{2}}$ ограни-

чена на каждом Δ_j , а потому интеграл

$$\int_{\Delta_j} \frac{\varphi_n(t)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \sin \left(m_k + \frac{1}{2} \right) (t-x) dt$$

можно сделать как угодно малым с ростом m_k (см. глава I, § 19).

Выбрав m_k так, чтобы удовлетворялось (17.10), мы теперь по индукции определили все числа m_1, m_2, \dots, m_n . Начнем для $x \in d_k$ оценивать $S_{m_k}(x, \varphi_n)$.

Так как ядро Дирихле $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt$, то очевидно для любых t

$$|D'_n(t)| \leq n^2.$$

Поэтому по теореме Лагранжа для $t \in A_j$

$$|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j-x)| \leq m_k^2 \frac{1}{m_j^2} \leq 1 \quad \text{для } j \geq k,$$

значит, для $j \geq k$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt - \frac{1}{\pi} \int_{A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(A_j-x) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{A_j} \varphi_n(t) dt = \frac{2}{n\pi}.$$

Следовательно, для $x \in d_{k-1}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=k}^n A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=k}^n A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(A_j-x) dt + O(1). \quad (17.11)$$

Но

$$\begin{aligned} D_{m_k}(A_j-x) &= \frac{\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_j-x)}{2 \sin \frac{A_j-x}{2}} = \frac{\sin(2m_k+1)\left(j \frac{2\pi}{2n+1} - \frac{x}{2}\right)}{2 \sin \frac{A_j-x}{2}} = \\ &= -\frac{\sin(2m_k+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{A_j-x}{2}}, \end{aligned}$$

поскольку $(2m_k+1) = (2n+1)\lambda_k$, где λ_k — целое.

Заметим, что для $j \geq k$ имеем $A_j - x \geq 0$, кроме того, $A_j - x < 2\pi$, поэтому знаменатель положителен и, значит,

$$\sum_{j=k}^n D_{m_k}(A_j-x) = -\sin(2m_k+1) \frac{x}{2} \sum_{j=k}^n \frac{1}{2 \sin \frac{A_j-x}{2}}, \quad (17.12)$$

где сумма положительна. Имеем, кроме того,

$$A_j - x \leq A_j - A_{k-1} = (j-k+1) \frac{4\pi}{2n+1},$$

а потому

$$\left| \sum_{j=k}^n D_{m_k}(A_j-x) \right| \geq \left| \sin(2m_k+1) \frac{x}{2} \right| \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j-k+1}.$$

Из (17.11) и (17.12), учитывая $\int_{A_j} \varphi_n(t) dt = \frac{2}{n}$, находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=k}^n A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt \right| &\geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{2}{n} \left| \sin(2m_k+1) \frac{x}{2} \right| \sum_{j=k}^n \frac{1}{j-k+1} + O(1) > \\ &> \frac{1}{\pi^2} \left| \sin(2m_k+1) \frac{x}{2} \right| \sum_{j=k}^n \frac{1}{j-k+1} + O(1). \end{aligned} \quad (17.13)$$

До сих пор k мы предполагали произвольным. Пусть теперь мы рассматриваем лишь такие k , для которых

$$k < n - \sqrt{n}$$

или

$$n - k > \sqrt{n}. \quad (17.14)$$

Для этих k имеем

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j-k+1} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{j} > \ln \sqrt{n} = \frac{1}{2} \ln n, \quad (17.15)$$

а потому из (17.13) и (17.15)

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=k}^n A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt \right| \geq \frac{1}{2\pi^2} \ln n \left| \sin(2m_k + 1) \frac{x}{2} \right| + O(1) \quad (17.16)$$

при $x \in d_{k-1}$ и k , удовлетворяющем (17.14).

Замечая, что

$$S_{m_k}(x, \varphi_n) = \frac{1}{\pi} \int_{\sum_{j=1}^n A_j} \varphi_n(t) D_{m_k}(t-x) dt,$$

мы из (17.10) и (17.16) находим для $x \in d_{k-1}$ и $2 \leq k < n - \sqrt{n}$

$$|S_{m_k}(x, \varphi_n)| > \frac{1}{2\pi^2} \ln n \left| \sin(2m_k + 1) \frac{x}{2} \right| + O(1). \quad (17.17)$$

Пусть $\delta > 0$ задано. Обозначим через $G_{k-1}(\delta)$ множество тех $x \in d_{k-1}$, для которых

$$\left| \sin(2m_k + 1) \frac{x}{2} \right| < \delta. \quad (17.18)$$

Покажем, что для

$$G(\delta) = \sum_{k=1}^{n-1} G_k(\delta)$$

имеем

$$m G(\delta) = O(\delta).$$

Действительно, если $x \in d_{k-1}$, то

$$\frac{A_{k-1}}{2} < \frac{x}{2} < \frac{A_k}{2},$$

т. е.

$$(k-1) \frac{2\pi}{2n+1} < \frac{x}{2} < k \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Но $2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1)$, поэтому

$$\left| \sin(2m_k + 1) \frac{x}{2} \right| = \left| \sin \lambda_k(2n+1) \left(\frac{x}{2} - (k-1) \frac{2\pi}{2n+1} \right) \right|$$

и достаточно изучить поведение

$$|\sin \lambda_k(2n+1)t| \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{2\pi}{2n+1}$$

или

$$|\sin \lambda_k u| \quad \text{при} \quad 0 < u < 2\pi.$$

Но множество тех u , для которых $|\sin \lambda_k u| < \delta$, состоит из $4 \lambda_k$ интервалов (рис. 23), длина каждого из которых, как легко видеть, есть $\frac{\arcsin \delta}{\lambda_k}$, а потому общая сумма их длин равна $4 \arcsin \delta$. Значит, множество тех t из $(0, 2\pi)$, где $|\sin \lambda_k (2n+1)t| < \delta$, имеет меру $4 \arcsin \delta$, а множество

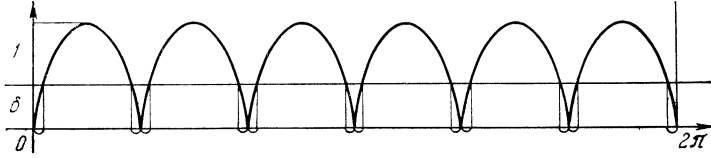


Рис. 23

тех x , где выполнено (17.18), имеет, следовательно, меру, меньшую $\frac{8 \arcsin \delta}{2n+1} < \frac{4 \arcsin \delta}{n}$.

Отсюда тем более

$$m G_{k-1}(\delta) < \frac{4 \arcsin \delta}{n}$$

и

$$m G < 4 \arcsin \delta = O(\delta).$$

Заметим, что если $x \in \bar{G}$, но $x \in d_k$, то

$$\left| \sin (2 m_k + 1) \frac{x}{2} \right| \geqslant \delta. \quad (17.19)$$

Соединяя (17.19) и (17.17), мы видим, что для $x \in d_k$, $x \in \bar{G}$ и $k \leqslant n - \sqrt{n}$ имеем

$$|S_{m_k}(x, \varphi_n)| \geqslant \frac{\delta}{2\pi^2} \ln n - O(1). \quad (17.20)$$

Положим $E_n = \sum_{k=1}^{[n-\sqrt{n}]-1} d_k$ и $\mathcal{E}_n = [CG(\delta)] E_n$, где $CG(\delta)$ — множество точек

$x \in [0, 2\pi]$ и $x \in \bar{G}(\delta)$. Имеем

$$m E_n = ([n - \sqrt{n}] - 1) \left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n \ln n} \right) \rightarrow 2\pi \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$m \mathcal{E}_n \geqslant 2\pi - o(1) - O(\delta),$$

т. е.

$$m \mathcal{E}_n > 2\pi - \varepsilon,$$

если δ выбрано разумно и $n > N$, где N достаточно велико.

Но если $x \in \mathcal{E}_n$, то $x \in E_n$, а значит, для него найдется такое k , что $x \in d_{k-1}$ и $k \leqslant n - \sqrt{n}$, кроме того, $x \in \bar{G}$, поэтому для него верно (17.20), причем $m_1 \leqslant m_k \leqslant m_n$. Поэтому, вспоминая, что $m_1 = n$, мы можем утверждать, что для любого $x \in \mathcal{E}_n$ найдется такое p_x , $n \leqslant p_x \leqslant m_n$, для которого

$$|S_{p_x}(x, \varphi_n)| \geqslant \frac{\delta}{2\pi^2} \ln n - O(1),$$

причем

$$m \mathcal{E}_n > 2\pi - \varepsilon \quad \text{для } n > N.$$

Если предположить N достаточно большим, то

$$\frac{\delta}{2\pi} \ln n - O(1) > \frac{\delta}{4\pi^2} \ln n \quad \text{при } n > N$$

и, обозначая $\alpha = \frac{\delta}{4\pi^2}$, можем написать

$$|S_{p_n}(x, \varphi_n)| > \alpha \ln n \quad \text{для } n > N.$$

Мы видим, что 4° выполнено и лемма полностью доказана.

Для построения примеров Колмогорова и Марцинкевича мы теперь рассмотрим функции $\varphi_n(x)$, входящие в предыдущую лемму, и выберем последовательность целых чисел

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

удовлетворяющих ряду условий, которые будут сформулированы ниже, но во всяком случае

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} < +\infty.$$

После этого функции

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{\ln n_k}} \quad (17.21)$$

и

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{\ln n_k} \quad (17.22)$$

будут определены почти всюду и суммируемы, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(x) dx}{\sqrt{\ln n_k}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} < +\infty$$

(тем более это верно, если в знаменателе $\ln n_k$), и остается применить теорему Лебега (см. Вводный материал, § 14).

Покажем, что при разумном подборе чисел $\{n_k\}$ функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ имеют почти всюду расходящиеся ряды Фурье, причем для $\Phi(x)$ имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, \Phi)| = +\infty \quad \text{почти всюду,} \quad (17.23)$$

а для $F(x)$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, F)| < +\infty \quad \text{почти всюду.} \quad (17.24)$$

Числа $\{n_k\}$ мы будем строить по индукции наряду с некоторой другой последовательностью

$$q_1 < q_2 < \dots < q_k < \dots$$

Прежде всего положим

$$n_1 = q_1 = 1.$$

Далее, предполагая, что

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1},$$

$$q_1 < q_2 < \dots < q_{k-1}$$

уже построены, выберем $q_k > q_{k-1}$ и так, чтобы для $i = 1, 2, \dots, k-1$ иметь на множестве $P_k, mP_k > 2\pi - \frac{1}{2^k}$, неравенства

$$b) \quad |S_p(x, \varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}(x)| < \frac{1}{k} \quad \text{при } p \geq q_k.$$

Это возможно, так как все $\varphi_n(x)$ с ограниченным изменением, значит их ряды Фурье сходятся к ним всюду, кроме точек разрыва, а потому P_k может быть выбрано по теореме Егорова.

После того как q_k определено, мы находим n_k так, чтобы

$$в) \quad \sqrt{\ln n_k} \geq 2^k m_{n_k} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

(где числа m_n взяты из условия 4° леммы) и, кроме того,

$$г) \quad \sqrt{\ln n_k} \geq 2^k q_k.$$

Таким образом, по индукции мы определяем все n_k и все q_k . Так как $m_n \geq n > 1$, то из в) во всяком случае следует а), а потому функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ теперь полностью определены.

Докажем, что их ряды Фурье расходятся почти всюду, причем удовлетворены условия (17.23) и (17.24).

Обозначим через M множество тех x , для которых ряд (17.21) сходится к $\Phi(x)$, а ряд (17.22) сходится к $F(x)$, и, кроме того, $\Phi(x)$ и $F(x)$ конечны. Имеем

$$mM = 2\pi.$$

Положим

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k,$$

где множества P_k определены в условии б). Имеем

$$mP = 2\pi.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим множества \mathcal{E}_n , определенные в условии 4° леммы, и пусть

$$\mathcal{E} = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \mathcal{E}_{n_k}.$$

Так как

$$m\mathcal{E}_n > 2\pi - \varepsilon$$

для всех достаточно больших значений n , то

$$m\mathcal{E} \geq 2\pi - \varepsilon.$$

Пусть, наконец

$$E = \mathcal{E} \cap M.$$

Тогда

$$mE > 2\pi - \varepsilon.$$

Покажем, что $\sigma(\Phi)$ расходится в каждой точке E , а $\sigma(F)$ почти всюду на E ; в силу произвольности ε отсюда и будет следовать их расходимость почти всюду.

Заметим, что ряды с положительными членами можно интегрировать почленно; это же верно, если мы все члены ряда умножим на функцию, меняющую знак лишь конечное число раз в интервале интегрирования; но ядро Дирихле обладает этим свойством, а потому

$$\begin{aligned} S_p(x, \Phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t) D_p(t-x) dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(t) D_p(t-x) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} S_p(x, \varphi_{n_k}) \end{aligned}$$

и аналогично

$$S_p(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n_k} S_p(x, \varphi_{n_k}).$$

Пусть $\eta > 0$ задано. Если $x \in E$, то $x \in M$ и, значит, можно взять столь большое k , что

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} \varphi_{n_j}(x) - \Phi(x) \right| < \eta \quad (17.25)$$

и

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln n_j} \varphi_{n_j}(x) - F(x) \right| < \eta. \quad (17.26)$$

Но $x \in E$, значит, $x \in P$, а потому $x \in P_k$ для $k \geq k_0$, следовательно, для этого x

$$|S_p(x, \varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}(x)| < \frac{1}{k} \quad \text{при } p \geq q_k$$

(при $i = 1, 2, \dots, k-1$). Отсюда следует, что при $p \geq q_k$ имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} S_p(x, \varphi_{n_j}) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} \varphi_{n_j}(x) \right| < \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} < \frac{1}{k}, \quad (17.27)$$

так как из в) уж во всяком случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Из (17.25) и (17.27) следует

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} S_p(x, \varphi_{n_j}) - \Phi(x) \right| < \eta + \frac{1}{k}, \quad \text{если } p \geq q_k \text{ и } x \in E. \quad (17.28)$$

Совершенно так же имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln n_j} S_p(x, \varphi_{n_j}) - F(x) \right| < \eta + \frac{1}{k} \quad \text{для } x \in E \text{ и } p \geq q_k. \quad (17.29)$$

Заметим, что из г) и подавно следует $n_k > q_k$, а потому неравенства (17.28) и (17.29) во всяком случае справедливы, если $p \geq n_k$.

Теперь заметим, что если $x \in E$, то $x \in \mathcal{E}_{n_k}$ для бесконечного множества значений k ; следовательно, на основании условия 4° леммы найдется такое $p_x, n_k \leq p_x \leq m_{n_k}$, что

$$|S_{p_x}(x, \varphi_{n_k})| > \alpha \ln n_k. \quad (17.30)$$

Напишем тогда

$$\begin{aligned} S_{p_x}(x, \Phi) - \Phi(x) &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}) - \Phi(x) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} S_{p_x}(x, \varphi_{n_k}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}). \end{aligned} \quad (17.31)$$

Имеем

$$|S_{p_x}(x, \varphi_{n_j})| \leq (p_x + 1) \int_0^{2\pi} \varphi_{n_j}(t) dt = 2(p_x + 1) < 4p_x \leq 4m_{n_k},$$

а потому в силу условия в), наложенного на n_k ,

$$\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}) \right| \leq 4 m_{n_k} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} \leq 4 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-2}}. \quad (17.32)$$

Тогда из (17.28), (17.30), (17.31) и (17.32) находим

$$|S_{p_x}(x, \Phi) - \Phi(x)| \geq \alpha \sqrt{\ln n_k} - \eta - \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k-2}} \geq \alpha 2 - \eta - o(1),$$

и так как η произвольно мало, то правая часть может быть сделана как угодно большой с ростом k .

Но так как для любого $x \in E$ это соотношение справедливо для бесконечного множества значений k , а $p_x \geq n_k$, то для $x \in E$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, \Phi)| = +\infty.$$

Расходимость на E ряда $\sigma(\varphi)$ отсюда уже вытекает, и в силу

$$mE > 2\pi - \varepsilon$$

и произвольности ε соотношение (17.23) имеет место почти всюду.

Для доказательства расходимости ряда $\sigma(F)$ на E рассуждаем так: имеем также

$$S_{p_x}(x, F) - F(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln n_j} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}) - F(x) + \\ + \frac{1}{\ln n_k} S_{p_x}(x, \varphi_{n_k}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\ln n_j} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}). \quad (17.33)$$

Из (17.32) сразу видно, что

$$\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\ln n_j} S_{p_x}(x, \varphi_{n_j}) \right| \leq \frac{1}{2^{k-2}}. \quad (17.34)$$

Из (17.33), (17.29), (17.30) и (17.34) находим, что

$$|S_{p_x}(x, F) - F(x)| \geq \alpha - \eta - \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k-2}} > \frac{\alpha}{3}, \quad (17.35)$$

если взять $\eta < \frac{\alpha}{3}$ и k столь большим, чтобы $\frac{2}{k} < \frac{\alpha}{3}$.

Итак, для $x \in E$ найдется бесконечное множество значений p_x , для которых справедливо (17.35). Между тем, если ряд Фурье от какой-нибудь функции сходится на множестве положительной меры, то он сходится именно к ней почти всюду на этом множестве. Значит, из (17.35) следует расходимость $\sigma(F)$ почти всюду на E , а значит, и почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Нам осталось доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, F)| < +\infty$$

почти всюду. С этой целью положим

$$H = \lim_{k \rightarrow \infty} H_{n_k},$$

где множества H_n взяты из условия 3° леммы. Имеем

$$mH = 2\pi,$$

так как n_k растут очень быстро (см. условие г) леммы). Положим

$$E^* = HPM$$

и докажем, что условие (17.24) имеет место для любого $x \in E^*$, т. е. почти всюду.

Действительно, пусть $x \in E^*$. Пусть p — любое целое. Найдем k такое, что

$$q_k \leq p < q_{k+1}.$$

Имеем

$$|S_p(x, F)| \leq \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_p(x, \varphi_{n_j})}{\ln n_j} \right| + \left| \frac{S_p(x, \varphi_{n_k})}{\ln n_k} \right| + \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{S_p(x, \varphi_{n_j})}{\ln n_j} \right|. \quad (17.36)$$

Но в силу (17.29) и $p \geq q_k$ при достаточно больших k мы будем иметь

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_p(x, \varphi_{n_j})}{\ln n_j} \right| \leq F(x) + \eta + \frac{1}{k} \quad \text{для } x \in E. \quad (17.37)$$

В силу условия 3° леммы

$$\left| \frac{S_p(x, \varphi_{n_k})}{\ln n_k} \right| < A \quad \text{для } x \in H_{n_k}, \quad (17.38)$$

а значит, и для $x \in E^*$ это будет верно при достаточно больших k . Наконец,

$$\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\ln n_j} S_p(x, \varphi_{n_j}) \right| \leq 4q_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\ln n_j} \leq 4q_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j q_j} < \frac{1}{2^{k-2}}, \quad (17.39)$$

так как $q_j \geq q_{k+1}$ для $j \geq k+1$.

Соединяя (17.36), (17.37), (17.38) и (17.39), находим

$$|S_p(x, F)| \leq F(x) + \eta + \frac{1}{k} + A + \frac{1}{2^{k-2}} < +\infty \quad \text{при } p \geq p_0(x)$$

для любого $x \in E^*$, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. Мы получили для функции $\Phi(x)$ равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, \Phi)| = +\infty \quad \text{почти всюду.}$$

Возникает вопрос, можно ли было построить такую $f(x)$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) = +\infty \quad \text{почти всюду.}$$

Оказывается, что это невозможно. Более того, мы докажем в § 4 главы XV, что если для ряда Фурье имеем

$$\overline{\lim} S_n(x) = +\infty$$

на некотором E , $mE > 0$, то почти всюду на нем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\infty.$$

§ 18. Невозможность усиления признака Марцинкевича

Результаты предыдущего параграфа позволяют нам доказать, что теорема § 15 в известном смысле не может быть усилена. Именно имеет место следующая теорема Марцинкевича (Marcinkiewicz^[1]).

Т е о р е м а. Пусть $\omega(t)$ — положительная, четная функция, не убывающая на некотором $(0, \delta)$ ($0 < \delta \leq \frac{1}{3}$) и такая, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) \ln \frac{1}{|t|} = +\infty. \quad (18.1)$$

Тогда существует функция $f(x)$, для которой

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f(x+u) - f(x)| du = O[\omega(t)] \quad (18.2)$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$ и, однако, ее ряд Фурье расходится почти всюду.

Положим

$$\varphi(t) = \omega(t) \ln \frac{1}{|t|} \quad (0 \leq t \leq \delta). \quad (18.3)$$

Тогда из (18.1) вытекает, что $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Если положить

$$\varphi_1(t) = \min_{0 < \tau \leq t} \varphi(\tau),$$

то $\varphi_1(t)$ может только убывать на $(0, \delta)$, $\varphi_1(t) \leq \varphi(t)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_1(t) = +\infty.$$

Если мы обозначим

$$\omega_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\ln \frac{1}{|t|}},$$

то ясно, что $\omega_1(t) \leq \omega(t)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega_1(t) \ln \frac{1}{|t|} = +\infty. \quad (18.4)$$

Покажем, что для любого α , $0 \leq \alpha \leq 1$, справедливо неравенство

$$\alpha \omega_1(t) \leq \omega_1(\alpha t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \delta. \quad (18.5)$$

В самом деле, функция $t \ln \frac{1}{t}$ монотонно возрастает на $(0, \delta)$, а $\varphi_1(t)$ монотонно убывает. Поэтому функция

$$\frac{\omega_1(t)}{t} = \frac{\varphi_1(t)}{t \ln \frac{1}{t}}$$

монотонно убывает на $(0, \delta)$, т. е.

$$\frac{\omega_1(t_1)}{t_1} > \frac{\omega_1(t_2)}{t_2} \quad \text{при} \quad 0 < t_1 < t_2 \leq \delta. \quad (18.6)$$

Из (18.6) следует

$$\alpha \omega_1(t) = \alpha t \frac{\omega_1(t)}{t} < \alpha t \frac{\omega_1(\alpha t)}{\alpha t} = \omega_1(\alpha t),$$

т. е. (18.5) справедливо.

Так как из (18.4) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = +\infty,$$

то, полагая

$$\varepsilon_n^2 = \frac{1}{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}, \quad (18.7)$$

имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Но в силу $\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ можно считать, что

$$\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \leq \varepsilon_n \leq 1 \quad \text{при} \quad n \geq n_0. \quad (18.8)$$

Обозначим

$$f_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\ln n},$$

где $\varphi_n(x)$ — функции из леммы § 17. Мы уже доказали, что если числа n_k выбраны так, чтобы удовлетворять условиям а), б), в) и г) (см. построение примеров Колмогорова и Марцинкевича, стр. 398), то функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x)$$

имеет почти всюду расходящийся ряд Фурье.

Если мы потребуем, чтобы, кроме этих условий, числа n_k удовлетворяли еще дополнительному условию, а именно, чтобы

$$\text{е)} \quad \varepsilon_{n_k} < \frac{1}{4^{k+2}} \quad \text{и} \quad n_1 \geq n_0,$$

а это возможно, ибо $\varepsilon \rightarrow 0$, то функция $f(x)$ будет удовлетворять условиям нашей теоремы.

Чтобы убедиться в этом, раз уже установлена расходимость $\sigma(f)$ почти всюду, достаточно доказать, что $f(x)$ удовлетворяет условию (18.2).

С этой целью, сохраняя обозначения § 17, рассмотрим множество

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[A_k + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k+1} - \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n} \right].$$

Ясно, что его мера больше $2\pi - 2\sqrt{\varepsilon_n} - \frac{3\pi}{n}$, а потому

$$mD_{n_k} = 2\pi - 2\sqrt{\varepsilon_{n_k}} - \frac{3\pi}{n_k} > 2\pi - \frac{1}{2^k}$$

в силу г) и е). Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти такое p , что $\frac{1}{2^{p-1}} < \varepsilon$ и тогда, полагая

$$D(\varepsilon) = \prod_{k=p+1}^{\infty} D_{n_k},$$

имеем

$$mD(\varepsilon) > 2\pi - \varepsilon.$$

Так как все функции $f_{n_k}(x)$ состоят из конечного числа ступенек, то можно покрыть точки разрыва $f_{n_1}(x), \dots, f_{n_p}(x)$ системой из конечного числа отрезочков с общей суммой длин, меньшей чем ε , и тогда оставшееся множество $B(\varepsilon)$ состоит из конечного числа интервалов, на каждом из которых все $f_{n_i}(x)$ постоянны при $i = 1, 2, \dots, p$.

Докажем, что на множестве

$$A(\varepsilon) = D(\varepsilon) \cap B(\varepsilon)$$

функция $f(x)$ удовлетворяет условию (18.2). Так как

$$mA(\varepsilon) \geq 2\pi - 2\varepsilon,$$

а ε произвольно, то отсюда будет следовать, что (18.2) имеет место почти всюду.

Оценим сначала для $x_0 \in D_n$ ($n \geq n_0$) интеграл

$$\frac{1}{u} \int_0^u |f_n(x_0+t) - f_n(x_0)| dt.$$

Поскольку $x_0 \in D_n$, то найдется такое k , что

$$x_0 \in \left[A_k + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k+1} - \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n} \right].$$

По построению $\varphi_n(x)$ равна нулю вне всякого

$$\left(A_j - \frac{1}{m_j^2}, A_j + \frac{1}{m_j^2} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

поэтому очевидно, что (см. (18.8))

$$\frac{1}{u} \int_0^u |f_n(x_0 + t) - f_n(x_0)| dt = 0 \quad \text{при} \quad 0 < |u| < \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}.$$

Если же $\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n} \leq |u| \leq \frac{1}{n}$, то $f_n(x_0) = 0$ и в силу (18.7)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_n(x_0 + t) - f_n(x_0)| dt \right| &= \left| \frac{1}{u} \int_0^u f_n(x_0 + t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|u|} \frac{2}{n} \frac{1}{\ln n} \leq \frac{2n}{\sqrt{\varepsilon_n}} \frac{2}{n} \varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) = 4 \varepsilon_n \sqrt{\varepsilon_n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Но в силу (18.5) и (18.8)

$$\varepsilon_n \sqrt{\varepsilon_n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2 \varepsilon_n \omega_1\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right) \leq 2 \varepsilon_n \omega\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right) \leq 2 \varepsilon_n \omega(u),$$

а потому

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u f_n(x_0 + t) - f_n(x_0) dt \right| \leq 8 \varepsilon_n \omega(u). \quad (18.9)$$

Рассуждая так же, если $\frac{m}{n} \leq |u| < \frac{m+1}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), мы найдем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_n(x_0 + t) - f_n(x_0)| dt \right| &= \left| \frac{1}{u} \int_0^u f_n(x_0 + t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|u|} \frac{2(m+1)}{n} \frac{1}{\ln n} \leq \frac{n}{m} \frac{2(m+1)}{n} \varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leq 4 \varepsilon_n^2 \omega(u), \end{aligned}$$

т. е. (18.9) и подавно справедливо.

Отсюда следует, что для любого $x_0 \in D_n$ имеем

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_n(x_0 + t) - f_n(x_0)| dt \right| \leq 8 \varepsilon_n \omega(u) \quad \text{для} \quad 0 \leq |u| \leq 1,$$

а потому для $x_0 \in D_{n_k}$ в силу е)

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_{n_k}(x_0 + t) - f_{n_k}(x_0)| dt \right| \leq 8 \varepsilon_{n_k} \omega(u) < \frac{1}{4^{k-1}} \omega(u). \quad (18.10)$$

Пусть теперь $x_0 \in A(\varepsilon)$. Напишем

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^p f_{n_k}(x_0) + \sum_{p+1}^{\infty} f_{n_k}(x_0) = F_1(x_0) + F_2(x_0). \quad (18.11)$$

Так как $x_0 \in A(\varepsilon)$, то $x_0 \in D(\varepsilon)$, т. е. $x_0 \in D_{n_k}$ при $k \geq p+1$; поэтому в силу (18.10) имеем для $0 \leq |u| \leq 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u} \int_0^u F_2(x_0+t) - F_2(x_0) dt \right| &\leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{1}{u} \int_0^u f_{n_k}(x_0+t) - f_{n_k}(x_0) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \omega(u) = \frac{\omega(u)}{3 \cdot 4^{p-1}} < \varepsilon^2 \omega(u) \quad (18.12) \end{aligned}$$

в силу выбора числа p .

Но $x_0 \in A(\varepsilon)$, значит $x_0 \in B(\varepsilon)$, а потому всякая из $f_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) постоянна в некоторой малой окрестности точки x_0 , и, значит,

$$\frac{1}{u} \int_0^u |f_{n_k}(x_0+t) - f_{n_k}(t)| dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

если только u достаточно мало. Отсюда

$$\frac{1}{u} \int_0^u |F_1(x_0+t) - F_1(x_0)| dt = 0. \quad (18.13)$$

Объединяя (18.12) и (18.13), видим, что при достаточно малом u

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f(x_0+t) - f(x_0)| dt \right| \leq \omega(u)$$

и это справедливо для всех $x \in A(\varepsilon)$. Значит, для каждого $x_0 \in A(\varepsilon)$ можно найти такое постоянное C_{x_0} (зависящее от x_0), что

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f(x_0+t) - f(x_0)| dt \right| \leq C_{x_0} \omega(u)$$

уже для всех u на $(0, 2\pi]$, т. е. в точке x_0 справедливо (18.2). Этим и заканчивается доказательство теоремы.

§ 19. О ряде, сопряженном к почти всюду расходящемуся ряду Фурье

Возникает вопрос, являются ли рядами Фурье ряды $\bar{\sigma}(\Phi)$ и $\bar{\sigma}(F)$, где $\Phi(x)$ и $F(x)$ — функции, построенные в § 17. Покажем, что ответ на этот вопрос в обоих случаях отрицательный.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ неотрицательны. Но по теореме М. Рисса (M. Riesz^[1]), которая будет доказана в главе VIII, если для неотрицательной функции $\psi(x)$ ряд $\bar{\sigma}(\psi)$ есть ряд Фурье, то

$$\psi(x) \ln^+ \psi(x) \in L. \quad (19.1)$$

(Под $\ln^+ x$ понимается функция, совпадающая с $\ln x$, если $\ln x \geq 0$, и равная нулю, если $\ln x < 0$.)

Докажем, что для $\Phi(x)$ и $F(x)$ условие (19.1) не имеет места. Достаточно это доказать для $F(x)$, так как $\Phi(x) \geq F(x)$ почти всюду, поскольку все члены ряда (17.21) больше соответствующих членов ряда (17.22).

Теперь заметим, что

$$F(x) \ln^+ F(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_{n_k}(x) \ln^+ F(x)}{\ln n_k} \quad \text{при любом } N.$$

Тем более

$$F(x) \ln^+ F(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_{n_k}(x)}{\ln n_k} \ln^+ \frac{\varphi_{n_k}(x)}{\ln n_k} \quad \text{при любом } N.$$

Но при любом n имеем (замечая, что $m_j \geq n$)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(x)}{\ln n} \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\ln n} dx &= \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^n \int_{A_j} \frac{m_j^2}{n} \ln^+ \frac{m_j^2}{n \ln n} dx = \\ &= \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2}{n} \ln^+ \frac{m_j^2}{n \ln n} \frac{2}{m_j^2} = \frac{2}{n \ln n} \sum_{j=1}^n \ln^+ \frac{m_j^2}{n \ln n} \geq \\ &\geq \frac{2}{n \ln n} n \ln \frac{n}{\ln n} = 2 \frac{\ln n - \ln \ln n}{\ln n} \rightarrow 2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

отсюда ясно, что

$$\int_0^{2\pi} F(x) \ln^+ F(x) dx = +\infty,$$

т. е. $F(x) \ln^+ F(x)$ несуммируема.

З а м е ч а н и е. Из доказанного сразу следует, что при любом $p > 1$ мы имеем

$$F(x) \notin L^p \quad \text{и} \quad \Phi(x) \notin L^p.$$

Таким образом, ни пример Колмогорова, ни пример Марцинкевича не решают вопроса о существовании ряда Фурье, расходящегося почти всюду, и для которого $f(x) \in L^p$ при $p > 1$ (в частности, вопрос остается открытым для функций с интегрируемым квадратом, о чем мы уже говорили во введении к этой главе).

Мы убедились, что ни пример Колмогорова, ни пример Марцинкевича не дают ответа на вопрос, может ли у ряда $\sigma(f)$, расходящегося почти всюду, сопряженный ряд $\bar{\sigma}(f)$ также быть рядом Фурье. Оказывается, что этот вопрос тем не менее решается в положительном смысле.

Этот результат был замечен Сунуоти (Sunouchi^[3]). По сути дела он уже содержался в книге Харди и Рогозинского (Hardy and Rogosinski^[M.28]). Желая доказать теорему Колмогорова о существовании функции с рядом Фурье, расходящимся почти всюду, они построили эту функцию не так, как это было сделано Колмогоровым; Сунуоти, анализируя их рассуждения, убедился, что для построенной ими функции $f(x)$ ряд $\bar{\sigma}(f)$ сам является рядом Фурье.

Чтобы построить такую функцию, мы докажем лемму:

Л е м м а. *Существует последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x)$, обладающих свойствами*

$$\text{а) } T_n(x) \geq 0,$$

$$\text{б) } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) dx = 1,$$

в) *каждому T_n соответствует такое множество E_n , $mE_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$, что для любого $x \in E_n$ найдется k_x , для которого*

$$|S_{k_x}(x, T_n)| > M_n$$

и $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Эта лемма играет ту же роль, как лемма § 17, но здесь функции $\varphi_n(x)$, которые были разрывны, заменены тригонометрическими полиномами.

Для доказательства леммы положим, как это было и в лемме § 17,

$$A_j = \frac{4\pi j}{2n+1} \quad (0 \leq j \leq n),$$

и пусть опять m_0, m_1, \dots, m_n — целые числа такие, что $2m_j + 1$ делится на $2n + 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$), но, кроме того, предполагаем

$$m_0 \geq n^4 \quad \text{и} \quad m_{j+1} > 2m_j.$$

Положим

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1} \{F_{m_0}(x - A_0) + F_{m_1}(x - A_1) + \dots + F_{m_n}(x - A_n)\},$$

где F_m — фейеровское ядро. Покажем, что тригонометрические полиномы $T_n(x)$ удовлетворяют условиям леммы.

Действительно, $T_n(x) \geq 0$, так как фейеровские ядра неотрицательны, а поскольку у фейеровских ядер свободный член равен $\frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) dx = 1.$$

Таким образом удовлетворены условия а) и б).

Пусть $m_j \leq k \leq m_{j+1}$. Тогда

$$S_k(x, T_n) = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{l=0}^j F_{m_l}(x - A_l) + \sum_{l=j+1}^n \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^k \frac{m_l + 1 - r}{m_l + 1} \cos r(x - A_l) \right\} \right].$$

Действительно, для m_l при $l \leq j$ частная сумма k первых членов ряда Фурье от F_{m_l} просто совпадает с самим полиномом F_{m_l} ; для остальных F_{m_l} мы записываем их выражения через косинусы в явной форме и берем k первых членов этого разложения.

Если теперь разложить каждый из членов последней суммы на два, пользуясь тем, что

$$m_l + 1 - r = k + 1 - r + m_l - k,$$

и обозначить, как всегда, через $D_k(u)$ ядра Дирихле, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^k \frac{m_l + 1 - r}{m_l + 1} \cos r(x - A_l) &= \\ &= \frac{1}{2} + \frac{k+1}{m_l+1} \sum_{r=1}^k \frac{k+1-r}{k+1} \cos r(x - A_l) + \frac{m_l-k}{m_l+1} \sum_{r=1}^k \cos r(x - A_l) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{k+1}{m_l+1} \left[F_k(x - A_l) - \frac{1}{2} \right] + \frac{m_l-k}{m_l+1} \left[D_k(x - A_l) - \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{k+1}{m_l+1} F_k(x - A_l) + \frac{m_l-k}{m_l+1} D_k(x - A_l). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_k(x, T_n) &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^j F_{m_l}(x - A_l) + \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{k+1}{m_l+1} F_k(x - A_l) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1} D_k(x - A_l) = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Это тождество справедливо при $m_j \leq k \leq m_{j+1}$, мы его используем при $k = m_j$.

Рассмотрим $S_{m_j}(x, T_n)$ на интервале $I_j \left(A_j + \frac{1}{n^2}, A_{j+1} - \frac{1}{n^2} \right)$. Если $x \in I_j$, то для любого l , даже и для $l = j$, имеем $|x - A_l| \geq \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{m_l}}$, так как $n^4 \leq m_0$.

Но если $t \neq 0$, то $F_m(t) = O\left(\frac{1}{m t^2}\right)$ (см. главу I, § 47), значит,

$$F_{m_l}(x - A_l) = O\left(\frac{1}{m_l |x - A_l|^2}\right) = O(1).$$

Отсюда следует, что члены вида $F_{m_l}(x - A_l)$, встречающиеся в S_1 и S_2 , ограничены, а так как при $k = m_j$ и $l \geq j + 1$ имеем $\frac{k+1}{m_l+1} \leq 1$, то приходим к выводу, что и сами суммы S_1 и S_2 ограничены.

Итак,

$$|S_{m_j}(x, T_n)| > |S_3| - H \quad \text{для } x \in I_j,$$

где H — ограниченная величина.

Заметим теперь, что так как $2m_j + 1$ делится на $2n + 1$, то

$$D_{m_j}(x - A_l) = \frac{\sin\left(m_j + \frac{1}{2}\right)(x - A_l)}{2 \sin \frac{x - A_l}{2}} = \frac{\sin(2m_j + 1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x - A_l}{2}} = - \frac{\sin(2m_j + 1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{A_l - x}{2}}$$

и, значит,

$$S_3 = - \sin(2m_j + 1) \frac{x}{2} \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l - m_j}{m_l + 1} \frac{1}{2 \sin \frac{A_l - x}{2}}.$$

Члены, входящие в последнюю сумму, все положительны, поэтому

$$\frac{1}{2 \sin \frac{A_l - x}{2}} > \frac{1}{A_l - x} \geq \frac{1}{A_l - A_j} = \frac{2n+1}{(l-j)4\pi}.$$

Кроме того, из $m_{j+1} > 2m_j$ следует $\frac{m_l - m_j}{m_l + 1} \geq \frac{1}{2}$ для $l \geq j + 1$, а потому

$$\begin{aligned} |S_3| &\geq \left| \sin(2m_j + 1) \frac{x}{2} \right| \frac{1}{2(n+1)} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{l-j} \geq \\ &\geq \frac{1}{8\pi} \ln(n-j) \left| \sin(2m_j + 1) \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Если рассмотреть лишь те значения j , для которых $j \leq n - \sqrt{n}$, то для них

$$|S_3| \geq \frac{1}{16\pi} \ln n \left| \sin(2m_j + 1) \frac{x}{2} \right|.$$

Обозначим через E_n множество тех x , для которых $x \in I_j$ при $j \leq n - \sqrt{n}$ и

$$\left| \sin(2m_j + 1) \frac{x}{2} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \quad (19.3)$$

Ясно, что для них

$$|S_3| \geq \frac{1}{16\pi} \sqrt{\ln n}$$

и, следовательно,

$$|S_{m_j}(x, T_n)| > \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - H = M_n, \quad (19.4)$$

где $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но сумма длин интервалов I_j при $j \leq n - \sqrt{n}$ имеет порядок

$$(n - \sqrt{n}) \left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^2} \right) \rightarrow 2\pi \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а если из этих интервалов выкинуть точки, в которых нарушается неравенство (19.3), то, как мы видели при доказательстве леммы § 17, мы выкинем лишь множество, мера которого не превосходит $4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{\ln n}} = o(1)$, поэтому

$$mE_n \rightarrow 2\pi \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и лемма доказана.

Переходим к построению функции $f(x)$ с рядом Фурье, расходящимся почти всюду, но таким, что и $\sigma(f)$ есть ряд Фурье.

Выберем последовательность n_k так, чтобы

$$\sum \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} < +\infty. \quad (19.5)$$

Так как $T_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка m_n , то можно написать

$$T_{n_k}(x) = \sum_{\nu=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_{\nu}^{(k)} e^{i\nu x}$$

(записывая полином в показательной форме). Если выбрать числа ν_k так, чтобы

$$\nu_1 > m_{n_1}, \nu_2 > \nu_1 + m_{n_1} + m_{n_2}, \dots, \nu_k > \nu_{k-1} + m_{n_{k-1}} + m_{n_k}, \dots,$$

то тригонометрические полиномы

$$P_{n_k}(x) = \frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{\nu=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_{\nu}^{(k)} e^{i\nu x} = \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{\nu=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_{\nu}^{(k)} e^{i(\nu+\nu_k)x}$$

обладают тем свойством, что при $j \neq k$ полиномы P_{n_k} и P_{n_j} не имеют подобных членов. Так как

$$\int_0^{2\pi} |P_{n_k}(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} T_{n_k}(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{M_{n_k}}},$$

то в силу (19.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |P_{n_k}(x)| dx < +\infty, \quad (19.6)$$

а потому функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) \quad (19.7)$$

определена почти всюду и суммируема. Ее значения будут комплексными числами. Полагая

$$F(x) = f(x) + ig(x),$$

докажем, что $f(x)$ является искомой функцией.

Для этого прежде всего заметим, что в ряде (19.7) члены идут в возрастающем порядке показателей $e^{i\nu x}$. Записав каждое P_{n_k} в развернутом виде, получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \gamma_{\nu} e^{i\nu x}, \quad (19.8)$$

который, как легко видеть, есть комплексный ряд Фурье от $F(x)$. В самом деле, поскольку (19.6) сходится, то почленное интегрирование после умножения на e^{-ivx} законно, и тогда ясно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ivx} dx = \gamma_v.$$

Отсюда сразу следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы, причем $\sigma(f)$ и $\sigma(g)$ являются действительной и мнимой частью ряда (19.8).

Теперь докажем, что ряд (19.8) расходится почти всюду. Для этого возьмем множества E_{n_k} из предыдущей леммы; пусть

$$E = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_{n_k}}.$$

Ясно, что

$$mE = 2\pi.$$

Пусть $x_0 \in E$, тогда $x_0 \in E_{n_k}$ для бесконечного множества значений k . Так как при любом p про $S_p(x, T_n)$ можно сказать, что это часть полинома T_n , то лемма утверждает, что для $x_0 \in E_{n_k}$ найдется часть полинома T_{n_k} , модуль которой превосходит M_{n_k} . Но такая часть непременно встретится в ряде (19.8), поскольку в нем фигурирует все $T_{n_k}(k)$, лишь деленные на $\sqrt{M_{n_k}}$. Значит, в ряде (19.8) найдутся такие части

$$\sum_{\alpha_k}^{\beta_k} \gamma_v e^{ivx},$$

для которых

$$\left| \sum_{\alpha_k}^{\beta_k} \gamma_v e^{ivx} \right| > \sqrt{M_{n_k}},$$

причем это верно для бесконечного множества значений k . Поэтому ряд расходится для всякого $x_0 \in E$, т. е. почти всюду.

Если бы один из рядов $\sigma(f)$ или $\sigma(g)$ сходилась на некотором множестве положительной меры, то и другой сходилась бы на нем почти всюду. Это будет доказано в § 23 главы VIII. А тогда и ряд (19.8), который имеет вид $\sigma(f) + i\sigma(g)$, сходилась бы на множестве меры больше нуля. Но мы убедились, что это невозможно. Итак, $\sigma(f)$ и $\sigma(g)$ расходятся почти всюду, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е *). Возникает вопрос, почему в этом примере $\bar{\sigma}(f)$ оказался рядом Фурье, тогда как этого не было в примерах Колмогорова и Марцинкевича.

Если вместо того, чтобы умножать все полиномы $T_{n_k}(x)$ на множители $e^{iv_k x}$, мы бы взяли просто

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}},$$

то получили бы снова функцию $\psi(x) \geq 0$. Докажем, что мы имеем $\psi(x) \ln^+ \psi(x) \in L$.

Действительно, при любом k имеем

$$\psi(x) \ln^+ \psi(x) \geq \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} \ln^+ \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}.$$

*) Это замечание принадлежит П. Л. Ульянову [8].

Из формулы (19.4) сразу видим, что

$$M_n \sim \sqrt{\ln n}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} \ln^+ \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} dx \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Но при $\frac{\pi}{2n} \leq x \leq \frac{\pi}{n}$ имеем для ядра Фейера

$$F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \geq Cn,$$

где C — положительная константа. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} T_n(x) \ln^+ \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} dx &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} F_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} dx \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} F_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{F_{m_i}(x - A_i)}{(n+1)(\ln n)^{1/4}} dx \geq \\ &\geq C \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} m_i \ln \frac{Cm_i}{(n+1)(\ln n)} dx \geq C_1 \ln n, \end{aligned}$$

где C_1 — новая константа; здесь мы опирались на то, что $m_i > n^4$.

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} \ln^+ \frac{T_n(x)}{(\ln n)^{1/4}} dx \geq C_1 (\ln n)^{1/4}.$$

Если так, то у $\psi(x)$ ряд $\bar{\sigma}(\psi)$ заведомо не есть ряд Фурье. Но в примере Харди и Рогозинского полиномы $T_{n_k}(x)$ умножены на множители $e^{i k x}$ благодаря чему $F(x)$ получилась уже не положительной функцией, а комплексной, у которой действительная и мнимая части принимают как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом произошла интерференция положительных и отрицательных значений, которая привела к нужному эффекту.

§ 20. Ряд Фурье, расходящийся в каждой точке

В примерах предыдущих параграфов ряд Фурье расходился почти всюду. Если мы хотим добиться расходимости в каждой точке*), то можно базиро-

*) Существование функции с рядом Фурье, расходящимся в каждой точке, обнаружено А. Н. Колмогоровым. Но в его заметке [3] (содержащей лишь 2 страницы) были только указаны свойства тех тригонометрических полиномов, из которых строится такая функция. Подробное проведение всего доказательства сделано Зигмундом (см. Зигмунд [М.6], § 8.4), отметившим, что его построение отличается от построения в указанной заметке, причем изменения были ему сообщены А. Н. Колмогоровым.

Мы здесь придерживаемся в основном доказательства Зигмунда, но только даем более подробное изложение и заменяем п° 8.404 новым рассуждением, которое нам кажется более простым.

ваться на той же идее, однако необходимо несколько подправить те вспомогательные функции, которыми мы пользуемся.

Прежде всего мы лемму предыдущего параграфа усилим так:

Л е м м а. *Существует последовательность тригонометрических полиномов $f_n(x)$, обладающих свойствами*

$$\text{а) } f_n(x) \geq 0,$$

$$\text{б) } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в) если v_n есть порядок полинома $f_n(x)$, то найдутся такие числа $\lambda_n \rightarrow \infty$, числа $M_n \rightarrow \infty$, множества E_n

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots, \quad [0, 2\pi] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

и для каждой точки $x \in E_n$ существует такое целое k_x , что $\lambda_n \leq k_x \leq v_n$ и

$$S_{k_x}(x, f_n) > M_n.$$

Таким образом, свойства полиномов $f_n(x)$ те же, что у полиномов $T_n(x)$ из леммы § 19, но множества E_n заполняют весь отрезок $[0, 2\pi]$.

Покажем сначала, что если эта лемма доказана, то существует функция $f(x)$ со всюду расходящимся рядом Фурье, причем для всех x имеем неограниченную расходимость, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, f)| = +\infty.$$

Чтобы построить такую функцию, мы будем поступать, как это сделано в § 17, т. е. мы выберем числа n_k достаточно быстро растущими и положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}. \quad (20.1)$$

Прежде всего мы можем считать n_k взятыми так, что

$$M_{n_k} > 4 M_{n_{k-1}}, \quad (20.2)$$

тогда ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}$ сходится; поэтому в силу свойства б) ряд (20.1) сходится почти всюду и определяет суммируемую функцию $f(x)$. Если мы возьмем $n_1 = 1$ и будем строить n_m рекуррентно так, чтобы

$$\lambda_{n_m} > v_{n_{m-1}}, \quad (20.3)$$

$$\sqrt{M_{n_m}} > v_{n_{m-1}}, \quad (20.4)$$

то, как мы сейчас покажем, ряд Фурье от $f(x)$ будет всюду расходиться.

Действительно, мы имеем, если $x \in E_{n_m}$,

$$S_{k_x}(x, f) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x, f_{n_j}) + \frac{1}{\sqrt{M_{n_m}}} S_{k_x}(x, f_{n_m}) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x, f_{n_j}). \quad (20.5)$$

В силу выбора числа k_x мы имеем из свойства в)

$$\frac{1}{\sqrt{M_{n_m}}} S_{k_x}(x, f_{n_m}) > \frac{M_{n_m}}{\sqrt{M_{n_m}}} = \sqrt{M_{n_m}}. \quad (20.6)$$

С другой стороны, так как $k_x \geq \lambda_{n_m} > v_{n_{m-1}}$ в силу (20.3), то k_x превосходит порядки всех f_{n_j} , входящих в первую сумму, значит, $S_{k_x}(x, f_{n_j}) = f_{n_j}(x)$

для $j = 1, 2, \dots, m-1$, а так как все $f_{n_j}(x) \geq 0$, то вся первая сумма в (20.5) неотрицательна.

Теперь заметим, что для любого j

$$|S_{k_x}(x, f_{n_j})| \leq \frac{(2k_x + 1)}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{n_j}(x) dx \leq (2v_{n_m} + 1) < 3v_m,$$

а потому

$$\left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x, f_{n_j}) \right| \leq 3v_{n_m} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} \leq \frac{3v_{n_m}}{\sqrt{M_{n_{m+1}}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < 6, \quad (20.7)$$

так как $\sqrt{M_{n_s}} > 2\sqrt{M_{n_{s-1}}}$ в силу (20.2) для любого s и $\sqrt{M_{n_{m+1}}} > v_{n_m}$ в силу выбора чисел n_m (см. (20.4)).

Соединяя (20.5), (20.6) и (20.7), видим, что

$$S_{k_x}(x, f) \geq \sqrt{M_{n_m}} - 6.$$

Так как всякая точка x принадлежит множеству E_{n_m} , если только m достаточно велико (в силу свойства v), то мы видим, что для любого x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x, f)| = +\infty$$

и теорема доказана.

Итак, мы свели дело к лемме, и, разумеется, в ней центр тяжести всего доказательства.

Построение полиномов $f_n(x)$ будет отличаться от построения полиномов $T_n(x)$ в двух пунктах: так как мы не имеем права потерять ни одной точки, то мы не можем отбрасывать то множество, где $\sin\left(k_x + \frac{1}{2}\right)x$ мал (как это делалось в лемме § 19). Поэтому число k_x надо будет выбирать более точно. Кроме того, нельзя будет также отбрасывать те интервалы, которые окружают «опасные» точки A_i из предыдущего построения; для исправления положения мы добавим к полиному $T_n(x)$ некоторый неотрицательный полином $\tau_n(x)$, который при некотором m будет иметь достаточно большие частные суммы $S_m(x, \tau_n)$ в этих интервалах и, с другой стороны, в силу $\tau_n(x) \geq 0$ не испортит поведения $T_n(x)$ там, где суммы $S_{k_x}(x, T_n)$ были велики. Сейчас эту общую идею выскажем уже в точной форме.

Для упрощения техники вычислений вместо точек A_i , по которым мы строили полином $T_n(x)$ в лемме § 19, мы рассмотрим точки

$$x_l = \frac{2\pi}{n} l \quad (l = 0, 1, \dots, n)$$

и положим снова

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n F_{m_l}(x - x_l),$$

где F_m — ядро Фейера. Числа $m_0 < m_1 < \dots < m_n$ — целые числа, которые мы подберем позже, но будем предполагать, что $m_{j+1} > 2m_j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Как и в лемме § 19, мы можем для любого k , лишь бы $m_j \leq k < \frac{1}{2} m_{j+1}$, написать

$$\begin{aligned} S_k(x, T_n) &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^j F_{m_l}(x - x_l) + \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{k+1}{m_l+1} F_k(x - x_l) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l - k}{m_l + 1} D_k(x - x_l). \end{aligned} \quad (20.8)$$

Так как фейеровские полиномы все неотрицательны, то при любом x

$$S_k(x, T_n) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l - k}{m_l + 1} D_k(x - x_l).$$

Поскольку

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin kt}{t} + \varphi_k(t),$$

где $|\varphi_k(t)| < C$ при любых k и $t \in [0, 2\pi]$ (см. глава I, § 32), то

$$S_k(x, T_n) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l - k}{m_l + 1} \frac{\sin k(x - x_l)}{x - x_l} - O(1). \quad (20.9)$$

Допустим теперь, что $k = \varrho n$, где ϱ целое. Тогда

$$\sin k(x - x_l) = \sin\left(kx - \varrho n \frac{2\pi}{n} l\right) = \sin kx$$

и

$$\sum_{l=j+1}^n \left(\frac{m_l - k}{m_l + 1}\right) \frac{\sin k(x - x_l)}{x - x_l} = -\sin kx \sum_{l=j+1}^n \left(\frac{m_l - k}{m_l + 1}\right) \frac{1}{x_l - x}. \quad (20.10)$$

Окружим интервалом длины 2δ все точки x_l и, кроме того, все середины отрезков между ними, т. е. выкинем из $[0, 2\pi]$ все интервалы I_l вида

$$I_l = \left(l \frac{\pi}{n} - \delta, l \frac{\pi}{n} + \delta\right), \quad l = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Здесь δ — число, которое мы подберем позже, но во всяком случае оно будет $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Обозначим

$$\sigma_l = \left[l \frac{\pi}{n} + \delta, (l+1) \frac{\pi}{n} - \delta\right], \quad l = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Ясно, что всякая точка из $[0, 2\pi]$ попадает либо в один из I_l , либо в один из σ_l .

Пусть $x \in \sigma_{2j}$ или $x \in \sigma_{2j+1}$. Тогда будем применять к нему формулу (20.9) именно при этом значении j . Поскольку

$$x \leq (2j+2) \frac{\pi}{n} - \delta = x_{j+1} - \delta,$$

то при $l \geq j+1$ имеем $x_l - x > 0$; кроме того, при $l \geq j+1$ имеем

$$\frac{m_l - k}{m_l + 1} = \frac{1 - \frac{k}{m_l}}{1 + \frac{1}{m_l}} > \frac{1}{4} \quad (20.11)$$

в силу $k < \frac{1}{2} m_{j+1}$; поэтому если для рассматриваемого x и для некоторого k_x мы имеем

$$-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}, \quad (20.12)$$

то из (20.9), (20.10) и (20.11) находим

$$S_{k_x}(x, T_n) \geq \frac{1}{8(n+1)} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{x_l - x} - O(1),$$

где сумма положительна; после этого, заметив, что $x > x_j$, можем написать

$$\begin{aligned} S_{k_x}(x, T_n) &\geq \frac{1}{8(n+1)} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{x_l - x_j} - O(1) = \\ &= \frac{n}{16\pi(n+1)} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{l-j} - O(1) > \frac{1}{32\pi} \sum_{s=1}^{n-j} \frac{1}{s} - O(1) > C \ln(n-j), \end{aligned}$$

где C постоянно. Таким образом, если $j \leq n - \sqrt{n}$, мы получим

$$S_{k_x}(x, T_n) > C \ln \sqrt{n} = C_1 \ln n. \quad (20.13)$$

Итак, если $j \leq n - \sqrt{n}$ и если для каждого $x \in \sigma_{2j}$ и каждого $x \in \sigma_{2j+1}$ можно найти свое k_x , удовлетворяющее условиям

- а) $m_j \leq k_x < \frac{1}{2} m_{j+1}$,
- б) k_x делится на n ,
- в) $-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}$,

то для всякого такого x будем иметь (20.13).

Мы пока допустим, что при разумном подборе чисел m_j такое k_x найти можно и закончим доказательство леммы, а потом вернемся к этому пункту.

Рассмотрим полином

$$\tau_n(x) = F_n[2nx],$$

где F_n — фейеровский полином n -го порядка. Ясно, что порядок полинома $\tau_n(x)$ равен $2n^2$; он неотрицателен и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_n(x) dx = 1. \quad (20.14)$$

Имеем для любого целого l

$$\tau_n\left(l \frac{\pi}{n}\right) = F_n(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(0) > \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}.$$

Кроме того, так как $|F'_n(x)| \leq n^2$ при всех x , то $|\tau'_n(x)| < 2n^3$. Отсюда вытекает, что если положить $\delta = \frac{1}{8n^4}$, то для $x \in I_l$ имеем

$$\left| \tau_n(x) - \tau_n\left(l \frac{\pi}{n}\right) \right| < \delta 2n^3 \leq \frac{1}{n},$$

откуда

$$\tau_n(x) > \frac{n}{4} \quad \text{для } x \in I_l \quad (l = 0, 1, \dots, 2n). \quad (20.15)$$

Положим $m_0 = 2n^2$. Из $|D'_{m_0}(x)| \leq m_0^2$ и $D_{m_0}(0) = m_0 + \frac{1}{2}$ следует для $-\delta \leq x \leq \delta$

$$|D_{m_0}(x) - D_{m_0}(0)| \leq m_0^2 \delta < 4n^4 \frac{1}{8n^4} = \frac{1}{2},$$

а потому уже во всяком случае

$$D_{m_0}(x) > 1 \quad \text{на } -\delta \leq x \leq \delta. \quad (20.16)$$

Итак, если мы возьмем $\delta = \frac{1}{8n^4}$, то будут удовлетворены оба неравенства (20.15) и (20.16).

Мы положили $m_0 = 2n^2$; пусть теперь

$$f_n(x) = \frac{1}{2} [T_n(x) + \tau_n(x)],$$

где числа m_1, m_2, \dots, m_{2n} пока еще в нашем распоряжении. Так как справедливо (20.14) и также $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x) dx = 1$, то условие б) леммы для полиномов

$f_n(x)$ выполнено; кроме того, очевидно, что они неотрицательны.

Ясно, что порядок полинома $f_n(x)$ есть m_n , поскольку таков порядок $T_n(x)$, а порядок $\tau_n(x)$ есть $2n^2 = m_0 < m_n$. Поэтому, полагая $\lambda_n = m_0 = 2n^2$ и $\nu_n = m_n$, мы видим, что если k_x удовлетворяют условию а), то

$$\lambda_n \leq k_x < \nu_n,$$

как это требовалось в лемме, причем $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Поскольку $k_x \geq \lambda_n = m_0$, а порядок $\tau_n(x)$ есть m_0 , то

$$S_{k_x}(\tau_n) = \tau_n(x) \geq 0,$$

а значит

$$S_{k_x}(f_n) = \frac{1}{2} S_{k_x}(T_n) + \frac{1}{2} S_{k_x}(\tau_n) \geq \frac{C_1}{2} \ln n = C_2 \ln n \quad (20.17)$$

в силу (20.13) для всех $x \in \sigma_{2j}$ и $x \in \sigma_{2j+1}$ при $j \leq n - \sqrt{n}$.

Покажем теперь, что для $x \in I_l$ ($l = 0, 1, \dots, 2n$) имеем

$$S_{m_0}(x, f_n) > C \ln n, \quad (20.18)$$

где C — некоторая положительная константа.

Действительно, полагая в формуле (20.8) $j = 0$ и $k = m_0$, имеем

$$S_{m_0}(x, T_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \frac{m_0+1}{m_l+1} F_{m_0}(x-x_l) + \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n \frac{m_l-m_0}{m_l+1} D_{m_0}(x-x_l).$$

Так как все фейеровские полиномы неотрицательны, то

$$S_{m_0}(x, T_n) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n \frac{m_l-m_0}{m_l+1} D_{m_0}(x-x_l). \quad (20.19)$$

Пусть $x \in I_m$, т. е.

$$m \frac{\pi}{n} - \delta \leq x \leq m \frac{\pi}{n} + \delta. \quad (20.20)$$

Если m четное, пусть $m = 2j$, то $m \frac{\pi}{n} = 2j \frac{\pi}{n} = x_j$ и, значит,

$$|x - x_j| < \delta.$$

Тогда в силу выбора δ из (20.16) следует, что, отбрасывая член $l = j$ из формулы (20.19), мы только усиливаем неравенство, т. е. при $m = 2j$ из (20.19) следует

$$S_{m_0}(x, T_n) \geq \frac{1}{(n+1)} \sum_{l=1}^n \frac{m_l-m_0}{m_l+1} D_{m_0}(x-x_l) \geq -\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n |D_{m_0}(x-x_l)|, \quad (20.21)$$

где знак \sum' означает, что $l = j$ исключено и, значит, ни у какого из членов суммы в (20.21) аргумент не может быть равен нулю. Но замечая, что при $0 < u < \pi$

$$|D_n(u)| \leq \frac{\pi}{|u|},$$

имеем

$$S_{m_0}(x, T_n) \geq -\frac{\pi}{(n+1)} \sum_{l=1}^{n'} \frac{1}{|x - x_l|}.$$

Поскольку x отличается от $2j\frac{\pi}{n}$ на величину порядка $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, то

$$S_{m_0}(x, T_n) \geq -C_3 \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n'} \frac{1}{\left|2j\frac{\pi}{n} - l\frac{2\pi}{n}\right|} = -C_4 \sum_{l=1}^{n'} \frac{1}{|j-l|} > -C_5 \ln n, \quad (20.22)$$

где C_1, C_2, \dots — положительные константы.

Если m нечетное, $m = 2j + 1$, то отбрасывать члены из (20.19) не нужно. Но замечая снова, что

$$S_{m_0}(x, T_n) \geq -\frac{\pi}{(n+1)} \sum_{l=1}^n \frac{1}{|x - x_l|}$$

и что x отличается от $(2j+1)\frac{\pi}{n}$ на величину порядка $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, видим, что

$$\begin{aligned} S_{m_0}(x, T_n) &\geq -C_6 \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\left|(2j+1)\frac{\pi}{n} - l\frac{2\pi}{n}\right|} > \\ &> -C_7 \sum_{l=1}^{n'} \frac{1}{|2j+1-2l|} > -C_8 \ln n. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Таким образом, из формул (20.22) и (20.23) мы видим, что при любом $x \in I_m$ ($m = 0, 1, \dots, 2n$) имеем

$$S_{m_0}(x, T_n) > -C_9 \ln n, \quad (20.24)$$

где $C_9 = \max(C_5, C_8)$.

Заметим теперь, что так как m_0 есть порядок полинома $\tau_n(x)$, то

$$S_{m_0}(x, \tau_n) = \tau_n(x).$$

Но если $x \in I_m$, то в силу (20.15) имеем

$$\tau_n(x) > \frac{n}{4},$$

а потому

$$S_{m_0}(x, \tau_n) > \frac{n}{4} \quad (20.25)$$

во всех I_m , а тогда в силу (20.24) и (20.25)

$$S_{m_0}(x, f_n) > \frac{n}{8} - \frac{C_9}{2} \ln n > C_{10} n,$$

а это и есть формула (20.18), которую мы обещали доказать.

Обозначим теперь через E_n отрезок $\left[0, \frac{2\pi}{n}(n - \sqrt{n})\right]$. Ясно, что

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots \text{ и } [0, 2\pi] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Если $x \in E_n$, то либо $x \in I_m$ для некоторого m , либо $x \in \sigma_m$, причем этот индекс m таков, что если $m = 2j$ или $m = 2j + 1$, то $j \leq n - \sqrt{n}$. Поэтому для такого x либо найдется по формуле (20.17) такое k_x , что

$$S_{k_x}(x, f_n) > C_2 \ln n,$$

либо по формуле (20.18) для него

$$S_{m_n}(x, f_n) > C \ln n.$$

Во всяком случае для всякого $x \in E_n$ найдем такое k_x , что

$$m_0 \leq k_x < m_n$$

и

$$S_{k_x}(x, f_n) > M_n, \quad \text{где } M_n \rightarrow \infty,$$

и лемма доказана, кроме того пункта, который был отмечен на стр. 416.

Нам остается доказать, что если m_0 выбрано, то можно так подобрать числа m_k ($k = 1, 2, \dots, n$), чтобы

- 1) $m_0 < m_1 < \dots < m_n$,
- 2) для каждого $x \in \sigma_{2j}$ и $x \in \sigma_{2j+1}$ найдется такое k_x , что k_x делится на n ,

$$m_j \leq k_x < \frac{1}{2} m_{j+1}$$

и

$$-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}.$$

Возможность такого определения чисел m_j мы сведем к некоторой теоретико-числовой задаче.

Прежде всего заметим, что если $x \in \sigma_{2j}$, то

$$x = x_j + \theta \frac{2\pi}{n},$$

а если $x \in \sigma_{2j+1}$, то

$$x = x_{j+1} - \theta \frac{2\pi}{n},$$

где в обоих случаях

$$\delta \leq \theta \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{n} - \delta,$$

т. е.

$$\frac{n\delta}{2\pi} \leq \theta \leq \frac{1}{2} - \frac{n\delta}{2\pi},$$

и, обозначая $\eta = \frac{n\delta}{2\pi} = \frac{1}{16\pi n^3}$, видим, что

$$\eta \leq \theta \leq \frac{1}{2} - \eta, \quad (20.26)$$

где η — положительная константа, зависящая только от n , но не от x .

Если k_x делится на n , то $k_x = \varrho n$, где ϱ целое, поэтому

$$-\sin k_x x = \begin{cases} -\sin \varrho n \left(x_j + \theta \frac{2\pi}{n} \right) & \text{при } x \in \sigma_{2j}, \\ -\sin \varrho n \left(x_{j+1} - \theta \frac{2\pi}{n} \right) & \text{при } x \in \sigma_{2j+1}. \end{cases}$$

В обоих случаях $\varrho n x_j$ и $\varrho n x_{j+1}$ кратны 2π , а потому

$$-\sin k_x x = \begin{cases} -\sin \varrho n \theta \frac{2\pi}{n} = -\sin 2\pi \varrho \theta & \text{при } x \in \sigma_{2j}, \\ \sin \varrho n \theta \frac{2\pi}{n} = \sin 2\pi \varrho \theta & \text{при } x \in \sigma_{2j+1}. \end{cases}$$

Таким образом, если задано θ , удовлетворяющее условию (20.26), то надо уметь найти целые ϱ_1 и ϱ_2 так, чтобы

$$-\sin 2\pi \varrho_1 \theta \geq \frac{1}{2}, \quad \text{а также} \quad \sin 2\pi \varrho_2 \theta \geq \frac{1}{2},$$

иначе говоря, чтобы

$$\frac{7}{12} \leq (\varrho_1 \theta) \leq \frac{11}{12} \quad \text{и} \quad \frac{1}{12} \leq (\varrho_2 \theta) \leq \frac{5}{12},$$

где (x) означает дробную долю числа x .

Покажем, что каково бы ни было N , всегда можно найти такие ϱ_1 и ϱ_2 , причем

$$N \leq \varrho_1 \leq M,$$

$$N \leq \varrho_2 \leq M,$$

где M — константа, зависящая только от η .

Допустим сначала, что

$$\eta \leq \theta \leq \frac{1}{3}.$$

Тогда, так как $\frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{3}$ и $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, то числа (θ) , (2θ) , (3θ) , ..., $(m\theta)$, ... отстоят друг от друга на расстоянии, не большем чем длина каждого из интервалов $\left[\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right]$ или $\left[\frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right]$; поэтому, заставляя ϱ пробегать последовательно все целые числа от N до $N+M$, где $M = \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1$, мы заведомо найдем такие ϱ_1 и ϱ_2 , как нам нужно.

Если же $\frac{1}{3} \leq \theta \leq \frac{1}{2} - \eta$, то $\frac{2}{3} \leq 2\theta \leq 1 - 2\eta$; полагая $\theta_0 = 1 - 2\theta$, видим, что

$$2\eta \leq \theta_0 \leq \frac{1}{3},$$

а потому можно, по предыдущему, найти ϱ_1 и ϱ_2 так, чтобы

$$-\sin 2\pi \varrho_1 \theta_0 \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin 2\pi \varrho_2 \theta_0 \geq \frac{1}{2},$$

а потому

$$-\sin 2\pi \varrho_1 (1 - 2\theta) \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin 2\pi \varrho_2 (1 - 2\theta) \geq \frac{1}{2},$$

откуда

$$\sin 2\pi \varrho_1 2\theta \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad -\sin 2\pi \varrho_2 2\theta \geq \frac{1}{2}.$$

Полагая

$$\varrho_1^* = 2\varrho_2 \quad \text{и} \quad \varrho_2^* = 2\varrho_1,$$

мы видим, что для θ нужные числа ϱ найдены, причем снова

$$\varrho_1^* \geq N, \quad \varrho_2^* \geq N$$

и

$$\varrho_1^* \leq M_1, \quad \varrho_2^* \leq M_1, \quad \text{где} \quad M_1 = 2M.$$

Теперь остается последний шаг: построение чисел m_i . Так как m_0 уже определено, мы предположим, что $m_0 < m_1 < \dots < m_j$ уже известны, и будем определять m_{j+1} . Мы уже умеем для каждого $x \in \sigma_{2j}$ и $x \in \sigma_{2j+1}$ определить k_x так, чтобы

$$-\sin k_x x \geq \frac{1}{2},$$

причем $k_x = \varrho n$, где ϱ можно сделать больше наперед заданного числа N и меньше $N + M$, где M зависит только от n . Поэтому если взять N таким, чтобы $nN \geq m_j$, то мы будем иметь $k_x \geq m_j$ для всех таких x .

Если теперь выбрать m_{j+1} так, чтобы $(N + M)n < \frac{1}{2}m_{j+1}$, то мы увидим, что

$$k_x = \varrho n < (N + M)n < \frac{1}{2}m_{j+1},$$

и это последнее неравенство, которое надо было установить.

Таким образом, закончено доказательство леммы, а значит и всей теоремы.

З а м е ч а н и е. В построенном примере всюду расходящегося ряда Фурье имеем в каждой точке неограниченную расходимость, т. е.

$$\overline{\lim} |S_n(x, f)| = +\infty.$$

До сих пор неизвестно, можно ли построить всюду расходящийся ряд Фурье, для которого в каждой точке

$$\overline{\lim} |S_n(x, f)| < +\infty.$$

Марцинкевич^[1] отметил, что если такие ряды существуют, то существуют и ограниченные функции с рядом Фурье, расходящимся почти всюду. Доказательство можно найти в работе П. Л. Ульянова^[9] (теорема 12). Однако не только для ограниченных функций, но и для функций с интегрируемым квадратом до сих пор не удалось построить таких рядов и вопрос о их существовании считается одним из самых трудных в теории рядов Фурье.

§ 21. О принципе локализации для множеств

Мы знаем (см. гл. I, § 33), что если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают на некотором отрезке $[a, b]$, то во всякой его внутренней точке ряды $\sigma(f_1)$ и $\sigma(f_2)$ ведут себя одинаково, т. е. сходятся или расходятся одновременно.

Возникает вопрос, нельзя ли было бы перенести эту теорему на множества, пусть даже в несколько ослабленной форме, а именно, нельзя ли утверждать, что если $f_1(x) = f_2(x)$ на E , $mE > 0$, то ряды $\sigma(f_1)$ и $\sigma(f_2)$ ведут себя одинаково почти всюду на E .

Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным, если не налагать на функции и на множество никаких дополнительных ограничений.

Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что при разумном подборе чисел $\{n_k\}$, входящих в построение функции $\Phi(x)$ из примера Колмогорова (см. § 17), для любого $\varepsilon > 0$ множество E тех точек, где $\Phi(x) \neq 0$, может быть сделано таким, что $mE < \varepsilon$. Действительно, функции $\varphi_n(x)$, построенные в § 17, обладают тем свойством, что $\varphi_n(x) = 0$ всюду, кроме отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, длина каждого из этих отрезков есть $\frac{2}{m_k^2}$, а так как $m_k \geq \lambda_k n$, где $\lambda_k \geq 1$, то

$$m(\Delta_k) < \frac{2}{n^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

а потому множество E_n тех x , где $\varphi_n(x) \neq 0$, имеет меру

$$mE_n < \frac{2}{n}.$$

Но

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k}} \varphi_{n_k}(x).$$

Поэтому функция $\Phi(x)$ может оказаться отличной от нуля только там, где хоть одна из $\varphi_{n_k}(x) \neq 0$, значит, $E = E\{\Phi(x) \neq 0\} \subset \sum_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$, а потому

$$mE < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}.$$

Так как числа n_k в нашем распоряжении, мы можем сделать их такими, чтобы выполнялось условие $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, а тогда

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{на} \quad CE, \quad mCE > 2\pi - \varepsilon.$$

Тем не менее $\sigma(f)$ расходится почти всюду.

Этот пример показывает, что принцип локализации для множеств не имеет места.

Однако в § 19 мы видели, что функция $\Phi(x)$ не суммируема ни в какой степени $p > 1$. Если рассматривать лишь функции из L^p ($p > 1$), то, как мы увидим, при соответствующих ограничениях, наложенных на множество, принцип локализации оказывается справедливым*). Это результат Г. П. Толстова^[2], который мы сейчас изложим. Он доказал для случая $p = 2$, но доказательство легко распространяется и на случай $f(x) \in L^p$, лишь бы $p > 1$.

Итак, докажем теорему:

Т е о р е м а. Для любого μ , $0 < \mu < 2\pi$, существует совершенное нигде не плотное множество P , $mP = \mu$, такое, что если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из L^p ($p > 1$) совпадают на P , то их ряды Фурье являются равносходящимися**) почти всюду на P .

Для того чтобы доказать это предложение, нам понадобится одна вспомогательная лемма, касающаяся точек плотности.

Будем для любого множества \mathcal{E} и интервала (α, β) обозначать через $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$ ту часть \mathcal{E} , которая попала на (α, β) .

Как известно, для любого множества E положительной меры почти все его точки являются точками плотности и, значит, для почти всех $x \in E$ имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{mE(x, x+h)}{|h|} = 1.$$

Обозначая, как всегда, через CE дополнение к E , можно записать это соотношение в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{mCE(x, x+h)}{|h|} = 0. \quad (21.1)$$

Г. П. Толстов показывает, что, разумно выбирая множество, можно добиться, чтобы для его точек отношение, стоящее в левой части (21.1), стремилось к нулю так быстро, как мы захотим. Точнее, имеет место такая

*) Вопрос о том, не будет ли он справедлив для $f(x) \in L^p$ без дополнительных ограничений на множество, остается открытым.

**) Термин «равносходящиеся» введен в § 33 главы I.

Л е м м а. Пусть $\varphi(h)$ — любая функция, определенная на некотором отрезке $0 \leq h \leq h_0$, положительная, монотонная, $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$; пусть $[a, b]$ — любой отрезок. Если $0 < \mu < b - a$, то существует совершенное, нигде не плотное множество P , $mP = \mu$, такое, что почти для всех $x \in P$ имеем

$$\frac{mCP(x, x+h)}{|h|} < \varphi(|h|), \quad (21.2)$$

если $|h| < \delta$ (δ , вообще говоря, зависит от x).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно предполагать $\varphi(h_0) < 1$. Положим

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} h_0 \varphi(h_0), \\ \mu_n &= \frac{1}{2} \mu_{n-1} \varphi(\mu_{n-1}), \quad n \geq 2. \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < +\infty, \quad \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n < 2\mu_k.$$

Обозначим через N наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu_n < (b-a) - \mu$$

(такие числа существуют, потому что $b-a > \mu$, а ряд $\sum \mu_n$ сходится).

Положим

$$u_1 = u_2 = \dots = u_N = \frac{b-a-\mu - \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n}{N},$$

$$u_n = \mu_n \quad \text{для } n > N.$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = b-a-\mu.$$

Удалим из $[a, b]$ систему интервалов (a_n, b_n) таких, что $b_n - a_n = u_n$; мы потребуем от этих интервалов, чтобы они не имели общих концов, и чтобы оставшееся после их удаления совершенное множество P было нигде не плотным. В остальном они произвольны. Ясно, что $mP = \mu$. Докажем, что это множество удовлетворяет условиям леммы.

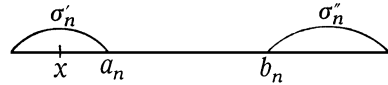


Рис. 24

Чтобы убедиться в этом, присоединим к каждому интервалу (a_n, b_n) слева интервал σ'_n и справа интервал σ''_n , оба длины μ_{n-1} (рис. 24). Так как сумма длин присоединенных интервалов образует сходящийся ряд, то множество E точек, попадающих в бесконечное множество таких интервалов, имеет меру нуль*). Поэтому почти все точки P не входят в E . Рассмотрим любую точку $x \in P$, не принадлежащую к E и не являющуюся точкой первого рода для P ; докажем, что для нее имеет место неравенство (21.2), если $|h|$ достаточно мало, тогда доказательство леммы будет закончено.

*) По известной теореме, если $\sum m\varepsilon_n < +\infty$, то для $\varepsilon = \overline{\lim} \varepsilon_n$ имеем $m\varepsilon = 0$ (см. Вводный материал, § 12).

Пусть $h > 0$ (доказательство для $h < 0$ совершенно аналогично). Разобьем все интервалы (a_n, b_n) на два типа: интервал (a_n, b_n) будет отнесен к первому типу, если σ'_n (с тем же номером n) содержит точку x , все остальные будут второго типа. При любом x имеется лишь конечное число интервалов первого типа; кроме того, x не совпадает с a_n, b_n ни при каком n . Поэтому, выбрав h меньше, чем расстояние от x до любого из (a_n, b_n) первого типа, мы видим, что между x и $x + h$ нет ни одной точки, принадлежащей какому-нибудь интервалу первого типа. Таким мы и выберем h . Заметим теперь, что если между x и $x + h$ есть точка ξ некоторого интервала (a_n, b_n) второго типа, то $x + h > \xi \geq a_n$, но x не входит в σ'_n , значит, $x < a_n - \mu_{n-1}$, откуда $h \geq \mu_{n-1}$. Поэтому если k — наименьший номер интервала второго типа, имеющего точки между x и $x + h$, то из соотношения $\mu_{k-1} \leq h$ следует, что $k \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Можно выбрать h достаточно малым, чтобы $k > N$, тогда $b_n - a_n = \mu_n$ для всех $n \geq k$. Но в таком случае

$$\frac{mCP(x, x+h)}{h} = \frac{m \left[(x, x+h) \sum_{n=k}^{\infty} (a_n, b_n) \right]}{h} \leq \frac{\sum_{n=k}^{\infty} \mu_n}{\mu_{k-1}} < \frac{2\mu_k}{\mu_{k-1}} = \varphi(\mu_{k-1}) \leq \varphi(h)$$

в силу (21.3) и монотонности $\varphi(h)$, и, значит, лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обе принадлежат $L^{(p)}(p > 1)$. Определим q из условия

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пусть $0 < \mu < 2\pi$. Построим на основании леммы такое совершенное, нигде не плотное P , $mP = \mu$, что для некоторого $\alpha > 0$

$$\frac{mCP(x, x+h)}{|h|} \leq \frac{|h|^{q-1}}{(|\ln|h||)^{q+\alpha}} \quad (21.4)$$

почти всюду на P , если только $|h|$ достаточно мало.

Если $f_1(x) = f_2(x)$ на P , то разность $f_1(x) - f_2(x) = 0$ на P . Если мы докажем, что из $f(x) = 0$ на P следует, что $\sigma(f)$ сходится к нулю почти всюду на P , то теорема будет доказана.

Мы докажем, что если δ достаточно мало, то во всякой точке x , где выполнено (21.4), будем иметь

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x \pm h) - f(x)|}{h} dh < +\infty. \quad (21.5)$$

Тогда, применяя признак Дини, увидим, что $\sigma(f)$ сходится в такой точке x , а, значит, $\sigma(f)$ будет сходиться почти всюду на P . То, что он должен сходиться к нулю, следует из $f(x) = 0$ на P и из того, что если ряд $\sigma(\varphi)$ сходится на некотором множестве положительной меры, то именно к $\varphi(x)$ почти всюду на этом множестве (см. гл. I, § 48).

Чтобы доказать (21.5), рассмотрим выражение $|f(x+h) - f(x)|$, для $|f(x-h) - f(x)|$ рассуждение совершенно аналогично.

Итак, рассмотрим

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} dh = \int_x^{x+\delta} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right| dy.$$

Не нарушая общности, можно считать $\delta < 1$ и разбить интервал $(x, x+\delta)$ на сумму интервалов вида $(x + \delta^{n+1}, x + \delta^n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим для

краткости через A_n часть CP , попавшую на $(x + \delta^{n+1}, x + \delta^n)$. Так как $f(x) = 0$ на P , то

$$\int_{x+\delta^{n+1}}^{x+\delta^n} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| dy = \int_{A_n} \frac{|f(y)|}{|y - x|} dy.$$

Применяя неравенство Гельдера, найдем

$$\int_{A_n} \frac{|f(y)|}{|y - x|} dy \leq \left\{ \int_{A_n} |f(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{A_n} \frac{dy}{|y - x|^q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M \left\{ \int_{A_n} \frac{dy}{|y - x|^q} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (21.6)$$

где $M = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}$. Но $|y - x|^q \geq \delta^{(n+1)q}$, а потому на основании (21.4)

$$\int_{A_n} \frac{dy}{|y - x|^n} \leq \frac{mCP(x, x + \delta^n)}{\delta^{(n+1)q}} \leq \frac{\delta^{nq}}{\delta^{(n+1)q} (n |\ln \delta|)^{q-\alpha}} = \frac{C}{n^{q+\alpha}},$$

где C зависит только от δ , но не от n , а тогда

$$\left(\int_{A_n} \frac{dy}{|y - x|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C^{\frac{1}{q}}}{n^{1+\frac{\alpha}{q}}},$$

и из (21.6) получаем

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} dh \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{|f(y)|}{|y - x|} dy \leq MC^{\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{q}}} < +\infty,$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Если $p = 1$, то теорема уже перестает быть верной. Действительно, если опираться на один результат Д. Е. Меньшова, который будет доказан в главе VI, то можно утверждать большее, а именно: каково бы ни было совершенное нигде не плотное P , можно построить две суммируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $f_1(x) = f_2(x)$ на P и, однако, ряд Фурье от $f_1(x)$ расходится почти всюду на $[0, 2\pi]$, а ряд Фурье от $f_2(x)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Этот результат сразу вытекает из существования почти всюду расходящихся рядов Фурье (см. § 17) и из теоремы Д. Е. Меньшова (см. § 7 гл. VI): для любой суммируемой $f(x)$ и для любого совершенного нигде не плотного P можно найти такую суммируемую $g(x)$, что $g(x) = f(x)$ на P и, однако, ряд Фурье от $g(x)$ сходится почти всюду.

§ 22. О сходимости ряда Фурье на заданном множестве и расходимости вне его

Поставим вопрос так: пусть дано множество E ; при каких условиях существует ряд Фурье, сходящийся на E и расходящийся на его дополнении CE ?

Прежде всего отметим ряд случаев, когда решение вопроса нам уже известно или может быть получено легко. Если E совпадает со всем отрезком, то решение тривиально; если E пусто, т. е. CE совпадает со всем отрезком, то решение дается примером, построенным в § 20.

Случай, когда E есть отрезок длины, меньшей чем 2π , был рассмотрен Штейнгаузом (Steinhaus^[2]); мы его не будем разбирать, так как можно получить нужный результат из более общей теоремы Райхмана (Rajchman^[1]): для любого замкнутого множества F можно построить тригонометрический

ряд, сходящийся всюду на F и расходящийся всюду на его дополнении. Райхман, правда, не заботился о том, чтобы его ряд был рядом Фурье, однако, добавляя к его рассуждению лишь несколько слов, можно убедиться, что теорема верна и для ряда Фурье.

Для доказательства теоремы Райхмана построим сначала функцию $\Phi(x)$, у которой ряд Фурье расходится в каждой точке (см. § 20). Пусть

$$\sigma(\Phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (22.1)$$

Построим далее функцию $\lambda(x)$ так, чтобы она была равна нулю на F , чтобы она была положительна на каждом смежном к F интервале (α_n, β_n) и чтобы она была непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка. Для этого достаточно, например, положить

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} (x - \alpha_n)^4 (\beta_n - x)^4 & \text{на } (\alpha_n, \beta_n), \\ 0 & \text{на } F \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и

$$\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \lambda_n(x).$$

Если

$$\lambda(x) = \gamma_0 + \sum \gamma_n \cos nx + \delta_n \sin nx, \quad (22.2)$$

то

$$f(x) = \Phi(x) \lambda(x)$$

имеет ряд Фурье, сходящийся к нулю в каждой точке F и расходящийся в каждой точке вне F ; это вытекает из того, что этот ряд Фурье можно рассматривать как произведение рядов (22.1) и (22.2), из которых второй имеет коэффициенты порядка $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и сходится к нулю в каждой точке F ; кроме того, так как $\lambda(x) \neq 0$ вне F , то произведение расходится, так как ряд (22.1) расходится. Все эти результаты вытекают из теоремы о «формальном произведении» двух тригонометрических рядов, так как в данном случае формальное произведение превращается в настоящее произведение (см. гл. 1, § 71).

Итак, теорема Райхмана доказана и, значит, для случая, когда E замкнуто (в частности, когда E — отрезок), поставленная проблема решается положительно.

Прежде чем идти дальше, заметим, что поставленную в начале этого параграфа проблему приходится разрешать по-разному, в зависимости от того, хотим ли мы просто получить расходимость на E или неограниченную расходимость, т. е. выполнение условия

$$\overline{\lim} |S_n(x)| = +\infty.$$

Мы видели (см. § 19, гл. IV), что множество точек, где ряд из непрерывных функций неограниченно расходится, есть всегда множество типа G_δ , т. е. его дополнение типа F_σ .

Таким образом, можно ставить вопрос так: существует ли для любого множества E типа F_σ тригонометрический ряд, сходящийся всюду на E и неограниченно расходящийся всюду на CE ? И, в частности, существует ли ряд Фурье, обладающий этим свойством?

На первый вопрос положительный ответ был дан С. Б. Стечкиным^[4], опиравшимся на результаты Герцога и Пираниана (Herzog und Piranian^[1]), построивших степенной ряд, сходящийся на заданном E типа F_σ , лежащем на круге сходимости и расходящийся неограниченно на CE .

Но С. Б. Стечкин не ставил себе целью построить ряд Фурье, удовлетворяющий тем же условиям.

Позднее Целлер разрешил в положительном смысле вопрос о ряде Фурье. Именно, Целлер (Zeller^[1]) доказал следующую теорему:

Т е о р е м а. *Каково бы ни было множество $E \subset [0, 2\pi]$ типа F_σ , можно найти такой ряд Фурье, который сходится в каждой точке E и неограниченно расходится в каждой точке его дополнения $SE = [0, 2\pi] - E$.*

Прежде всего нам понадобится следующая

Л е м м а. *Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок, лишь бы выполнялось $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, и $[c, d] \subset (a, b)$; если $\varepsilon > 0$ — любое положительное и N как угодно большое, то существует тригонометрический полином*

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=p}^q (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

для которого $q > p \geq N$ и удовлетворены условия:

$$1) \int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon, \quad (22.3)$$

$$2) |S_k(x, T_\varepsilon)| < \varepsilon, \quad x \in [0, 2\pi] - [a, b], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (22.4)$$

3) для всякого $x \in [c, d]$ найдется такой индекс k_x , что

$$|S_{k_x}(x, T_\varepsilon)| > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (22.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Мы знаем (см. § 20), что существует функция $f(x)$, у которой $\sigma(f)$ неограниченно расходится для всех x из $[0, 2\pi]$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [c, d], \\ 0 & \text{при } x \in [0, 2\pi] - [c, d]. \end{cases}$$

В силу принципа локализации Римана ряд $\sigma(f)$ неограниченно расходится при $x \in [c, d]$ и сходится при $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$. Что делается в самих точках c и d , мы сказать не можем. Если окажется, что и в них $\sigma(f_1)$ неограниченно расходится, то положим

$$\varphi(x) = f_1(x).$$

Если же в одной из этих точек, или в обеих ряд $\sigma(f_1)$ не является неограниченно расходящимся, то мы положим

$$\varphi(x) = f_1(x) + \tau(x),$$

где $\tau(x)$ — непрерывная функция, у которой $\sigma(\tau)$ неограниченно расходится в c , или в d , или в обеих этих точках (смотря по тому, как нам нужно) и сходится всюду в остальных точках. Кроме того, требуем, чтобы $\tau(x) = 0$ для $[0, 2\pi] - (c, d)$. Построение такой функции возможно (см. гл. I, § 46).

Таким образом, мы получаем такую $\varphi(x)$, которая удовлетворяет условиям: $\varphi(x) = 0$ при $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ и $\sigma(\varphi)$ неограниченно расходится на $[c, d]$. Умножая $\varphi(x)$ на любую константу λ , мы получим функцию $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$, для которой снова $\psi(x) = 0$ при $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ и $\sigma(\psi)$ неограниченно расходится на $[c, d]$. Но благодаря возможности брать λ каким

$$\text{удобно, мы можем сделать } \int_0^{2\pi} |\psi(x)| dx \text{ таким, как нам угодно, и, в частности,}$$

$$\int_0^{2\pi} |\psi(x)| dx < \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}N}, \quad (22.6)$$

где $\delta = \min [c-a, b-d, 1, a, 2\pi - b]$.

Так как $\sigma(\psi)$ неограниченно расходится на $[c, d]$, то для любого $x \in [c, d]$ и для любого M найдется такой индекс $n_x \geq N$, что

$$|S_{n_x}(x, \psi)| > M. \quad (22.7)$$

В частности, это будет верно при $M > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon$.

Но $S_{n_x}(t, \psi)$ есть непрерывная функция от t при n_x фиксированном, значит, можно найти такое η_x , что

$$|S_{n_x}(t, \psi)| > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \text{ для } x - \eta_x < t < x + \eta_x.$$

Таким образом, каждая точка x отрезка $[c, d]$ может быть покрыта интервалом $(x - \eta_x, x + \eta_x)$, в котором справедливо (22.7). По лемме Гейне—Бореля можно найти конечное число таких интервалов, покрывающих весь $[c, d]$. Значит, можно найти такое L , что для любого $x \in [c, d]$ существует такое n_x , $N \leq n_x \leq L$, для которого справедливо (22.7).

Мы видим, что функция $\psi(x)$ имеет, образно говоря, «маленький» интеграл (см. (22.6)), «большие» частные суммы на $[c, d]$ (см. (22.7)) и она равна нулю вне $[c, d]$, значит, тем более вне $[a, b]$. Мы теперь покажем, что ее можно приблизить тригонометрическим полиномом, который благодаря указанным свойствам $\psi(x)$ удовлетворит всем требованиям леммы.

Сначала мы найдем функцию $\alpha(x)$ периодическую, непрерывную, как и ее производная $\alpha'(x)$, такую, что $\alpha(x) = 0$ при $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ и

$$\int_0^{2\pi} |\psi(x) - \alpha(x)| dx < \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}L}. \quad (22.8)$$

Поскольку $\int_0^{2\pi} \alpha'(x) dx = \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 0$, свободный член в ряде $\sigma(\alpha')$ равен нулю, а, значит, ее можно аппроксимировать с любой степенью точности тригонометрическим полиномом $\beta(x)$ со свободным членом, равным нулю; например, фейеровской суммой порядка m для ряда $\sigma(\alpha')$, где m взято достаточно большим. При этом можно, не нарушая общности, считать $m \geq L$.

Пусть

$$|\alpha'(x) - \beta(x)| < \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}L}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (22.9)$$

Так как $\beta(x)$ имеет свободный член, равный нулю, то, полагая

$$\gamma(x) = \int_0^x \beta(t) dt, \quad (22.10)$$

видим, что $\gamma(x)$ есть тоже тригонометрический полином; пусть

$$\gamma(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad m \geq L.$$

Докажем, что полином

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=N}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

удовлетворяет всем условиям леммы.

Для этого, прежде всего, заметим, что при $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ имеем $\alpha(x) = 0$, значит и $\alpha'(x) = 0$, а потому из (22.9) следует

$$|\gamma'(x)| = |\beta(x)| < \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}L} \quad \text{на } [0, 2\pi] - [c, d]. \quad (22.11)$$

Кроме того, из (22.9) и (22.10)

$$|\alpha(x) - \gamma(x)| \leq \int_0^x |\alpha'(t) - \beta(t)| dt \leq 2\pi \frac{\varepsilon\delta}{2^{13}L} < \frac{\varepsilon\delta}{2^{13}L}, \quad (22.12)$$

откуда

$$|\gamma(x)| \leq \frac{\varepsilon\delta}{2^{13}L} \quad \text{при } x \in [0, 2\pi] - [c, d], \quad (22.13)$$

так как там $\alpha(x) = 0$. Далее, из (22.12)

$$\int_0^{2\pi} |\alpha(t) - \gamma(t)| dt \leq \frac{\varepsilon\delta}{2^{13}L} 2\pi < \frac{\varepsilon\delta}{2^{10}L}. \quad (22.14)$$

Сопоставляя (22.8) и (22.14), найдем

$$\int_0^{2\pi} |\psi(t) - \gamma(t)| dt \leq \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}L} + \frac{\varepsilon\delta}{2^{10}L} < \frac{\varepsilon\delta}{2^9L}. \quad (22.15)$$

Если теперь учесть, что $L > N$ и сравнить (22.15) и (22.6), то получим

$$\int_0^{2\pi} |\gamma(t)| dt < \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}N} + \frac{\varepsilon\delta}{2^9N} < \frac{\varepsilon\delta}{2^8N}. \quad (22.16)$$

Заметим теперь, что

$$T_\varepsilon(x) = \gamma(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \gamma(x) - S_{N-1}(x, \gamma), \quad (22.17)$$

$$\text{и так как} \quad S_{N-1}(x, \gamma) < (2N-1) \int_0^{2\pi} |\gamma(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2^7}, \quad (22.18)$$

то

$$|T_\varepsilon(x)| \leq |\gamma(x)| + \frac{\varepsilon}{2^7}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)| dx \leq \int_0^{2\pi} |\gamma(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2^7} 2\pi < \frac{\varepsilon}{2^8N} + \frac{\varepsilon}{2^4} < \frac{\varepsilon}{2^3},$$

а значит, и по-прежнему

$$\int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$$

и, следовательно, условие 1), которому должен удовлетворять полином $T_\varepsilon(x)$, удовлетворено.

Для того чтобы доказать, что и условие 2) имеет место, оценим сначала $S_n(x, \gamma)$ для всех n и для $x \in [0, 2\pi] - [a, b]$.

Имеем

$$\begin{aligned} S_n(x, \gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(t) D_n(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{2\pi+(x-\delta)} \gamma(t) D_n(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma(t) D_n(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{x+\delta}^{2\pi+(x-\delta)} \gamma(t) D_n(x-t) dt = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \quad (22.19)$$

Так как

$$\int_0^t D_n(u) du = \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k},$$

а

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \right| \leq \pi + 2$$

(см. гл. I, § 30), то

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} D_n(u) du \right| \leq \pi + 2(\pi + 2) < 2^4 \text{ для } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2\pi, \quad (22.20)$$

а потому, производя в $I_1(x)$ интегрирование по частям, найдем в силу (22.11) и (22.13)

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \gamma(t) \int_{x-\delta}^t D_n(t-x) dt \right|_{x-\delta}^{x+\delta} - \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma'(t) \left(\int_{x-\delta}^t D_n(u-x) du \right) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{2\varepsilon\delta}{2^{13}L} 2^4 + \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon\delta}{2^{16}L} 2^4 2\delta < \frac{\varepsilon}{\pi 2^8 L} + \frac{\varepsilon}{2^{13}L} < \frac{\varepsilon}{2^9}. \end{aligned} \quad (22.21)$$

Мы здесь имели право пользоваться (22.11) и (22.13), так как при $x \in [0, 2\pi] - [a, b]$ и при $\delta = \min [a, c-a, b-d, 2\pi-b]$ для $x-\delta \leq t \leq x+\delta$ точка $t \in [c, d]$.

Далее имеем в силу (22.16)

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{x+\delta}^{2\pi+(x-\delta)} \gamma(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi \sin \frac{\delta}{2}} \int_0^{2\pi} |\gamma(t)| dt < \\ &< \frac{1}{2\delta} \frac{\varepsilon\delta}{2^8 N} < \frac{\varepsilon}{2^9 N} < \frac{\varepsilon}{2^9}, \end{aligned} \quad (22.22)$$

а потому из (22.19), (22.21) и (22.22)

$$|S_n(x, \gamma)| < \frac{\varepsilon}{2^8} \text{ при } x \in [0, 2\pi] - [a, b]. \quad (22.23)$$

Переходим к оценке $S_n(x, T_\varepsilon)$. Если $n \leq N-1$, то $S_n(x, T_\varepsilon) \equiv 0$, потому что у полинома $T_\varepsilon(x)$ коэффициенты a_k и b_k равны нулю при $k \leq N-1$. Если же $n > N-1$, то из (22.17) видно, что

$$S_n(x, T_\varepsilon) = S_n(x, \gamma) - S_{N-1}(x, \gamma),$$

а потому в силу (22.23) и (22.18)

$$|S_n(x, T_\varepsilon)| \leq |S_n(x, \gamma) - S_{N-1}(x, \gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2^8} + \frac{\varepsilon}{2^7} < \frac{\varepsilon}{2^6} \text{ на } [0, 2\pi] - [a, b],$$

т. е. условие 2) также выполнено.

Переходим к условию 3). Пусть $x \in [c, d]$. В силу (22.7) для этого x найдется такое n_x , $N \leq n_x \leq N$, что

$$|S_{n_x}(x, \psi)| > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Но

$$|S_{n_x}(x, \gamma)| \geq |S_{n_x}(x, \psi)| - |S_{n_x}(x, \gamma - \psi)|, \quad (22.24)$$

а в силу (22.15)

$$|S_{n_x}(x, \gamma - \psi)| \leq (2n_x + 1) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma - \psi| dt \leq (2L + 1) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon \delta}{2^9 L} < \frac{\varepsilon}{2^9}, \quad (22.25)$$

значит, из (22.24) и (22.25)

$$|S_{n_x}(x, \gamma)| > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^9}.$$

Наконец, из (22.17) в силу $n_x \geq N$ и (22.18)

$$|S_{n_x}(T_\varepsilon)| > |S_{n_x}(x, \gamma)| - |S_{N-1}(x, \gamma)| > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^9} - \frac{\varepsilon}{2^7} > \frac{1}{\varepsilon},$$

а это и значит, что выполнено условие 3).

Лемма полностью доказана.

Переходим к доказательству теоремы Целлера. Пусть E — заданное множество типа F_σ . Если E — пустое множество, то задача решается примером А. Н. Колмогорова (см. § 20). Если E содержит хотя бы одну точку, то ее

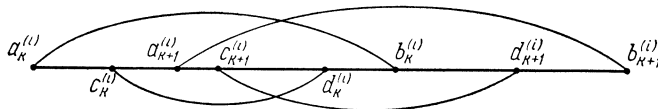


Рис. 25

можно перенести в начало координат. Тогда $CE \subset (0, 2\pi)$. Так как CE типа G_δ , то, не нарушая общности, его можно считать составленным из таких открытых множеств G_i , которые удовлетворяют условию

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_i \supset \dots$$

Итак, пусть $CE = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_i$, где множества G_i удовлетворяют этому требованию.

Каждое открытое множество есть сумма не более чем счетного множества интервалов. Всякий интервал можно представить в виде суммы счетного множества отрезков, причем можно их выбрать так, чтобы любая точка интервала принадлежала не более чем двум таким отрезкам. Поэтому каждое G_i можно представить в виде суммы счетного множества отрезков $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$ ($k = 1, 2, \dots$), причем любая точка $x \in G_i$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам.

Внутри каждого такого $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$ мы помещаем отрезок $[c_k^{(i)}, d_k^{(i)}]$, выбирая его так, чтобы каждая точка $x \in G_i$ непременно попала в какой-либо $[c_k^{(i)}, d_k^{(i)}]$, но не более чем в два таких отрезка (рис. 25).

Если так, то, располагая затем все $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$ в одну последовательность, пусть просто $[a_j, b_j]$ ($j = 1, 2, \dots$), и содержащиеся в них $[c_k^{(i)}, d_k^{(i)}]$ в последовательность $[c_j, d_j]$ (нумерация у $[c, d]$ производится по тому же закону, как у $[a, b]$, так что $[c_j, d_j] \subset (a_j, b_j)$), мы видим, что любая точка из CE принадлежит бесконечному множеству $[c_j, d_j]$, с другой стороны, любая точка $x \in E$ в силу того, что G_i вложены друг в друга, не может войти в бесконечное множество G_i (иначе она вошла бы в CE), а тогда она может принадлежать лишь конечному числу $[a_j, b_j]$, т. е. если $x \in E$, то $x \in [a_j, b_j]$ для всех достаточно больших j .

Теперь применим нашу лемму. Для всякого j можно найти такой тригонометрический полином $T_j(x)$, для которого:

$$1) \int_0^{2\pi} |T_j(x)| dx < \frac{1}{2^j},$$

$$2) |S_k(x, T_j)| < \frac{1}{2^j} \text{ для } x \in [0, 2\pi] - [a_j, b_j], k = 1, 2, \dots,$$

3) для всякого $x \in [c_j, d_j]$ найдется такой индекс k_x , что

$$|S_{k_x}(x, T_j)| > 2^j.$$

Кроме того, от полинома $T_1(x)$ мы ничего не требуем, но остальные $T_j(x)$ строим рекуррентно так: когда полином $T_{j-1}(x)$ уже найден и, следовательно, его степень m_{j-1} известна, надо выбирать $T_j(x)$ таким, чтобы его отличные от нуля коэффициенты имели индексы, превосходящие m_{j-1} (т. е. роль N в нашей лемме должно играть число $m_{j-1} + 1$).

Составим теперь ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x).$$

Он должен сходиться почти всюду к некоторой суммируемой функции $f(x)$, потому что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |T_j(x)| dx < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty.$$

Обозначим через T ряд, который получается из $\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)$, если сохранить порядок членов, но каждый член во всяком полиноме $T_j(x)$ рассматривать как отдельный член ряда T (а не группировать их, объединяя в полиномы $T_j(x)$).

В силу выбора полиномов $T_j(x)$ ряд T есть обыкновенный тригонометрический ряд (т. е. в нем каждый $\cos kx$ и $\sin kx$ встречается не более одного раза), и легко убедиться, что он есть ряд Фурье от $f(x)$ (рассуждение то же, как при построении расходящегося ряда в примере § 19).

Поэтому сходимость или расходимость ряда Фурье от $f(x)$ в какой-либо точке определяется сходимостью или расходимостью ряда T в этой точке. Покажем, что он сходится в каждой точке E и неограниченно расходится в каждой точке CE .

Действительно, пусть $x \in E$, значит $x \notin CE$. Поэтому найдется такое $i(x)$, что $x \notin [a_j, b_j]$ для всех $j > i(x)$. Но тогда в силу построения полиномов $T_j(x)$ имеем

$$|S_k(x, T_j)| < \frac{1}{2^j} \text{ для всех } k \text{ и для } j \geq i(x). \quad (22.26)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ любое. Тогда найдется такое N , что $N \geq i(x)$ и

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (22.27)$$

Рассмотрим разность

$$S_{k+p}(x, f) - S_k(x, f)$$

при $k \geq N$ и $p > 0$. Имеем

$$S_{k+p}(x, f) - S_k(x, f) = \sum_{j=1}^{N-1} [S_{k+p}(x, T_j) - S_k(x, T_j)] + \\ + \sum_{j=N}^{\infty} S_{k+p}(x, T_j) - \sum_{j=N}^{\infty} S_k(x, T_j).$$

В силу (22.26) и (22.27)

$$\sum_{j=N}^{\infty} |S_{k+p}(x, T_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{j=N}^{\infty} |S_k(x, T_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|S_{k+p}(x, f) - S_k(x, f)| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |S_{k+p}(x, T_j) - S_k(x, T_j)| + \varepsilon.$$

Если τ — тригонометрический полином, то существует такое N_0 , что

$$S_n(\tau, x) = \tau(x) \quad \text{при} \quad n \geq N_0,$$

а потому можно найти такое N_1 , что

$$S_n(x, T_j) = T_j(x) \quad \text{при} \quad n \geq N_1$$

и при всех $j, j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$.

Поэтому если взять $N_2 = \max(N_1, N)$, то

$$S_{k+p}(x, T_j) - S_k(x, T_j) = 0 \quad \text{при} \quad k \geq N_2, \quad p > 0,$$

откуда

$$|S_{k+p}(x, f) - S_k(x, f)| < \varepsilon,$$

и, значит, по критерию Коши ряд сходится в точке x .

Если же $x \in CE$, то $x \in [c_j, d_j]$ для бесконечного множества значений j . В силу свойств полиномов T_j тогда найдется такая последовательность значений $k_j(x)$, что

$$|S_{k_j}(x, T_j)| > 2^j,$$

т. е. в ряде найдется бесконечное множество кусков, абсолютная величина каждого из которых растет с ростом j , а потому ряд неограниченно расходится.

Теорема полностью доказана.

Заметим теперь, что теорема Целлера решает проблему об отыскании ряда Фурье, сходящегося на любом E типа F_σ и неограниченно расходящегося на CE .

Если мы поставим вопрос так: какова должна быть структура E , чтобы существовал ряд Фурье (или вообще тригонометрический ряд), сходящийся на E и расходящийся на CE , но без требования неограниченной расходимости, то окажется, что E будет уже более сложной природы, именно типа $F_{\sigma\delta}$. Действительно, легко доказать справедливость следующей теоремы:

Т е о р е м а. Если функции $f_n(x)$ все непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$, то множество точек сходимости последовательности $f_n(x)$ есть множество типа $F_{\sigma\delta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых натуральных n, m и k определим множество

$$F_{n,m}^{(k)} = E \left\{ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

В силу непрерывности функций $f_n(x)$ ясно, что $F_{n,m}^{(k)}$ замкнуто. Если мы положим

$$F_m^{(k)} = \prod_{n=m+1}^{\infty} F_{n,m}^{(k)},$$

то и $F_m^{(k)}$ будет замкнутым, а потому

$$E^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(k)}$$

будет множеством типа F_{σ} . Наконец,

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$$

будет множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Докажем, что E есть множество сходимости для последовательности $f_n(x)$.

В самом деле, пусть $x \in E$. Тогда $x_0 \in E^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$); для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое k_0 , что $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Так как $x_0 \in E^{(k_0)}$, то $x_0 \in F_m^{(k_0)}$ для некоторого m_0 , а значит $x_0 \in F_{nm_0}^{(k_0)}$ для $n > m_0$. Следовательно,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для } n > m_0,$$

значит, последовательность $f_n(x)$ сходится при $x = x_0$.

Обратно, если $f_n(x)$ сходится при $x = x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое m_0 , что $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$, в частности, для любого k можно найти такое m_0 , что $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{1}{k}$ при $n > m \geq m_0$. Следовательно, для любого k будем иметь $x_0 \in F_{n,m}^{(k)}$ при $m > m_0$ и $n > m$, т. е. $x_0 \in F_m^{(k)}$, а значит и $x_0 \in E^{(k)}$, а потому и $x \in E$.

Итак, E есть множество сходимости для последовательности $f_n(x)$.

Можно доказать и обратную теорему, а именно:

Т е о р е м а. Если E есть произвольное множество типа $F_{\sigma\delta}$, лежащее на $[a, b]$, то можно найти последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций, ограниченных в своей совокупности, такую, что она сходится к нулю на E и ограниченно расходится всюду вне E на $[a, b]$.

Доказательство можно найти в работах Хана (Hahn^[1]) и Серпинского (Sierpinski^[11]).

Однако этот вопрос решен для случая, когда от функций $f_n(x)$ требуется только непрерывность. Если же требовать, чтобы они были частными суммами тригонометрического ряда, то эта проблема становится очень трудной. Она не решена до сих пор даже для общего тригонометрического ряда, и тем более для ряда Фурье.

Ряд интересных замечаний и постановок проблем, касающихся множества точек сходимости и расходимости тригонометрического ряда, читатель найдет в работе П. Л. Ульянова^[8].

§ 23. Проблема сходимости и принцип локализации для рядов Фурье с переставленными членами

Мы видим в § 19, что ни пример Колмогорова, ни пример Марцинкевича не решают вопроса о том, существует ли функция $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), у которой ряд Фурье расходится почти всюду. Вопрос о существовании таких функций остается открытым. Но интересно отметить, что если допускать в ряде Фурье перестановку членов, то можно и для этих функций добиться расходимости почти всюду. Точнее, имеет место

Теорема Ульянова^[9]. Если $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ ($1 \leq p < 2$) и $f(x) \in L^2(0, \pi)$, то в ряде Фурье $\sigma(f)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (23.1)$$

можно так переставить члены местами, чтобы вновь полученный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} \cos m_\nu x + b_{m_\nu} \sin m_\nu x \quad (23.2)$$

неограниченно расходился*) почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предполагать $b_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Так как $f(x) \in L^2$, то $\sum a_n^2 = +\infty$, а потому ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \varphi_n(t_0), \quad (23.3)$$

где $\varphi_n(t)$ — функции Радемахера, для почти всех значений t_0 является почти всюду по x неограниченно расходящимся (см. гл. II, § 8, замечание 1). Выберем одно такое t_0 и возьмем его иррациональным, тогда $\varphi_n(t_0) \neq 0$ при любом n . Обозначим через n_i те n , для которых $\varphi_n(t_0) = +1$, и через k_i те n , для которых $\varphi_n(t_0) = -1$. Тогда ряд (23.3) разобьется на два ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \cos n_i x \quad \text{и} \quad - \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \cos k_i x. \quad (23.4)$$

Пусть E — множество точек из $(0, 2\pi)$, в которых ряд (23.3) неограниченно расходится, A — множество точек на $(0, 2\pi)$, где расходится первый из рядов (23.4) и $B = E - A$. Ясно, что $mA + mB = mE = 2\pi$. Не ограничивая общности, мы предположим, что $mA > 0$ и $mB > 0$. В противном случае доказательство только упрощается.

Пусть $\varepsilon > 0$ целое, $N \geq 0$ и $D > 0$ — произвольные числа. Возьмем совершенное множество $P_\varepsilon \subset A$, $mP_\varepsilon > mA - \varepsilon$. Так как первый ряд в (23.4) расходится на A неограниченно, то для любого $x \in P_\varepsilon$ можно найти $\varphi(x)$ такое, что

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\varphi(x)} a_{n_i} \cos n_i x \right| > D. \quad (23.5)$$

Но $\cos n_i x$ — непрерывная функция, и потому найдется интервал δ_x с центром в x , для каждой точки которого (23.5) справедливо. Значит, множество P_ε покрыто системой интервалов и по лемме Гейне—Бореля можно выделить из них конечное число, покрывающее P_ε . Тогда из (23.5) вытекает существование такого $L(\varepsilon, N, D)$, что

$$\left| \sum_{i=N+1}^{L(x)} a_{n_i} \cos n_i x \right| > D \quad \text{для любого } x \in P_\varepsilon \quad \text{и} \quad L(x) \leq L(\varepsilon, N, D). \quad (23.6)$$

Аналогично, можно взять совершенное множество $Q_\varepsilon \subset B$, $mQ_\varepsilon > mB - \varepsilon$, и найти число $M(\varepsilon, N, D)$ такое, что

$$\left| \sum_{i=N+1}^{M(x)} a_{k_i} \cos k_i x \right| > D \quad \text{для любого } x \in Q_\varepsilon \quad \text{и} \quad M(x) \leq M(\varepsilon, N, D). \quad (23.7)$$

*) Можно даже добиться того, чтобы ряд (23.2) не был суммируем методом Тейлора.

Возьмем последовательность $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$, $D_i = i$. Положим $N_1 = N = 0$ и пусть $\tau_1 = L(\varepsilon_1, 0, 1)$. В силу (23.6) имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{\varphi(x)} a_{n_i} \cos n_i x \right| > 1 \quad \text{при} \quad x \in P_{\varepsilon_1}, \quad L(x) \leq \tau_1. \quad (23.8)$$

Положим

$$m_\nu = n_\nu \quad \text{для} \quad 1 \leq \nu \leq \tau_1. \quad (23.9)$$

В силу (23.7) мы можем для чисел $\varepsilon = \varepsilon_1$, $N_1 = 0$, $D = 1$ найти множество $Q_{\varepsilon_1} \in B$, $mQ_{\varepsilon_1} > mB - \varepsilon_1$, и число $\mu_1 = M(\varepsilon_1, 0, 1)$ такие, что

$$\left| \sum_{i=1}^{M(x)} a_{k_i} \cos k_i x \right| > 1 \quad \text{для любого} \quad x \in Q_{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad M(x) \leq \mu_1. \quad (23.10)$$

Положим

$$m_{\nu+\tau_1} = k_\nu \quad \text{при} \quad 1 \leq \nu \leq \mu_1. \quad (23.11)$$

Далее, в силу (23.6) для $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $N = \tau_1$ и $D = 2$ мы можем найти множество $P_{\varepsilon_2} \in A$, $mP_{\varepsilon_2} > mA - \varepsilon_2$, и число $\tau_2 = L(\varepsilon_2, \tau_1, 2)$ такие, что

$$\left| \sum_{i=\tau_1+1}^{L(x)} a_{n_i} \cos n_i x \right| > 2 \quad \text{для любого} \quad x \in P_{\varepsilon_2} \quad \text{и} \quad L(x) \leq \tau_2. \quad (23.12)$$

Положим

$$m_{\nu+\mu_1} = n_\nu, \quad \tau_1 + 1 \leq \nu \leq \tau_2 \quad (23.13)$$

и т. д. Числа m_ν определяются по индукции.

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} \cos m_\nu x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} a_{n_i} \cos n_i x + \sum_{i=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_{k_i} \cos k_i x \right) \quad (23.14)$$

(здесь $\tau_0 = \mu_0 = 0$, а внутри каждой суммы в круглых скобках номера n_i и k_i идут в порядке возрастания).

Теорема будет доказана, если мы докажем расходимость почти всюду для ряда, стоящего в левой части (23.14).

Положим

$$A_0 = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} P_{\varepsilon_k} \quad \text{и} \quad B_0 = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} Q_{\varepsilon_k}.$$

Ясно, что $A_0 \subset A$, $mA_0 = mA$, $B_0 \subset B$, $mB_0 = mB$, $mA_0 + mB_0 = 2\pi$. Мы будем доказывать неограниченную расходимость ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} \cos m_\nu x \quad (23.15)$$

в каждой точке $A_0 + B_0$; тогда он будет неограниченно расходиться почти всюду.

Достаточно доказать для A_0 , так как для B_0 доказательство аналогично.

Если $x \in A_0$, то для бесконечного множества значений k имеем $x \in P_{\varepsilon_k}$. Но тогда из самого определения чисел τ_k и множеств P_{ε_k} следует

$$\left| \sum_{i=\tau_k+1}^{L(x)} a_{n_i} \cos n_i x \right| > k, \quad \text{где} \quad \tau_k + 1 \leq L(x) \leq \tau_{k+1}.$$

Таким образом, для бесконечного множества значений k в ряде (23.15) имеются «куски», по модулю превосходящие k , т. е. он неограниченно расходится для $x \in A_0$. Этим заканчивается доказательство.

Заметим, что ряд (23.15) является рядом Фурье от $f(x)$ по системе $\{\cos m_i x\}$. Это позволяет получить следующее интересное следствие из теоремы Ульянова:

С л е д с т в и е. Если вместо обычной тригонометрической системы рассматривать ту же систему, но с членами, переставленными местами, то принцип локализации для рядов Фурье может уже не иметь места.

Действительно, построим функцию $f(x)$ так (рис. 26):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \quad 1 \leq x \leq \pi, \\ f(-x), & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{для всех } x.$$

Ясно, что $f(x) = 0$ при $x \in [1, 2\pi - 1]$

$$f(x) \in L^p(0, 2\pi) \quad \text{при}$$

$$1 \leq p < 2 \quad \text{и} \quad f(x) \notin L^2(0, 2\pi).$$

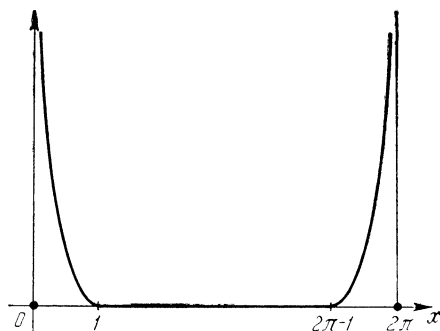


Рис. 26

Из теоремы Ульянова вытекает, что можно в ряде Фурье для $f(x)$ так переставить члены, чтобы полученный ряд $\frac{a_0}{2} + \sum a_{m_i} \cos m_i x$ почти всюду неограниченно расходился на $(0, 2\pi)$, а значит, в частности, почти всюду и на $(1, 2\pi - 1)$. Но этот ряд будет рядом Фурье от $f(x)$ по ортогональной системе, получающейся из тригонометрической при соответствующей перестановке членов. С другой стороны, разложение нуля по этой системе должно дать ряд, сходящийся всюду к нулю; принцип локализации, таким образом, нарушен. При этом интересно отметить, что здесь $f(x)$ имеет на $(0, 2\pi)$ производные всех порядков, а p может быть любым, лишь бы $1 \leq p < 2$.

Обращаем внимание читателя на работы П. Л. Ульянова [12], [13], где доказан ряд теорем, касающихся систем, получаемых из тригонометрической при помощи перестановки ее членов.

ГЛАВА VI

«ИСПРАВЛЕНИЕ» ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ МАЛОЙ МЕРЫ

§ 1. Введение

Настоящая глава посвящается вопросу, который был поставлен и в известном смысле до конца разрешен Д. Е. Меньшовым. Вопрос этот можно формулировать так: дана измеримая функция $f(x)$ и любое положительное число ε . Можно ли, изменяя функцию $f(x)$ только на некотором множестве \mathcal{E} , $m\mathcal{E} < \varepsilon$, добиться того, чтобы превратить ее в такую функцию $g(x)$, у которой $\sigma(g)$ сходится почти всюду, или всюду, или сходится равномерно? Что надо потребовать от функции $f(x)$ для положительного решения этих вопросов? Можно ли потребовать не только того, чтобы «исправление» функции происходило лишь на множестве, мера которого не превосходит ε , но еще чтобы $f(x)$ оставалась неизменной на некотором заданном множестве? Все эти проблемы мы и будем разбирать сейчас, излагая полученные Д. Е. Меньшовым результаты.

В § 3 будет доказана важная лемма, которая касается глубоких и тонких свойств множителя Дирихле; она будет изложена в таком виде, чтобы можно было ее применять затем к основным теоремам Д. Е. Меньшова.

В § 4 будет доказано, что любую измеримую $f(x)$, конечную почти всюду на $[0, 2\pi]$, при любом $\varepsilon > 0$ можно так изменить на множестве меры меньше ε , чтобы превратить ее в непрерывную $g(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье.

Но, как показал Д. Е. Меньшов, то множество, на котором происходит изменение, нельзя выбрать произвольно (см. § 6).

Однако, если уже не требовать от «исправленной» функции, чтобы ее ряд Фурье сходился равномерно, а ограничиться сходимостью почти всюду, то получается следующий результат (см. § 7): для любой суммируемой $f(x)$ и любого совершенного нигде не плотного P можно так изменить $f(x)$ вне P , чтобы получилась суммируемая функция $g(x)$ с рядом $\sigma(g)$, сходящимся почти всюду (в частности, можно для любого $\varepsilon > 0$ сделать $mP > 2\pi - \varepsilon$).

В § 6 даются без доказательств некоторые теоремы Д. Е. Меньшова, показывающие, в какой мере полученные результаты могут быть усилены и в каких случаях такое усиление невозможно.

§ 2. Две элементарные леммы

Лемма 1. Пусть $\lambda(x)$ — непрерывная ломаная на некотором отрезке $[a, b]$; если $|\lambda(x)| \leq M$ и число звеньев ломаной равно k , то для любых n и x

$$\left| \int_a^b \lambda(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 4\pi kM.$$

Действительно, если (α, β) такой отрезок, на котором $\lambda(x)$ прямолинейна, то по второй теореме о среднем (см. Вводный материал, § 2)

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq \left| \lambda(\alpha) \int_{\alpha}^{\xi} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| + \left| \lambda(\beta) \int_{\xi}^{\beta} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 4M\pi,$$

потому что

$$\left| \int_c^d \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 2\pi$$

для любых c и d (см. гл. I, § 35).

Так как отрезок $[a, b]$ разбивается на k отрезков, на каждом из которых $\lambda(x)$ прямолинейна, то утверждение леммы справедливо.

Л е м м а 2. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\psi(x)$ — периодическая с периодом 2π такая, что

$$\left| \int_0^{\xi} \psi(t) dt \right| < \varepsilon, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

Тогда для любых n и x

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < An^2 \varepsilon,$$

где A — абсолютная константа.

Чтобы доказать это, заметим сначала, что функция $g(y) = \frac{\sin y}{y}$ имеет непрерывную производную на всей бесконечной оси, и, кроме того,

$$\left| \frac{d}{dy} \left(\frac{\sin y}{y} \right) \right| \leq C, \quad -\infty < y < +\infty,$$

где C постоянно. Но отсюда

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin n(t-x)}{t-x} \right) \right| \leq Cn^2 \text{ для любых } n \text{ и } x.$$

Теперь, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt = H(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} H(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin n(t-x)}{t-x} \right] dt,$$

где мы положили

$$H(t) = \int_0^t \psi(u) du.$$

В силу условий леммы $|H(t)| \leq \varepsilon$ для $0 \leq t \leq 2\pi$, а потому

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 2n\varepsilon + Cn^2 \varepsilon 2\pi < An^2 \varepsilon,$$

где A постоянно, и лемма доказана *).

*) Легко подсчитать, что $A < 16$.

Обе доказанные леммы очень элементарны, и мы их выделили только для того, чтобы не разбивать изложение мелкими замечаниями. Теперь же мы переходим к таким леммам, которые будут играть решающую роль в доказательстве основной теоремы.

§ 3. Лемма о множителе Дирихле

Здесь будет доказана одна лемма, касающаяся свойств «исправленного» множителя Дирихле, т. е. выражения вида

$$\frac{\sin n(t-x)}{t-x}, \quad (3.1)$$

которым обычно при изучении вопросов сходимости заменяют настоящий множитель Дирихле

$$D_n(t-x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}}.$$

Будет установлен некоторый факт, характеризующий интерференцию положительных и отрицательных волн функции (3.1), когда аргумент t пробегает

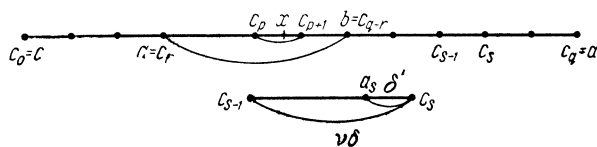


Рис. 27

некоторую систему интервалов равной длины и расположенных на равных расстояниях друг от друга, а x пробегает некоторое множество.

Первое утверждение этой леммы мы используем в § 4, а второе в § 6.

Л е м м а 3. Пусть $[c, d]$ — любой отрезок, $v > 8$ — любое целое, $r > 2$ — любое целое и $q = rv$. Пусть

$$\delta = \frac{d-c}{qv},$$

$$c_s = c + v\delta s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (c = c_0, d = c_q),$$

$$a_s = c_s - \delta', \quad 0 < \delta' \leq \delta,$$

$$a = c + \frac{d-c}{v}, \quad b = d - \frac{d-c}{v},$$

$$E = \sum_{s=r}^{q-r-1} [c_s + 2\delta, c_{s+1} - 2\delta]$$

(см. рис. 27).

Тогда имеем

$$1) \left| \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < A \quad \text{для} \quad a \leq x \leq b, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$2) \left| \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < A \frac{\delta'}{\delta} \quad \text{для} \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где A — абсолютная константа.

Доказательство. Так как $\frac{d-c}{v} = q\delta = r v \delta$, то $a = c_r$ и $b = c_{q-r}$. Поэтому существует такое p , $r \leq p \leq q - r - 1$, что

- 1) если $x \in [a, b]$, то $c_p \leq x \leq c_{p+1}$,
- 2) если $x \in E$, то $c_p + 2\delta \leq x \leq c_{p+1} - 2\delta$ (см. рис. 28).

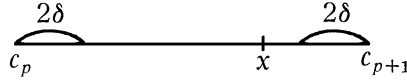


Рис. 28

Обозначим

$$I_{n_s}(x) = \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt. \quad (3.2)$$

Нам надо оценить

$$I_n(x) = \sum_{s=1}^q I_{n_s}(x). \quad (3.3)$$

Имеем для любого $s \neq p$, $s \neq p \pm 1$

$$|I_{n_s}(x)| \leq \frac{\delta'}{\min |t-x|},$$

где \min берется по всем t из (a_s, c_s) . Но для $s > p + 1$

$$t - x \geq a_s - c_{p+1} = c_s - \delta' - c_{p+1} =$$

$$= (s - p - 1)v\delta - \delta' \geq (s - p - 1)(v - 1)\delta,$$

откуда

$$|I_{n_s}(x)| \leq \frac{\delta'}{(v-1)(s-p-1)\delta} \quad \text{для } s > p + 1, \quad (3.4)$$

а для $s < p - 1$ имеем $x - t \geq c_p - c_s = (p - s)v\delta$, откуда

$$|I_{n_s}(x)| \leq \frac{\delta'}{(p-s)v\delta} \quad \text{для } s < p - 1. \quad (3.5)$$

Обе формулы (3.4) и (3.5) дают во всех случаях

$$|I_{n_s}(x)| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{v|p-s|} \quad \text{для } |p-s| > 1, \quad (3.6)$$

потому что для любого натурального $k > 1$ всегда $\frac{1}{k-1} < \frac{2}{k}$. Наконец,

$$|I_{n_s}(x)| \leq 2\pi \quad (3.7)$$

для любых n , s и x (гл. I, § 35).

Теперь для оценки $I_n(x)$ мы будем различать два случая

а) $2p - 1 \leq q$,

б) $2p - 1 > q$.

В случае а) мы положим

$$K_n(x) = \sum_{s=1}^{2p-1} I_{n_s}(x), \quad Q_n(x) = \sum_{s=2p}^q I_{n_s}(x),$$

в случае б)

$$K_n(x) = \sum_{s=2p-q}^q I_{n_s}(x), \quad Q_n(x) = \sum_{s=1}^{2p-q-1} I_{n_s}(x).$$

Имеем в обоих случаях

$$I_n(x) = K_n(x) + Q_n(x). \quad (3.8)$$

Оценим сначала $Q_n(x)$. В сумме $Q_n(x)$ для случая а) имеем $s \geq 2p$, значит, $s - p \geq p \geq r$, а потому из (3.6)

$$|I_{n_s}(x)| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{v r} = 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{q}.$$

В случае б) имеем $s \leq 2p - q - 1$, значит,

$$p - s \geq q + 1 - p \geq q + 1 - (q - r - 1) = r + 2 > r,$$

следовательно, справедлива та же оценка; в обоих случаях число членов суммы меньше q , а значит

$$|Q_n(x)| \leq q 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{q} = 4 \frac{\delta'}{\delta}. \quad (3.9)$$

Переходим к оценке $K_n(x)$. Полагая $m = p - 1$ в случае а) и $m = q - p$ в случае б), имеем в обоих случаях

$$K_n(x) = \sum_{s=p-m}^{p+m} I_{n_s}(x). \quad (3.10)$$

Это выражение мы и будем оценивать.

Полагая $t = a_s + \tau$, имеем

$$K_n(x) = \sum_{s=p-m}^{p+m} \int_0^{\delta'} \frac{\sin n(a_s + \tau - x)}{a_s + \tau - x} d\tau. \quad (3.11)$$

Положим

$$\lambda = \frac{a_p + \tau - x}{v \delta}. \quad (3.12)$$

Тогда $\lambda \leq 0$, ибо $a_p + \tau \leq c_p \leq x$; с другой стороны

$$-\lambda = \frac{x - a_p - \tau}{v \delta} \leq \frac{c_{p+1} - c_p}{v \delta} = 1,$$

значит, $|\lambda| \leq 1$. Но

$$a_s + \tau - x = (s - p) v \delta + a_p + \tau - x = (s - p + \lambda) v \delta.$$

Поэтому

$$K_n(x) = \frac{1}{v \delta} \sum_{s=p-m}^{p+m} \int_0^{\delta'} \frac{\sin n v \delta (s - p + \lambda)}{s - p + \lambda} d\tau. \quad (3.13)$$

Исключим из суммы $K_n(x)$ три интеграла, именно те, где $s = p$, $s = p - 1$ и $s = p + 1$; их оценим отдельно. Во-первых, мы для любых a , β , x и n имеем (см. гл. I, § 35)

$$\left| \int_a^\beta \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 2\pi.$$

Кроме того, если расстояние от x до любого c_s не меньше, чем 2δ , а $a_s \leq t \leq c_s$, то $|t - x| \geq 2\delta - \delta' \geq \delta$, а потому

$$|I_{n_s}(x)| \leq 2\pi \quad \text{для любых } s \text{ и } x$$

и

$$|I_{n_s}(x)| \leq \frac{\delta'}{\delta}, \quad \text{если } x \in E \text{ и } s \text{ любое.}$$

Итак, для $a \leq x \leq b$ выкидывание трех интегралов из суммы (3.11) означает отбрасывание величины, по модулю не превосходящей 6π , а для $x \in E$ эта величина не превосходит $3 \frac{\delta'}{\delta}$.

Остается оценить

$$K_n^*(x) = \sum'_{s=p-m}^{p+m} \frac{1}{v\delta} \int_0^{\delta'} \frac{\sin Y(s-p+\lambda)}{s-p+\lambda} d\tau,$$

где $Y = n v \delta$ и где знак \sum' означает, что $s \neq p$ и $s \neq p \pm 1$.

Полагая $s-p=v$, если $s > p$ и $p-s=v$, если $p > s$, получим

$$K_n^*(x) = \sum_{v=2}^m \left[\frac{1}{v\delta} \int_0^{\delta'} \frac{\sin Y(v+\lambda)}{v+\lambda} d\tau + \frac{1}{v\delta} \int_0^{\delta'} \frac{\sin Y(v-\lambda)}{v-\lambda} d\tau \right].$$

Если обозначить

$$\sum_{v=2}^m \frac{\sin Y(v \pm \lambda)}{v \pm \lambda} - \sum_{v=2}^m \frac{\sin Y(v \pm \lambda)}{v} = R,$$

то

$$|R| \leq \sum_{v=2}^m \left| \frac{1}{v \pm \lambda} - \frac{1}{v} \right| \leq \sum_{v=2}^m \frac{1}{v(v-1)},$$

так как $|\lambda| \leq 1$.

Поэтому при любом m имеем $|R| \leq 1$, откуда следует

$$\begin{aligned} |K_n^*(x)| &\leq \left| \sum_{v=2}^m \frac{1}{v\delta} \int_0^{\delta'} \frac{\sin Y(v+\lambda) + \sin Y(v-\lambda)}{v} d\tau \right| + 2 \frac{\delta'}{\delta v} = \\ &= \left| \frac{1}{v\delta} \int_0^{\delta'} 2 \cos Y\lambda \sum_{v=2}^m \frac{\sin Yv}{v} d\tau \right| + 2 \frac{\delta'}{v\delta}. \end{aligned}$$

Но

$$\left| \sum_{v=2}^m \frac{\sin Yv}{v} \right| \leq G$$

при любых Y и m , где G — абсолютная константа (гл. 1, § 41), поэтому

$$|K_n^*(x)| \leq 2G \frac{\delta'}{v\delta} + 2 \frac{\delta'}{v\delta} < L \frac{\delta'}{\delta}, \quad (3.14)$$

где L — абсолютная константа.

Учитывая разницу между $K_n(x)$ и $K_n^*(x)$, заключаем отсюда

$$|K_n(x)| \leq \begin{cases} L \frac{\delta'}{\delta} + 6\pi & \text{для } a \leq x \leq b, \\ (L+3) \frac{\delta'}{\delta} & \text{для } x \in E \end{cases} \quad (3.15)$$

и, наконец, принимая во внимание (3.8), (3.9) и (3.15),

$$|I_n(x)| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} + L \frac{\delta'}{\delta} + 6\pi \leq A, \quad a \leq x \leq b$$

(ибо $\frac{\delta'}{\delta} < 1$) и

$$|I_n(x)| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} + (L+3) \frac{\delta'}{\delta} \leq A \frac{\delta'}{\delta}, \quad x \in E,$$

где A — абсолютная константа. Лемма 3 доказана в обоих случаях.

З а м е ч а н и е. Ввиду чрезвычайной глубины этой леммы Менъшова*), мы считаем целесообразным отметить основную идею, которая могла остаться

*) Это подтверждается тем, что с ее помощью он доказал целый ряд важных теорем.

скрытой за выкладками: точка x не может подходить очень близко к концам c и d рассматриваемого отрезка $[c, d]$, так как она отстоит от них не меньше, чем на $\frac{d-c}{v} = q\delta = r\nu\delta$; поэтому непременно существуют как отрезки (a_s, c_s) налево, так и направо от нее. Так как $c_p \leq x \leq c_{p+1}$, то сказать, что $2p-1 \leq q$, это значит сказать, грубо говоря, что x лежит в левой половине отрезка $[c, d]$, а при $2p-1 > q$ — в его правой половине. Сумма $Q_n(x)$ распространена на интегралы по таким (a_s, c_s) , которые «сравнительно далеко» от x (так как $|s-p| \geq r$), а потому оценка $Q_n(x)$ достаточно грубая: в ней можно заменить $\sin n(t-x)$ единицей и играть только на том, что длина δ' интервала интегрирования не больше δ , а расстояние от t до x , грубо говоря, равно сумме длин интервалов (c_s, c_{s+1}) , поместившихся между t и x , т. е. $|s-p|\nu\delta \geq r\nu\delta = q\delta$. Поэтому величина каждого $I_{n_s}(x)$ из суммы $Q_n(x)$ имеет порядок $\frac{\delta'}{q\delta}$, а всех их не больше q , что и дает нужную оценку.

С суммой $K_n(x)$ дело обстоит иначе. Здесь есть интервалы (a_s, c_s) , которые близки к точке x , и даже для случая 1) разность $t-x$ может стать равной нулю. Мы вынуждены поэтому отдельно оценивать те интервалы, где $s = p-1$, p или $p+1$; впрочем, это не страшно, так как каждый такой интеграл в отдельности не превосходит 2π (чего достаточно в случае 1), так как там отбрасывание константы ничего не меняет) и не превосходит $\frac{\delta'}{\delta}$ в случае 2), где оцениваемая величина должна иметь такой же порядок.

Теперь в сумме $K_n(x)$ уже нет интегралов, распространенных на «опасные интервалы», но среди остальных все же есть «близкие» к x , и потому их уже нельзя оценивать грубо. Здесь приходится играть на том, что столько же интервалов (a_s, c_s) налево от того интервала (c_p, c_{p+1}) , где лежит x , сколько и направо от него, и их-то мы и объединяем попарно (случай $v = s-p$ и $v = p-s$).

Это дает возможность учесть интерференцию положительных и отрицательных волн синуса — употребление формулы

$$\sin Y(v+\lambda) + \sin Y(v-\lambda) = 2 \sin Yv \cos Y\lambda.$$

Далее, так как интервалы (a_s, c_s) очень малы, то когда точка t пробегает такой интервал, ее расстояние от x почти такое же, как если бы она оставалась в a_s , значит, при пробегании числом s разных значений у нас $t-x$ меняется почти как член арифметической прогрессии с разностью $\nu\delta$. Но, как мы уже знаем,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k}$$

есть величина, ограниченная для любых N и x . В этом факте также учтена уже интерференция положительных и отрицательных волн синусоиды. Использование этого факта и дает последнее неравенство, нужное для оценки $K_n(x)$.

Тонкость полученной оценки может быть продемонстрирована следующими соображениями: пусть $[c, d]$ лежит на $[0, 2\pi]$ и пусть $F(x)$ — характеристическая функция для множества, составленного из интервалов (a_s, c_s) ($s = 1, 2, \dots, q$). Тогда

$$\sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt = \int_0^{2\pi} F(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt.$$

Так как $F(t)$ ступенчатая, значит имеет ограниченное изменение, то частные суммы ее ряда Фурье ограничены в совокупности, поэтому можно утверждать сразу, что и

$$\left| \int_0^{2\pi} F(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < C,$$

где C постоянно. Но все дело в том, что, как было показано в § 48 гл. I, если некоторая функция $F(x)$ с ограниченным изменением имеет максимум модуля, равный M , и полное изменение V , то частные суммы ее ряда Фурье удовлетворяют условию

$$|S_n(x, F)| \leq M + 2V$$

и, значит, в интересующем нас случае, где, как легко подсчитать, $V = 2q$, а $M = 1$, мы могли бы только утверждать, что

$$|S_n(x, F)| \leq 1 + 4q.$$

А так как q в рассматриваемой лемме может быть сделано как угодно большим, то утверждение

$$\left| \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < A,$$

где A — абсолютная константа, базируется на том, что интервалы (a_s, c_s) , где $F(x) = 1$ и вне их $F(x) = 0$, это не какие-нибудь q интервалов, а интервалы, подобранные так, что на них происходит интерференция положительных и отрицательных волн синусоиды $\sin nt$.

С л е д с т в и е 1. Пусть $[c, d]$ — любой отрезок на $[0, 2\pi]$. Сохраняем все обозначения леммы. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} h_s & \text{на } (a_s, c_s), s = 0, \pm 1, \dots, \\ 0 & \text{вне всех } (a_s, c_s). \end{cases}$$

Числа h_s выбраны так, что

$$\left. \begin{aligned} 1) & |h_{s+1} - h_s| \leq \frac{1}{r}, \\ 2) & 0 \leq h_s \leq 1, \\ 3) & h_s = 0, \text{ если } (a_s, c_s) \text{ вне } (a, b). \end{aligned} \right\} s = 0, \pm 1, \dots,$$

Тогда

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < B \quad (3.16)$$

для любых n и x , где B — абсолютная константа.

Для доказательства заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt &= \sum_{s=1}^q h_s \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt = \\ &= \sum_{s=1}^q h_s I_{ns}(x) = \sum_{s=1}^q (h_s - h_p) I_{ns}(x) + h_p \sum_{s=1}^q I_{ns}(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если $x \in [a, b]$, то $h_p = 0$. Если же $x \in [a, b]$, то по доказанной лемме

$$\left| \sum_{s=1}^q I_{n_s}(x) \right| < A.$$

Поэтому из формулы (3.17) и учитывая $0 \leq h_s \leq 1$, для любого x на $[0, 2\pi]$ имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq \sum_{s=1}^q |h_s - h_p| |I_{n_s}(x)| + A. \quad (3.18)$$

Отбрасывая, как это мы делали при доказательстве леммы, те интегралы для которых $s = p$, $s = p - 1$ и $s = p + 1$, и замечая, что $|h_s - h_p| \leq 2$ для любых s и p и справедливы формулы (3.7), мы видим, что (3.18) дает

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq \sum'_{\substack{s \neq p \\ s \neq p \pm 1}} |h_s - h_p| |I_{n_s}(x)| + 12\pi + A. \quad (3.19)$$

К интегралам правой части (3.19) применим формулу (3.6). Будем иметь

$$\sum' |h_s - h_p| |I_{n_s}(x)| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{\nu} \sum' \frac{|h_s - h_p|}{|s - p|}. \quad (3.20)$$

Но $|h_s - h_p| \leq \frac{|s - p|}{r}$ в силу условия 1), наложенного на числа h_s , а потому из (3.19) и (3.20)

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 4 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{\nu r} q + 12\pi + A = 4 \frac{\delta'}{\delta} + 12\pi + A < B,$$

где B — абсолютная константа.

С л е д с т в и е 2. Пусть

$$\eta < \frac{\delta}{q} \quad \text{и} \quad \eta < \frac{\delta'}{2}.$$

Положим

$$a'_s = a_s + \eta; \quad c'_s = c_s - \eta$$

и пусть

$$g(x) = \varphi(x) \quad \text{вне всех} \quad (a'_s, c'_s)$$

и интерполируется линейно на каждом (a_s, a'_s) и (c'_s, c_s) , где $\varphi(x)$ — функция из следствия 1. Тогда $g(x)$ — непрерывная ломаная на $[0, 2\pi]$, причем $g(x) = 0$ вне $[a, b]$,

$$\int_0^{2\pi} g(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \leq C \quad (3.21)$$

для любых n и x , где C — абсолютная константа и

$$\int_0^{2\pi} |g(t) - \varphi(t)| dt \leq 2\delta. \quad (3.22)$$

То, что $g(x)$ — непрерывная ломаная, равная нулю вне $[a, b]$, видно из ее построения.

Чтобы убедиться в справедливости (3.21), достаточно, пользуясь (3.16), доказать, что

$$\left| \int_0^{2\pi} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < B', \quad (3.23)$$

где B' — абсолютная константа. Но на каждом (a_s, c_s) (рис. 29) функция $g(t) - \varphi(t)$ есть непрерывная ломаная, состоящая из трех звеньев, и поскольку $0 \leq h_s \leq 1$, имеем

$$|g(t) - \varphi(t)| \leq 1.$$

Поэтому в силу леммы 1 § 2 имеем

$$\left| \int_{a_s}^{c_s} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 12\pi. \quad (3.24)$$

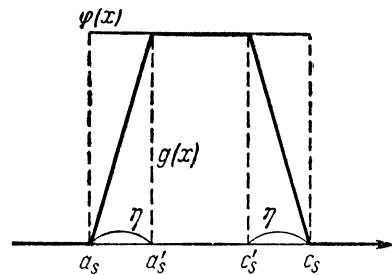


Рис. 29

Так как $g(t) - \varphi(t) = 0$ вне всех (a_s, c_s) , то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| &= \left| \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \sum'_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| + 36\pi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где знак \sum' означает, что мы отбросили три интеграла: для $s = p$, $s = p - 1$ и $s = p + 1$, каждый из них не превосходит 12π в силу (3.24).

Так как в интегралах правой части (3.25) уже

$$|t - x| \geq \delta,$$

то

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_s}^{c_s} [g(t) - \varphi(t)] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| &\leq \frac{1}{\delta} \int_{a_s}^{c_s} |g(t) - \varphi(t)| dt = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{a_s}^{a'_s} |\varphi(t) - g(t)| dt + \frac{1}{\delta} \int_{c'_s}^{c_s} |\varphi(t) - g(t)| dt \leq 2 \frac{\eta}{\delta} < \frac{2}{q} \end{aligned}$$

в силу выбора числа η .

Так как число интегралов в формуле (3.25) меньше, чем q , то правая часть (3.25) не превосходит $2 + 36\pi = B'$ и, значит, (3.23), а стало быть, и (3.21) доказано.

Кроме того, так как $\varphi(x) \neq g(x)$ только на (a_s, a'_s) и (c'_s, c_s) , а в этих интервалах $|\varphi(x) - g(x)| \leq 1$, то

$$\int_0^{2\pi} |g(t) - \varphi(t)| dt \leq \sum_{s=1}^q \left(\int_{a_s}^{a'_s} dt + \int_{c'_s}^{c_s} dt \right) = 2\eta q < 2\delta$$

и (3.22) тоже доказано.

З а м е ч а н и е. Впоследствии, применяя эти результаты к доказательству леммы 4, мы при построении $\varphi(x)$ положим, что $h_s = 1$ на всех (a_s, c_s) в некотором (a', b') внутри (a, b) , что n_s возрастает на (a, a') и убывает на

(b', b) , причем, так как число интервалов (c_s, c_{s+1}) длины $\nu\delta$, которые укладываются на (a, a') и (b', b) , будет равно r , то можно было бы сделать так, чтобы переход от каждой «ступеньки лестницы» (рис. 30) к следующей требовал «шага», равного $\frac{1}{r}$ (т. е. $h_{s+1} = h_s + \frac{1}{r}$ на (a, a') и $h_{s+1} = h_s - \frac{1}{r}$ на (b', b)).

Однако нам удобнее, чтобы это было так для всех ступенек, кроме первой и последней, где «шаг» должен быть сделан в два раза меньше. Почему это

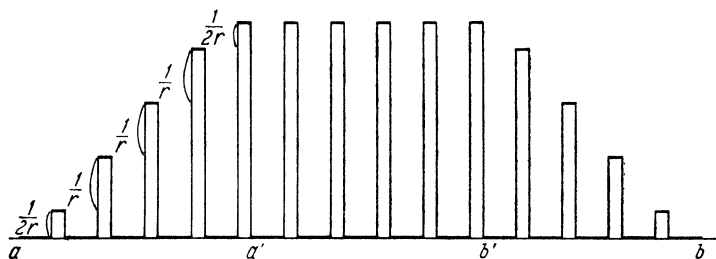


Рис. 30

так, будет видно из леммы 5, здесь же мы только указываем вид $\varphi(x)$ для геометрической картины и отметим, что при таком выборе чисел h_s условие $|h_{s+1} - h_s| \leq \frac{1}{r}$ удовлетворяется для всех s .

§ 4. «Исправление» функции для получения равномерно сходящегося ряда Фурье

Мы докажем здесь следующую замечательную теорему Д. Е. Меньшова [2].

Теорема Меньшова. Пусть $f(x)$ — измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\sigma > 0$, можно построить функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E , $mE > 2\pi - \sigma$, и такую, что ряд $\sigma(g)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма 4. Пусть $[c, d]$ — любой сегмент на $[0, 2\pi]$, γ — любое действительное, ε — любое положительное, $\nu > 8$ — любое натуральное.

Тогда существуют функция $\psi(x)$ и множество \mathcal{E} такие, что

а) $\psi(x)$ — непрерывная ломаная на $[0, 2\pi]$ и $\psi(x) = 0$ — вне $[c, d]$,

б) $|\psi(x)| \leq 2\nu|\gamma|$ на $0 \leq x \leq 2\pi$,

в) $|\int_0^\xi \psi(x) dx| < \varepsilon$, $0 \leq \xi \leq 2\pi$,

г) $\psi(x) = \gamma$ на \mathcal{E} , где

д) $m\mathcal{E} > (d - c)(1 - \frac{5}{\nu})$ и $\mathcal{E} \subset [c, d]$,

е) $|\int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt| \leq B\nu|\gamma|$, $n = 1, 2, \dots$; $0 \leq x \leq 2\pi$,

где B — абсолютная константа.

Если $\gamma = 0$, то достаточно положить $\psi(x) \equiv 0$ и все условия будут удовлетворены при $\mathcal{E} \equiv [c, d]$. Поэтому в дальнейшем считаем $\gamma \neq 0$.

Выберем натуральное r столь большим, чтобы, полагая

$$q = r \nu, \quad (4.1)$$

иметь

$$4|\gamma| \frac{d-c}{q} < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Зафиксировав так r , а значит и q , положим

$$\delta = \frac{d-c}{q\nu} \quad (4.3)$$

и построим числа c_s и a_s , как в лемме § 3, но при $\delta' = \delta$, т. е.

$$c_s = c + \delta \nu s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$a_s = c_s - \delta.$$

Положим снова

$$a = c + \frac{d-c}{\nu}, \quad b = d - \frac{d-c}{\nu}$$

и пусть

$$a' = c + 2 \frac{d-c}{\nu}, \quad b' = d - 2 \frac{d-c}{\nu}.$$

Пусть $\chi(x) = 1$ на (a', b') , $\chi(x) = 0$ вне (a, b) и будем ее интерполировать линейно между a и a' , а также b' и b (рис. 31).

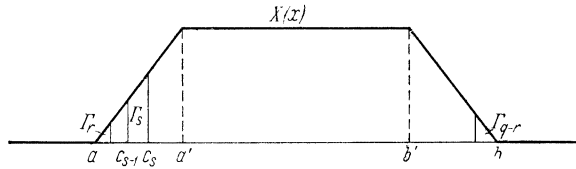


Рис. 31

Обозначим через Γ_s величину интеграла

$$\Gamma_s = \int_{c_{s-1}}^{c_s} \chi(t) dt.$$

Из рис. 31 ясно, что $\Gamma_s = 0$, если отрезок (c_{s-1}, c_s) помещается вне (a, b) , что $\Gamma_s = \nu\delta$, если (c_{s-1}, c_s) лежит на (a', b') , и что, если (c_{s-1}, c_s) лежит на (a, a') или (b', b) , то Γ_s есть площадь трапеции или треугольника при $s = r + 1$ или $s = q - r$. Так как на отрезке (a, a') , длина которого есть $\frac{d-c}{\nu} = q\delta = r\nu\delta$, помещается ровно r

отрезков длины $\nu\delta$, то при переходе от (c_{s-1}, c_s) к (c_s, c_{s+1}) , если оба они лежат на (a, a') , площадь Γ_{s+1} получается из площади Γ_s добавлением прямоугольника с высотой $\frac{1}{r}$ и основанием $\nu\delta$, т. е.

$$\Gamma_{s+1} - \Gamma_s = \frac{1}{r} \nu\delta$$

(рис. 32). Точно так же обстоит дело, если (c_{s-1}, c_s) и (c_s, c_{s+1}) оба лежат на (b', b) , надо только $\Gamma_{s+1} - \Gamma_s$ заменить на $|\Gamma_{s+1} - \Gamma_s|$.

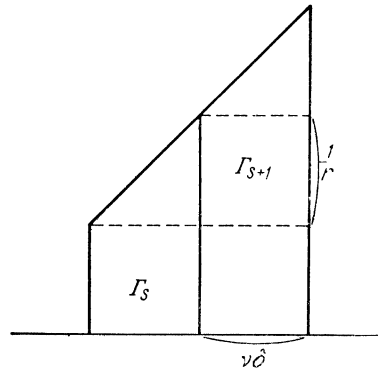


Рис. 32

Для случая, когда мы переходим от отрезка, лежащего налево от a , к отрезку направо от него, аналогично для a' , b' и b изменение площади происходит лишь на $\frac{1}{2r} \nu \delta$. Итак, во всех случаях

$$|\Gamma_{s+1} - \Gamma_s| \leq \frac{1}{r} \nu \delta \quad (s = 1, 2, \dots, q-1).$$

Мы теперь построим функцию $\varphi(x)$ так, как указано в следствии 1 леммы 3, но полагая для всех s

$$h_s = \frac{\Gamma_s}{\nu \delta};$$

тогда будем иметь $0 \leq h_s \leq 1$ и $|h_{s+1} - h_s| \leq \frac{1}{r}$, как требуется при опреде-

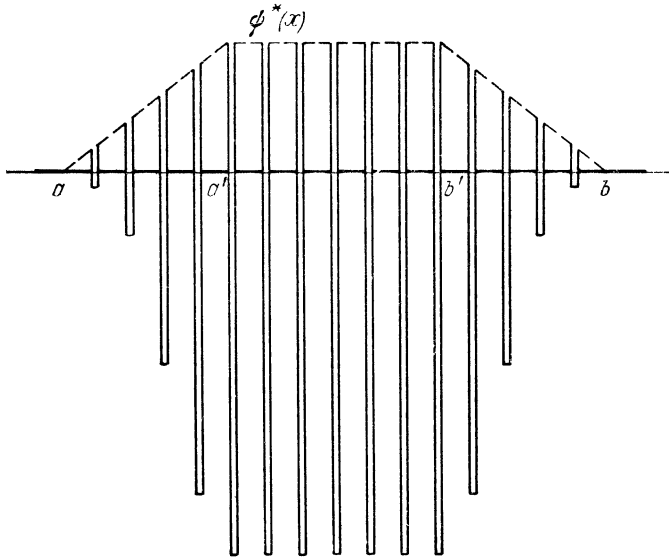


Рис. 33

лении этой функции. Кроме того, заметим сразу, что мы будем иметь для любого s

$$\nu \int_{c_{s-1}}^{c_s} \varphi(t) dt = \int_{c_{s-1}}^{c_s} \chi(t) dt, \quad (4.4)$$

потому, что $\varphi(t) = 0$ вне (a_s, c_s) и $\varphi(t) = h_s$ на (a_s, c_s) , длина которого равна δ , значит

$$\nu \int_{c_{s-1}}^{c_s} \varphi(t) dt = \nu h_s \delta = \Gamma_s = \int_{c_{s-1}}^{c_s} \chi(t) dt.$$

Теперь ясно, почему $\varphi(t)$ имеет вид, указанный на черт. 30. После того, как $\varphi(t)$ определена, мы построим $g(t)$ так, как указано в следствии 2 леммы 3. Наконец положим

$$\psi(x) = \gamma [\chi(x) - \nu g(x)] \quad (4.5)$$

и докажем, что $\psi(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 4.

Условие а) выполнено, так как $\chi(x)$ и $g(x)$ обе являются непрерывными ломаными на $[0, 2\pi]$ и обе равны нулю вне $[c, d]$.

Условие б) вытекает из того, что $|\chi(x)| \leq 1$, $|g(x)| \leq 1$, а $\nu > 1$.

Чтобы убедиться в справедливости в), введем вспомогательную функцию (рис. 33)

$$\psi^*(x) = \gamma [\chi(x) - \nu\varphi(x)].$$

Имеем

$$\psi^*(x) - \psi(x) = \nu\gamma [g(x) - \varphi(x)],$$

а потому в силу (3.22), (4.2) и (4.3)

$$\left| \int_0^\xi [\psi^*(t) - \psi(t)] dt \right| \leq \nu |\gamma| \int_0^{2\pi} |g(t) - \varphi(t)| dt \leq 2 |\gamma| \nu \delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

Следовательно, в) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\left| \int_0^\xi \psi^*(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi. \quad (4.6)$$

Но из (4.4) следует сразу, что для любого s

$$\int_{c_{s-1}}^{c_s} \psi^*(t) dt = 0. \quad (4.7)$$

Пусть ξ любое на $[0, 2\pi]$. Если $\xi \leq c$, то $\psi^*(t) = 0$, поскольку $\varphi(t)$ и $\chi(t)$ обе равны нулю вне (c, d) . Если $c < \xi$, то найдется такое k , что

$$c_k \leq \xi < c_{k+1}.$$

Тогда

$$\int_0^\xi \psi^*(t) dt = \int_0^{c_k} \psi^*(t) dt + \int_{c_k}^\xi \psi^*(t) dt = \int_{c_k}^\xi \psi^*(t) dt, \quad (4.8)$$

поскольку $(c, c_k) = \sum_{s=1}^{k-1} (c_{s-1}, c_s)$ и к каждому (c_{s-1}, c_s) можно применить (4.7).

Далее имеем в силу (4.4), (4.2) и (4.3)

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_k}^\xi \psi^*(t) dt \right| &\leq |\gamma| \left| \int_{c_k}^{c_{k+1}} \chi(t) dt + \nu |\gamma| \int_{c_k}^{c_{k+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \\ &\leq \nu \delta |\gamma| + \nu \delta |\gamma| \leq 2 \nu \delta |\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что (4.6) доказано, а значит, как уже разъяснялось выше, справедливо и условие в).

Положим

$$\mathcal{E} = [a', b'] - \sum_{s=2r+1}^{q-2r} (a_s, c_s),$$

т. е. выкинем из $[a', b']$ все интервалы (a_s, c_s) , лежащие внутри него. Имеем

$$b' - a' = d - c - 4 \frac{d - c}{\nu} = (d - c) \left(1 - \frac{4}{\nu} \right).$$

Для получения \mathcal{E} из (a', b') мы выбросили интервалы длины δ и их меньше, чем q штук, поэтому сумма их длин меньше $q \delta = \frac{d - c}{\nu}$, а значит

$$m\mathcal{E} > (d - c) \left(1 - \frac{4}{\nu} \right) - \frac{d - c}{\nu} = (d - c) \left(1 - \frac{5}{\nu} \right),$$

т. е. мера множества \mathcal{E} такая, как требуется в условии д) и притом \mathcal{E} лежит на $[c, d]$. Но на этом множестве \mathcal{E} имеем $\psi(x) = \gamma$, потому что $g(x) = 0$ вне всех (a_s, c_s) , а $\chi(x) = 1$ всюду на (a', b') . Итак, условие г) тоже выполнено.

Наконец осталось доказать е). Но так как $\chi(x)$ есть непрерывная ломаная на $[0, 2\pi]$, и она состоит из 5 звеньев, то по лемме 1 имеем, учитывая $|\chi(t)| \leq 1$,

$$\left| \int_0^{2\pi} \chi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 20\pi.$$

Что же касается $g(t)$, то она была построена так, чтобы удовлетворялось следствие 2 леммы 3, а потому

$$\left| \int_0^{2\pi} g(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < C,$$

где C — абсолютная константа. Отсюда в силу (4.5)

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq |\gamma| [20\pi + \nu C] \leq \nu B |\gamma|,$$

где B — новая абсолютная константа, и лемма 4 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Идея этой леммы следующая: мы хотим «малым» изменением превратить функцию, равную γ на $[c, d]$ и нулю вне $[c, d]$, в такую функцию $\psi(x)$, которая не только непрерывна, но и имеет интеграл, не превосходящий наперед заданное число ε на любом отрезке $(0, \xi)$; кроме того, она по модулю не должна превосходить $2\nu|\gamma|$, где ν задано и частные суммы ее ряда Фурье должны иметь тот же порядок, что $\nu|\gamma|$. В дальнейшем ν будет очень велико, так что изменение функции на множестве меры, меньшей чем $\frac{5}{\nu}$, будет малым изменением (см. условие г)). С другой стороны, соотношение между ν и γ в последующих построениях будет таким, что $\nu|\gamma|$ будет тоже мало. Рис. 33 показывает, почему, вычитая из $\gamma\chi(x)$ функцию $\gamma\nu\varphi(x)$, мы получаем функцию с малым интегралом: площади, ограниченные кривыми $\gamma\chi(x)$ и $\gamma\nu\varphi(x)$ на каждом (c_s, c_{s+1}) одинаковы, значит их разность равна нулю, а на каждом куске некоторого (c_s, c_{s+1}) всякая такая площадь мала, потому, что δ было выбрано столь малым, чтобы $|\gamma|\nu\delta$ было меньше чем $\frac{\varepsilon}{4}$.

Итак, можно добиться, чтобы при малом изменении функции сделать ее интеграл очень малым. Но если бы ее изменять на произвольно выбранных малых интервалах в большом числе, то частная сумма ряда Фурье измененной функции оказалась бы очень велика. Тот факт, что для построенной $\psi(t)$ удовлетворяется условие е) объясняется тем, что изменение производилось на разумно подобранных интервалах длины δ (опираясь на лемму о множителе Дирихле). Что касается перехода от $\varphi(t)$ к $g(t)$, то он делается для непрерывности $\psi(t)$, а свойства $\psi^*(t)$ и $\psi(t)$ одинаковы, потому что $\varphi(t)$ отлична от $g(t)$ лишь на интервалах чрезвычайно малых. Этим мы заканчиваем попытку объяснить идею доказанной леммы.

Мы переходим теперь к доказательству теоремы. Отметим прежде всего, что можно вести доказательство для функции $\Phi(x)$, обладающей свойствами:

- 1) $\Phi(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$,
- 2) $\Phi(x) = 0$ вне некоторого отрезка $[A, B]$, целиком лежащего внутри $(0, 2\pi)$.

Действительно, пусть $\sigma > 0$ задано. Допустим, что мы умеем найти такое множество E_1 и такую функцию $G(x)$, что

$$G(x) = \Phi(x) \quad \text{на} \quad E_1, \quad \text{где} \quad mE_1 > 2\pi - \frac{\sigma}{4}, \quad (4.10)$$

и $\sigma(G)$ равномерно сходится.

Пусть теперь $f(x)$ — любая измеримая и конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Пусть

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma}{8}, & B &= 2\pi - \frac{\sigma}{8}, \\ A' &= \frac{\sigma}{4}, & B' &= 2\pi - \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Так как $f(x)$ обладает C -свойством на $[0, 2\pi]$, значит и на (A', B') , то можно найти такое $P \subset (A', B')$, $mP >$

$> (B' - A') - \frac{\sigma}{4} = 2\pi - \frac{3}{4}\sigma$, что

$f(x) = \Phi(x)$ на P , где $\Phi(x)$ — функция непрерывная на (A', B') (рис. 34). Если мы положим $\Phi(x) = 0$ на $(0, A)$ и $(B, 2\pi)$, затем проинтерполируем ее линейно на $[A, A']$ и $[B', B]$, то $\Phi(x)$ будет удовлетворять условиям 1) и 2). Предполагается, что мы уже умеем

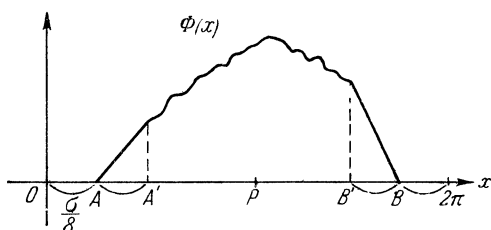


Рис. 34

найти $G(x)$, удовлетворяющую условию (4.10) и с равномерно сходящимся рядом Фурье.

Полагая

$$E = E_1 P,$$

мы видим, что

$$G(x) = f(x) \quad \text{на} \quad E$$

и при этом $mE > 2\pi - \sigma$, потому что

$$mC E \leq mC E_1 + mC P < \frac{\sigma}{4} + \frac{3}{4}\sigma = \sigma. \quad (4.11)$$

Итак, мы убедились, что достаточно доказать теорему для функции $\Phi(x)$, непрерывной всюду и обращающейся в нуль вне некоторого $[A, B]$, целиком лежащего внутри $[0, 2\pi]$.

Обращаемся к доказательству теоремы для этого случая.

Прежде всего представим $\Phi(x)$ в виде ряда

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x), \quad (4.12)$$

где все функции $\Phi_m(x)$ ступенчатые, ряд сходится равномерно и

$$|\Phi_m(x)| \leq \frac{\sigma}{2^{2m}} \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (4.13)$$

В силу непрерывности $\Phi(x)$ это всегда возможно.

Кроме того, можно всегда предположить, что $\Phi_m(x) = 0$ на $[0, A]$ и $[B, 2\pi]$ для $m = 1, 2, \dots$, поскольку $\Phi(x) = 0$ на этих отрезках.

Для каждой функции $\Phi_m(x)$ отрезок $[0, 2\pi]$ распадается на конечное число сегментов, на каждом из которых она постоянна; пусть $\varrho_k^{(m)}$ — эти сегменты, перенумерованные слева направо; на первом и последнем из них

$\Phi_m(x) = 0$. Перенумеруем сначала все $\varrho_j^{(1)}$, затем все $\varrho_j^{(2)}$, и т. д., получим последовательность сегментов

$$A_1, A_2, \dots, A_s, \dots,$$

причем, если ν_m — число всех интервалов постоянства функций $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_m(x)$, то для s , удовлетворяющего условию

$$\nu_{m-1} < s \leq \nu_m \quad (4.14)$$

имеем

$$A_s = \varrho_j^{(m)}$$

при некотором значении j и

$$\Phi_m(x) = \gamma_s \quad \text{для } x \in A_s, \quad (4.15)$$

где

$$|\gamma_s| \leq \frac{\sigma}{2^{2m}} \quad (4.16)$$

в силу (4.13).

Пусть теперь

$$n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots \quad (4.17)$$

— последовательность натуральных чисел, которые мы определим позже. Положим

$$\varepsilon_s = \frac{1}{s^2 n_s^2}. \quad (4.18)$$

На основании леммы 4, в которой мы положим

$$[c, d] = A_s, \quad \varepsilon = \varepsilon_s, \quad \nu = 2^{m+3} \left(\left\lceil \frac{2\pi}{\sigma} \right\rceil + 1 \right), \quad \gamma = \gamma_s, \quad (4.19)$$

мы можем для каждого s , удовлетворяющего условию (4.14), найти такую непрерывную ломаную $\psi_s(x)$, что

а) $\psi_s(x) = 0$ вне A_s ,

б) $|\psi_s(x)| \leq 2\nu |\gamma_s| \leq 2 \cdot 2^{m+3} \left(\left\lceil \frac{2\pi}{\sigma} \right\rceil + 1 \right) \frac{\sigma}{2^{2m}} < \frac{64\pi}{2^m}$ (в силу (4.16) и (4.19),

в) $\left| \int_0^\xi \psi_s(t) dt \right| < \varepsilon_s, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi$,

г) $\psi_s(x) = \gamma_s$ на \mathcal{E}_s , где

д) $\mathcal{E}_s \subset A_s$ и $m \mathcal{E}_s > A_s \left(1 - \frac{5}{\nu} \right) > A_s \left(1 - \frac{\sigma}{2\pi 2^m} \right)$,

потому что $\nu \geq 8 \cdot 2^m \frac{2\pi}{\sigma}$, значит $\frac{5}{\nu} < \frac{\sigma}{2\pi \cdot 2^m}$,

е) $\left| \int_0^{2\pi} \psi_s(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq B\nu |\gamma| \leq \frac{A}{2^m}$

для любых n и x , где A — абсолютная константа, потому что, как мы уже подсчитали, $\nu |\gamma| \leq \frac{32\pi}{2^m}$.

Заметим еще, что если $\gamma_s = 0$, то можно взять $\psi_s(x) = 0$, как было указано в начале доказательства леммы 4.

Пусть теперь

$$H_m = \sum_{s=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m} \mathcal{E}_s.$$

Тогда

$$m H_m = \sum m \mathcal{E}_s > \left(1 - \frac{\sigma}{2\pi \cdot 2^m}\right) \sum \Delta_s = 2\pi \left(1 - \frac{\sigma}{2\pi \cdot 2^m}\right) = 2\pi - \frac{\sigma}{2^m}, \quad (4.20)$$

потому что интервалы Δ_s для s , пробегающего значения от $\nu_{m-1} + 1$ до ν_m , составляют все отрезки постоянства $\Phi_m(x)$, т. е. не перекрываются и заполняют отрезок $[0, 2\pi]$.

Полагая

$$E = \prod_{m=1}^{\infty} H_m,$$

имеем в силу (4.20)

$$m E > 2\pi - \sigma. \quad (4.21)$$

Если теперь положить

$$G_m(x) = \psi_s(x) \quad \text{на} \quad \Delta_s, \quad \nu_{m-1} < s \leq \nu_m, \quad (4.22)$$

то из г) следует

$$G_m(x) = \gamma_s \quad \text{на} \quad \mathcal{E}_s$$

и так как $\mathcal{E}_s \subset \Delta_s$, то в силу (4.15)

$$G_m(x) = \Phi_m(x) \quad \text{на} \quad \mathcal{E}_s$$

и, следовательно,

$$G_m(x) = \Phi_m(x) \quad \text{на} \quad H_m,$$

откуда

$$G_m(x) = \Phi_m(x) \quad \text{на} \quad E \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.23)$$

Каждая $G_m(x)$ непрерывна, так как все $\psi_s(x)$ непрерывны и обращаются в нуль в концах Δ_s .

Разрыва в точке 0 или 2π при периодическом продолжении тоже не произойдет, так как мы уже говорили, что $\psi_s(x) = 0$, если $\gamma_s = 0$, а на отрезках $[0, A]$ и $[B, 2\pi]$ имеем $\Phi_m(x) = 0$ при любом m .

Наконец, так как каждая $\psi_s(x)$ удовлетворяет условию б), то в силу (4.22)

$$|G_m(x)| \leq \frac{64\pi}{2^m},$$

а следовательно, полагая

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(x),$$

видим, что $G(x)$ непрерывна, поскольку ряд сходится равномерно. Из (4.11) и (4.23) получаем тогда

$$G(x) = \Phi(x) \quad \text{на} \quad E,$$

и поскольку $mE > 2\pi - \sigma$ (см. (4.21)), то осталось доказать, что $\sigma(G)$ равномерно сходится, чтобы теорема была доказана.

Заметим, прежде всего, что ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x)$ тоже сходится равномерно к $G(x)$. Действительно, всякая $G_m(x)$ может быть определена как сумма $\psi_s(x)$ для $\nu_{m-1} < s \leq \nu_m$, потому что для любого x только одна из этих функций отлична от нуля ($\psi_s(x) = 0$ вне Δ_s на основании а)). Кроме того, каждая

$\psi_s(x)$ удовлетворяет б). Этого достаточно, чтобы убедиться в справедливости утверждения

$$G(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x), \quad (4.24)$$

где ряд равномерно сходится.

Для того чтобы убедиться в равномерной сходимости $\sigma(G)$ (при соответствующем подборе чисел n_k , которые мы пока еще не определили), достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , для которого, полагая

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

имеем

$$|S_n(x) - G(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

В силу (4.24) можем написать

$$S_n(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt. \quad (4.25)$$

Функции $\psi_s(t)$ полностью определяются лишь после того, как даны числа n_s , которые пока удовлетворяли только (4.17); по этим n_s строятся ε_s (см. (4.18)) и тогда уже можно определить $\psi_s(t)$ по лемме 4 с удовлетворением всех условий (4.19). Положим $n_1 = 1$ и пусть

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$$

уже выбраны. Тогда ε_s , а вместе с ними и ψ_s для $s = 1, 2, \dots, k-1$ уже построены. Каждая из них есть непрерывная ломаная, значит, их сумма тоже, а потому

$$\left| \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt - \sum_{s=1}^{k-1} \psi_s(x) \right| < \frac{1}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (4.26)$$

как только n станет достаточно большим, так как $\sigma \left(\sum_{s=1}^{k-1} \psi_s(x) \right)$ сходится равномерно к этой функции. Выберем же $n_k > n_{k-1}$ и достаточно большим, чтобы неравенство (4.26) имело место для $n > n_k$. Теперь все n_s определены и все $\psi_s(x)$ таким образом построены.

Пусть теперь n любое; найдем число k так, чтобы

$$n_k \leq n < n_{k+1}. \quad (4.27)$$

Тогда, если $n \rightarrow \infty$, то и $k \rightarrow \infty$, значит можно взять n столь большим, чтобы

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{64}. \quad (4.28)$$

Кроме того, мы будем считать n уже столь большим, чтобы, определяя k из неравенства (4.27) и находя затем m из

$$v_{m-1} < k \leq v_m, \quad (4.29)$$

иметь

$$\frac{A}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (4.30)$$

где A — константа, входящая в условие е) для функций $\psi_s(x)$ при $\nu_{m-1} < s \leq \nu_m$.

Наконец, в силу равномерной сходимости ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x)$ можно предположить, что для этого же k

$$\left| \sum_{s=k}^{\infty} \psi_s(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4.31)$$

Теперь, полагая

$$J_{ns}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_s(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

имеем на основании (4.26) и (4.31)

$$\begin{aligned} |S_n(x) - G(x)| &= \left| \sum_{s=1}^{\infty} J_{ns}(x) - \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{k-1} |J_{ns}(x) - \psi_s(x)| + |J_{nk}(x)| + \sum_{s=k+1}^{\infty} |J_{ns}(x)| + \left| \sum_{s=k}^{\infty} \psi_s(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4} + |J_{nk}(x)| + \sum_{s=k+1}^{\infty} |J_{ns}(x)|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Теперь на основании свойства е) функций $\psi_s(x)$ имеем

$$|J_{nk}(x)| \leq \frac{A}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (4.33)$$

потому что k удовлетворяет (4.29) и m удовлетворяет (4.30).

Наконец, на основании леммы 2 можем для всякого J_{ns} в силу свойства в) функций $\psi_s(x)$ написать

$$|J_{ns}(x)| \leq 16 n^2 \varepsilon_s \leq 16 n^2 \frac{1}{s^2 n_s^2},$$

так как ε_s удовлетворяет (4.18). Поэтому из (4.27) заключаем, что

$$|J_{ns}(x)| \leq 16 n_{k+1}^2 \frac{1}{s^2 n_s^2} \leq \frac{16}{s^2} \quad \text{при } s \geq k+1$$

и, следовательно, в силу (4.28)

$$\left| \sum_{s=k+1}^{\infty} J_{ns}(x) \right| \leq 16 \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \frac{16}{k} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4.34)$$

Соединяя (4.32), (4.33), (4.34) и (4.28), получаем

$$|S_n(x) - G(x)| < \varepsilon,$$

и доказательство закончено.

§ 5. Усиленное C -свойство

Нам представляется целесообразным ввести такую терминологию.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ обладает *усиленным C -свойством* на некотором $E \subset [0, 2\pi]$, $mE > 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $P \subset E$, $mP > mE - \varepsilon$, на котором $f(x) = g(x)$, где $g(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и ее ряд Фурье равномерно сходится на $[0, 2\pi]$.

Приняв такое определение, мы можем теорему Менъшова, доказанную в § 4, формулировать так: *если измеримая функция конечна почти всюду на $[0, 2\pi]$, то она на нем обладает усиленным C -свойством*. Однако легко видеть, что она обладает усиленным C -свойством и на любом E , $mE > 0$, лежащем на $[0, 2\pi]$. Действительно, взяв $\varepsilon > 0$, можно найти \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 2\pi - \varepsilon$ и такую $g(x)$, что $f(x) = g(x)$ на $\mathcal{E}E$ и $\sigma(g)$ сходится равномерно. Пересечение $E\mathcal{E}$ есть множество, для которого $m(E\mathcal{E}) > mE - \varepsilon$, и внутри него можно взять совершенное P , $mP > mE - \varepsilon$; на P имеем $f(x) = g(x)$ и $g(x)$ обладает нужными свойствами; значит, $f(x)$ обладает усиленным C -свойством на E .

Это простое замечание позволяет высказать следующее

Следствие из теоремы Менъшова. Для любой измеримой $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 2\pi]$, существует последовательность совершенных нигде не плотных множеств P_k ($k = 1, 2, \dots$) таких, что

1) множества P_k не имеют попарно общих точек,

2) если $Q = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$, то $mQ = 2\pi$,

3) $f(x) = f_k(x)$ на P_k ($k = 1, 2, \dots$),

где все $f_k(x)$ непрерывны и имеют равномерно сходящиеся ряды Фурье на $[0, 2\pi]$.

Действительно, находим сначала совершенное, нигде не плотное P_1 , $mP_1 > 0$, на котором $f(x) = f_1(x)$, где $f_1(x)$ непрерывна и $\sigma(f_1)$ равномерно сходится.

Допустим, что P_1, P_2, \dots, P_{k-1} уже построены; все они совершенные, нигде не плотные, попарно без общих точек и

$$f(x) = f_j(x) \text{ на } P_j \text{ для } j = 1, 2, \dots, k-1,$$

где все $f_j(x)$ непрерывны и все $\sigma(f_j)$ сходятся равномерно. Полагаем

$$Q_{k-1} = P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1}.$$

Поскольку Q_{k-1} нигде не плотно, имеем $mCQ_{k-1} > 0$; поэтому на CQ_{k-1} функция $f(x)$ обладает усиленным C -свойством, значит, найдется совершенное P_k , $mP_k > mCQ_{k-1} - \frac{1}{k}$, на котором $f(x) = f_k(x)$, где $f_k(x)$ непрерывна и $\sigma(f_k)$ равномерно сходится. Построенное P_k не имеет общих точек с P_1, P_2, \dots, P_{k-1} . Ясно, что, полагая $Q = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$, имеем $mQ = 2\pi$, и доказательство закончено.

Это следствие из теоремы Менъшова окажется очень полезным в дальнейшем (см. гл. XV, § 2).

§ 6. Проблемы, связанные с «исправлением» функций

Мы убедились, что любую измеримую функцию $f(x)$, конечную почти всюду, можно «исправить» на множестве как угодно малой меры так, чтобы превратить ее в непрерывную $g(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье. В частности, это справедливо для любой непрерывной функции $f(x)$. Однако то множество, на котором $f(x)$ остается неизменной, зависит от функции $f(x)$. Д. Е. Менъшов поставил проблему, нельзя ли добиться превращения непрерывной функции $f(x)$ в $g(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье, требуя, чтобы $f(x)$ оставалась неизменной на некотором заданном множестве и можно было бы исправлять ее только вне этого множества. Он показал, прежде всего, что его теорему (доказанную нами в § 4), можно усилить в том смысле, что множество e ($me < \varepsilon$), где разрешается менять функцию, можно считать зависящим только от ε и от модуля непрерывности $f(x)$, но не от других свойств этой функции. Точнее, он доказал теорему (см. Д. Е. Менъшов^[11]):

Для любой положительной неубывающей функции $\varrho(\delta)$, определенной для $\delta > 0$ и такой, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho(\delta) = 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество e , $mE < \varepsilon$, такое, что если $f(x)$ — любая непрерывная, для которой модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta) \leq \varrho(\delta) \quad \text{при любом } \delta,$$

то $f(x)$ можно так изменить на e , чтобы для вновь полученной $g(x)$ ряд $\sigma(g)$ сходиллся равномерно.

Но все же в предыдущей теореме e зависит от модуля непрерывности $f(x)$. Д. Е. Меньшов поставил вопрос: можно ли выбрать e так, чтобы оно зависело только от ε ? Оказалось, что этого нельзя сделать, даже если отказаться от требования равномерной сходимости ряда $\sigma(g)$ для исправленной функции $g(x)$, а требовать лишь его сходимости в каждой точке. Именно Д. Е. Меньшов [11] доказал теорему:

Для любого множества e , $mE < 2\pi$, можно определить функцию $f(x)$, непрерывную на $[0, 2\pi]$ и такую, что: какова бы ни была $\psi(x)$, непрерывная на $[0, 2\pi]$ и совпадающая с $f(x)$ всюду вне e , ряд $\sigma(\psi)$ расходится по крайней мере в одной точке.

Таким образом, выбрать заранее E , $mE > 2\pi - \varepsilon$, и требовать, чтобы непрерывную $f(x)$ можно было сохранить на E и, изменяя ее только вне E , получить непрерывную $g(x)$ с рядом $\sigma(g)$, всюду сходящимся, уже невозможно.

А если требовать, чтобы $\sigma(g)$ сходиллся лишь почти всюду? Этот вопрос остается открытым. Однако если бы он решался в положительном смысле, это означало бы, что $\sigma(f)$ для любой непрерывной $f(x)$ сходилится почти всюду. Действительно, мы видели в § 21 гл. V, что существуют совершенные нигде не плотные множества P , обладающие таким свойством: если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обе принадлежат L^p ($p > 1$) и $f_1(x) = f_2(x)$ на P , то $\sigma(f_1) - \sigma(f_2)$ сходится к нулю почти всюду на P . Поэтому если «исправление» $f(x)$ вне такого P возможно, то это значит, что ее ряд Фурье сходится почти всюду на P . Но выбирая множества P_n такого же типа во всяком смежном к P интервале δ_n , получаем новое множество $Q = P + P_1 + \dots + P_n + \dots$, на котором $\sigma(f)$ опять сходится почти всюду. Вставляя разумно подобранные множества в каждый интервал, смежный к Q , и продолжая такой процесс до бесконечности, мы убедимся, что $\sigma(f)$ сходится почти всюду. Но вопрос о сходимости почти всюду ряда Фурье от непрерывной функции до сих пор не решен и, по-видимому, очень труден.

Если же потребовать, чтобы после изменения $f(x)$ вне заданного совершенного нигде не плотного множества получалась лишь $g(x)$, у которой $\sigma(g)$ сходится почти всюду, но сама она только суммируема, то такая проблема уже решается положительно. Имеет место даже более общий результат, который мы изложим в § 7.

§ 7. «Исправление» суммируемой функции вне заданного совершенного множества

В этом параграфе мы докажем следующую теорему Д. Е. Меньшова [13]:

Т е о р е м а. Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и P — любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Можно найти такую суммируемую $g(x)$, что

$$g(x) = f(x) \quad \text{на } P$$

и $\sigma(g)$ сходится почти всюду.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько лемм. Лемма 5 напоминает лемму 4 и так же, как эта последняя, базируется на свойствах множителя Дирихле, рассмотренных в § 3. Разница между ними заключается в том, что в лемме 4 от функции $\psi(x)$ требовалась непрерывность и налагались условия на ее модуль; здесь будет достаточно сделать ее ступенчатой и наложить ограничения не на ее модуль, а лишь на интеграл от модуля; зато вместо того, чтобы иметь заданное значение γ на каком-то множестве меры, близкой к длине отрезка, где $\psi(x)$ определена, требуется, чтобы она имела заданное значение на множестве, выбор которого от нас уже не зависит. Утверждение д) леммы 5 несколько слабее, чем в лемме 4, так как оно опирается на вторую половину леммы о множителе Дирихле, но для наших целей его достаточно.

Л е м м а 5. Пусть $[c, d]$ — произвольный сегмент, γ — любое действительное, ε — любое положительное число, $\nu > 8$ — любое целое; наконец, Q — любое совершенное нигде не плотное множество, $Q \subset [c, d]$.

Тогда существует функция $\psi(x)$ такая, что

а) $\psi(x)$ ступенчатая на $[c, d]$,

$$\text{б) } \int_c^d |\psi(t)| dt \leq 2|\gamma|(d-c),$$

$$\text{в) } \left| \int_c^\xi \psi(t) dt \right| < \varepsilon, \quad c \leq \xi \leq d,$$

г) $\psi(x) = \gamma$ на Q ,

$$\text{д) } \left| \int_c^d \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq B\nu|\gamma| \quad \text{для } x \in E, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\text{е) } mE > (d-c) \left(1 - \frac{6}{\nu}\right),$$

а B — абсолютная константа.

Доказательство. Если $\gamma = 0$, то достаточно положить $\psi(x) = 0$ и $E = [c, d]$. Поэтому будем считать $\gamma \neq 0$.

Сначала, как в доказательстве леммы 4, выбираем r столь большим, чтобы для

$$q = r\nu$$

иметь

$$4|\gamma| \frac{d-c}{q} < \varepsilon. \quad (7.1)$$

Зафиксировав так r , а значит и q , мы снова, как в лемме 4, положим

$$\delta = \frac{d-c}{q\nu}. \quad (7.2)$$

Теперь мы положим

$$x_s = c + \nu\delta s \quad (s = 0, 1, \dots, q).$$

Тогда

$$c = x_0 < x_1 < \dots < x_q = d.$$

В лемме 4 эти числа обозначались c_s , но сейчас будет удобнее через c_s обозначить «слегка» сдвинутые точки. Именно, раз Q нигде не плотно, то можно выбрать $a < \delta$ так, чтобы точки

$$c_s = x_s - a \quad (s = 0, 1, \dots, q)$$

все лежали вне Q , т. е.

$$c_s \notin Q \quad (s = 0, 1, \dots, q).$$

Кроме того, заметим, что

$$c_1 = x_1 - \alpha = x_0 + \nu \delta - \delta > x_0,$$

поскольку $\nu > 8$, значит

$$x_0 = c < c_1 < \dots < c_q = d - \alpha < d,$$

т. е. все c_s ($s = 1, 2, \dots, q$) лежат на (c, d) .

Так как все c_s вне Q и Q нигде не плотно, то можно найти $\delta' < \delta$ так, чтобы, полагая

$$a_s = c_s - \delta',$$

иметь

$$[a_s, c_s] \subset Q \quad (s = 1, 2, \dots, q). \quad (7.3)$$

Поскольку

$$c_1 - a_1 = \delta' < \delta; \quad c_1 - c = x_1 - \alpha - x_0 \geq \nu \delta - \delta > \delta,$$

то имеем

$$c < a_1.$$

Наконец,

$$c_{s+1} - c_s = \nu \delta.$$

Определим теперь $\varphi(x)$ из условий

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{d-c}{q\delta'}\gamma & \text{на } (a_s, c_s), \quad 1 \leq s \leq q, \\ 0 & \text{всюду на } [c, d] \text{ вне всех } (a_s, c_s). \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi(x)$ ступенчатая. Кроме того,

$$\int_c^{a_1} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{c_{s-1}}^{a_s} \varphi(t) dt = 0 \quad (s = 2, 3, \dots, q),$$

$$\int_{a_s}^{c_s} \varphi(t) dt = -\delta' \frac{d-c}{q\delta'} \gamma = -\frac{d-c}{q} \gamma \quad (s = 1, 2, \dots, q).$$

Поэтому

$$\int_c^{c_1} \varphi(t) dt = -\frac{d-c}{q} \gamma, \quad \int_{c_{s-1}}^{c_s} \varphi(t) dt = -\frac{d-c}{q} \gamma \quad (s = 2, 3, \dots, q).$$

Положим

$$\psi(x) = \gamma + \varphi(x) \quad (c \leq x \leq d).$$

Ясно, что $\psi(x)$ ступенчатая, т. е. а) удовлетворено.

Так как $\varphi(x)$ всегда того же знака, что и $-\gamma$, то

$$\int_c^d |\varphi(t)| dt = \left| \int_c^{c_1} \varphi(t) dt + \sum_{s=2}^q \int_{c_{s-1}}^{c_s} \varphi(t) dt + \int_{c_q}^d \varphi(t) dt \right| = (d-c) |\gamma|,$$

а потому

$$\int_c^d |\psi(t)| dt \leq |\gamma|(d-c) + \int_c^d |\varphi(t)| dt \leq 2|\gamma|(d-c),$$

т. е. б) также доказано.

Чтобы доказать в), покажем сначала, что

$$\int_{c_{s-1}}^{c_s} \psi(t) dt = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, q).$$

Действительно,

$$\int_{c_{s-1}}^{c_s} \psi(t) dt = \gamma(c_s - c_{s-1}) + \int_{c_{s-1}}^{c_s} \varphi(t) dt = \gamma \nu \delta - \frac{d-c}{q} \gamma = 0,$$

так как $\delta = \frac{d-c}{q\nu}$.

Рассмотрим теперь

$$\int_{c_s}^{c_s+\beta} \psi(t) dt \quad (s = 1, 2, \dots, q)$$

для $0 < \beta < \nu\delta$. Имеем

$$\int_{c_s}^{c_s+\beta} \psi(t) dt = \gamma\beta + \int_{c_s}^{c_s+\beta} \varphi(t) dt.$$

Но $\beta < \nu\delta = \frac{d-c}{q}$, поэтому $|\gamma|\beta \leq \frac{d-c}{q} |\gamma| < \frac{\varepsilon}{4}$ в силу (7.1). Кроме того, $\varphi(t) \neq 0$ только на (a_s, c_s) , а потому

$$\left| \int_{c_s}^{c_s+\beta} \varphi(t) dt \right| \leq \delta' \frac{d-c}{\delta' q} |\gamma| = \frac{d-c}{q} |\gamma| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Итак,

$$\left| \int_{c_s}^{c_s+\beta} \psi(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } 0 \leq \beta \leq \nu\delta.$$

Случай $(c, c + \beta)$ совершенно аналогичен.

Наконец, пусть ξ — любая точка на $[c, d]$. Находим такое c_k , которое ближе всего к ξ слева (или число c). Тогда

$$\left| \int_c^\xi \psi(t) dt \right| \leq \left| \int_c^{c_1} \psi(t) dt \right| + \left| \sum_{s=1}^{k-1} \int_{c_s}^{c_{s+1}} \psi(t) dt \right| + \left| \int_{c_k}^\xi \psi(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

так как средняя сумма равна нулю.

Итак, свойство в) доказано.

Из того, что $\varphi(t) \neq 0$ только на сегментах $[a_s, c_s]$, не содержащих точек Q , следует, что $\psi(x) = \gamma$ на Q , а это есть свойство г).

Наконец, полагая

$$E = \sum_{s=r}^{q-r-1} [c_s + 2\delta, c_{s+1} - 2\delta],$$

мы видим, что

$$\begin{aligned} mE &= (q - 2r)(\nu\delta - 4\delta) = q\nu\delta \left(1 - \frac{2r}{q}\right) \left(1 - \frac{4}{\nu}\right) = \\ &= (d - c) \left(1 - \frac{2}{\nu}\right) \left(1 - \frac{4}{\nu}\right) > (d - c) \left(1 - \frac{6}{\nu}\right), \end{aligned}$$

т. е. условие е) также выполнено.

Остается доказать, что выполнено д). Но множество E в силу построения чисел c_s удовлетворяет условиям леммы 3, а потому

$$\left| \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < A \frac{\delta'}{\delta} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{для } x \in E.$$

На каждом $[a_s, c_s]$ имеем $\varphi(t) = -\frac{d-c}{q\delta'}\gamma$, а вне их $\varphi(t) = 0$, поэтому для $-\infty < x < +\infty$ имеем

$$\int_c^d \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt = -\frac{d-c}{q\delta'}\gamma \sum_{s=1}^q \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

откуда

$$\left| \int_c^d \varphi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < \frac{d-c}{q\delta'} |\gamma| A \frac{\delta'}{\delta} = A\nu |\gamma|$$

для $x \in E$. Кроме того, известно, что

$$\left| \int_c^d \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < 2\pi$$

для любых c, d, x и n и, значит, для $x \in E$

$$\left| \int_c^d \psi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq 2\pi |\gamma| + A\nu |\gamma| < B\nu |\gamma|,$$

где B — абсолютная константа, т. е. д) доказано и доказательство леммы 5 закончено.

Л е м м а 6. Для любой суммируемой на $[c, d]$ функции $f(x)$ и для любой последовательности положительных чисел α_m ($m = 1, 2, \dots$) можно построить последовательность ступенчатых функций $\Phi_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) таких, что

а) все $\Phi_m(x)$ ступенчатые на $[c, d]$,

б) $\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) = f(x)$ почти всюду на $[c, d]$,

в) $\int_c^d |\Phi_m(t)| dt < \alpha_m \quad (m = 2, 3, \dots)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\omega_m = \min\left(\frac{\alpha_m}{2}, \frac{\alpha_{m+1}}{2}, \frac{1}{4^m}\right) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Так как $f(x)$ суммируема, то можно для всякого m найти ступенчатую $g_m(x)$ такую, что

$$\int_c^d |f(t) - g_m(t)| dt < \omega_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Пусть E_m — множество тех $t \in [c, d]$, для которых

$$|f(t) - g_m(t)| < \frac{1}{2^m}.$$

Тогда из того, что

$$\int_{CE_m} |f(t) - g_m(t)| dt < \omega_m$$

и

$$\int_{CE_m} |f(t) - g_m(t)| dt \geq \frac{1}{2^m} mCE_m,$$

следует

$$mCE_m \leq 2^m \omega_m \leq \frac{1}{2^m},$$

а потому

$$mE_m \geq (d - c) - \frac{1}{2^m}.$$

Полагая

$$E = \lim E_m,$$

имеем, следовательно,

$$mE = d - c.$$

Но в силу определения E_m отсюда следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t) = f(t)$$

на E , т. е. почти всюду на $[c, d]$.

Положим

$$\Phi_1(x) = g_1(x); \quad \Phi_m(x) = g_m(x) - g_{m-1}(x) \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Так как $g_m(x)$ были ступенчатые, то и $\Phi_m(x)$ обладают этим свойством, т. е. свойством а). Кроме того, ясно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) = f(x) \text{ почти всюду,}$$

т. е. и б) выполнено.

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_c^d |\Phi_m(t)| dt &\leq \int_c^d |g_m(t) - f(t)| dt + \int_c^d |f(t) - g_{m-1}(t)| dt \leq \\ &\leq \omega_m + \omega_{m-1} \leq \frac{\alpha_m}{2} + \frac{\alpha_m}{2} = \alpha_m \quad (m = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

т. е. в) верно, и лемма 6 доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $f(x)$ — заданная суммируемая функция. Полагая в лемме 6 числа $\alpha_m = \frac{1}{2^{3m}}$ и $[c, d] = [0, 2\pi]$, строим $\Phi_m(x)$, ступенчатые на $[0, 2\pi]$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) = f(x) \text{ почти всюду на } [0, 2\pi], \quad (7.4)$$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(x)| dx \leq \frac{1}{2^{3m}}. \quad (7.5)$$

Для всякого m отрезок $[0, 2\pi]$ распадается на конечное число отрезков, на каждом из которых $\Phi_m(x)$ постоянна. Мы перенумеровываем слева направо сначала все отрезки для $\Phi_1(x)$, затем слева направо все отрезки для $\Phi_2(x)$, и т. д., затем для $\Phi_m(x)$ и т. д. Полагая $v_0 = 0$ и обозначая через v_1 число

отрезков постоянства для $\Phi_1(x), \dots$, через $v_m - v_{m-1}$ — число отрезков постоянства для $\Phi_m(x), \dots$, имеем

$$v_0 < v_1 < \dots < v_m < \dots$$

и для каждого $k, v_{m-1} < k \leq v_m$ на отрезке (b_k, b'_k) функция $\Phi_m(x)$ постоянна; пусть γ_k — ее значение. Весь отрезок $[0, 2\pi]$ целиком разбит на неперекрывающиеся отрезки $[b_k, b'_k], v_{m-1} < k \leq v_m$ (рис. 35). Ясно, что когда m задано,

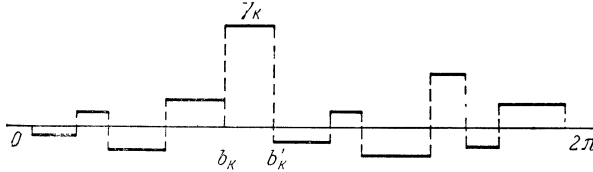


Рис. 35

то для заданной точки x единственным образом определяется то k , для которого $x \in [b_k, b'_k]$, причем, если $m \rightarrow \infty$, то заведомо и $k \rightarrow \infty$.

Положим

$$g_k(x) = \begin{cases} \gamma_k & \text{на } [b_k, b'_k], \\ 0 & \text{вне } [b_k, b'_k]. \end{cases} \quad (7.6)$$

Тогда

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=v_{m-1}+1}^{v_m} g_k(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

кроме, быть может, точек b_k и b'_k .

Покажем, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} g_s(x) = f(x) \text{ почти всюду на } [-\pi, \pi]. \quad (7.7)$$

Действительно, пусть k — любое. Находим такое m , что $v_{m-1} < k \leq v_m$. Тогда

$$\sum_{s=1}^k g_s(x) = \sum_{s=1}^{v_{m-1}} g_s(x) + \sum_{s=v_{m-1}+1}^k g_s(x) = \sum_{p=1}^{m-1} \Phi_p(x) + \sum_{s=v_{m-1}+1}^{v_m} g_s(x). \quad (7.8)$$

Но из всех функций $g_s(x)$ второго слагаемого правой части равенства (7.8) только одна может быть отлична от нуля в точке x , а так как величина ее есть γ_s , а γ_s есть значение $\Phi_m(x)$ в этой точке, то второй член правой части (7.8) равен либо 0, либо $\Phi_m(x)$, значит, вся правая часть (7.8) равна $\sum_{p=1}^{m-1} \Phi_p(x)$ или $\sum_{p=1}^m \Phi_p(x)$; но при $k \rightarrow \infty$ имеем $m \rightarrow \infty$, а потому из (7.4) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^k g_s(x) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s(x) = f(x) \text{ почти всюду.} \quad (7.9)$$

Возьмем теперь для каждого k натуральное n_k , которое определим позже.

Пусть P — множество, входящее в формулировку теоремы. Пусть P_k есть часть, попавшая на (b_k, b'_k) , тогда P_k — нигде не плотное или пустое.

Положим

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k^2 n_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7.10)$$

В лемме 5 положим, подбирая m для k из условия $v_{m-1} < k \leq v_m$,

$$\nu = 2^{m+3}, \quad \gamma = \gamma_k, \quad \varepsilon = \varepsilon_k, \quad [c, d] = [b_k, b'_k], \quad Q = P_k.$$

Все это возможно, так как $\nu > 8$, все остальные числа --любые. На основании леммы 5 можем найти такую $\psi_k(x)$ и измеримое E_k , что

- а) $\psi_k(x)$ ступенчатая на $[b_k, b'_k]$,
- б) $\int_{b_k}^{b'_k} |\psi_k(t)| dt \leq 2 |\gamma_k| (b'_k - b_k)$,
- в) $\left| \int_{b_k}^{\xi} \psi_k(t) dt \right| < \varepsilon_k, \quad b_k \leq \xi \leq b'_k$,
- г) $\psi_k(x) = \gamma_k$ на P_k ,
- д) $\left| \int_{b_k}^{b'_k} \psi_k(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq B \cdot 2^{m+3} |\gamma_k|, \quad x \in E_k, \quad n = 1, 2, \dots$,
- е) $m E_k \geq (b'_k - b_k) \left(1 - \frac{6}{2^{m+3}}\right) > (b'_k - b_k) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$,

где $E_k \in [b_k, b'_k]$.

Мы потребуем, чтобы $\psi_k(x) = 0$ вне (b_k, b'_k) на $[0, 2\pi]$. Так продолженная $\psi_k(x)$ все еще будет ступенчатой на $[0, 2\pi]$, и она будет определена вполне после задания чисел n_k , от которых зависят ε_k .

Так как P_k есть часть P на $[b_k, b'_k]$, то в силу свойства г) функции $\psi_k(x)$ и в силу (7.6) имеем

$$\psi_k(x) = \gamma_k = g_k(x) \quad \text{на } P_k.$$

Кроме того, в силу самого определения

$$\psi_k(x) = 0 \quad \text{и} \quad g_k(x) = 0 \quad \text{вне } (b_k, b'_k),$$

откуда

$$\psi_k(x) = g_k(x) \quad \text{на } P.$$

Это верно при $k = 1, 2, 3, \dots$. Значит, из (7.9) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } P.$$

Так как

$$\int_{b_k}^{b'_k} |\Phi_m(t)| dt = |\gamma_k| (b'_k - b_k),$$

то из свойства б) выводим

$$\int_{b_k}^{b'_k} |\psi_k(t)| dt \leq 2 \int_{b_k}^{b'_k} |\Phi_m(t)| dt,$$

а потому (так как вне (b_k, b'_k) имеем $\psi_k(t) = 0$)

$$\sum_{k=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m} \int_0^{2\pi} |\psi_k(t)| dt \leq 2 \sum_{b_k}^{b'_k} \int_{b_k}^{b'_k} |\Phi_m(t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} |\Phi_m(t)| dt < \frac{2}{2^{3m}}$$

в силу (7.5), значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_k(t)| dt < 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3m}} < +\infty, \quad (7.11)$$

откуда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$ сходится почти всюду и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = H(x) \quad (7.12)$$

есть суммируемая функция. Имеем $H(x) = f(x)$ почти всюду на P .

Надо теперь показать, что числа n_k можно подобрать так, чтобы у $H(x)$ ряд Фурье сходиллся почти всюду.

Так как все $\psi_k(x)$ ступенчатые, то, обозначая через $S_n^{(k)}(x)$ частную сумму ряда Фурье для $\sum_{j=1}^k \psi_j(x)$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^k \psi_j(x) \text{ почти всюду,}$$

и, кроме того,

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=1}^k \psi_j(t) \right] \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt + \varepsilon_{n,k}(x),$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{n,k}(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi, \quad k = 1, 2, \dots).$$

Полагая

$$J_{n,j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_j(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

видим, следовательно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k J_{n,j}(x) = \sum_{j=1}^k \psi_j(x) \text{ почти всюду.}$$

Пусть $n_1 = 1$. Допустим, что $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ уже определены, тогда $\psi_1(x), \dots, \psi_{k-1}(x)$ уже известны, и мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k-1} J_{n,j}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j(x) \text{ почти всюду.}$$

На основании теоремы Егорова можно найти такое G_k , на котором это стремление к пределу равномерно, причем

$$mG_k > 2\pi - \frac{1}{k^2}, \quad G_k \subset [0, 2\pi].$$

Значит, можно найти такое $n_k > n_{k-1}$, чтобы

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} J_{n,j}(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j(x) \right| < \frac{1}{k} \quad \text{для } x \in G_k \text{ и } n \geq n_k. \quad (7.13)$$

Тогда все n_k уже определены, причем

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

и все $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x), \dots$ и $G_1, G_2, \dots, G_k, \dots$ уже построены. Имеем, полагая

$$G = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k, \quad mG = 2\pi.$$

Нам надо теперь оценить $J_{n,j}(x)$ для любых $x, 0 < x < 2\pi$, любых j и $n \leq n_{k+1}$. Так как

$$J_{n,j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_j(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt,$$

а $\psi_j(x)$ обладает свойством в) и равна нулю вне (b_k, b'_k) , то

$$\left| \int_0^{\xi} \psi_j(t) dt \right| < \varepsilon_j \quad (0 < \xi < 2\pi),$$

а потому можно применять лемму 2 § 2, что дает в силу (7.10)

$$|J_{n,j}(x)| \leq 16 n^2 \varepsilon_j \leq 16 n_{k+1}^2 \frac{1}{n_j^2 j^2} \quad \text{для } n \leq n_{k+1}.$$

Отсюда следует, что

$$|J_{n,j}(x)| \leq \frac{16}{j^2} \quad \text{при любом } x, j \geq k+1, n \leq n_{k+1}. \quad (7.14)$$

Обозначим через Ω_m совокупность тех сегментов $[b_k, b'_k]$, $v_{m-1} < k \leq v_m$, для которых

$$|\gamma_k| \leq \frac{1}{2^{2m}}.$$

Оценим меру Ω_m . Его дополнение $C\Omega_m$ распадается на отрезки (b_k, b'_k) , где $|\gamma_k| > \frac{1}{2^{2m}}$; на каждом таком отрезке $\Phi_m(x) = \gamma_k$, а поэтому

$$\int_{C\Omega_m} |\Phi_m(t)| dt > \frac{1}{2^{2m}} m C \Omega_m.$$

Но поскольку в силу (7.5)

$$\int_{C\Omega_m} |\Phi_m(t)| dt \leq \int_0^{2\pi} |\Phi_m(t)| dt \leq \frac{1}{2^{2m}},$$

то

$$m C \Omega_m < \frac{1}{2^{2m}}$$

и, значит,

$$m \Omega_m > 2\pi - \frac{1}{2^{2m}}.$$

Поэтому, полагая

$$\Omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega_m,$$

имеем

$$m \Omega = 2\pi.$$

Положим

$$\delta_j = |\gamma_j| (b'_j - b_j) 2^m, \quad v_{m-1} < j \leq v_m \quad (7.15)$$

и

$$\Omega'_m = [0, 2\pi] - \sum_{v_{m-1}+2}^{v_m} [b_j - \delta_j, b_j + \delta_{j-1}].$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} m \Omega'_m &\geq 2\pi - 2 \sum_{v_{m-1}+1}^{v_m} \delta_j = 2\pi - 2^{m+1} \sum_{v_{m-1}+1}^{v_m} |\gamma_j| (b'_j - b_j) = \\ &= 2\pi - 2^{m+1} \int_0^{2\pi} |\Phi_m(t)| dt > 2\pi - 2^{m+1} \frac{1}{2^{2m}} = 2\pi - \frac{2}{2^{2m}}, \end{aligned}$$

откуда, полагая

$$\Omega' = \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega'_m,$$

имеем снова

$$m \Omega' = 2\pi.$$

Положим

$$\Omega_m'' = \sum_{k=v_{m-1}+1}^{v_m} E_k.$$

Так как в силу свойства е) имеем

$$mE_k > (b'_k - b_k) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right),$$

а

$$\sum_{k=v_{m-1}+1}^{v_m} (b'_k - b_k) = 2\pi,$$

то

$$m\Omega_m'' > 2\pi \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$$

и, полагая

$$\Omega'' = \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega_m'',$$

имеем снова

$$m\Omega'' = 2\pi.$$

Обозначая через G' множество точек, где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$ сходится к $H(x)$, имеем опять

$$mG' = 2\pi.$$

Обозначим через \mathcal{E} общую часть множеств $G, G', \Omega, \Omega', \Omega''$ и открытого интервала $(0, 2\pi)$; имеем

$$m\mathcal{E} = 2\pi.$$

Докажем, что ряд Фурье от $H(x)$ сходится в каждой точке множества \mathcal{E} .

Пусть $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда Фурье для $H(x)$, тогда

$$S_n(x) = I_n(x) + \eta_n(x),$$

где

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt$$

и $\eta_n(x) \rightarrow 0$ на $0 < x < 2\pi$.

Докажем, что для $x \in \mathcal{E}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = H(x).$$

Из определения \mathcal{E} следует, что для $x \in \mathcal{E}$ найдутся такие k_0 и m_0 , что

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Omega_m, \quad x \in \Omega'_m, \quad x \in \Omega''_m, \quad m > m_0, \\ x \in G_k, \quad k > k_0. \end{array} \right\} \quad (7.16)$$

Кроме того, $x \in G'$.

Когда n задано, определяем k из условия

$$n_k < n \leq n_{k+1}$$

и затем m из условия

$$v_{m-1} < k \leq v_m.$$

Ясно, что при $n \rightarrow \infty$ имеем $k \rightarrow \infty$, а тогда и $m \rightarrow \infty$. Можно взять n_x столь большим, чтобы для него уже $m > m_0$ и $k > k_0$; тогда для $n \geq n_x$ всегда будем иметь выполненными условия (7.16).

Имеем при всяком x

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} = H(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \quad (7.17)$$

для любого n и почти для всех x (в силу (7.12)).

Так как в силу (7.11)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_j(t)| dt < +\infty,$$

то сходится и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_j(t)| \left| \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \right| dt$$

для любого x и $n = 1, 2, \dots$, а в таком случае равенство (7.17) можно интегрировать почленно и, значит,

$$I_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_j(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt = \sum_{j=1}^{\infty} J_{n,j}(x) = I'_n(x) + I''_n(x) + I'''_n(x),$$

где

$$I'_n(x) = \sum_{j=1}^{k-1} J_{n,j}(x); \quad I''_n(x) = J_{n,k}(x); \quad I'''_n(x) = \sum_{j=k+1}^{\infty} J_{n,j}(x).$$

Так как было доказано, что имеет место (7.14), т. е.

$$|J_{n,j}(x)| \leq \frac{16}{j^2}, \quad \text{если } j \geq k+1 \text{ и } n \leq n_{k+1},$$

то

$$|I'''_n(x)| \leq 16 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{16}{k},$$

а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'''_n(x) = 0 \quad \text{для любого } x.$$

Далее, так как $x \in G_k$, то в силу (7.13)

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} J_{n,j}(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j(x) \right| < \frac{1}{k}$$

потому что $n \geq n_k$, а поэтому

$$\left| I'_n(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j(x) \right| < \frac{1}{k} \quad \text{для } x \in G_k. \quad (7.18)$$

Но так как $x \in G'$, где $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = H(x)$, то из (7.18) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n(x) = H(x).$$

Остается доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{n,k}(x) = 0.$$

Если $\gamma_k = 0$, то из свойства б) функции $\psi_k(t)$ следует сразу, что $\int_{b_k}^{b'_k} |\psi_k(t)| dt = 0$, т. е. $\psi_k(t) = 0$ почти всюду на (b_k, b'_k) , а потому $J_{n,k}(x) = 0$. Поэтому будем предполагать $\gamma_k \neq 0$.

Рассмотрим два случая: 1) $x \in (b_k, b'_k)$ и 2) $x \notin (b_k, b'_k)$. Начнем с первого случая.

Мы знаем, что $x \in \Omega_m$ для m , связанного с k условием $v_{m-1} < k \leq v_m$, причем, в силу определения Ω_m , интервал (b_k, b'_k) таков, что на нем

$$|\gamma_k| < \frac{1}{2^{2m}}.$$

С другой стороны, $x \in Q'_m$, поэтому $x \in E_k$, а потому в силу свойств д) функции $\psi_k(t)$

$$|J_{n,k}(x)| \leq B \cdot 2^{m+3} |\gamma_k|,$$

значит

$$|J_{n,k}(x)| < B \cdot 8 \frac{1}{2^m} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

так как при этом и $m \rightarrow \infty$.

Допустим теперь, что $x \notin (b_k, b'_k)$; тогда $x \in (b_j, b'_j)$ для $j \neq k$ и $v_{m-1} < j \leq v_m$. Но $x \in \Omega'_m$, значит $x \in (b_k - \delta_k, b_k)$ и $x \in (b'_k, b'_k + \delta_k)$ (так как $b'_j = b_{j+1}$, а $x \in (b_j + \delta_{j-1})$, и это при любом j , $v_{m-1} < j \leq v_m$).

Отсюда следует, что когда $b_k \leq t \leq b'_k$, а x не только вне (b_k, b'_k) , но даже вне $(b_k - \delta_k, b'_k + \delta_k)$, то

$$|t - x| > \delta_k.$$

Но мы предположили $\gamma_k \neq 0$, значит $\delta_k \neq 0$ в силу (7.15), и

$$|J_{n,k}(x)| \leq \frac{1}{\pi \delta_k} \int_{b_k}^{b'_k} |\psi_k(t)| dt. \quad (7.19)$$

В силу свойства б) функций $\psi_k(x)$

$$\int_{b_k}^{b'_k} |\psi_k(t)| dt \leq 2 |\gamma_k| (b'_k - b_k),$$

поэтому вследствие (7.15) и (7.19)

$$|J_{n,k}(x)| < \frac{1}{2^m}$$

и, значит, снова $\lim J_{n,k}(x) = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы убедились, что ряд Фурье от $H(x)$ сходится к ней почти всюду. Если теперь положить

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{на } P, \\ H(x) & \text{на } CP, \end{cases}$$

то $G(x)$ суммируема, и ряд Фурье от $G(x)$ сходится к ней почти всюду, так как $G(x) = H(x)$ почти всюду, поскольку $H(x) = f(x)$ почти всюду на P .

Теорема доказана.

ГЛАВА VII

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ О СХОДИМОСТИ

§ 1. Введение

Настоящая глава посвящена двум вопросам как будто бы различным, но на самом деле тесно связанным между собой. Прежде всего, поскольку мы знаем, что ряд Фурье может даже всюду расходиться (см. гл. V, § 20), то возникает вопрос о тех методах, которыми можно его суммировать. При этом, конечно, интересны такие методы, которые для любой $f(x) \in L$ суммируют ее ряд Фурье почти всюду и притом к этой функции. В § 2 мы изучаем вопрос, какие линейные методы суммирования обладают этим свойством. В качестве приложения полученных результатов мы в § 3 показываем, что ряды Фурье суммируются почти всюду любым методом (C, α) при $\alpha > 0$. В §§ 4 и 5 с этой же точки зрения рассматриваются метод Бернштейна—Рогозинского и метод Лебега *).

Следующие параграфы посвящены различным методам суммирования уже нелинейного характера. Сюда прежде всего входит понятие сильной суммируемости, т. е. изучение вопроса о том, когда

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Здесь идея заключается в том, что если ряд расходится или не сходится к $f(x)$, то $S_m(x) - f(x) \neq o(1)$.

Однако можно показать, что для любой суммируемой $f(x)$ соотношение (1.1) имеет место почти всюду, т. е., образно говоря, когда n велико, то среди частных сумм $S_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots, n$) число тех, которые заметно отклоняются от $f(x)$, должно быть мало сравнительно с n (и так для почти всех x).

*) Разумеется, существует целый ряд других методов суммирования, которые мы не смогли осветить здесь за недостатком места. Отметим, например, введенное Беллманом Bellman [1]) понятие случайной суммируемости. Ряд называется *случайно суммируемым* (к числу S , если для его частных сумм S_k имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n S_k [1 + \varphi_k(t)]}{\sum_{k=1}^n [1 + \varphi_k(t)]} = S$$

почти всюду на $0 \leq t \leq 1$, где $\{\varphi_k(t)\}$ — радемахеровская система. Беллман доказал, что для любой $f(x) \in L$ ее ряд Фурье случайно суммируется к ней почти всюду.

Этот результат можно даже усилить, вводя понятие сильной суммируемости (H, k) , т. е. изучая, когда при некотором $k > 0$ имеем

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^k \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Оказывается, что если (1.2) имеет место в данной точке x при некотором k , то оно имеет место и при всех $k' \leq k$, т. е. выполнение условия (1.2) дает тем больший результат, чем k больше. Можно доказать, что для любой $f(x) \in L$ условие (1.2) имеет место почти всюду при любом k . Однако ввиду большой трудности доказательства этой теоремы мы доказываем ее в § 8 лишь при $k = 2$ (значит, она верна и при $k = 1$, т. е. любой ряд Фурье почти всюду сильно суммируется), и кроме того, в § 7 мы доказываем теорему при любом k , но предполагая, что $f(x) \in L^p$ для $p > 1$. Как мы уже отмечали, эти теоремы, указывающие на суммируемость ряда Фурье некоторым методом, можно рассматривать и как результаты, касающиеся исследования сходимости ряда, так как они указывают, как часто встречаются частные суммы, мало отклоняющиеся от $f(x)$.

В связи с этим вопросом стоит задача, которой мы посвящаем § 10. Именно, вместо рассмотрения средних арифметических для $|S_m(x) - f(x)|$ (или средних арифметических каких-то степеней этих величин) рассматривается ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m(x) - f(x)}{m}$$

и ставится вопрос о его сходимости. Здесь, следуя П. Л. Ульянову, мы показываем, что он может оказаться всюду расходящимся, даже тогда, когда $S_m(x) \rightarrow f(x)$ равномерно (более того, может оказаться всюду расходящимся даже ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m(x) - f(x)}{m},$$

хотя здесь уже члены ряда могут иметь разные знаки). Это показывает, что даже у равномерно сходящихся рядов Фурье частные суммы могут очень медленно стремиться к $f(x)$.

§§ 12 и 13 стоят несколько в стороне от предыдущих; они посвящены изучению усиленной сходимости или $(C^*, 0)$ суммируемости тригонометрических рядов. Здесь речь идет о том, когда ряд не только сходится в некоторой точке x_0 , т. е.

$$S_n(x_0) \rightarrow S,$$

но еще и $S_n(x_0 + h_n) \rightarrow S$ каждый раз, как $h_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Полученные при этом теоремы используются при решении вопроса, как по сходимости данного ряда судить о сходимости сопряженного с ним ряда. С этим мы встретимся в главе VIII, § 23.

§ 2. Применение к рядам Фурье методов суммирования с треугольными матрицами

В §§ 47 и 49 главы I мы изучили применение к рядам Фурье метода $(C, 1)$. Сейчас мы, следуя С. М. Никольскому^[1], поставим вопрос в следующем общем виде.

Пусть $f(x)$ — любая суммируемая функция с периодом 2π и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ее ряд Фурье.

Рассмотрим треугольную матрицу A , состоящую из действительных чисел

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_0^{(0)} & & & & & & \\ \lambda_0^{(1)} & \lambda_1^{(1)} & & & & & \\ \lambda_0^{(2)} & \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(2)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda_0^{(n)} & \lambda_1^{(n)} & \dots & \lambda_n^{(n)} & & & \end{array}$$

где предполагается $\lambda_0^{(n)} = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Положим

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.1)$$

и введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что A есть *матрица типа F_C* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f, x) = f(x) \quad (2.2)$$

для всех непрерывных $f(x)$ в каждой точке. Аналогично будем говорить, что A есть *матрица типа F* , если (2.2) имеет место для всех суммируемых $f(x)$ в каждой точке Лебега.

Буква F введена в честь Фейера, так как матрица с элементами

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1},$$

определяющая фейеровский метод суммирования, является как матрицей типа F_C , так и типа F в силу теорем Фейера (§ 47 главы I) и Фейера—Лебега (§ 49 главы I).

Поставим вопрос: при каких условиях, наложенных на элементы матрицы A , она будет типа F_C и когда она будет типа F ? Этим вопросом занимался С. М. Никольский, а затем Б. Надь. Мы здесь изложим полученные ими результаты.

Начнем с изучения матриц типа F_C . Для этого заметим сначала, что

$$U_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(t-x) \right] f(t) dt, \quad (2.3)$$

а потому при фиксированном x мы имеем дело с линейными функционалами, определенными в пространстве C . Из критерия слабой сходимости линейных функционалов (см. Добавления, § 15) следует, что для выполнения равенства (2.2) для всех непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось для функций тригонометрической системы (так как множество тригонометрических полиномов всюду плотно в C , см. § 27 главы I) и чтобы нормы функционалов $U_n(f, x)$ были ограничены в совокупности.

Выполнение (2.2) для тригонометрической системы означает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (A)$$

Подсчитаем норму функционала $U_n(f, x)$

$$\begin{aligned} \|U_n\|_C &= \sup_{\substack{f \in C \\ |f| \leq 1}} |U_n(f, x)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(t-x) \right| dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(t-x) \right| dt. \end{aligned}$$

Ограниченность норм функционалов $U_n(f, x)$ означает, что

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt < C_1, \quad (B)$$

где C_1 — абсолютная постоянная (в дальнейшем C_i обозначают абсолютные постоянные).

Таким образом, для того, чтобы A была матрицей типа F_C , необходимо и достаточно выполнение условий (A) и (B).

Отметим, что для матриц типа F_C сходимость в (2.2) равномерная на всем отрезке. Действительно, пусть $T_m(x)$ — тригонометрический полином порядка m , для которого

$$\|f - T_m\|_C < \varepsilon.$$

Здесь через $\|\cdot\|_C$ мы обозначаем норму в пространстве C .

Из условия (B) следует

$$\begin{aligned} \|f - U_n(f)\|_C &\leq \|f - T_m\| + \|T_m - U_n(T_m)\| + \|U_n(T_m) - f\| \leq \\ &\leq \varepsilon + \|T_m - U_n(T_m)\| + C_1 \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.4)$$

второй член в правой части (2.4) при выполнении условия (A) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Условия (A) и (B) полностью решают вопрос о том, является ли A матрицей типа F_C . Условие (A) очень простое, наоборот (B) совершенно не наглядно. Поэтому возникает необходимость дальнейшего изучения условия (B); такому изучению и посвящены работы С. М. Никольского^[1] и Б. Надя (Nagy^[1]).

Для выполнения условия (B) необходимо, чтобы имели место неравенства

$$|\lambda_k^{(n)}| \leq C_2, \quad (\alpha)$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{(n)}}{n+1-k} \right| \leq C_3. \quad (\beta)$$

В самом деле, $|\cos kx|$ ограничены единицей, а функции

$$v_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+2)x}{1} - \dots - \frac{\cos(2n+1)x}{n}$$

равномерно ограничены в совокупности, поэтому

$$|\lambda_k^{(n)}| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \lambda_m^{(n)} \cos mt \right) \cos kt dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \lambda_m^{(n)} \cos mt \right| dt$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{(n)}}{n+1-k} \right| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \lambda_m^{(n)} \cos mt \right) v_n(t) dt \right| \leqslant \\ \leqslant C_4 \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt.$$

Заметим, что выполнения условий (A), (a) и (β) еще не достаточно для выполнения (B), что видно на следующем примере. Пусть $\lambda_k^{(n)} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n+1}{2} \right]$ и для $k = n$, а остальные $\lambda_k^{(n)} = 0$. Тогда условия (A), (a) и (β) выполнены: условие (β) выполняется, так как

$$\frac{\lambda_1^{(n)}}{n} + \frac{\lambda_2^{(n)}}{n-1} + \dots + \frac{\lambda_n^{(n)}}{1} = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2} \right]} + 1 = \ln \frac{n}{\left[\frac{n+1}{2} \right]} + O(1) = O(1),$$

а условие (B) нет, так как

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right| dx = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \cos kx + \cos nx \right| dx > C_5 \ln \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Рассмотрим вторые разности чисел $\{\lambda_k^{(n)}\}$ (n фиксировано):

$$\Delta_{nk}^2 = \Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}; \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0 \\ (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Если $\Delta_k^2 \geqslant 0$ ($k = 0, \dots, n-1$), то, как всегда будем говорить, что $\lambda_k^{(n)}$ — выпуклая последовательность; если $\Delta_k^2 \leqslant 0$, то вогнутая.

Основным результатом работы С. М. Никольского является следующая.

Теорема Никольского. Если при каждом n система чисел $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) выпукла или вогнута, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) A есть матрица типа F_C ;
- 2) A есть матрица типа F ;
- 3) числа $\lambda_k^{(n)}$, составляющие матрицу A , удовлетворяют условиям (A), (a) и (β).

Каждая матрица типа F является матрицей типа F_C . Выше мы установили, что для произвольных матриц типа F_C выполняются условия (A), (a) и (β). Поэтому для доказательства теоремы Никольского нужно показать только, что при условии выпуклости или вогнутости каждой строки матрицы A из выполнения (A), (a) и (β) следует, что A есть матрица типа F .

С. М. Никольский опубликовал эту теорему в 1948 г. В 1950 г. Надь опубликовал теорему, обобщающую теорему Никольского, при этом он значительно упростил выкладки Никольского.

Теорема Надя. Для того чтобы матрица A была матрицей типа F , достаточно, чтобы выполнялись условия (A) и

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) |\Delta_k^2| < C_6 \quad (\gamma)$$

(Надь рассматривает комплекснозначные матрицы A , но мы ограничимся только случаем матриц из действительных чисел).

Покажем, что для выпуклых и вогнутых последовательностей $\lambda_k^{(n)} (k = 0, 1, \dots, n-1)$ из условий (а) и (β) следует (γ). Это так, ибо при условии выпуклости (в случае вогнутости изменяется знак)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) |\Delta_k^2| &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) (\Delta_k - \Delta_{k+1}) \sum_{i=n-k}^n \frac{1}{i} = \\
 &= n \Delta_0 \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k \left\{ (n-k) \sum_{i=n-k}^n \frac{1}{i} - (n-k+1) \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} \right\} - \Delta_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \\
 &= \Delta_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k \left\{ \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} [(n-k) - (n-k+1)] + (n-k) \frac{1}{n-k} \right\} - \Delta_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \\
 &= \Delta_0 + \sum_{k=1}^n \Delta_k \left(1 - \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} \right) - \Delta_n = \\
 &= \lambda_0^{(n)} - \lambda_1^{(n)} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}) \left(1 - \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} \right) - \lambda_n^{(n)} = \\
 &= \lambda_0^{(n)} - \lambda_1^{(n)} + \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(n)} \left(\sum_{i=n-k+2}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} \right) + \lambda_1^{(n)} \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \lambda_n^{(n)} = \\
 &= \lambda_0^{(n)} - \lambda_n^{(n)} - \lambda_1^{(n)} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(n)} \frac{1}{n-k+1} = \\
 &= \lambda_0^{(n)} - \lambda_n^{(n)} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{(n)}}{n+1-k}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказав теорему Нады, мы тем самым докажем и теорему Никольского.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Нады, установим некоторые соотношения, являющиеся следствиями из условий (А) и (γ).

Пусть $\nu = \left[\frac{n+1}{2} \right]$. Так как

$$(n-k) \sum_{i=n-k}^n \frac{1}{i} \geq (n-k) \frac{k+1}{n} > \begin{cases} \frac{1}{2}(k+1) & \text{для } 0 \leq k < \nu, \\ \frac{1}{2}(n-k) & \text{для } \nu \leq k \leq n, \end{cases}$$

то из условия (γ) следует

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) |\Delta_k^2| < C_7, \quad \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) |\Delta_k^2| < C_7. \quad (2.5)$$

Проведя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}
 1 &= \lambda_0^{(n)} - \lambda_{n+1}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \Delta_k = \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta_k + \sum_{k=\nu}^n \Delta_k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta_k^2 + \nu \Delta_\nu + (n-\nu+1) \Delta_\nu - \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2
 \end{aligned}$$

или

$$(n+1) \Delta_\nu = 1 - \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta_k^2 + \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2$$

и на основании (2.5)

$$(n+1) |\Delta_\nu| < C_8. \quad (2.6)$$

Покажем, наконец, что

$$\sum_n = \sum_{k=0}^{n-1} |A_{nk}^2| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Для каждого целого $r \geq 1$ можно так определить число $n_0 = n_0(r)$, что $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i} > r$ для всех $m \leq r$ и $n \geq n_0$. Для $n \geq n_0(r)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_n \leq \sum_{k=0}^{r-1} |A_k^2| + \frac{1}{r} \sum_{k=r}^{n-1} (k+1) |A_k^2| + \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{n-r} (n-k) |A_k^2| + \\ + \frac{1}{r} \sum_{k=n-r+1}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) |A_k^2| \end{aligned}$$

и на основании (2.5)

$$\sum_n \leq \sum_{k=0}^{r-1} |A_k^2| + \frac{C_9}{r} \quad (n \geq n_0(r)).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем вначале r так, чтобы было $\frac{C_9}{r} < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем на основании условия (A) выбираем n настолько большим, чтобы было также

$$\sum_{k=0}^{r-1} |A_k^2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и (2.7) доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы Надя.

С этой целью, полагая

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt, \quad (2.8)$$

мы заметим, что

$$U_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt, \quad (2.9)$$

где, как обычно,

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Мы будем доказывать, что $U_n(f, x) \rightarrow f(x)$ во всякой точке, где

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t),$$

что, как известно, во всякой точке Лебега выполняется. Докажем, что это будет справедливо, если $K_n(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) m_n(\delta) = \max_{\delta \leq t \leq \pi} |K_n(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty (\delta > 0),$$

2) существует функция $K_n^*(t)$, убывающая на $[0, \pi]$ и такая, что

$$|K_n(t)| \leq K_n^*(t)$$

(короче — монотонно убывающая мажоранта для $K_n(t)$);

$$3) \int_0^\pi |K_n^*(t)| dt < C_{10},$$

а затем убедимся, что $K_n(t)$ действительно удовлетворяет условиям 1), 2) и 3)

Итак, пусть эти условия удовлетворены; возьмем любое $\varepsilon > 0$ и определим $\delta > 0$ так, чтобы

$$\Phi_x(t) < \varepsilon t \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta \varphi_x(t) K_n(t) dt \right| &\leq \int_0^\delta |\varphi_x(t)| K_n^*(t) dt = \\ &= [\Phi_x(t) K_n^*(t)]_0^\delta + \int_0^\delta \Phi_x(t) d[-K_n^*(t)] \leq \\ &\leq \varepsilon \delta K_n^*(\delta) + \int_0^\delta \varepsilon t d[-K_n^*(t)] = \varepsilon \int_0^\delta K_n^*(t) dt \leq C_{10} \varepsilon. \end{aligned}$$

С другой стороны, для достаточно больших значений n

$$\left| \int_\delta^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt \right| \leq m_n(\delta) \int_0^\pi |\varphi_x(t)| dt < C_{11} \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt \right| < C_{12} \varepsilon$$

и так как ε произвольно, то правая часть (2.9) как угодно мала, а тогда (2.2) имеет место.

Остается убедиться, что $K_n(t)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3).

Обозначая, как всегда, через $D_k(t)$ ядро Дирихле, полагая

$$M_k(t) = \sum_{i=0}^k D_i(t) = \frac{\sin^2 \frac{(k+1)t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}},$$

$$\begin{aligned} N_k(t) = M_k(t) - M_n(t) &= \frac{-\cos(k+1)t + \cos(n+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{-\sin \frac{n+k+2}{2} t \sin \frac{n-k}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

получаем, дважды применяя преобразование Абеля,

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \sum_{k=0}^n D_k(t) \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t) \Delta_k^2 + M_n(t) \Delta_n = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t) \Delta_k^2 + \sum_{k=n}^{n-1} N_k(t) \Delta_k^2 + M_n(t) \Delta_n. \end{aligned}$$

Так как при $\delta > 0$ функции $|M_k(t)|$ и $|N_k(t)|$ на отрезке $[\delta, \pi]$ не превосходят $\frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$, то

$$m_n(\delta) = \max_{\delta \leq t \leq \pi} |K_n(t)| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k^2| + |\Delta_n| \right),$$

а потому в силу (2.6) и (2.7) имеем

$$m_n(\delta) \rightarrow 0.$$

Для того чтобы доказать существование $K_n^*(t)$, удовлетворяющей 2) и 3), построим монотонно убывающие функции $M_k^*(t)$ и $N_k^*(t)$, мажорирующие соответственно $M_k(t)$ и $N_k(t)$. Положим

$$M_k^*(t) = \begin{cases} \left(\frac{k+1}{2}t\right)^2 \frac{1}{2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2(k+1)^2}{8} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{2}{k+1}, \\ -\frac{1}{2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi^2}{2t^2} & \text{при } \frac{2}{k+1} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Очевидно $|M_k(t)| \leq M_k^*(t)$ и

$$\int_0^\pi M_k^*(t) dt \leq C_{13} (k+1). \quad (2.10)$$

Пусть

$$N_k^*(t) = \begin{cases} \frac{n+k+2}{2} t \frac{n-k}{2} t \frac{1}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \pi^2 \frac{(n+k+2)(n-k)}{4} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{2}{n+k+2}, \\ \frac{n-k}{2} t \frac{1}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \pi^2 \frac{n-k}{2t} & \text{при } \frac{2}{n+k+2} \leq t \leq \frac{2}{n-k}, \\ \frac{1}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \pi^2 \frac{1}{t^2} & \text{при } \frac{2}{n-k} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Очевидно, $|N_k(t)| \leq N_k^*(t)$ и

$$\begin{aligned} \int_0^\pi N_k^*(t) dt &= \frac{\pi^2}{2} (n-k) \left[2 + \ln \frac{n+k+2}{n-k} \right] - \pi < \\ &< \frac{\pi^2}{2} (n-k) \left[2 + \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n-k} \right] < C_{14} (n-k) \left(1 + \sum_{i=n-k}^n \frac{1}{i} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Построим теперь функцию $K_n^*(t)$:

$$K_n^*(t) = \sum_{k=0}^{p-1} M_k^*(t) |A_k^2| + \sum_{k=p}^{n-1} N_k^*(t) |A_k^2| + M_n^*(t) |A_p|.$$

Легко видеть, что $K_n^*(t)$ монотонно убывает и

$$|K_n(t)| \leq K_n^*(t).$$

Кроме того, из (2.5), (2.6), (2.10) и (2.11) следует, что

$$\int_0^\pi K_n^*(t) dt \leq A,$$

где A постоянно.

Итак, мажоранта $K_n^*(t)$, удовлетворяющая 2) и 3), построена, и доказательство теоремы Нады закончено; вместе с тем доказана и теорема Никольского.

Из теоремы Никольского следует, в частности, что при условии выпуклости или вогнутости чисел каждой строки A каждая матрица типа F_C есть матрица типа F . С. М. Никольский в той же статье показал на примере, что существуют матрицы типа F_C , не являющиеся матрицами типа F .

С. М. Никольский указал ряд конкретных методов суммирования, к которым применима его теорема. Таковыми, в первую очередь, являются методы суммирования (C, a) при любом $a > 0$ (см. Добавления, § 9).

Мы рассмотрим их применение к рядам Фурье в § 3 настоящей главы, здесь же мы хотим отметить еще некоторые результаты, касающиеся общих методов суммирования.

С. М. Никольский и Надь, как мы уже говорили, рассматривали средние вида

$$\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \lambda_k^{(n)},$$

т. е. элементы матрицы A умножали на члены ряда Фурье, а не на его частные суммы, как это делают, когда рассматривают, например, теплицевы матрицы.

С. М. Лозинский^[1] рассматривал треугольные матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccccc} k_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & \\ k_0^{(2)} & k_1^{(2)} & k_2^{(2)} & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ k_0^{(n)} & k_1^{(n)} & \dots & \dots & k_n^{(n)} & 0 \dots \end{array} \right\| \quad (M)$$

и определяемые ими средние

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=0}^n k_j^{(n)} S_j(x),$$

где $S_j(x)$ — частные суммы ряда Фурье от $f(x)$. Он назвал метод суммирования, определяемый такой матрицей, «фейеровским методом», если для любой непрерывной $f(x)$ этот метод суммирует ряд $\sigma(f)$ равномерно к $f(x)$. Он получил целый ряд результатов, касающихся этих методов. Укажем здесь некоторые из них.

Будем называть «ядром» метода функцию

$$K_n(t) = \sum_{j=0}^n k_j^{(n)} D_j(t),$$

где $D_j(t)$ — ядро Дирихле. Ясно, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt.$$

С. М. Лозинский доказал теоремы:

Теорема 1. Следующие три утверждения эквивалентны:

1° метод, определяемый матрицей (M) , есть фейеровский;

2° для любой $f \in L$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx = 0;$$

3° матрица (M) удовлетворяет двум первым условиям Теплица, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_j^{(n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n k_j^{(n)} = 1$$

(т. е. она T^* -матрица в терминологии § 5 Вводного материала) и, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| dt < C,$$

где C — постоянная.

Теорема 2. Если метод, определяемый матрицей (M) , суммирует ряд Фурье от всякой непрерывной $f(x)$ к этой $f(x)$ в каждой точке, то он суммирует ряд $\sigma(f)$ равномерно, т. е. является фейеровским*).

Теорема 3. Для того чтобы метод с матрицей (M) суммировал ряд Фурье от любой ограниченной f к $f(x)$ во всякой точке, где f непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы он был фейеровским и чтобы для любого δ , $0 < \delta < \pi$, интегралы

$$\int_0^x K_n(t) dt$$

были равномерно абсолютно непрерывны на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

С. М. Лозинский изучил далее методы с неотрицательными ядрами ($K_n(t) \geq 0$ для всех t) и доказал для них целый ряд теорем. В частности, он показал, что для того, чтобы такой метод был фейеровским, необходимо и достаточно, чтобы матрица (M) удовлетворяла двум первым условиям Теплица (т. е. была T^* -матрицей).

Не имея возможности перечислить здесь все полученные С. М. Лозинским^[1] результаты, мы отсылаем читателя к этой очень интересной работе.

§ 3. Суммирование рядов Фурье методами (C, α)

В § 9 Добавлений введено понятие суммируемости методами (C, α) . Если мы применим это определение к ряду Фурье, то, обозначая средние порядка α через $\sigma_n^\alpha(x)$, будем иметь согласно формулам (9.7) и (9.12) Добавлений

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{S_n^\alpha(x)}{A_n^\alpha} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — ряд Фурье. Докажем теорему:

Теорема. Для любого $\alpha > 0$ и для любой суммируемой $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется к $f(x)$ методом (C, α) во всякой точке Лебега; если $f(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, то ряд $\sigma(f)$ суммируется к $f(x)$ равномерно.

Эту теорему можно было бы доказать непосредственно, изучая стремление $\sigma_n^\alpha(x)$ к $f(x)$ (см., например, Зигмунд^[М.6], § 3.31), но мы выведем ее как следствие из теоремы С. М. Никольского (см. § 2 настоящей главы).

Для этого заметим, что матрица A , употребленная С. М. Никольским, в нашем случае имеет вид

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha},$$

и нам достаточно доказать, что числа $\lambda_k^{(n)}$ образуют выпуклую или вогнутую последовательность и удовлетворяют условиям (A), (a) и (β) теоремы Никольского.

Кроме того, достаточно изучить случай $0 < \alpha < 1$, так как при $\alpha = 1$ метод $(C, 1)$ является методом Фейера, а при $\alpha > 1$ метод (C, α) сильнее

*) Аналогичное предложение было выше доказано для матриц A Никольского.

метода (С, 1) и, значит, теоремы Фейера и Фейера—Лебега тем самым имеют место.

Если $0 < \alpha < 1$, то последовательность $\lambda_k^{(n)}$ вогнута. Действительно,

$$\Delta_{nk} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha},$$

$$\Delta_{nk}^2 = \Delta_{nk} - \Delta_{nk+1} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-2}}{A_n^\alpha} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

а так как $A_n^\alpha > 0$, а $A_{n-k}^{\alpha-2} < 0$ при $0 < \alpha < 1$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), то все $\Delta_{nk}^2 < 0$.

В § 9 Добавлений было показано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^\alpha}{n^\alpha} = \mu(\alpha),$$

где $\mu(\alpha)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от α .

Поэтому условие (А), входящее в теорему С. М. Никольского, выполнено, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-k}{n} \right)^\alpha = 1.$$

Неравенство (а) из теоремы С. М. Никольского также выполнено, поскольку

$$|\lambda_k^{(n)}| < M(\alpha) \left(\frac{n-k}{n} \right)^\alpha < M(\alpha),$$

где $M(\alpha)$ — константа, зависящая только от α .

Неравенство (β) вытекает из соотношений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{A_n^\alpha} \frac{A_{n-k}^\alpha}{n-k+1} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{A_n^\alpha} \frac{A_p^\alpha}{p+1} = O\left(\frac{1}{n^\alpha} \sum_{p=1}^n p^{\alpha-1}\right) = O(1).$$

Таким образом, матрицы A , определяющие методы (С, α) при $\alpha > 0$, являются матрицами типа F_C и типа F , и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Применяя принцип локализации, сразу видим, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то суммирование методом (С, α) имеет место равномерно на любом $[a', b']$, лежащем внутри (a, b) (здесь следует опираться на то, что равномерная сходимость влечет и равномерную суммируемость (С, α) в силу теоремы § 11 Добавлений).

§ 4. Метод суммирования Бернштейна—Рогозинского

Пусть

$$B_n(x) = \frac{1}{2} [S_n(x + a_n) + S_n(x - a_n)],$$

где $S_n(x)$ — частные суммы тригонометрического ряда, а $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

О п р е д е л е н и е. Условимся говорить, что тригонометрический ряд суммируется методом Бернштейна—Рогозинского к числу S в точке x_0 , если $B_n(x_0) \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$.

В. Рогозинский (Rogosinsky^[1,2,3]) изучал случай, когда $a_n = p \frac{\pi}{2n}$, где p — нечетное число; С. Н. Бернштейн^[3] рассматривал случай $a_n = \frac{\pi}{2n+1}$;

впоследствии оба они переносили некоторые из своих результатов на случай

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Мы не имеем в виду излагать здесь все результаты, касающиеся этого метода*); они весьма различны в зависимости от того, как выбираются числа α_n . Подробное изложение вопросов, связанных с методом суммирования Бернштейна—Рогозинского, читатель может найти в статье С. Б. Стечкина, напечатанной в Приложениях к книге Харди ^[М.24] (см. стр. 479). Мы здесь ограничимся доказательством того, что для рассмотренного Рогозинским случая $\alpha_n = p \frac{\pi}{2n}$ (p нечетное) этот метод суммирования дает хороший результат в применении к рядам Фурье, точнее, имеет место

Т е о р е м а. Если $f(x)$ — любая суммируемая, то ряд $\sigma(f)$ суммируется к $f(x)$ почти всюду методом Бернштейна—Рогозинского при $\alpha_n = p \frac{2\pi}{n}$, где p нечетное, т. е.

$$\frac{1}{2} \left[S_n \left(x + p \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(x - p \frac{\pi}{2n} \right) \right] \rightarrow f(x)$$

почти всюду.

Если на некотором отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то суммирование имеет место равномерно на любом отрезке $[a_1, b_1]$, целиком лежащем внутри (a, b) .

Чтобы убедиться в этом, напомним тождество Рогозинского (см. § 6 главы IV):

$$\frac{1}{2} [S_n(x + a) + S_n(x - a)] - S(x) = [S_n(x) - S(x)] \cos na + R_n(x, a), \quad (4.1)$$

где $R_n(x, a) \rightarrow 0$ равномерно относительно a при $0 \leq a \leq \frac{A}{n}$, если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$, и при этом $R_n(x, a) \rightarrow 0$ равномерно относительно x на некотором отрезке, если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ равномерно на этом отрезке (здесь $\sigma_n(x)$ — фейеровская сумма порядка n).

Если положить $\alpha_n = p \frac{\pi}{2n}$, где p нечетно, то $\cos n\alpha_n = 0$, и отсюда сразу следует, что

$$\frac{1}{2} \left[S_n \left(x + p \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(x - p \frac{\pi}{2n} \right) \right] \rightarrow S(x)$$

в каждой точке, где $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$, и равномерно на любом отрезке, где $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ равномерно.

Теорема доказана. Из ее доказательства видно, что при $\alpha_n = p \frac{\pi}{2n}$, где p нечетное, метод Бернштейна—Рогозинского не слабее, чем $(C, 1)$; можно было бы доказать, что фактически они эквивалентны. Если же взять $\alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}$, то это метод более сильный, чем $(C, 1)$ (это было доказано С. Н. Бернштейном).

Можно также доказать, что если

$$\alpha_n = p \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad (4.2)$$

где p нечетное, то такой метод снова суммирует ряд $\sigma(f)$ к $f(x)$ почти всюду (см. А. Ф. Тиман ^{[1], [2]}). А. Ф. Тиман доказал также, что условие (4.2) и

*) См., например, И. П. Натансон ^[1], Ф. И. Харшиладзе ^[1].

необходимо для того, чтобы суммируемость $\sigma(f)$ к $f(x)$ имела место почти всюду для любой $f(x) \in L$.

Заметим, что так как

$$\frac{1}{2} [S_n(x+a) + S_n(x-a)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos ka$$

и, как было доказано в § 6 главы IV, для $\cos ka$ имеют место формулы (6.3)

$$\left. \begin{aligned} (k+1) \Delta_k^2(a) &= O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq \frac{A}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ n \Delta_{n-1}(a) &= O(1) \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq \frac{A}{n} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

(где A — любое постоянное), то метод Бернштейна—Рогозинского можно исследовать, отправляясь от теорем Никольского или Нады и пользуясь оценками (4.3). В частности, как заметил С. М. Никольский, для $a = \frac{\pi}{2n}$ числа $\lambda_k^{(n)}$, входящие в его матрицу, т. е.

$$\lambda_k^{(n)} = \cos k \frac{\pi}{2n},$$

образуют вогнутую последовательность*) и удовлетворяют условиям (A), (a) и (β) его теоремы, в чем очень легко убедиться.

§ 5. Метод суммирования Лебега

Напомним, что метод суммирования Римана (см. § 68 главы I) состоит в том, что тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (5.1)$$

интегрируют два раза, от суммы $F(x)$ полученного ряда берут обобщенную вторую производную (если она существует) и приписывают ее в качестве суммы ряду (5.1). Естественно поставить вопрос, почему надо было два раза интегрировать и брать (обобщенную) производную второго порядка, а не один раз интегрировать и брать в том или ином смысле обобщенную первую производную.

Ответ на этот вопрос является очень простым: после однократного интегрирования ряда (5.1) хотя бы и с коэффициентами, стремящимися к нулю, получается ряд

$$\frac{a_0}{2} x + C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}, \quad (5.2)$$

который может оказаться расходящимся на всюду плотном множестве точек (см. ниже, глава VIII, § 13), а в эпоху Римана с такими рядами было трудно обращаться. Теперь мы можем сказать, что раз его коэффициенты имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то он сходится почти всюду (см. глава I, § 64). Правда, сумма

*) Собственно говоря, $\Delta_{nk}^2 \leq 0$ лишь для $k \leq n-2$, но не для $k = n-1$, как это требуется в теореме Никольского, однако поскольку

$$\Delta_{n,n-1}^2 = \cos(n-1) \frac{\pi}{2n} - 2 \cos n \frac{\pi}{2n} = \sin \frac{\pi}{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то, как видно из элементарного подсчета, условия С. М. Никольского являются следствиями условия Нады и в рассматриваемом случае.

$F(x)$ этого ряда может быть неограниченной на любом интервале (см. глава VIII, § 13). Однако можно все же искать для нее обобщенную производную. Эта идея и была положена Лебегом в основу его метода суммирования.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что ряд (5.1) *суммируем методом Лебега* в точке x_0 к числу S , если ряд (5.2) сходится в некоторой окрестности $(x_0 - h, x_0 + h)$ этой точки и если сумма $F(x)$ ряда (5.2) в точке x_0 имеет симметрическую производную, равную числу S , т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{2h} = S. \quad (5.3)$$

Легко доказать теорему:

Т е о р е м а. Пусть $f(x)$ — любая суммируемая функция; тогда $\sigma(f)$ суммируется методом Лебега к $f(x)$ почти всюду.

Действительно, по теореме § 40 главы I, если ряд (5.1) есть $\sigma(f)$, то ряд (5.2) сходится всюду и его сумма $F(x)$ есть неопределенный интеграл от $f(x)$. Поэтому $F'(x)$ существует и равна $f(x)$ почти всюду, а стало быть, и симметрическая производная от $F(x)$ равна $f(x)$ почти всюду, но это и значит, что ряд (5.1) суммируем почти всюду к $f(x)$ методом Лебега. Теорема доказана.

Мы теперь несколько обобщим определение суммируемости методом Лебега. Именно введем

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что ряд (5.1) *суммируем в точке x_0 к числу S обобщенным методом Лебега, отвечающим последовательности $\{h_n\}$, $h_n \rightarrow 0$, если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0 - h_n)}{2h_n} = S.$$

Полезность введения такого метода будет нами обнаружена в § 11 главы XI. Здесь мы пока преобразуем определения простого и обобщенного метода Лебега для удобства их сравнения с линейными методами.

Сначала заметим, что если в $(x_0 - h, x_0 + h)$ ряд (5.2) сходится, то

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{2h} &= \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} [\cos k(x_0 + h) - \cos k(x_0 - h)] \frac{1}{2h} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} [\sin k(x_0 + h) - \sin k(x_0 - h)] \frac{1}{2h} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \frac{\sin kh}{kh}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) заключаем, что ряд (5.1) суммируется в точке x_0 к числу S , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \frac{\sin kh}{kh} \right] = S. \quad (5.5)$$

Потребуем, чтобы у ряда (5.1) коэффициенты $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$. Тогда, если обозначить через $S_k(x)$ частные суммы ряда (5.1), то, применяя преобразование Абеля и учитывая*), что $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$, можно переписать (5.5) в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[\frac{\sin kh}{kh} - \frac{\sin (k+1)h}{(k+1)h} \right] S_k(x_0) \right\} = S \quad (5.6)$$

*) Для того чтобы преобразование Абеля было законным, нет необходимости требовать, чтобы $a_k \rightarrow 0$ и $b_k \rightarrow 0$, но достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n (|a_k| + |b_k|) = o(n),$$

так как в этом случае $S_n(x_0) = o(n)$.

и говорить, что ряд (5.1) суммируем методом Лебега к числу S , если выполнено условие (5.6).

Переходя от непрерывного параметра h к последовательности $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, будем говорить, что ряд (5.1) с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется в точке x_0 к числу S обобщенным методом Лебега, отвечающим последовательности $\{h_n\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin kh_n}{kh_n} - \frac{\sin(k+1)h_n}{(k+1)h_n} \right] S_k(x_0) = S. \quad (5.7)$$

По аналогии с (5.7) условимся говорить, что числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируем к числу S обобщенным методом Лебега, отвечающим последовательности $\{h_n\}$ с $h_n \rightarrow 0$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin kh_n}{kh_n} - \frac{\sin(k+1)h_n}{(k+1)h_n} \right] S_k = S,$$

где $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Докажем, что такой обобщенный метод Лебега есть один из методов T^* (см. Вводный материал, § 5).

В самом деле, положим

$$a_{nk} = \frac{\sin kh_n}{kh_n} - \frac{\sin(k+1)h_n}{(k+1)h_n} \quad \text{для } k \neq 0,$$

$$a_{n0} = 1 - \frac{\sin h_n}{h_n}$$

и докажем, что два первых условия Теплица удовлетворены.

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad \text{при } k \neq 0 \quad \text{и при } k = 0$$

в силу $h_n \rightarrow 0$ и

$$a_{n0} + a_{n1} + \dots + a_{nk} + \dots = 1 - \frac{\sin h_n}{h_n} + \left[\frac{\sin h_n}{h_n} - \frac{\sin 2h_n}{2h_n} \right] + \dots = 1,$$

так как $\frac{\sin kh_n}{kh_n} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Мы доказали, что матрица $\|a_{nk}\|$ есть T^* -матрица, но не T -матрица. Поэтому обобщенный метод Лебега, вообще говоря, не регулярен. Однако есть один важный частный случай, когда он оказывается регулярным. Именно, если коэффициенты ряда (5.1) имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, или даже если только

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \quad (5.8)$$

то ряд (5.1) сходится в тех и только тех точках, где он суммируется методом Лебега, и притом в этом случае его сумма и лебеговская сумма равны. Это следует из теоремы 3 § 66 главы I. Таким образом, для рядов с коэффициентами, удовлетворяющими условию (5.8), обобщенный метод Лебега, соответствующий любой последовательности $\{h_k\}$, регулярен. Этот факт будет нами существенно использован в главе XI.

З а м е ч а н и е. Иногда бывает целесообразно применять метод Лебега к ряду, получающемуся от дифференцирования ряда Фурье; однако

следует заметить, что каждый раз, как такой ряд суммируется методом Лебега, он суммируется и методом Абеля; это было по существу дела доказано в § 58 главы I, хотя термин «суммировать методом Лебега» там еще не употреблялся.

§ 6. Понятие сильной суммируемости и суммируемости (H, k)

По теореме Фейера для любой $f(x) \in L$ имеем почти всюду $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, откуда вытекает

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \{S_m(x, f) - f(x)\} = o(1) \text{ почти всюду.} \quad (6.1)$$

Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood [4]) впервые поставили вопрос, будет ли почти всюду иметь место более сильное соотношение, а именно

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x, f) - f(x)| = o(1). \quad (6.2)$$

Если соотношение (6.2) выполнено в некоторой точке x , они предложили говорить, что ряд *сильно суммируем* в этой точке. Можно также условиться говорить, что ряд *сильно суммируем с показателем k* , или, как говорят некоторые авторы, (H, k) -суммируем (H в честь Hardy), если для этого k

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x, f) - f(x)|^k = o(1). \quad (6.3)$$

Из неравенства Гельдера сразу следует, что если $k_1 < k_2$, то (H, k_2) -суммируемость влечет (H, k_1) -суммируемость, потому что для любых c_0, c_1, \dots, c_n имеем

$$\sum_{m=0}^n |c_m|^{k_1} \leq \left\{ \sum_{m=0}^n |c_m|^{k_2} \right\}^{\frac{k_1}{k_2}} \left\{ \sum_{m=0}^n 1 \right\}^{1 - \frac{k_1}{k_2}} = (n+1)^{1 - \frac{k_1}{k_2}} \left\{ \sum_{m=0}^n |c_m|^{k_2} \right\}^{\frac{k_1}{k_2}},$$

а потому если

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |c_m|^{k_2} = o(1),$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^n |c_m|^{k_2} = o(n),$$

то

$$\sum_{m=0}^n |c_m|^{k_1} = o\left(n^{\frac{k_1}{k_2}}\right) n^{1 - \frac{k_1}{k_2}} = o(n),$$

т. е.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |c_m|^{k_1} = o(1).$$

Мы видим таким образом, что соотношение (6.3) дает тем более сильный результат, чем больше k .

Харди и Литтлвуд [6] доказали, что если $f(x) \in L^p$ при $p > 1$, то при любом $k > 0$ суммируемость (H, k) имеет место почти всюду. Точнее, если положить

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

и

$$\Phi_p(x, h) = \int_0^h |\varphi_x(t)|^p dt, \quad (6.4)$$

то (6.3) имеет силу при любом k во всякой точке, где

$$\Phi_p(x, h) = o(h), \quad (6.5)$$

а мы знаем (см. Добавления, § 14), что (6.5) имеет место почти всюду.

Если же $f(x) \in L$, но $f(x) \notin L^p$ при $p > 1$, то Харди и Литтльвуд установили, что выполнение условия (6.5) в некоторой точке еще не влечет выполнения в ней равенства (6.3) (и притом ни при каком k). Именно, хотя при выполнении условия (6.5) и можно доказать, что

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^2 = O(\ln n), \quad (6.6)$$

а также

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)| = O(\sqrt{\ln n}), \quad (6.7)$$

но уже если

$$\chi(n) = o(\sqrt{\ln n}),$$

то существует при любом $k > 0$ такая суммируемая $f(x)$, что, несмотря на выполнение в точке x условия (6.5), имеем

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^k \neq o(\chi^k(n)).$$

Другими словами, понизить множители $\ln n$ и $\sqrt{\ln n}$ в соотношениях (6.6) и (6.7) нельзя.

Однако Харди и Литтльвуд заметили, что недостаточность условия (6.5) для выполнения (6.3) еще не дает повода утверждать, что соотношение (6.3) не может выполняться почти всюду*). Они поставили проблему, будет ли все же (6.3) иметь место почти всюду при $f(x) \in L$?

Первым, кто частично дал положительный ответ на этот вопрос, был Марцинкевич. Он решил проблему, поставленную Харди и Литтльвудом, для случая $k = 2$, т. е. показал, что для любой $f(x) \in L$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n [S_m(x) - f(x)]^2 = o(1) \text{ почти всюду.}$$

Далее Зигмунд [13] решил тот же вопрос уже при любом k , т. е. показал, что (6.3) имеет место почти всюду для $f(x) \in L$ и $k > 0$ любого.

Ряд авторов затем изучал вопрос, при каких дополнительных условиях, наложенных на функцию $f(x)$, мы имеем в данной точке выполненным условие (6.3). Гак, например, Ванг (Wang [1]) доказал, что если $\alpha > \frac{1}{2}$ и

$$\int_0^h |\varphi_x(t)| dt = o\left\{\frac{h}{\left(\ln \frac{1}{h}\right)^\alpha}\right\},$$

то (6.3) имеет место.

*) Множество точек, в которых выполнено условие (6.5) для случая $p = 1$, содержит в себе все лебеговские точки. Мы знаем, что во многих теоремах из теории тригонометрических рядов доказательство того, что некоторое явление имеет место почти всюду, строится на том, что оно имеет место во всех точках Лебега. Однако, например, для $f(x) \in L^2$ имеем почти всюду $S_n(x, f) = o(\sqrt{\ln n})$, но нельзя утверждать, что это соотношение справедливо во всех точках Лебега. В частности, для непрерывной функции оно не должно иметь места в каждой точке, хотя всякая точка непрерывности есть точка Лебега.

Мы не будем излагать здесь результатов, касающихся (H, k) -суммируемости в точке, а остановимся на случаях (H, k) -суммируемости почти всюду. Подробно мы разберем случай (H, k) -суммируемости для $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) при любом $k > 0$ и случай $f(x) \in L$, но уже при $k = 2$.

§ 7. Суммируемость (H, k) для рядов Фурье от функций из класса $L^{(p)}$

Пусть $f(x) \in L^p$ ($p > 1$). Положим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

и

$$\Phi_p(x, h) = \int_0^h |\varphi_x(t)|^p dt.$$

В § 14 Добавлений доказано, что

$$\Phi_p(x, h) = o(h) \quad \text{почти всюду.} \quad (7.1)$$

Заметим теперь, что если в некоторой точке x справедливо (7.1), то справедливо и

$$\Phi_{p_1}(x, h) = o(h)$$

для любого $p_1 < p$. В самом деле, по неравенству Гельдера

$$\int_0^h |\varphi_x(t)|^{p_1} dt \leq \left\{ \int_0^h |\varphi_x(t)|^p dt \right\}^{\frac{p_1}{p}} \left\{ \int_0^h 1 dt \right\}^{1 - \frac{p_1}{p}},$$

а потому

$$\frac{1}{h} \Phi_{p_1}(x, h) \leq h^{-\frac{p_1}{p}} [\Phi_p(x, h)]^{\frac{p_1}{p}} = h^{-\frac{p_1}{p}} \{o(h)\}^{\frac{p_1}{p}} = o(1).$$

Это замечание скоро будет использовано. В частности, из него сразу следует, что если $p > 1$ и $\Phi_p(x, h) = o(h)$, то и

$$\Phi_1(x, h) = o(h). \quad (7.2)$$

После этих предварительных замечаний мы можем доказать теорему*):
Т е о р е м а. Если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, и если $k > 0$ любое, то

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^k = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (7.3)$$

во всякой точке x , где выполняется соотношение

$$\Phi_p(x, h) = o(h)$$

и, следовательно, (7.3) выполнено почти всюду.

Прежде всего заметим, что, не нарушая общности, можно считать $p \leq 2$. Действительно, если этого нет, то возьмем p_1 такое, что $1 < p_1 \leq 2$. Из (7.1) в силу $p_1 \leq p$ тогда следует

$$\Phi_{p_1}(x, h) = o(h).$$

Если мы сумеем отсюда вывести, что (7.3) имеет место, то, следовательно, (7.3) будет доказано для p .

*) См. Hardy and Littlewood^[1] (для $p = k = 2$), Carleman^[2].

Итак, будем доказывать теорему для $p \leq 2$. Кроме того, предположим сначала $k > 1$ (от этого ограничения избавимся позже).

Мы знаем (см. глава I, § 32), что для любой $f(x) \in L$

$$S_m(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin mt}{t} dt + \varepsilon_m(x),$$

где $\varepsilon_m(x) \rightarrow 0$. Поэтому, полагая

$$I_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin mt}{t} dt,$$

докажем, что если в точке x выполнено (7.1), то

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |I_m(x)|^k = o(1). \quad (7.4)$$

Тогда из неравенства

$$|a + b|^k \leq 2^k(|a|^k + |b|^k)$$

(см. Вводный материал, § 8) в силу (7.4) и равномерного стремления $\varepsilon_m(x)$ к нулю сразу получится (7.3). Теперь, разбивая интеграл $I_m(x)$ на два интеграла, находим

$$I_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_x(t) \frac{\sin mt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^\pi \varphi_x(t) \frac{\sin mt}{t} dt = I'_m(x) + I''_m(x),$$

где

$$|I'_m(x)| \leq \frac{m}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi_x(t)| dt = \frac{m}{\pi} \Phi_1\left(x, \frac{1}{n}\right) = mo\left(\frac{1}{n}\right) = o(1) \text{ для } 1 \leq m \leq n, \quad (7.5)$$

так как в точке x выполнено (7.1), а значит, и $\Phi_1\left(x, \frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, как мы уже отмечали выше.

Рассуждая, как и выше, мы заключаем отсюда, что вместо (7.4) достаточно доказать

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |I''_m(x)|^k = o(1). \quad (7.6)$$

Но если положить

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_x(t)}{t} & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi \leq t < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

$$g(t + 2\pi) = g(t),$$

то, обозначая через a_n и b_n коэффициенты Фурье для $g(t)$, имеем

$$b_m = I''_m.$$

Мы предположили, что число p , для которого мы доказываем теорему, удовлетворяет условию $p \leq 2$. Тогда, определяя q из равенства

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

мы по теореме Хаусдорфа—Юнга (см. глава II, § 4) находим

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

так как $g(t) \in L^p$, если $f(x) \in L^p$. Отсюда

$$\left\{ \sum_{m=1}^n |I_m''(x)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \sum_{m=0}^n |b_m|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (7.7)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |\varphi_x(t)|^p \frac{dt}{t^p} &= \frac{\Phi_p(x, u)}{u^p} \Big|_{\frac{1}{n}}^{\pi} + p \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Phi_p(x, u) \frac{du}{u^{p+1}} = \\ &= \frac{\Phi_p(x, \pi)}{\pi^p} - \frac{\Phi_p\left(x, \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^p} + p \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Phi_p(x, u) \frac{du}{u^{p+1}}. \end{aligned}$$

Но в силу (7.1) $\Phi_p(x, u) = o(u)$, а потому

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right|^p dt = O(1) + o(n^{p-1}) + o\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{du}{u^p}\right) = o(n^{p-1}),$$

следовательно,

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = o\left(n^{1-\frac{1}{p}}\right) = o\left(n^{\frac{1}{q}}\right),$$

откуда в силу (7.7)

$$\sum_{m=0}^n |I_m''(x)|^q = o(n)$$

и, значит,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |I_m''(x)|^q = o(1).$$

Соединяя вместе все оценки, находим окончательно, что если в точке x выполнено (7.1), то в этой точке

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^q = o(1).$$

Нам надо было доказать справедливость (7.3) в точке x , где выполнено (7.1). Мы теперь видим, что (7.3) доказано при $k = q$. Следует его доказать при любом k .

Прежде всего случай $k \leq q$ не требует дополнительных рассуждений, так как выше было уже отмечено, что если (7.3) верно для k_2 , и $k_1 < k_2$, то (7.3) верно и для k_1 . Итак, (7.3) доказано для $k \leq q$.

Пусть теперь $k > q$. Найдем такое q_1 , что $q_1 > k$, и определим p_1 из условия $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$. Так как $q_1 > q$, то $p_1 < p$. Но тогда из $\Phi_p(x, h) = o(h)$ следует и $\Phi_{p_1}(x, h) = o(h)$, и, значит, по доказанному

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^{q_1} = o(1)$$

в рассматриваемой точке x . А если так, поскольку $k < q_1$, то будет верно и

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)|^k = o(1),$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Заметим, что если $f(x)$ непрерывна, то $f(x) \in L^p$ при любом p и, кроме того, для нее в каждой точке выполняется (7.1). Поэтому, если $f(x)$ непрерывна, то при любом $k > 0$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x, f) - f(x)|^k = o(1)$$

в каждой точке.

Можно было бы доказать, что это соотношение выполнено равномерно.

§ 8. Суммируемость $(H, 2)$

Мы переходим теперь к рассмотрению случая, когда $f(x) \in L$ (но $f(x) \notin L^p$ при $p > 1$). Зато для упрощения мы ограничимся суммируемостью $(H, 2)$ (вместо (H, k) при любом $k > 0$).

Теорема Марцинкевича *). Если $f(x) \in L$, то

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n [S_m(x, f) - f(x)]^2 = o(1) \text{ почти всюду.}$$

Для доказательства этой теоремы понадобится ряд лемм.

Лемма 1. Если $0 \leq r < 1$ и $D_n(x)$ — ядро Дирихле, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n D_n(x) D_n(y) = D(r, x, y),$$

где

$$D(r, x, y) = \frac{(1-r)[(1+r)^2 + 2r(\cos x + \cos y)]}{4[1 - 2r \cos(x-y) + r^2][1 - 2r \cos(x+y) + r^2]}.$$

Если заметить, что для ядра Пуассона имеем выражение (см. § 54 главы I)

$$P(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \varphi + r^2},$$

то элементарными выкладками находим

$$\frac{(1-r) \cos \varphi}{1-2r \cos 2\varphi + r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(2k+1)\varphi. \quad (8.1)$$

Подставляя в (8.1) сначала $\varphi = \frac{1}{2}(x-y)$, потом $\varphi = \frac{1}{2}(x+y)$ и вычитая, мы убедимся в справедливости утверждения леммы.

*) Marcinkiewicz [5].

З а м е ч а н и е. Так как для $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$1 - 2r \cos \varphi + r^2 = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq (1 - r)^2 + 4r \frac{\varphi^2}{\pi^2} \geq \left[(1 - r)^2 + \frac{\varphi^2}{\pi^2} \right],$$

если $4r > 1$, то при $r > \frac{1}{4}$ имеем

$$|D(r, x, y)| \leq \frac{C(1 - r)}{[(1 - r)^2 + (x - y)^2][(1 - r)^2 + (x + y)^2]}, \quad (8.2)$$

где C постоянно.

Л е м м а 2. И меем

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n S_n^3(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) f(v+x) D(r, u, v) du dv.$$

Это немедленно следует из леммы 1.

Л е м м а 3. Пусть P — совершенное множество, $\{\delta_n\}$ — система его смежных интервалов, $\Phi(x)$ — функция с периодом 2π , равная нулю на P , и $\Phi(x) = \delta_n$ для $x \in \delta_n$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(t+x)}{t^2} dt < +\infty \text{ почти всюду на } P. \quad (8.3)$$

Пусть Δ_n — интервал концентрический с δ_n , но в три раза меньше, пусть $\Phi^*(x) = 0$ вне $\{\Delta_n\}$ и $\Phi^*(x) = \delta_n$ для $x \in \Delta_n$. Если $\Psi(x)$ — характеристическая функция множества P , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x) \frac{\Phi^*(t)}{(t-x)^2} dt dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} \left\{ \Phi^*(t) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Psi(x)}{(t-x)^2} dx \right\} dt. \quad (8.4)$$

Если $t \in \Delta_n$, а $x \in P$, то $|t - x| \geq \Delta_n$, откуда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Psi(x)}{(t-x)^2} dx \leq 2 \int_{\Delta_n} \frac{du}{u^2} \leq \frac{2}{\Delta_n} \text{ при } t \in \Delta_n,$$

а так как $\Phi^*(t) = \delta_n$ на Δ_n , то ряд в правой части (8.4) сходится. Поэтому по теореме Фубини

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x) \frac{\Phi^*(t)}{(t-x)^2} dt < +\infty \text{ почти всюду}$$

и, в частности, почти всюду на P

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi^*(t)}{(t-x)^2} dt < +\infty.$$

Отсюда можно вывести, что почти всюду на P справедливо (8.3) (надо провести рассуждение, аналогичное тому, при помощи которого в лемме 1 § 15 главы V из формулы (15.9) было выведено (15.4)).

Л е м м а 4. Пусть P — совершенное множество на $[-\pi, \pi]$, и $\{\delta_n\}$ — система его смежных интервалов. Пусть $f(x) \geq 0$, и $f(x) = 0$ на P . Допустим,

что она удовлетворяет, кроме того, условиям*)

$$\int_{\delta_n} f(x) dx \leq \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8.5)$$

и

$$\int_{-h}^k f(x+u) du \leq k+h, \quad x \in P. \quad (8.6)$$

Пусть x_0 — точка плотности P , в которой выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(t+x_0)}{t^2} dt < K = K(x_0, f) \quad (8.7)$$

(здесь Φ — та же функция, как в лемме 3), и пусть, наконец,

$$\int_{-h}^h f(x_0+u) du = o(h). \quad (8.8)$$

Тогда для частных сумм $S_n(x)$ ряда $\sigma(f)$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1} S(r, x) = \lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n^2(x_0) = 0. \quad (8.9)$$

Для упрощения формул мы примем $x_0 = 0$. Кроме того, мы будем считать $f(x) = 0$ для $|x| > \frac{\pi}{2}$. Это возможно потому, что, изменяя $f(x)$ вдали от $x = 0$, мы изменяем $S_n(x)$ лишь на величину, которая равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а тогда если (8.9) справедливо для измененных $S_n(x)$, то оно справедливо и для первоначальных $S_n(x)$.

В самом деле, если $S_n(x) = \tilde{S}_n(x) + \varepsilon_n(x)$, где $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$, а для $\tilde{S}_n(x)$ равенство (8.9) справедливо, то из $S_n^2(x) \leq 2[\tilde{S}_n(x)]^2 + 2[\varepsilon_n^2(x)]$ сразу следует, что и для $S_n(x)$ формула (8.9) верна.

В силу леммы 2 и замечания к лемме 1, полагая $\lambda = 1 - r$, имеем

$$S(r, 0) = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n^2(0) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) f(v) D(r, u, v) du dv \leq$$

$$\leq C \lambda^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) f(v) \frac{du dv}{[\lambda^2 + (u-v)^2][\lambda^2 + (u+v)^2]}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) f(v) \frac{\lambda^2 du dv}{[\lambda^2 + (u-v)^2][\lambda^2 + (u+v)^2]} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(v) f(u) \frac{\lambda^2 dv du}{[\lambda^2 + (u-v)^2][\lambda^2 + (u+v)^2]}. \end{aligned}$$

*) Собственно говоря, условие (8.5) вытекает из (8.6), если положить $x = \alpha_n$, $h = 0$, $k = \delta_n$, где $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$, но удобно его выписать отдельно для упрощения ссылок.

Обозначим через D_0 область, ограниченную прямыми $v = 0$, $u = \pi$, $v = u$, $v = u - \lambda$, и через D_k ($k \geq 1$) область, ограниченную прямыми $v = 0$, $u = \pi$, $v = u - 2^{k-1}\lambda$, $v = u - 2^k\lambda$ (рис. 36). Ясно, что для любого λ , полагая

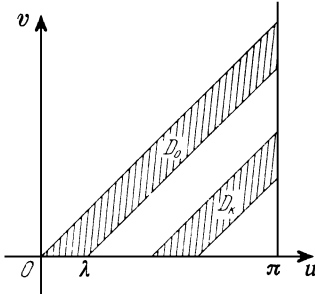


Рис. 36

$$A_k = \iint_{D_k} f(u)f(v) \frac{\lambda^2 du dv}{[\lambda^2 + (u-v)^2][\lambda^2 + (u+v)^2]}, \quad (8.10)$$

имеем

$$I \leq 2(A_0 + A_1 + \dots + A_m), \quad (8.11)$$

если m достаточно велико. Оценим теперь A_k . Так как $|u - v| \geq 2^{k-1}\lambda$ в D_k , то

$$A_k \leq \iint_{D_k} f(u)f(v) \frac{du dv}{(\lambda^2 + u^2) 2^{2k-2}} \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \iint_{D_k^*} f(u)f(v) \frac{du dv}{\lambda^2 + u^2},$$

где $D_k^* = D_0 + D_1 + \dots + D_k$.

Полагая $\lambda_k = 2^k\lambda$ и $f_k(x) = \int_{x-\lambda_k}^x f(u) du$, находим

$$A_k \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \int_0^\pi f(u) \left[\int_{u-\lambda_k}^u f(v) dv \right] \frac{du}{u^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2^{2k-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) f_k(u) \frac{du}{u^2 + \lambda^2}, \quad (8.12)$$

ибо $f(u) = 0$ при $|u| \geq \frac{\pi}{2}$.

Покажем, что для $u \in CP$ имеем

$$f_k(u) \leq \Phi(u) + \lambda_k. \quad (8.13)$$

Действительно, если $u \in \delta_n = (a_n, \beta_n)$, то

$$f_k(u) = \int_{u-\lambda_k}^u f(t) dt = \int_{u-a_n-\lambda_k}^{u-a_n} f(a_n+t) dt \leq \lambda_k$$

в силу (8.6) и $a_n \in P$, если $u - a_n - \lambda_k \leq 0$. Если же $u - \lambda_k \geq a_n$, то в силу (8.5)

$$f_k(u) = \int_{u-\lambda_k}^u f(t) dt \leq \int_{a_n}^{\beta_n} f(t) dt \leq \delta_n = \Phi(u),$$

поэтому (8.13) справедливо. Но если так, то из (8.12) и (8.13)

$$A_k \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(u) f(u) \frac{du}{u^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda_k}{2^{2k-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \frac{du}{u^2 + \lambda^2} = A'_k + A''_k. \quad (8.14)$$

Пусть $\{\delta'_n\}$ — смежные интервалы к P , попавшие на $(0, \pi)$. Так как точка $x = 0$ есть точка плотности для P , то можно выбрать M так, чтобы

$$\frac{\beta_n}{a_n} < M, \quad (8.15)$$

а тогда в силу (8.5)

$$A'_k \leq \frac{4}{2^{2k}} \sum_{\delta'_n} \int f(u) \Phi(u) \frac{du}{u^2} \leq \frac{4M^2}{2^{2k}} \sum_{\delta'_n} \int \frac{\delta'_n}{\beta_n^2} f(u) du = \frac{4M^2}{2^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta'_n)^2.$$

Но из (8.7) (причем у нас $x_0 = 0$) следует и подавно $\sum \int_{\delta'_n} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt < K$, а значит, тем более $\sum \int_{\delta'_n} \frac{\Phi(t)}{\beta_n^2} dt < K$, т. е. $\sum \left(\frac{\delta'_n}{\beta_n}\right)^2 < K$, потому что $\Phi(t) = \delta'_n$ на δ'_n .

Итак,

$$A'_k \leq \frac{AK(0, f)}{2^{2k}}, \quad (8.16)$$

где A — постоянное.

Теперь оценим A''_k . Имеем

$$A''_k = \frac{4\lambda}{2^k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(u)}{u^2 + \lambda^2} du. \quad (8.17)$$

Если мы положим

$$f^*(0) = \sup_{h, k} \frac{1}{h+k} \int_{-h}^k f(u) du,$$

то интегрирование по частям в правой части (8.17) дает

$$\begin{aligned} A''_k &= \frac{4\lambda}{2^k} \left\{ \int_0^t f(u) du \frac{1}{t^2 + \lambda^2} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^t f(u) du \frac{t dt}{(t^2 + \lambda^2)^2} \leq \\ &\leq \frac{4\lambda}{2^k} \left[f^*(0) \frac{2}{\pi} + 2 f^*(0) \frac{\pi}{2\lambda} \right] \leq \frac{A}{2^k} f^*(0). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Соединяя (8.16) и (8.18), имеем из (8.14)

$$A_k \leq \frac{B}{2^k} \{f^*(0) + K(0, f)\},$$

где B — новое постоянное, и в силу (8.11)

$$I \leq C \{f^*(0) + K(0, f)\}, \quad (8.19)$$

где C — постоянное.

Так как для интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0$ и $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$ с тем же подынтегральным

выражением, как у интеграла I , оценки могут быть произведены совершенно так же, то в результате

$$S(r, 0) \leq C_1 \{f^*(0) + K(0, f)\},$$

где C_1 — новое постоянное, а потому

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} S(r, 0) \leq C_1 \{f^*(0) + K(0, f)\}. \quad (8.20)$$

Но левая часть неравенства (8.20) не изменится, если мы заменим $f(x)$ новой функцией $f_1(x)$, совпадающей с $f(x)$ на произвольном интервале $(-\Delta, \Delta)$ и $f_1(x) = 0$ для $|x| > \Delta$. Поэтому

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} S(r, 0) \leq C_1 \{f_1^*(0) + K(0, f_1)\}.$$

Из определения $f^*(0)$ и $K(0, f)$ и из условия (8.8) следует, что если $\Delta \rightarrow 0$, то $f_1^*(0)$ и $K(0, f_1)$ могут быть сделаны как угодно малыми*). Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 1} S(r, 0) = 0,$$

а значит, в силу неотрицательности $S(r, x)$ лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. Если последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{v=0}^{\infty} a_v r^v = 0,$$

то

$$\sum_{v=0}^n a_v = o(n)$$

(см. теорему Харди и Литтльвуда в § 12 Добавлений).

Л е м м а 6. Если функция $f(x)$ и точка x_0 удовлетворяют условиям леммы 4, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m^2(x_0, f) = 0.$$

Это мгновенно следует из лемм 4 и 5.

Л е м м а 7. Если $f(x) \in L$, $f(x) \geq 0$ и $f(x) = 0$ на E , $mE > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое совершенное $P \subset E$, что

$$a) \quad mP > mE - \varepsilon,$$

$$б) \quad \int_{-h}^k f(x+u) du \leq M(k+h), x \in P \quad (k \text{ и } h \text{ любые положительные}),$$

$$в) \quad \int_{\delta_n} f(u) du \leq M \delta_n,$$

где δ_n — смежные к P интервалы, а M постоянное.

Так как во всякой лебеговской точке, принадлежащей E , имеем для $f(x)$

$$\int_{-h}^k |f(x+u) - f(x)| du = \int_{-h}^k f(x+u) du = o(h+k),$$

то при n достаточно большом во всяком случае будет

$$\int_{-h}^k f(x+u) du \leq h+k, \quad \text{если} \quad h \leq \frac{1}{n}, \quad k \leq \frac{1}{n}. \quad (8.21)$$

Обозначая через E_n множество точек, где выполнено (8.21), видим, что $m(E - E_{n_0}) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$, если n_0 достаточно велико. Пусть P — совершенное множество, $P \subset E_{n_0}$ и $m(E_{n_0} - P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что оно удовлетворяет всем условиям леммы, если принять

$$M = n_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + 1.$$

*) Надо положить $P_1 = P[-\Delta, \Delta] + [-\pi, -\Delta] + [\Delta, \pi]$ и построить $\Phi_1(x)$ для $f_1(x)$ так, как $\Phi(x)$ строилась для $f(x)$; тогда будем иметь $\Phi_1(x) = 0$ вне $(-\Delta, \Delta)$, откуда $K(0, f_1) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Действительно, условие а), касающееся меры, выполнено. Далее, если $x \in P$, то $x \in E_{n_0}$, а потому, если $h \leq \frac{1}{n_0}$ и $k \leq \frac{1}{n_0}$, то б) следует из (8.21), так как $M > 1$. Допустим, что $k > \frac{1}{n_0}$, а $h = 0$, тогда

$$\int_0^k f(x+u) du \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du < \frac{M}{n_0} < Mk.$$

Так же устанавливается, что если $h > \frac{1}{n_0}$, то $\int_{-h}^0 f(x+u) du \leq Mh$. Итак, б) справедливо. Условие в) сразу следует из б), если положить $h = 0$, $k = \delta_n$ и $x = \alpha_n$, где $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Лемма 7 доказана.

Переходим, наконец, к доказательству теоремы. Прежде всего, не нарушая общности, можно принять $f(x) \geq 0$. Пусть $E_n = \{f(x) \leq n\}$. Положим $f(x) = f_n(x) + R_n(x)$, где $f_n(x) = f(x)$ на E_n и $f_n(x) = 0$ вне E_n , т. е. $f_n(x)$ ограничена. Но для ограниченных функций доказываемая теорема верна, так как мы установили в § 7 ее справедливость для $f(x) \in L^p$ при $p > 1$. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N [S_m(x, f_n) - f_n(x)]^2 = 0 \quad (8.22)$$

почти всюду.

Теперь в силу леммы 7, поскольку $R_n(x) = 0$ на E_n , $R_n(x) \geq 0$ и $R_n(x) \in L$, можно найти такое совершенное $P_n \subset E_n$, $m(E_n - P_n) < \frac{1}{n}$, что

$$\begin{aligned} \int_{-h}^k R_n(x+u) du &\leq M(k+h), \quad x \in P, \\ \int_{\delta_p} R_n(u) du &\leq M\delta_p, \end{aligned}$$

где $\{\delta_p\}$ — смежные к P_n интервалы, а M постоянная. Тогда для функции $\frac{R_n(x)}{M} = \Psi(x)$ удовлетворены условия леммы 4, а стало быть, и условия леммы 6, а потому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N S_m^2(x, \Psi) = 0$$

почти всюду на P_n , а значит, и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N S_m^2(x, R_n) = 0$$

почти всюду на P_n .

Так как $R_n(x) = 0$ на P_n , то это можно переписать и так:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N [S_m(x, R_n) - R_n(x)]^2 = 0 \quad (8.23)$$

почти всюду на P_n .

Из (8.22) и (8.23) сразу следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N [S_m(x, f) - f(x)]^2 = 0 \quad (8.24)$$

почти всюду на P_n . Но так как $mP_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$, то (8.23) имеет место почти всюду и это заканчивает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е. Для любой $f(x) \in L$ ряд $\sigma(f)$ сильно суммируется к $f(x)$ почти всюду.

Действительно, в § 6 мы назвали ряд сильно суммируемым к $f(x)$ в точке x , если

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x) - f(x)| = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это то же, что суммируемость $(H, 1)$. Далее было доказано, что если $k_1 < k_2$, то суммируемость (H, k_2) влечет суммируемость (H, k_1) . Значит, теорема Марцинкевича о суммируемости $(H, 2)$ влечет суммируемость $(H, 1)$, а это и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Некоторые авторы следующим образом обобщали понятие о сильной суммируемости: вместо всей последовательности частных сумм $S_n(x)$ они рассматривали некоторую ее подпоследовательность $S_{p_m}(x)$ и изучали условия, накладываемые на последовательность и на функцию, при которых почти всюду

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |S_{p_m}(x) - f(x)|^k = o(1) \quad (8.25)$$

для $k = 1$ или для $k \geq 1$. Не имея возможности перечислить все полученные здесь результаты, отметим некоторые из них. Например, Сунуоти (Sunouchi^[11]) доказал, что условие (8.25) выполнено для любой $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) и при любом $k \geq 1$, если p_m — возрастающая последовательность целых чисел, таких, что $\frac{p_m}{m} = O(p_{m+1} - p_m)$ (в частности, это верно, если $p_m = m^r$, где $r \geq 1$ любое). Салем (Salem^[15]) показал, что если p_m растет слишком быстро (например, если $\frac{\ln p_m}{\sqrt{p_m}} \rightarrow \infty$), то можно найти даже непрерывную $f(x)$, для которой (8.25) уже не имеет места. С другой стороны, он показал, что для выполнения соотношения (8.25) необходима известная регулярность последовательности p_m . Напротив, Цутикура (Tsuchikura^[11]), предполагая, правда, $f(x)$ не только непрерывной, но и с модулем непрерывности $\omega(\delta) = o\left(\frac{1}{\ln \ln \frac{1}{\delta}}\right)$, показал, что при $k = 1$ соотношение (8.25) имеет место для произвольной последовательности p_m .

§ 9. Суммируемость (H, k) с переменным показателем

Мы установили в § 7, что если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то для любого k в точке x_0 , где $f(x)$ непрерывна,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x_0, f) - f(x_0)|^k = o(1). \quad (9.1)$$

Поскольку каждая из разностей $S_m(x_0, f) - f(x_0)$ вовсе не должна быть малой и даже $S_n(x_0, f)$ не обязана стремиться к $f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$, наличие

соотношения (9.1) означает, что все же количество тех членов суммы, которые велики, мало сравнительно с n . Ясно, что чем больше k , тем сильнее утверждение, которое мы можем вывести относительно поведения разностей $S_n(x_0, f) - f(x_0)$. Поэтому возникает такой вопрос: нельзя ли найти такую функцию $k(n)$, что $k(n) \rightarrow \infty$, но все же соотношение (9.1) имеет место при замене k через $k(n)$.

Этот вопрос, как указывает Туран (Turán^[2]), был поставлен Грюнвальдом, но Туран разрешил его в отрицательном смысле даже для всюду непрерывных функций. Именно он доказал теорему:

Т е о р е м а. Если $k(n) \uparrow \infty$ как угодно медленно, то можно построить всюду непрерывную функцию $f(x)$ такую, что для некоторого x_0 формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x_0, f) - f(x_0)|^{k(n)} = 0 \quad (9.2)$$

уже не имеет места.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим два случая.

С л у ч а й I. Существует последовательность положительных чисел

$$2^{2^7} < n_1 < n_2 < \dots < n_v < \dots \quad (9.3)$$

такая, что

$$k(n_v) > \frac{\ln n_v}{\sqrt{\ln \ln n_v}}. \quad (9.4)$$

Мы рассмотрим функцию $f(x)$, встречающуюся в фейеровском примере ряда Фурье от непрерывной функции расходящегося в одной точке, именно

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} Q(x, 2^{j^3}), \quad (9.5)$$

где

$$Q(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \frac{\cos(2n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 3nx}{n}. \quad (9.6)$$

Когда n_v задано, мы сначала находим целое число r так, чтобы

$$2^{r^3} \leq n_v < 2^{(r+1)^3}. \quad (9.7)$$

В силу (9.3) имеем $r \geq 3$.

Положим $x_0 = 0$ и рассмотрим частную сумму ряда (9.5) с номером $2 \cdot 2^{(r-1)^3}$ в этой точке. Поскольку $Q(0, n) = 0$ при любом n , имеем в силу (9.7)

$$\begin{aligned} S_{2 \cdot 2^{(r-1)^3}}(0, f_0) &= \left[\frac{1}{2^{(r-1)^3}} + \frac{1}{2^{(r-1)^3} - 1} + \dots + \frac{1}{1} \right] \frac{1}{(r-1)^2} > \\ &> \frac{\ln 2^{(r-1)^3}}{(r-1)^2} = (r-1) \ln 2 \geq \frac{r+1}{2} \ln 2 > C (\ln n_v)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

где $C = \frac{1}{2} (\ln 2)^{\frac{2}{3}}$.

Но $f_0(0) = 0$, поэтому

$$\sum_{m=0}^{n_v} |S_m(0, f_0) - f_0(0)|^{k(n_v)} \geq |S_{2 \cdot 2^{(r-1)^3}}(0, f_0)|^{k(n_v)} \geq C^{k(n_v)} (\ln n_v)^{\frac{k(n_v)}{3}}. \quad (9.8)$$

Хотя $C < 1$, но при ν достаточно большом $C (\ln n_\nu)^{\frac{1}{3}} > (\ln n_\nu)^{\frac{1}{4}}$, а потому правая часть неравенства (9.8) превосходит

$$(\ln n_\nu)^{\frac{k(n_\nu)}{4}} = e^{\frac{k(n_\nu)}{4} \ln \ln n_\nu} > e^{\frac{\ln n_\nu}{4} \sqrt{\ln \ln n_\nu}} = (n_\nu)^{\frac{1}{4} \sqrt{\ln \ln n_\nu}}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n_\nu + 1} \sum_{m=0}^{n_\nu} |S_m(0, f_0) - f_0(0)|^{k(n_\nu)} \rightarrow \infty \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty,$$

а потому в случае I доказательство доведено до конца.

С л у ч а й II. Существует такое N , что

$$k(n) \leq \frac{\ln n}{\sqrt{\ln \ln n}} \quad \text{при } n \geq N. \quad (9.9)$$

В этом случае мы построим функцию

$$f_1(x) = \sum_{v=3}^{\infty} \frac{1}{v^2} Q(x, m_v), \quad (9.10)$$

где целые числа m_v будут подобраны позже, но во всяком случае они удовлетворяют условию

$$m_v > 3 m_{v-1}, \quad (9.11)$$

выполнение которого необходимо для того, чтобы в двух разных тригонометрических полиномах, встречающихся в ряде (9.10), не было косинусов с одинаковыми множителями при x .

Здесь снова $f_1(x)$ всюду непрерывна и $f_1(0) = 0$. Полагая

$$U_{2m_v} = \sum_{j=0}^{2m_v} |S_j(0, f_1) - f_1(0)|^{k(2m_v)},$$

имеем

$$U_{2m_v} = \sum_{j=0}^{2m_v} |S_j(0, f_1)|^{k(2m_v)} \geq \sum_{m_v \leq j \leq 2m_v-1} |S_j(0, f_1)|^{k(2m_v)}.$$

Но если $m_v \leq j \leq 2m_v - 1$, то

$$S_j(0, f_1) = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_v-1} + \dots + \frac{1}{2m_v-j} \right) > \frac{1}{v^2} \ln \frac{m_v}{2m_v-j},$$

а потому

$$\begin{aligned} U_{2m_v} &\geq \left(\frac{1}{v^2} \right)^{k(2m_v)} \sum_{m_v \leq j \leq 2m_v-1} \ln^{k(2m_v)} \frac{m_v}{2m_v-j} > \left(\frac{1}{v^2} \right)^{k(2m_v)} \int_{m_v}^{2m_v-1} \ln^{k(2m_v)} \frac{m_v}{2m_v-x} dx = \\ &= \left(\frac{1}{v^2} \right)^{k(2m_v)} \int_1^{m_v} \ln^{k(2m_v)} \frac{m_v}{y} dy = \left(\frac{1}{v^2} \right)^{k(2m_v)} m_v \int_0^{\ln m_v} e^{-t} t^{k(2m_v)} dt. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Из (9.9) вытекает, что при достаточно большом n

$$k(n) < \frac{\ln \frac{n}{2}}{2},$$

стало быть, при достаточно больших ν

$$\ln m_v > 2k(2m_v),$$

а тогда из (9.12) находим

$$\begin{aligned} \frac{U_{2m_v}}{m_v} &\geq \left(\frac{1}{v^2}\right)^{k(2m_v)} \int_0^{2k(2m_v)} e^{-t} t^{k(2m_v)} dt > \left(\frac{1}{v^2}\right)^{k(2m_v)} \int_{k(2m_v)}^{2k(2m_v)} e^{-t} t^{k(2m_v)} dt > \\ &> \left(\frac{1}{v^2}\right)^{k(2m_v)} [k(2m_v)]^{k(2m_v)} e^{-2k(2m_v)} k(2m_v) = \left[\frac{k(2m_v)}{v^2 e^2}\right]^{k(2m_v)} k(2m_v). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Если мы теперь предположим, что

$$k(2m_v) > 10 v^2$$

(а это всегда можно сделать, так как числа m_v в нашем распоряжении), то

$$\frac{U_{2m_v}}{2m_v} > \frac{1}{2} \left(\frac{10}{e^2}\right)^{k(2m_v)} k(2m_v) \rightarrow \infty \text{ при } v \rightarrow \infty,$$

т. е. соотношение (9.2) заведомо нарушается и доказательство закончено.

§ 10. Об одном видоизменении понятия сильной суммируемости

Мы условились говорить (см. § 6), что ряд $\sigma(f)$ сильно суммируем к $f(x)$ в точке x , если

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |S_m(x, f) - f(x)| = o(1). \quad (10.1)$$

Было доказано (см. § 8), что для всякой $f(x) \in L$ условие (10.1) выполнено почти всюду.

Допустим теперь, что вместо (10.1) мы введем новое условие

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_m(x, f) - f(x)|}{m} < +\infty. \quad (10.2)$$

Ясно, что требование (10.2) более сильное, чем (10.1)*).

*) Действительно, пусть $\varepsilon_m \geq 0$ ($m = 0, 1, \dots$). Покажем, что из условия (A)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m} < +\infty \quad (A)$$

вытекает (B)

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m = o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (B)$$

но из (B), вообще говоря, (A) не следует.

Для удобства будем сравнивать (A) с (B')

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (B')$$

так как ясно, что (B) и (B') эквивалентны. Положим

$$S_n = \sum_{m=1}^n \frac{\varepsilon_m}{m}.$$

Тогда $S_n \rightarrow S < +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ в силу (A). Имеем

$$\varepsilon_1 = S_1 \text{ и } \frac{\varepsilon_m}{m} = S_m - S_{m-1} \text{ для } m \geq 2.$$

Возникает вопрос, при каких условиях, наложенных на $f(x)$, условие (10.2) имеет место? Этим вопросом занимался ряд авторов, но мы здесь укажем только один результат, принадлежащий П. Л. Ульянову, который нам кажется чрезвычайно интересным. Именно Ульянов доказал, что даже для непрерывной функции с равномерно сходящимся рядом Фурье не только ряд в левой части (10.2), но и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m(x, f) - f(x)}{m} \quad (10.3)$$

может оказаться расходящимся в каждой точке (хотя на сходимость (10.3) могла бы оказать влияние интерференция положительных и отрицательных членов ряда).

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, отметим, что Ульянов^[1] доказал*) существование таких непрерывных функций $f(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье, для которых ни в какой точке x не существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt. \quad (10.4)$$

Теперь для получения нужного утверждения надо связать существование предела (10.4) и сходимость ряда (10.3). Этот вопрос интересен сам по себе, и мы дадим здесь доказательство следующей теоремы (см. Зигмунд^[10, 61], стр. 67—68):

Т е о р е м а. Пусть $f(x) \in L$,

$$S_n^*(x) = S_n(x) - \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{2}, \quad (10.5)$$

и x_0 — точка Лебега для $f(x)$. Тогда необходимым и достаточным условием сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k^*(x_0) - f(x_0)}{k} \quad (10.6)$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^n \varepsilon_m = \sum_{m=1}^n \frac{\varepsilon_m}{m} m.$$

Откуда

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varepsilon_m = \frac{n+1}{n} \left[S_n - \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n+1} \right] \rightarrow 0,$$

потому что из $S_n \rightarrow S$ следует

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n+1} \rightarrow S.$$

Итак, из (А) следует (В'), а значит и (В). Но из (В) может не следовать (А), например

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Действительно, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, значит и $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \rightarrow 0$, а между тем

$$\sum \frac{1}{n \ln(n+1)} = +\infty.$$

*) Ранее Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[12]) построили пример непрерывной функции, для которой (10.4) не существует почти всюду, но ряд Фурье равномерно сходится. Метод Ульянова совсем другой, и у него предел (10.4) не существует уже всюду.

является существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t} dt. \quad (10.7)$$

Доказательство. Мы знаем (см. глава I, § 32), что

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

следовательно,

$$S_k^*(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin kt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (10.8)$$

Так как выполнение (10.7) эквивалентно существованию предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt, \quad (10.9)$$

то мы в дальнейшем можем доказывать теорему, заменяя интеграл в (10.7) через интеграл из (10.9). Имеем, полагая

$$A_n(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{S_k^*(x_0) - f(x_0)}{k}$$

и пользуясь (10.8),

$$\begin{aligned} A_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \int_0^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)] \frac{\sin kt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} dt. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Известно, что на $0 < x < 2\pi$ имеем

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k}$$

(см. глава I, § 41). Положим

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

и

$$r_n(x) = \frac{\pi - x}{2} - U_n(x).$$

Ясно, что

$$|U_n(x)| \leq nx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (10.11)$$

и так как

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (10.12)$$

то

$$|r_n(x)| < \frac{C}{nx} \quad \text{для} \quad 0 < x \leq \pi, \quad (10.13)$$

где C — постоянное (см. глава I, § 41 и Вводный материал, § 1).

Теперь, обозначая для краткости

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0),$$

из (10.10) получаем

$$\begin{aligned} A_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} u_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} u_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} u_n(t) dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (10.14)$$

В силу (10.11)

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi} n \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\varphi(t)| dt = o(1), \quad (10.15)$$

так как x_0 — точка Лебега, значит

$$\int_0^h |\varphi(t)| dt = o(h).$$

Далее

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \left[\frac{\pi - t}{2} - r_n(t) \right] dt. \quad (10.16)$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} r_n(t) dt = o(1). \quad (10.17)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое δ , что

$$\int_0^h |\varphi(t)| dt < \varepsilon |h| \quad \text{при} \quad |h| \leq \delta \quad (10.18)$$

(в силу того, что x_0 — точка Лебега для $f(x)$). С другой стороны, при любом $\delta > 0$ на отрезке $[\delta, \pi]$ функции $r_n(x)$ равномерно стремятся к нулю, и поэтому найдется такое n_1 , что

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} r_n(t) dt \right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geq n_1. \quad (10.19)$$

Теперь, пользуясь (10.13) и (10.18), после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} r_n(t) dt &\leq \frac{C}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \frac{C}{n} \left[\frac{\Phi(t)}{t^2} \right]_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} + 2 \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \leq \\ &\leq \frac{C}{n} \left[\frac{\Phi(\delta)}{\delta^2} + 2 \varepsilon \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \right] \leq \frac{C}{n} \left[\frac{\Phi(\delta)}{\delta^2} + 2 \frac{\varepsilon}{\pi} n \right] \leq C \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \geq n_2$.

Отсюда и из (10.19) вытекает справедливость (10.17).
Теперь из (10.14) — (10.17) следует

$$A_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \frac{\pi-t}{2} dt + o(1) \quad (10.20)$$

при $n \rightarrow \infty$. Но предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \frac{t}{2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \frac{t}{2} dt$$

всегда существует. Поэтому из (10.20) следует, что сходимость ряда (10.6) эквивалентна существованию предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (10.21)$$

Остается перейти от интеграла (10.21) к интегралу (10.9). Но для любого h можно найти такое n , что $\frac{\pi}{n+1} \leq h < \frac{\pi}{n}$, а так как

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)|}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt &\leq \\ &\leq \frac{n+1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} |f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)| dt = o(1), \end{aligned}$$

то теорема полностью доказана.

Из нее сразу получаем следствия:

С л е д с т в и е 1*). Если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) и x_0 — ее точка Лебега, то существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t} dt \quad (10.22)$$

эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x_0, f) - f(x_0)}{k}. \quad (10.23)$$

В силу предыдущей теоремы достаточно убедиться, что в точке x_0 сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x, f) - S_k^*(x, f)}{k}. \quad (10.24)$$

*) Следствия 1 и 2, а также замечания 1 и 2 принадлежат П. Л. Ульянову.

Но он даже сходится абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$, так как в силу самого определения $S_k^*(x, f)$ имеем

$$|S_k^*(x, f) - S_k(x, f)| = \frac{1}{2} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq \frac{1}{2} (|a_k| + |b_k|)$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|S_k^*(x, f) - S_k(x, f)|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k}, \quad (10.25)$$

а этот ряд сходится, если a_k и b_k — коэффициенты Фурье от $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) (см. главу II, § 4, следствие теоремы Хаусдорфа—Юнга).

Итак, следствие 1 доказано. Замечая, что для непрерывной $f(x)$ всякая точка является точкой Лебега, отсюда выводим

С л е д с т в и е 2. Если $f(x)$ непрерывна, то в любой точке x существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt$$

эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x, f) - f(x)}{k}.$$

Но, как мы уже говорили, Ульянов доказал существование непрерывных $f(x)$, для которых предел (10.22) не существует ни в какой точке, хотя ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно. Итак:

Существует непрерывная $f(x)$ с равномерно сходящимся рядом Фурье, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x, f) - f(x)}{k}$$

расходится в каждой точке.

Этот факт указывает на то, что хотя у такой функции разности $S_k(x, f) - f(x)$ равномерно стремятся к нулю, но они стремятся к нулю чрезвычайно медленно, и даже возможная интерференция положительных и отрицательных значений этих разностей не приводит к сходимости ряда (10.23).

З а м е ч а н и е 1. В главе VIII, § 11 будет доказано, что если $f \in L$ и $\bar{f} \in L$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} < +\infty.$$

Поэтому сразу видим, что в следствии 1 можно гипотезу $f(x) \in L^p$ заменить менее ограничительным требованием $f(x) \in L$ и $\bar{f}(x) \in L$.

З а м е ч а н и е 2. Так как для любой $f \in L$ у ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k}$$

коэффициенты имеют порядок $o\left(\frac{1}{k}\right)$, то он сходится почти всюду по теореме Фату. Отсюда следует, что ряд (10.24) сходится почти всюду. Но тогда ясно, что для любой $f(x) \in L$ для почти всех x существование предела (10.22) эквивалентно сходимости ряда (10.23).

§ 11. Усиленная сходимость функционального ряда

Пусть

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots \quad (11.1)$$

есть ряд из измеримых функций.

О п р е д е л е н и е. Назовем ряд (11.1) *усиленно сходящимся к числу S в точке x_0* , если он сходится к S в этой точке и если существует последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ такая, что для некоторого $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}$,

$$\delta \leq n \alpha_n \leq 1 - \delta \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и последовательность

$$S_n(x_0 + \alpha_m) \rightarrow S \quad \text{при } n \rightarrow \infty, m \geq n,$$

где $S_n(x)$ — частные суммы ряда (11.1).

Целесообразность введенного определения станет ясной, если мы докажем теорему:

Т е о р е м а. Если ряд из измеримых функций сходится на множестве E , $mE > 0$, то он усиленно сходится почти всюду на E .

Пусть $\eta > 0$ задано. Найдем по теореме Егорова такое совершенное P , $mP > mE - \eta$, где ряд сходится равномерно. Кроме того, по теореме Лузина о C -свойстве можно считать P выбранным так, что все члены ряда являются непрерывными функциями на P . Значит, его сумма $S(x)$ непрерывна на P . Пусть x_0 — точка плотности для P . Возьмем любое $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}$, и по лемме § 13 Добавлений найдем такие α_n , что

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \delta \leq n \alpha_n \leq 1 - \delta & \quad \text{для } n \geq n_0, \\ x_0 + \alpha_n \in P, \quad x_0 - \alpha_n \in P. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу равномерной сходимости ряда на P можно взять n_1 столь большим, что

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad x \in P, \quad n \geq n_1. \quad (11.3)$$

Наконец, в силу непрерывности $S(x)$ на P можно взять n_2 столь большим, что

$$|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in P, \quad x+h \in P, \quad |h| \leq \frac{1}{n_2}. \quad (11.4)$$

Если обозначить через N число, превосходящее n_0, n_1 и n_2 , то для $n \geq N$ все условия (11.2), (11.3) и (11.4) будут выполнены.

Тогда при $n \geq N$ и $m \geq n$ имеем

$$|S_n(x_0 + \alpha_m) - S(x_0 + \alpha_m)| < \varepsilon,$$

$$|S(x_0 + \alpha_m) - S(x_0)| < \varepsilon,$$

откуда

$$|S_n(x_0 + \alpha_m) - S(x_0)| < 2\varepsilon,$$

а это значит, что

$$S_n(x_0 + \alpha_m) \rightarrow S(x_0) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } m \geq n.$$

Так как x_0 была любой точкой плотности для P , то во всякой точке плотности для P ряд усиленно сходится, т. е. это имеет место почти всюду на P .

Но $mP > mE - \eta$, где η произвольно мало. Отсюда ясно, что ряд усиленно сходится почти всюду на E .

Из доказанной теоремы немедленно получаем

С л е д с т в и е. Если тригонометрический ряд сходится на множестве E , $mE > 0$, то он усиленно сходится почти всюду на E .

Эта теорема будет нам очень полезна в главе VIII при изучении вопроса о сходимости ряда, сопряженного к данному.

Предварительно нам понадобится изучить условия, при которых тригонометрический ряд усиленно сходится в индивидуальной точке. Этим мы займемся в § 12 настоящей главы.

§ 12. Усиленная сходимость тригонометрических рядов

Начнем с доказательства следующей леммы*):

Л е м м а 1. Пусть $v(x)$ — функция с ограниченным изменением на $(-A, A)$ и непрерывная при $x = 0$. Пусть $\{h_m\}$ — последовательность чисел таких, что

$$|h_m| \leq \frac{A}{m} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (12.1)$$

Пусть $\alpha \geq 0$ любое, а числа u_{km} удовлетворяют условию

$$|u_{km}| \leq C_k \quad (m = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots). \quad (12.2)$$

Если, полагая

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n u_{km},$$

имеем

$$S_n^{(m)} = o(n^\alpha) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } m \geq n, \quad (12.3)$$

то для

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n u_{km} v(kh_m) \quad (m \geq n)$$

имеем

$$T_n^{(m)} = o(n^\alpha), \quad n \rightarrow \infty; m \geq n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделав преобразование Абеля, найдем

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(m)} \{v(kh_m) - v[(k+1)h_m]\} + S_n^{(m)} v(nh_m) = T'_n + T''_n$$

(значок m мы для краткости опускаем).

Так как $n \leq m$, то $|nh_m| \leq |mh_m| \leq A$, а на $(-A, A)$ функция $v(x)$ с ограниченным изменением, значит и давно ограничена; кроме того, на основании (12.3) $S_n^{(m)} = o(n^\alpha)$, поэтому

$$T''_n = o(n^\alpha). \quad (12.4)$$

Далее, на основании (12.3) можно найти такое N , что

$$|S_n^{(m)}| \leq \varepsilon n^\alpha \quad \text{для } n \geq N \text{ и } m \geq n. \quad (12.5)$$

Имеем

$$T'_n = \sum_{k=1}^N + \sum_{N+1}^{n-1} = T'''_n + T_n^{\text{IV}}.$$

*) Эта лемма и ряд дальнейших теорем доказаны Марцинкевичем и Зигмундом Marcinkiewicz and Zygmund [2]).

В силу (12.5)

$$\begin{aligned} |T_n^{IV}| &= \left| \sum_{N+1}^{n-1} S_k^{(m)} \{v(kh_m) - v[(k+1)h_m]\} \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{N+1}^{n-1} k^a |v(kh_m) - v[(k+1)h_m]| \leq \varepsilon n^a \operatorname{var}_{(-A, A)} v(x), \end{aligned}$$

так как $|mh_m| \leq A$, а потому все аргументы у $v(x)$ не выходят из отрезка $(-A, A)$.

Отсюда

$$|T_n^{IV}| \leq C \varepsilon n^a,$$

где C — постоянное, и остается оценить $T_n^{'''}$.

Докажем, что числа $\frac{S_n^{(m)}}{n^a}$ ограничены в совокупности. Действительно, можно найти такое n_0 , что

$$\left| \frac{S_n^{(m)}}{n^a} \right| \leq 1 \quad \text{для } n \geq n_0$$

в силу (12.5). Если же $n < n_0$, то можно написать в силу (12.2)

$$\left| \frac{S_n^{(m)}}{n^a} \right| \leq |S_n^{(m)}| \leq \sum_{k=1}^n |u_{km}| \leq \sum_{k=1}^n C_k < \sum_{k=1}^{n_0} C_k = C.$$

Выбрав $K = \max(1, C)$, видим, что

$$|S_n^{(m)}| \leq K n^a \quad \text{для всех } n \text{ и } m \geq n.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\begin{aligned} |T_n^{'''}| &= \left| \sum_{k=1}^N S_k^{(m)} \{v(kh_m) - v[(k+1)h_m]\} \right| \leq \\ &\leq K \sum_{k=1}^N k^a |v(kh_m) - v[(k+1)h_m]| \leq K N^a \sum_{k=1}^N |v(kh_m) - v[(k+1)h_m]|. \end{aligned}$$

Так как $v(x)$ по условию непрерывна при $x = 0$, то можно выбрать η так, чтобы

$$|v(x) - v(0)| < \frac{\varepsilon}{N+1} \quad \text{при } |x| < \eta.$$

Тогда для всех n , для которых

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\eta}{A(N+1)},$$

имеем при $m \geq n$

$$(N+1)|h_m| \leq (N+1) \frac{A}{m} \leq \eta,$$

а потому все аргументы у $v(x)$ в последней сумме заключены между $-\eta$ и η , т. е. каждый член этой суммы не превосходит $\frac{2\varepsilon}{N+1}$, а значит вся сумма не превосходит 2ε . Отсюда

$$|T_n^{''}| < 2\varepsilon K N^a = o(n^a),$$

и доказательство закончено.

С л е д с т в и е. Полагая $u_{km} = u'_k$ для всех m и требуя, чтобы

$$S'_n = \sum_{k=1}^n u'_k$$

удовлетворяло условию

$$S'_n = o(n^a),$$

получаем для

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=1}^n u'_k v(kh_m)$$

(при тех же условиях на $v(x)$ и $\{h_m\}$)

$$T_n^{(m)} = o(n^a) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad m \geq n.$$

Мы имеем теперь возможность изучить усиленную сходимость тригонометрических рядов в индивидуальной точке. Здесь представляется целесообразным рассмотреть отдельно ряды из косинусов и ряды из синусов. Сначала докажем две леммы:

Л е м м а 2. Для того чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (12.6)$$

усиленно сходилась к S при $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (12.7)$$

сходилась к S .

Не нарушая общности, можно считать $S = 0$, так как можно было бы рассмотреть ряд со свободным членом $\frac{a_0}{2} - S$.

Обозначим через S_n^* частную сумму ряда $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k$. Если мы предположим, что он сходится к нулю, то

$$S_n^* = o(1).$$

Но $\cos x$ есть функция с ограниченным изменением на любом интервале и непрерывная при $x = 0$. Поэтому, применяя лемму 1 для случая $a = 0$ к сумме

$$S_n(h_m) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kh_m,$$

где

$$\delta \leq m |h_m| \leq 1 - \delta,$$

видим, что

$$S_n(h_m) = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \geq n,$$

а это и значит, что ряд (12.6) усиленно сходится к 0 в точке 0. Итак, сходимость (12.7) влечет усиленную сходимость (12.6) при $x = 0$.

Обратное очевидно из определения усиленной сходимости. Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что если только предполагать

$$h_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то все же получим

$$S_n(h_m) = o(1),$$

а потому из

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

следует

$$S_n(h_m) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k h_m \rightarrow S$$

при $h_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Это нам пригодится позже.

Л е м м а 3. Для того чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

усиленно сходилась при $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{nb_n\}$ суммировалась к 0 методом (C, 1).

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Положим

$$c_n = nb_n \quad \text{и} \quad \gamma_n = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Из $\gamma_n = o(1)$ следует

$$S_n^* = c_1 + c_2 + \dots + c_n = o(n).$$

Нам надо доказать, что для

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

имеем

$$S_n(h_m) = o(1) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad m \geq n,$$

если $\{h_m\}$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\delta \leq nh_n \leq 1 - \delta. \quad (12.8)$$

Мы имеем

$$S_n(h_m) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kh_m = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k} \sin kh_m = h_m \sum_{k=1}^n c_k \frac{\sin kh_m}{kh_m}.$$

Но $\frac{\sin t}{t}$ есть функция с ограниченным изменением на любом отрезке и непрерывная при $t = 0$. Поэтому, полагая в лемме 1 $\alpha = 1$, $v(x) = \frac{\sin x}{x}$ и $u_k = c_k$, найдем

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{\sin kh_m}{kh_m} = o(n).$$

Так как $h_m = O\left(\frac{1}{m}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $m \geq n$, то

$$S_n(h_m) = O\left(\frac{1}{n}\right) o(n) = o(1).$$

Так как, кроме того, рассматриваемый ряд сходится к нулю при $x = 0$, то мы видим, что он усиленно сходится к нулю при $x = 0$ и достаточность условия доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства вытекает, что

$$S_n(h_n) \rightarrow 0,$$

если только $h_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, и $\{nb_n\}$ суммируемо к нулю методом (C, 1).

Условие необходимо. Нам дано, что существует последовательность $\{h_n\}$, удовлетворяющая (12.8), для которой

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kh_m \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } m \geq n.$$

Надо доказать, что $\{nb_n\}$ суммируема к 0 методом $(C, 1)$, т. е.

$$J_n = b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n = o(n).$$

Имеем

$$J_n = \frac{1}{h_n} \sum_{k=1}^n \frac{kh_n}{\sin kh_n} b_k \sin kh_n.$$

Положим $u_{kn} = b_k \sin kh_n$; тогда

$$|u_{kn}| \leq |b_k|$$

и

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^n u_{km} = \sum_{k=1}^n b_k \sin kh_m = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, m \geq n.$$

Полагая $v(x) = \frac{x}{\sin x}$, видим, что эта функция имеет ограниченное изменение на $(-1, 1)$ и непрерывна при $x = 0$. Поэтому, применяя лемму 1 (здесь $A = 1$), находим

$$\sum_{k=1}^n \frac{kh_n}{\sin kh_n} b_k \sin kh_n = \sum_{k=1}^n u_{kn} v(xh_n) = o(1).$$

Но в силу $nh_n \geq \delta$ имеем $\frac{1}{h_n} = O(n)$, а потому

$$J_n = O(n) o(1) = o(n),$$

и доказательство окончено.

Л е м м а 4. Для того чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

усиленно сходилась к числу S при $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{а) } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

$$\text{б) } \{nb_n\} \text{ суммируется к 0 методом } (C, 1).$$

Необходимость условия а) очевидна, так как усиленная сходимость ряда к S при $x = 0$ требует сходимости к S при $x = 0$; но $\sum b_n \sin nx$ всегда сходится к 0 при $x = 0$, а значит тогда $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Но по лемме 2, если а) выполнено, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

усиленно сходится к S при $x = 0$. Значит, тогда $\sum b_n \sin nx$ как разность двух рядов, усиленно сходящихся к S , сама усиленно сходится к нулю. В этом случае по лемме 3 необходимо выполняется условие б).

Итак, необходимость а) и б) доказана.

Пусть теперь оба условия а) и б) выполнены; по лемме 2 ряд из косинусов в силу а) должен усиленно сходиться к S при $x = 0$; по лемме 3 ряд из синусов должен усиленно сходиться к 0 в этой точке. Значит, их сумма усиленно сходится к S , и лемма 4 доказана.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы тригонометрический ряд*

$$-\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (12.9)$$

усиленно сходилась к $S(x_0)$ в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы он сходилась к $S(x_0)$ в этой точке и чтобы последовательность

$$\{n(b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0)\}$$

суммировалась к 0 методом $(C, 1)$.

Чтобы убедиться в этом, напомним $S_n(x_0 + h_m)$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned} S_n(x_0 + h_m) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos k(x_0 + h_m) + b_k \sin k(x_0 + h_m) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k(x_0) \cos kh_m + B_k(x_0) \sin kh_m, \end{aligned}$$

где

$$A_k(x_0) = a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0,$$

$$B_k(x_0) = b_k \cos kx_0 - a_k \sin kx_0.$$

Тогда ясно, что усиленная сходимость ряда (12.9) в x_0 к $S(x_0)$ имеет место в том и только том случае, когда усиленно сходится к $S(x_0)$ при $t = 0$ ряд

$$-\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_0) \cos kt + B_k(x_0) \sin kt, \quad (12.10)$$

потому что, обозначая через $S_n^*(t)$ частные суммы ряда (12.10), имеем очевидно

$$S_n(x_0 + h_m) = S_n^*(h_m)$$

для любых h_m .

Но по лемме 4 ряд (12.10) усиленно сходится к $S(x_0)$ при $x = 0$ в том и только том случае, когда

$$-\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_0) = S(x_0)$$

и $\{nB_n(x_0)\}$ суммируется к 0 методом $(C, 1)$.

Подставляя значения $A_n(x_0)$ и $B_n(x_0)$, мы видим, что теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 и следствия теоремы § 11 получаем важный результат:

Т е о р е м а 2. *Если тригонометрический ряд*

$$-\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится на множестве E , $mE > 0$, то почти всюду на этом множестве последовательность

$$\{n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)\}$$

суммируется к нулю методом $(C, 1)$.

Этот результат будет использован в § 23 главы VIII.

§ 13. Суммируемость $(C^*, 0)$

Определение усиленной сходимости для тригонометрического ряда принадлежит А. И. Плесснеру^[1], хотя он не употреблял этот термин, а говорил «суммируемость $(C^*, 0)$ ». Первоначально данное им определение было таким:

О п р е д е л е н и е. Тригонометрический ряд *суммируется $(C^*, 0)$ к числу S в точке x_0* , если для его частных сумм $S_n(x)$ имеем

$$S_n(x_0 + h_n) \rightarrow S \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

каждый раз, как $h_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Термин «суммируется $(C^*, 0)$ » не кажется нам удачным, потому что из определения следует, что суммируемость $(C^*, 0)$ в некоторой точке неизбежно влечет сходимость в ней (тогда как обычно «суммируют» расходящиеся ряды). Именно поэтому, если ряд не только сходится, но еще удовлетворяет более сильному условию, то нам кажется, что здесь лучше было бы говорить об усиленной сходимости.

Оставляя в стороне вопрос о терминологии, покажем, что условие, введенное нами в определение «усиленной сходимости», и условие, сформулированное сейчас под названием «суммируемость $(C^*, 0)$ », эквивалентны (этот результат принадлежит А. И. Плесснеру). Следовательно, мы должны доказать такое предложение:

Т е о р е м а. Для того чтобы тригонометрический ряд суммировался $(C^*, 0)$ к числу S в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы он усиленно сходил к S в точке x_0 .

Необходимость условия очевидна; в самом деле, пусть $\{h_n\}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\delta \leq nh_n \leq 1 - \delta. \quad (13.1)$$

Из $(C^*, 0)$ -суммируемости следует

$$S_n(x_0 + h_m) \rightarrow S \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad m \geq n,$$

потому что

$$h_m \leq \frac{1 - \delta}{m} = O\left(\frac{1}{m}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad m \geq n$$

и, значит, усиленная сходимость имеет место.

Для доказательства достаточности покажем, прежде всего, что, не нарушая общности, можно принять $x_0 = 0$. Действительно, при доказательстве теоремы § 12 мы уже видели, что усиленная сходимость ряда (12.9) в x_0 к S имеет место тогда и только тогда, когда ряд (12.10) усиленно сходится к S при $t = 0$. Это было следствием тождества

$$S_n(x_0 + h_m) = S_n^*(h_m).$$

Итак, будем рассматривать случай $x_0 = 0$. Тогда по лемме 2 усиленная сходимость влечет выполнение условий

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n = S$$

и $\{nb_n\}$ суммируемо $(C, 1)$ к нулю.

С другой стороны, из замечаний, сделанных в конце доказательств леммы 2 и леммы 3, следует, что из $h_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ и только что выписанных условий вытекает

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kh_m \rightarrow S$$

и

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kh_n \rightarrow 0,$$

а потому

$$S_n(h_n) \rightarrow S \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и доказательство закончено.

Из доказанной теоремы и из следствия теоремы § 11 сразу получаем:

Если тригонометрический ряд сходится на множестве E , $mE > 0$, то он $(C^, 0)$ -суммируем почти всюду на этом множестве.*

З а м е ч а н и е. Обозначение $(C^*, 0)$ введено А. И. Плесснером потому, что он рассматривал вообще суммирование (C^*, α) , которое находится в таком же взаимоотношении с методом (C, α) , как $(C^*, 0)$ с обычной сходимостью. Он получил для метода (C^*, α) аналогичную теорему.

Все эти результаты он применил к исследованию сходимости и суммируемости (C, α) для сопряженных рядов (см. об этом в § 23 главы VIII).

ГЛАВА VIII

СОПРЯЖЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

§ 1. Введение

Напомним, что в главе I нами уже было введено определение: мы условились для ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.1)$$

называть сопряженным такой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx, \quad (1.2)$$

и отметили, что эти ряды представляют собой действительную и чисто мнимую части степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n$$

на окружности $|z| = 1$.

Если ряд (1.1) есть ряд Фурье от некоторой функции $f(x) \in L^2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, а тогда по теореме Фишера—Рисса найдется такая $\bar{f}(x)$, для которой (1.2) будет рядом Фурье. Такую $\bar{f}(x)$ называют сопряженной с $f(x)$.

Заметим для дальнейшего, что тогда в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2},$$

т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (1.3)$$

что нам впоследствии понадобится.

Так как для ряда Фурье от произвольной суммируемой $f(x)$ сопряженный ряд уже не обязан, вообще говоря, быть рядом Фурье (примеры см. в § 30 главы I), то возникает вопрос, можно ли говорить о функции $\bar{f}(x)$, сопряженной с $f(x)$, если $f(x) \notin L^2$. Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что если $f(x) \in L^2$, то можно выразить $\bar{f}(x)$ через $f(x)$, не переходя к рассмотрению рядов Фурье (1.1) и (1.2) от этих функций. Действительно, Н. Н. Лузин

(см. [М.¹⁰], § 65) доказал, что для любой $f(x) \in L^2$ почти всюду имеет смысл интеграл

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt, \quad (1.4)$$

определяемый как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\pi$, и тогда оказывается, что

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (1.5)$$

Существование интеграла (1.4) представляет важный факт в метрической теории множеств; мы будем говорить об этом подробно в § 8. Здесь же мы, не останавливаясь на случае $f \in L^2$, отметим, что, как показал И. И. Привалов [1], интеграл (1.4) имеет смысл почти всюду для любой $f(x) \in L$.

В настоящее время принято называть *сопряженной* с $f(x)$ и обозначать через $\bar{f}(x)$ функцию, определяемую равенством (1.5) (в силу теоремы И. И. Привалова она определена почти всюду). Такое название оправдывается тем, что, как доказал В. И. Смирнов [1], если функция $f(x)$ оказывается суммируемой, то ряд (1.2) является ее рядом Фурье. Если условиться через $\bar{\sigma}(f)$ обозначать ряд, сопряженный с рядом $\sigma(f)$, то это утверждение можно записать так: если $f \in L$, то $\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f})$. Эта теорема будет доказана в § 17.

Целью настоящей главы является:

а) изучить поведение ряда $\bar{\sigma}(f)$ в некоторой точке в зависимости от поведения $f(x)$ (§§ 2—4);

б) исследовать суммируемость ряда $\bar{\sigma}(f)$ методами (С, 1) и Абеля (§§ 5 и 6);

в) доказать существование сопряженной функции для любой суммируемой (§ 7);

г) найти условие, при котором два сопряженных ряда являются рядами Фурье, и рассмотреть свойства коэффициентов таких рядов (§§ 10 и 11);

д) рассмотреть ряд случаев, когда суммируемость $f(x)$ влечет суммируемость $\bar{f}(x)$ (§§ 13—15);

е) показать, что при известном обобщении понятия интеграла сопряженный ряд $\bar{\sigma}(f)$ можно рассматривать как ряд Фурье от $\bar{f}(x)$ даже и тогда, когда $\bar{f}(x)$ несуммируема;

ж) установить, что ряды, сопряженные с рядами Фурье, ведут себя в ряде случаев как ряды Фурье (§§ 19—22);

з) рассмотреть, что можно сказать о сходимости двух сопряженных рядов, если уже не предполагать, что один из них есть ряд Фурье (§ 23).

§ 2. Сходимость в точке; признак Дини

Обозначим через $\bar{S}_n(x)$ сумму n первых членов ряда $\bar{\sigma}(f)$. Мы уже видели (см. глава I, § 31), что

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{D}_n(t-x) dt,$$

где

$$\bar{D}_n(u) = \sum_{k=1}^n \sin ku = \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

Замечая, что $\bar{D}_n(u)$ — нечетная функция, и полагая $t - x = u$, находим

$$\begin{aligned}\bar{S}_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \bar{D}_n(u) du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{u}{2}} \right) du. \quad (2.1)\end{aligned}$$

Но

$$\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\cos nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{2} \sin nu,$$

а так как

$$\int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \sin nu du = o(1)$$

и даже равномерно относительно x (в силу леммы § 31 главы I), то

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{\cos nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} \right] du + o(1), \quad (2.2)$$

где $o(1)$ также имеет место равномерно относительно x .

Если в рассматриваемой точке x функция $\bar{f}(x)$ (см. § 1) определена, т. е. интеграл

$$\int_0^\pi \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} du$$

имеет смысл (здесь, как в § 1, интеграл понимается как $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi$), то в силу (2.2)

$$\bar{S}_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \frac{\cos nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} du + o(1) \quad (2.3)$$

(существование интеграла понимается в том же смысле).

Но $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$ есть функция, непрерывная на $[0, \pi]$, а потому снова

в силу леммы § 31 главы I можно в интеграле формулы (2.3) заменить в знаменателе $2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ через u , поскольку совершаемая ошибка войдет в $o(1)$; отсюда

$$\bar{S}_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \frac{\cos nu}{u} du + o(1), \quad (2.4)$$

где снова $o(1)$ имеет место равномерно относительно x . Таким образом:
Для того чтобы $\bar{\sigma}(f)$ сходилась к $\bar{f}(x)$ в точке x , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \frac{\cos nu}{u} du \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Отсюда мы сразу получаем

Признак Дини. Если в точке x интеграл

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} \right| du \quad (2.6)$$

имеет смысл, то ряд $\bar{\sigma}(f)$ сходится к $\bar{f}(x)$ в этой точке.

Действительно, если этот интеграл имеет смысл, то, как вытекает из (2.6), $\bar{f}(x)$ существует в точке x , функция $\frac{f(x+u) - f(x-u)}{u}$ суммируема и равенство (2.5) имеет место.

В частности, если для некоторого x имеем при каком-то $\alpha > 0$ равенство $|f(x+u) - f(x-u)| = O(u^\alpha)$, то интеграл (2.6) имеет смысл.

Отсюда вытекает, что $\bar{\sigma}(f)$ сходится к $\bar{f}(x)$ во всякой точке, где $f'(x)$ существует и конечна.

Кроме того, если $f(x)$ удовлетворяет на $[0, 2\pi]$ условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то $\bar{\sigma}(f)$ сходится к $\bar{f}(x)$ всюду (можно было бы доказать, что сходимость равномерна, но это можно получить из более общих теорем; см. §§ 13, 19).

§ 3. Принцип локализации

Из формулы (2.2) следует, что сходимость или расходимость ряда, сопряженного к ряду Фурье от $f(x)$, зависит только от поведения $f(x)$ в окрестности рассматриваемой точки, так как для любого $\delta > 0$

$$\int_\delta^\pi \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} \cos nu \, du$$

заведомо стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но для ряда Фурье мы знаем, что не только сходимость или расходимость, но и величина суммы ряда зависит лишь от поведения $f(x)$ в окрестности точки; в случае рядов, сопряженных к рядам Фурье, это уже неверно. Действительно, величина $\bar{f}(x)$ определяется формулой (1.5), и, значит, она зависит уже от значений $f(x)$ не только в окрестности рассматриваемой точки*).

§ 4. Теорема Юнга

Юнг (Young [2]) доказал теорему:

Теорема Юнга. Если $f(x)$ — функция с ограниченным изменением, то необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\bar{\sigma}(f)$ в точке x является существование в этой точке функции $\bar{f}(x)$, т. е. существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\pi \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

где $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$.

*) Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают на некотором интервале (a, b) , то для любого $\varepsilon > 0$ ряды $\bar{\sigma}(f_1)$ и $\bar{\sigma}(f_2)$ в интервале $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ отличаются на ряд равномерно сходящийся, как это имеет место и для рядов Фурье, но уже нельзя утверждать, что этот ряд равномерно сходится к нулю, как это имело место для рядов Фурье.

Чтобы убедиться в этом, положим

$$\bar{f}(x, h) = -\frac{1}{\pi} \int_h^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \quad (4.1)$$

и покажем, что $\bar{S}_n(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то у нее могут быть только точки разрыва 1-го рода. В главе I, § 42 было доказано, что в точке разрыва 1-го рода ряд $\bar{\sigma}(f)$ заведомо расходится. Но в этих точках и $\bar{f}(x)$ не может существовать, так как

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}$$

расходится, а $\psi_x(t) \rightarrow f(x+0) - f(x-0)$ при $t \rightarrow 0$. Итак, остается изучить вопрос лишь для случая, когда $f(x)$ непрерывна в рассматриваемой точке x .

В силу формулы (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \bar{S}_n(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right] dt + o(1) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi_x(t) \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} [1 - \cos nt] dt + o(1) = I_1 + I_2 + o(1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$; в формуле (4.2) мы предположим n столь большим, что $\frac{\pi}{n} < \varepsilon$.

Так как $f(x)$ с ограниченным изменением и непрерывна в рассматриваемой точке x , то $\psi_x(t)$ с ограниченным изменением и непрерывна при $t = 0$, а потому можно написать $\psi_x(t) = P(t) - N(t)$, где $P(t)$ и $N(t)$ непрерывны, монотонны и $P(0) = N(0) = 0$. Выберем η столь малым, чтобы $P(t) < \varepsilon$ и $N(t) < \varepsilon$ при $0 < t < \eta$, и для оценки интеграла

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cos nt dt = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{P(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cos nt dt - \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{N(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \sin nt dt$$

разобьем каждый из двух последних интегралов на два: от $\frac{\pi}{n}$ до η и от η до π . По второй теореме о среднем

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\eta} \frac{P(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cos nt dt = P(\eta) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi} \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

где $\frac{\pi}{n} < \xi < \eta$. Но $P(\eta) < \varepsilon$ и снова по второй теореме о среднем

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi} \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right| < \left| \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi'} \cos nt dt \right| < \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2}{n} < 1.$$

Так как для $N(t)$ рассуждение аналогично, то окончательно

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\eta} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cos nt \, dt \right| < 2\varepsilon,$$

т. е. этот интеграл как угодно мал.

Но интеграл

$$\int_{\eta}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cos nt \, dt = o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$, потому что $\frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}$ есть суммируемая функция на (η, π) . Отсюда

следует, что

$$I_1 = o(1).$$

Остается оценить I_2 . Так как $\frac{\pi}{n} < \eta$, то $|\psi_x(t)| < 2\varepsilon$, а потому

$$|I_2| < \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| \frac{1 - \cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt \leq \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t} dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} n^2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} t \, dt = \frac{\varepsilon\pi}{2}.$$

Итак, мы убедились, что $\bar{S}_n(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right)$ может быть сделано как угодно малым. Но если $\bar{f}(x)$ существует, то $\bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow \bar{f}(x)$ при $n \rightarrow \infty$, значит тогда

$$\bar{S}_n(x) \rightarrow \bar{f}(x),$$

а потому ряд $\bar{\sigma}(f)$ сходится и именно к $\bar{f}(x)$ в рассматриваемой точке.

Но и наоборот, если ряд сходится, то $\bar{f}(x)$ существует и $\bar{S}_n(x) \rightarrow \bar{f}(x)$. Действительно, пусть $h > 0$ задано. Найдем такое n , что $\frac{\pi}{n+1} \leq h < \frac{\pi}{n}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \bar{f}(x, h) - \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \right| &\leq \int_h^{\frac{\pi}{n}} \left| \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt \leq \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} \right) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{h}{2}} \max_{0 < t \leq \frac{\pi}{n}} |\psi_x(t)| \leq \\ &\leq \frac{\pi}{n^2} \frac{n+1}{\pi} O(1) = O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

и, значит, из того, что $\bar{S}_n(x)$ имеет предел, следует, что $f\left(x, \frac{\pi}{n}\right)$, а вместе с ним $\bar{f}(x, h)$ имеет тот же предел, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n(x) = \bar{f}(x).$$

Теорема доказана.

§ 5. Суммируемость $(C, 1)$ ряда $\bar{\sigma}(f)$

Положим

$$\bar{\sigma}_m(x) = \bar{\sigma}_m(x, f) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \bar{S}_n(x, f)$$

и докажем следующую лемму:

Л е м м а. Если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x условию

$$\int_0^t |f(x+u) - f(x-u)| du = o(t), \quad (5.1)$$

то, полагая $f_m(x) = \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{m}\right)$, имеем

$$\bar{\sigma}_m(x) - \bar{f}_m(x) = \bar{\sigma}_m(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Так как $f_m(x) \rightarrow \bar{f}(x)$ там, где $\bar{f}(x)$ существует, то $\bar{\sigma}_m(x) \rightarrow \bar{f}(x)$ в этом случае. Но условие (5.1) выполняется в каждой точке Лебега, т. е. почти всюду (см. Вводный материал, § 15), а в § 7 будет доказано, что $\bar{f}(x)$ существует почти всюду.

В результате мы сможем утверждать, что

Ряд $\bar{\sigma}(f)$ суммируем $(C, 1)$ к $\bar{f}(x)$ почти всюду.

Переходим к доказательству леммы. С этой целью прежде всего найдем удобное выражение для ядра $\bar{K}_n(x)$, сопряженного к ядру Фейера, т. е. вычислим

$$\begin{aligned} \bar{K}_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{D}_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{(n+1) 2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) x = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{n+1} \frac{\sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

как показывает элементарный подсчет.

Итак,

$$\bar{K}_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{n+1} \frac{\sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (5.2)$$

или

$$\bar{K}_n(x) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \left[\sin x - \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right]. \quad (5.3)$$

Для дальнейшего заметим, что при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{n}$ имеем

$$\bar{K}_n(t) = O(n^2 t) \quad (5.4)$$

(это легко следует из того, что $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \geq \frac{2}{\pi}$ при $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

Обозначая, как и раньше,

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

и полагая

$$\Psi^*(t) = \int_0^t |\psi_x(u)| du, \quad (5.5)$$

имеем из формулы (5.1)

$$\Psi^*(t) = o(t). \quad (5.6)$$

На основании формулы (2.1) имеем

$$\bar{\sigma}_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \bar{S}_n(x) = -\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \bar{D}_n(t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \bar{K}_m(t) dt$$

и, следовательно, из (5.2)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m(x) - \bar{f}_m(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \psi_x(t) \bar{K}_m(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \psi_x(t) \bar{K}_m(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \frac{\psi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \psi_x(t) \bar{K}_m(t) dt + \frac{1}{4(m+1)\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \psi_x(t) \frac{\sin(m+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Но на $0 \leq t \leq \frac{\pi}{m}$ имеем (5.4) и, кроме того, на основании (5.6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} |\psi_x(t)| dt = o\left(\frac{1}{m}\right),$$

а потому

$$I_1 = O\left(m^2 \frac{\pi}{m}\right) o\left(\frac{1}{m}\right) = o(1). \quad (5.8)$$

Далее,

$$|I_2| \leq \frac{\pi}{4(m+1)} \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi |\psi_x(t)| \frac{dt}{t^2},$$

и интегрируя по частям, заключаем, что

$$|I_2| \leq \frac{\pi}{4(m+1)} \left\{ \frac{\Psi^*(\pi)}{\pi^2} + 2 \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \Psi^*(t) \frac{dt}{t^3} \right\} = o(1) + O\left(\frac{1}{m}\right) \int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \Psi^*(t) \frac{dt}{t^3}. \quad (5.9)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем δ так, чтобы $\Psi^*(t) < \varepsilon t$ для $0 \leq t \leq \delta$ (что возможно в силу (5.6)). Тогда

$$O\left(\frac{1}{m}\right) \int_{\frac{\pi}{m}}^\delta \Psi^*(t) \frac{dt}{t^3} < \varepsilon O\left(\frac{1}{m}\right) \int_{\frac{\pi}{m}}^\delta \frac{dt}{t^2} = \varepsilon O(1); \text{ а } \int_{\delta}^\pi \frac{\Psi^*(t)}{t^3} dt = O(1).$$

Так как ε как угодно мало, то отсюда ясно, что I_2 может быть сделано как угодно малым при m достаточно большом. Значит, из (5.7), (5.8) и (5.9) следует, что

$$\bar{\sigma}_m(x) - \bar{f}_m(x) = o(1),$$

и лемма доказана. Из нее, как мы уже говорили, будет следовать суммируемость $\bar{\sigma}(f)$ к $\bar{f}(x)$ почти всюду, как только само существование $\bar{f}(x)$ почти всюду будет доказано.

§ 6. Суммируемость методом Абеля—Пуассона

Собственно говоря, мы можем уже утверждать, что такая суммируемость имеет место почти всюду, так как это справедливо для метода $(C, 1)$, а метод Абеля сильнее его*). Однако нам необходимо для будущего произвести оценку разности

$$v(r, x) - \bar{f}_m(x),$$

где $\bar{f}_m(x)$ — уже употреблявшаяся в § 5 функция, а $v(r, x)$ — пуассоновская сумма для ряда $\bar{\sigma}(f)$.

Л е м м а. Если $f(x)$ удовлетворяет в точке x условию

$$\int_0^t [f(x+u) - f(x-u)] du = o(t) \quad (6.1)$$

и $\eta = \arcsin(1-r)$, то

$$v(r, x) - \bar{f}_\eta(x) = v(r, x) + \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow 1$.

Так как $v(r, x)$ означает пуассоновскую сумму для ряда, сопряженного к ряду Фурье от $f(x)$, то (см. (54.3) из главы I)

$$\begin{aligned} v(r, x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) Q(r, t) dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] Q(r, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) Q(r, t) dt, \end{aligned}$$

где

$$Q(r, t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}; \quad \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

Отсюда следует, что

$$v(r, x) - \bar{f}_\eta(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\eta \psi_x(t) Q(r, t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \psi_x(t) q(r, t) dt = J_1 + J_2, \quad (6.2)$$

где

$$q(r, t) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - Q(r, t) = \frac{\frac{1}{2}(1-r)^2 \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

) Более того, в силу теоремы § 7 Вводного материала из суммируемости $(C, 1)$ следует суммируемость A^ .

Положим

$$\Delta(r, t) = 1 - 2r \cos t + r^2 = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}, \quad (6.3)$$

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi_x(u) du.$$

Имеем, интегрируя по частям,

$$J_1 = -\frac{1}{\pi} \Psi(\eta) Q(r, \eta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \Psi(t) \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} dt. \quad (6.4)$$

Но в силу (6.3)

$$Q(r, \eta) = \frac{r \sin \eta}{\Delta(r, \eta)} = \frac{r \sin \eta}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\eta}{2}} = \frac{r \sin \eta}{\sin^2 \eta + 4r \sin^2 \frac{\eta}{2}},$$

поскольку $\eta = \arcsin(1 - r)$, откуда при $r \rightarrow 1$ имеем $\eta \rightarrow 0$ и

$$Q(r, \eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right). \quad (6.5)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = \frac{r \{(1 + r^2) \cos t - 2r\}}{\Delta^2(r, t)} = \frac{r \left\{ (1 - r)^2 \cos t - 4r \sin^2 \frac{t}{2} \right\}}{\left[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2} \right]^2}.$$

Поэтому при $0 \leq t \leq \eta$

$$\left| \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \right| \leq \frac{5(1 - r)^2}{(1 - r)^4} = \frac{5}{(1 - r)^2} = \frac{5}{\sin^2 \eta} = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \quad (6.6)$$

и так как мы предположили (см. 6.1), что

$$\Psi(t) = o(t),$$

то из (6.4), (6.5) и (6.6) получим

$$J_1 = o(\eta) O\left(\frac{1}{\eta}\right) + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right) o\left(\int_0^\eta t dt\right) = o(1).$$

Далее заметим, что

$$Q(r, \pi) = 0 \quad \text{и} \quad q(r, \pi) = 0.$$

Кроме того, $q(r, \eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right)$ и

$$\frac{\partial q(r, t)}{\partial t} = -\frac{(1 - r)^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2}}{4\Delta} - \frac{2r(1 - r)^2 \cos^2 \frac{t}{2}}{\Delta^2} = O\left(\frac{(1 - r)^2}{t^4}\right) = O\left(\frac{\eta^2}{t^4}\right),$$

а потому

$$J_2 = -\frac{1}{\pi} \Psi(\eta) q(r, \eta) - \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \Psi(t) \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} dt = o(1) + \eta^2 \int_\eta^\pi \frac{o(t)}{t^4} dt = o(1)$$

и, значит,

$$v(r, x) - \bar{f}_\eta(x) \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

Но там, где $\bar{f}(x)$ существует, имеем $\bar{f}_\eta(x) \rightarrow \bar{f}(x)$. Значит, в точке, где выполнено (6.1) и $\bar{f}(x)$ существует, ряд $\bar{\sigma}(f)$ суммируется к $\bar{f}(x)$ методом Абеля—Пуассона.

Мы знаем, что (6.1) заведомо имеет место во всякой точке Лебега, т. е. почти всюду; кроме того, в § 7 будет доказано, что $\bar{f}(x)$ существует почти всюду. Из этого можно заключить, что

Ряд $\bar{\sigma}(f)$ суммируется методом Абеля—Пуассона к $\bar{f}(x)$ почти всюду.

§ 7. Существование сопряженной функции

Докажем теперь теорему*), которая уже неоднократно была сформулирована, а именно:

Т е о р е м а Л у з и н а — П р и в а л о в а. Для любой $f(x) \in L$ почти всюду существует сопряженная функция $\bar{f}(x)$

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt.$$

Чтобы убедиться в этом, мы для удобства примем $a_0 = 0$ и аналогично предыдущему положим

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t), \\ \bar{f}_\eta(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \psi_x(t) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Нам надо доказать, что $\bar{f}_\eta(x)$ почти всюду стремится к некоторому пределу при $\eta \rightarrow 0$.

Допустим сначала, что $f(x) \in L^2$. В этом случае $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$. Но тогда существует $g(x)$, для которой $\bar{\sigma}(f)$ является рядом Фурье, т. е. $\bar{\sigma}(f) = \bar{\sigma}(g)$. Следовательно (см. § 53 главы I), ряд $\sigma(g)$ суммируется к $g(x)$ методом Абеля почти всюду, т. е.

$$v(r, x) \rightarrow g(x) \text{ почти всюду,}$$

где $v(r, x)$ — пуассоновская сумма ряда $\sigma(g)$ или $\bar{\sigma}(f)$. Но, с другой стороны, в силу леммы § 6 имеем

$$v(r, x) - \bar{f}_\eta(x) \rightarrow 0 \text{ почти всюду,}$$

где $\eta = \arcsin(1-r)$, т. е. $\eta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$. Отсюда следует, что

$$\bar{f}_\eta(x) \rightarrow g(x) \text{ почти всюду,}$$

т. е. для случая $f(x) \in L^2$ теорема доказана.

Для дальнейшего нам будет полезно напомнить, что если $f(x)$ существует, то

$$\bar{f}_\eta(x) \rightarrow \bar{f}(x).$$

Поэтому $\bar{f}(x) = g(x)$ почти всюду, т. е. для случая, когда $f(x) \in L^2$, сопряженной функцией следует назвать ту, у которой $\sigma(g) = \bar{\sigma}(f)$.

Переходим к общему случаю. Ясно, что $\lim_{\eta} \bar{f}_\eta(x)$ существует в тех и только тех случаях, когда существует $\lim_{\eta} f_\eta^*(x)$, где

$$f_\eta^*(x) = -\frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \frac{\psi(t)}{t} dt.$$

Поэтому мы будем доказывать, что $f_\eta^*(x)$ почти всюду имеет предел при $\eta \rightarrow 0$.

*) Доказательство взято из книги Hardy and Rogosinski [M.28].

Положим

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Тогда $F(x)$ — абсолютно непрерывная и периодическая, так как $F(2\pi) = F(0)$, поскольку мы предположили $a_0 = 0$. Кроме того, $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

По теореме Егорова*) существует совершенное множество P такое, что $mP > 2\pi - \varepsilon$ и

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow f(x)$$

равномерно на P . Так как $f(x)$ на P непрерывна, то

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in P.$$

Тогда

$$|F(x+h) - F(x)| \leq 2M|h|$$

при $x \in P$ и $|h| \leq h_0(\varepsilon)$.

Множество CP есть система интервалов $\{\delta_n\}$, причем $\sum \delta_n < \varepsilon$. Если точки 0 и 2π не входят в P , мы их будем считать за концы интервалов δ_n , все остальные концы принадлежат P . Если мы растянем каждый δ_n втрое, сохраняя его центр, отбросим части, выходящие за $[0, 2\pi]$, и заменим перекрывающиеся интервалы неперекрывающимися, то получим новое открытое множество, дополнение к которому есть $P^* \subset P$; ясно, что $mP^* > 2\pi - 3\varepsilon$. Так как ε произвольно, достаточно показать, что $f(x)$ существует почти всюду на P^* .

Пусть $\Phi(x)$ — непрерывная периодическая функция такая, что $\Phi(x) = F(x)$ на P , в точках 0 и 2π , и интерполируемая линейно в каждом δ_n . Тогда

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x) = f(x)$ на P и $\varphi(x) = \frac{F(b_n) - F(a_n)}{\delta_n}$ на $\delta_n = (a_n, b_n)$. Так как $\sum \delta_n < +\infty$, то $\delta_n < h_0$ для $n > N$, если N достаточно велико. Если $x \in \delta_n$ и $n > N$, то $0 < x - a_n < h_0$ и $0 < a_n < 2\pi$, поэтому

$$|F(x) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n,$$

отсюда и $|F(b_n) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n$. Следовательно, $\varphi(x)$ ограничена, а тогда, по уже доказанному, $\varphi(x)$ существует почти всюду.

*) Теорема Егорова формулируется для последовательности измеримых функций и, как показал Г. П. Толстов^[4], может даже оказаться неверна, если речь идет о пределе $\lim_{y \rightarrow 0} F(x, y) = f(x)$.

Однако Г. П. Толстов показал, что если $F(x, y)$ измерима по Борелю по совокупности переменных и $F(x, y) \rightarrow f(x)$ при $y \rightarrow 0$ и $x \in E$, $mE > 0$, то можно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое ε , $m\varepsilon > mE - \varepsilon$, где $F(x, y) \rightarrow f(x)$ равномерно при $y \rightarrow 0$. В нашем случае мы и можем пользоваться этим результатом, поскольку $F(x)$ непрерывна и, значит, отношение

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

есть измеримая по Борелю функция по совокупности переменных x и h .

Полагая

$$R(x) = F(x) - \Phi(x) = \int_0^x [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_0^x r(x) dx,$$

мы будем доказывать, что $\bar{r}(x)$ существует, т. е. что r_η стремится к пределу почти всюду на P^* , а тогда все будет доказано.

Ясно, что $R(x)$ непрерывная, периодическая, $R(0) = R(2\pi) = 0$ и $R(x) = 0$ на P ; существует такое $C = C(\varepsilon)$, что

$$|R(x)| \leq C \text{ для всех } x.$$

Кроме того, если $x \in \delta_n$ и $n > N$, то

$$|\Phi(x) - \Phi(a_n)| = \left| \frac{x - a_n}{\delta_n} [F(b_n) - F(a_n)] \right| \leq |F(b_n) - F(a_n)| \leq 2M\delta_n,$$

значит,

$$|R(x)| = |R(x) - R(a_n)| \leq |F(x) - F(a_n)| + |\Phi(x) - \Phi(a_n)| \leq 4M\delta_n.$$

Допустим теперь, что $x \in P^*$. Тогда

$$\begin{aligned} r_\eta^*(x) &= \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \frac{r(x+t) - r(x-t)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{R(x+t) + R(x-t)}{t} \right]_\eta^\pi + \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \frac{R(x+t) + R(x-t)}{t^2} dt = u_\eta + v_\eta. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{R(x \pm \eta)}{\eta} = \frac{R(x \pm \eta) - R(x)}{\eta} \rightarrow \pm r(x) \text{ почти всюду,}$$

то u_η почти всюду на P^* стремится к пределу.

Наконец, остается доказать, что v_η стремится к пределу почти всюду на P^* , но это безусловно будет иметь место, если

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{|R(x \pm t)|}{t^2} dt < +\infty$$

почти всюду на P^* . Проведем доказательство для $x + t$. Имеем

$$\int_{P^*} I(x) dx = \int_{P^*} dx \int_x^{\pi+x} \frac{|R(t)|}{(t-x)^2} dt \leq 2 \int_0^{2\pi} |R(t)| dt \int_{P^*} \frac{dx}{(t-x)^2}.$$

Но если $t \in P$, то $R(t) = 0$. Если $t \in \delta_n$, а $x \in P^*$, то $|x - t| \geq \delta_n$, значит,

$$\int_{P^*} \frac{dx}{(t-x)^2} \leq 2 \int_{\delta_n}^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{2}{\delta_n}$$

и, следовательно,

$$\int_{P^*} I(x) dx \leq 4 \sum \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n} |R(t)| dt \leq 4 \sum_{n \leq N} C + 16M \sum_{n > N} \delta_n < +\infty,$$

а это и доказывает теорему, потому что суммируемость неотрицательной функции $I(x)$ на P^* означает, что $I(x)$ конечна почти всюду на P^* .

§ 8. Смысл существования сопряженной функции

Мы уже говорили, что Н. Н. Лузин первый доказал существование интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \quad (8.1)$$

для почти всех x , если $f(x)$ — любая функция с интегрируемым квадратом. Он же первый обратил внимание на то, что существование этого интеграла или, что то же*), интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt, \quad (8.2)$$

является результатом интерференции положительных и отрицательных величин, входящих в подынтегральное выражение; действительно, даже для непрерывных функций, если заменить подынтегральное выражение его модулем, интеграл может перестать иметь смысл, т. е.

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt = +\infty. \quad (8.3)$$

Н. Н. Лузин указал, что такое явление может иметь место почти для всех значений x , даже когда $f(x)$ непрерывна.

Впоследствии другие авторы указывали примеры непрерывных функций, для которых равенство (8.3) имеет место уже в каждой точке (см., например, Kaczmarsz [1]).

Чтобы построить такую функцию**), покажем сначала, что существует такая непрерывная $g(x)$ с периодом 1, что

- 1) $|g(x)| \leq 1$,
- 2) $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1,
- 3) $A \ln n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leq B \ln n$,

где A и B — положительные константы.

Действительно, пусть сначала $g(x)$ выбрана так, чтобы $g(x+u) - g(x-u)$ не обращалась в нуль тождественно относительно u ни при каком x , но при этом $g(x)$ непрерывна на $(0,1)$, удовлетворяет условию Липшица порядка 1, $g(0) = g(1) = 0$ и $|g(x)| \leq 1$. Например, $g(0) = g(1) = 0$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ и $g(x)$ линейно интерполируется на $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ и на $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

Ясно, что для так построенной $g(x)$, если ее периодически продолжить с периодом 1, имеем

$$\int_0^1 |g(x+u) - g(x-u)| du > C > 0 \quad (8.4)$$

*) Интегралы (8.1) и (8.2) в заданной точке x существуют или нет одновременно, так как $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ есть непрерывная функция на $[0, \pi]$.

**) См., например, Kaczmarsz [1].

при любом x , так как этот интеграл, как непрерывная периодическая функция от x , не обращающаяся в нуль ни при каком x , должен иметь положительную нижнюю границу. Кроме того, из $|g(x)| \leq 1$ сразу следует

$$\int_0^1 |g(x+u) - g(x-u)| du \leq 2. \quad (8.5)$$

Положим $nx = y$, $nt = u$; тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt = \int_1^n \left| \frac{g(y+u) - g(y-u)}{u} \right| du = \\ &= \int_0^1 |g(y+u) - g(y-u)| \left(\frac{1}{u+1} + \dots + \frac{1}{u+n-1} \right) du. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Замечая, что при $0 \leq u \leq 1$, имеем

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{u+1} + \dots + \frac{1}{u+n-1} \geq \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

и, принимая во внимание (8.4) и (8.5), находим справедливость неравенства

$$A \ln n \leq I_n \leq B \ln n,$$

т. е. 3) доказано.

Так как $|g(x+u) - g(x)| \leq K|u|$ в силу того, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, мы получаем

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leq 2K. \quad (8.7)$$

Отсюда сразу же следует, что и

$$\int_0^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leq 2K + B \ln n < B_1 \ln n, \quad (8.8)$$

где K — константа из (8.7), а B_1 — новая константа.

Пусть теперь $\varepsilon_k > 0$, $\sum \varepsilon_k < +\infty$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g(n_k x),$$

где числа ε_k мы определим позже, так же как и целые числа n_k . Ясно, что $f(x)$ непрерывна и имеет период 1. Докажем, что для нее

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt = +\infty \quad (8.9)$$

при всех значениях x .

Ясно, что если это будет установлено, то отсюда мгновенно можно перейти к $f(x)$ с периодом 2π , для которой (8.3) имеет место для всех x .

Чтобы доказать (8.9), заметим, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{n_k}}^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt &\geq \varepsilon_k \int_{\frac{1}{n_k}}^1 \left| \frac{g(n_k x + n_k t) - g(n_k x - n_k t)}{t} \right| dt - \\
 - \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \int_{\frac{1}{n_k}}^1 \left| \frac{g(n_j x + n_j t) - g(n_j x - n_j t)}{t} \right| dt - \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j \int_{\frac{1}{n_k}}^1 \left| \frac{g(n_j x + n_j t) - g(n_j x - n_j t)}{t} \right| dt &\geq \\
 &\geq \varepsilon_k I_{n_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j B_1 \ln n_j - 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_j \int_{\frac{1}{n_k}}^1 \frac{dt}{t} \geq \\
 &\geq A \varepsilon_k \ln n_k - B_1 \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \ln n_j - 2 \ln n_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j. \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

Остается подобрать числа ε_j и n_j так, чтобы правая часть (8.10) стремилась к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Этого можно достичь разными способами, например, полагая $n_k = 2^{(k!)^2}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{k!}$; тогда $\varepsilon_k \ln n_k = k! \ln 2$, поэтому правая часть (8.10) равна

$$\begin{aligned}
 A k! \ln 2 - B_1 \ln 2 \sum_{j=1}^{k-1} j! - 2 (k!)^2 \ln 2 \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \\
 = k! \ln 2 \left[A - B_1 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k-1)} + \dots + \frac{1}{k!} \right) - \right. \\
 \left. - 2 k! \frac{1}{(k+1)!} \left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots \right) \right] > A_1 k! \ln 2,
 \end{aligned}$$

где $A_1 > 0$.

Итак, для любого x при $k \rightarrow \infty$ интеграл

$$\int_{\frac{1}{n_k}}^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt \rightarrow +\infty,$$

откуда и следует справедливость (8.9) для всех значений x .

Таким образом мы убедились, что даже если $f(x)$ непрерывна, то существование интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

есть результат не малости подынтегрального выражения, но интерференции его положительных и отрицательных значений.

Заметим, кроме того, что существование этого интеграла почти всюду также указывает на глубину явления: можно показать, что существуют непрерывные функции, для которых множество точек, где этот интеграл не имеет смысла, есть множество мощности континуума. Такие факты также были указаны Н. Н. Лузиным (пример такой функции дан в комментарии 113 ко второму изданию книги Н. Н. Лузина^[М.10]).

Н. Н. Лузин уделил много внимания вопросу о том, почему существует почти всюду интеграл (8.2). Он считал, что указанная интерференция поло-

жительных и отрицательных величин в этом интеграле есть очень важный факт, который сыграет основную роль при изучении сходимости рядов Фурье. Поэтому он не удовлетворился найденным им доказательством существования этого интеграла, так как, по его словам, в этом доказательстве «факт существования интеграла глубоко скрыт в теореме Фишера—Рисса и потому обнаруживается скорее теорией функцией комплексного, чем действительного переменного*). Он настаивал поэтому на важности прямого доказательства существования интеграла (8.2), основанного на методах действительного переменного.

Это нашло отклик в работе Безиковича [1], доказавшего существование почти всюду интеграла (8.2) для функций с интегрируемым квадратом методами теории функций действительного переменного. Однако его доказательство не удовлетворило Н. Н. Лузина, так как оно содержало довольно сложные арифметические подсчеты, затемнявшие теоретико-функциональную картину. Поэтому Н. Н. Лузин дал новое, уже построенное на чистых методах теории функций, доказательство существования интеграла (8.2) для $f(x) \in L^2$, а затем обобщил этот результат, доказав существование почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ интеграла

$$\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt,$$

если $f(x)$ с интегрируемым квадратом на всей бесконечной оси. Это доказательство им никогда не было опубликовано, и лишь после его смерти опубликовано по рукописи, найденной в его бумагах (см. Н. Н. Лузин [М.10], стр. 287—319).

Наконец отметим, что уже в 1926 году Безикович (Besikowitch [1]) снова дал доказательство существования почти всюду интеграла (8.2) на этот раз для любых суммируемых $f(x)$ и опять методами чистой теории функций действительного переменного.

§ 9. Критерий Лузина для сходимости рядов Фурье от функций с интегрируемым квадратом

Докажем следующую теорему:

Теорема Лузина [М.9], [М.10]. Для того чтобы ряд Фурье от функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом был сходящимся почти всюду на $[-\pi, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на $[-\pi, \pi]$ имело место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x-t)}{t} \cos nt \, dt = 0, \quad (9.1)$$

где $\bar{f}(x)$ — функция, сопряженная с $f(x)$, а интеграл определен как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\pi$.

Пусть $\sigma(f)$ имеет вид**)

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (9.2)$$

*) См. Н. Н. Лузин [М.10], § 70.

**) При изучении сходимости можно, не нарушая общности, считать $a_0 = 0$.

По условию $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$. Тогда сопряженный ряд

$$\sum -b_n \cos nx + a_n \sin nx \quad (9.2')$$

по теореме Фишера—Рисса есть ряд Фурье от функции $\bar{f}(x)$ с интегрируемым квадратом. Ее-то Н. Н. Лузин и назвал сопряженной функцией. То, что

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt, \quad (9.3)$$

где интеграл существует почти всюду, и было им доказано в ходе доказательства только что сформулированной теоремы. Мы сейчас поступим иначе. Мы будем базироваться на том, что существование интеграла (9.3) уже установлено (см. § 7) и что если $f(x) \in L^2$, то $\bar{f}(x)$, определяемая формулой (9.4), есть именно та функция, для которой (9.2') есть ряд Фурье (это тоже было доказано в § 7). В этих условиях дальнейшее доказательство теоремы Лузина проходит очень легко.

Учитывая, что $-b_n$ и a_n можно рассматривать, как коэффициенты Фурье для $\bar{f}(x)$, имеем для частной суммы ряда (9.2)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sin kt dt \right) \cos kx - \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \cos kt dt \right) \sin kx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sum_{k=1}^n \sin k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \bar{D}_n(t-x) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{f}(t+x) \cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \sin nt dt. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Но

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{f}(t+x) - \bar{f}(t-x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \quad (9.5)$$

в том случае, когда оба эти интеграла имеют смысл; заметим, кроме того, что рядом, сопряженным к (9.2'), должен быть ряд, получаемый из (9.2) умножением всех членов на -1 , а потому, если считать формулу (9.3) известной для любой функции с интегрируемым квадратом, мы можем писать

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (9.6)$$

Поэтому из (9.4), (9.5) и (9.6) следует

$$S_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \sin nt dt \quad (9.7)$$

для всех тех x , где (9.6) справедливо, т. е. почти всюду.

Далее, так как $\bar{f}(x) \in L$, то последний интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Из непрерывности функции $\frac{1}{2tg \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ для $-\pi \leq t \leq \pi$ следует, что первый интеграл в правой части (9.7) отличается от

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\cos nt}{t} dt$$

на величину бесконечно малую; следовательно, почти всюду

$$S_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{\cos nt}{t} dt + o(1). \quad (9.8)$$

Заметим теперь (см. глава I, § 49), что если ряд Фурье от $f(x)$ сходится на каком-нибудь множестве меры больше нуля, то он сходится именно к $f(x)$ почти всюду на этом множестве. Отсюда следует, что для того, чтобы ряд $\sigma(f)$ сходиллся почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду $S_n(x) - f(x) \rightarrow 0$; но тогда из (9.8) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t+x) \frac{\cos nt}{t} dt = 0$$

или, что все то же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\bar{f}(t+x) - \bar{f}(t-x)}{t} \cos nt dt = 0, \quad (9.9)$$

а это и есть теорема Лузина.

После того, как Н. Н. Лузин доказал, что

$$\int_0^{\pi} \frac{g(t+x) - g(t-x)}{t} dt$$

имеет смысл почти всюду для любой $g(x) \in L^2$, он высказал гипотезу, что для любой $f(x) \in L^2$ ряд Фурье сходится почти всюду. Он мотивировал эту гипотезу тем, что как равномерное распределение на $(-\pi, \pi)$ положительных и отрицательных значений $\cos nx$ и $\sin nx$ приводит к тому, что для любой суммируемой функции коэффициенты Фурье стремятся к нулю, так и интеграл, входящий в формулу (9.9), отличающийся от

$$\int_0^{\pi} \frac{\bar{f}(t+x) - \bar{f}(t-x)}{t} dt \quad (9.10)$$

множителем $\cos nt$, должен стремиться к нулю, а потому критерий сходимости будет почти всюду выполнен.

Гипотеза Н. Н. Лузина и сейчас, спустя 40 лет после ее высказывания, не подтверждена и не опровергнута. Однако те соображения, которые к ней привели, в настоящее время уже не могут иметь силы.

Чтобы разъяснить смысл этих слов, заметим следующее. Допустим, что сопряженные ряды (9.2) и (9.2') оба являются рядами Фурье. В этом случае те функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, для которых эти ряды являются рядами Фурье, Н. Н. Лузин называл сопряженными функциями. Он отметил (см. § 72 его

диссертации), что доказательство существования интеграла, равенство (9.3), а также и необходимый и достаточный признак сходимости остаются в силе, если ослабить требование $f(x) \in L^2$ и предположить только, что обе функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ суммируемы. Но в таком случае, если бы равномерное распределение положительных и отрицательных значений $\cos lx$ приводило к равенству (9.9), как только интеграл (9.10) имеет смысл, мы должны были бы заключить, что если $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ одновременно суммируемы, то их ряды Фурье сходятся почти всюду. А между тем в § 19 главы V мы видели, что существует суммируемая $f(x)$, у которой сопряженная $\bar{f}(x)$ также суммируема и, однако, $\sigma(f)$ расходится почти всюду.

Таким образом, проблема сходимости для рядов Фурье от функций с интегрируемым квадратом либо решается отрицательно, либо при доказательстве стремления к нулю интеграла, входящего в формулу (9.8), надо как-то существенно использовать то, что $f(x) \in L^2$, а не опираться лишь на существование интеграла (9.10) почти всюду. Заметим, что Н. Н. Лузин всегда считал важным именно вскрыть, почему этот интеграл существует, а не ограничиваться знанием одного факта его существования. Он искал сам и побуждал других искать новые доказательства, надеясь в них яснее рассмотреть тонкую структуру измеримых множеств, известную их симметрию, которая приводит к интерференции положительных и отрицательных величин изучаемого подынтегрального выражения. Из этой структуры множеств Н. Н. Лузин и надеялся вывести стремление к нулю интеграла (9.9) для $f(x) \in L^2$. Вопрос о том, имеет ли это место, очень труден и, как мы уже говорили, все еще остается открытым.

З а м е ч а н и е. В начале § 8 мы показали, что равенство

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt = +\infty$$

возможно даже для непрерывных функций при любом значении x .

Аналогично, как показал Качмаж (Kaczmarz^[1]), существуют функции, для которых в каждой точке

$$\text{а) } \int_0^\pi \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt = +\infty$$

или

$$\text{б) } \int_0^\pi \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt = +\infty, \quad (9.11)$$

а также ни в одной точке не существуют интегралы

$$\text{в) } \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt,$$

$$\text{г) } \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt. \quad (9.12)$$

Напомним теперь, что сходимость ряда Фурье к $f(x)$ эквивалентна условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin nt dt = 0. \quad (9.13)$$

Любопытно отметить, что, как показал П. Л. Ульянов [3], можно построить непрерывную функцию $f(x)$, у которой ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, т. е. условие (9.13) выполнено равномерно, и несмотря на это имеет место случай г) из (9.12), т. е. ни в какой точке x не существует

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt.$$

§ 10. Условия для того, чтобы два сопряженных ряда были рядами Фурье

Для того чтобы найти такие условия, мы сначала изучим классы функций рассмотренных Ф. Риссом (F. Riesz [3]) и названных им H_δ (δ — положительное число*).

О п р е д е л е н и е. Аналитическая в единичном круге функция $f(z)$ принадлежит классу H_δ ($\delta > 0$), если

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^\delta d\theta = H_\delta(f) < +\infty. \quad (10.1)$$

Прежде всего заметим, что

$$\int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^\delta d\theta \quad (10.2)$$

есть возрастающая функция от ϱ для любой функции $f(z)$, аналитической в $|z| < 1$. Действительно, если $\varrho < 1$, то рассматриваемый интеграл есть непрерывная функция от ϱ ; если $\varrho_1 < \varrho_2 < 1$, то функции

$$u_1(\varrho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho_1 e^{i\alpha})|^\delta \frac{\varrho_1^2 - r^2}{\varrho_1^2 + r^2 - 2\varrho_1 r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha,$$

$$u_2(\varrho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho_2 e^{i\alpha})|^\delta \frac{\varrho_2^2 - r^2}{\varrho_2^2 + r^2 - 2\varrho_2 r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

будут гармоническими, первая в круге $|z| < \varrho_1$, вторая в круге $|z| < \varrho_2$, причем они совпадают со значениями $|f(\varrho e^{i\theta})|^\delta$: первая на окружности $|z| = \varrho_1$, вторая на окружности $|z| = \varrho_2$. Следовательно, каждая из них будет гармонической мажорантой для $|f(\varrho e^{i\theta})|^\delta$ в соответствующем круге. Поэтому

$$u_1(\varrho_1 e^{i\alpha}) = |f(\varrho_1 e^{i\alpha})|^\delta \leq u_2(\varrho_1 e^{i\alpha})$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho_1 e^{i\alpha})|^\delta d\alpha \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(\varrho_1 e^{i\alpha}) d\alpha = u_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho_2 e^{i\alpha})|^\delta d\alpha.$$

Итак, мы убедились, что интеграл (10.2) есть неубывающая функция от ϱ . Поэтому самое существование предела левой части (10.1) не может

*) Подробное изложение свойств этих функций можно найти, например, в книге И. И. Привалова [М.19], гл. II. Мы здесь кратко изложим лишь то, что нам необходимо для изучаемого вопроса в теории рядов Фурье.

вызвать сомнений; условие $f \in H_\delta$ означает лишь требование, чтобы этот предел был конечным.

Ясно, что любая ограниченная функция принадлежит H_δ при любом $\delta > 0$. Ясно также, что если $\delta_1 < \delta_2$, то $H_{\delta_2} \subset H_{\delta_1}$, так как

$$|f(\varrho e^{i\theta})|^{\delta_1} \leq 1 + |f(\varrho e^{i\theta})|^{\delta_2},$$

а потому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^{\delta_1} d\theta \leq 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^{\delta_2} d\theta$$

и, значит, если $f(z) \in H_{\delta_2}$, то и подавно $f(z) \in H_{\delta_1}$.

Для изучения сопряженных тригонометрических рядов нам будут нужны лишь классы H_1 и H_2 .

Все же сначала докажем общее предложение, необходимое для всего дальнейшего.

Л е м м а. Если $f(z) \in H_\delta$, то ее можно представить в виде

$$f(z) = b(z) F(z), \quad (10.3)$$

где $b(z)$ регулярная, $|b(z)| \leq 1$ в единичном круге, а $F(z)$ не имеет нулей в единичном круге и снова принадлежит классу H_δ .

Очевидно, что если $f(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга, то, полагая $b(z) = 1$, $F(z) = f(z)$, мы уже имеем искомое разложение. В противном случае пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — все нули $f(z)$, лежащие внутри единичного круга, причем каждый кратный нуль повторяется столько раз, какова его кратность. Пока допустим, что $f(0) \neq 0$.

Положим

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^n |a_k| \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \overline{a_k} z}, \quad F_n(z) = \frac{f(z)}{b_n(z)}. \quad (10.4)$$

Ясно, что $b_n(z)$ имеет a_1, a_2, \dots, a_n и только эти числа своими нулями причем, как показывает элементарное вычисление, модуль каждого члена, входящего в произведение (10.4), равен 1 при $z = e^{i\theta}$, значит, $|b_n(z)| = 1$ на окружности и, следовательно, $b_n(z)$ регулярна в единичном круге и $|b_n(z)| \leq 1$ всюду в нем. В таком случае и $F_n(z)$ регулярна в этом круге.

Так как $|b_n(z)| = 1$ на окружности, то для любого $\varepsilon > 0$ можно взять r столь близким к 1, что

$$|b_n(re^{i\theta})| \geq 1 - \varepsilon.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_n(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^\delta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^\delta} H_\delta(f),$$

если r достаточно близко к 1.

Левая часть полученного неравенства возрастает с ростом r , поэтому неравенство справедливо для любого $r < 1$. Так как левая часть не зависит от ε , то получаем для любого $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_n(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq H_\delta(f). \quad (10.5)$$

Если бы $f(z)$ имела лишь конечное число нулей, например только a_1, a_2, \dots, a_n , то нужное разложение

$$f(z) = b_n(z) F_n(z)$$

было бы уже получено. В случае бесконечного множества нулей, замечая, что на основании (10.5)

$$|F_n(0)|^\delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_n(0)|^\delta d\theta \leq H_\delta(f),$$

а, с другой стороны,

$$|F_n(0)| = \left| \frac{f(0)}{b_n(0)} \right| = \frac{|f(0)|}{|a_1| |a_2| \dots |a_n|},$$

мы видим, что

$$|a_1 a_2 \dots a_n|^\delta \geq \frac{|f(0)|^\delta}{H_\delta(f)}$$

для любого n , значит, бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$ должно быть сходящимся. Отсюда ясно, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \bar{a}_k z}$$

сходится абсолютно для $|z| < 1$ и даже равномерно в любом круге радиуса $r < 1$ и определяет функцию

$$b(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \bar{a}_k z},$$

которая тоже регулярна и $|b(z)| \leq 1$ (эту функцию принято называть функцией Бляшке). У нее те же нули, как у $f(z)$ и, значит, для $|z| < 1$ функция

$$F(z) = \frac{f(z)}{b(z)}$$

регулярна и нигде внутри круга не обращается в нуль.

Кроме того, функции $F_n(z)$ сходятся к $F(z)$ и притом равномерно во всяком круге $|z| = r < 1$, а потому на основании (10.5)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq H_\delta(f) \quad \text{для любого } r$$

и, значит, $F(z) \in H_\delta$.

Итак, для случая $f(0) \neq 0$ теорема уже доказана. Если же $z = 0$ есть нуль функции $f(z)$ кратности m , то, полагая

$$f(z) = z^m \varphi(z),$$

видим, что $\varphi(z)$ регулярна и $\varphi(0) \neq 0$. В таком случае

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^\delta d\theta = \frac{1}{r^{m\delta}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta,$$

откуда следует, что $\varphi(z)$ также входит в класс H_δ . Тогда $f(z) = b_1(z) F(z)$, где $b_1(z) = z^m b(z)$ и доказательство закончено.

С л е д с т в и е. *Всякую функцию $f(z)$ класса H_δ можно представить в виде разности*

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ обе принадлежат H° и не имеют нулей в единичном круге.

Действительно, по доказанной теореме

$$f(z) = b(z) F(z),$$

где $F(z) \in H_\delta$ и не имеет нулей, а $|b(z)| \leq 1$. Положим

$$f_1(z) = F(z), \quad f_2(z) = F(z) - f(z).$$

Тогда ясно, что $f_1(z)$ не имеет нулей; для $f_2(z)$ это вытекает из равенства

$$f_2(z) = F(z) [1 - b(z)]$$

и из того, что $|b(z)| < 1$, когда z внутри круга.

Прежде чем идти дальше, выведем характеристическое свойство функций, принадлежащих классу H_2 .

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

принадлежала классу H_2 , необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum |c_n|^2$ был сходящимся.

В самом деле, если $\varrho < 1$, то из равенства Парсеваля получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \varrho^{2n}. \quad (10.6)$$

Так как $f(z) \in H_2$, то при $\varrho \rightarrow 1$ левая часть (10.6) стремится к конечному пределу, значит, и правая тоже, т. е. ряд $\sum |c_n|^2$ сходится. Обратно, если $\sum |c_n|^2$ сходится, то правая часть стремится к конечному пределу при $\varrho \rightarrow 1$, а значит, $f(z)$ входит в класс H_2 .

Установив это, сформулируем следующую теорему, справедливую при любом $\delta > 0$.

Т е о р е м а 2. *Если $f(z) \in H_\delta (\delta > 0)$, то*

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} f(\varrho e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad (10.7)$$

существует почти для всех θ и

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^\delta d\theta = 0.$$

Мы для простоты будем ее доказывать лишь для классов H_1 и H_2 . Докажем ее сначала для H_2 .

Существование предела (10.7) вытекает из $\sum |c_n|^2 < +\infty$ и суммируемости методом Абеля ряда Фурье и сопряженного с ним.

Пусть $\gamma(z) \in H_2$ и $0 < \lambda < 1$; тогда ясно, что $\gamma(z) - \gamma(\lambda z)$ также принадлежит H_2 и в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(\varrho e^{i\theta}) - \gamma(\lambda \varrho e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |c_n|^2 \varrho^{2n} (1 - \lambda^{2n}). \quad (10.8)$$

При $\varrho \rightarrow 1$ правая часть (10.8) стремится к $\sum c_n^2 (1 - \lambda^{2n})$. В силу известной леммы Фату (см. Вводный материал, § 14) отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(e^{i\theta}) - \gamma(\lambda e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sum |c_n|^2 (1 - \lambda^{2n}).$$

Если $\lambda \rightarrow 1$, то правая часть стремится к нулю, значит, и левая тоже, а поэтому нужное соотношение доказано для любой $\gamma(z) \in H_2$.

Чтобы доказать, что оно справедливо и для H_1 , мы воспользуемся тем, что в силу леммы, если $f(z) \in H_1$, то

$$f(z) = b(z) F(z),$$

где $|b(z)| \leq 1$ для $|z| \leq 1$ и $F(z) \in H_1$, причем $F(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга. Значит, если мы положим

$$\gamma(z) = [F(z)]^{\frac{1}{2}},$$

то $\gamma(z)$ регулярна и принадлежит H_2 , а потому

$$f(z) = b(z) [\gamma(z)]^2.$$

Существование предела (10.7) вытекает из того, что $b(z)$ ограничена, а $\gamma(z) \in H_2$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |b(\varrho e^{i\theta}) \gamma^2(\varrho e^{i\theta}) - b(e^{i\theta}) \gamma^2(e^{i\theta})| d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |b(\varrho e^{i\theta}) \gamma^2(e^{i\theta}) - b(e^{i\theta}) \gamma^2(e^{i\theta})| d\theta = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как $|b(z)| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma^2(\varrho e^{i\theta}) - \gamma^2(e^{i\theta})| d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} |\gamma(\varrho e^{i\theta}) - \gamma(e^{i\theta})|^2 d\theta} \sqrt{\int_0^{2\pi} |\gamma(\varrho e^{i\theta}) + \gamma(e^{i\theta})|^2 d\theta}. \end{aligned}$$

Первый сомножитель стремится к нулю при $\varrho \rightarrow 1$ в силу только что доказанного, а второй остается ограниченным, потому что $\gamma(z) \in H_2$. Итак, $I_1 \rightarrow 0$ при $\varrho \rightarrow 1$.

Для I_2 имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma^2(e^{i\theta})| |b(\varrho e^{i\theta}) - b(e^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0,$$

так как $|b(\varrho e^{i\theta}) - b(e^{i\theta})| \rightarrow 0$ и функции под знаком интеграла мажорируются суммируемой функцией $2|\gamma^2(e^{i\theta})|$, значит, переход к пределу под знаком интеграла законен.

Итак, теорема доказана.

Мы теперь возвращаемся к вопросу о том, при каких условиях два сопряженных тригонометрических ряда будут оба рядами Фурье.

Теорема 3. *Для того чтобы ряды*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (10.9)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx \quad (10.10)$$

были оба рядами Фурье, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = a_n - ib_n$, принадлежала классу H_1 .

У с л о в и е н е о б х о д и м о. Так как ряды (10.9) и (10.10) являются рядами Фурье, то $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$, значит, $c_n \rightarrow 0$, и функция $f(z)$ является аналитической функцией, регулярной в круге $|z| < 1$.

Полагая $z = \varrho e^{i\theta}$, видим, что

$$\begin{aligned} f(\varrho e^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varrho^n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \varrho^n e^{in\theta} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \varrho^n + i \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \varrho^n = \\ &= u(\varrho, \theta) + iv(\varrho, \theta). \end{aligned}$$

Но (см. глава I, § 54) известно, что если (10.9) есть ряд Фурье от функции $h(x)$, то

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha) P(r, \theta - \alpha) d\alpha,$$

где $P(r, \varphi)$ — ядро Пуассона. Аналогично, если $g(x)$ есть функция, для которой ряд (10.10) есть ряд Фурье, то

$$v(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) P(r, \theta - \alpha) d\alpha.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(\varrho e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [h(\alpha) + ig(\alpha)] P(\varrho, \theta - \alpha) d\alpha,$$

а потому

$$|f(\varrho e^{i\theta})| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\alpha)| P(\varrho, \theta - \alpha) d\alpha,$$

где функция $\Phi(\alpha) = h(\alpha) + ig(\alpha)$ суммируема.

Но тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\alpha)| \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\varrho, \theta - \alpha) d\theta \right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(\alpha)| d\alpha = \text{const}, \end{aligned}$$

так как $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \alpha) d\alpha = 1$.

Поскольку левая часть неравенства ограничена при $\varrho \rightarrow 1$ и, как мы знаем, является неубывающей функцией от ϱ , то она стремится к конечному пределу при $\varrho \rightarrow 1$, т. е. $f(z)$ принадлежит к классу H_1 .

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Пусть $f(z)$ входит в класс H_1 . Для $\varrho < 1$ имеем

$$f(\varrho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varrho^n e^{in\theta}.$$

Так как здесь ряд равномерно сходится, а система $\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$ ортогональна и нормирована, то

$$c_n \varrho^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.11)$$

При фиксированном n , если $\varrho \rightarrow 1$, то левая часть стремится к c_n . Покажем, что правая часть стремится к

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Действительно,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0$$

при $\varrho \rightarrow 1$ в силу теоремы 2. Поэтому мы можем для всякого n написать

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10.12)$$

Тогда, полагая $f(e^{i\theta}) = h(\theta) + ig(\theta)$ и замечая, что $h(\theta)$ и $g(\theta)$ суммируемы, так как $f \in H_1$, имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\theta) + ig(\theta)] (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta. \quad (10.13)$$

Но из формулы

$$f(\varrho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varrho^n e^{in\theta}$$

мгновенно вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.14)$$

Совершенно так же, как из (10.11) мы выводили (10.12), мы из (10.14) заключаем, что

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\theta) + ig(\theta)] (\cos n\theta + i \sin n\theta) d\theta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.15)$$

Складывая (10.13) и (10.15), находим

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [h(\theta) + ig(\theta)] \cos n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.16)$$

Напротив, вычитая равенство (10.15) из (10.13), найдем

$$-c_n = \frac{1}{\pi} i \int_0^{2\pi} [h(\theta) + ig(\theta)] \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы условились, что

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = a_n - ib_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда выводим:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta$$

и

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin n\theta d\theta$$

т. е. ряды (10.9) и (10.10) являются соответственно рядами Фурье от суммируемых функций $h(\theta)$ и $g(\theta)$, а это и требовалось доказать.

§ 11. Коэффициенты степенного ряда для функций класса H_1

Т е о р е м а. Если $f(z) \in H_1$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} < +\infty.$$

Прежде всего заметим, что результат может быть получен легко, если он уже установлен для частного случая, когда $f(z)$ не имеет нулей внутри круга радиуса 1.

Действительно, мы знаем (вследствие леммы § 10), что можно написать

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ обе принадлежат H_1 и не имеют нулей внутри круга $|z| < 1$; но тогда, если c'_n и c''_n — коэффициенты разложения $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в степенные ряды, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c'_n|}{n} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c''_n|}{n} < +\infty,$$

а потому и для $c_n = c'_n - c''_n$ получим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} < +\infty$.

Итак, вопрос сводится к изучению случая, когда $f(z)$ не имеет нулей внутри круга радиуса 1. Но в таком случае ее можно представить в виде

$$f(z) = g^2(z),$$

где $g(z)$ регулярна и входит в класс H_2 .

Полагая

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

мы можем утверждать (см. теорема 1 § 10), что

$$\sum |\alpha_n|^2 < +\infty.$$

Мы получим теперь доказательство нашей теоремы, если докажем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_m| |\alpha_n|}{m+n}$$

сходится. Действительно, если этот двойной ряд сходится, то сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{m+n=k} |\alpha_m \alpha_n|,$$

а так как

$$c_k = \sum_{m+n=k} \alpha_m \alpha_n,$$

то отсюда и вытекает сходимость $\sum \frac{|c_n|}{n}$. Итак, все сводится к доказательству такого предложения из теории числовых рядов с положительными членами:

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

то и

$$\sum \sum \frac{u_m v_n}{m+n} < +\infty.$$

Заметим, прежде всего, что если $u_n \geq 0$ и $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, то сходимость $\sum u_n^2$ влечет сходимость $\sum \frac{S_n^2}{n^2}$.

Действительно, полагая

$$h_n = \frac{S_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad h_0 = S_0 = 0,$$

найдем

$$u_n = S_n - S_{n-1} = nh_n - (n-1)h_{n-1}$$

и докажем сначала, что для любого m будем иметь

$$\sum_{n=1}^m h_n^2 \leq 2 \sum_{n=1}^m u_n h_n. \quad (11.1)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} h_n^2 - 2u_n h_n &= h_n^2 - 2h_n[nh_n - (n-1)h_{n-1}] = \\ &= h_n^2 - 2nh_n^2 + 2(n-1)h_{n-1}h_n \leq h_n^2(1-2n) + (n-1)[h_{n-1}^2 + h_n^2] = \\ &= -nh_n^2 + (n-1)h_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Складывая такие неравенства для $n = 1, 2, \dots, m$, получим

$$\sum_{n=1}^m h_n^2 - 2 \sum_{n=1}^m u_n h_n \leq -mh_m^2 \leq 0,$$

а это и есть нужное нам неравенство (11.1). Применяя к его правой части неравенство Буняковского, найдем

$$\sum_{n=1}^m h_n^2 \leq 2 \sqrt{\sum_{n=1}^m u_n^2 \sum_{n=1}^m h_n^2},$$

откуда

$$\sqrt{\sum_{n=1}^m h_n^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{n=1}^m u_n^2},$$

а потому

$$\sum_{n=1}^m h_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^m u_n^2.$$

Следовательно, сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ влечет сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$, т. е. сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2}{n^2}$.

Установив это, заметим, что двойной ряд $\sum \sum \frac{u_m v_n}{m+n}$ можно разбить на две части: σ_1 и σ_2 , причем к σ_1 относятся те члены, где $m \leq n$, а к σ_2 остальные. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \leq n} \frac{u_m v_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{u_m v_n}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} \sum_{m=1}^n u_m = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{S_n}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2}{n^2}} < +\infty \end{aligned}$$

в силу только что доказанного.

Аналогичная оценка производится для σ_2 , и доказательство закончено.

§ 12. Степенные ряды с ограниченным изменением

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что *степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (12.1)$$

имеет ограниченное изменение, если для $z = e^{ix}$ его действительная и мнимая части являются рядами Фурье от функций с ограниченным изменением.

Следовательно, полагая

$$c_n = a_n - ib_n, \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

мы требуем, чтобы

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sigma(\Phi), \quad (12.2)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx = \sigma(\bar{\Phi}), \quad (12.3)$$

где $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ — функции с ограниченным изменением.

Докажем прежде всего, что $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ непрерывны. Действительно, раз они имеют ограниченное изменение, то их ряды Фурье сходятся в каждой точке. Но у функций с ограниченным изменением точки разрыва могут быть только 1-го рода. Однако, если у какой-нибудь суммируемой функции имеется точка разрыва 1-го рода, то ряд, сопряженный к ее ряду Фурье в этой точке, расходится (см. глава I, § 42); отсюда следует, что $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ не могут иметь разрывов.

Полагая теперь

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и

$$\mu(x) = F(e^{ix}) = \Phi(x) + i\bar{\Phi}(x),$$

мы видим, что $\mu(x)$ непрерывна.

Докажем справедливость леммы:

Л е м м а 1. Если

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где ряд $\sum c_n z^n$ имеет ограниченное изменение, то

$$G(z) = z F'(z)$$

принадлежит классу H_1 .

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx - n a_n \sin nx, \quad (12.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos nx + n b_n \sin nx \quad (12.5)$$

— ряды, получающиеся от дифференцирования соответственно рядов (12.2) и (12.3). Следовательно, они могут рассматриваться как ряды Фурье—Стилтьеса от $d\Phi$ и $d\bar{\Phi}$ (см. глава I, § 23), а потому, полагая

$$\varphi(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos nx - a_n \sin nx) r^n,$$

$$\bar{\varphi}(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n,$$

можем, следовательно, написать

$$\varphi(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, x-t) d\Phi(t),$$

$$\bar{\varphi}(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, x-t) d\bar{\Phi}(t),$$

где $P(r, x)$ — ядро Пуассона. Отсюда следует*), что

$$|\varphi(r, x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, x-t) |d\Phi|,$$

$$|\bar{\varphi}(r, x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, x-t) |d\bar{\Phi}|$$

(потому что ядро Пуассона неотрицательно).

*) Для любой g с ограниченным изменением под $|dg|$ понимают $dV(t)$, где $V(t)$ — полное изменение функции g на $[0, t]$.

Интегрируя по x и меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(r, x)| dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |d\Phi| \int_0^{2\pi} P(r, x-t) dx = \int_0^{2\pi} |d\Phi| = V(\Phi)$$

и аналогично

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}(r, x)| dx \leq V(\bar{\Phi}),$$

где $V(\Phi)$ и $V(\bar{\Phi})$ — полные изменения Φ и $\bar{\Phi}$.

Но, с другой стороны,

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1},$$

откуда

$$G(z) = z F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n.$$

Поэтому действительная и мнимая части от $G(re^{ix})$ соответственно равны $\bar{\varphi}(r, x)$ и $\varphi(r, x)$, а тогда

$$\int_0^{2\pi} |G(re^{ix})| dx \leq V(\Phi) + V(\bar{\Phi}),$$

т. е. интеграл остается ограниченным при $r \rightarrow 1$. Из определения класса H_1 тогда сразу следует, что $G(z)$ принадлежит H_1 , и лемма доказана.

Отсюда вытекает справедливость такой теоремы.

Теорема Харди и Литтльвуда*). Если степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

имеет ограниченное изменение, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty.$$

Действительно, в § 11 было доказано, что если

$$f(z) \in H_1,$$

то для ее степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\gamma_n|}{n} < +\infty.$$

Но в нашем случае роль $f(z)$ может играть $G(z)$, поскольку из леммы 1 мы знаем, что $G(z) \in H_1$; тогда

$$\gamma_n = n c_n,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty,$$

и теорема доказана **).

*) См. Hardy and Littlewood[8].

**) Это доказательство принадлежит Хелсону (Helson[2]).

Докажем еще одну важную теорему о степенных рядах с ограниченным изменением.

Т е о р е м а М. и Ф. Р и с с а *). Если $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ обе имеют ограниченное изменение, то они абсолютно непрерывны.

В начале этого параграфа мы уже доказали, что если ряд (12.1) имеет ограниченное изменение, то функция

$$\mu(x) = F(e^{ix}) = \Phi(x) + i\bar{\Phi}(x)$$

есть непрерывная функция. Кроме того, мы отметили, что ряды (12.4) и (12.5) являются рядами Фурье—Стилтьеса от $d\Phi$ и $d\bar{\Phi}$. Поэтому, умножая (12.5) на i и складывая с (12.4), видим, что

$$d\mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

Но тогда ясно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\mu = 0 \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда вытекает, что наша теорема будет доказана, если мы установим справедливость такой теоремы:

Т е о р е м а. Пусть $\mu(x)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением. Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\mu = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12.6)$$

то $\mu(x)$ — абсолютно непрерывна.

Действительно, если это будет доказано, то из абсолютной непрерывности $\mu(x)$ вытекает и абсолютная непрерывность $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$, а значит, будет справедлива и сформулированная выше теорема Ф. и М. Рисса.

Доказательство вспомогательной теоремы мы также приведем, следуя Хелсону.

Прежде всего, любую непрерывную функцию с ограниченным изменением можно представить так:

$$\mu(x) = \mu_s(x) + \mu_a(x), \quad (12.7)$$

где $\mu_a(x)$ — абсолютно непрерывна, а $\mu'_s(x) = 0$ почти всюду. Если мы установим, что $\mu_s(x) = \text{const}$, то все будет доказано. Прежде всего докажем лемму:

Л е м м а 2. Если $\varphi(x)$ непрерывна и такая, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{inx},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty,$$

то для $\mu(x)$, удовлетворяющей (12.6), имеем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\mu_s = - \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\mu_a. \quad (12.8)$$

*) См. F. Riesz und M. Riesz [1].

Это почти очевидно, так как в силу абсолютной, а значит и равномерной сходимости ряда, определяющего $\varphi(x)$, мы можем написать

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu = 0$$

на основании свойств функций $\mu(x)$. Значит,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\mu_s + \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\mu_a = 0,$$

а это и доказывает лемму.

Таким образом мы видим, что для достаточно широкого класса функций их интегралы Фурье—Стилтьеса по μ_s и по μ_a отличаются только знаком. Мы покажем, что это возможно только тогда, когда $\mu_s(x) = \text{const}$, так как иначе она была бы сингулярной функцией, а тогда мы пришли бы к противоречию.

Докажем теперь такую лемму:

Л е м м а 3. Пусть $\nu(x)$ есть полное изменение $\mu_s(x)$ на $[0, x]$. Тогда существует аналитическая функция $\varphi(z)$, определенная в единичном круге и такая, что

$$\text{а) } 0 < |\varphi(z)| < 1, \quad |z| < 1,$$

$$\text{б) } \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) = 0$$

почти всюду по мере ν (термин почти всюду по мере ν разъяснен в § 8 Добавлений).

Пусть E есть множество тех x , где $\nu'(x) = 0$. По теореме § 17 Добавлений $mE = 2\pi$, потому что $\mu'_s(x) = 0$ почти всюду.

Будем для любого множества A обозначать через $\nu(A)$ его образ, т. е. множество значений $\nu(x)$ на A . По теореме § 16 Добавлений имеем $m\nu(E) = 0$.

Множество CE распадается на: множество \mathcal{E} тех точек, где $\nu'(x) = +\infty$, и множество e тех точек, где $\nu'(x) \neq 0$, но хоть одно производное число от $\nu(x)$ конечно. Так как $mCE = 0$, то $me = 0$ и по теореме § 16 Добавлений $m\nu(e) = 0$. Так как $[0, 2\pi] = E + \mathcal{E} + e$ и мы доказали, что $m\nu(E) = 0$ и $m\nu(e) = 0$, то отсюда следует, что

$$m\nu(\mathcal{E}) = m\nu([0, 2\pi]). \quad (12.9)$$

Если мы построим аналитическую функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условию а) леммы и такую, что условие б) будет выполнено в каждой точке \mathcal{E} , то лемма будет доказана.

Рассмотрим теперь гармоническую функцию.

$$u(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t - x) d\nu(t).$$

Она неотрицательна, и

$$u(r, x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1$$

в каждой точке, где $\nu'(x) = +\infty$, если только $x \neq -\pi$ и $x \neq \pi$ (см. глава I, § 59). Отсюда следует, что

$$u(r, x) \rightarrow \infty \quad \text{на} \quad \mathcal{E}.$$

Если мы обозначим через $v(r, x)$ функцию, сопряженную с $u(r, x)$, то аналитическая функция

$$\varphi(re^{ix}) = e^{-(u+iv)},$$

определенная при $r < 1$, должна стремиться к нулю на \mathcal{E} , а тогда в силу (12.9) она удовлетворяет условиям леммы 3 и, значит, лемма 3 доказана.

Заметим теперь, что так как $\varphi(z)$ — аналитическая, то она разлагается в степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

причем $c_0 \neq 0$, так как $\varphi(z) \neq 0$ всюду.

Если мы определим функцию $\varphi_r(x)$ на $0 \leq x \leq 2\pi$ формулой

$$\varphi_r(x) = \varphi(re^{ix}), \quad 0 < r < 1,$$

то мы видим, что $\varphi_r(x)$ непрерывна и что

$$\varphi_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{inx},$$

т. е. ее коэффициенты Фурье

$$b_n = c_n r^n$$

образуют абсолютно сходящийся ряд и коэффициенты с отрицательными индексами все равны нулю. Поэтому для любого положительного n функция $e^{inx}\varphi_r(x)$ также непрерывна, имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и коэффициенты с отрицательными индексами и с нулевым равны нулю. Значит, по лемме 2

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s = - \int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_a \quad (r < 1; n = 1, 2, \dots).$$

Так как $\varphi_r(x) = \varphi(re^{ix})$, то $\varphi_r(x)$ при $r \rightarrow 1$ стремится почти всюду к некоторой предельной функции $\varphi_0(x)$.

Поскольку $|\varphi_r(x)| \leq 1$ при всяком r , то предельный переход под знаком интеграла законен по теореме Лебега (см. Вводный материал, § 14 и Добавления § 8), а потому

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_a = \int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_0(x) d\mu_a. \quad (12.10)$$

Теперь заметим, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi_r(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{E} \quad (12.11)$$

и \mathcal{E} удовлетворяет условию (12.9); но

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s = \int_{\mathcal{E}} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s + \int_{\mathcal{C}\mathcal{E}} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s \quad (12.12)$$

и так как $|\varphi_r(x)| < 1$, то

$$\left| \int_{\mathcal{C}\mathcal{E}} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s \right| \leq \int_{\mathcal{C}\mathcal{E}} |d\mu_s| = \int_{\mathcal{C}\mathcal{E}} dv = 0, \quad (12.13)$$

а

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\mathcal{E}} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s = 0 \quad (12.14)$$

в силу (12.11) и законности перехода к пределу (см. § 8 Добавлений).

Из (12.12), (12.13) и (12.14) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_r(x) d\mu_s = 0$$

и, снова переходя к пределу, находим

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_0(x) d\mu_s = 0,$$

а потому в силу (12.10)

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_0(x) d\mu_a = 0. \quad (12.15)$$

Но в силу своего построения $\varphi(z)$ нигде не обращалось в нуль, значит, для любого целого m функция $\varphi^{\frac{1}{m}}(z)$ есть аналитическая в круге радиуса 1, причем снова

$$0 < |\varphi^{\frac{1}{m}}(z)| < 1$$

и

$$\varphi^{\frac{1}{m}}(re^{ix}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1 \quad \text{на} \quad \mathcal{E}.$$

Если обозначить через $\varphi_0^{\frac{1}{m}}(x)$ функцию, определяемую однозначно при помощи равенства

$$\varphi_0^{\frac{1}{m}}(x) = \lim_{r \rightarrow 1} e^{-(u+iv)\frac{1}{m}},$$

то, повторяя все рассуждения, убедимся, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \varphi_0^{\frac{1}{m}}(x) d\mu_a = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Но так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_0^{\frac{1}{m}}(x) = 1 \quad \text{почти всюду},$$

поскольку $u(r, x)$ почти всюду стремится к конечному пределу, то снова, замечая, что

$$|\varphi_0^{\frac{1}{m}}(x)| \leq 1$$

для всех m , и, переходя к пределу под знаком интеграла, найдем

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu_a = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому и

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu_s = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Остается доказать, что это возможно лишь при $\mu_s = \text{const}$. Переходим к доказательству этого предложения.

Л е м м а 4. Если $\mu'_s(x) = 0$ почти всюду и

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu_s = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то

$$\mu(x) = \text{const}.$$

Ясно, что это специальный случай доказываемой нами теоремы. Положим

$$a_n^s = \int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu_s \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Мы уже знаем, что $a_n^s = 0$ для $n = 1, 2, \dots$. Докажем, что это верно и для $n = 0, -1, -2, \dots$

Воспользуемся уже построенными функциями $\varphi_r(x)$. Имеем, с одной стороны,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \varphi_r(x) d\mu_s = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu_s = c_0 a_0^s \quad (12.16)$$

и, с другой стороны, в силу того, что $\varphi_r(x) \rightarrow 0$ на \mathcal{E} , левая часть (12.16) равна нулю; отсюда в силу $c_0 \neq 0$ имеем

$$a_0^s = 0.$$

Теперь заменим $\varphi_r(x)$ на $\varphi_r(x)e^{-ix}$. Тогда слева снова получим нуль, а справа $c_0 a_{-1}^s + c_1 a_0^s$, и так как $c_0 \neq 0$, а $a_0^s = 0$, мы отсюда заключаем, что $a_{-1}^s = 0$. Продолжая это рассуждение, докажем, что $a_n^s = 0$ для $n = -1, -2, \dots$. В результате $\mu_s = \text{const}$, и теорема полностью доказана.

Из доказанных теорем вытекает

С л е д с т в и е. Если $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ имеют ограниченное изменение, то их ряды Фурье сходятся абсолютно.

Действительно, тогда эти ряды являются действительной и чисто мнимой частями степенного ряда с ограниченным изменением; для него имеем $\sum |c_n| < +\infty$, поэтому и $\sum |a_n| + |b_n| < +\infty$. Но так как по теореме М. и Ф. Рисса из условий теоремы следует, что $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ обе абсолютно непрерывны, то эта теорема эквивалентна такой:

Если $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ обе абсолютно непрерывны, то их ряды Фурье сходятся абсолютно.

Заметим, что если бы $F(x)$ была только абсолютно непрерывна, то ее ряд Фурье не обязан был бы абсолютно сходиться (см. пример в § 3 главы IX).

З а м е ч а н и е. Полезно отметить, что теорему М. и Ф. Рисса можно со случая отрезка $[0, 2\pi]$ перенести на отрезок $[a, b]$. Точнее, как было показано И. И. Приваловым [М.19], если $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ обе суммируемы на $[0, 2\pi]$ и если они имеют ограниченное изменение на $[a, b]$, то они абсолютно непрерывны на всяком $[a, \beta]$, лежащем строго внутри $[a, b]$.

Далее П. Л. Ульянов [5], предполагая только суммируемость $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, доказал, что если $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ имеют на $[a, b]$ ограниченное изменение, и, кроме того, $f'(a)$ и $f'(b)$ существуют, то $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Отсюда вытекает, что ранее высказанная теорема И. И. Привалова справедлива и без требования суммируемости $f(x)$.

§ 13. Свойства двух сопряженных функций

Поставим вопрос, как можно по свойствам функции $f(x)$ судить о свойствах сопряженной функции $\bar{f}(x)$.

Прежде всего заметим, что непрерывная $f(x)$ может иметь сопряженную $\bar{f}(x)$ разрывной и даже неограниченной.

Действительно, пусть

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}. \quad (13.1)$$

Так как для $b_n = \frac{1}{n \ln n}$ имеем $b_n \downarrow 0$ и $nb_n \rightarrow 0$, то по теореме § 30 главы I ряд (13.1) сходится равномерно и, значит, $f(x)$ непрерывна.

Если так, то $f(x) \in L^2$, и, следовательно (см. § 7), ее сопряженная $\bar{f}(x)$ имеет своим рядом Фурье ряд $\bar{\sigma}(f)$, т. е.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}.$$

Но этот последний сходится в каждой точке, кроме $x = 0$ (см. § 30 главы I), а потому

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n} \text{ для всех } x \in [0, 2\pi], \text{ кроме } x = 0. \quad (13.2)$$

Покажем, что $\bar{f}(x)$ разрывна и не ограничена около точки $x = 0$.

Действительно, пусть $x > 0$ задано. Определим число N так, чтобы

$$N \ln N \leq \frac{1}{x} < (N+1) \ln(N+1).$$

Это возможно сделать единственным образом, поскольку выражение $n \ln n$ монотонно возрастает. Ясно, что при $x \rightarrow 0$ имеем $N \rightarrow \infty$.

Имеем

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=2}^N \frac{\cos nx}{n \ln n} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n} = \bar{S}_N(x) + \bar{R}_N(x).$$

Так как $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2x}$ для $x > 0$, то по лемме Абеля (см. Вводный материал, § 1) имеем

$$|\bar{R}_N(x)| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n} \right| \leq \frac{\pi}{2x} \frac{1}{(N+1) \ln(N+1)} < \frac{\pi}{2}$$

в силу выбора числа N .

С другой стороны, для $2 \leq n \leq N$ имеем

$$\cos nx \geq \cos Nx \geq \cos \frac{1}{\ln N} = \theta_N \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

откуда

$$|\bar{S}_N(x)| > \sum_{n=2}^N \frac{\cos nx}{n \ln n} > \theta_N \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \rightarrow \infty \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

так как ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Поэтому

$$|\bar{f}(x)| > |\bar{S}_N(x)| - |\bar{R}_N(x)| \rightarrow \infty \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

а это мы и хотели доказать.

Далее отметим, что у $f(x)$ с ограниченным изменением сопряженная $\bar{f}(x)$ не должна иметь ограниченного изменения, так как в противном случае по теоремам предыдущего параграфа они были бы обе абсолютно непрерывны и имели абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Однако ряд $\sigma(f)$ не должен сходиться абсолютно, даже если $f(x)$ абсолютно непрерывна, а тем более, если она только с ограниченным изменением.

Н. Н. Лузин первый обратил внимание на то, что функция, сопряженная к суммируемой, может быть несуммируемой на любом интервале $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. Он получил также результат значительно более сильный, чем оба

только что отмеченных здесь факта, т. е. существование непрерывной функции с разрывной сопряженной и функции с ограниченным изменением, у которой сопряженная не имеет ограниченного изменения. Именно, Н. Н. Лузин доказал существование абсолютно непрерывной функции, у которой сопряженная существенно не ограничена во всяком интервале $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ (см. Н. Н. Лузин [М.9], [М.10], § 74). Прежде чем приводить построенный Н. Н. Лузиным пример, выведем одну формулу, представляющую и самостоятельный интерес, и также принадлежащую Н. Н. Лузину.

Пусть $F(x)$ — периодическая и абсолютно непрерывная на $[-\pi, \pi]$. Пусть $f(x)$ ее производная, а $\bar{F}(x)$ функция, сопряженная к $F(x)$. Н. Н. Лузин нашел явное выражение $\bar{F}(x)$ через $f(x)$.

Как известно (см. § 1),

$$\bar{F}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{F(x+t) - F(x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt, \quad (13.3)$$

где интеграл, определяемый как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi}$, имеет смысл для почти всех x . Но эта формула справедлива для функции, сопряженной с $F(x)$, какова бы ни была $F(x) \in L$. В нашем случае, когда $F(x)$ имеет почти всюду производную $f(x)$, подынтегральное выражение для почти всех x есть непрерывная функция от t на $0 \leq t \leq \pi$, а поэтому в формуле (13.3) интеграл можно рассматривать и как интеграл Лебега.

Так как $F(x)$ абсолютно непрерывна, мы можем при любом $\varepsilon > 0$ произвести интегрирование по частям в интеграле

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{F(x+t) - F(x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt,$$

что дает

$$\frac{1}{\pi} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)}{1} \ln \sin \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \ln \sin \frac{t}{2} dt.$$

В силу того, что $F(x)$ имеет почти всюду производную $f(x)$, отсюда находим

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \ln \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt. \quad (13.4)$$

Эта формула справедлива почти всюду на $[0 \leq x \leq 2\pi]$, если в ней интеграл понимать как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right]$. Но можно его понимать и как обычный интеграл Лебега почти всюду на $[0 \leq x \leq 2\pi]$. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ две какие-нибудь суммируемые функции, то $f(x+t)g(t)$ суммируемо для почти всех x и интеграл $\int_0^{2\pi} f(x+t)g(t) dt$ есть суммируемая функция от переменного x (см. глава I, § 23).

Так как $\ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| \leq 0$ при $0 \leq |t| \leq \pi$, то

$$\bar{F}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left| \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| \right| dt. \quad (13.5)$$

Это и есть формула Н. Н. Лузина, которую мы хотели вывести. Пользуясь ею, он построил упомянутый выше пример и даже доказал более сильное утверждение, а именно:

Т е о р е м а Л у з и н а. *Существует абсолютно непрерывная функция $F(x)$ такая, что*

1) ряд Фурье от ее производной $f(x)$ и сопряженный с ним сходятся почти всюду,

2) функция $\bar{F}(x)$, сопряженная с $F(x)$, существенно не ограничена на любом отрезке $[a, b] \subset [0, 2\pi]$,

3) функция $f(x)$, сопряженная с $f(x)$, несуммируема ни на каком интервале $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Для построения такой функции Н. Н. Лузин брал множество точек $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, всюду плотное на $[0, 2\pi]$, и определял $f(x)$ так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\left| \sin \frac{x-r_n}{2} \right| \left| \ln \left| \sin \frac{x-r_n}{2} \right|^{\frac{3}{2}} \right|}. \quad (13.6)$$

Здесь все $A_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ достаточно быстро сходится.

Покажем, что если числа A_n разумно подобраны, то функция $F(x)$, являющаяся неопределенным интегралом Лебега от $f(x)$, обладает нужными свойствами *).

Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right| \left| \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|^{\frac{3}{2}} \right|}. \quad (13.7)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

а) $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду на $[0, 2\pi]$, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$,

б) $\varphi(x) \geq 0$,

в) $\varphi(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$,

$$\text{г) } \int_0^{2\pi} \varphi(x) \left| \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right| dx = +\infty.$$

Если потребовать чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty$, то ряд (13.6) или, что то же,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi(x - r_n), \quad (13.8)$$

сходится почти всюду и определяет суммируемую функцию $f(x)$, потому что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{2\pi} \varphi(x - r_n) dx \quad (13.9)$$

сходится, а $\varphi(x) \geq 0$ (см. теорему Лебега, Вводный материал, § 14).

*) Н. Н. Лузин в своей диссертации лишь указал вид функции $f(x)$ и перечислил ее свойства; подробное их доказательство проведено Г. П. Толстовым в комментариях ко второму изданию диссертации Н. Н. Лузина (см. комм. 122).

Пусть ε_n — последовательность положительных чисел, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$. Пусть числа M_n выбраны так, что

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| \leq M_n, \quad (13.10)$$

когда x и $x+h$ оба лежат вне интервалов вида $(2k\pi - \varepsilon_n, 2k\pi + \varepsilon_n)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), причем h может быть любого знака; такое M_n существует в силу условия а) для функции $\varphi(x)$.

Потребуем, чтобы

$$A_n < \frac{\varepsilon_n}{M_n} \quad (13.11)$$

и, наконец, потребуем еще, чтобы

$$A_n \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varphi(x) dx \leq \varepsilon_n^2 \quad (13.12)$$

(это возможно в силу свойства в) функции $\varphi(x)$). Докажем, что при таком выборе чисел A_n функция $f(x)$ удовлетворяет почти всюду условиям

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty, \quad (13.13)$$

где $\delta > 0$ — некоторое положительное число, а тогда в силу признака Дини (см. глава I, § 38) ряд Фурье от $f(x)$ будет сходиться почти всюду.

Обозначим через E множество, состоящее из всех тех x , для которых ряд (13.8) не сходится, всех r_n и, наконец, тех x , которые принадлежат бесконечному множеству интервалов $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$; так как $\sum \varepsilon_n < +\infty$, то $mE = 0$ *). Покажем, что в каждой точке x , не принадлежащей E , условия (13.13) выполнены. Поскольку x не входит в E , то найдется такое N , что x не принадлежит $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$ для всех $n > N$. Кроме того, так как $x \neq r_n$ ни при каком r_n (по определению E), то при δ достаточно малом величины

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{\varphi(x - r_n - t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt$$

конечны при $n = 1, 2, \dots, N$ в силу свойства а) функции $\varphi(x)$.

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt &\leq \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\delta} \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt + \\ &+ \sum_{N+1}^{\infty} A_n \int_0^{\delta} \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt. \end{aligned} \quad (13.14)$$

В силу только что сделанного замечания первая сумма в правой части (13.14) конечна; остается исследовать вторую сумму.

С этой целью заметим, что при $n > N$ точка x всегда лежит вне $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$, т. е., полагая $a_n = x - r_n$, видим, что a_n лежит вне $(-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$. Если a_n лежит вне $(-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$, то, обозначая через E_n множест-

*) Если $\sum mE_n < +\infty$, то для $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$ имеем $m \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ (см. Вводный материал, § 12).

во тех t из $(0, \delta)$, для которых $a_n + t$ лежит вне $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, на основании условия (13.11), наложенного на числа A_n , находим

$$A_n \int_{E_n} \left| \frac{\varphi(a_n + t) - \varphi(a_n)}{t} \right| dt < A_n M_n \delta < \varepsilon_n \delta. \quad (13.15)$$

Если же CE_n есть совокупность тех t из $(0, \delta)$, которые не входят в E_n , то для них $(a_n + t)$ лежит на $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, а a_n вне $(-2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$, значит, $|t| \geq \varepsilon_n$. Поэтому

$$A_n \int_{CE_n} \left| \frac{\varphi(a_n + t) - \varphi(a_n)}{t} \right| dt \leq \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{CE_n} \varphi(a_n + t) dt + \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{CE_n} \varphi(a_n) dt. \quad (13.16)$$

Но при $a_n + t$ на $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ имеем $-\varepsilon_n - a_n \leq t \leq -a_n + \varepsilon_n$. Значит, первый интеграл в правой части неравенства (13.16) не превосходит

$$\frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{-\varepsilon_n - a_n}^{a_n - \varepsilon_n} \varphi(a_n + t) dt = \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varphi(u) du \leq \frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_n} = \varepsilon_n$$

на основании условия (13.12). Второй интеграл в (13.16) не превосходит $2A_n\varphi(a_n) = 2A_n\varphi(x - r_n)$, так как $mCE_n \leq 2\varepsilon_n$. Сопоставляя это с (13.15) и (13.16), находим

$$A_n \int_0^\delta \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt \leq \varepsilon_n(1 + \delta) + 2A_n\varphi(x - r_n).$$

Но точка x не принадлежит E , значит, в ней ряд (13.8) сходится, поэтому ряд в правой части (13.14) сходится и, следовательно, интеграл в левой части (13.14) конечен.

Ясно, что замена t на $-t$ ничего не изменит в доказательстве, и таким образом признак Дини выполнен всюду вне E , т. е. почти всюду.

Итак, мы доказали, что ряд $\sigma(f)$ сходится почти всюду. Н. Н. Лузин, утверждая, что и сопряженный к нему ряд сходится почти всюду, вынужден был базироваться на специальных свойствах этого ряда; мы сейчас имеем возможность просто сослаться на теорему Кутнера (см. ниже, § 23).

Теперь мы должны доказать, что $\bar{F}(x)$ существенно не ограничена на любом $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. Мы будем это доказывать для $-\bar{F}(x)$, т.е. (см. (13.5)) для функции

$$-\bar{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left| \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| \right| dt. \quad (13.17)$$

Для любого n ($n = 1, 2, 3, \dots$) из (13.17) имеем

$$-\bar{F}(x) \geq \frac{A_n}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x - r_n + t) \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Но в силу условия г), которому удовлетворяет функция $\varphi(x)$, ясно, что когда $x \rightarrow r_n$, то $-\bar{F}(x)$ неограниченно возрастает, а так как множество точек $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ всюду плотно на $[0, 2\pi]$, то $\bar{F}(x)$ не ограничена на всяком интервале на $[0, 2\pi]$, а это и надо было доказать.

Наконец, из теоремы Ульянова, которая будет доказана в конце § 17, вытекает, что $f(x)$ не суммируема ни в каком интервале (a, b) , так как в противном случае $\bar{F}(x)$ была бы абсолютно непрерывной на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, а между тем она существенно не ограничена на всяком интервале $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Итак, теорема Лузина доказана полностью *).

З а м е ч а н и е. Для дальнейшего нам будет полезно отметить одно следствие из примера Н. Н. Лузина: существует тригонометрический ряд, сходящийся почти всюду, и такой, что после его интегрирования получается ряд, расходящийся на всюду плотном множестве (меры нуль) и имеющий своей суммой функцию, неограниченную на любом интервале $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Действительно, этим свойством обладает ряд $\bar{\sigma}(f)$, сопряженный к $\sigma(f)$. Мы уже видели, что он сходится почти всюду. Результатом его почленного интегрирования является ряд $\sigma(\bar{F})$. Он сходится почти всюду, поскольку его коэффициенты имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (см. глава I, § 64). Будучи рядом

Фурье от $\bar{F}(x)$, он должен сходиться почти всюду именно к $\bar{F}(x)$, т. е. к функции, существенно неограниченной на любом интервале. Отсюда следует, что он должен расходиться на всюду плотном множестве, так как если бы на некотором интервале (a, b) он сходил в каждой точке, то по теореме Бэра (см. Добавления, § 20) его сумма должна была бы быть ограниченной на некотором отрезке $[a, d] \subset (a, b)$, и мы пришли бы к противоречию.

Здесь мы получили утверждение более сильное, чем то, которое отмечалось в § 64 главы I, именно существование рядов с коэффициентами порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$, сумма которых не ограничена на любом интервале.

После этих замечаний отрицательного характера перейдем к изучению случаев, когда по «хорошим» свойствам $f(x)$ мы можем судить о «хороших» свойствах $\bar{f}(x)$.

Прежде всего постараемся выяснить вопрос, при каких дополнительных ограничениях на непрерывную $f(x)$ мы можем заключить, что и $\bar{f}(x)$ непрерывна.

Мы укажем здесь одно весьма простое достаточное условие, при котором это имеет место и, более того, при котором $\bar{f}(x)$ имеет такой же модуль непрерывности, как и $f(x)$.

Т е о р е м а П р и в а л о в а [1]. Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, т. е.

$$|f(x+h) - f(x)| \leq K|h|^\alpha, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (13.18)$$

где K — постоянная, то и $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию Липшица того же порядка α .

Это можно было бы в терминах модулей непрерывности записать так: если

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha) \quad (0 < \alpha < 1),$$

то и

$$\omega(\delta, \bar{f}) = O(\delta^\alpha).$$

Чтобы доказать теорему, сделаем предварительно такое замечание: функция $\bar{f}(x)$, определяемая формулой

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt, \quad (13.19)$$

где интеграл, вообще говоря, имеет смысл лишь почти всюду, в случае, когда (13.18) выполнено, оказывается определенной в каждой точке x , так как

*) К сожалению, мы не знаем, как сам Н. Н. Лузин доказывал то, что $\bar{f}(x)$ не суммируема ни в каком интервале.

числитель в подынтегральном выражении имеет порядок $O(t^a)$, а знаменатель не меньше t при $0 \leq t \leq \pi$. Поэтому выражение под знаком интеграла при любом x имеет порядок $O\left(\frac{1}{t^{1-a}}\right)$ и, поскольку $a > 0$, интеграл имеет смысл при всяком x .

Так как и $\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$ тоже имеет смысл, поскольку к нему

применимо предыдущее рассуждение, то мы вправе писать

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \int_0^\pi \frac{f(x)-f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$$

в силу нечетности $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}$. Отсюда (13.20)

$$\bar{f}(x+h) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+h+t)-f(x+h)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x+t)-f(x+h)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt. \quad (13.21)$$

Мы рассматриваем $h > 0$.

Покажем сначала, что если в интегралах формул (13.20) и (13.21) производить интегрирование по отрезку $(-2h, 2h)$, то получатся величины порядка $O(h^a)$. Действительно,

$$\left| \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{K|t|^a}{|t|} \leq K|t|^{a-1},$$

а потому

$$\left| \int_{-2h}^{2h} \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right| \leq K \cdot 2 \int_0^{2h} t^{a-1} dt = O(h^a).$$

Полагая $t-h=u$, мы можем применить то же рассуждение к интегралу (13.21). Итак,

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-2h} \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \int_{2h}^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right] + O(h^a), \\ \bar{f}(x+h) &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-2h} \frac{f(x+t)-f(x+h)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt + \int_{2h}^\pi \frac{f(x+t)-f(x+h)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt \right] + O(h^a). \end{aligned}$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(x+t)-f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{f(x+t)-f(x+h)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} &= \\ &= [f(x+h)-f(x)] \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} \right] + [f(x+h)-f(x)] \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}}, \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \bar{f}(x+h) - \bar{f}(x) &= O(h^a) - \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi} \right) [f(x+t) - f(x)] \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} \right] dt + \\ &+ [f(x+h) - f(x)] \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi} \right) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt = I_1 + I_2 + O(h^a). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{t-h}{2}}$$

и при $|t| \geq 2h$ имеем $\left| \frac{t-h}{2} \right| \geq \frac{|t|}{4}$, то подынтегральное выражение в I_1 имеет порядок $O(t^a) \cdot O\left(h \cdot \frac{1}{t^2}\right)$ равномерно относительно x ; но

$$\int_{2h}^{\pi} \frac{dt}{t^{2-a}} = O\left(\frac{1}{h^{1-a}}\right)$$

и это же справедливо для $\int_{-\pi}^{-2h}$; поэтому

$$I_1 = O\left(h \frac{1}{h^{1-a}}\right) = O(h^a).$$

Наконец, для оценки I_2 заметим, что

$$|f(x+h) - f(x)| = O(h^a),$$

а

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt &= \int_{2h}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t-h}{2}} dt - \int_{2h}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t+h}{2}} dt = \\ &= \int_{2h}^{\pi} \frac{\sin h}{\sin \frac{t-h}{2} \sin \frac{t+h}{2}} dt = O(h) \int_{2h}^{\pi} \frac{dt}{t^2} = O(1), \end{aligned}$$

откуда

$$I_2 = O(h^a).$$

Соединяя все полученные оценки, видим, что

$$|\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)| = O(h^a),$$

а это и надо было доказать.

Покажем, что в теореме Привалова условие $0 < a < 1$ является существенным, т. е. что теорема перестает быть верна, если $a = 0$ или $a = 1$.

При $a = 0$ мы должны были бы иметь

$$|f(x+h) - f(x)| = O(1),$$

т. е. функция $f(x)$ ограничена. Однако отсюда не вытекает, что $\bar{f}(x)$ ограничена, так как мы уже показали на примерах, что даже у непрерывной $f(x)$ сопряженная $\bar{f}(x)$ не должна быть ограниченной. Итак, при $a = 0$ теорема Привалова не имеет места.

Если теперь обозначить через $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ неопределенные интегралы от функций $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, то из ограниченности $f(x)$ следует

$$|F(x') - F(x'')| \leq M |x' - x''|,$$

где M — постоянное, т. е. $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$; для $\bar{F}(x)$ это не может иметь места в силу неограниченности $f(x)$. Итак, для $\alpha = 1$ теорема Привалова также не имеет места.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим некоторую непрерывную монотонно возрастающую функцию $\varphi(\delta)$. Возникает вопрос, когда из

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad (A)$$

следует

$$\omega(\delta, \bar{f}) = O[\varphi(\delta)]. \quad (B)$$

Мы видели, что это имеет место, если

$$\varphi(\delta) = \delta^\alpha, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < 1,$$

и это уже неверно, если

$$\varphi(\delta) = \delta.$$

Можно, однако, доказать следующее предложение (см. Н. К. Бари^[8]).

Пусть $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию: существует такая константа $C > 1$, что

$$1 < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < C. \quad (*)$$

Тогда из условия (A) всегда следует (B) и обратно.

Если дополнительно предположить, что $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ монотонно не возрастает, то условие (*) является и необходимым для того, чтобы для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей (A), имело место и (B), и, наоборот, (B) влекло (A) (см. Н. К. Бари и С. Б. Стечкин^[1]).

В частности, если $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), то при любом C имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} = C^\alpha,$$

а тогда при $C > 1$ условие (*) выполнено и потому теорема Привалова справедлива. Если же $\varphi(\delta) = \delta$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} = C$$

и условие (*) нарушено при любом C .

Так как $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ в этом случае равно 1, т. е. является невозрастающей функцией, то становится понятным, что нарушение условия (*) ведет к тому, что теорема Привалова при $\alpha = 1$ уже не имеет места. Можно доказать, что если

$$\omega(\delta, f) = O(\delta), \quad \text{то} \quad \omega(\delta, \bar{f}) = O\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right).$$

По поводу вопросов, связанных с оценкой модуля непрерывности и модуля гладкости функции $f(x)$ через такие же величины для $\bar{f}(x)$, см. уже упомянутую работу Н. К. Бари и С. Б. Стечкина^[1], статью Зигмунда (Zygmund^[1]) и статьи С. Б. Стечкина^{[5], [9]}.

§ 14. Функции класса L^p . Теорема М. Рисса

Мы продолжаем изучение вопроса, когда по хорошим свойствам $f(x)$ можно судить о хороших свойствах $\bar{f}(x)$.

Мы увидим, что если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то и $\bar{f}(x) \in L^p$. Но прежде чем доказать эту важную теорему, нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Л е м м а 1. Если

$$\varphi(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n,$$

$$\bar{\varphi}(r, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) r^n,$$

то для $0 \leq r < 1$ и $p > 1$ имеем

$$\|\bar{\varphi}(r, x)\|_p \leq A_p \|\varphi(r, x)\|_p,$$

где константа A_p зависит только от p .

Действительно, полагая

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n - ib_n$ и $c_0 = \frac{a_0}{2}$, и заменяя $z = re^{ix}$, мы имеем

$$F(re^{ix}) = \varphi(r, x) + i\bar{\varphi}(r, x).$$

Таким образом, $\varphi(r, x)$ и $\bar{\varphi}(r, x)$ могут быть рассматриваемы как $u(re^{ix})$ и $v(re^{ix})$, где u и v — действительная и мнимая части функции $F(z)$, регулярной внутри единичного круга.

Следовательно, наша лемма 1 будет доказана, если мы установим справедливость предложения:

Л е м м а 2. Пусть

$$F(z) = u(z) + iv(z), \quad v(0) = 0$$

есть произвольная функция, регулярная внутри единичного круга; тогда для $0 \leq r < 1$ и $p > 1$ имеем

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |v(re^{ix})|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (14.1)$$

где A_p зависит только от p .

Это утверждение принадлежит М. Риссу (M. Riesz^[1]); мы здесь дадим доказательство, предложенное Кальдероном (Calderon^[1]).

Сначала мы предположим $u(z) > 0$ и $1 < p \leq 2$ (от этих ограничений мы избавимся позже). Докажем, что для $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $1 < p \leq 2$ имеет место неравенство

$$|\sin \theta|^p \leq A_p |\cos \theta|^p - B_p \cos p\theta, \quad (14.2)$$

где A_p и B_p — положительные константы, зависящие только от p .

Доказательство достаточно проводить для $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, так как обе части неравенства (14.2) — четные функции. Так как для $\theta = \frac{\pi}{2}$ при $1 < p \leq 2$ имеем $\cos p\theta < 0$, то, взяв B_p достаточно большим, получим — $B_p \cos p\theta > 1$

для $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, если δ достаточно мало. Выбрав так B_p , мы его зафиксируем. Теперь заметим, что на $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ значения $|\cos \theta|^p$ превосходят положительную константу. Поэтому, взяв A_p достаточно большим, можно сделать $A_p |\cos \theta|^p > 1 + B_p$ на этом отрезке, значит, $A_p |\cos \theta|^p - B_p \cos p\theta > 1$. Выбрав так A_p и B_p , мы видим, что правая часть (14.2) превосходит 1 всюду на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а потому (14.2) и подавно верно.

Теперь для доказательства (14.1) положим

$$F(z) = Re^{i\theta} = u(z) + iv(z),$$

тогда

$$u(z) = R \cos \theta, \quad v(z) = R \sin \theta.$$

Мы можем считать $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, так как $u(z) > 0$. Кроме того, так как $F(z) \neq 0$, то $|F(z)|^p$ регулярна при $|z| < 1$. Поэтому, интегрируя по кругу $|z| = r$, $r < 1$, мы можем применить интегральную формулу Коши и получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[F(z)]^p}{z} dz = [F(0)]^p.$$

Но тогда

$$[u(0)]^p = \operatorname{Re} [F(0)]^p = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[F(z)]^p}{z} dz \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^p \cos p\theta dx,$$

и так как $u(z) > 0$, то

$$\int_0^{2\pi} R^p \cos p\theta dx > 0.$$

Теперь, умножая обе части неравенства (14.2) на R^p и интегрируя по x , находим

$$\int_0^{2\pi} |v|^p dx \leq A_p \int_0^{2\pi} |u|^p dx - B_p \int_0^{2\pi} R^p \cos p\theta dx.$$

Последний интеграл положителен, значит, его можно отбросить и получить нужное нам неравенство.

Нам осталось освободиться от ограничений $u(z) > 0$ и $1 < p \leq 2$. Начнем с первого.

Для краткости обозначим

$$\psi(x) = u(re^{ix}),$$

и пусть

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } \psi(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \psi(x) < 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \psi(x) - \psi_1(x).$$

Ясно, что $\psi_1(x)$ и $-\psi_2(x)$ неотрицательны и непрерывны. Поэтому $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$, а значит и $\bar{\psi}$, принадлежат L^2 . Составляя для них соответствующие гармонические функции $\psi_1(r, x)$, $\psi_2(r, x)$ и $\psi(r, x)$ и замечая, что формула (14.1) была уже доказана, когда $u(z) \geq 0$, находим

$$\|\bar{\psi}_1(r, x)\|_{L^p} \leq A_p \|\psi_1(r, x)\|_{L^p},$$

$$\|\bar{\psi}_2(r, x)\|_{L^p} \leq A_p \|\psi_2(r, x)\|_{L^p}.$$

Замечая, что $\psi_1(r, x) \rightarrow \psi_1(x)$ равномерно в силу непрерывности $\psi_1(x)$ (и аналогично для $\psi_2(r, x)$ и $\psi(r, x)$), находим

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|\bar{\psi}(r, x)\| \leq A_p \|\psi_1(x)\| + A_p \|\psi_2(x)\| \leq 2 A_p \|\psi(x)\|.$$

Так как $\bar{\psi}(x) \in L^2$, то $\bar{\psi}(r, x) \rightarrow \bar{\psi}(x)$ почти всюду, и по теореме Фату, переходя к пределу, получаем

$$\|\bar{\psi}(x)\| \leq 2 A_p \|\psi(x)\|,$$

т. е. формула (14.1) остается справедливой, если только A_p заменить через $2A_p$.

Наконец, чтобы освободиться от ограничения $1 < p \leq 2$, докажем, что если формула (14.1) верна для p , то она верна и для q , где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

причем $A_q = A_p$.

Для этого рассмотрим любой тригонометрический полином $g(x)$ и его сопряженный $\bar{g}(x)$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} v g dx = - \int_0^{2\pi} u \bar{g} dx, \quad (14.3)$$

в чем можно убедиться, составляя равенство Парсеваля для обеих частей и опираясь на сопряженность u и v (здесь все функции принадлежат L^2).

Допустим, что полином $g(x)$ выбран так, что

$$\int_0^{2\pi} |g|^p dx \leq 1. \quad (14.4)$$

Обозначая кратко через $\|f\|_p$ норму $f(x)$ в L^p на отрезке $[0, 2\pi]$, будем иметь

$$\left| \int_0^{2\pi} u \bar{g} dx \right| \leq \|u\|_q \|\bar{g}\|_p \leq A_p \|u\|_q \|g\|_p \leq A_p \|u\|_q$$

в силу (14.4); следовательно,

$$\left| \int_0^{2\pi} v g dx \right| \leq A_p \|u\|_q.$$

Но так как (см. Вводный материал, § 20)

$$\sup_{\|g\|_p \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} v g dx \right| = \|v\|_q,$$

то отсюда сразу следует

$$\|v\|_q \leq A_p \|u\|_q,$$

т. е. лемма 2 доказана. Значит, и лемма 1 справедлива.

Мы теперь имеем возможность установить следующую замечательную теорему М. Рисса (M. Riesz⁽¹⁾):

Теорема М. Рисса. Если $\varphi(x) \in L^p$, $p > 1$, то $\bar{\varphi}(x) \in L^p$ и $\bar{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$; при этом

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |\varphi|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (14.5)$$

где A_p — константа, зависящая только от p .

Доказательство. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

есть ряд Фурье для $\varphi(x)$. На основании теоремы 3' (см. глава I, § 60) и полученной при ее доказательстве формулы (60.18) имеем

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |\varphi(r, x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0 \leq r < 1).$$

На основании леммы I имеем

$$\left(\int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}(r, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(r, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (14.6)$$

Снова возвращаясь к теореме 3', заключаем, что $\bar{\sigma}(\varphi)$ есть ряд Фурье от некоторой функции $\Phi(x)$; $\bar{\sigma}(\varphi) = \sigma(\Phi)$. Но так как $\sigma(\Phi)$ есть ряд Фурье, то он почти всюду суммируется к Φ методом Абеля. С другой стороны, мы знаем (см. § 6), что для любой $f(x)$ ряд $\bar{\sigma}(f)$ суммируется методом Абеля именно к $f(x)$. Значит, $\Phi(x) \equiv \bar{\varphi}(x)$, а потому $\bar{\sigma}(\varphi) = \sigma(\bar{\varphi})$.

Нам остается доказать неравенство (14.5). Но мы уже отметили, что $\bar{\varphi}(r, x) \rightarrow \bar{\varphi}(x)$ почти всюду; поэтому по лемме Фату (см. Вводный материал, § 14) и принимая во внимание (14.6), находим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \left(\int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}(r, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq A_p \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(r, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

и таким образом (14.5) доказано.

З а м е ч а н и е. Мы доказали только существование константы A_p , для которой (14.5) справедливо. В ряде случаев этого совершенно достаточно. Однако иногда бывает важно знать, как меняется A_p , если p неограниченно растет. В методе Кальдерона такой оценки не содержится. Штейн (Stein^[1]) дал другое доказательство теоремы Рисса (см., например, Зигмунд^[М.6], § 7, 23), при котором он получил

$$A_p \leq 2p \quad \text{для} \quad p \geq 2.$$

Если бы проводить оценку A_p , пользуясь неравенством (14.2) Кальдерона и переходя затем от p к q , где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то можно было бы получить только

$$A_p \leq Cp^{1+q} \quad \text{для} \quad p \geq 2,$$

где C — абсолютная константа. И так как $q \geq 1$, то такая оценка значительно грубее.

Вернемся теперь к теореме Рисса и выведем из нее одну интересную формулу; обычно ее называют формулой Рисса.

Пусть даны две функции, из которых одна принадлежит L^p , а другая L^q , где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Мы знаем (см. Вводный материал, § 9), что тогда их произведение обязано быть суммируемым. Но по теореме Рисса, если $f \in L^p$, то и

$f \in L^p$, и если $\varphi \in L^q$, то и $\bar{\varphi} \in L^q$. Поэтому $f \bar{\varphi}$ и $\bar{f} \varphi$ должны быть суммируемы. *Формулой Рисса* называется равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx = - \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx.$$

Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно заметить, что если

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$\bar{f}(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx,$$

и если

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

то

$$\bar{\varphi}(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos nx - \alpha_n \sin nx.$$

Но для произведения двух функций, из которых одна принадлежит L^p , а другая L^q , справедливо равенство Парсеваля (см. глава II, § 5), а потому

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \beta_n - b_n \alpha_n)$$

и по той же формуле

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \alpha_n - a_n \beta_n),$$

а это и значит, что справедлива формула Рисса*).

§ 15. Теорема Зигмунда

Если $p = 1$, то теорема Рисса (§ 14) не имеет места, так как $\bar{f}(x)$ может и не быть суммируемой (см. § 13, теорема Лузина). А. Зигмунд указал еще один важный случай, когда $\bar{f}(x)$ суммируема и когда можно дать оценку для ее интеграла. Именно, имеет место

Теорема Зигмунда).** Если $|f| \ln^+ |f| \in L$, то $\bar{f}(x)$ суммируема и

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}| dx \leq A \int_0^{2\pi} |f| \ln^+ |f| dx + B, \quad (15.1)$$

где A и B — абсолютные константы.

Нижеследующее доказательство принадлежит Кальдерону (Calderon^[1]). Докажем сначала лемму.

*) Правда, в § 5 главы II равенство Парсеваля было доказано лишь со ссылкой на результат § 20 главы VIII; таким образом, и здесь надо помнить, что формула Рисса будет окончательно доказана только после установления справедливости этого результата.

**) См. Zygmund [5].

Л е м м а. Пусть $F(z) = u(z) + iv(z)$ регулярна внутри круга $|z| < 1$, $u(z) > 0$, $v(0) = 0$; тогда для $r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})| dx \leq C \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) dx + D \int_0^{2\pi} u \ln u dx - 2\pi Du(0) \ln u(0), \quad (15.2)$$

где C и D — абсолютные положительные константы.

Установим предварительно справедливость неравенства

$$|\sin \theta| \leq C \cos \theta + D(\cos \theta \ln \cos \theta + \theta \sin \theta) \quad (15.3)$$

для $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Действительно, если $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, то $\cos \theta \ln \cos \theta = 0$ и $\theta \sin \theta = \frac{\pi}{2}$; значит, взяв D достаточно большим, можем сделать $D(\cos \theta \ln \cos \theta + \theta \sin \theta) > 1$ в некоторой малой окрестности $-\frac{\pi}{2}$ и в такой же окрестности $\frac{\pi}{2}$. Добавляя член $C \cos \theta$, который положителен, как бы мы ни выбрали $C > 0$ при $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} + \delta$, мы видим, что в этих двух отрезках правая часть (15.3) больше 1.

С другой стороны, при $-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ имеем $\cos \theta > a > 0$, поэтому при уже выбранном D величина $D(\cos \theta \ln \cos \theta + \theta \sin \theta)$ остается ограниченной на этом отрезке; значит, можно выбрать C столь большим, что вся правая часть (15.3) станет > 1 ; итак, можно сделать ее больше 1 при всех θ , $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, а тогда (15.3) справедливо.

Так как $F(z)$ не должно обращаться в нуль при $|z| > 1$, то $F \ln F$ регулярна в этом круге и, значит, интегрируя вдоль $|z| = r$, мы имеем

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) \ln F(z) \frac{dz}{z} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} [F \ln F] dx = u(0) \ln u(0). \quad (15.4)$$

Но если $F = Re^{i\theta}$, то

$$F \ln F = R(\cos \theta + i \sin \theta)(\ln R + i \theta).$$

Вторую скобку нам удобно переписать в виде

$$\ln(R \cos \theta) - \ln \cos \theta + i \theta$$

и тогда получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [F \ln F] &= \operatorname{Re} \{ R(\cos \theta + i \sin \theta) [\ln(R \cos \theta) - \ln \cos \theta + i \theta] \} = \\ &= R \cos \theta \ln(R \cos \theta) - R(\cos \theta \ln \cos \theta + \theta \sin \theta). \end{aligned}$$

Подставляя это в формулу (15.4), найдем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R[\cos \theta \ln \cos \theta + \theta \sin \theta] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \ln u dx - u(0) \ln u(0). \quad (15.5)$$

Наконец, умножая (15.3) на R , интегрируя по x и подставляя в (15.5), найдем

$$\int_0^{2\pi} |v| dx \leq C \int_0^{2\pi} u dx + D \int_0^{2\pi} u \ln u dx - 2\pi D u(0) \ln u(0),$$

а это и есть неравенство (15.2). Следовательно, лемма доказана.

Заметим теперь, что если $u(z) > e$, то в неравенстве (15.2) первый интеграл меньше второго, а член, не содержащий интегралов, отрицателен; поэтому можно написать

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})| dx \leq K \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) \ln u(re^{ix}) dx, \quad \text{если } u(z) > e, \quad (15.6)$$

где K — абсолютная константа.

Пусть теперь на $u(z)$ не наложено никаких дополнительных ограничений. Докажем, что тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})| dx \leq A \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})| \ln^+ |u| dx + B, \quad (15.7)$$

где A и B — абсолютные константы.

Положим

$$u(re^{ix}) = \psi(x)$$

и пусть

$$\psi_1(x) = \max\{\psi(x), e\},$$

$$\psi_2(x) = \min\{\psi(x), -e\},$$

$$\psi_3(x) = \psi(x) - [\psi_1(x) + \psi_2(x)].$$

Ясно, что

$$|\psi_3(x)| \leq e.$$

Пусть $\psi_1(\varrho, x)$, $\psi_2(\varrho, x)$, $\psi_3(\varrho, x)$ — соответствующие гармонические функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 , а $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_3$ — их сопряженные. Поскольку $\psi_3(x)$ ограничена, а значит, $\psi_3(x) \in L^2$, то, пользуясь неравенством Буняковского, а затем равенством Парсеваля, найдем

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}_3(\varrho, x)| dx \leq \sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} [\bar{\psi}_3(\varrho, x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} [\bar{\psi}_3(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь в силу формулы (1.3) из § 1 имеем

$$\left\{ \int_0^{2\pi} [\bar{\psi}_3(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_0^{2\pi} [\psi_3(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

а так как $|\psi_3(x)| \leq e$, то

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} [\psi_3(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq e \sqrt{2\pi}, \\ \int_0^{2\pi} |\bar{\psi}_3(\varrho, x)| dx &\leq \sqrt{2\pi} e \sqrt{2\pi} = 2\pi e = L, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

где L — абсолютная константа.

Поскольку $\psi_1(x) \geq e$, то имеем в силу (15.6)

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}_1(\varrho, x)| dx \leq K \int_0^{2\pi} \psi_1(\varrho, x) \ln \psi_1(\varrho, x) dx; \quad (15.9)$$

то же справедливо для ψ_2 , а потому

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}_2(\varrho, x)| dx \leq K \int_0^{2\pi} |\psi_2(\varrho, x)| \ln |\psi_2| dx. \quad (15.10)$$

Складывая (15.8), (15.9) и (15.10), находим

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}(\varrho, x)| dx \leq K \int_0^{2\pi} \psi_1(\varrho, x) \ln \psi_1(\varrho, x) dx + K \int_0^{2\pi} |\psi_2(\varrho, x)| \ln |\psi_2(\varrho, x)| dx + L.$$

Переходя к пределу при $\varrho \rightarrow 1$, получим

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}(x)| dx \leq K \int_0^{2\pi} \psi_1 \ln \psi_1 dx + K \int_0^{2\pi} |\psi_2| \ln |\psi_2| dx + L. \quad (15.11)$$

Заметим теперь, что если E есть множество тех x , где $\psi(x) \geq e$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi_1 \ln \psi_1 dx &\leq \int_E \psi_1 \ln \psi_1 dx + e m CE \leq \\ &\leq \int_E |\psi| \ln^+ |\psi| dx + e \cdot 2\pi \leq \int_0^{2\pi} |\psi| \ln^+ |\psi| dx + e \cdot 2\pi \end{aligned}$$

и также

$$\int_0^{2\pi} |\psi_2| \ln |\psi_2| dx \leq \int_0^{2\pi} |\psi| \ln^+ |\psi| dx + e \cdot 2\pi.$$

Отсюда и из (15.11) окончательно получаем (полагая $A = 2K$, $B = 4\pi Ke + L$)

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\psi}(x)| dx \leq A \int_0^{2\pi} |\psi| \ln^+ |\psi| dx + B,$$

где A и B — абсолютные константы, а это и есть (15.7).

Теперь для перехода к (15.1) нам осталось доказать, что

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{ix})| \ln^+ |u(re^{ix})| dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| \ln^+ |f(x)| dx. \quad (15.12)$$

Так как

$$u(re^{ix}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t-x) f(t) dt,$$

то

$$|u(re^{ix})| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t-x) |f(t)| dt.$$

Применяя к функции $F \ln^+ F$ формулу Иенсена (см. Добавления, § 21), получим

$$|u(re^{ix})| \ln^+ |u(re^{ix})| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \ln^+ |f(t)| P_r(t-x) dt.$$

Интегрируя по x , получаем (15.12), и теорема Зигмунда доказана.

Для случая, когда $f \geq 0$, эта теорема допускает обращение, т. е. можно доказать*) теорему.

Т е о р е м а. Если $f \geq 0$ и f суммируема, то $f \ln^+ f$ суммируема.

Чтобы убедиться в этом, достаточно, очевидно, рассмотреть случай $f \geq 1$. Рассмотрим, как и раньше, функции $u(re^{ix})$ и $v(re^{ix})$, т. е. пуассоновскую сумму от f и сопряженную к ней гармоническую функцию.

*) Эта теорема принадлежит М. Риссу (M. Riesz^[1]).

Положим $F(z) = u(z) + iv(z)$ и проинтегрируем по кругу $|z| = r$ регулярную функцию $F(z) \ln F(z)$. Так как по интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z) \ln F(z)}{z} dz = F(0) \ln F(0),$$

то, приравнявая действительные части, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ u \ln \sqrt{u^2 + v^2} - v \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right\} dx = u(0) \ln u(0).$$

Но так как $0 \leq v \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \leq \frac{\pi}{2} |v|$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \ln u \, dx \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |v| \, dx + u(0) \ln u(0). \quad (15.13)$$

Мы увидим в § 18, что если f суммируема, то $\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f})$. Отсюда следует, что $v(re^{ix})$ есть пуассоновская сумма для \bar{f} , а потому при $r \rightarrow 1$ интеграл в правой части (15.13) остается ограниченным. Применяя лемму Фату, заключаем отсюда, что $\int_0^{2\pi} f \ln f \, dx$ конечен, т. е. $f \ln f$ суммируема.

Пользуясь доказанной теоремой, легко построить новый пример функции $f(x) \in L$, для которой $\bar{f}(x) \notin L$ (первый пример был построен Н. Н. Лузиным, см. § 13). В самом деле, положим

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & \text{на } \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{на } \left[\frac{1}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Так как $f(x) > 0$, а $f(x) \ln^+ f(x) \in L$, то по теореме М. Рисса функция $f(x)$ должна быть несуммируемой.

§ 16. Суммируемость $|\bar{f}(x)|^p$ при $p < 1$

Мы уже неоднократно отмечали, что если $f(x) \in L$, то сопряженная $f(x)$ не должна быть суммируемой. Однако можно доказать, что для любого p , $0 < p < 1$ функция $|\bar{f}(x)|^p$ суммируема (см. А. Н. Колмогоров^[2], Титчмарш (Titchmarsh^[1]), Литтлвуд (Littlewood^[2], Hardy^[3])). Здесь будет приведено доказательство этой теоремы, принадлежащее Титчмаршу. Но предварительно нам понадобится несколько лемм. Сначала введем одно определение, которое будет использовано и здесь, и позже при изучении так называемых А-интегралов.

О п р е д е л е н и е. Пусть $f(x)$ — любая измеримая функция. Условимся говорить, что она удовлетворяет условию (I), если

$$mE[|f(x)| > n] = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (I)$$

Это условие названо условием (I), так как оно играет существенную роль в теории интегрирования (это было отмечено Титчмаршем (Titchmarsh^[1]) Колмогоровым^[2]).

Для случая, когда функция $f(x)$ суммируема, легко сразу же убедиться, что она должна удовлетворять условию (I). В самом деле, можно написать

$$E[|f(x)| > n] = \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{E}_k,$$

где

$$\mathcal{E}_k = [k < |f(x)| \leq k+1].$$

Но в силу суммируемости $f(x)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m \mathcal{E}_k < +\infty,$$

откуда

$$mE = \sum_{k=n}^{\infty} m \mathcal{E}_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} k m \mathcal{E}_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k m \mathcal{E}_k = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ниже будет доказано, что если $f(x)$ суммируема, то и $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию (I). Но прежде чем доказать это, нам понадобится установить справедливость следующей леммы:

Л е м м а 1. *Существует абсолютная константа A такая, что если $\bar{f}(x)$ сопряженная к $f(x)$ и*

$$E_N = [|\bar{f}(x)| > N],$$

то

$$mE_N \leq \frac{A}{N} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx. \quad (16.1)$$

Эта лемма принадлежит А. Н. Колмогорову^[2]. Нижеследующее доказательство дано Титчмаршем.

Функцию $\bar{f}(x)$ можно выразить формулой

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} (P) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt, \quad (16.2)$$

где символ (P) означает, что интеграл надо понимать в смысле главного значения, т. е. как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\pi}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\pi} \right].$$

Действительно, совершая замену переменного, мы от (16.2) сразу переходим к обычному выражению

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt.$$

Для удобства вычислений рассмотрим вспомогательную функцию $h(x)$

$$h(x) = (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (16.3)$$

Покажем, что если

$$\mathcal{E}_N = [|h(x)| < N]$$

и для всех достаточно больших N

$$m\mathcal{E}_N \leq \frac{A}{N} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \quad (16.4)$$

то формула (16.1) будет доказана (только с другой константой A).

В самом деле, мы можем написать в силу периодичности $f(x)$

$$h(x) = (P) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t-x-2\pi} + \frac{1}{t-x+2\pi} \right] dt.$$

Но так как, полагая $\frac{t-x}{2} = u$ и замечая, что

$$\frac{1}{\operatorname{tg} u} - \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{u+\pi} \right] = \psi(u)$$

есть функция непрерывная на $[-\pi, \pi]$, мы можем написать

$$-2\pi \bar{f}(x) = (P) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt = 2h(x) + j(x), \quad (16.5)$$

где

$$j(x) = (P) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \psi\left(\frac{t-x}{2}\right) dt,$$

причем при $-2\pi \leq t-x \leq 2\pi$ функция $\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$ непрерывна, значит, при $-\pi \leq x \leq \pi$ и $-\pi \leq t \leq \pi$ имеем

$$\left| \psi\left(\frac{t-x}{2}\right) \right| \leq M,$$

где M постоянно, откуда

$$|j(x)| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (16.6)$$

Обозначим для краткости

$$C = \frac{1}{2\pi} M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

В силу (16.5)

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} h(x) - \frac{1}{2\pi} j(x). \quad (16.7)$$

Возьмем любое $N > 2C$, тогда если $|f(x)| > N$, то непременно $\left| \frac{h(x)}{\pi} \right| > N - C$, поскольку $\left| \frac{j(x)}{2\pi} \right| \leq C$, а, следовательно, $|h(x)| > \pi(N - C) > \frac{\pi}{2} N > N$. Поэтому, если только $N > 2C$, то

$$E_N \subset \mathcal{E}_N$$

и, значит, предполагая (16.4) уже доказанным, имеем

$$mE_N \leq m\mathcal{E}_N \leq \frac{A}{N} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \quad \text{если} \quad N > 2C.$$

Ясно, что если $N \leq 2C$, то

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx}{N} \geq \frac{2\pi C}{2CM} = \frac{\pi}{M},$$

а потому достаточно принять $A = 2M$, чтобы неравенство (16.1) имело место. Итак, оно справедливо при всех N при разумном подборе A .

Мы видим, что достаточно доказывать неравенство (16.4) для функции $h(x)$, определяемой равенством (16.3).

Для дальнейшего нам будет полезно следующее замечание: если бы $f(x) \in L^2$, то мы имели бы

$$\int_{-\pi}^{\pi} [h(x)]^2 dx \leq B \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (16.8)$$

где B — абсолютная константа. В самом деле, если $f(x) \in L^2$, то и $f(x)$ тоже и (см. § 1, формула (1.3))

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Но в силу (16.5)

$$h^2(x) = \left[\pi \bar{f}(x) + \frac{1}{2} j(x) \right]^2,$$

а в силу (16.6)

$$j^2(x) \leq M^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \right)^2 \leq M^2 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \cdot 2\pi,$$

поэтому неравенство (16.8) при разумном подборе константы B справедливо.

Переходим к доказательству неравенства (16.4). Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением случая $f \geq 0$.

Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } 0 \leq f \leq n, \\ 0, & \text{если } f > n \end{cases}$$

и

$$r_n(x) = f(x) - \varphi_n(x).$$

В силу свойств интеграла Лебега можно выбрать n столь большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi} r_n(x) dx = a_n$$

был как угодно мал и, в частности, был меньше 1. Опуская для краткости знак n и полагая

$$\psi(x) = \int_0^x r_n(t) dt,$$

мы видим, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(2\pi) = a_n$.

Положим

$$\theta(x) = \psi(x) - \frac{1}{2} nx.$$

Имеем $\theta(0) = 0$. Пусть x_0 — наибольший корень уравнения $\theta(x) = 0$. Ясно, что

$$x_0 = \frac{2}{n} \psi(x_0) \leq \frac{2a_n}{n} < \frac{2}{n}.$$

Рассмотрим на интервале $(x_0, 2\pi)$ множество тех точек x_1 , для которых

$$\theta(x_1) < \max_{x_1 \leq x \leq 2\pi} \theta(x).$$

В силу непрерывности $\theta(x)$ ясно, что это множество открытое; добавим к нему интервал $(0, x_0)$, получим открытое множество L ; пусть $l_i = (a_i, b_i)$ — составляющие его интервалы (рис. 37). Нетрудно доказать*), что для каждого из них $\theta(b_i) = \theta(a_i)$,

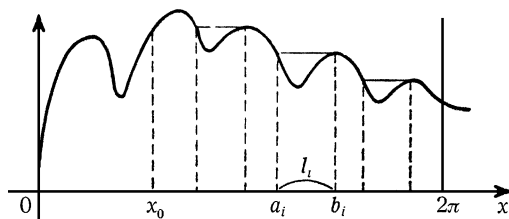


Рис. 37

следовательно,

$$\psi(b_i) - \frac{1}{2}nb_i = \psi(a_i) - \frac{1}{2}na_i,$$

откуда

$$\int_{a_i}^{b_i} r_n(t) dt = \psi(b_i) - \psi(a_i) = \frac{1}{2}nl_i$$

$$\text{и} \quad \int_L r_n(t) dt = \frac{1}{2}n \sum l_i. \quad (16.9)$$

С другой стороны, мы сейчас докажем, что

$$\int_L r_n(t) dt = a_n \quad (16.10)$$

и это даст нам возможность оценить $\sum l_i$.

Рассмотрим такую точку ξ , где $\psi'(\xi) > \frac{1}{2}n$; так как в такой точке

$$\theta'(\xi) = \psi'(\xi) - \frac{1}{2}n > 0,$$

то $\xi \in L$, потому что $\theta(t)$ возрастает в точке ξ . Но $\psi'(x) = r_n(x)$ почти всюду, а $r_n(x)$ по самому определению либо равна нулю, либо $r_n(x) > n$. Значит, почти все те точки x , где $r_n(x) \neq 0$, должны принадлежать L , а потому

$$a_n = \int_0^{2\pi} r_n(x) dx = \int_L r_n(x) dx;$$

это и есть (16.10). Кроме того, отсюда же

$$\int_{CL} r_n(x) dx = 0, \quad (16.11)$$

где CL дополнение к L относительно $[0, 2\pi]$.

Из (16.9) и (16.10) находим

$$mL = \sum l_i = \frac{2a_n}{n}. \quad (16.12)$$

*) Действительно, пусть (a_i, b_i) — любой интервал из L и z_0 — любая его точка. Докажем сначала, что $\theta(z_0) \leq \theta(b_i)$. Пусть это неверно, т. е. $\theta(z_0) > \theta(b_i)$. Рассмотрим множество точек отрезка $[z_0, b_i]$, где $\theta(x) > \theta(z_0)$. Оно замкнуто. Пусть ξ — его самая правая точка. Поскольку $\theta(z_0) > \theta(b_i)$, то $\xi < b_i$, значит, $z_0 \leq \xi < b_i$. Поэтому $\xi \in L$. Но тогда по определению L найдется точка $\xi' > \xi$, где $\theta(\xi') > \theta(\xi)$, а потому $\theta(\xi') > \theta(z_0) > \theta(b_i)$. Тогда ξ' не может принадлежать (z_0, b_i) , иначе ξ не была бы самой правой точкой, где $\theta(x) > \theta(z_0)$. С другой стороны, если бы имели $b_i < \xi'$, то из $\theta(b_i) < \theta(\xi')$ следовало бы, что $b_i \in L$, но L открытое. Итак, гипотеза $\theta(z_0) > \theta(b_i)$ привела к противоречию. Поэтому для любой точки $x \in (a_i, b_i)$ имеем $\theta(x) \leq \theta(b_i)$. Отсюда $\theta(a_i) \leq \theta(b_i)$. Но неравенство невозможно, так как иначе $a_i \in L$, а L — открытое.

Наконец, введем еще функцию $\Phi_n(x)$ так:

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & \text{если } x \in L, \\ 0, & \text{если } x \in CL. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{a_i}^{b_i} \Phi_n(t) dt = \frac{1}{2}nl_i = \int_{a_i}^{b_i} r_n(t) dt. \quad (16.13)$$

Построим систему L' интервалов l'_i , концентрических с l_i и таких, что $l'_i = 5l_i$ (где длины интервалов обозначаются теми же буквами, как они сами). Интервалы l'_i могут перекрываться.

Все до сих пор построенные множества и функции рассматривались на $[0, 2\pi]$; дальше мы их продолжим периодически.

Напишем теперь:

$$\begin{aligned} h(x) &= (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{f(t)}{t-x} dt = (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{\varphi_n(t)}{t-x} dt + (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{r_n(t)}{t-x} dt = \\ &= (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{\varphi_n(t)}{t-x} dt + (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{\Phi_n(t)}{t-x} dt + (P) \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{r_n(t) - \Phi_n(t)}{t-x} dt = \\ &= h_1(x) + h_2(x) + h_3(x). \end{aligned} \quad (16.14)$$

Так как $\varphi_n(t)$ ограниченная функция и, тем более, принадлежит L^2 , то по формуле (16.8) имеем

$$\int_0^{2\pi} h_1^2(t) dt \leq A \int_0^{2\pi} \varphi_n^2(t) dt \leq An \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) dt \leq An \int_0^{2\pi} f(t) dt \quad (16.15)$$

на основании определения $\varphi_n(x)$.

Совершенно так же из (16.12)

$$\int_0^{2\pi} h_2^2(t) dt \leq A \int_0^{2\pi} \Phi_n^2(t) dt = A \left(\frac{1}{2}n\right)^2 mL = \frac{A}{4}n^2 \frac{2a_n}{n} = \frac{A}{2}na_n. \quad (16.16)$$

Наконец, рассмотрим $h_3(x)$. Для этого сначала оценим

$$J_i = \int_{l_i} \frac{r_n(t) - \Phi_n(t)}{t-x} dt \quad \text{для } x \in \bar{l}'_i.$$

Так как $r_n(t) \geq 0$ и $\Phi_n(t) \geq 0$, то можно написать

$$J_i = \frac{1}{t_1-x} \int_{l_i} r_n(t) dt - \frac{1}{t_2-x} \int_{l_i} \Phi_n(t) dt = \left(\frac{1}{t_1-x} - \frac{1}{t_2-x}\right) \frac{1}{2}nl_i,$$

где t_1 и t_2 — точки из l_i и интегралы заменены их величинами по формуле (16.13). Но тогда, обозначая через c_i центр l_i и помня, что $x \in \bar{l}'_i$, а $l'_i > 5l_i$, мы получаем

$$|J_i| < \frac{Anl_i^2}{(c_i-x)^2},$$

где A — некоторая абсолютная константа.

Если CL' — дополнение к L' и $x \in CL'$, то $x \in \bar{l}_i$ при любом i , а тогда

$$\begin{aligned} \int_{CL'} \frac{l_i^2}{(c_l - x)^2} dx &\leq l_i^2 \int_{(-\infty, +\infty) - l_i'} \frac{dx}{(c_l - x)^2} \leq l_i^2 \int_{-\infty}^{c_l - \frac{l_i'}{2}} \frac{dx}{(c_l - x)^2} + l_i^2 \int_{c_l + \frac{l_i'}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(c_l - x)^2} = \\ &= l_i^2 \int_{-\infty}^{-\frac{l_i'}{2}} \frac{du}{u^2} + l_i^2 \int_{\frac{l_i'}{2}}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -2 l_i^2 \left[\frac{1}{u} \right]_{\frac{l_i'}{2}}^{\infty} = 4 \frac{l_i^2}{l_i'} < l_i, \end{aligned}$$

так как $l_i' = 5l_i$. Поэтому

$$\int_{CL'} |J_i| dx \leq An l_i. \quad (16.17)$$

Но

$$\int_{CL'} |h_3(x)| dx = \int_{CL'} \left| \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{r_n(t) - \Phi_n(t)}{t - x} dt \right| dx = \int_{CL'} \left| \sum_{l_i} \int_{l_i} \frac{r_n(t) - \Phi_n(t)}{t - x} dt \right| dx,$$

потому что если $t \in L$, то $\Phi_n(t) = 0$ по определению, а $r_n(t) = 0$ почти всюду вне L . Следовательно, учитывая, что суммирование распространяется на все $l_i \in [-3\pi, 3\pi]$, находим

$$\int_{CL'} |h_3(x)| dx = \int_{CL'} \sum_i |J_i| dx \leq An \sum_{l_i \in [-3\pi, 3\pi]} l_i = 6 a_n A \quad (16.18)$$

в силу (16.17) и (16.12).

Пусть теперь $N > 0$ любое. Обозначим через l_3 множество тех x , где

$$|h_3(x)| > \frac{N}{3}.$$

Если $l_3' = l_3 CL'$ и $l_3'' = l_3 L'$, то в силу (16.18) имеем

$$\int_{l_3'} |h_3(x)| dx \leq 6 a_n A.$$

Значит,

$$\frac{N}{3} m l_3' \leq 6 a_n A,$$

т. е.

$$m l_3' \leq \frac{18}{N} a_n A.$$

Отсюда в силу (16.12)

$$m l_3 \leq m l_3' + m L' \leq \frac{18 A a_n}{N} + \frac{10 a_n}{n}. \quad (16.19)$$

Пусть теперь l_1 и l_2 — множества тех x , где соответственно

$$|h_1(x)| > \frac{N}{3} \quad \text{или} \quad |h_2(x)| > \frac{N}{3}.$$

В силу (16.15) имеем

$$\left(\frac{N}{3}\right)^2 m l_1 \leq An \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

то есть

$$m l_1 \leq \frac{Bn}{N^2} \int_0^{2\pi} f(t) dt. \quad (16.20)$$

Аналогично из (16.16) получим

$$\left(\frac{N}{3}\right)^2 ml_2 \leq \frac{A}{2} n a_n,$$

откуда

$$ml_2 \leq \frac{Bn}{N^2} a_n. \quad (16.21)$$

Если \mathcal{E} есть множество тех x , где $|h(x)| > N$, то $\mathcal{E} \subset l_1 + l_2 + l_3$ и, значит, из (16.19), (16.20) и (16.21)

$$m\mathcal{E} < \frac{18A}{N} a_n + \frac{10a_n}{n} + \frac{Bn}{N^2} \left\{ a_n + \int_0^{2\pi} f(t) dt \right\}.$$

Остается заметить, что из $0 \leq r_n(t) \leq f(t)$ следует

$$a_n = \int_0^{2\pi} r_n(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Кроме того, в наших рассуждениях n было любым, а потому можно положить $n = N$; тогда найдем

$$m\mathcal{E} < \frac{C}{N} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

где C — абсолютная константа, а это и есть неравенство (16.4) для функции $h(x)$.

Мы уже видели, что если оно доказано, то справедливо и утверждение леммы.

Пользуясь этой леммой, докажем теорему.

Т е о р е м а *). Если $f(x)$ суммируема, то $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию (I), т. е.

$$mE(|\bar{f}| > N) = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Запишем $f(x)$ в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$\int_0^{2\pi} |f_2(x)| dx < \varepsilon.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\begin{aligned} mE\{|\bar{f}(x)| > N\} &\leq mE\left\{|\bar{f}_1(x)| \geq \frac{N}{2}\right\} + mE\left\{|\bar{f}_2(x)| \geq \frac{N}{2}\right\} \leq \\ &\leq mE\left\{|\bar{f}_1(x)| \geq \frac{N}{2}\right\} + 2A \frac{\varepsilon}{N}. \end{aligned}$$

Но $f_1(x)$ ограничена, а потому $\bar{f}_1(x) \in L^2$ и, следовательно, для нее $mE\{|\bar{f}_1(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е.

$$mE\left\{|\bar{f}_1(x)| \geq \frac{N}{2}\right\} \leq \frac{A\varepsilon}{N},$$

если только N достаточно велико, отсюда

$$mE\{|\bar{f}(x)| > N\} \leq \frac{\varepsilon}{N} \{A + 2A\} = \frac{3A\varepsilon}{N}$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это и доказывает теорему.

*) См. Колмогоров[2], Littlewood[2], Titchmarsh[1].

Прежде чем вернуться к вопросу о суммируемости $|\bar{f}(x)|^p$, о котором мы говорили в начале этого параграфа, нам понадобится еще одна лемма. Введем новое определение:

О п р е д е л е н и е. Две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ назовем *равноизмеримыми*, если для любого y имеем

$$mE[\varphi_1(x) > y] = mE[\varphi_2(x) > y].$$

Ясно, что если из двух равноизмеримых функций одна суммируема, то и другая тоже, и их интегралы равны. Справедлива следующая

Л е м м а 2. Для любой $\varphi(x)$, измеримой на некотором $[a, b]$, найдется невозрастающая на $[a, b]$ функция $g(x)$, равноизмеримая с $\varphi(x)$.

Не нарушая общности, можно принять $a = 0$. Положим

$$x = m(y) = mE\{\varphi(t) > y\}.$$

Ясно, что $m(y)$ не возрастает и непрерывна справа. Возьмем функцию

$$g(x) = \sup_{m(y) > x} y.$$

Очевидно также, что $g(x)$ не возрастает и непрерывна справа (рис. 38).

Покажем, что $g(x)$ и $\varphi(x)$ равноизмеримы. В самом деле, пусть y — любое число. Очевидно, что множество точек $g(t) > y$ есть полуинтервал $[0, x)$, поэтому

$$x = mE\{g > y\}.$$

С другой стороны, если $g(x) = y_1$, то $y_1 \leq y$ и $x = m(y_1) = m(y)$, т. е.

$$x = m(y) = mE\{\varphi > y\}.$$

Поэтому

$$mE\{g > y\} = mE\{\varphi > y\},$$

и лемма доказана.

Теперь мы, наконец, можем доказать теорему.

Т е о р е м а. Если $\bar{f}(x)$ суммируема, то для любого p , $0 < p < 1$, функция $|\bar{f}(x)|^p$ суммируема и

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)| dx \right)^p, \quad (16.22)$$

где A_p зависит только от p .

В силу леммы 2 существует невозрастающая $g(x)$, равноизмеримая с $|\bar{f}(x)|$. В силу леммы 1 мы имеем для любого N

$$mE[g > N] = mE[|\bar{f}| > N] < \frac{C}{N} \int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)| dx,$$

где C — абсолютная константа.

Положим

$$M = C \int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)| dx$$

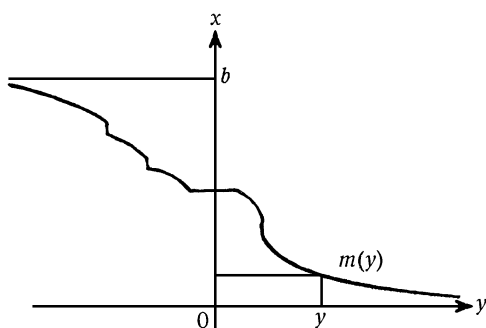


Рис. 38

и докажем, что кривая

$$y = g(x)$$

лежит целиком не выше, чем $y = \frac{M}{x}$ (рис. 39).

Действительно, $y = g(x)$ монотонна; пусть $g(x) = N$ в некоторой точке x_0 и допустим сначала, что x_0 не лежит ни в каком интервале постоянства для $g(x)$. Тогда $g(x) > N$ для всех x , $0 < x < x_0$, а потому

$$mE(g > N) = x_0.$$

Но по лемме 1

$$mE(|\bar{f}| > N) \leq \frac{M}{N},$$

значит,

$$x_0 \leq \frac{M}{N},$$

откуда $N \leq \frac{M}{x_0}$. Но в этой же точке x_0 для

$y = \frac{M}{x}$ имеем $y_0 = \frac{M}{x_0}$, значит, $g(x_0) \leq y_0$.

Таким образом, во всех точках, не лежащих в интервалах постоянства $g(x)$, имеем

$$g(x) \leq \frac{M}{x}. \quad (16.23)$$

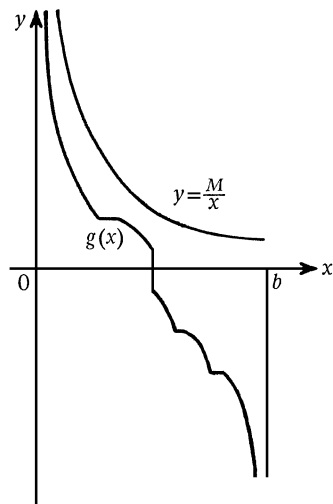


Рис. 39

Остается показать, что (16.23) справедливо и в интервалах постоянства. Допустим, что (α, β) такой интервал, x_0 — некоторая точка внутри него и

$$g(x_0) > \frac{M}{x_0}.$$

Тогда и подаловно $g(x_0) > \frac{M}{\beta}$. Выберем N так, чтобы $\frac{M}{\beta} < N < g(x_0)$. Очевидно, что для этого N имеем

$$mE\{g > N\} \geq \beta,$$

и, стало быть, $\beta \leq \frac{M}{N}$, т. е. $N \leq \frac{M}{\beta}$, а это противоречит выбору числа N . Итак, (16.23) справедливо всюду. Но тогда

$$|g(x)|^p \leq \left(\frac{M}{x}\right)^p,$$

а потому

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx = \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \leq M^p \int_0^{2\pi} \frac{dx}{x^p} \leq M^p \frac{(2\pi)^{1-p}}{1-p} = C^p \frac{(2\pi)^{1-p}}{1-p} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \right)^p$$

в силу (16.22).

Таким образом, полагая

$$A_p = \frac{C^p (2\pi)^{1-p}}{1-p},$$

видим, что теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Поскольку $p < 1$ и C — абсолютная константа, то

$$A_p < \frac{2\pi C}{1-p} = \frac{K}{1-p},$$

где K — абсолютная константа. Эта оценка для A_p будет нами использована в § 21.

§ 17. Ряды Фурье для сопряженных суммируемых функций

Мы теперь в состоянии доказать в общем виде факт, который уже наблюдали в некоторых специальных случаях, а именно, что если $\bar{f}(x) \in L$, то $\bar{\sigma}(f) = \sigma(f)$. Это обстоятельство впервые было отмечено Лузиным для случая $f \in L^2$ и Риссом для $f \in L^p$ при $p > 1$.

Прежде чем доказать нужное нам утверждение, докажем лемму Титчмарша.

Л е м м а. Пусть $f(x)$ — любая суммируемая функция и $\bar{f}(x)$ сопряженная с ней. Тогда найдется такая последовательность множеств E_n , $mE_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \bar{f}(x) \cos kx \, dx = -\pi b_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \bar{f}(x) \sin kx \, dx = \pi a_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье от $f(x)$.

Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть случай $f \geq 0$. Возьмем снова функции и множества, введенные в предыдущем параграфе. Имеем

$$f(x) = \varphi_n(x) + \Phi_n(x) + [r_n(x) - \Phi_n(x)],$$

значит,

$$\bar{f}(x) = \bar{\varphi}_n(x) + \bar{\Phi}_n(x) + [\overline{r_n(x) - \Phi_n(x)}]. \quad (17.1)$$

Положим $E_n = [0, 2\pi] - L'$; мы видели, что $mL' \leq 5mL = \frac{10\alpha_n}{n}$, поэтому $mE_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $\varphi_n(x)$ ограничена, то $\varphi_n(x) \in L^2$, а потому $\sigma(\varphi_n)$ и $\sigma(\bar{\varphi}_n)$ являются сопряженными рядами Фурье. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_n(x) \cos kx \, dx &= - \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \sin kx \, dx = \\ &= - \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx + \int_0^{2\pi} (f - \varphi_n) \sin kx \, dx = -\pi b_k + o(1), \end{aligned}$$

потому что $\int_0^{2\pi} |f - \varphi_n| \, dx = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\begin{aligned} \left(\int_{L'} \bar{\varphi}_n(x) \cos kx \, dx \right)^2 &\leq \int_{L'} (\bar{\varphi}_n)^2 \, dx \int_{L'} \cos^2 kx \, dx \leq mL' \int_0^{2\pi} (\bar{\varphi}_n)^2 \, dx \leq mL' \int_0^{2\pi} (\varphi_n)^2 \, dx \leq \\ &\leq \frac{10\alpha_n}{n} n \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \, dx \leq 10\alpha_n \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = o(1), \end{aligned}$$

потому что $\alpha_n \rightarrow 0$, а $\varphi_n \leq f$.

Следовательно,

$$\int_{L'} \bar{\varphi}_n(x) \cos kx \, dx = o(1),$$

откуда, вспоминая, что $E_n = [0, 2\pi] - L'$, находим

$$\int_{E_n} \bar{\varphi}_n(x) \cos kx \, dx = -\pi b_k + o(1).$$

Далее, так как $\bar{\Phi}_n(x)$ — сопряженная к ограниченной $\Phi_n(x)$, то

$$\int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n(x) \cos kx \, dx = -\int_0^{2\pi} \Phi_n(x) \sin kx \, dx.$$

Но

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} n & \text{при } x \in L, \\ 0 & \text{при } x \notin L. \end{cases}$$

Значит,

$$\left| \int_0^{2\pi} \Phi_n(x) \sin kx \, dx \right| = \left| \frac{1}{2} n \int_L \sin kx \, dx \right| \leq \frac{1}{2} n mL = \frac{1}{2} n \frac{2\alpha_n}{n} = \alpha_n = o(1)$$

и аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} \left(\int_{L'} \bar{\Phi}_n(x) \cos kx \, dx \right)^2 &\leq mL' \int_0^{2\pi} \Phi_n^2(x) \, dx = \frac{10 \alpha_n}{n} \left(\frac{1}{2} n \right)^2 mL = \\ &= \frac{10 \alpha_n}{n} \frac{n^2}{4} \frac{2 \alpha_n}{n} = 5 \alpha_n^2 = o(1), \end{aligned}$$

откуда опять также заключаем, что

$$\int_{E_n} \bar{\Phi}_n \cos kx \, dx = o(1).$$

Наконец, для $\overline{r_n(x) - \Phi_n(x)}$ рассуждаем так, как в предыдущем параграфе при оценке $h_3(x)$, и убеждаемся, что

$$\int_{E_n} \overline{(r_n - \Phi_n)} \cos kx \, dx = o(1).$$

Объединяя все полученные формулы, находим

$$\int_{E_n} \bar{f}(x) \cos kx \, dx = -\pi b_k + o(1),$$

а это и требовалось доказать.

Аналогично проводится доказательство для $\sin kx$.

Отсюда получаем теорему:

Т е о р е м а. Если $\bar{f}(x)$ суммируема, то

$$\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f}).$$

Эта теорема впервые была доказана В. И. Смирновым^[1]. Приведенное здесь доказательство принадлежит Титчмаршу (Titchmarsh^[1]).

Действительно, если $\bar{f}(x)$ суммируема, то независимо от того, какова структура E_n , если $mE_n \rightarrow 2\pi$, имеем

$$\int_{E_n} \bar{f}(x) \cos kx \, dx \rightarrow \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \cos kx \, dx$$

и аналогично для $\sin kx$, откуда и вытекает нужное утверждение.

Из теоремы Смирнова вытекает

С л е д с т в и е. Пусть $F(x)$ — периодическая и абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция. Если ее производная $f(x)$ имеет сопряженную $\bar{f}(x) \in L[0, 2\pi]$, то $\bar{F}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Действительно, по теореме Смирнова

$$\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f}).$$

Но ряд $\sigma(\bar{f})$, как ряд Фурье, можно интегрировать почленно, и полученный ряд сходится к абсолютно непрерывной функции. С другой стороны, поскольку этот ряд есть в то же время результат интегрирования $\bar{\sigma}(f)$, то очевидно, что эта функция совпадает с $\bar{F}(x)$.

Для дальнейшего нам будет полезно отметить, что этот результат можно перенести с отрезка $[0, 2\pi]$ на отрезок $[a, b]$ следующим образом:

Т е о р е м а*). Пусть $F(x)$ — периодическая и абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция. Если ее производная $f(x)$ имеет сопряженную $\bar{f}(x)$ такую, что $\bar{f}(x) \in L(a, b)$, то для любого $\varepsilon > 0$ функция $\bar{F}(x)$ абсолютно непрерывна на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Для доказательства положим

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ 0 & \text{на } \left[0, a + \frac{\varepsilon}{4}\right] \text{ и } \left[b - \frac{\varepsilon}{4}, 2\pi\right] \end{cases}$$

и проинтерполируем ее линейно на $\left(a + \frac{\varepsilon}{4}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\left(b - \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{4}\right)$; кроме того, примем $\lambda(x + 2\pi) = \lambda(x)$. Очевидно, что

$$|\lambda(x_2) - \lambda(x_1)| \leq K |x_2 - x_1| \quad (17.2)$$

(достаточно принять $K = \frac{4}{\varepsilon}$). Пусть

$$f_1(x) = f(x) \lambda(x).$$

Ясно, что $f_1(x) \in L[0, 2\pi]$. Покажем, что и

$$\bar{f}_1(x) \in L[0, 2\pi].$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(x) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f_1(x+t) - f_1(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) \lambda(x+t) - f(x-t) \lambda(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = \\ &= -\frac{\lambda(x)}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \psi(x) = \lambda(x) \bar{f}(x) + \psi(x), \end{aligned}$$

где $\psi(x)$ ограничена в силу условия (17.2). Поэтому функция $\bar{f}_1(x)$ почти всюду на $\left(a + \frac{\varepsilon}{4}, b - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ отличается от $\lambda(x) \bar{f}(x)$ на ограниченную функцию и в силу $\bar{f}(x) \in L(a, b)$ и непрерывности $\lambda(x)$ отсюда следует, что

$$\bar{f}_1(x) \in L\left(a + \frac{\varepsilon}{4}, b - \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

*) Эта теорема принадлежит П. Л. Ульянову.

С другой стороны,

$$\bar{f}_1(x) = \psi(x) \text{ на } \left[0, a + \frac{\varepsilon}{4}\right] \text{ и } \left[b - \frac{\varepsilon}{4}, 2\pi\right],$$

так как $\lambda(x) = 0$ на этих отрезках. Следовательно,

$$\bar{f}_1(x) \in L[0, 2\pi].$$

Тогда по теореме Смирнова $\sigma(\bar{f}_1) = \bar{\sigma}(f_1)$. Но $f_1(x) = f(x)$ на $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, так как на этом интервале $\lambda(x) = 1$. Поэтому на основании принципа локализации для рядов, сопряженных к рядам Фурье (см. § 3), ряды $\bar{\sigma}(f)$ и $\bar{\sigma}(f_1)$ отличаются на ряд T , сходящийся равномерно на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

Поэтому

$$\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f}_1) + T,$$

где T сходится равномерно на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Но сумма ряда, получающегося в результате интегрирования $\sigma(\bar{f}_1)$, есть функция, абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$, а ряд T можно почленно интегрировать на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ в силу его равномерной сходимости и получить поэтому снова функцию, абсолютно непрерывную на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Итак, результат почленного интегрирования $\bar{\sigma}(f)$ есть ряд, сходящийся к абсолютно непрерывной функции. Но, с другой стороны, $\bar{F}(x)$ имеет ряд Фурье, который может отличаться лишь на константу от результата интегрирования $\bar{\sigma}(f)$, а потому наше утверждение доказано.

§ 18. А-интеграл и сопряженные ряды

Мы знаем, что у суммируемой функции $f(x)$ сопряженная $\bar{f}(x)$ не обязана быть суммируемой. Возникает вопрос, нельзя ли так обобщить понятие интеграла, чтобы $f(x)$ оказалась уже интегрируемой в новом смысле и чтобы коэффициенты ряда $\bar{\sigma}(f)$ определялись по формулам Фурье, отправляясь от $\bar{f}(x)$, если понимать интеграл в этом новом смысле.

Прежде всего отметим, что для так называемого интеграла B [это одно из определений интеграла, предложенных Данжуа (Denjoy^[4]) и изучавшихся Боксом (Boks^[1])] А. Н. Колмогоров^[5] доказал теорему: для любой $f(x) \in L$ функция $\bar{f}(x)$ интегрируема в смысле интеграла B и $\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f})$, если в формулах Фурье понимать интегралы в этом смысле. Мы не даем здесь доказательства этой теоремы, так как интеграл B не нашел других применений в теории тригонометрических рядов. Вместо этого мы рассмотрим так называемый А-интеграл, который, как мы увидим дальше, оказался очень полезным, и мы докажем для него такую же теорему, как упомянутая теорема А. Н. Колмогорова для интеграла B .

Прежде всего, следуя Титчмаршу (Titchmarsh^[1]), введем определение Q -интеграла.

О п р е д е л е н и е. Функция $g(x)$ Q -интегрируема на $[a, b]$, если, полагая

$$[g(x)]_n = \begin{cases} g(x) & \text{при } |g(x)| \leq n, \\ 0 & \text{при } |g(x)| > n, \end{cases}$$

имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [g(x)]_n dx$ существует; этот предел и будет тогда назван

$$(Q) \int_a^b g(x) dx.$$

Q -интеграл не обладает свойством аддитивности, как показывает простой пример Титчмарша. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} n, & \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}, \\ -n, & -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} < x < -\frac{1}{n}, \\ 0 & \text{вне этих интервалов;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} n, & \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}, \\ -n, & -\frac{1}{n} < x < -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}, \\ 0 & \text{вне этих интервалов.} \end{cases}$$

Тогда

$$(Q) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 0, \quad (Q) \int_{-1}^1 \psi(x) dx = 0,$$

но

$$(Q) \int_{-1}^1 [\varphi(x) + \psi(x)] dx = \ln \frac{1}{2}.$$

Желая получить интеграл, который уже обладает свойством аддитивности, Титчмарш ввел дополнительное требование, которое в § 16 мы называли условием (I), т. е. он потребовал, чтобы для рассматриваемой функции

$$mE(|g| > n) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Он доказал, что если две функции удовлетворяют условию (I) и Q -интегрируемы, то тогда их сумма Q -интегрируема и интеграл суммы равен сумме интегралов. Мы докажем это предложение, но выразим его в иных терминах, для чего введем понятие *A-интеграла*.

Мы скажем, что $g(x)$ есть *функция A-интегрируемая на (a, b)*, если она удовлетворяет условию (I) и если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [g(x)]_n dx,$$

где

$$[g(x)]_n = \begin{cases} g(x) & \text{при } |g(x)| \leq n, \\ 0 & \text{при } |g(x)| > n. \end{cases}$$

При этом будем писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [g(x)]_n dx = (A) \int_a^b g(x) dx.$$

Таким образом, функция $g(x)$ *A-интегрируема*, если она Q -интегрируема и удовлетворяет условию (I).

А. Н. Колмогоров вводил *A-интеграл* в работе^[7].

Докажем теорему Титчмарша.

Т е о р е м а 1. Равенство

$$(A) \int_a^b \varphi dx + (A) \int_a^b \psi dx = (A) \int_a^b (\varphi + \psi) dx$$

справедливо, если любые два из *A-интегралов* этой формулы имеют смысл.

Покажем сначала, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \{[\varphi]_n + [\psi]_n - [\varphi + \psi]_n\} dx = 0.$$

В самом деле, если $|\varphi| < \frac{1}{2}n$ и $|\psi| < \frac{1}{2}n$, то подынтегральное выражение равно нулю; но множество точек, где хотя бы одно из этих неравенств не выполнено, имеет меру $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а подынтегральное выражение есть $O(n)$. Отсюда и получаем нужное утверждение.

Теперь ясно, что переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ мы можем доказать нужное равенство, если любые два из трех пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi]_n dx; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\psi]_n dx \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi + \psi]_n dx$$

существуют.

Выведем теперь для А-интегралов формулу, аналогичную формуле Рисса (см. § 14). Именно докажем такую теорему (см. Ульянов^[7]).

Т е о р е м а 2. Если $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ обе ограничены, а $f(x) \in L$, то $\bar{f}(x) \psi(x)$ А-интегрируема и

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \psi(x) dx = -(L) \int_0^{2\pi} f(x) \bar{\psi}(x) dx$$

(здесь $(L) \int$ означает интеграл Лебега).

Мы будем проводить доказательство для $f \geq 0$, что не нарушает общности ввиду аддитивности А-интеграла.

Вернемся ко множествам и функциям, рассмотренным в §§ 16 и 17, и докажем сначала, что

$$-\int_0^{2\pi} f(x) \bar{\psi}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \bar{f}(x) \psi(x) dx. \quad (18.1)$$

Прежде всего напишем, как в формуле (17.1),

$$\bar{f}(x) = \bar{\varphi}_n(x) + \bar{\Phi}_n(x) + [\bar{r}_n(x) - \bar{\Phi}_n(x)].$$

Так как $\bar{\varphi}_n(x)$ сопряженная к ограниченной $\varphi_n(x)$, то $\bar{\varphi}_n(x) \in L^2$, и это же верно для $\bar{\Phi}_n(x)$, как сопряженной к $\Phi_n(x)$. Что же касается $\bar{r}_n(x) - \bar{\Phi}_n(x)$, то она, как мы видели при доказательстве леммы § 17, суммируема на E_n , а потому в силу ограниченности $\psi(x)$ и интеграл

$$\int_{E_n} (\bar{r}_n(x) - \bar{\Phi}_n(x)) \psi(x) dx$$

имеет смысл. Но тогда

$$\int_{E_n} \bar{f} \psi dx = \int_{E_n} \bar{\varphi}_n \psi dx + \int_{E_n} \bar{\Phi}_n \psi dx + \int_{E_n} (\bar{r}_n - \bar{\Phi}_n) \psi dx = I_1 + I_2 + I_3. \quad (18.2)$$

Имеем

$$\int_{E_n} \bar{\varphi}_n \psi dx = \int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_n \psi dx - \int_{L'} \bar{\varphi}_n \psi dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \left(\int_{L'} \bar{\varphi}_n \psi dx \right)^2 &\leq \int_{L'} (\bar{\varphi}_n)^2 dx \int_{L'} \psi^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (\bar{\varphi}_n)^2 dx \cdot M^2 m L' \leq \\ &\leq M^2 m L' \int_0^{2\pi} (\varphi_n)^2 dx \leq M^2 \frac{10 a_n}{n} n \int_0^{2\pi} f(x) dx = o(1), \end{aligned}$$

где через M обозначена верхняя грань $|\psi(x)|$.

С другой стороны, так как $\bar{\varphi}_n$ и $\bar{\psi}$ принадлежит L^2 , то

$$\int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_n \psi dx = - \int_0^{2\pi} \varphi_n \bar{\psi} dx.$$

Значит,

$$\int_{E_n} \bar{\varphi}_n \psi dx = - \int_0^{2\pi} \varphi_n \bar{\psi} dx + o(1).$$

Но

$$\left| \int_0^{2\pi} f \bar{\psi} dx - \int_0^{2\pi} \varphi_n \bar{\psi} dx \right| \leq K \int_0^{2\pi} |f - \varphi_n| dx = o(1)$$

в силу определения $\varphi_n(x)$ и ограниченности $|\bar{\psi}(x)|$. Поэтому

$$I_1 = \int_{E_n} \bar{\varphi}_n \psi dx = - \int_0^{2\pi} f \bar{\psi} dx + o(1).$$

Остается доказать, что $I_2 = o(1)$ и $I_3 = o(1)$, тогда (18.1) будет доказано.

Имеем

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n \psi dx - \int_{L'} \bar{\Phi}_n \psi dx,$$

но

$$\begin{aligned} \left(\int_{L'} \bar{\Phi}_n \psi dx \right)^2 &\leq \int_{L'} \bar{\Phi}_n^2 dx \int_{L'} \psi^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n^2 dx \cdot M^2 mL' = \\ &= \left(\frac{1}{2} n \right)^2 mL \cdot M^2 mL' = M^2 \frac{n^2}{4} \left(\frac{20 a_n^2}{n^2} \right) = 5 M^2 \cdot a_n^2 = o(1), \end{aligned}$$

а потому

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n \psi dx + o(1). \quad (18.3)$$

Но

$$\int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n \psi dx = - \int_0^{2\pi} \Phi_n \bar{\psi} dx = - \frac{1}{2} n \int_L \bar{\psi} dx,$$

а потому

$$\left| \int_0^{2\pi} \bar{\Phi}_n \psi dx \right| \leq K \frac{1}{2} n mL = \frac{Kn a_n}{n} = o(1), \quad (18.4)$$

где K — верхняя грань функции $\bar{\psi}(x)$.

Из формул (18.3) и (18.4) следует

$$I_2 = o(1).$$

Наконец,

$$|I_3| = \left| \int_{E_n} (\bar{r}_n - \bar{\Phi}_n) \psi dx \right| \leq M \int_{E_n} |\bar{r}_n - \bar{\Phi}_n| dx = o(1),$$

что доказывается, как в § 16 при оценке $\int_{E_n} |h_3(x)| dx$.

Объединяя все полученные формулы, находим

$$\int_{E_n} \tilde{f} \psi dx = - \int_0^{2\pi} f \bar{\psi} dx + o(1),$$

т. е. равенство (18.1) доказано.

Докажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{E_n} \bar{f} \psi dx - \int_0^{2\pi} [\bar{f} \psi]_n dx \right\} = 0. \quad (18.5)$$

Прежде всего имеем

$$\left| \int_{L'} [\bar{f} \psi]_n dx \right| \leq n m L' = o(1),$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \{\bar{f} \psi - [\bar{f} \psi]_n\} dx = 0. \quad (18.6)$$

Но подынтегральное выражение равно нулю, если $|\bar{f} \psi| \leq n$; поэтому, обозначая через \mathcal{E}_n множество тех x , где $|\bar{f}(x) \psi(x)| > n$ и, полагая $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n \cdot E_n$, имеем, во-первых,

$$m \mathcal{E}'_n \leq m \mathcal{E}_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_n} \{\bar{f} \psi - [\bar{f} \psi]_n\} dx \right| &= \left| \int_{\mathcal{E}'_n} \{\bar{f} \psi - [\bar{f} \psi]_n\} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathcal{E}'_n} |\bar{f} \psi| dx + \int_{\mathcal{E}'_n} |[\bar{f} \psi]_n| dx = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Но

$$|J_2| \leq n m \mathcal{E}'_n = o(1),$$

а

$$|J_1| \leq \int_{\mathcal{E}'_n} |\bar{\varphi}_n \psi| dx + \int_{\mathcal{E}'_n} |\bar{\Phi}_n \psi| dx + \int_{\mathcal{E}'_n} |\overline{r_n - \Phi_n}| |\psi| dx$$

и то, что каждый из этих интегралов есть $o(1)$, доказывается совершенно так же, как это было сделано при оценке I_1, I_2, I_3 . Итак, (18.6) доказано, а стало быть, доказано и (18.5).

Соединяя (18.5) и (18.1), находим

$$\int_0^{2\pi} [\bar{f} \psi]_n dx = - \int_0^{2\pi} f \bar{\psi} dx + o(1),$$

откуда и следует, что $(A) \int_0^{2\pi} \bar{f} \psi dx$ существует и

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \psi(x) dx = - \int_0^{2\pi} f(x) \bar{\psi}(x) dx$$

и тогда теорема доказана.

С л е д с т в и е. Для всякой суммируемой $f(x)$ ее сопряженная А-интегрируема.

Действительно, достаточно положить $\psi(x) = 1$; тогда $\bar{\psi}(x) = 0$ и, значит, $\bar{f}(x)$ А-интегрируема и ее (А)-интеграл равен нулю.

Тот факт, что этот интеграл равен нулю, не должен нас удивлять. Мы сейчас дадим ему объяснение.

О п р е д е л е н и е. Назовем рядом Фурье А такой тригонометрический ряд, коэффициенты которого получают, отправляясь от А-интегрируемой функции по формулам Фурье, где интегралы берутся в смысле А-интегрирования.

Приняв такое определение, докажем, следуя Ульянову^[7], теорему*):
 Т е о р е м а 3. Если $f(x) \in L$, то все интегралы

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \cos kx \, dx \quad \text{и} \quad (A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \sin kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

имеют смысл, и ряд $\bar{\sigma}(f)$ есть ряд Фурье A от функции $\bar{f}(x)$.

Действительно, по теореме 2, полагая $\psi(x) = \cos kx$, имеем $\bar{\psi}(x) = \sin kx$ и, значит,

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \cos kx \, dx = - \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = -\pi b_k.$$

Аналогично, полагая $\psi(x) = \sin kx$, $\bar{\psi}(x) = -\cos kx$, имеем

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \sin kx \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi a_k,$$

откуда и следует справедливость теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Так как в ряде $\bar{\sigma}(f)$ свободный член равен нулю, то этим и объясняется, что $(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \, dx = 0$, как мы уже отмечали выше.

В качестве следствия теоремы 3 можно снова получить теорему Смирнова (§ 17).

Если $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ суммируемы, то

$$\sigma(\bar{f}) = \bar{\sigma}(f).$$

Это непосредственно вытекает из того, что когда функция суммируема, она и (A) -интегрируема, причем ее A -интеграл совпадает с интегралом Лебега. После этого остается только применить теорему 3.

В качестве другого следствия теоремы 3 укажем следующую теорему, доказанную П. Л. Ульяновым**):

Т е о р е м а. Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (18.7)$$

сходится к нулю почти всюду, но не всюду***), то его сопряженный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} -b_k \cos kx + a_k \sin kx \quad (18.8)$$

не может быть рядом Фурье.

Действительно, если бы ряд (18.8) был рядом Фурье от некоторой $f(x)$, то мы имели бы

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (18.9)$$

Рассмотрим функцию $\bar{f}(x)$, сопряженную к $f(x)$. Тогда ряд

$$-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

*) Эта теорема упоминается Титчмаршем в его уже цитированной статье, но доказательства он не дал.

**) Эта теорема пока нигде не опубликована.

***) Существование таких рядов будет доказано в § 12 главы XIV.

должен суммироваться почти всюду методом Пуассона к $\bar{f}(x)$. Но ряд (18.7) почти всюду сходится к нулю, значит и суммируется к нулю методом Пуассона, откуда следует, что

$$\frac{a_0}{2} - \bar{f}(x) = 0 \quad \text{почти всюду,}$$

т. е. $\bar{f}(x) = \text{const}$. Но в силу теоремы 3 ряд (18.7) есть ряд Фурье A ; поэтому

$$-a_k = -\frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \cos kx \, dx = 0 \quad (k \geq 1),$$

$$-b_k = -\frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \sin kx \, dx = 0 \quad (k \geq 1).$$

Но ряд (18.7) сходится к нулю почти всюду, значит, и $a_0 = 0$, а тогда ряд (18.7) должен сходиться к нулю всюду, что противоречит нашей гипотезе. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Пользуясь A -интегралом, П. Л. Ульянов^[6] установил еще ряд интересных свойств сопряженных функций. Так, например, мы знаем, что для суммируемой функции $f(x)$ пуассоновская сумма $f(r, x)$ выражается в виде

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{2[1 + r^2 - 2r \cos(t - x)]} \, dt \quad (0 \leq r < 1).$$

Покажем, что тогда для функции $\bar{f}(r, x)$, гармонически сопряженной с $f(r, x)$, имеем

$$\bar{f}(r, x) = \frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \frac{1 - r^2}{2[1 + r^2 - 2r \cos(t - x)]} \, dt. \quad (18.10)$$

Действительно, для этого достаточно заметить, что

$$\bar{f}(r, x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r \sin(t - x)}{1 + r^2 - 2r \cos(t - x)} \, dt$$

(см. глава I, § 54), а функции

$$P(r, u) = \frac{1 - r^2}{2[1 + r^2 - 2r \cos u]}, \quad Q(r, u) = \frac{r \sin u}{1 + r^2 - 2r \cos u}$$

являются сопряженными, кроме того, они непрерывны; следовательно, мы можем применить теорему 2, откуда сразу и вытекает справедливость (18.10).

Далее Ульянов показал, что подобно тому, как сопряженная функция $\bar{f}(x)$ выражается через данную $f(x) \in L$, можно и $f(x)$ выразить через $\bar{f}(x)$, пользуясь A -интегралом. Об этом и других результатах П. Л. Ульянова см.^[6, 7].

§ 19. Равномерная сходимость двух сопряженных рядов

До сих пор мы изучали свойства $\bar{f}(x)$ по свойствам $f(x)$. Теперь мы поставим вопрос: когда «хорошее» поведение $\sigma(f)$ влечет такое же поведение $\bar{\sigma}(f)$? Здесь можно говорить о равномерной сходимости, о сходимости в метрике L^p , о сходимости на множествах положительной меры и т. п.

Начнем с простейшего случая, именно с проблемы равномерной сходимости. Здесь имеет место

Теорема 1. Если f и \bar{f} обе непрерывны и ряд Фурье от f сходится равномерно, то и ряд Фурье от \bar{f} сходится равномерно.

Для доказательства обозначим через $S_n(x)$, $\sigma_n(x)$, $\bar{S}_n(x)$ и $\bar{\sigma}_n(x)$ соответственно частные суммы и фейеровские суммы рядов Фурье от f и \bar{f} . Так как для всякого ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ имеем

$$S_n - \sigma_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n+1},$$

то, в частности,

$$\bar{S}_n(x) - \bar{\sigma}_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^n k(-b_k \cos kx + a_k \sin kx)}{n+1} = \frac{-S'_n(x)}{n+1}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем N столь большим, чтобы $|S_n(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ для всех x при $n > N$, что возможно ввиду равномерной сходимости ряда $\sigma(f)$. Тогда в силу неравенства Бернштейна (см. Вводный материал, § 23) имеем $|S'_n(x) - S'_N(x)| < \varepsilon n$. Запишем $\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)$ в виде

$$\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x) = \frac{S'_n(x) - S'_N(x)}{n+1} + \frac{S'_N(x)}{n+1} \quad (19.1)$$

и возьмем n столь большим, чтобы второе слагаемое было по модулю $< \varepsilon$. Тогда

$$|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)| < 2\varepsilon,$$

т. е. $\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Но если $\bar{f}(x)$ непрерывна, то $\bar{\sigma}_n(x)$ равномерно стремится к $\bar{f}(x)$, откуда и вытекает справедливость теоремы.

Также доказывается, что если f и \bar{f} ограничены и частные суммы ряда от f ограничены в совокупности, то это справедливо и для \bar{f} .

Действительно, если

$$|S_n(x)| \leq C,$$

то по неравенству Бернштейна

$$|S'_n(x)| \leq Cn,$$

а потому

$$|\bar{S}_n(x) - \bar{\sigma}_n(x)| = \frac{|S'_n(x)|}{n+1} \leq C.$$

Но из $|\bar{f}(x)| \leq M$ следует $|\bar{\sigma}_n(x)| \leq M$, а тогда

$$|\bar{S}_n(x)| \leq M + C.$$

З а м е ч а н и е. Если воспользоваться неравенством Привалова (см. Добавления, § 19), то можно перенести эту теорему с отрезка $[0, 2\pi]$ на $[a, b]$, а именно доказать следующее.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$ и $\sigma(f)$ сходится на $[a, b]$ равномерно, то на любом отрезке $[a', b']$, целиком лежащем внутри (a, b) , ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Доказательство проводят совершенно так же, как в теореме 1, только вместо неравенства Бернштейна применяют неравенство Привалова; получим

$$|S'_n(x) - S'_N(x)| < C\varepsilon n \quad \text{на } (a', b'),$$

где константа C зависит только от a' и b' . После этого доказательство заканчивается так же, потому что $\bar{\sigma}_n(x) \rightarrow \bar{f}(x)$ равномерно на (a', b') .

Аналогично можно перенести на отрезок $[a, b]$ результат, касающийся частных сумм.

§ 20. Сходимость в метрике L^p

Мы хотим показать, что если $f \in L^p$ ($p > 1$), то снова ряды $\sigma(f)$ и $\sigma(\bar{f})$ ведут себя одинаково, а именно они оба сходятся в метрике L^p . Но для этого надо будет предварительно оценить в этой метрике нормы частных сумм рядов $\sigma(f)$ и $\sigma(\bar{f})$.

Прежде всего докажем теорему:

Т е о р е м а 1. *Если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то*

$$\|S_n(x)\|_p \leq B_p \|f(x)\|_p,$$

где B_p — константа, зависящая только от p , а $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в метрике $L^p[0, 2\pi]$.

Сначала мы будем оценивать норму не для $S_n(x)$, а для функции

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \quad (20.1)$$

и уже потом перейдем к $S_n(x)$, пользуясь тем, что

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos nt. \quad (20.2)$$

Так как

$$\sin nt = \sin n(t+x) \cos nx - \cos n(t+x) \sin nx,$$

то, подставляя это выражение в формулу (20.1), получим

$$S_n^*(x) = \cos nx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) \sin n(t+x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt - \sin nx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) \cos n(t+x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt.$$

Теперь, полагая

$$f_1(x) = f(x) \sin nx, \quad f_2(x) = f(x) \cos nx,$$

мы видим из формулы, определяющей сопряженную функцию, что

$$S_n^*(x) = \cos nx \bar{f}_1(x) - \sin nx \bar{f}_2(x)$$

и, следовательно,

$$|S_n^*(x)| \leq |\bar{f}_1(x)| + |\bar{f}_2(x)|. \quad (20.3)$$

Отсюда

$$\|S_n^*(x)\|_p \leq \|\bar{f}_1(x)\|_p + \|\bar{f}_2(x)\|_p$$

и по теореме М. Рисса (см. § 14)

$$\|S_n^*(x)\|_p \leq A_p \|f_1(x)\|_p + A_p \|f_2(x)\|_p \leq 2 A_p \|f(x)\|_p,$$

где A_p зависит только от p .

Теперь заметим, что на основании (20.2)

$$S_n(x) = S_n^*(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nt dt. \quad (20.4)$$

Значит,

$$\|S_n(x)\|_p \leq \|S_n^*(x)\|_p + \|f\|_p \leq 2(A_p + 1)\|f\|_p,$$

т. е.

$$\|S_n(x)\|_p \leq B_p \|f\|_p,$$

где B_p — константа, зависящая только от p .

З а м е ч а н и е. По теореме М. Рисса, если $f \in L^p$, то и $\bar{f} \in L^p$, поэтому и

$$\|\bar{S}_n(x)\|_p \leq B_p \|\bar{f}\|_p.$$

Кроме того, можно написать

$$\|\bar{S}_n\|_p \leq B_p A_p \|f\|_p,$$

т. е.

$$\|\bar{S}_n\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

где C_p зависит только от p .

Заметим еще, что в предыдущих рассуждениях гипотеза $p > 1$ играла существенную роль. Если $f \in L$, но $\bar{f} \notin L^p$ ($p > 1$), то мы уже не можем утверждать ограниченность $\|S_n\|_1$, так как в § 22 мы докажем, что существует функция $f(x) \in L$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx = +\infty.$$

Вернемся к случаю $p > 1$. Мы имеем теперь возможность доказать теорему:

Т е о р е м а 2. Если $f \in L^p$, $p > 1$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \\ \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в этом, напомним (см. глава I, § 28), что класс тригонометрических полиномов всюду плотен в пространстве L^p , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином $T(x)$, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Если n превосходит порядок полинома $T(x)$, то n -я частная сумма ряда $\sigma(T)$, т. е. $S_n(x, T)$, совпадает с $T(x)$, а потому

$$S_n(x, f) - S_n(x, T) = S_n(x, f) - T(x)$$

при достаточно большом n . Но тогда

$$\begin{aligned} f - S_n(x, f) &= (f - T) + (T - S_n(f)) = f - T + S_n(T) - S_n(f) = \\ &= f - T + S_n(T - f) \end{aligned} \quad (20.5)$$

при n достаточно большом.

Отсюда

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq \|f - T\|_p + \|S_n(T - f)\|_p.$$

Но по теореме 1

$$\|S_n(\varphi)\|_p \leq B_p \|\varphi\|_p$$

для любой $\varphi \in L^p$, поэтому

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq (B_p + 1) \|f - T\|_p \leq (B_p + 1) \varepsilon,$$

а это и значит, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x) = \overline{f(x) - S_n(x)}$, то по теореме М. Рисса сразу заключаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

и теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Интересно отметить, что если в тригонометрической системе переставить члены, то теорема 2 теряет силу. Именно, как показал Ульянов [12], можно построить даже непрерывную функцию $f(x)$, у которой ряд Фурье по тригонометрической системе с переставленными членами не сходится в метрике L^p при любом $p > 2$.

§ 21. Случай $p < 1$

Здесь уже нельзя употреблять термин «метрика L^p », так как функции класса L^p при $p < 1$ не образуют метрического пространства (аксиома треугольника не удовлетворена). Но все же можно для суммируемых функций изучать вопрос о поведении

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^p dx \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx.$$

Докажем следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если $f(x) \in L$ и $0 < p < 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^p dx \leq B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x)|^p dx \leq B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p,$$

где B_p — константа, зависящая только от p .

Мы будем пользоваться формулой (см. Вводный материал, § 10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi + \psi|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\psi|^p dx \quad (p < 1).$$

Применяя ее к функциям S_n^* , \bar{f}_1 и \bar{f}_2 , рассмотренным в § 20, и пользуясь неравенством (20.3), находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n^*(x; f)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_1(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_2(x)|^p dx. \quad (21.1)$$

Мы знаем (см. § 16), что два последних интеграла имеют смысл при всяком $p < 1$, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_1(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)| dx \right)^p \quad (21.2)$$

и аналогично для \bar{f}_2 , где A_p зависит только от p . Вспоминая определение \bar{f}_1 и \bar{f}_2 , мы видим, что из (21.2) вытекает

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_1(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p \quad (21.3)$$

и аналогично для f_2 , что в силу (21.1) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n^*(x, f)|^p dx \leq 2 A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p. \quad (21.4)$$

Из неравенства (20.4) имеем

$$|S_n(x)| \leq |S_n^*(x)| + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt. \quad (21.5)$$

Из (21.4) и (21.5) заключаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n^*(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \right)^p dx \leq B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p,$$

если положить $B_p = 2A_p + 2\pi$. Тогда B_p зависит только от p . Итак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^p dx \leq B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p$$

и это справедливо для любой $f \in L$ и $p < 1$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем к аналогичной оценке для $|\bar{S}_n(x)|^p$. Мы можем написать

$$\begin{aligned} \bar{S}_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} [1 - \cos nt] dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nt dt = \\ &= \bar{S}_n^*(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nt dt, \end{aligned} \quad (21.6)$$

где через \bar{S}_n^* обозначен первый член правой части формулы (21.6). Из определения \bar{S}_n^* вытекает

$$\bar{S}_n^*(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt.$$

Замечая, что

$$\cos nt = \cos n(t+x) \cos nx + \sin n(t+x) \sin nx,$$

мы можем написать, сохраняя прежние обозначения,

$$\bar{S}_n^*(x) - \bar{f}(x) = \cos nx \bar{f}_2(x) + \sin nx \bar{f}_1(x).$$

Поэтому

$$|\bar{S}_n^*(x) - \bar{f}(x)| \leq |\bar{f}_1(x)| + |\bar{f}_2(x)|.$$

Отсюда (см. 21.3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n^*(x) - \bar{f}(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_1|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}_2|^p dx \leq 2 A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p.$$

С другой стороны,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p.$$

Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n^*(x)|^p dx \leq 3 A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p.$$

Наконец, из формулы (21.6) заключаем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n^*(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \right)^p dx \leq B'_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^p,$$

если положить $B'_p = 3A_p + 2\pi$; при этом B'_p зависит только от p , и это заканчивает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Так как в доказанных формулах числа B_p и B'_p не превосходят $3A_p + 2\pi$, а для A_p в § 16 была найдена оценка

$$A_p \leq \frac{C}{1-p},$$

где C — абсолютная константа, то такая же оценка справедлива и для чисел B_p :

$$B_p \leq \frac{C_1}{1-p}; \quad B'_p \leq \frac{C_1}{1-p},$$

где C_1 — абсолютная константа; достаточно принять $C_1 > 3C + 2\pi$. Эта оценка была нами использована в § 11 главы V.

Теперь мы переходим к вопросу о поведении интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx.$$

Имеем теорему:

Т е о р е м а 2. Если $f(x) \in L$ и $0 < p < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx = 0.$$

Прежде всего для любого $\varepsilon > 0$ найдем такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)| dx < \varepsilon. \quad (21.7)$$

Положим $f(x) = T(x) + R(x)$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx < \varepsilon. \quad (21.8)$$

Рассуждая, как и для случая $p > 1$ (см. формулу (20.5), найдем

$$|f - S_n(x, f)| \leq |f - T| + |S_n(x, T - f)| = |R| + |S_n(x, R)| \quad (21.9)$$

при n достаточно большом. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x, R)|^p dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^p dx + B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx \right)^p \end{aligned} \quad (21.10)$$

в силу теоремы 1.

Пусть $p' = \frac{1}{p}$, тогда $p' > 1$. Если $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^p dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^{p \cdot p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} = (2\pi)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx \right)^p < 2\pi \varepsilon^p \quad (21.11)$$

в силу $q' > 1$ и (21.8). Но тогда из (21.10) и (21.11) находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^p dx \leq 2\pi \varepsilon^p + B_p \varepsilon^p$$

и так как ε произвольно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^p dx = 0$$

и первая половина теоремы доказана.

Чтобы получить вторую половину, заметим, что для того же тригонометрического полинома T и при таком же n можно написать аналогично (21.9)

$$|\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)| \leq |\bar{f} - \bar{T}| + |\bar{S}_n(T - f)| = |\bar{R}| + |\bar{S}_n(R)|.$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{R}(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(R)|^p dx,$$

где все интегралы имеют смысл (потому что $p < 1$) даже и в том случае, когда \bar{f} , а значит, и \bar{R} не принадлежит L . Но так как по теореме § 16

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{R}(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx \right)^p \leq A_p \varepsilon^p$$

и по теореме 1 этого параграфа

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x, R)|^p dx \leq B_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx \right)^p \leq B_p \varepsilon^p,$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx \leq (A_p + B_p) \varepsilon^p$$

и снова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx = 0.$$

Теорема полностью доказана.

§ 22. Проблема сходимости в метрике L

Мы видели в § 20, что если $f \in L^p$ ($p > 1$), то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f} - \bar{S}_n|^p dx \rightarrow 0. \quad (22.1)$$

Аналогично для $p < 1$ оба эти утверждения имеют место, даже если только $f \in L$ (см. § 21).

Возникает вопрос, должны ли мы иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n| dx \rightarrow 0, \quad (22.2)$$

т. е. справедливо ли (22.1) при $p = 1$?

На этот вопрос приходится дать отрицательный ответ; более того, ряд $\sigma(f)$ может не сходиться в метрике L , даже если $f \in L$. Это показывает следующий пример Ф. Рисса*).

Пример Рисса. Рассмотрим вспомогательный многочлен

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{n} (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})^2 = \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + (n-1)z^n + \dots + z^{2n-2}). \end{aligned}$$

Так как $|P_n(z)| = \frac{1}{n} \left| \frac{1-z^n}{1-z} \right|^2$, то

$$|P_n(e^{i\theta})| = \frac{1}{n} \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2. \quad (22.3)$$

В силу свойств фейеровского ядра имеем

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда сразу получаем

$$\int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\theta})| d\theta = 2\pi. \quad (22.4)$$

С другой стороны, если мы обозначим через $Q_n(z)$ «кусоч» многочлена $P_n(z)$, состоящий из первых n его членов, т. е.

$$Q_n(z) = \frac{1}{n} (1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}),$$

то

$$|Q_n(e^{i\theta})| = \frac{1}{n} |1 + 2e^{i\theta} + 3e^{i2\theta} + \dots + ne^{i(n-1)\theta}| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)e^{ik\theta} \right|.$$

Докажем, что при достаточно большом n

$$\int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\theta})| d\theta > C \ln n,$$

где C — абсолютная константа. Для этого заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\cos k\theta + i \sin k\theta),$$

а потому

$$|Q_n(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cos k\theta \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} k \cos k\theta + \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta \right|.$$

*) Этот пример приводит Зигмунд (Zygmund^[9]), отмечая, что Ф. Рисс сообщил его ему устно.

Но если мы рассмотрим ряд

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta + \dots$$

и обозначим через $S_n(\theta)$ и $\sigma_n(\theta)$ его частные и фейеровские суммы, то

$$S_n(\theta) - \sigma_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \frac{k \cos k\theta}{n+1}.$$

Значит,

$$|Q_n(e^{i\theta})| \geq \left| S_{n-1}(\theta) - \sigma_{n-1}(\theta) + \frac{1}{n} S_{n-1}(\theta) \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_{n-1}(\theta) - \sigma_{n-1}(\theta) \right|,$$

откуда

$$|Q_n(e^{i\theta})| \geq |S_{n-1}(\theta)| - |\sigma_{n-1}(\theta)|.$$

Но

$$S_n(\theta) = D_n(\theta) + \frac{1}{2},$$

где $D_n(\theta)$ — ядро Дирихле, а

$$\sigma_n(\theta) = K_n(\theta) + \frac{1}{2},$$

где $K_n(\theta)$ — ядро Фейера.

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\theta})| d\theta \geq \int_0^{2\pi} |D_{n-1}(\theta)| d\theta - \int_0^{2\pi} |K_{n-1}(\theta)| d\theta - 2\pi. \quad (22.5)$$

Как известно,

$$\int_0^{2\pi} |K_n(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} K_n(\theta) d\theta = \pi \quad (22.6)$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(\theta)| d\theta = L_n,$$

где L_n — так называемая константа Лебега (см. глава I, § 35). Но, как известно,

$$L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n,$$

а потому

$$\int_0^{2\pi} |D_{n-1}(\theta)| d\theta \sim \frac{4}{\pi} \ln n,$$

откуда, учитывая (22.5) и (22.6), находим

$$\int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\theta})| d\theta \geq C \ln n,$$

что и требовалось доказать.

Теперь возьмем последовательность положительных чисел a_k , таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, и построим ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{m_k} P_{n_k}(z). \quad (22.7)$$

Здесь $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ — натуральные числа, которые подбираем так, чтобы

$$m_{k+1} \geq m_k + 2n_k \quad \text{и} \quad a_k \ln n_k \rightarrow \infty. \quad (22.8)$$

Первое из этих условий гарантирует то, что полиномы $z^{m_k} P_{n_k}(z)$ «не перекрываются», т. е. для двух разных значений k никакие два полинома этого вида не содержат одинаковых степеней z . Обозначим через T ряд, который получится из (22.7), когда каждый одночлен, входящий в любой $z^{m_k} P_{n_k}(z)$, рассматривается как отдельный член ряда, но их порядок сохраняется прежним. Тогда ряд T есть обычный степенной ряд, расположенный по возрастающим степеням z . Так как

$$|f(e^{i\theta})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |P_{n_k}(e^{i\theta})|,$$

то из формулы (22.3) мы видим, что ряд (22.7) сходится на круге $|z| = 1$ всюду, кроме точки $z = 1$. Кроме того,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^{2\pi} |P_{n_k}(re^{i\theta})| d\theta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^{2\pi} |P_{n_k}(e^{i\theta})| d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

в силу (10.2) и (22.4), а потому функция $f(z)$ принадлежит классу H_1 (см. §10). Следовательно, по теореме 3 § 10 действительная и мнимая части ряда T являются рядами Фурье от некоторых $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, причем $f_2(\theta) = f_1(\theta)$. Пусть $S_n^{(1)}(\theta)$ и $S_n^{(2)}(\theta)$ — частные суммы этих рядов. Если бы мы имели

$$\int_0^{2\pi} |f_1(\theta) - S_n^{(1)}(\theta)| d\theta \rightarrow 0 \quad (22.9)$$

и

$$\int_0^{2\pi} |f_2(\theta) - S_n^{(2)}(\theta)| d\theta \rightarrow 0, \quad (22.10)$$

то отсюда следовало бы

$$\int_0^{2\pi} |S_m^{(1)}(\theta) - S_n^{(1)}(\theta)| d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad m > n,$$

а также

$$\int_0^{2\pi} |S_m^{(2)}(\theta) - S_n^{(2)}(\theta)| d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad m > n,$$

а тогда и

$$\int_0^{2\pi} |S_m(\theta) - S_n(\theta)| d\theta \rightarrow 0,$$

где $S_n(\theta)$ — частные суммы ряда T .

Однако, если выбрать n и m так, чтобы разность $S_m(\theta) - S_n(\theta)$ представляла собой «кусоч» ряда, определяемый полиномом $\alpha_k e^{im_k\theta} Q_{n_k}(e^{i\theta})$, то

$$|S_m(\theta) - S_n(\theta)| = \alpha_k |Q_{n_k}(e^{i\theta})|,$$

а потому

$$\int_0^{2\pi} |S_m(\theta) - S_n(\theta)| d\theta = \alpha_k \int_0^{2\pi} |Q_{n_k}(e^{i\theta})| d\theta > C \alpha_k \ln n_k \rightarrow \infty \quad (22.11)$$

при $k \rightarrow \infty$ в силу (22.8).

Следовательно, по крайней мере одно из соотношений (22.9) и (22.10) не имеет места, хотя $f_1 \in L$ и $f_2 \in L$, причем $f_2(\theta) = f_1(\theta)$. Наше предложение доказано.

З а м е ч а н и е 1. П. Л. Ульянов^[12] отметил, что если в тригонометрической системе переставлять члены, то можно даже построить функцию класса L^p при всех $p < 2$, для которой ряд Фурье в метрике L не сходится.

Вернемся к обычной тригонометрической системе.

Мы убедились, что существует такая $f(x) \in L$, что $\bar{f}(x) \in L$, и, однако, либо

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0 \text{ либо } \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)| dx \rightarrow 0.$$

Однако можно утверждать больше, а именно: для рассматриваемой функции $f(x)$ оба эти соотношения выполнены одновременно. Это сразу станет ясным, если мы докажем теорему.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L$ и $\bar{f}(x) \in L$; если

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad (22.12)$$

то и

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)| dx \rightarrow 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x) - S_N(x)| dx < \varepsilon \quad \text{для} \quad n > N,$$

что возможно в силу (22.12). На основании неравенства Бернштейна в метрике L (см. Добавления, § 18) получаем

$$\int_0^{2\pi} |S'_n(x) - S'_N(x)| dx < 2\varepsilon n. \quad (22.13)$$

Но по формуле (19.1)

$$|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)| \leq \frac{|S'_n(x) - S'_N(x)|}{n+1} + \frac{|S'_N(x)|}{n+1}. \quad (22.14)$$

Поскольку N фиксировано, мы можем взять n столь большим, чтобы

$$\frac{|S'_N(x)|}{n+1} < \varepsilon, \quad (22.15)$$

а тогда в силу (22.13), (22.14) и (22.15)

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)| dx \leq 2\varepsilon + 2\pi\varepsilon = (2 + 2\pi)\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)| dx \rightarrow 0. \quad (22.16)$$

Но, с другой стороны (см. глава I, § 60), имеем для любой суммируемой $\varphi(x)$

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x, \varphi) - \varphi(x)| dx \rightarrow 0,$$

откуда в силу гипотезы $\bar{f} \in L$ и теоремы Смирнова

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x)| dx \rightarrow 0. \quad (22.17)$$

Из (22.16) и (22.17) заключаем

$$\int_0^{2\pi} |\bar{S}_n(x) - \bar{f}(x)| dx \rightarrow 0,$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Здесь также можно вместо отрезка $[0, 2\pi]$ рассмотреть отрезок $[a, b]$. Имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть $f(x) \in L$ и $\bar{f}(x) \in L$. Если

$$\int_a^b |f(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0,$$

то на любом (a', b') , лежащем строго внутри (a, b) ,

$$\int_{a'}^{b'} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)| dx \rightarrow 0.$$

Доказательство протекает слово в слово, если только неравенство Бернштейна в метрике L заменить неравенством Привалова в той же метрике (см. Добавления, § 19).

Аналогично теореме 1 доказываемся

Т е о р е м а 3. Если $f(x) \in L$, $\bar{f}(x) \in L$ и

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx < C \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (22.18)$$

то и

$$\int_0^{2\pi} |\bar{S}_n(x)| dx < C_1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (22.19)$$

(для некоторой новой константы C_1).

Действительно, применяя неравенство Бернштейна для пространства L , видим, что из (22.18) следует

$$\int_0^{2\pi} |S'_n(x)| dx \leq 2Cn,$$

а потому

$$|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{S}_n(x)| \leq 2C,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} |\bar{S}_n(x)| dx \leq 2C \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} |\bar{\sigma}_n(x)| dx.$$

Но мы предположили, что $\bar{f}(x) \in L$, а тогда

$$\int_0^{2\pi} |\bar{\sigma}_n(x)| dx \leq K,$$

где K — некоторая константа (см. глава I, § 60), а потому, полагая $C_1 = = K + 4\pi C$, видим, что (22.19) доказано.

З а м е ч а н и е 3. Перенос этой теоремы с отрезка $[0, 2\pi]$ на отрезок $[a, b]$ совершается в точности, как в теореме 2, т. е. с заменой неравенства Бернштейна в метрике L на неравенство Привалова в той же метрике.

Наконец, отметим, что неравенства (22.18) и (22.19) вовсе не должны иметь места, когда $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ суммируемы, т. е. можно построить такую $f(x) \in L$, что $\bar{f}(x) \in L$, и, однако,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\bar{S}_n(x)| dx = +\infty. \quad (22.20)$$

В самом деле, если хоть один из пределов, входящих в (22.20), был бы конечен, то и второй тоже по теореме 3. Но тогда имели бы

$$\int_0^{2\pi} |S_m(x) - S_n(x)| dx < C \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} |\bar{S}_m(x) - \bar{S}_n(x)| dx < C \quad (22.21)$$

для любых m и n , где C постоянное. Однако в примере Ф. Рисса по крайней мере одно из неравенств (22.21) не имеет места.

§ 23. Сходимость сопряженных рядов на множестве положительной меры

Сейчас мы докажем одну общую теорему, которая, в частности, позволяет судить о сходимости $\bar{\sigma}(f)$ на множестве положительной меры по сходимости $\sigma(f)$ на таком множестве.

Теорема Кутнера *). Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (23.1)$$

сходится на множестве E , $mE > 0$, а его сопряженный ряд

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx \quad (23.2)$$

суммируем $(C, 1)$ на E , то ряд (23.2) сходится почти всюду на E .

Доказательство. Полагая

$$B_n(x) = -b_n \cos nx + a_n \sin nx,$$

на основании теоремы 2 § 12 главы VII мы можем утверждать, что $\{nB_n(x)\}$ суммируется $(C, 1)$ к нулю почти всюду на E , т. е. почти всюду на E

$$\frac{B_1(x) + 2B_2(x) + \dots + nB_n(x)}{n} \rightarrow 0. \quad (23.3)$$

С другой стороны, в силу условий теоремы, полагая

$$\bar{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n B_k(x),$$

имеем

$$\frac{\bar{S}_1(x) + \bar{S}_2(x) + \dots + \bar{S}_n(x)}{n} \rightarrow \bar{\sigma}(x) \text{ почти всюду на } E,$$

где через $\bar{\sigma}(x)$ обозначается чезаровская сумма ряда (23.2). Это условие можно переписать в виде

$$\frac{nB_1(x) + (n-1)B_2(x) + \dots + B_n(x)}{n} \rightarrow \bar{\sigma}(x). \quad (23.4)$$

Складывая (23.3) и (23.4), находим

$$\frac{n+1}{n} [B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_n(x)] \rightarrow \bar{\sigma}(x)$$

почти всюду на E , т. е.

$$\frac{n+1}{n} \bar{S}_n(x) \rightarrow \bar{\sigma}(x)$$

или

$$\bar{S}_n(x) \rightarrow \bar{\sigma}(x)$$

почти всюду на E и, значит, теорема доказана.

Поскольку всякий ряд $\bar{\sigma}(f)$ суммируем $(C, 1)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ (§ 5), из этой теоремы, в частности, будет вытекать

Следствие. Если ряд $\sigma(f)$ сходится на E , $mE > 0$, то ряд $\bar{\sigma}(f)$ сходится почти всюду на E .

Замечание 1. Теорема Кутнера есть частный случай гораздо более общей теоремы Плесснера, которая будет сформулирована ниже.

*) См. Kuttner[1].

Эта последняя опирается на очень глубокие факты, касающиеся граничных свойств аналитических функций. Поэтому нам казалось целесообразным дать прямое доказательство теоремы Кутнера, которое, как мы видели, проводится, основываясь лишь на методах теории функций действительного переменного.

Прежде чем формулировать теорему Плесснера, докажем одну важную теорему, касающуюся метода суммирования A^* (см. Вводный материал, § 7).

Т е о р е м а. *Если тригонометрический ряд суммируем методом A^* на множестве E , $mE > 0$, то его сопряженный суммируем методом A^* почти всюду на E .*

Нам придется опираться на теорему Привалова *). Пусть $F(z)$ голоморфна внутри круга; пусть E лежит на окружности и $mE > 0$. Если действительная часть $F(z)$ стремится к некоторым конечным предельным значениям каждый раз, как $z \rightarrow z_0 \in E$ по любому некасательному пути, то и мнимая часть $F(z)$ стремится к конечным предельным значениям по всем некасательным путям для почти всех точек $z_0 \in E$.

Полагая

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и $c_n = a_n - ib_n$, мы видим, что теорема Привалова может быть сформулирована так: если

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

стремится к определенным предельным значениям, когда $(r, \theta) \rightarrow (1, \theta_0)$ по некасательным путям, а $\theta_0 \in E$, то почти для всех точек $\theta_0 \in E$ и

$$v(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) r^n$$

стремится к определенным предельным значениям, когда $(r, \theta) \rightarrow (1, \theta_0)$ по некасательным путям.

Но из определения метода A^* тогда сразу следует, что если мы потребуем, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

был суммируем A^* , то и ряд

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

будет суммироваться A^* , а это и надо было доказать.

Теперь мы можем доказать следующее весьма общее предложение **):

Т е о р е м а П л е с с н е р а [1]. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве E , $mE > 0$, то его сопряженный сходится на этом множестве почти всюду.*

*) В таком виде теорема была сформулирована и доказана И. И. Приваловым в его диссертации [М.18]; (см. также [М.19], глава IV, § 20). В новом издании книги Привалова [М.19] эта теорема (и даже несколько более общая) получается как следствие теоремы Плесснера (см. [М.19], стр. 303).

**) Эта теорема независимо от А. И. Плесснера была доказана Зигмундом и Марцинкевичем (Marcinkiewicz and Zygmund^[1]).

В § 11 главы VII было доказано, что если ряд T сходится на E , то он усиленно сходится почти всюду на E ; кроме того, в силу теоремы § 7 Вводного материала он суммируется методом A^* всюду на E . В силу теоремы, которую мы только что доказали, его сопряженный ряд \bar{T} суммируется методом A^* почти всюду на E , а значит, и подавно почти всюду на E ряд \bar{T} суммируется обычным методом Абеля.

С другой стороны, по теореме 2 § 12 главы VII

$$\{n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)\}$$

суммируется $(C, 1)$ к нулю почти всюду. На основании теоремы 2 § 12 Добавлений наличие этого условия и суммируемости ряда \bar{T} методом Абеля в некоторой точке влечет сходимость ряда T в этой точке. Следовательно, почти всюду на E ряд \bar{T} сходится и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Эта теорема особенно интересна потому, что здесь речь идет о тригонометрических рядах самого общего вида. Авторы, изучавшие ранее поведение сопряженного ряда по поведению данного, обычно предполагали, что речь идет о рядах Фурье или хотя бы что наблюдаются некоторые свойства, которыми ряд Фурье заведомо обладает (как, например, в теореме Кутнера — суммируемость $(C, 1)$ для сопряженного ряда). В теореме Плесснера никаких ограничений нет.

Следует еще отметить, что эта теорема сохраняет силу, если вместо сходимости ряда T на E предполагать его суммируемость $(C, 1)$ (или даже (C, a) при $a \geq 0$), тогда это же имеет место почти всюду на E для ряда \bar{T} . Мы не будем давать здесь доказательства этих теорем.

З а м е ч а н и е 3. Ф. В. Широков^[1] решал вопрос, нельзя ли обобщить теоремы Кутнера и Плесснера, рассмотрев вместо последовательностей частных сумм рядов T и \bar{T} подпоследовательности таких сумм. Точнее: пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ — последовательность натуральных чисел. Если для частных сумм $S_n(x)$ ряда T предел $S_{n_k}(x)$ существует на E , $mE > 0$, то будет ли это верно для $S_{n_k}(x)$ почти всюду на E ?

Оказывается, что если ввести гипотезу Кутнера, то ответ положителен, а без этой гипотезы (как в теореме Плесснера) этого уже нет. Именно Ф. В. Широков доказал: если $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x)$ существует на E и \bar{T} суммируем $(C, 1)$ на E , то $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_{n_k}(x)$ существует почти всюду на E .

Если же не делать никаких дополнительных гипотез, то можно так подобрать ряды T и \bar{T} и последовательность $\{n_k\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x)$ существует почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_{n_k}(x)$ не существует также почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В примере, построенном Ф. В. Широковым, последовательность n_k стремится к бесконечности очень быстро, именно так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} = +\infty.$$

Вопрос о том, не может ли теорема Плесснера быть перенесена на случай последовательностей $\{n_k\}$, стремящихся к бесконечности достаточно медленно, остается открытым.

З а м е ч а н и е 4. Из примера Ф. В. Широкова следует, что теорема Плесснера, Зигмунда и Марцинкевича не может быть перенесена со случая сходимости на случай суммируемости произвольным методом Теплица.

Г Л А В А IX

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

Мы знаем (см. глава I, § 61), что если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.1)$$

сходится абсолютно на множестве положительной меры, то

$$\sum |a_n| + |b_n| < +\infty$$

и тогда ряд (1.1) сходится абсолютно всюду. В таком случае ряд (1.1) заведомо является рядом Фурье. Таким образом, если ряд (1.1) не есть ряд Фурье, то он может сходиться абсолютно только на множестве меры нуль. Вопросы, связанные с абсолютной сходимостью общих тригонометрических рядов, мы будем рассматривать в главе XIII. Здесь же мы специально хотим изучать ряды Фурье.

Прежде всего мы указываем ряд достаточных условий для абсолютной сходимости (§§ 2 и 3). Эти условия такого характера: для всех функций, имеющих модуль непрерывности, достаточно быстро стремящийся к нулю, или наилучшие приближения, достаточно быстро стремящиеся к нулю, можно гарантировать абсолютную сходимость ряда Фурье. В § 4 рассматривается вопрос о том, в какой мере найденные условия являются необходимыми. При этом выясняется, что снизить найденные оценки для модуля непрерывности или для наилучших приближений нельзя, если говорить о целом классе функций; но эти результаты не могут считаться исчерпывающими вопрос, когда речь идет об индивидуально заданной функции. Как видно из § 5, вообще нельзя ожидать, чтобы этот последний вопрос мог решаться путем рассмотрения скорости убывания модуля непрерывности, так как у двух функций с одинаковым модулем непрерывности ряды Фурье могут себя вести по-разному в проблеме абсолютной сходимости. Возникает поэтому вопрос о критериях, которые годились бы для индивидуально заданной функции. Такие критерии мы указываем в §§ 6, 7 и 8. Критерий Рисса имеет то достоинство, что он формулируется для любой функции; однако практически его применить пока удастся лишь в тех случаях, когда проблема решается и без него. Критерий Стечкина также носит общий характер, но практически применим лишь в очень простых случаях. Критерий Шилова относится лишь к функциям, удовлетворяющим некоторым ограничительным условиям, но зато может быть практически использован.

В § 9 мы изучаем те операции, которые не выводят нас из класса функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье. Этот же вопрос исследуется в § 11.

В § 10 показывается, что абсолютная сходимость, в противоположность обычной, не является локальным свойством.

В § 12 указывается, как можно обобщить проблему абсолютной сходимости (например, рассматривая сходимость $\sum |a_n|^\beta + |b_n|^\beta$, где $\beta > 0$ задано, или изучая, когда сходится

$$\sum |a_{n_k}| + |b_{n_k}|,$$

где $\{n_k\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел).

Мы не включили в эту главу тех случаев, где можно утверждать абсолютную сходимость ряда Фурье, опираясь на то, что он лакунарный или с монотонными коэффициентами (о чем будет идти речь в соответствующих главах).

§ 2. Достаточные условия в терминах модулей непрерывности и наилучших приближений

Мы знаем, что если функция $f(x)$ «достаточно хорошая», то ее ряд Фурье сходится абсолютно. Например, это имеет место, когда $f(x)$ абсолютно непрерывна, а ее производная $f'(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом (см. глава I, § 26).

Сейчас мы укажем другие, гораздо более широкие достаточные признаки для того, чтобы ряд Фурье был абсолютно сходящимся.

Прежде всего отметим, что одной из первых теорем в этом направлении была

Теорема 1 Бернштейна [2]. *Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α , где $\alpha > \frac{1}{2}$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно*).*

Мы не будем давать доказательства этой теоремы 1, так как она вытекает как следствие из других более общих результатов. Сам С. Н. Бернштейн позже доказал еще две теоремы об абсолютной сходимости рядов Фурье, а именно:

Теорема 2 Бернштейна [5]. *Если $\omega(\delta, f)$ есть модуль непрерывности функции $f(x)$ и если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}}$$

сходится, то ряд Фурье для $f(x)$ сходится абсолютно.

Теорема 3 Бернштейна [5]. *Если $E_n(f)$ есть наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n , то из сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(f)}{\sqrt{n}}$$

следует абсолютная сходимость ряда Фурье для $f(x)$.

Заметим, что теорема 1 сразу следует из теоремы 2, так как если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > \frac{1}{2}$, то

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha), \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

*) С. Н. Бернштейн доказал также, что если $\alpha \leq \frac{1}{2}$, то можно построить $f(x)$, удовлетворяющую условию Липшица порядка α , причем $\sigma(f)$ не является абсолютно сходящимся.

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt[n]{n}} = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+a}}\right),$$

а при $a > \frac{1}{2}$ последний ряд сходится.

В свою очередь теоремы 2 и 3 могут быть получены из теорем, доказанных позднее Сасом (Szász [4]) и Стечкиным [8].

Теорема Саса. Если $\omega^{(2)}(\delta, f)$ есть квадратический модуль непрерывности для $f(x)$, т. е.

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt[n]{n}}$$

влечет абсолютную сходимость ряда Фурье от $f(x)$.

Теорема Стечкина. Если $E_n^{(2)}(f)$ есть наилучшее приближение $f(x)$ по норме L^2 , т. е.

$$E_n^{(2)}(f) = \min_T \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^{(2)}(f)}{\sqrt[n]{n}}$$

влечет абсолютную сходимость ряда Фурье для $f(x)$.

Мы докажем сейчас обе эти теоремы методом, предложенным С. Б. Стечкиным, а потом поясним, почему отсюда вытекают теоремы 2 и 3 С. Н. Бернштейна.

Имеем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда

$$f(x+h) - f(x-h) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nh.$$

В силу равенства Парсеваля отсюда

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \sin^2 nh = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \sin^2 nh,$$

где $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Проинтегрируем обе части этого равенства по h в пределах $\left(0, \frac{\pi}{n}\right)$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\} dh = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 kh dh. \quad (2.1)$$

Заметим теперь, что, полагая $kh = t$, имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 kh \, dh = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{k\pi}{n}} \sin^2 t \, dt.$$

При заданном k выберем целое l так, чтобы

$$l \leq \frac{k}{n} < l + 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{k} \int_0^{\frac{k\pi}{n}} \sin^2 t \, dt \geq \frac{1}{n(l+1)} \int_0^{l\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{l}{(l+1)n} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi l}{2n(l+1)}.$$

Следовательно, если $k \geq n$, т. е. $l \geq 1$, то $\frac{l}{l+1} \geq \frac{1}{2}$, а потому

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 kh \, dh > \frac{\pi}{4n}, \quad k \geq n. \quad (2.2)$$

Так как в правой части формулы (2.1) все члены неотрицательны, то из (2.1) и (2.2) находим

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\} dh \geq 4 \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 kh \, dh \geq \frac{\pi}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \leq \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\} dh.$$

Но в силу определения $\omega^{(2)}(\delta, f)$ имеем для $0 \leq h \leq \frac{\pi}{n}$

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \omega^{(2)}\left[\frac{\pi}{n}, f\right],$$

а потому

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \leq \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right]^2 dh = \left[\omega^{(2)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \right]^2,$$

т. е., полагая

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2,$$

мы имеем

$$\sqrt{r_n} \leq \omega^{(2)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \leq C \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

где C постоянно (см. Вводный материал, § 25).

Отсюда сразу вытекает, что если выполнены условия теоремы Саса, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{r_n}{n}}.$$

Докажем, что отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$. Действительно, мы можем написать

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{\varrho_k}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varrho_k}{k} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A \frac{1}{n} r_n} = B \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{r_n}{n}}, \end{aligned}$$

где B — постоянно, значит, доказана сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

а это и означает абсолютную сходимость ряда Фурье для $f(x)$.

Итак, теорема Саса доказана. Что касается теоремы Стечкина, то ее можно получить сразу из следующего замечания. Как известно, среди всех тригонометрических полиномов порядка не выше n наименьшее значение для интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

дает полином $T_n(x) = S_n(x)$, т. е. сумма n первых членов ряда Фурье для $f(x)$. Значит,

$$E_n^{(2)}(f) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \sum_{n+1}^{\infty} \varrho_k^2 = r_{n+1}.$$

Поэтому

$$E_n^{(2)}(f) = \sqrt{\pi r_{n+1}}$$

и сходимость $\sum \frac{E_n^{(2)}(f)}{\sqrt{n}}$ влечет сходимость $\sum \sqrt{\frac{r_{n+1}}{n}}$, а значит, и $\sum \sqrt{\frac{r_n}{n}}$, тогда, как мы видели, ряд Фурье от $f(x)$ сходится абсолютно.

Итак, теоремы Саса и Стечкина доказаны. Покажем теперь, что из них можно вывести обе теоремы С. Н. Бернштейна. В самом деле, прежде всего заметим, что так как

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant |f(x+h) - f(x)| + |f(x) - f(x-h)| \leqslant 2\omega(\delta, f)$$

при $0 \leqslant h \leqslant \delta$, то

$$\omega^{(2)}(\delta, f) \leqslant \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [2\omega(\delta, f)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\omega(\delta, f) 2\pi = 4\pi\omega(\delta, f),$$

а потому сходимость $\sum \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}}$ немедленно влечет $\sum \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < +\infty$,

а значит, и абсолютную сходимость ряда Фурье для $f(x)$ по теореме Саса.

Совершенно также теорему 3 С. Н. Бернштейна можно вывести из теоремы С. Б. Стечкина. Для этого заметим, что если $T_n^*(x)$ тот тригономет-

рический полином порядка n , который дает для $f(x)$ наилучшее приближение, то

$$E_n(f) = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T_n^*(x)|.$$

Поэтому для него

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n^*(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} E_n(f).$$

Но так как

$$E_n^{(2)}(f) = \min_{T_n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то

$$E_n^{(2)}(f) \leq \sqrt{2\pi} E_n(f),$$

а потому сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(f)}{\sqrt{n}}$$

влечет сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^{(2)}(f)}{\sqrt{n}}$, а значит, и абсолютную сходимость ряда $\sigma(f)$.

З а м е ч а н и е 1. Можно было бы вместо разности $f(x+h) - f(x-h)$ рассматривать $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ и, полагая

$$\omega_2^*(\delta, f) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

доказать совершенно так же, что $\sum \frac{\omega_2^*\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < +\infty$ влечет абсолютную

сходимость ряда Фурье для $f(x)$. В самом деле, так как

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \sim -4 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sin^2 n \frac{h}{2},$$

то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]^2 dx = 16 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sin^4 n \frac{h}{2},$$

и совершенно так же, как при доказательстве теоремы Саса, мы убеждаемся, что $\sum a_n < +\infty$ (так как рассуждение с $\sin^4 t$ то же, что и с $\sin^2 t$).

Как следствие получаем: если $\omega_2^*(\delta, f) = o(\delta)$, то уже во всяком случае ряд Фурье от $f(x)$ сходится абсолютно; значит, это имеет место, если

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| = o(h)$$

равномерно относительно x .

Таким образом мы, в частности, доказали, что у всякой равномерно гладкой функции ряд Фурье сходится абсолютно (определение гладкости и равномерной гладкости было дано в § 66 главы I).

З а м е ч а н и е 2*). Отметим, что обе теоремы Бернштейна эквивалентны, а также эквивалентны теореме Саса и Стечкина. Это значит, что каждый раз, как выполняется признак, входящий в одну из теорем Бернштейна, выполняется и признак, входящий в другую его теорему — и это же имеет

*) Это замечание принадлежит С. Б. Стечкину.

место по отношению к теоремам Саса и Стечкина. В самом деле, в силу известной теоремы Джексона (см. Добавления, § 7) имеем

$$E_n(f) < C \omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad (2.3)$$

где C — постоянное; кроме того, Стечкин доказал, что имеем аналогично

$$E_n^{(2)}(f) < C \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right). \quad (2.4)$$

В той же работе Стечкин доказал *), что

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k(f), \quad (2.5)$$

а также

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(2)}(f). \quad (2.6)$$

Покажем, что если u_n и v_n неотрицательны и монотонно убывают с ростом n , то из неравенства

$$u_n < C v_n \quad (2.7)$$

и

$$v_n < C \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k, \quad (2.8)$$

где C — постоянно, следует одновременная сходимость или расходимость рядов $\sum \frac{u_n}{\sqrt[n]{n}}$ и $\sum \frac{v_n}{\sqrt[n]{n}}$. Действительно, сходимость $\sum \frac{u_n}{\sqrt[n]{n}}$ тривиально следует из 2.7) и сходимости $\sum \frac{v_n}{\sqrt[n]{n}}$. С другой стороны, в силу (2.8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{\sqrt[n]{n}} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = C \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq C_1 \left\{ u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\sqrt[k]{k}} \right\} < +\infty$$

и, следовательно, сходимость $\sum \frac{u_k}{\sqrt[k]{k}}$ влечет $\sum \frac{v_k}{\sqrt[k]{k}} < +\infty$. Этим сразу доказываются оба сформулированных выше утверждения.

§ 3. Случай функций с ограниченным изменением

Если предполагать, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то от ее модуля непрерывности можно требовать значительно меньше. Именно имеет место следующая теорема Зигмунда**), которую мы также выведем из теоремы Саса:

*) Неравенство там написано иначе, а именно

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < C \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k(f);$$

это расхождение в индексах объясняется тем, что Стечкин обозначал через $E_n(f)$ наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq n-1$, а не n , как это сделано у всех остальных авторов, и, в частности, в этой книге.

**) Зигмунд (Zygmund^[4]) доказал абсолютную сходимость $\sigma(f)$, предполагая, что f имеет ограниченное изменение и $\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{(\ln \delta)^{2+\varepsilon}}\right)$. Утверждение, сформулированное в тексте, делает Салем (Salem^[8]) и говорит, что из результата Зигмунда оно вытекает сразу.

Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}}{n} < +\infty,$$

то $\sigma(f)$ сходится абсолютно.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, заметим прежде всего, что если

$$\omega^{[1]}(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx, \quad (3.1)$$

то для $f(x)$ с ограниченным изменением

$$\omega^{[1]}(\delta, f) = O(\delta) \quad (3.2)$$

(см. Вводный материал, § 25).

Заметим теперь, что если $0 \leq h \leq \delta$, то из

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx &\leq \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x+h) - f(x-h)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx \leq \\ &\leq \max \{ |f(x+h) - f(x)| + |f(x) - f(x-h)| \} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-h)| dx \right\} \end{aligned}$$

сразу следует

$$[\omega^{(2)}(\delta, f)]^2 \leq 2 \omega(\delta, f) \cdot 2 \omega^{[1]}(\delta, f),$$

т. е.

$$\omega^{(2)}(\delta, f) \leq 2 \sqrt{\omega(\delta, f) \omega^{[1]}(\delta, f)},$$

а потому для $f(x)$ с ограниченным изменением

$$\omega^{(2)}(\delta, f) \leq C \sqrt{\delta \omega(\delta, f)}$$

и, значит, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}}{n}$$

сходится, то сходится и

$$\sum \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}},$$

а тогда применима теорема Саса.

Следствие 1. Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно (см. Zygmund [4]).

Действительно, в этом случае $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}}{n} = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right) < +\infty.$$

Отсюда в свою очередь нетрудно вывести

С л е д с т в и е 2. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $f'(x)$ принадлежит L^p ($p > 1$), то ряд Фурье от $f(x)$ сходится абсолютно *).

В самом деле, обозначая через q число, удовлетворяющее условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеем по неравенству Гельдера для $h \geq 0$

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f'(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f'(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_x^{x+h} |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^{x+h} (1)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = O(h^{\frac{1}{q}}) \end{aligned}$$

(и для $h < 0$ то же самое рассуждение). Отсюда видно, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\frac{1}{q}$, но, кроме того, она имеет ограниченное изменение, значит, ее ряд Фурье сходится абсолютно.

Доказанную в следствии 2 теорему можно было бы также получить из следующего более общего результата:

Т е о р е м а 1. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, а у ее производной $f'(x)$ сопряженная $\bar{f}'(x)$ суммируема, то $\sigma(f)$ сходится абсолютно.

В самом деле, если $\bar{f}'(x)$ суммируема, то $f(x)$ абсолютно непрерывна, а тогда применимо следствие теоремы М. и Ф. Рисса (см. § 12 гл. VIII).

В интересующем нас случае $f'(x) \in L^p$, значит, по теореме Рисса и $\bar{f}'(x) \in L^p$ (см. гл. VIII, § 14), т. е. $\bar{f}'(x)$ заведомо суммируема.

Укажем еще один признак абсолютной сходимости.

Т е о р е м а 2. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна и для ее производной $\varphi(x)$ имеем $|\varphi(x)| \ln^+ |\varphi(x)| \in L$, то $\sigma(f)$ абсолютно сходится.

Действительно, по теореме Зигмунда (см. гл. VIII, § 15), тогда $\bar{\varphi}(x) \in L$, а значит, мы находимся в условиях теоремы 1.

З а м е ч а н и е. В предыдущих теоремах мы рассматривали абсолютно непрерывные функции, но налагали еще те или иные ограничения на их производные. Возникает вопрос: действительно ли это необходимо и не будет ли одна абсолютная непрерывность гарантировать абсолютную сходимость $\sigma(f)$? Ответ на этот вопрос является отрицательным. Более того:

Существует абсолютно непрерывная $f(x)$, у которой $\sigma(f)$ не имеет ни одной точки абсолютной сходимости. Доказательство этого утверждения базируется на следующей лемме:

Л е м м а. Пусть числа $\alpha_n \geq 0$ удовлетворяют условиям:

- 1) $\sum \alpha_n = +\infty$,
- 2) $\alpha_n \downarrow 0$,
- 3) $n \alpha_n \rightarrow 0$.

Тогда можно построить тригонометрический ряд с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$|a_n| \leq \alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

сходящийся равномерно на $[-\pi, \pi]$, но не сходящийся абсолютно ни в одной точке этого отрезка.

Для построения такого примера рассмотрим сначала ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx.$$

*) Случай $p = 2$ был уже рассмотрен в главе I, § 26.

Он сходится равномерно, в силу условий 2) и 3) по теореме § 30 главы I. Поэтому ряды

$$\sum \alpha_n \sin n \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{и} \quad \sum \alpha_n \sin n \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

сходятся равномерно, а стало быть, и их полуразность, т. е. тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2} \sum \alpha_n \left[\sin n \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin n \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \sum \alpha_n \cos nx \sin n \frac{\pi}{3},$$

сходится равномерно. Но так как

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \sin 2 \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin 3 \frac{\pi}{3} &= 0, \\ \sin 4 \frac{\pi}{3} &= \sin 5 \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin 6 \frac{\pi}{3} &= 0, \end{aligned}$$

то мы имеем дело с рядом

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x - \alpha_4 \cos 4x - \alpha_5 \cos 5x + \dots).$$

Докажем, что он не может сходиться абсолютно ни в одной точке. С этой целью заметим прежде всего, что если бы он оказался абсолютно сходящимся в некоторой точке x_0 , то сходились бы ряды

$$\alpha_1 |\cos x_0| + \alpha_4 |\cos 4x_0| + \dots + \alpha_{1+3k} |\cos (1+3k)x_0| + \dots$$

и

$$\alpha_2 |\cos 2x_0| + \alpha_5 |\cos 5x_0| + \dots + \alpha_{2+3k} |\cos (2+3k)x_0| + \dots$$

Докажем, что это возможно только при сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+3k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2+3k}.$$

В самом деле, если $x_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$, то последнее утверждение очевидно. Пусть $x_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Имеем в силу $\alpha_n \downarrow 0$

$$\begin{aligned} \alpha_{1+3k} |\cos (1+3k)x_0| + \alpha_{4+3k} |\cos (4+3k)x_0| &\geqslant \\ &\geqslant \alpha_{4+3k} [\cos^2 (1+3k)x_0 + \cos^2 (4+3k)x_0] = \\ &= \frac{\alpha_{4+3k}}{2} [1 + \cos (2+6k)x_0 + 1 + \cos (8+6k)x_0] = \\ &= \alpha_{4+3k} [1 + \cos (5+6k)x_0 \cos 3x_0] \geqslant \alpha_{4+3k} [1 - |\cos 3x_0|]. \end{aligned}$$

Пусть $x_0 \not\equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$; тогда $1 - |\cos 3x_0| = \gamma \neq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+3k} &= \alpha_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{4+3k} \leqslant \\ &\leqslant \alpha_1 + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+3k} |\cos (1+3k)x_0| + \alpha_{4+3k} |\cos (4+3k)x_0| \leqslant \\ &\leqslant \alpha_1 + \frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+3k} |\cos (1+3k)x_0| < +\infty. \end{aligned}$$

Итак, $\sum a_{1+3k} < +\infty$. Совершенно так же, если $x_0 \not\equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$, доказывается сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2+3k}$. В силу $a_n \downarrow 0$ тогда и $\sum a_{3k} < +\infty$, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, а это противоречит условию 2) нашей леммы.

Итак, осталось рассмотреть только случай $x_0 \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Но при $x_0 = \frac{\pi}{3}$ имеем $\cos x_0 = \frac{1}{2}$, $\cos 2x_0 = -\frac{1}{2}$, $\cos 4x_0 = -\frac{1}{2}$, $\cos 5x_0 = \frac{1}{2}$, поэтому наш ряд принимает вид

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_8 + \dots]$$

и если бы он сходился абсолютно, это снова влекло бы

$$\sum a_n < +\infty.$$

Отсюда следует окончательно, что ряд

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x - \alpha_4 \cos 4x - \alpha_5 \cos 5x + \dots$$

сходится равномерно, не сходится абсолютно ни в одной точке и, наконец, обозначая его коэффициенты через a_n , имеем

$$|a_n| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} a_n < a_n.$$

Лемма доказана полностью.

Вернемся к сформулированной теореме. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}. \quad (3.3)$$

В § 30 главы I было доказано, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

есть ряд Фурье. Поэтому после его почленного интегрирования получится ряд (3.3), который будет $\sigma(f)$, где $f(x)$ абсолютно непрерывна (см. гл. I, § 40). Значит, и функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

абсолютно непрерывна. Но ее рядом Фурье будет ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \cos nx \sin n \frac{\pi}{3}$$

и, полагая $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ для $n = 2, 3, \dots$, мы видим, как при доказательстве леммы, что этот ряд не имеет точек абсолютной сходимости.

Наше утверждение доказано.

Предыдущий пример показывает, что если $f(x)$ с ограниченным изменением (и даже абсолютно непрерывна), то ее ряд Фурье не должен

сходиться абсолютно. Мы знаем, что он сходится абсолютно, если, кроме условия ограниченности изменения, добавить требование

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \right|}{n} < +\infty.$$

Мы не знаем примера, который показывал бы точность этой теоремы. Отметим только, что Салемом (Sa'lem [4]) построен пример функции с ограниченным изменением, у которой ряд Фурье не является абсолютно сходящимся, но

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n} = +\infty,$$

где $\varepsilon > 0$ любое. Однако более точного примера пока не найдено.

§ 4. Необходимые условия

До сих пор мы рассматривали лишь достаточные условия для того, чтобы заданная функция имела абсолютно сходящийся ряд Фурье. Поставим теперь вопрос, насколько введенные условия необходимы. Первые результаты в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну [5]. Он доказал следующее предложение:

Теорема 1. Пусть E'_n — произвольная последовательность положительных чисел, для которой

$$E'_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E'_n}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Тогда можно найти такую непрерывную $f(x)$, что для ее наилучших приближений имеем

$$E_n(f) \leq E'_n$$

и, однако, ряд Фурье от $f(x)$ не является абсолютно сходящимся.

Поясним сначала идею доказательства. Она принадлежит С. Н. Бернштейну и основана на следующей лемме:

Лемма Бернштейна. Для любого N можно подобрать числа ϱ_n и α_n так, чтобы для полинома

$$T_N(x) = \sum_{n=1}^N \varrho_n \cos(nx + \alpha_n)$$

выполнялись условия

$$\sum_{n=1}^N \varrho_n = N$$

и

$$|T_N(x)| \leq C \sqrt{N}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

где C — абсолютная константа. Более того, можно первые $\left[\frac{N}{2}\right]$ чисел ϱ_n считать равными нулю, т. е.

$$T_N(x) = \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^N \varrho_n \cos(nx + \alpha_n).$$

Допустим, что такие полиномы уже построены и пусть $t_k(x)$ — полином построенный для числа $N = 2^k$, т. е.

$$t_k(x) = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varrho_n \cos(nx + a_n), \quad (4.1)$$

причем

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varrho_n = 2^k \quad (4.2)$$

и

$$|t_k(x)| \leq C 2^{\frac{k}{2}}. \quad (4.3)$$

Докажем, что тогда теорема 1 имеет место.

Положим

$$u_k = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} C} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}), \quad (4.4)$$

где C — константа из (4.3), и пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k t_k(x). \quad (4.5)$$

Так как в силу (4.3) и (4.4)

$$u_k |t_k(x)| \leq 2^{\frac{k}{2}} C \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} C} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) = E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}},$$

то, во-первых, ряд (4.5) сходится абсолютно и равномерно, а, значит, $f(x)$ непрерывна, и, во-вторых, если мы обозначим через $S_n(x)$ сумму первых n членов ее ряда Фурье, то

$$S_{2^k}(x) = \sum_{\nu=1}^k u_{\nu} t_{\nu}(x),$$

а потому

$$E_{2^{k-1}}(f) \leq \max |f(x) - S_{2^{k-1}}| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} u_{\nu} |t_{\nu}(x)| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} (E'_{2^{\nu}} - E'_{2^{\nu+1}}) = E'_{2^k}.$$

Пусть n задано. Находим для него такое k , что

$$2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

В силу монотонности E'_n и $E_n(f)$ имеем

$$E_n(f) \leq E_{2^{k-1}}(f) \leq E'_{2^k} \leq E'_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Значит, для построенной нами функции имеем

$$E_n(f) \leq E'_n.$$

С другой стороны, ее ряд Фурье не является абсолютно сходящимся. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что расходится ряд из абсолютных величин его коэффициентов, т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varrho_n.$$

Но мы знаем, что $\sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \varrho_n = 2^k$, а потому дело сводится к доказательству расходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C \cdot 2^{\frac{k}{2}}} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) 2^k = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}). \quad (4.6)$$

Допустим противное, т. е. что ряд (4.6) сходится. Тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) = o(1)$$

и тем более

$$2^{\frac{n}{2}} \sum_{k=n}^{\infty} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) = 2^{\frac{n}{2}} E'_n = o(1).$$

Поэтому законно преобразование Абеля, и мы находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) = 2^{\frac{1}{2}} E'_2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum_{k=2}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} E'_k. \quad (4.7)$$

В силу условия теоремы $\sum \frac{E'_k}{\sqrt{k}} = +\infty$. Поэтому по теореме Коши (см.

Вводный материал, § 4) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} E'_k = +\infty$. Отсюда следует расходимость ряда в левой части (4.7), т. е. ряда (4.6), а мы предположили его сходящимся. Приходим к противоречию.

Из противоречия вытекает, что ряд (4.6) расходится, и это заканчивает доказательство теоремы. Таким образом, теорема будет доказана, если будет доказана лемма Бернштейна.

Для доказательства своей леммы С. Н. Бернштейн пользовался свойствами символов Лежандра. Мы же будем опираться на одну важную лемму, принадлежащую Р. О. Кузьмину [1].

Л е м м а 1. Пусть $g(v)$ — действительная функция целочисленного аргумента, удовлетворяющая условиям

$$0 < \theta \leq g(1) - g(0) \leq g(2) - g(1) \leq \dots \leq g(n) - g(n-1) \leq 1 - \theta, \quad (4.8)$$

где $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\left| \sum_{v=0}^n e^{2\pi i g(v)} \right| < \frac{1}{\theta}. \quad (4.9)$$

Прежде чем доказывать эту лемму, заметим, что если мы установим ее справедливость, то неравенство (4.9) будет верно и в том случае, когда

$$p + \theta \leq g(1) - g(0) \leq g(2) - g(1) \leq \dots \leq g(n) - g(n-1) \leq p + 1 - \theta, \quad (4.10)$$

где p — любое целое, а θ снова удовлетворяет неравенству $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$.

В самом деле, полагая

$$g^*(v) = g(v) - vp \quad (v = 0, 1, \dots, n),$$

мы видим, что для чисел $g^*(v) - g^*(v-1)$ будут справедливы неравенства (4.8), если для $g(v) - g(v-1)$ были выполнены неравенства (4.10). Значит, для суммы

$$\sum_{v=0}^n e^{2\pi i g^*(v)}$$

будет верно (4.9), но так как $g^*(v)$ отличается от $g(v)$ лишь на целое число, то $e^{2\pi i g^*(v)} = e^{2\pi i g(v)}$ и, значит, оценка (4.9) справедлива и для суммы, где $g^*(v)$ заменено на $g(v)$.

Р. О. Кузьмин доказывал свою лемму на основании геометрических соображений. Мы здесь приведем арифметическое доказательство Ландау (Landau ^{[1], [2]}) ввиду его краткости.

Полагаем

$$\lambda_v = e^{2\pi i g(v)}, \quad \beta_v = \pi [g(v) - g(v-1)] \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Надо доказать, что при $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ и

$$\pi\theta \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq (1 - \theta)\pi$$

имеем

$$\left| \sum_{v=0}^n \lambda_v \right| < \frac{1}{\theta}.$$

Для этого прежде всего заметим, что в силу неравенств, которым удовлетворяют числа β_v , мы можем утверждать, что

$$\operatorname{ctg} \beta_1 \geq \operatorname{ctg} \beta_2 \geq \dots \geq \operatorname{ctg} \beta_n$$

и что

$$|\operatorname{ctg} \beta_v| \leq \frac{1}{|\sin \beta_v|} \leq \frac{1}{\sin \pi\theta} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим теперь, что

$$\operatorname{ctg} \beta_v = \frac{\cos \beta_v}{\sin \beta_v} = \frac{e^{i\beta_v} + e^{-i\beta_v}}{2 \sin \beta_v} = \frac{e^{i\beta_v} - e^{-i\beta_v} + 2e^{-i\beta_v}}{2 \sin \beta_v} = i \left[1 - i \frac{e^{-i\beta_v}}{\sin \beta_v} \right].$$

С другой стороны,

$$\lambda_{v+1} = e^{2\pi i g(v+1)} = e^{2\pi i g(v)} e^{2\pi i [g(v+1) - g(v)]} = \lambda_v e^{i2\beta_{v+1}},$$

откуда, полагая

$$\mu_v = \lambda_v i \frac{e^{-i\beta_v}}{2 \sin \beta_v},$$

находим

$$\mu_{v+1} = \lambda_{v+1} i \frac{e^{-i\beta_{v+1}}}{2 \sin \beta_{v+1}} = \lambda_v i \frac{e^{i\beta_{v+1}}}{2 \sin \beta_{v+1}}.$$

Отсюда

$$\lambda_v + \mu_{v+1} - \mu_v = \lambda_v \left[1 + i \frac{e^{i\beta_{v+1}}}{2 \sin \beta_{v+1}} - i \frac{e^{-i\beta_v}}{2 \sin \beta_v} \right].$$

Так как при любом t

$$\frac{1}{2} - i \frac{e^{-it}}{2 \sin t} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2i(2 \sin t)} = -\frac{t}{2} \operatorname{ctg} t,$$

то, полагая сначала $t = -\beta_{v+1}$, а потом $t = \beta_v$, находим

$$\begin{aligned} \lambda_v + \mu_{v+1} - \mu_v &= \lambda_v \left[\frac{1}{2} + i \frac{e^{i\beta_{v+1}}}{2 \sin \beta_{v+1}} + \frac{1}{2} - i \frac{e^{-i\beta_v}}{2 \sin \beta_v} \right] = \\ &= -\frac{\lambda_v}{2} i [\operatorname{ctg} \beta_v - \operatorname{ctg} \beta_{v+1}]. \end{aligned}$$

Но каковы бы ни были числа λ_v и μ_v , имеем тождественно

$$\sum_{v=0}^n \lambda_v = \lambda_0 + \mu_1 + \sum_{v=1}^{n-1} (\lambda_v + \mu_{v+1} - \mu_v) + \lambda_n - \mu_n,$$

в чем можно убедиться простым раскрытием скобок и приведением подобных членов. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} &= \lambda_0 \left[1 + i \frac{e^{i\beta_1}}{2 \sin \beta_1} \right] - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\nu} [\operatorname{ctg} \beta_{\nu} - \operatorname{ctg} \beta_{\nu+1}] + \lambda_n \left[1 - i \frac{e^{-i\beta_n}}{2 \sin \beta_n} \right] = \\ &= \lambda_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \beta_1 \right] - \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\nu} [\operatorname{ctg} \beta_{\nu} - \operatorname{ctg} \beta_{\nu+1}] + \lambda_n \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \beta_n \right]. \end{aligned}$$

Но каждое λ_{ν} имеет модуль, равный 1; кроме того, как мы видели, $\operatorname{ctg} \beta_{\nu} - \operatorname{ctg} \beta_{\nu+1} \geq 0$; наконец, при любом β

$$\left| \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \beta \right| = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \beta \pm i \cos \beta}{\sin \beta} \right] = \frac{1}{2 \sin \beta},$$

а потому окончательно

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} \right| &\leq \frac{1}{2 \sin \beta_1} + \frac{1}{2} [\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_n] + \frac{1}{2 \sin \beta_n} = \\ &= \frac{1 + \cos \beta_1}{2 \sin \beta_1} + \frac{1 - \cos \beta_n}{2 \sin \beta_n} < \frac{2}{\sin \theta \pi} \leq \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

и лемма 1 доказана.

Опираясь на лемму 1, докажем, что имеет место

Л е м м а 2. Пусть $a = 1$ или $a = 2$; тогда для любого N и для $0 \leq m \leq n \leq N$ имеем

$$\sum_{\nu=m}^n e^{ai \left(\frac{\nu^2}{N} + \nu x \right)} = O(\sqrt{N}), \quad N = 1, 2, \dots$$

равномерно относительно m , n и $x \in [0, 2\pi]$.

Положим

$$g(\nu) = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{\nu^2}{N} + \nu x \right).$$

Тогда

$$g(\nu) - g(\nu-1) = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{2\nu-1}{N} + x \right).$$

Обозначим

$$h_{\nu} = g(\nu) - g(\nu-1).$$

Ясно, что $h_{\nu} - h_{\nu-1} = \frac{a}{\pi N}$, поэтому точки h_m, h_{m+1}, \dots, h_n находятся друг от друга на расстоянии, равном $\frac{a}{\pi N}$, и расположены слева направо.

Положим $\theta = \frac{1}{8 \sqrt{N}}$. Возможны 2 случая:

1) не существует ни одного целого k , для которого

$$|h_{\nu} - k| \leq \theta \quad (4.11)$$

хотя бы при одном ν , $m+1 \leq \nu \leq n$,

2) такие k существуют.

В первом случае существует такое целое p , что

$$p + \theta < h_{\nu} < p + 1 - \theta, \quad n \leq \nu \leq m.$$

Тогда мы находимся в условиях применения леммы Кузьмина и сразу видим, что лемма 2 доказана.

Во втором случае, прежде всего, покажем, что если N достаточно велико, то такое k может быть только одно. Действительно, отрезок $[h_{m+1}, h_n]$ имеет длину

$$\Delta = \frac{a}{\pi N} (n - m - 1) \leq \frac{a}{\pi}.$$

Поэтому, добавляя к нему слева и справа по отрезку длины θ , получим отрезок длины, не превосходящей $2\theta + \frac{2}{\pi} < 1$ (так как $\theta \leq \frac{1}{8}$ при любом N), значит для достаточно большого N двух различных целых k , удовлетворяющих условию (4.11) хотя бы при одном ν , $m + 1 \leq \nu \leq n$, быть не может.

Рассмотрим теперь то значение k , для которого (4.11) возможно; пусть оно выполняется для $n_1 \leq \nu \leq n_2$; здесь $m \leq n_1$; $n_2 \leq n$.

Напишем

$$\sum_{\nu=m}^n e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N} + \nu x\right)} = \sum_{\nu=m}^{n_1-1} + \sum_{n_1}^{n_2} + \sum_{n_2+1}^n = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

(любая из сумм Σ_1 и Σ_3 может оказаться пустой).

Для чисел h_ν с индексами ν из Σ_2 имеем неравенство (4.11), поэтому

$$|h_{\nu_1} - h_{\nu_2}| \leq \frac{1}{4\sqrt{N}},$$

если ν_1 и ν_2 — индексы из суммы Σ_2 . Но, так как точки h_ν и $h_{\nu+1}$ находятся на расстоянии $\frac{a}{N\pi}$ друг от друга, то точек h_ν , индексы которых относятся к сумме Σ_2 , может быть не более, чем $O(\sqrt{N})$; значит, сумма Σ_2 содержит не более, чем $O(\sqrt{N})$ членов, но модуль каждого члена равен 1, а потому

$$|\Sigma_2| = O(\sqrt{N}). \quad (4.12)$$

К суммам Σ_1 и Σ_3 мы можем применить лемму Кузьмина. Действительно, в Σ_1 мы имеем такие индексы ν , для которых

$$(k-1) + \theta < h_\nu < k - \theta$$

и достаточно принять $p = k - 1$; для Σ_3 имеем

$$k + \theta \leq h_\nu \leq k + 1 - \theta$$

и можно в лемме Кузьмина взять $p = k$. Таким образом, находим

$$|\Sigma_1| < \frac{1}{\theta} = O(\sqrt{N}) \quad \text{и} \quad |\Sigma_3| = O(\sqrt{N}). \quad (4.13)$$

Соединяя (4.12) и (4.13), получаем

$$\left| \sum_{\nu=m}^n e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N} + \nu x\right)} \right| = O(\sqrt{N}),$$

и лемма 2 доказана.

Для доказательства леммы Бернштейна достаточно взять $a = 1$; случай $a = 2$ будет использован немного позже.

З а м е ч а н и е 1. Построенный пример одновременно отвечает на вопрос о том, насколько точна теорема 1 Бернштейна (см. § 2). Именно, можно показать, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица порядка $\alpha = \frac{1}{2}$, у которой ряд Фурье не является абсолютно сходящимся.

Действительно, известно (см. Добавления, § 7), что если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, то

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

и, наоборот, если это равенство выполнено, то $f(x) \in \text{Lip } \alpha$. Но, полагая $E'_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, имеем

$$\sum \frac{E'_n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Поэтому в силу только что доказанной теоремы можно найти такую $f(x)$, у которой $E_n(f) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ (т. е. она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = \frac{1}{2}$), и при этом ее ряд Фурье не является абсолютно сходящимся.

З а м е ч а н и е 2. Только что построенный пример дает несколько больше, чем требовалось. Именно можно показать, что у функции, определяемой формулой (4.5), ряд $\sigma(f)$ не только не является абсолютно сходящимся, но даже не имеет ни одной точки абсолютной сходимости*).

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \left| \cos\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) \right| &\geq \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos^2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \left[1 + \cos 2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) \right] = 2^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos 2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Но, как было доказано в лемме 2 (надо положить $a = 2$), имеем

$$\left| \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos 2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) \right| = \left| \operatorname{Re} \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} e^{i2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right)} \right| = O(2^{\frac{k}{2}}).$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^N u_k \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \cos 2\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) = O\left(\sum_{k=1}^N 2^{\frac{k}{2}} u_k\right)$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^N u_k \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \left| \cos\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) \right| \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N 2^k u_k - O\left(\sum_{k=1}^N 2^{\frac{k}{2}} u_k\right).$$

Но так как было уже доказано, что $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_k$ расходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} u_k$ сходится, то для любого x имеем

$$\sum_{k=1}^N u_k \sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} \left| \cos\left(vx + \frac{v^2}{2^k}\right) \right| \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N 2^k u_k - O(1) \rightarrow \infty$$

*) Этот факт был доказан С. Б. Стечкиным^[7]; он показал в той же работе, что при выполнении условий $E'_n \downarrow 0$ и $\sum \frac{E'_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ можно построить $f(x)$ так, чтобы удовлетворялись следующие условия для $f(x)$ и ее сопряженной $\bar{f}(x)$:

- 1) $E_n(f) = O(E'_n)$,
- 2) $E_n(\bar{f}) = O(E'_n)$,
- 3) ряды $\sigma(f)$ и $\sigma(\bar{f})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.

при $N \rightarrow \infty$, откуда и следует, что рассматриваемый ряд не является абсолютно сходящимся, каково бы ни было x , $0 \leq x \leq 2\pi$.

Естественно поставить вопрос, можно ли доказать аналогичную теорему в терминах модулей непрерывности. Точнее: пусть $\omega(\delta)$ — положительная функция и ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ расходится. Можно ли найти такую $f(x)$, что $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$ и для нее ряд Фурье не является абсолютно сходящимся?

С. Н. Бернштейн [5] ответил на этот вопрос положительно, налагая на $\omega(\delta)$ такие дополнительные ограничения: существует такое $\varepsilon > 0$, что $\delta^{-\varepsilon} \omega(\delta)$ возрастает, а $\delta^{\varepsilon-1} \omega(\delta)$ убывает*).

Мы здесь докажем следующую теорему (см. С. Б. Стечкин [7]):

Т е о р е м а 2. Если $\omega(\delta)$ положительна, не убывает на $0 \leq \delta \leq \pi$, $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \downarrow$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

то существует функция $f(x)$, для которой $\omega(\delta, f) = O[\omega(\delta)]$, и ее ряд Фурье не является абсолютно сходящимся**).

Для доказательства этой теоремы прежде всего доказывается

Л е м м а 3. Пусть $u(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и

$$\frac{u(\eta)}{\eta} \leq C \frac{u(\delta)}{\delta} \quad (0 < \delta < \eta \leq \pi). \quad (4.14)$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

то существует последовательность положительных чисел $\{B_n\}$ такая, что

- 1) $B_n \downarrow 0$,
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty$,
- 3) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k \leq u\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Если мы докажем существование последовательности, удовлетворяющей условиям 1), 2) и

$$3') \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k \leq M u\left(\frac{1}{n}\right),$$

где M — некоторая константа, то доказательство будет закончено, так как тогда последовательность $\frac{B_n}{M}$ обладает уже свойствами 1), 2) и 3).

*) В комментариях к Собранию сочинений (т. II, работа 60) он отметил, что первое из этих условий является излишним.

**) При доказательстве используется даже менее ограничительное условие, чем $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \downarrow$, а именно условие

$$\frac{\omega(\eta)}{\eta} \leq C \frac{\omega(\delta)}{\delta} \quad (0 < \delta < \eta \leq \pi),$$

где C постоянное.

Прежде всего заметим, что

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, если бы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty,$$

то нашлись бы числа N_s как угодно большие, для которых

$$N_s u\left(\frac{1}{N_s}\right) < K,$$

где K — константа, а тогда в силу (4.14) для $1 \leq n < N_s$

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leq C N_s u\left(\frac{1}{N_s}\right) \leq CK = C',$$

т. е.

$$u\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{C'}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а это противоречит расходимости ряда $\sum \frac{u\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$.

Итак, $nu\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow +\infty$. Построим последовательность натуральных чисел n_k так, чтобы $n_1 = 1$, и если n_1, n_2, \dots, n_k уже выбраны, то n_{k+1} — наименьшее из чисел N , для которых

$$Nu\left(\frac{1}{N}\right) > 2 n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Тогда

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2 n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (n_k \leq n < n_{k+1}) \quad (4.15)$$

и

$$n_{k+1} u\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) > 2 n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.16)$$

Заметим, что

$$n_{k+1} > 2 n_k.$$

Действительно, если $n_k < n \leq 2n_k$, то в силу монотонности $u(\delta)$

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2 n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

и, значит, $n \neq n_{k+1}$.

Положим теперь

$$B_1 = u(1), \quad B_n = u\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right), \quad n_k < n \leq n_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и докажем, что эта последовательность обладает нужными свойствами.

Свойство 1) вытекает из того, что $u(\delta) \downarrow 0$.

Для доказательства 2) положим для удобства $n_0 = 0$; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{\sqrt{n_k}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \frac{n_k - n_{k-1}}{\sqrt{n_k}}. \end{aligned}$$

Но $n_{k+1} > 2n_k$, значит, $n_k - n_{k-1} \geq \frac{1}{2} n_k$, а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[n_k]{n_k} u\left(\frac{1}{n_k}\right). \quad (4.17)$$

Из (4.15) находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt[n]{n}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} n u\left(\frac{1}{n}\right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n_k}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \\ &< C' \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \frac{1}{\sqrt[n_k]{n_k}} = C' \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[n_k]{n_k} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \end{aligned}$$

и в силу расходимости ряда в левой части неравенства это доказывает расходимость

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[n_k]{n_k} u\left(\frac{1}{n_k}\right),$$

а тогда из (4.17) вытекает расходимость ряда $\sum \frac{B_n}{\sqrt[n]{n}}$, и свойство 2) установлено.

Остается доказать свойство 3').

Пусть N задано; найдем такое k , что

$$n_{k-1} < N \leq n_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_n &= \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{n=n_{s-1}+1}^{n_s} B_n + \sum_{n=n_{k-1}+1}^N B_n = \\ &= \sum_{s=1}^{k-1} (n_s - n_{s-1}) u\left(\frac{1}{n_s}\right) + (N - n_{k-1}) u\left(\frac{1}{n_k}\right) \leq \sum_{s=1}^{k-1} n_s u\left(\frac{1}{n_s}\right) + N u\left(\frac{1}{n_k}\right). \end{aligned}$$

Пусть $N > 1$ и, значит, $k \geq 1$. В силу (4.16)

$$n_s u\left(\frac{1}{n_s}\right) \leq \frac{1}{2^{k-s-1}} n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, k-1),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^N B_n \leq n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{2^{k-s-1}} + N u\left(\frac{1}{n_k}\right) \leq 2 n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) + N u\left(\frac{1}{N}\right),$$

но так как в силу (4.14)

$$n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \leq C N u\left(\frac{1}{N}\right),$$

то

$$\sum_{n=1}^N B_n < M N u\left(\frac{1}{N}\right)$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N B_n < M u\left(\frac{1}{N}\right),$$

где M — некоторая константа, т. е. 3') установлено, и доказательство леммы 3 закончено.

Отсюда уже легко свести доказательство теоремы 2 о модулях непрерывности к ранее доказанной теореме 1, выраженной в терминах наилучших приближений.

В самом деле, в теореме 2 функцию $\omega(\delta)$ можно, не нарушая общности, предполагать монотонно стремящейся к нулю. Тогда, полагая $\omega(\delta) = u(\delta)$, можем применить к ней только что доказанную лемму 3.

Значит, на основании этой леммы можно найти такие B_n , что $B_n \downarrow 0$, $\sum \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ и

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n B_\nu \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

На основании теоремы 1 тогда найдется такая $f(x)$ с неабсолютно сходящимся рядом Фурье*), для которой

$$E_n(f) \leq B_n.$$

Для модуля непрерывности этой функции на основании неравенства

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq C \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n E_\nu(f)$$

(см. Добавления, § 7) имеем

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

а тогда на основании известного свойства модулей непрерывности (см. Вводный материал, § 25) имеем

$$\omega(\delta, f) = O[\omega(\delta)],$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведем здесь без доказательства еще одну теорему С. Б. Стечкина [7], позволяющую избавиться от всех ограничений, наложенных на $\omega(\delta)$, кроме ее положительности. Для этого сначала надо ввести понятие истинной мажоранты.

Рассмотрим для заданной положительной функции $\omega(\delta)$ все те функции $f(x)$, для которых $\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta)$. Берем верхнюю грань модулей непрерывности $\omega(\delta, f)$ для всех таких $f(x)$ и обозначаем ее $\omega^*(\delta)$. Эту функцию С. Б. Стечкин назвал *истинной мажорантой*; он дал для нее и конструктивное определение, но оно нам не понадобится. В той же работе С. Б. Стечкин доказал теорему:

Пусть $\omega(\delta)$ — любая положительная, а $\omega^*(\delta)$ — построенная по ней истинная мажоранта. Если

$$\sum \frac{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} < +\infty,$$

то для любой $f(x)$, у которой $\omega(\delta, f) = O[\omega(\delta)]$, ряд $\sigma(f)$ сходится абсолютно,

если же $\sum \frac{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = +\infty$, то можно найти $f(x)$ с $\omega(\delta, f) = O[\omega(\delta)]$ и такую,

что $\sigma(f)$ не является абсолютно сходящимся.

Это и есть окончательный ответ на вопрос о том, можно ли усилить теорему 2 Бернштейна из § 2.

*) Можно даже добиться, чтобы у этого ряда Фурье не было ни одной точки абсолютной сходимости (см. замечание 2).

§ 5. Общие замечания о связи между модулем непрерывности функции и абсолютной сходимостью ее ряда Фурье

Может получиться впечатление, что, зная поведение $\omega(\delta, f)$, мы имеем возможность полностью решить вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sigma(f)$. Однако это, конечно, неверно: полученный нами результат хорош, когда речь идет о целом классе функций $f(x)$, у которых

$$\omega(\delta, f) = O[\omega(\delta)].$$

Конечно, если

$$\sum \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} < +\infty,$$

то у всех функций этого класса ряды Фурье абсолютно сходятся, но если этого нет, то про индивидуальную функцию этого класса ничего сказать нельзя.

Действительно, покажем, что

Существуют две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ такие, что

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta, \varphi),$$

и, однако, $\sigma(\varphi)$ абсолютно сходится, а $\sigma(f)$ не является абсолютно сходящимся.

Для этого рассмотрим такую $f(x)$, которая удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = \frac{1}{2}$, но имеет неабсолютно сходящийся ряд Фурье (такие функции существуют, см. Замечание 1 в § 4).

Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$; тогда $\omega(\delta) = O(\delta^{\frac{1}{2}})$. Пусть

$$\varphi(x) = \omega(x) \quad \text{на} \quad (0, \pi)$$

и

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Ясно, что $\varphi(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением (так как $\omega(x)$ монотонна и непрерывна) и очевидно*), что модуль непрерывности для $\varphi(x)$ снова равен $\omega(\delta)$. Но так как

$$\sum \frac{1}{n} \sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \leq C \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4}}},$$

то

$$\sum \frac{1}{n} \sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} < +\infty,$$

а тогда по теореме Зигмунда (см. § 3) ряд Фурье от $\varphi(x)$ сходится абсолютно.

*) Действительно, пользуясь свойствами модуля непрерывности (см. Вводный материал, § 25), находим для любого $h > 0$

$$0 \leq \omega(x+h) - \omega(x) \leq \omega(h).$$

Поэтому, если $0 \leq x \leq x+h \leq \pi$, то для $0 \leq h \leq \delta$

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| = \omega(x+h) - \omega(x) \leq \omega(h) \leq \omega(\delta).$$

В силу $\varphi(\pi+x) = \varphi(\pi-x)$ это же верно, если $\pi \leq x \leq x+h \leq 2\pi$, а также если $x \leq \pi$, а $x+h \geq \pi$. Отсюда

$$\omega(\delta, \varphi) \leq \omega(\delta).$$

С другой стороны, очевидно, что неравенство не может иметь места, т. е. $\omega(\delta, \varphi) = \omega(\delta)$.

Этот пример принадлежит С. Б. Стечкину. Он показывает, что вопрос об абсолютной сходимости ряда Фурье от функции $f(x)$ заведомо не может быть решен до конца рассмотрением только ее модуля непрерывности.

Сделаем еще одно замечание к вопросу о связи между модулем непрерывности функции и абсолютной сходимостью ее ряда Фурье.

Мы видели, что достаточно быстрое стремление к нулю $\omega(\delta, f)$ влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma(f)$ (достаточно $\sum \frac{\omega(\frac{1}{n}, f)}{\sqrt{n}} < +\infty$). Но нельзя вывести никакого заключения в обратную сторону, т. е. из абсолютной сходимости ряда $\sigma(f)$ никак нельзя заключить, что $\omega(\delta, f) \rightarrow 0$ достаточно быстро.

Более того,

Пусть $\omega(\delta) \downarrow 0$, но $\omega(\delta)$ убывает как угодно медленно. Можно найти такую $f(x)$, что для достаточно малых δ

$$\omega(\delta, f) \geq a \omega(\delta) \quad (a > 0),$$

и, однако, $\sigma(f)$ абсолютно сходится.

Чтобы убедиться в этом, напомним (см. глава I, § 21), что для любой $f(x)$ имеем

$$a_m = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{m}, f\right)\right] \quad \text{и} \quad b_m = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{m}, f\right)\right].$$

Иными словами, существует такое $\eta > 0$, что

$$\omega\left(\frac{\pi}{m}, f\right) > \eta |a_m| \quad \text{и} \quad \omega\left(\frac{\pi}{m}, f\right) > \eta |b_m|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Заметив это, найдем для каждого $\delta > 0$ такое целое k , что

$$\frac{\eta}{(k+1)^2} \leq \omega(\delta) < \frac{\eta}{k^2}. \quad (5.1)$$

Числа δ , удовлетворяющие (5.1), образуют некоторый полуинтервал, левый конец которого заведомо не есть точка $\delta = 0$. Поэтому можно найти такое n_k , что $\frac{\pi}{n_k} \leq \delta$ для всех δ , удовлетворяющих (5.1). Мы можем так последовательно определить числа n_k и без ограничения общности считать $n_k > n_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$). Построим теперь ряд

$$\sum \frac{1}{k^2} \cos n_k x.$$

Ясно, что он сходится абсолютно. Но для его суммы имеем при любом δ

$$\omega(\delta, f) \geq \omega(\delta).$$

Действительно, находим сначала для заданного δ такое k , что выполнено (5.1); для этого δ в силу выбора чисел n_k и монотонности $\omega(\delta, f)$ имеем

$$\omega(\delta, f) \geq \omega\left(\frac{\pi}{n_k}, f\right) \geq \eta |a_{n_k}| = \frac{\eta}{k^2} > \omega(\delta)$$

в силу (5.1), и доказательство закончено.

Первые примеры такого рода были построены С. Н. Бернштейном.

Полезно еще сделать одно замечание относительно функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье. Мы уже видели, что их модули непрерывности могут убывать как угодно медленно. Отсюда уже естественно ожидать, что они могут не иметь никаких хороших дифференциальных свойств. И дейст-

вительно существуют функции с абсолютно сходящимися рядами Фурье, не имеющие конечной производной ни в одной точке.

Первый пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции был дан Вейерштрассом. Этот пример годится для доказательства нашего утверждения. Возьмем числа a и b положительные и такие, что $0 < a < 1$, b — целое нечетное и

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-a).$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Ее ряд Фурье сходится абсолютно и, однако, мы сейчас покажем, что она нигде на $(-1, 1)$ не имеет конечной производной.

Действительно, пусть x задано. Для любого n определим целое c_n так, чтобы

$$c_n - \frac{1}{2} \leq b^n x < c_n + \frac{1}{2}.$$

Пусть $x'_n = \frac{c_n - 1}{b^n}$ и $x''_n = \frac{c_n + 1}{b^n}$; ясно, что $x'_n < x < x''_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} &= \frac{2}{3} b^n \sum_{k=1}^{\infty} a^k [\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n] = \\ &= \frac{2}{3} b^n \sum_{k=1}^{n-1} a^k [\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n] + \\ &\quad + \frac{2}{3} b^n \sum_{k=n}^{\infty} a^k [\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n] = \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

В силу теоремы о конечном приращении

$$|\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n| \leq b^k \pi (x''_n - x'_n) = \frac{3}{2} \frac{b^k}{b^n} \pi,$$

а потому

$$|\Sigma_1| \leq \pi \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^k = \pi \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^n}{ab - 1}.$$

Далее, так как

$$\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n = -2 \sin b^k \pi \frac{2c_n - 1}{2b^n} \sin b^k \pi \frac{3}{4b^n},$$

то, учитывая нечетность b и то, что при $k \geq n$ число b^{k-n} есть целое нечетное, находим

$$\cos b^k \pi x''_n - \cos b^k \pi x'_n = (-1)^{c_n},$$

а потому

$$\Sigma_2 = \frac{2}{3} b^n (-1)^{c_n} \sum_{k=n}^{\infty} a^k = (-1)^{c_n} \frac{2}{3} b^n \frac{a^n}{1-a}.$$

Каждый раз, как c_n четное, мы, следовательно, имеем

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} > \Sigma_2 - |\Sigma_1| = a^n b^n \left[\frac{2}{3} \frac{1}{1-a} - \frac{\pi}{ab-1} \right],$$

а так как мы предположили, что $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-a)$, то число в квадрат-

ных скобках положительно, а, стало быть,

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} > a a^n b^n,$$

где $a > 0$. Если же c_n нечетное, то, рассуждая так же, найдем

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} < -a a^n b^n.$$

Так как среди чисел c_n должно найтись либо бесконечное множество четных, либо бесконечное множество нечетных и $a^n b^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} \right| = +\infty,$$

откуда ясно, что $f(x)$ не может иметь конечной производной в точке x , и поскольку это рассуждение справедливо для любого x , то доказательство закончено.

§ 6. Критерий абсолютной сходимости Шилова

Мы уже отмечали в § 5, что все до сих пор полученные критерии абсолютной сходимости были применимы сразу к некоторому классу функций, причем в случае, когда они не выполнялись, можно было утверждать только, что в этом классе найдется функция, у которой ряд Фурье не является абсолютно сходящимся. Однако для индивидуальной функции этого класса никаких суждений высказать было нельзя.

Укажем здесь одну теорему, где, правда, рассматривается не очень широкий класс функций, но зато для каждой индивидуальной функции этого класса дается необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ее ряда Фурье.

Теорема Шилова [1]. Пусть функция $\Psi(t)$ удовлетворяет условиям

- а) $\Psi(-t) = -\Psi(t)$, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\pi - t) = \Psi(t)$, $\Psi(t + 2\pi) = \Psi(t)$;
- б) $\Psi(t)$ непрерывна при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (а значит, и всюду);
- в) $\Psi(t)$ не убывает*) при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; ее производная $\Psi'(t)$ непрерывна и не возрастает на $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$;
- г) $\lim_{t \rightarrow 0} t \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = 0$ **).

*) Формулируя свою теорему, Г. Е. Шиллов условие в) писал в виде: $\Psi(t)$ монотонно возрастает при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ и постоянна при $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; ее производная $\Psi'(t)$ непрерывна и не возрастает на $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$.

Мы здесь даем несколько более простое доказательство теоремы Г. Е. Шилова, при котором предполагать $\Psi(t)$ постоянной на $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ не понадобилось. Однако по существу дела здесь никакого обобщения нет, так как в § 10 мы убедимся, что класс функций, к которым применима теорема Шилова, может быть значительно расширен.

**) Геометрический смысл этого условия заключается в том, что при $t \rightarrow 0$ отрезок η , отсекаемый на оси ординат касательной к кривой, эквивалентен ординате этой кривой в точке касания (рис. 40).

Тогда ряд Фурье для $\Psi(t)$ сходится абсолютно в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \Psi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right). \quad (6.1)$$

Для доказательства заметим, что в ряде Фурье для $\Psi(t)$ в силу ее нечетности все $a_n = 0$ и, кроме того, в силу $\Psi(\pi - t) = \Psi(t)$ обращаются в нуль все b_n для четных n . Будем поэтому изучать поведение b_n для нечетных n .

Имеем в силу $\Psi(\pi - t) = \Psi(t)$

$$\frac{\pi}{4} b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi(t) \sin nt \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) \sin nt \, dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(t) \sin nt \, dt = I_1 + I_2. \quad (6.2)$$

Докажем сначала, что

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) \sin nt \, dt = \frac{\beta_n}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (6.3)$$

где $\beta_n \rightarrow 2$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, во-первых, из монотонности $\Psi(t)$ на $(0, \frac{\pi}{n})$ сразу следует, что

$$I_1 < \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt \, dt = 2 \frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (6.4)$$

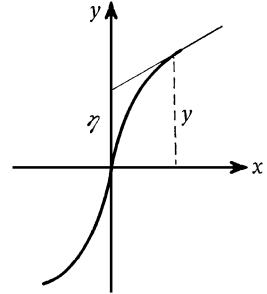


Рис. 40

Далее в силу условия г), если $\varepsilon > 0$ любое, можно выбрать n столь большим, чтобы касательная к кривой $y = \Psi(t)$, проведенная через точку $\left[\frac{\pi}{n}, \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$, отсекала на оси ординат отрезок y_n такой, что $y_n > (1 - \varepsilon) \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)$, а тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi(t) \sin nt \, dt > y_n \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt \, dt > 2(1 - \varepsilon) \frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (6.5)$$

и в силу произвольности ε из (6.4) и (6.5) следует (6.3).

В интеграле I_2 произведем интегрирование по частям; получим, учитывая нечетность n ,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\Psi(t) \frac{\cos nt}{n} \Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi'(t) \cos nt \, dt = \\ &= -\frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi'(t) \cos nt \, dt = -\frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) + I_3. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Так как $\Psi'(t)$ не возрастает на $\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}\right)$, то по второй теореме о среднем

$$|I_3| = \left| \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi'(t) \cos nt \, dt \right| = \left| \frac{1}{n} \Psi' \left(\frac{\pi}{n} \right) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi} \cos nt \, dt \right| < \frac{2}{n^2} \Psi' \left(\frac{\pi}{n} \right), \quad (6.7)$$

где $\frac{\pi}{n} < \xi < \frac{\pi}{2}$.

Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi' \left(\frac{\pi}{n} \right)}{n^2} < +\infty. \quad (6.8)$$

Действительно, в силу условия в) угловой коэффициент касательной к кривой $y = \Psi(t)$ в точке $t = \frac{\pi}{n}$ не превосходит угловой коэффициент любой хорды, пересекающей кривую в точках $[\xi, \Psi(\xi)]$ и $\left[\frac{\pi}{n}, \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$ при любом ξ , $0 < \xi < \frac{\pi}{n}$; в частности, полагая $\xi = \frac{\pi}{n+1}$, находим

$$\Psi' \left(\frac{\pi}{n} \right) < \frac{\Psi \left(\frac{\pi}{n} \right) - \Psi \left(\frac{\pi}{n+1} \right)}{\frac{\pi}{n(n+1)}} \leq \frac{2}{\pi} n^2 \left[\Psi \left(\frac{\pi}{n} \right) - \Psi \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right],$$

откуда сразу следует справедливость (6.8). Отсюда получаем, что $I_3 = \varepsilon_n$, где

$$\sum |\varepsilon_n| < +\infty. \quad (6.9)$$

Соединяя (6.2), (6.6) и (6.9), получаем

$$\frac{\pi}{4} b_n = \frac{\beta_n - 1}{n} \Psi \left(\frac{\pi}{n} \right) + \varepsilon_n, \text{ где } \sum |\varepsilon_n| < +\infty.$$

Так как $\beta_n \rightarrow 2$, то отсюда для любого нечетного n

$$b_n = \frac{\theta_n}{n} \Psi \left(\frac{\pi}{n} \right) + \eta_n, \text{ где } \sum |\eta_n| < +\infty,$$

а $\theta_n \rightarrow \frac{4}{\pi}$. Это показывает, что сходимость рядов $\sum |b_{2n+1}|$ и $\sum \frac{1}{2n+1} \Psi \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)$ может иметь место только одновременно, а так как $\sum (b_{2n}) = 0$, то это же верно для $\sum |b_n|$ и $\sum \frac{1}{2n+1} \Psi \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)$.

Теорема полностью доказана.

В § 10 мы покажем, что класс функций, к которым применима теорема Шилова, может быть значительно расширен.

§ 7. Критерий абсолютной сходимости М. Рисса

Можно сформулировать и в самом общем случае условие, необходимое и достаточное для абсолютной сходимости ряда Фурье от заданной функции $f(x)$.

К сожалению, это условие трудно практически использовать *). Мы имеем в виду следующую теорему:

Т е о р е м а Р и с с а **). *Для того чтобы ряд $\sigma(f)$ сходиллся абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ могла быть представлена в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) g(t) dt,$$

где $h(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$.

Мы будем все ряды Фурье записывать в комплексной форме. Пусть

$$h(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{imx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m e^{imx}.$$

В главе I § 23 было доказано, что тогда для $f(x)$ имеем

$$f(x) \sim \sum c_m e^{imx},$$

где

$$c_m = a_m b_m.$$

Но из $h(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$ имеем

$$\sum |a_m|^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum |b_m|^2 < +\infty,$$

а потому из

$$|c_m| \leq \frac{1}{2} [|a_m|^2 + |b_m|^2]$$

следует

$$\sum |c_m| < +\infty$$

и достаточность условия доказана.

Напротив, если

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx}$$

и $\sum |c_m|$ сходится, то, полагая

$$a_m = \sqrt{|c_m|}, \quad b_m = \sqrt{|c_m|} e^{i \arg c_m},$$

по теореме Фишера—Рисса находим функции $h(x)$ и $g(x)$, принадлежащие к L^2 и такие, что

$$h(x) \sim \sum a_m e^{imx}, \quad g(x) \sim \sum b_m e^{imx},$$

причем для $F(x)$, определяемой по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) g(t) dt,$$

ряд Фурье имеет вид

$$\sum |c_m| e^{i \arg c_m} e^{imx} = \sum c_m e^{imx},$$

а значит, она совпадает с $f(x)$.

*) В работе П. Леви (Levy[2]) высказана мысль, что задача отыскания необходимого и достаточного условия для того, чтобы ряд Фурье сходиллся абсолютно, является не только нерешенной, но, по-видимому, и неразрешимой (то же суждение сделано и по поводу равномерной сходимости ряда Фурье).

**) См. Hardy and Littlewood[7].

Теорема доказана.

При всей законченности этой теоремы она обладает существенным недостатком: неизвестно, какова должна быть структура функции $f(x)$ для того, чтобы ее можно было представить в виде «свертки» двух функций из L^2 (см. понятие свертки в § 23 главы I), а поэтому теорему М. Рисса трудно использовать.

Правда, можно было бы доказать, опираясь на нее, уже известную теорему о том, что если $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f'(x) \in L^2$, то ряд Фурье от $f(x)$ сходится абсолютно (см. глава I, § 26). Действительно, полагая

$$g(t) = \pi - t \quad \text{на} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

и продолжая ее периодически, видим, что $g(t) \in L^2$. По условию и $f'(t) \in L^2$. Образум свертку

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x-t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x-t) (\pi - t) dt. \quad (7.1)$$

Не нарушая общности, мы будем предполагать, что в ряде Фурье для $f(x)$ свободный член равен 0 (это не отразится на абсолютной сходимости). Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Производя интегрирование по частям в формуле (7.1), находим

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2\pi} f(x-t)(\pi-t) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi f(x-2\pi) + \pi f(x)] = f(x), \end{aligned}$$

ибо $f(x-2\pi) = f(x)$ и, кроме того, $\int_0^{2\pi} f(x-t) dt = 0$.

Итак, $f(x)$ оказалась сверткой двух функций из L^2 . Но, конечно, этот пример мало интересен, поскольку доказательство данной теоремы без свертки совершенно элементарно.

§ 8. Критерий абсолютной сходимости Стечкина

Укажем один предложенный С. Б. Стечкиным критерий абсолютной сходимости ряда Фурье. Для этого сначала введем некоторое новое понятие.

Допустим, что мы будем приближать функцию $f(x)$ по норме L^2 тригонометрическими полиномами вида

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos p_k x + \beta_k \sin p_k x, \quad (8.1)$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. В частном случае, когда $p_k = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) получаются тригонометрические полиномы порядка n . Обозначим через $e_n(f)$ наилучшее приближение $f(x)$ такими полиномами вида (8.1) в метрике L^2 , т. е.

$$e_n(f) = \min_{T_n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ясно, что $e_n(f) \leq E_n^{(2)}(f)$, где через $E_n^{(2)}(f)$ обозначено наилучшее приближение $f(x)$ в метрике L^2 обычными тригонометрическими полиномами порядка n . Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема Стечкина^[8]. Для того чтобы ряд Фурье от $f(x)$ сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(f)}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

Заметим, что в общем случае совершенно неизвестно, как найти $e_n(f)$, а потому, если не налагать на $f(x)$ дополнительных ограничений, то практически применить этот критерий невозможно. Однако следует отметить один интересный частный случай. Именно, С. Б. Стечкин доказал, что если

$$f(x) \sim \sum \varrho_n \cos(nx - \alpha_n),$$

где $\varrho_n \downarrow 0$, то $e_n(f) = E_n^{(2)}(f)$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому для функций с монотонно убывающими ϱ_n абсолютная сходимость ряда Фурье имеет место в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum \frac{E_n^{(2)}(f)}{\sqrt{n}}.$$

Достаточность этого условия была уже установлена (см. § 2) без дополнительных гипотез на коэффициенты ряда; теперь мы видим, что для $\varrho_n \downarrow 0$ это условие и необходимо.

§ 9. Простейшие операции над функциями с абсолютно сходящимися рядами Фурье

Для простоты будем записывать ряды Фурье в комплексной форме. Непосредственно ясно, что если

$$f_1(x) = \sum c'_n e^{inx}, \quad (9.1)$$

$$f_2(x) = \sum c''_n e^{inx}, \quad (9.2)$$

где ряды (9.1) и (9.2) сходятся абсолютно, то для $f_1(x) + f_2(x)$, а также для $f_1(x) - f_2(x)$ ряды Фурье сходятся абсолютно. Для произведения $f_1(x)f_2(x)$ это также имеет место (см. глава I, § 23, п° 7).

Вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sigma(f)$, где $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, а $\sigma(f_1)$ и $\sigma(f_2)$ сходятся абсолютно, разумеется, решается отрицательно, если $f_2(x)$ может обратиться где-либо в нуль, так как, если $\frac{1}{f_2(x)}$ может неограниченно возрастать около какой-либо точки, то эта функция уже не является непрерывной, а тогда ее ряд Фурье не может сходиться абсолютно.

Мало того, Г. Е. Шилов^[1] отметил, что ряд $\sigma(f)$ для $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ может не быть абсолютно сходящимся даже и в том случае, когда, кроме абсолютной сходимости $\sigma(f_1)$ и $\sigma(f_2)$, известно, что $f(x)$ непрерывна.

Если же $\sigma(f_2)$ абсолютно сходится и $f_2(x)$ нигде не обращается в нуль, то и $\sigma\left(\frac{1}{f_2}\right)$ абсолютно сходится, а тогда сходится и $\sigma(f)$ при $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Первоначально эту теорему доказал Винер. Ее доказательство мы дадим в § 11, как следствие одного более общего результата. Ту же теорему можно вывести из теории нормированных колец, см. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилор [1] или М. А. Наймарк *). Возникает вопрос, должен ли сходиться абсолютно ряд Фурье для $|f(x)|$, если ряд для $f(x)$ сходится абсолютно. Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным (см. Канане [1]).

§ 10. Роль локальных свойств функции в абсолютной сходимости

Как известно, когда речь идет о сходимости, то имеет место принцип локализации (см. § 33 главы I), т. е. если две функции совпадают на некотором интервале, то их ряды Фурье сходятся или расходятся одновременно во всякой внутренней точке этого интервала.

Легко показать на примере, что для абсолютной сходимости это уже не имеет места. Действительно, пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$f(-x) = f(x).$$

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right].$$

В точке $x = 0$ получаем ряд, который не является абсолютно сходящимся, поскольку

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = +\infty.$$

А между тем $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с функцией $\varphi(x) \equiv 1$, у которой, следовательно, $\sigma(\varphi)$ абсолютно сходится.

Итак, к абсолютной сходимости принцип локализации не применим. Однако имеет место следующая интересная теорема (см. Wiener [2]):

Теорема Винера. Если каждую точку $x_0 \in [-\pi, \pi]$ можно окружить интервалом δ_{x_0} , в котором $f(x) = g_{x_0}(x)$, где $g_{x_0}(x)$ — функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье, то $\sigma(f)$ абсолютно сходится.

Обозначим через S систему всех интервалов δ_{x_0} . По известной лемме Бореля, если каждая точка отрезка $[-\pi, \pi]$ может быть покрыта некоторым интервалом из системы S , то найдется конечное число интервалов из S , целиком покрывающих этот отрезок.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ — эти интервалы (рис. 41); значит, существуют такие функции $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$, у которых ряды Фурье абсолютно сходятся и притом $f(x) = g_k(x)$ на δ_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Мы можем без ограничения общности предполагать, что концы интервалов $\delta_k = (a_k, b_k)$ удовлетворяют условию

$$a_k < b_{k-1} < a_{k+1} < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m-1)$$

и, кроме того, что $a_m = a_1 + 2\pi$, $b_m = b_1 + 2\pi$.

*) М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956, стр. 179.

Обозначим через $\lambda_k(x)$ непрерывную периодическую функцию, которая равна 1 на (b_{k-1}, a_{k+1}) , равна 0 вне (a_k, b_k) и линейна на (a_k, b_{k-1}) и (a_{k+1}, b_k) . Легко подсчитать, что $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \dots + \lambda_m(x) = 1$. Так как

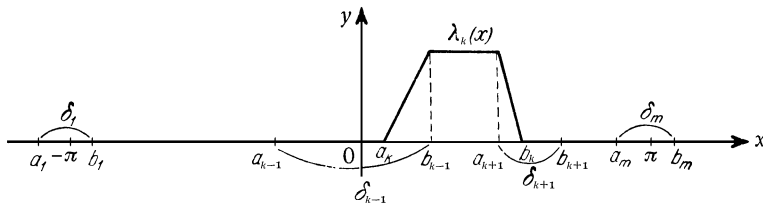


Рис. 41

$\lambda_k(x)$ есть непрерывная ломаная, то она удовлетворяет условию Липшица (порядка 1), а потому ее ряд Фурье абсолютно сходится.

Заметим теперь, что

$$f(x) = f(x) [\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \dots + \lambda_m(x)] = f(x) \lambda_1(x) + \dots + f(x) \lambda_m(x).$$

Поэтому, чтобы обнаружить абсолютную сходимость ряда Фурье для $f(x)$, достаточно (см. § 9) убедиться в том, что это имеет место для каждой из функций $f(x)\lambda_k(x)$. Но $\lambda_k(x) = 0$ вне (a_k, b_k) , а на этом отрезке $f(x) = g_k(x)$. Поэтому $f(x)\lambda_k(x) = g_k(x)\lambda_k(x)$. Но ряд Фурье для $g_k(x)$ сходится абсолютно по условию, а для $\lambda_k(x)$ мы это только что доказали, значит, и ряд Фурье от их произведения сходится абсолютно (см. § 9), и теорема доказана.

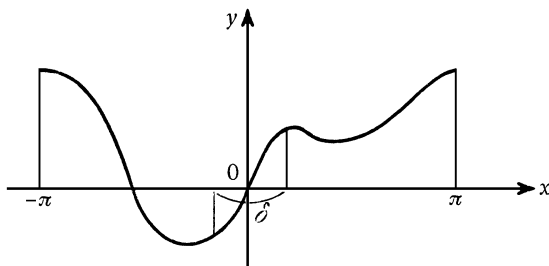


Рис. 42

Условимся говорить, что функция $f(x)$ в точке x_0 локально принадлежит некоторому семейству функций R , если существует $g(x) \in R$, совпадающая с $f(x)$ на некотором интервале δ , содержащем x_0 . Пусть A — семейство всех функций с абсолютно

сходящимися рядами Фурье. Теорему Винера тогда можно сформулировать так: если $f(x)$ локально принадлежит A в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$, то $f(x) \in A$.

В качестве примера приложения этой теоремы покажем, что можно расширить класс функций, к которым применима теорема Шилова (§ 6). Действительно, пусть функция $\Psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Шилова.

Пусть $F(x) = \Psi(x)$ на некотором интервале δ , содержащем точку $x = 0$; дальше мы ее определим как угодно, лишь бы она была непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $F(-\pi) = F(\pi)$ (рис. 42), и локально принадлежала A в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$, включая и его концы. Для этого достаточно, например, чтобы $F(x)$ была непрерывна и имела $F'(x)$ с интегрируемым квадратом на $(\frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2})$. Тогда для абсолютной сходимости ряда $\sigma(F)$ необходимо и доста-

точно, чтобы ряд $\sum \frac{1}{n} F\left(\frac{\pi}{n}\right)$ сходил.

В самом деле, полагая

$$R(x) = F(x) - \Psi(x),$$

видим, что $R(x) = 0$ на интервале δ . Кроме того, так как функция $\Psi(x)$ локально принадлежит A в каждой точке вне δ , и $F(x)$ также, то и $R(x)$ локально принадлежит A в каждой точке вне δ , а значит и всюду, поскольку на δ она равна нулю. Значит, ряд $\sigma(R)$ сходится абсолютно. Но

$$\frac{1}{n} F\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

как только n станет достаточно большим для того, чтобы $\frac{\pi}{n} \in \delta$. Значит, ряды $\sum \frac{1}{n} F\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sum \frac{1}{n} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Кроме того, $\sigma(F)$ и $\sigma(\Psi)$ одновременно принадлежат или не принадлежат A .

Таким образом, теорема Шилова переносится на значительно более широкий класс функций, чем тот, который указан в ее первоначальной формулировке. В частности, вовсе не нужна нечетность $F(x)$ (условие $F(-x) = -F(x)$ должно быть выполнено лишь в окрестности нуля), не нужны симметрия относительно точки $\frac{\pi}{2}$ и постоянство в отрезке $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

З а м е ч а н и е. Возвращаясь к общему вопросу о роли принципа локализации в проблеме абсолютной сходимости, отметим без доказательства следующую теорему (см. Jurkat und Peyerimhoff ^[1]): для того, чтобы ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (10.1)$$

сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы

$$а) \sum |a_n - a_{n+1}| < +\infty, \quad \sum |b_n - b_{n+1}| < +\infty,$$

$$б) \sum a_n \text{ суммировался методом Абеля,}$$

в) существовала периодическая функция $p(x)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье и такая, что ряд (10.1) суммируется методом Абеля к $p(x)$ на некотором отрезке $|x| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$.

§ 11. Суперпозиции функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье

Поставим вопрос: при каких условиях, наложенных на функции $f(y)$ и $\varphi(x)$, у которых ряды Фурье абсолютно сходятся, можно утверждать, что ряд $\sigma(F)$ для

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

абсолютно сходится?

Некоторое достаточное условие для этого дает

Т е о р е м а Л е в и (P. Levy ^[1]). Пусть $\varphi(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и $A \leq \varphi(x) \leq B$. Если $f(z)$ есть функция комплексного переменного z , регулярная в каждой точке отрезка $[A, B]$, то ряд Фурье от $f[\varphi(x)]$ абсолютно сходится.

Прежде всего, полагая

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{B-A}{2},$$

$$f_1(z) = f\left(z + \frac{B-A}{2}\right) \quad \text{для} \quad -\frac{B-A}{2} \leq z \leq \frac{B-A}{2},$$

мы имеем

$$f_1[\varphi_1(x)] = f[\varphi(x)]$$

и при этом $\varphi_1(x)$ снова имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Отсюда вытекает, что, не нарушая общности, можно доказывать теорему для функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$-K \leq \varphi(x) \leq K \quad (11.1)$$

и для $f(z)$ регулярной в некотором круге $|z| < r$; через r мы обозначаем радиус сходимости ряда, в который разлагается $f(z)$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (11.2)$$

Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

и

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| = M.$$

Рассмотрим для каждого целого k функцию $\varphi^k(x)$; если

$$\varphi^k(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(k)} e^{inx},$$

то ряд $\sigma(\varphi^k)$ абсолютно сходится и (см. § 9)

$$\sum |c_n^{(k)}| \leq M^k.$$

Возможны два случая: 1) $M < r$ и 2) $M \geq r$.
В первом случае мы можем написать

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \varphi(t) + a_2 \varphi^2(t) + \dots + a_k \varphi^k(t) + \dots,$$

поэтому, если

$$f[\varphi(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int},$$

то

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_n^{(k)}, \quad \gamma_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_0^{(k)},$$

а значит

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k c_n^{(k)}| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n^{(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| M^k < +\infty,$$

так как мы предположили $M < r$, где r — радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$.

Второй случай мы хотим теперь редуцировать к первому. Для этого мы поставим себе целью найти для каждой точки x_0 отрезка $[-\pi, \pi]$ такую функцию $g_{x_0}(x)$, что $\varphi(x) = g_{x_0}(x)$ в некотором интервале, содержащем точку x_0 , причем построить ее так, чтобы для ее комплексных коэффициентов Фурье c'_n иметь $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c'_n| < r$. Если нам это удастся, то в силу только что

доказанного функция $f[g_{x_0}(x)]$ будет иметь абсолютно сходящийся ряд Фурье, и так как это справедливо для любой точки x_0 , то по теореме Винера ряд Фурье для $f[\varphi(x)]$ будет сходиться абсолютно.

Так как сдвиг аргумента у функции не может повлиять ни на абсолютную сходимость ее ряда Фурье, ни на сумму ряда из абсолютных величин его коэффициентов, мы можем, не нарушая общности, строить функцию для интервала, окружающего точку $x_0 = 0$. Далее мы можем принять $\varphi(0) = 0$, так как, полагая $F(z) = f[z + \varphi(0)]$ и $\Phi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, видим, что $F[\Phi(x)] = f[\varphi(x)]$ и, значит, если теорема доказана для $F[\Phi(x)]$, то она верна и для $f[\varphi(x)]$.

Итак, полагая $\varphi(0) = 0$, т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n = 0,$$

мы будем строить $g(x)$ так, чтобы $\varphi(x) = g(x)$ на некотором интервале $(-h, h)$ и чтобы для комплексных коэффициентов c'_n функции $g(x)$ иметь $\sum |c'_n| < r$.

Для этого, взяв положительное $\varrho \leq \frac{\pi}{2}$, построим вспомогательную функцию $\lambda_\varrho(x) = \lambda(x)$ так, чтобы 1) $\lambda(x) = 1$ на $0 \leq x \leq \varrho$; 2) $\lambda(x) = 0$ на $2\varrho \leq x \leq \pi$; 3) $\lambda(x)$ интерполируется линейно на $(\varrho, 2\varrho)$; 4) $\lambda(x)$ четная. Пусть $l_n^\varrho = l_n$ — комплексные коэффициенты Фурье этой функции. Тогда

$$l_0 = \frac{3\varrho}{2\pi}, \quad l_n = \frac{2 \sin \frac{\varrho n}{2} \sin \frac{3\varrho n}{2}}{\pi \varrho n^2} \quad (n \neq 0).$$

Поэтому в силу $|\sin u| \leq 1$ и $|\sin u| \leq |u|$ имеем $|l_n| \leq \frac{3\varrho}{2\pi}$ при любом $n = 0, 1, \dots$ и $|l_n| \leq \frac{2}{\pi \varrho n^2}$ при $n \neq 0$. Отсюда прежде всего следует, что при любом ϱ ряд Фурье для $\lambda_\varrho(x)$ сходится абсолютно; но этого нам мало, надо еще показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^\varrho| \leq A, \quad (11.3)$$

где A не зависит от ϱ . Имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^\varrho| \leq \frac{3\varrho}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{3\varrho}{2\pi} + 2 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2}{\pi \varrho n^2} < 1 + N\varrho + \frac{4}{\pi \varrho N} < A,$$

если выбрать N так, чтобы $N = \left\lceil \frac{1}{\varrho} \right\rceil + 1$.

Покажем теперь, что

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^\varrho - l_{n-1}^\varrho| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow 0. \quad (11.4)$$

Действительно, если рассмотреть функцию $\lambda_\varrho(x)e^{ix}$, то ее ряд Фурье имеет вид $\sum l_n^\varrho e^{i(n+1)x}$, а потому

$$\lambda_\varrho(x)(1 - e^{ix}) = \sum [l_n^\varrho e^{inx} - l_{n-1}^\varrho e^{i(n+1)x}] = \sum (l_n^\varrho - l_{n-1}^\varrho) e^{inx}.$$

Но производная от этой функции есть $-i\lambda_\varrho(x)e^{ix} + \lambda'_\varrho(x)(1 - e^{ix})$, поэтому действительная и чисто мнимая части этой производной являются функциями с ограниченным изменением, причем ясно, что полное изменение каждой из них не превосходит некоторой константы, не зависящей от выбора ϱ , так как отрезок $[-\pi, \pi]$ распадается на пять частей, на каждой из которых

$\lambda_\varrho(x)$ линейна. Отсюда ясно, что модули коэффициентов Фурье для производной от $\lambda_\varrho(1 - e^{ix})$ не превосходят $\frac{B}{n}$, где B — абсолютная константа, а тогда

$$|l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| \leq \frac{B}{n^2}.$$

Кроме того, поскольку площадь, ограниченная кривой $y = \lambda_\varrho(x)$, стремится к нулю при $\varrho \rightarrow 0$, имеем

$$|l_n^{(\varrho)}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_\varrho(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_\varrho(t) dt \rightarrow 0 \text{ при } \varrho \rightarrow 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно взять N_0 столь большим, чтобы

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{B}{n^2} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| &= \sum_{n=-N_0}^{N_0} |l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| + \sum_{n=-\infty}^{-N_0-1} |l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| \leq \\ &\leq \sum_{n=-N_0}^{N_0} |l_n^{(\varrho)} - l_{n-1}^{(\varrho)}| + 2\varepsilon \end{aligned} \quad (11.5)$$

и если теперь учесть, что N_0 постоянно, а $\varrho \rightarrow 0$, то из $l_n^{(\varrho)} \rightarrow 0$ следует, что вся правая часть (11.5) может быть сделана $< 3\varepsilon$, если ϱ достаточно мало. Положим теперь

$$g(x) = \varphi(x) \lambda_\varrho(x),$$

где ϱ подберем позже. Мы видим, что $\varphi(x) = g(x)$ на $(-\varrho, \varrho)$. Покажем, что ϱ можно подобрать достаточно малым для того, чтобы для коэффициентов c'_n функции $g(x)$ иметь $\sum |c'_n| < r$.

Имеем

$$c'_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p l_{n-p}^{(\varrho)}.$$

Поэтому для любого q

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c'_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| \sum_{p=-q}^q c_p l_{n-p}^{(\varrho)} \right| + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| \sum_{|p|>q} c_p l_{n-p}^{(\varrho)} \right| = S + T.$$

Так как $\sum |c_p|$ сходится, то можно взять q столь большим, чтобы

$$\sum_{|p|>q} |c_p| < \frac{r}{3A}. \quad (11.6)$$

Тогда будем иметь

$$T \leq \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^{(\varrho)}| \sum_{|p|>q} |c_p| < A \frac{r}{3A} = \frac{r}{3}.$$

Далее,

$$S \leq \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| \sum_{p=-q}^q c_p (l_{n-p}^{(\varrho)} - l_n^{(\varrho)}) \right| + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| \sum_{p=-q}^q c_p l_n^{(\varrho)} \right| = S_1 + S_2.$$

Но

$$|S_2| \leq \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^{(\varrho)}| \sum_{p=-q}^q |c_p|$$

и так как

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p = 0,$$

то можно взять q столь большим, чтобы $\left| \sum_{p=-q}^q c_p \right| < \frac{r}{3A}$, а тогда

$$S_2 \leq A \frac{r}{3A} = \frac{r}{3}. \quad (11.7)$$

Выбрав q так, чтобы удовлетворялись (11.6) и (11.7), мы его теперь фиксируем. Заметим, что

$$|l_{n-p}^{(e)} - l_n^{(e)}| \leq \begin{cases} |l_{n-p}^{(e)} - l_{n-p+1}^{(e)}| + \dots + |l_{n-1}^{(e)} - l_n^{(e)}|, & \text{если } p > 0, \\ |l_{n-p}^{(e)} - l_{n-p-1}^{(e)}| + \dots + |l_{n+1}^{(e)} - l_n^{(e)}|, & \text{если } p < 0, \end{cases}$$

а потому

$$S_1 \leq 3 \sum_{p=-q}^q |c_p| q \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^{(e)} - l_{n-1}^{(e)}|$$

и эту величину можно сделать $< \frac{r}{3}$, взяв q достаточно малым, так как q фиксировано, а

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |l_n^{(e)} - l_{n-1}^{(e)}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow 0.$$

Итак, взяв q достаточно малым, мы можем добиться того, чтобы $\varphi(x) = g(x)$ на $(-q, q)$ и притом

$$\sum |c'_n| < r,$$

а это и заканчивает доказательство.

Как следствие из теоремы Леви, получаем уже упоминавшуюся ранее теорему.

Т е о р е м а В и н е р а (Wiener [2]). Если $\varphi(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и $\varphi(x)$ нигде не обращается в нуль, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Действительно, если $\varphi(x)$ не обращается в нуль, то $m \leq \varphi(x) \leq M$, где либо m и M оба положительны, либо оба отрицательны, а потому функция $f(z) = \frac{1}{z}$ регулярна на этом отрезке, и мы находимся в условиях теоремы Леви.

Укажем, наряду с теоремой Леви, один результат Марцинкевича (Marcinkiewicz [3]). Он ослабил требования, налагаемые на $f(y)$, и усилил требования, налагаемые на $\varphi(x)$, чтобы также получить абсолютную сходимость $f[\varphi(x)]$. В частности, им доказано, что если

$$\varphi(x) = \sum c_n e^{inx},$$

где $\sum |c_n|^s < +\infty$ для $0 < s < 1$, и если существует такая константа A , что

$$|f^{(n)}(y)| \leq A^n n^{\frac{n}{s}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

для $m' \leq y \leq M'$, где $(m, M) \subset (m', M')$ [а m и M по-прежнему минимум и максимум $\varphi(x)$], то для функции $f[\varphi(x)]$ ряд Фурье сходится абсолютно.

Доказательство Марцинкевича для $s = 1$ не проходит; если бы оно прошло, то это привело бы снова к теореме Леви, поскольку для аналитической на $[a, b]$ функции $f(x)$ всегда существует такая константа K , что

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n n^n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a \leq x \leq b. \quad (11.8)$$

и обратно, если для некоторой $f(x)$ удовлетворены все неравенства (11.8), то функция $f(x)$ на (a, b) является аналитической (см., например, С. Мандельбройдт [М.13], стр. 11).

В той же работе Марцинкевич дал пример, когда суперпозиция двух функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье уже не обладает этим свойством. Именно он положил

$$f(x) = \varphi(x)$$

и

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } (-\pi, 0), \\ \frac{1}{\ln^2 x} & \text{на } \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \varphi(\pi) = 0, \\ \varphi(x) \text{ линейна на } \left(\frac{1}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Мы здесь рассмотрим пример, очень похожий на пример Марцинкевича, но изменим функцию так, чтобы было удобно использовать критерий Г. Е. Шилова (§ 6).

Пусть

$$\varphi(0) = 0, \\ \varphi(x) = \frac{1}{2 \left(\ln \frac{x}{\pi} \right)^2}, \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi(\pi - x) = \varphi(x), \\ \varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Легко проверить, что все условия а), б), в), г) теоремы Шилова удовлетворены.

Замечая, что

$$\sum \frac{1}{2n+1} \varphi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = \\ = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(2n+1) \ln^2(2n+1)} < +\infty,$$

мы видим по теореме Шилова, что $\delta(\varphi)$ сходится абсолютно.

Если мы положим $f(x) = \varphi(x)$ и

$$F(x) = f[\varphi(x)] = \varphi[\varphi(x)],$$

то ясно, что $F(x)$ опять нечетная, $F(\pi - x) = F(x)$, она всюду непрерывна, монотонно возрастает на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ее производная непрерывна и не возрастает на $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Наконец, и условие г) удовлетворено, как показывает элементарный подсчет, так как в окрестности точки $x = 0$ имеем

$$F(x) = \frac{1}{2 \left[\ln \frac{\varphi(x)}{\pi} \right]^2},$$

а для $\varphi(x)$ условие г) удовлетворено.

Таким образом, к $F(x)$ можно снова применить теорему Шилова. Но

$$\sum \frac{1}{2n+1} F\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\left[\ln \frac{1}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]^2},$$

а так как

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2 \ln^2(2n+1)},$$

то

$$\frac{1}{2n+1} \frac{1}{\left[\ln \frac{1}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]^2} \sim \frac{1}{2n+1} \frac{1}{[\ln \ln(2n+1)]^2},$$

а потому ряд $\sum \frac{1}{2n+1} F\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$ ведет себя как ряд $\sum \frac{1}{(2n+1)[\ln \ln(2n+1)]^2}$, т. е. расходится. Из этого мы по теореме Шилова заключаем, что ряд $\sigma(F)$ не является абсолютно сходящимся.

Излагая результаты, касающиеся суперпозиций, естественно упомянуть об одной проблеме, поставленной И. М. Гельфандом. Рассмотрим все функции вида $f[\varphi(x)]$. При каких условиях, наложенных на $\varphi(x)$, можно утверждать, что $f[\varphi(x)]$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, как бы мы ни выбирали $f(y)$ в классе функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье?

Легко проверить, что если $\varphi(x) = nx + a$, где n целое и a постоянно, то это имеет место. И. М. Гельфанд высказал гипотезу, что это достаточное условие является и необходимым. Как доказал З. Л. Лейбензон [1], если заранее предполагать, что $\varphi(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную, то она действительно должна иметь вид $\varphi(x) = nx + a$, где n целое и a постоянное.

Доказательство этой теоремы также получается из общей теории нормированных колец.

§ 12. Некоторые обобщения вопроса об абсолютной сходимости

Вместо того, чтобы изучать, когда сходится ряд

$$\sum |a_n| + |b_n|, \quad (12.1)$$

можно поставить несколько более общую проблему: дана возрастающая последовательность целых чисел n_k ; выяснить, когда сходится ряд

$$\sum |a_{n_k}| + |b_{n_k}|. \quad (12.2)$$

Укажем теорему С. Б. Стечкина [3], являющуюся прямым обобщением результатов §§ 2 и 3.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n_k}, f\right) < +\infty,$$

то ряд (12.2) сходится.

Если $f(x)$ — функция с ограниченным изменением и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega\left(\frac{1}{n_k}, f\right)}{kn_k}} < +\infty,$$

то ряд (12.2) сходится.

Можно ставить вопрос иначе; мы рассматриваем снова все значения n , но вместо того, чтобы требовать сходимости ряда (12.1), мы требуем, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta} < +\infty,$$

где $\beta > 0$ задано. Спрашивается, когда это имеет место?

Укажем, например, теорему:

Теорема Саса (Szász [1]). Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то для всех $p > \frac{2}{2\alpha+1}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) < +\infty. \quad (12.3)$$

Для $p = \frac{2}{2\alpha+1}$ это может уже не иметь места.

Доказательство первой половины этой теоремы можно получить из результата Лоренца (§ 3 главы II), так как там предполагалось $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, а это и значит, что $p > \frac{2}{2\alpha+1}$. Доказательство второй половины теоремы мы опускаем, отсылая к работе автора; см. также Зигмунд [6], § 6.33.

Укажем еще без доказательства некоторые результаты А. А. Конюшкова [2], изучавшего вопрос, при каких условиях, наложенных на $f(x)$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} (|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}) < +\infty, \quad (12.4)$$

где $\gamma \geq -1$ и $\beta > 0$ заданы.

Будем для $f \in L^p$ ($p \geq 1$) обозначать через $E_n^{(p)}$ ее наилучшее приближение в метрике L^p тригонометрическими полиномами порядка не выше n (см. Вводный материал, § 24) и полагать $q = \frac{p}{p-1}$, если $p \neq 1$ и $q = +\infty$ при $p = 1$.

А. А. Конюшков доказал:

1) Если $1 \leq p \leq 2$ и $\beta \leq q$, то

$$\sum n^{\gamma - \frac{\beta}{q}} (E_n^{(p)})^{\beta} < +\infty \quad (12.5)$$

достаточно для выполнения (12.4).

2) Если $2 \leq p \leq \infty$, $\beta \geq q$, $\gamma - \frac{\beta}{q} > -1$, то (12.5) необходимо для выполнения (12.4).

Кроме того, Конюшковым рассмотрен ряд случаев, когда условие (12.5) достаточно для выполнения (12.4) или необходимо для него, но при дополнительных предположениях относительно a_n и b_n (например, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, или: существует такое $\tau > 0$, что $n^{-\tau} a_n \downarrow 0$ и $n^{-\tau} b_n \downarrow 0$).

Конюшков ставил также вопрос следующим образом: пусть $\{\varphi_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, $\varphi_n \downarrow 0$ и рассматривается класс всех функций, для которых

$$E_n^{(p)} = O(\varphi_n). \quad (12.6)$$

При каких условиях, наложенных на $\{\varphi_n\}$, выполнено (12.4) для всех

функций из класса, определяемого формулой (12.6)? Оказалось, что для этого, если $1 \leq p \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$ и $\gamma - \frac{\beta}{q} > -1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma - \frac{\beta}{q}} (\varphi_n)^{\beta} < +\infty;$$

если же $p = \infty$, $0 < \beta \leq 1$, $\gamma - \frac{\beta}{2} > -1$, то необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma - \frac{\beta}{2}} (\varphi_n)^{\beta} < +\infty.$$

С рядом других результатов А. А. Конюшкова можно ознакомиться в указанной ранее работе.

ГЛАВА X

РЯДЫ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ С МОНОТОННО УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение

Эта глава будет посвящена изучению рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1.1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad (1.2)$$

где $a_n \downarrow 0$. Такими рядами занимались многие авторы, начиная с Фату, но и сейчас они продолжают привлекать внимание. Элементарные результаты, касающиеся этих рядов, были нами уже рассмотрены в § 30 главы I. Напомним, что мы доказали там сходимость этих рядов для всех x , кроме, быть может, $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ для ряда (1.1), и их равномерную сходимость на $\delta \leq |x| \leq \pi$ при любом $\delta > 0$. Было показано также, что для равномерной сходимости ряда (1.1) необходима и достаточна сходимость ряда $\sum a_n$, а для ряда (1.2) условием равномерной сходимости является $na_n \rightarrow 0$.

Прежде чем доказывать новые теоремы о рядах (1.1) и (1.2), сделаем общее замечание. Часть результатов, которые мы получили, будет справедлива и в более общих предположениях, чем $a_n \downarrow 0$; однако основные методы выявляются лучше всего на классическом случае. Некоторые результаты сразу переносятся на случай, когда последовательность $\{a_n\}$ имеет ограниченное изменение (см. Вводный материал, § 1) в силу следующего элементарного факта:

Если $\{a_n\}$ имеет ограниченное изменение и $a_n \rightarrow 0$, то можно эту последовательность разбить на разность двух, каждая из которых стремится к нулю монотонно.

Действительно, пусть

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|.$$

Тогда в силу $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| < +\infty$ имеем $b_n \rightarrow 0$ и притом ясно, что $b_n \downarrow 0$. Полагая

$$c_n = b_n - a_n,$$

видим, что $c_n \rightarrow 0$. Но, кроме того,

$$c_n - c_{n+1} = b_n - b_{n+1} - (a_n - a_{n+1}) = |\Delta a_n| - \Delta a_n \geq 0,$$

значит, $c_n \downarrow 0$. Но

$$a_n = b_n - c_n$$

и, следовательно, наше утверждение доказано.

После этого краткого отступления вернемся к изучению рядов (1.1) и (1.2) с $a_n \downarrow 0$.

В этой главе мы ставим себе следующие задачи: выяснить условия, при которых изучаемые ряды являются рядами Фурье (§ 2) и, в частности, рядами Фурье от функций из класса L^p для $p > 1$; доказать, что хотя суммы рассматриваемых рядов могут быть обе несуммируемы, но они всегда A -интегрируемы, и эти ряды являются их рядами Фурье (A) (см. определения в главе VIII, § 18).

Мы показываем затем, что суммы этих рядов всегда суммируемы в степени p , если $0 < p < 1$ (§ 5). В § 7 изучается поведение сумм рядов (1.1) и (1.2) около точки $x = 0$, а в § 8 их дифференциальные свойства на $\delta \leq |x| \leq \pi$. В § 9 дано условие, при котором ряд с монотонными коэффициентами является рядом Фурье от функции из класса $\text{Lip } \alpha$.

§ 2. Условия для того, чтобы ряды с монотонными коэффициентами были рядами Фурье

Рассмотрим сначала ряд*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(nx), \quad (2.1)$$

где $\varphi(x)$ будет означать $\cos x$ или $\sin x$ и где $a_n \downarrow 0$. Как уже упоминалось в § 1, ряд (2.1) сходится в каждой точке, кроме, быть может, точки $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Пусть $F(x)$ — сумма ряда (2.1)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(nx).$$

Отметим, что для того, чтобы ряд (2.1) был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ была суммируема.

Действительно, допустим сначала, что $F(x)$ суммируема. Из сходимости ряда (2.1) всюду, кроме, быть может, одной точки, тогда следует, что этот ряд есть ряд Фурье от $F(x)$, в этом можно убедиться, опираясь на теорему ду Буа-Реймона, которую мы докажем в главе XIV (§ 4). Итак, если $F(x) \in L$, то ряд (2.1) есть $\sigma(F)$ **). Наоборот, если (2.1) есть ряд Фурье от некоторой $\Phi(x)$, то почти во всех точках, где он сходится, он должен сходиться именно к $\Phi(x)$ (см. глава I, § 49). Значит, $\Phi(x) = F(x)$ почти всюду, т. е. $F(x)$ суммируема и ряд (2.1) есть ряд Фурье от $F(x)$. Итак, мы пришли к выводу:

Если $a_n \downarrow 0$ и

$$f(x) = \sum a_n \cos nx, \quad (2.2)$$

$$\bar{f}(x) = \sum a_n \sin nx, \quad (2.3)$$

то для того, чтобы ряд (2.2) был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была суммируема; это же верно для ряда (2.3) и функции $\bar{f}(x)$.

*) Мы предполагаем, что $a_0 = 0$, так как на изучаемый вопрос это не оказывает влияния.

**) Можно получить тот же результат, не опираясь на теорему ду Буа-Реймона (см. Следствие 2 к теореме § 4).

Таким образом, изучение вопроса о том, когда ряды (2.2) и (2.3) являются рядами Фурье, сводится к изучению вопроса о суммируемости $f(x)$ и $\bar{f}(x)$.

Установим сначала те результаты, которые для рядов (2.2) и (2.3) являются одинаковыми. Для этого снова рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum a_n \varphi(nx), \quad (2.1)$$

где $a_n \downarrow 0$, а $\varphi(x)$ будет иногда играть роль $\cos x$, а иногда роль $\sin x$. Если мы обозначим

$$D_n^*(x) = \sum_{k=1}^n \varphi(kx),$$

то $D_n^*(x)$ будет или равно $D_n(x) - \frac{1}{2}$, или $\bar{D}_n(x)$, где $D_n(x)$ — ядро Дирихле, а $\bar{D}_n(x)$ — его сопряженное. Поэтому $|D_n^*(x)|$ — четная функция и, как мы видели в § 35 главы I,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)| dx = O(\ln n). \quad (2.4)$$

Пусть

$$S_n^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi(kx) \quad (a_0 = 0).$$

Применяя к этой сумме преобразование Абеля, имеем

$$S_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k^*(x) \Delta a_k + a_n D_n^*(x). \quad (2.5)$$

Если $x \neq 0$, то $|D_n^*(x)| < \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$, а $a_n \downarrow 0$, поэтому второй член правой

части равенства (2.5) стремится к нулю и, значит, из того, что $S_n^*(x) \rightarrow f^*(x)$, где $f^*(x) = f(x)$ в случае ряда (2.2) и $f^*(x) = \bar{f}(x)$ в случае ряда (2.3), заключаем

$$f^*(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^*(x) \Delta a_m.$$

По известной теореме Лебега, если ряд

$$\sum \Delta a_m \int_{-\pi}^{\pi} |D_m^*(x)| dx$$

окажется сходящимся, то $f^*(x)$ — суммируемая функция. Но так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_m^*(x)| dx = O(\ln m),$$

то мы приходим к выводу, что условие

$$\sum \Delta a_m \ln m < +\infty \quad (2.6)$$

является достаточным для интегрируемости $f^*(x)$. Преобразуем немного это условие. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \Delta a_m \ln m &= \sum_{m=2}^n a_m [\ln m - \ln(m-1)] - a_{n+1} \ln n \leq \\ &\leq \sum_{m=2}^n a_m \ln \left(1 + \frac{1}{m-1} \right) \leq C \sum_{m=2}^n \frac{a_m}{m}. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < +\infty. \quad (2.7)$$

Тогда и неравенство (2.6) заведомо справедливо.

Таким образом, мы приходим к выводу, что если выполнено (2.7), то $f^*(x)$ суммируема. Следовательно, мы доказали теорему.

Теорема 1. Если $a_n \downarrow 0$ и $\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$, то ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (2.2)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad (2.3)$$

являются рядами Фурье.

С другой стороны, очевидно, что для того, чтобы ряд (2.3) был рядом Фурье, условие $\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$ является и необходимым (см. глава I, § 40). Значит, получаем

Следствие 1. Для того чтобы ряд (2.3) был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы $\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$.

Отсюда сразу вытекает

Следствие 2. Если ряд (2.3) есть ряд Фурье, то и ряд (2.2) тоже *).

Обратное заключение неверно, так как условие $\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$ не является необходимым для того, чтобы ряд (2.2) был рядом Фурье; действительно (см. § 30 главы I), ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

является рядом Фурье (хотя $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = +\infty$). Этот результат был нами выведен из теоремы, которую полезно напомнить.

Теорема 2. Если $a_n \rightarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (2.2)$$

есть ряд Фурье от неотрицательной функции.

Доказательство ее было дано в § 30 главы I. Эту теорему можно дополнить, введя понятие квазивыпуклой последовательности. Мы знаем (см. Вводный материал, § 3), что для выпуклой последовательности

$$\sum (n+1) \Delta^2 a_n < +\infty.$$

Назовем последовательность $\{a_n\}$ квазивыпуклой, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\Delta^2 a_n| < +\infty.$$

*) Заметим, что требование $a_n \downarrow 0$ было здесь существенным. Можно показать (см. Канане [2]), что существует ряд $\sum a_n \sin nx$ с $a_n \geq 0$, который является рядом Фурье, в то время как ряд $\sum a_n \cos nx$ не есть ряд Фурье.

Докажем, что если $a_n \rightarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ квазивыпукла, то ряд (2.2) есть ряд Фурье (но сумма его уже не должна быть неотрицательной).

Действительно, в доказательстве теоремы 2 мы опирались лишь на сходимость $\sum (n+1)\Delta^2 a_n$ и на вытекавший из этого факт $n\Delta a_n \rightarrow 0$. Для квазивыпуклых последовательностей из соотношения

$$\begin{aligned} |\Delta a_n| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k+1} (k+1) |\Delta^2 a_k| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

следует также

$$n |\Delta a_n| \rightarrow 0,$$

а потому доказательство полностью проходит.

З а м е ч а н и е. Из квазивыпуклости и $a_n \rightarrow 0$ уже не должно следовать, что $a_n \downarrow 0$, но можно доказать, что из этих двух условий вытекает, что $\{a_n\}$ имеет ограниченное изменение.

Действительно, раз $\sum (n+1) |\Delta^2 a_n| < +\infty$, то и подаловно $\sum |\Delta^2 a_n| < +\infty$, а тогда $\sum \Delta^2 a_n$ сходится. Но

$$\sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 a_k = (\Delta a_n - \Delta a_{n+1}) + (\Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2}) + \dots = \Delta a_n,$$

так как мы предположили, что $a_k \rightarrow 0$, а значит, и $\Delta a_k \rightarrow 0$. Отсюда

$$|\Delta a_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta^2 a_k|,$$

а потому

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta^2 a_k| = |\Delta^2 a_0| + 2|\Delta^2 a_1| + \dots + (n+1)|\Delta^2 a_n| + \dots,$$

а так как $\sum (n+1) |\Delta^2 a_n| < +\infty$ для квазивыпуклых последовательностей, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| < +\infty,$$

а это и надо было доказать.

Мы видели, что если $a_n \downarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ квазивыпукла, то ряд (2.2) есть ряд Фурье. Сидон первый поставил вопрос, не является ли одно условие $a_n \downarrow 0$ достаточным, чтобы ряд (2.2) был рядом Фурье. Он показал на примере, что это неверно. Напомним, что в § 9 главы II мы также убедились в наличии рядов вида (2.2) с $a_n \downarrow 0$, не являющихся рядами Фурье.

Из теоремы 2 легко вывести следствие:

Существуют ряды вида

$$\sum a_n \cos nx,$$

где a_n убывает как угодно медленно, и, однако, они являются рядами Фурье.

Это получится сразу из теоремы 2, если установить справедливость такого предложения: если $a_n > 0$ и $a_n \rightarrow 0$, то можно найти такую выпуклую последовательность ε_n , что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\varepsilon_n \geq a_n$.

Прежде всего, не нарушая общности, можно доказывать наше утверждение для случая $a_n \downarrow 0$, так как, если этого нет, мы положим $a_n = \max_{k \geq n} a_k$.

найдем выпуклую последовательность $\{\varepsilon_n\}$ с $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\varepsilon_n \geq a_n$ и доказательство будет закончено.

Итак, пусть $a_n \downarrow 0$. Последовательность $\{a_n\}$ можно предположить строго монотонной, так как, если этого нет, достаточно провести построение для $\{a_n + \frac{1}{n}\}$. Пусть $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ и $a_n \rightarrow 0$. Для построения последовательности $\{\varepsilon_n\}$ изобразим точки A_n с координатами (n, a_n) и соединим их бесконечнозвенной ломаной линией. Эта ломаная L асимптотически приближается к 0 в силу $a_n \rightarrow 0$. Построим теперь выпуклую ломаную L' , целиком лежащую выше или на данной ломаной и также стремящуюся к Ox ; ее ординаты ε_n при $x = n$ и дадут решение задачи.

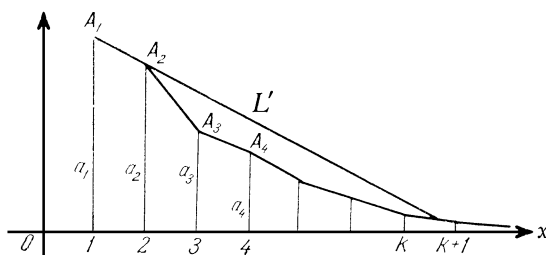


Рис. 43

Для построения такой ломаной L' возьмем ее первое звено совпадающим с первым звеном ломаной L . Затем мы продолжаем его либо прямолинейно (рис. 43), если наклон второго звена L к Ox был круче наклона первого звена, либо вдоль второго звена.

В силу свойств L ни одно из так построенных звеньев L' не будет параллельно оси абсцисс. Поэтому, продолжая второе звено L' прямолинейно, мы непременно встретим L в какой-то точке, являющейся либо одной из вершин L , либо лежащей внутри какого-то звена. В последнем случае ведем L' по этому звену до ближайшей вершины. Затем снова продолжаем ее прямолинейно до встречи с L и т.д. Ясно, что полученная ломаная выпукла, лежит целиком не ниже L и асимптотически стремится к Ox . Это заканчивает доказательство.

Из доказанного утверждения следует, что никакое условие вида

$$\sum \frac{a_n}{\Psi(n)} < +\infty,$$

где $\Psi(n) \rightarrow \infty$ как угодно, лишь бы $\sum \frac{1}{\Psi(n)} = +\infty$, не является необходимым для того, чтобы ряд $\sum a_n \cos nx$ с $a_n \downarrow 0$ был рядом Фурье.

Действительно, пусть $\Psi(n)$ задано и $\sum \frac{1}{\Psi(n)} = +\infty$. Можно выбрать $a_n \downarrow 0$ и столь медленно, чтобы все еще $\sum \frac{a_n}{\Psi(n)} = +\infty$. Но если при этом последовательность a_n еще и выпукла, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ будет рядом Фурье (хотя условие $\sum \frac{a_n}{\Psi(n)} < +\infty$ не выполнено).

Этот результат обобщает утверждение: условие

$$\sum \frac{a_n}{n} < +\infty$$

не является необходимым для того, чтобы ряд (2.2) был рядом Фурье. (Мы уже это отмечали ранее.)

Мы убедились, что ряд $\sum a_n \cos nx$ с $a_n \downarrow 0$ будет рядом Фурье, если $\{a_n\}$ выпукла или хотя бы квазивыпукла. Теперь докажем теорему:

Теорема 3. Если $a_n \downarrow 0$ и $\{a_n\}$ выпукла или хотя бы квазивыпукла, то для сходимости ряда

$$\sum a_n \cos nx \quad (2.2)$$

в метрике L необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = 0.$$

Мы знаем (см. глава I, § 30), что сумму n первых членов ряда (2.2) можно записать в виде

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n-2} (m+1) \Delta^2 a_m K_m(x) + n K_{n-1}(x) \Delta a_{n-1} + D_n(x) a_n, \quad (2.8)$$

где $K_n(x)$ — ядро Фейера, а для его суммы $f(x)$ имеем

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \Delta^2 a_m K_m(x). \quad (2.9)$$

Поэтому

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{m=n-1}^{\infty} (m+1) \Delta^2 a_m K_m(x) - n K_{n-1}(x) \Delta a_{n-1} - D_n(x) a_n.$$

Так как в случае выпуклой, или хотя бы квазивыпуклой последовательности $\{a_n\}$, как мы уже отмечали,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m+1) |\Delta^2 a_m| < +\infty \quad \text{и} \quad (n+1) |\Delta a_n| \rightarrow 0,$$

а

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$$

то

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m+1) |\Delta^2 a_m| \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) dx < +\infty;$$

следовательно,

$$\sum_{m=n-1}^{\infty} (m+1) |\Delta^2 a_m| \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| dx - a_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = o(1).$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \sim \ln n$$

(см. глава I, § 35), то теорема доказана.

В частности, ряд

$$\sum \frac{\cos nx}{\ln n}$$

хотя и является рядом Фурье, но не сходится в метрике L .

Так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье, то этот пример не дает еще ответа на вопрос, должен ли ряд Фурье сходиться в метрике L , если сопряженный ряд является

рядом Фурье. Все же в § 22 главы VIII, строя несколько более сложный пример, мы видели, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Наконец, заканчивая вопрос о том, когда ряды $\sum a_n \cos nx$ и $\sum a_n \sin nx$ с $a_n \downarrow 0$ являются рядами Фурье, сделаем еще одно замечание, относящееся к случаю ряда

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Хотя $\bar{f}(x)$ может быть несуммируемой, но имеет место

Т е о р е м а 4. Если $a_n \downarrow 0$, или хотя бы $a_n \rightarrow 0$ и $\{a_n\}$ с ограниченным изменением, то $\bar{f}(x) \sin nx$ непрерывна при любом n и

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) \sin nx \, dx$$

(причем интеграл имеет смысл даже при несуммируемой $\bar{f}(x)$ в силу непрерывности $\bar{f}(x) \sin nx$).

Чтобы убедиться в этом, будем рассуждать так. Из равенства

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

справедливого для всех x , имеем

$$\begin{aligned} 2\bar{f}(x) \sin x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] = \\ &= a_1 + a_2 \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) \cos nx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Но

$$|a_{n+1} - a_{n-1}| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| = |\Delta a_n| + |\Delta a_{n-1}|,$$

а потому из сходимости $\sum |\Delta a_n|$ следует

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+1} - a_{n-1}| < +\infty,$$

а значит, и равномерная сходимость ряда (2.10); отсюда получается непрерывность $\bar{f}(x) \sin x$, но тогда, умножая на непрерывную функцию $\frac{\sin nx}{\sin x}$, сразу убедимся, что $\bar{f}(x) \sin nx$ непрерывна при любом n . После этого уже ясно, что числа

$$2a_1, a_2, a_3 - a_1, a_4 - a_2, \dots$$

являются коэффициентами Фурье для $2\bar{f}(x) \sin x$, а потому

$$2a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\bar{f}(x) \sin x \, dx,$$

т. е.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin x \, dx,$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\bar{f}(x) \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin 2x \, dx$$

и далее из

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_{n-1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\bar{f}(x) \sin x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx \end{aligned}$$

находим, что если

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin mx \, dx$$

уже доказано для некоторого m , то это верно и для a_{m+2} , откуда справедливость этой формулы следует для всех m , поскольку она доказана для a_1 и a_2 .

§ 3. Ряды Фурье для функций из класса L^p

До сих пор мы изучали лишь вопрос о том, когда функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, определяемые рядами $\sum a_n \cos nx$ и $\sum a_n \sin nx$ с $a_n \downarrow 0$, являются суммируемыми. Мы поставим теперь вопрос об их суммируемости в степени $p > 1$. Ответ на этот вопрос дается теоремой:

Т е о р е м а. *Для того чтобы функции*

$$f(x) = \sum a_n \cos nx \quad \text{и} \quad \bar{f}(x) = \sum a_n \sin nx \quad (a_n \downarrow 0)$$

принадлежали классу $L^p(p > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum a_n^p n^{p-2} < +\infty. \quad (3.1)$$

По теореме Рисса (см. глава VIII, § 14), если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то и $\bar{f}(x)$ тоже, каждый раз, как функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ являются сопряженными; поэтому достаточно в нашем случае доказывать теорему для $f(x)$.

Пусть $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, а $\Phi(x)$ — интеграл от $|f(x)|$. Если $f(x) \in L^p$, то ряд $\sum a_n \cos nx$ есть ее ряд Фурье, как мы видели в § 2. Отсюда вытекает законность почленного интегрирования этого ряда, а тогда

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx.$$

Так как $\sin n \frac{\pi}{k} = -\sin(n+k) \frac{\pi}{k} = \sin(n+2k) \frac{\pi}{k} = \dots$, то можно написать

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} + \frac{a_{n+2k}}{n+2k} - \dots \right) \sin n \frac{\pi}{k} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} \right) \sin n \frac{\pi}{k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

в силу $a_n \downarrow 0$. Если $\frac{k}{4} < n \leqslant \frac{k}{2}$, то $\sin n \frac{\pi}{k} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ и, кроме того, $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+k}}{n+k} \geqslant a_n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right] \geqslant \frac{2}{5} \frac{a_n}{n}$; но число членов суммы в (3.2) имеет порядок k , а потому

$$F\left(\frac{\pi}{k}\right) \geqslant C a_k,$$

где C — абсолютная константа.

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \leq C_1 \sum n^{p-2} F^p\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq C_1 \sum n^{p-2} \Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (3.3)$$

и необходимость условия (3.1) будет доказана, если мы покажем, что ряд в правой части (3.3) сходится. Но так как

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^p dx \geq \left[\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \frac{dx}{x^p} \geq C_2 \left[\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^p n^{p-2},$$

то ряд в правой части (3.3) окажется сходящимся, если интеграл $\int_0^{\pi} \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^p dx$ имеет смысл. При $f(x) \in L^p$ это всегда имеет место (см. Добавления, § 22).

Мы убедились, что сходимость ряда (3.1) необходима для того, чтобы $f(x) \in L^p$. Докажем, что это условие и достаточно.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n a_k + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \right|. \quad (3.4)$$

Обозначим $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Замечая, что $|D_k(x)| \leq \frac{\pi}{|x|}$ при $0 < |x| < \pi$ и применяя ко второму члену суммы в (3.4) преобразование Абеля, находим, в силу $a_n \downarrow 0$,

$$|f(x)| \leq A_n + \frac{\pi}{|x|} a_n \quad \text{для } 0 < |x| < \pi,$$

а потому

$$|f(x)| \leq C A_n \quad \text{для } \frac{\pi}{n+1} \leq x < \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|^p dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{n^2},$$

и если мы докажем, что последний ряд сходится, то $f(x) \in L^p$, и теорема будет доказана.

Остается убедиться, что если $\sum a_n^p n^{p-2}$ сходится, то $\sum \frac{A_n^p}{n^2}$ тоже сходится.

Если мы обозначим через $\varphi(x)$ функцию, определяемую так:

$$\varphi(x) = a_n, \quad n \leq x < n+1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и положим $\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$, то нужное утверждение получится из теоремы 2 § 22 Добавлений. Этим заканчивается доказательство теоремы.

§ 4. A -интегрируемость сумм рядов с монотонными коэффициентами

Рассмотрим снова ряды

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (4.1)$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \quad (4.2)$$

с коэффициентами $a_k \downarrow 0$ или хотя бы удовлетворяющими условию

$$a_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| < +\infty. \quad (4.3)$$

Мы знаем, что $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ при этих условиях могут быть и несуммируемы. Но если пользоваться понятием А-интеграла (см. глава VIII, § 18), то можно доказать теорему (см. П. Л. Ульянов [4]):

Т е о р е м а. Если выполнено условие (4.3), то обе функции, определяемые рядами (4.1) и (4.2), А-интегрируемы и эти ряды являются их рядами Фурье (А)*).

Для доказательства сначала убедимся, что для $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ удовлетворено одно из условий А-интегрируемости, а именно

$$mE(|f(x)| > n) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$mE(|\bar{f}(x)| > n) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Действительно, применяя преобразование Абеля к частным суммам ряда (4.1) и переходя к пределу, что законно, так как $a_k \rightarrow 0$, имеем для $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_k(x),$$

где $D_k(x)$, как всегда, ядро Дирихле.

Пусть $\varepsilon > 0$ любое. Существует такое p , что

$$\sum_{n=p}^{\infty} |\Delta a_n| < \varepsilon.$$

Напишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta a_k D_k(x) + \sum_{k=p}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

Так как $S_1(x)$ содержит фиксированное число членов, то

$$|S_1(x)| \leq M,$$

где M — некоторая константа, а потому, если $n > 2M$, то

$$mE\left\{|S_1(x)| \geq \frac{n}{2}\right\} = 0.$$

Так как при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$|D_k(x)| < \frac{1}{2 \sin \frac{|x|}{2}} \leq \frac{\pi}{2|x|}, \quad (4.4)$$

то

$$|S_2(x)| \leq \frac{\pi}{2|x|} \varepsilon,$$

а потому

$$mE\left\{|S_2| \geq \frac{n}{2}\right\} \leq mE\left\{\frac{\pi\varepsilon}{2|x|} \geq \frac{n}{2}\right\} = \frac{2\pi\varepsilon}{n}.$$

*) См. определение рядов Фурье (А) в § 18 главы VIII.

Отсюда следует, что

$$mE \{ |f(x)| \geq n \} \leq mE \left\{ |S_1(x)| \geq \frac{n}{2} \right\} + mE \left\{ |S_2(x)| \geq \frac{n}{2} \right\} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

потому что ε как угодно мало.

Для $\bar{f}(x)$ проходят те же оценки, так как замена $D_k(x)$ на $\bar{D}_k(x)$ приводит лишь к тому, что в неравенстве (4.4) появляется лишний множитель 2.

Установив это, докажем теперь, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) f(x) dx = \pi a_0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) f(x) \cos kx dx = \pi a_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как $f(x)$ четная, то достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} a_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{\pi}{2} a_k. \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай $k = 0$. Так как на отрезке $[\varepsilon, \pi]$ ряд (4.1) сходится равномерно, то

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \int_{\varepsilon}^{\pi} D_k(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \left\{ \frac{1}{2} (\pi - \varepsilon) - \sum_{n=1}^k \frac{\sin n\varepsilon}{n} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k b_k^{(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

где

$$b_k^{(\varepsilon)} = \frac{\pi - \varepsilon}{2} - \sum_{n=1}^k \frac{\sin n\varepsilon}{n}.$$

Так как

$$\left| \sum_{n=1}^k \frac{\sin nx}{n} \right| < C$$

при любом x и любом k , где C — абсолютная константа (см. глава I, § 41), то

$$|b_k^{(\varepsilon)}| < C_1,$$

где C_1 — абсолютная константа, а потому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k b_k^{(\varepsilon)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k b_k^{(0)},$$

где

$$b_k^{(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_k^{(\varepsilon)} = \frac{\pi}{2},$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k = \frac{\pi}{2} a_0,$$

а это и надо было доказать.

Рассмотрим теперь случай $k \neq 0$. Имеем аналогично

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} D_n(x) \cos kx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n b_n^{(\varepsilon)},$$

где

$$b_n^{(\varepsilon)} = \int_{\varepsilon}^{\pi} D_n(x) \cos kx \, dx.$$

Ясно, что и здесь числа $b_n^{(\varepsilon)}$ ограничены в совокупности, и, кроме того, как легко подсчитать

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_n^{(\varepsilon)} = 0 \text{ при } n < k$$

и

$$b_n^{(\varepsilon)} \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ при } n \geq k.$$

Отсюда сразу получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{\pi}{2} a_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

как и требовалось доказать.

Заметим теперь, что так как $\bar{f}(x)$ нечетная и было уже доказано, что

$$mE(|\bar{f}| \geq n) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $\bar{f}(x)$ заведомо (A)-интегрируема на $(-\pi, \pi)$. Это же справедливо для $\bar{f}(x) \cos kx$, так как она тоже нечетная и

$$mE(|\bar{f}(x) \cos kx| \geq n) \leq mE(|\bar{f}(x)| \geq n) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, из определения A-интеграла и нечетности $\bar{f}(x) \cos kx$ сразу следует, что

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \cos kx \, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее, как было доказано (см. § 2), хотя $\bar{f}(x)$ и не обязана быть суммируемой на $(-\pi, \pi)$, все же

$$a_k = \frac{1}{\pi} (L) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin kx \, dx,$$

если выполнено условие (4.3) нашей теоремы, а так как A-интеграл совпадает с интегралом Лебега, если этот последний существует, то мы видим, что ряд (4.2) есть ряд Фурье (A) от $\bar{f}(x)$.

Теперь перейдем к доказательству того, что и ряд (4.1) есть ряд Фурье (A) от $f(x)$, т. е. докажем, что

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \pi, \tag{4.6}$$

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi a_k \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{4.7}$$

Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Положим

$$h_n(f) = \sup_{|f(x)|=n} \{x\}.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на (ε, π) при любом $\varepsilon > 0$, то ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f) = 0.$$

Положим для любой $\varphi(x)$

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{на } h \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{на } 0 \leq x < h. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ любое; выберем p так, чтобы

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |\Delta a_k| < \varepsilon$$

и напишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \Delta a_k D_k(x) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) = S(x) + R(x), \quad (4.8)$$

тогда

$$|R(x)| \leq \varepsilon \frac{\pi}{2|x|} < 2 \frac{\varepsilon}{|x|}.$$

Определим $h_n(R)$ так же, как было определено $h_n(f)$. Тогда

$$h_n(R) \leq \frac{2\varepsilon}{n}. \quad (4.9)$$

Выберем N так, чтобы при $n \geq N$ иметь

$$mE\{|f(x)| \geq n\} < \frac{\varepsilon}{n}. \quad (4.10)$$

$$mE\{|S(x)| \geq n\} = 0, \quad (4.11)$$

что, очевидно, возможно. Тогда

$$\left| \int_0^{\pi} \{[S(x)]_n - S_{h_n(R)}(x)\} dx \right| = \left| \int_0^{h_n(R)} [S(x)]_n dx \right| \leq n h_n(R) \leq 2\varepsilon, \quad (4.12)$$

$$\left| \int_0^{\pi} \{[R(x)]_n - R_{h_n(R)}(x)\} dx \right| = \left| \int_0^{h_n(R)} [R(x)]_n dx \right| \leq n h_n(R) \leq 2\varepsilon. \quad (4.13)$$

В силу определения $\varphi_h(x)$ имеем при любом h из (4.8)

$$f_h(x) = S_h(x) + R_h(x),$$

поэтому

$$\int_0^{\pi} \{f_{h_n(R)}(x) - S_{h_n(R)}(x) - R_{h_n(R)}(x)\} dx = 0. \quad (4.14)$$

Из (4.14), (4.11) и (4.10) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\pi} \{[f(x)]_n - f_{h_n(R)}(x)\} dx - \int_0^{\pi} \{[S(x)]_n - S_{h_n(R)}(x)\} dx - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\pi} \{[R(x)]_n - R_{h_n(R)}(x)\} dx \right| \leq \left| \int_0^{\pi} \{[f(x)]_n - S(x) - [R(x)]_n\} dx \right| + \\ & \quad + \left| \int_0^{\pi} \{f_{h_n(R)}(x) - S_{h_n(R)}(x) - R_{h_n(R)}(x)\} dx \right| \leq 9\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.15)$$

потому что $[S(x)]_n = S(x)$ почти всюду. Второй интеграл в (4.15) равен нулю в силу (4.14), а первый может быть отличен от нуля лишь на тех множествах, где $|f(x)| \geq n$ или $|R(x)| \geq n$.

Но первое из этих множеств имеет меру меньше $\frac{\varepsilon}{n}$ в силу (4.10), а второе меру, не превосходящую $\frac{2\varepsilon}{n}$ в силу (4.9). Кроме того, подынтегральное выражение по модулю не превосходит $3n$ почти всюду, и значит,

$$\left| \int_0^\pi \{[f(x)]_n - S(x) - [R(x)]_n\} dx \right| < 3n \left(\frac{\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{n} \right) = 9\varepsilon.$$

Принимая во внимание (4.12) и (4.13), мы теперь получаем из (4.15)

$$\left| \int_0^\pi \{[f(x)]_n - f_{h_n(R)}(x)\} dx \right| < 2\varepsilon + 2\varepsilon + 9\varepsilon = 13\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi [f(x)]_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_{h_n(R)}(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{2} a_0.$$

В случае $k \neq 0$ проходят те же рассуждения с небольшими изменениями. Значит, формулы (4.6) и (4.7) доказаны.

Остается заметить, что $f(x) \sin kx$ — нечетная функция при любом k и в силу

$$mE(|f(x)| \geq n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

имеем

$$mE(|f(x) \sin kx| \geq n) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда следует, что она А-интегрируема и

$$(A) \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin kx dx = 0.$$

Следовательно, ряд (4.1) есть ряд Фурье (А) от $f(x)$, и теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 1. Если $f(x)$ ограничена снизу, то она суммируема на $(-\pi, \pi)$.

Действительно, для функций, ограниченных снизу, А-интеграл существует только в том случае, когда существует интеграл Лебега, а у нас $f(x)$ А-интегрируема.

В частности, если $f(x) \geq 0$, то она суммируема.

З а м е ч а н и е. В § 2 мы доказали, что $f(x)$ нестрого положительна и суммируема, если $a_n \rightarrow 0$ и $\{a_n\}$ выпукла. Теперь мы видим, что из неотрицательности $f(x)$ суммируемость вытекает автоматически.

С л е д с т в и е 2. Если $f(x)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$, то ряд (4.1) является ее рядом Фурье. Это же верно в случае суммируемости $f(x)$ для ряда (4.2).

Это опять вытекает из совпадения (А)-интеграла с интегралом Лебега, когда этот последний существует. Мы отмечали раньше справедливость утверждения, содержащегося в следствии 2 (см. § 2).

§ 5. Суммируемость $|f(x)|^p$ и $|\bar{f}(x)|^p$ при $0 < p < 1$

Мы знаем, что функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, определяемые рядами (4.1) и (4.2), при $a_n \downarrow 0$ могут быть несуммируемы. Однако они суммируемы в любой степени p , лишь бы $0 < p < 1$. Этот результат принадлежит Ульянову.

Чтобы убедиться в этом, докажем прежде всего такую теорему, также принадлежащую Ульянову [4]:

Теорема 1. Если последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям

$$a_k \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum |\Delta a_k| < +\infty,$$

то для любого p , $0 < p < 1$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)|^p dx = 0,$$

где $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$ — частные суммы рядов (4.1) и (4.2).

Действительно, в силу преобразования Абеля

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta a_k D_k(x) - a_{n+1} D_n(x) \quad \text{при} \quad x \not\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

значит,

$$|f(x) - S_n(x)|^p \leq \left(\frac{2}{|x|}\right)^p \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta a_k| + |a_{n+1}| \right)^p,$$

а потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx \leq 2^p \left(|a_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta a_k| \right)^p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{x^p} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогичное рассуждение справедливо и для $\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)$. Теорема доказана.

Так как при $0 < p < 1$ из

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

следует

$$|\varphi(x)|^p \leq |\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p$$

(см. Вводный материал, § 10), то из доказанной теоремы, поскольку $|S_n(x)|^p$ и $|\bar{S}_n(x)|^p$ всегда суммируемы, сразу следует:

Теорема 2. Если удовлетворено условие (4.3), то для любого p обе функции $|f(x)|^p$ и $|\bar{f}(x)|^p$ суммируемы.

§ 6. Равенство Рисса

Мы доказали в § 14 главы VIII, что если $p > 1$, $q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для $f(x) \in L^p$, $\varphi(x) \in L^q$ имеет место равенство Рисса

$$(L) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx = - (L) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx,$$

где $\bar{f}(x)$ — сопряженная с $f(x)$, а $\bar{\varphi}(x)$ — сопряженная с $\varphi(x)$.

В § 18 главы VIII мы доказали аналогичное неравенство, считая, что $f(x) \in L$, а $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ ограничены; тогда $\bar{f}(x)$ уже не должна быть суммируема, но она A -интегрируема и

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = - (L) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx.$$

П. Л. Ульянов рассматривает случай, когда $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ — суммы рядов (4.1) и (4.2), удовлетворяющих условию (4.3), а $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ — две сопряженные функции, причем они обе имеют ограниченное изменение. При этом он получает аналогичное равенство, но уже применяя А-интегралы в обеих частях.

Предварительно он доказывает следующую лемму:

Л е м м а . Если $f(x)$ есть четная периодическая функция и коэффициенты $\{a_k\}$ ее ряда удовлетворяют условию

$$a_k \rightarrow 0, \quad \sum |\Delta a_k| < +\infty, \quad (6.1)$$

а $\varphi(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$, то

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k[\varphi, 0],$$

где $S_k[\varphi, 0]$ — значение k -й частной суммы функции $\varphi(x)$ в точке $x=0$.

Для доказательства рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(x)$ четная. Положим

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx$$

и докажем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

Имеем

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \int_{\varepsilon}^{\pi} \varphi(x) D_k(x) dx.$$

Положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } \varepsilon \leq |x| \leq \pi, \\ 0 & \text{при } 0 \leq |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $a_k^{(\varepsilon)}$ — коэффициенты Фурье этой четной функции, $S_n^{(\varepsilon)}$ и $\sigma_n^{(\varepsilon)}$ — ее частные суммы и фейеровские суммы. Из определения $\varphi_\varepsilon(x)$ следует, что

$$|\varphi_\varepsilon(x)| \leq C \quad \text{и} \quad V_{-\pi}^{\pi} \varphi_\varepsilon(x) < C,$$

где C — константа, не зависящая от ε , а $V_a^b \varphi(x)$ — полное изменение функции $\varphi(x)$ на (a, b) . Поэтому из равенства

$$S_n^{(\varepsilon)} - \sigma_n^{(\varepsilon)} = \frac{a_1^{(\varepsilon)} \cos x + \dots + na_n^{(\varepsilon)} \cos nx}{n+1}$$

сразу следует, что числа $S_n^{(\varepsilon)}$ ограничены в своей совокупности константой, не зависящей от ε . Но

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} \varphi(x) D_k(x) dx &= \int_{\varepsilon}^{\pi} \varphi_\varepsilon(x) D_k(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(x) D_k(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\varepsilon(x) D_k(x) dx = \frac{\pi}{2} S_k^{(\varepsilon)}(0). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k^{(\varepsilon)}(0)$$

и в силу того, что $|S_n^{(\varepsilon)}| \leq C_1$, где C_1 — абсолютная константа, переход к пределу в последнем равенстве является законным, и мы имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k[\varphi, 0].$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы § 4, мы получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = (A) \int_0^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k[\varphi, 0].$$

Ясно, что совершенно так же докажем

$$(A) \int_{-\pi}^0 f(x) \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k[\varphi, 0].$$

Складывая эти два равенства, получим

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k S_k[\varphi, 0].$$

Если $\varphi(x)$ нечетная, то лемма также справедлива, так как в обеих частях равенства будут стоять просто нули. Наконец, в общем случае надо представить $\varphi(x)$ как сумму четной и нечетной функций.

Мы имеем теперь возможность доказать теорему:

Т е о р е м а. Пусть $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ — две сопряженные функции, обе с ограниченным изменением. Пусть $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ — суммы рядов (4.1) и (4.2), удовлетворяющих условию (4.3). Тогда

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx = - (A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx.$$

Ввиду аддитивности A -интеграла достаточно рассмотреть случай, когда $a_0 = 0$ и когда $\varphi(x)$ нечетная.

Пусть c_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. Так как $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ обе имеют ограниченное изменение, то по теореме Харди и Литтльвуда (см. глава VIII, § 12) имеем

$$\sum |c_k| < +\infty.$$

Рассмотрим выражение

$$\left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \bar{f}(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \varphi(x) \bar{D}_k(x) dx.$$

Так как

$$\left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \varphi(x) \bar{D}_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \sin nx \bar{D}_k(x) dx$$

и

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \sin nx \bar{D}_k(x) dx \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^k \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \sin nx \sin jx dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^k \left(-\frac{\sin(n-j)\varepsilon_1}{n-j} - \frac{\sin(n+j)\varepsilon_2}{n+j} \right) \right| + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \leq C, \end{aligned}$$

то

$$\left| \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \varphi(x) \bar{D}_k(x) dx \right| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|,$$

а потому мы можем перейти к пределу по ε_1 и ε_2 , что дает

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^{\pi} \right) \bar{f}(x) \varphi(x) dx = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \bar{S}_k(\varphi, 0).$$

Рассуждая, как в теореме § 4, получим

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \bar{S}_k(\varphi, 0).$$

Но так как $\bar{S}_k[\varphi, 0] = S_k[\bar{\varphi}, 0]$, то

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k S_k[\bar{\varphi}, 0].$$

В силу леммы имеем

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{\varphi}(x) dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k S_k[\bar{\varphi}, 0],$$

поэтому, сравнивая два последних равенства, мы видим, что теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Нельзя предполагать только ограниченность изменения $\varphi(x)$, потому что иначе наши интегралы могут оказаться не имеющими смысла.

П р и м е р. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}.$$

Тогда $f(x) \in L$, а $f(x) = \sum \frac{\sin kx}{\ln k} \notin L$.

Если положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{при } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

то легко видеть, что

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = 2(L) \int_0^{\pi} \bar{f}(x) dx = +\infty,$$

хотя $\varphi(x)$ с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$.

З а м е ч а н и е 2. Пользуясь доказанной теоремой, можно получить следующий результат.

Если $a_k \rightarrow 0$, $\sum |\Delta a_k| < +\infty$ и

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx) r^k \quad (0 \leq r < 1),$$

то $f(r, x)$ — гармоническая функция в единичном круге и $f(r, x)$ представлена А-интегралом Пуассона, т. е.

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos(x - t))} dt \quad (0 \leq r < 1),$$

и аналогично для функции $\bar{f}(x)$ (см. П. Л. Ульянов [6]).

§ 7. Поведение около точки $x = 0$

Мы знаем, что для $\delta \leq |x| \leq \pi$ обе функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ непрерывны (см. § 1). Но при приближении к точке $x = 0$ они могут неограниченно возрастать, даже быть несуммируемыми. Иногда бывает важно оценить, как ведут себя $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ около точки $x = 0$. Мы рассмотрим их поведение для выпуклых последовательностей $\{a_n\}$.

Для удобства оценки введем в рассмотрение функцию $a(x)$, определяемую так, чтобы $a(n) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а между точками n и $n+1$ она либо линейно интерполируется, либо определяется каким-либо другим способом, лишь бы она была выпуклой.

Примем, кроме того, гипотезу, что $xa(x) \uparrow$, откуда, в частности, следует, что $na_n \uparrow$. Это условие обычно выполняется для наиболее интересных случаев рядов вида $\sum a_n \cos nx$ и $\sum a_n \sin nx$.

Если $a_n \downarrow 0$ и na_n ограничено, то частные суммы ряда $\sum a_n \sin nx$ ограничены в совокупности, значит, $\bar{f}(x)$ ограничена (см. глава I, § 30). Поэтому интересно изучать поведение $\bar{f}(x)$ лишь для случая $na_n \uparrow \infty$.

Начнем с рассмотрения поведения

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

и докажем теорему Салема (Salem [1]).

Т е о р е м а 1. Если $a(x)$ — выпуклая функция, $a(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $xa(x) \uparrow$, $a_n = a(n)$, то

$$\bar{f}(x) \sim \frac{1}{x} a\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Знак \sim здесь и в дальнейшем понимается так, как это указано в § 11 Вводного материала.

Для доказательства этой теоремы поступим так. Прежде всего запишем $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) &= a_1 \sin \frac{\pi}{2p} + \dots + a_p \sin p \frac{\pi}{2p} + a_{p+1} \sin (p+1) \frac{\pi}{2p} + \dots \\ &\dots + a_{2p-1} \sin (2p-1) \frac{\pi}{2p} - \left[a_{2p+1} \sin \frac{\pi}{2p} + \dots + a_{3p} \sin p \frac{\pi}{2p} + \right. \\ &\quad \left. + a_{3p+1} \sin (p+1) \frac{\pi}{2p} + \dots + a_{4p-1} \sin (2p-1) \frac{\pi}{2p} \right] + \dots = \\ &= P_0 - P_1 + P_2 - P_3 + \dots + (-1)^n P_n + \dots, \end{aligned}$$

где числа P_n все положительны, монотонно убывают и стремятся к нулю, потому что ряд $\sum a_n \sin nx$ сходится.

Так как сумма $p-1$ последних членов в P_0 не меньше суммы $p-1$ первых членов в P_1 , то

$$\begin{aligned} P_0 - P_1 &\geq a_1 \sin \frac{\pi}{2p} + \dots + a_p \sin p \frac{\pi}{2p} - \\ &- \left[a_{3p+1} \sin (p+1) \frac{\pi}{2p} + \dots + a_{4p-1} \sin (2p-1) \frac{\pi}{2p} \right] \geq (a_p - a_{3p}) \sigma_p, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_p = \sin \frac{\pi}{2p} + \dots + \sin p \frac{\pi}{2p} = \bar{D}_p\left(\frac{\pi}{2p}\right).$$

Но

$$\bar{D}_p(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(p + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{p+1}{2}x \sin p \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$\sigma_p = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4p}\right)}{\sin \frac{\pi}{4} p} \geq \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4p}} = \frac{2p}{\pi}.$$

Итак,

$$P_0 - P_1 \geq \frac{2p}{\pi} (a_p - a_{3p}).$$

Рассуждая таким же образом, находим

$$P_2 - P_3 \geq \frac{2p}{\pi} (a_{5p} - a_{7p}),$$

а потому

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \geq \frac{2p}{\pi} [a_p - a_{3p} + a_{5p} - a_{7p} + \dots].$$

Но мы предположили последовательность $\{a_n\}$ выпуклой; поэтому

$$a_p - a_{3p} \geq a_{3p} - a_{5p},$$

значит,

$$2(a_p - a_{3p}) \geq a_p - a_{3p} + a_{3p} - a_{5p},$$

также

$$2(a_{5p} - a_{7p}) \geq a_{5p} - a_{7p} + a_{7p} - a_{9p},$$

откуда

$$2[a_p - a_{3p} + a_{5p} - a_{7p} + \dots] \geq a_p$$

и, следовательно,

$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) \geq \frac{pa_p}{\pi}. \quad (7.1)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) < P_0 = a_1 \sin \frac{\pi}{2p} + a_2 \sin 2 \frac{\pi}{2p} + \dots + a_p \sin p \frac{\pi}{2p}$$

и так как $0 \leq \sin x \leq x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{\pi}{2p} [a_1 + 2a_2 + \dots + pa_p].$$

Но мы предположили, что $na_n \uparrow$, поэтому

$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{\pi}{2p} (pa_p)p = \frac{\pi}{2} pa_p. \quad (7.2)$$

Итак,

$$\frac{1}{\pi} pa_p < \bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{\pi}{2} pa_p. \quad (7.3)$$

Перейдем теперь к оценке $\bar{f}(x)$ для любого x . Для этого выберем p так, чтобы

$$\frac{\pi}{2(p+1)} \leq x < \frac{\pi}{2p},$$

и будем сравнивать $\bar{f}(x)$ и $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2p}\right)$.

С этой целью докажем сперва, что $x^2 \bar{f}(x)$ имеет производную, равную нулю при $x = 0$.

Чтобы обнаружить это, применим дважды к ряду

$$\bar{f}(x) = \sum a_n \sin nx$$

преобразование Абеля. Имеем сначала (для $x \neq 0$)

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n \bar{D}_n(x)$$

и далее

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 a_n \bar{K}_n(x) (n+1).$$

Но (см. глава VIII, формула (5.2))

$$\bar{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{D}_m(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{n+1} \frac{\sin(n+1)x}{\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \frac{x}{2} \bar{f}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x \right) \Delta^2 a_n = \\ &= \sin x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \Delta^2 a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 a_n \sin(n+1)x. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Если мы продифференцируем ряд, стоящий в правой части (7.4), то получим ряд

$$\cos x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \Delta^2 a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 a_n (n+1) \cos(n+1)x,$$

который сходится равномерно, потому что $\sum |\Delta^2 a_n| (n+1) < +\infty$ и при $x = 0$ он имеет сумму, равную нулю. Отсюда следует, что $4 \sin^2 \frac{x}{2} \bar{f}(x)$ имеет производную, равную нулю при $x = 0$, а значит, это верно и для $x^2 \bar{f}(x)$.

Отсюда сразу следует, что

$$\left| x^2 \bar{f}(x) - \left(\frac{\pi}{2p} \right)^2 f \left(\frac{\pi}{2p} \right) \right| < \varepsilon \left| x - \frac{\pi}{2p} \right| \leq \varepsilon \frac{\pi}{2p^2} \quad \text{для} \quad \frac{\pi}{2(p+1)} \leq x \leq \frac{\pi}{2p},$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Поэтому для тех же значений x находим

$$\left(\frac{\pi}{2p} \right)^2 f \left(\frac{\pi}{2p} \right) - \varepsilon \frac{\pi}{2p^2} < x^2 \bar{f}(x) < \left(\frac{\pi}{2p} \right)^2 f \left(\frac{\pi}{2p} \right) + \varepsilon \frac{\pi}{2p^2}$$

и, учитывая (7.3), получаем

$$\left(\frac{\pi}{2p} \right)^2 \frac{1}{\pi} p a_p - \varepsilon \frac{\pi}{2p^2} < x^2 \bar{f}(x) < \left(\frac{\pi}{2p} \right)^2 \frac{\pi}{2} p a_p + \varepsilon \frac{\pi}{2p^2}.$$

Отсюда сразу видно, что для тех же x

$$C_1 < \frac{\bar{f}(x)}{p a_p} < C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, т. е. $\bar{f}(x) \sim p a_p$.

Но из

$$\frac{2p}{\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2(p+1)}{\pi}$$

следует

$$\frac{1}{x} \sim p$$

и остается доказать, что $a_p \sim a\left(\frac{1}{x}\right)$.

Так как

$$p \leq \frac{\pi}{2x} \leq p+1,$$

то $\frac{1}{x} < p \leq \frac{2}{x}$, если x достаточно мало. Поэтому

$$a\left(\frac{1}{x}\right) \geq a(p) = a_p.$$

С другой стороны, если p четно, то

$$a\left(\frac{1}{x}\right) \leq a\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{2}{p} \frac{p}{2} a\left(\frac{p}{2}\right) \leq \frac{2}{p} p a(p) = 2 a(p),$$

так как мы предположили, что $pa_n \uparrow$.

Если же p нечетно, то из $p+1 < \frac{\pi}{2x} + 1$ следует $p+1 < \frac{2}{x}$, если x достаточно мало, а потому

$$a\left(\frac{1}{x}\right) \leq a\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{2}{p+1} \frac{p+1}{2} a\left(\frac{p+1}{2}\right) \leq \frac{2}{p+1} p a(p) < 2 a(p),$$

значит, во всех случаях

$$a_p \leq a\left(\frac{1}{x}\right) < 2 a_p,$$

и доказательство заканчивается.

Пример. Если мы положим $a(x) = \frac{1}{\ln x}$, то приходим к выводу, что сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

ведет себя около $x=0$, как $\frac{1}{x|\ln x|}$, откуда снова подтверждается уже известный нам факт, что этот ряд не есть ряд Фурье (см. глава I, § 40; функция $\frac{1}{x|\ln x|}$ несуммируема).

Перейдем к изучению поведения функции

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (7.5)$$

в окрестности точки $x=0$. Докажем теорему (Салем [1]):

Теорема 2. Если $a(x)$ — положительная выпуклая функция для $x \geq 0$, $a(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $pa_n \downarrow$, $\sum a_n = +\infty$, то сумма ряда (7.5) удовлетворяет условию

$$f(x) \sim \int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt.$$

Для доказательства этой теоремы прежде всего, как мы это делали для ряда из синусов, оценим $f\left(\frac{\pi}{2p}\right)$. Для этого разобьем ряд (7.5) на куски так:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2p}\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \cos k \frac{\pi}{2p} + \sum_{p+1}^{2p} a_k \cos k \frac{\pi}{2p} + \\
 &\quad + \sum_{2p+1}^{3p-1} a_k \cos k \frac{\pi}{2p} + \sum_{3p+1}^{4p} a_k \cos k \frac{\pi}{2p} + \dots = \\
 &= \frac{a_0}{2} - a_{2p} + a_{4p} - a_{6p} + \dots \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \cos k \frac{\pi}{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} a_{2p-k} \cos (2p-k) \frac{\pi}{2p} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} a_{2p+k} \cos (2p+k) \frac{\pi}{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} a_{4p-k} \cos (4p-k) \frac{\pi}{2p} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} a_{4p+k} \cos (4p+k) \frac{\pi}{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} a_{6p-k} \cos (6p-k) \frac{\pi}{2p} + \dots = \\
 &= \frac{a_0}{2} - a_{2p} + a_{4p} - a_{6p} + \dots \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} (a_k - a_{2p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{2p+k} - a_{4p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{4p+k} - a_{6p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{6p+k} - a_{8p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} + \dots = \\
 &= \frac{a_0}{2} - a_{2p} + a_{4p} - a_{6p} + \dots + P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots
 \end{aligned}$$

Так как $a_n \downarrow$ и $\Delta^2 a_n \geq 0$, то $P_j > P_{j+1}$ при любом j и $a_{2j} > a_{2j+2}$, а потому

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{a_0}{2} + P_1 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{a_0}{2} - a_{2p} + P_1 - P_2,$$

т. е.

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} (a_k - a_{2p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} \quad (7.6)$$

и

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{a_0}{2} - a_{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} (a_k - a_{2p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{2p+k} - a_{4p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p}. \quad (7.7)$$

Применяя к правой части неравенства (7.6) преобразование Абеля, находим

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2p}\right) &< \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-2} [a_k - a_{k+1} - (a_{2p-k} - a_{2p-k-1})] D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) + \\
 &\quad + D_{p-1}\left(\frac{\pi}{2p}\right) (a_{p-1} - a_{p+1})
 \end{aligned}$$

и так как $D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) > 0$ при $1 \leq k \leq p-1$ и в силу выпуклости $\{a_k\}$ имеем

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} + a_{2p-k-1} - a_{2p-k} &= \Delta a_k + \Delta a_{2p-k-1} \leq 2 \Delta a_k, \\ a_{p-1} - a_{p+1} &= \Delta a_{p-1} + \Delta a_p \leq 2 \Delta a_{p-1}, \end{aligned}$$

то

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \frac{a_0}{2} + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \Delta a_k D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) < 2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta a_k D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) \right].$$

Для оценки $f\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ снизу заметим прежде всего, что в силу гипотезы $n \Delta a_n \downarrow$ мы можем, сравнивая

$$\begin{aligned} a_k - a_{2p-k} &= (a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \dots + (a_{2p-k-1} - a_{2p-k}) = \\ &= \Delta a_k + \Delta a_{k+1} + \dots + \Delta a_{2p-k-1} \end{aligned}$$

и

$$a_{2p+k} - a_{4p-k} = \Delta a_{2p+k} + \dots + \Delta a_{4p-k-1},$$

написать для $s = 0, 1, 2, \dots, 2p-2k-1$, $k = 1, 2, \dots, p-1$,

$$(k+s) \Delta a_{k+s} \geq (2p+k+s) \Delta a_{2p+k+s},$$

откуда

$$\Delta a_{2p+k+s} \leq \frac{k+s}{2p+k+s} \Delta a_{k+s} \leq \frac{1}{2} \Delta a_{k+s}$$

и, следовательно,

$$a_{2p+k} - a_{4p-k} \leq \frac{1}{2} (a_k - a_{2p-k}). \quad (7.8)$$

Формулу (7.7) можно переписать так:

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} \left[(a_k - a_{2p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} - (a_{2p+k} - a_{4p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} \right] - a_{2p}.$$

Если p достаточно велико, то $a_{2p} < \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{2}\right)$; соединяя это с (7.8), находим

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{1}{2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} (a_k - a_{2p-k}) \cos k \frac{\pi}{2p} \right]. \quad (7.9)$$

Так как

$$a_k - a_{2p-k} - (a_{k+1} - a_{2p-k-1}) = \Delta a_k + \Delta a_{2p-k-1} \geq \Delta a_k$$

и

$$a_{p-1} - a_{p+1} \geq \Delta a_{p-1},$$

то, применяя преобразование Абеля к выражению в квадратных скобках в (7.9), как мы делали при преобразовании формулы (7.6), находим

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{1}{2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta a_k D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) - \frac{a_1 - a_{2p-1}}{2} \right].$$

Итак, мы пока убедились, что

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta a_k D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right).$$

Так как $|D_k(x)| \leq k + 1$ при любом x и, с другой стороны, для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, то ясно, что

$$D_k\left(\frac{\pi}{2p}\right) \sim k$$

при любом k , $1 \leq k \leq p-1$, откуда

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} k \Delta a_k. \quad (7.10)$$

Но мы предположили, что $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n = +\infty$. Поэтому мы должны иметь*) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Delta a_k = +\infty,$$

т. е. сумма в правой части (7.10) стремится к бесконечности при $p \rightarrow \infty$. Поэтому

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \sim \sum_{k=1}^{p-1} k \Delta a_k \sim \sum_{k=1}^p k \Delta a_k.$$

Нам надо теперь перейти к случаю любого x . Для этого, как и при оценке $\bar{f}(x)$, рассмотрим для всякого $x > 0$ такое p , что

$$\frac{\pi}{2(p+1)} < x \leq \frac{\pi}{2p}, \quad (7.11)$$

и оценим $f'(x)$ около $x = 0$. Так как (см. формулу (2.9) в § 2)

$$f(x) = \sum \Delta^2 a_n (n+1) K_n(x),$$

т. е.

$$f(x) = \sum \Delta^2 a_n \left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2,$$

то

$$\begin{aligned} \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 f(x) &= \sum \Delta^2 a_n \sin^2(n+1)\frac{x}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [\sum \Delta^2 a_n - \sum \Delta^2 a_n \cos(n+1)x]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Если мы продифференцируем почленно ряд в правой части (7.12), то получим ряд

$$\sum (n+1) \Delta^2 a_n \sin(n+1)x,$$

сходящийся равномерно в силу $\sum (n+1) \Delta^2 a_n < +\infty$. Значит, его сумма есть непрерывная функция и она равна нулю при $x = 0$, т. е. $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 f(x)$ имеет производную, равную нулю при $x = 0$, а значит, это верно и для $x^2 f(x)$.

Отсюда, как и в случае $\bar{f}(x)$, заключаем

$$\left| x^2 f(x) - \left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \right| \leq \varepsilon \frac{\pi}{2p^2},$$

*) Наше утверждение основывается на одной лемме из теории числовых рядов (см. Вводный материал, § 4).

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Но тогда

$$-\varepsilon \frac{\pi}{2p^2} + C_1 \left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 \sum_{k=1}^p k \Delta a_k \leq x^2 f(x) \leq \varepsilon \frac{\pi}{2p^2} + C_2 \left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 \sum_{k=1}^p k \Delta a_k,$$

а так как $\frac{\pi}{2(p+1)} < x \leq \frac{\pi}{2p}$ (см. (7.11)), то отсюда окончательно выводим

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^p k \Delta a_k, \quad (7.13)$$

где p определяется из неравенства (7.11).

Покажем, что отсюда следует

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^q k \Delta a_k, \quad (7.14)$$

где уже $q = \left[\frac{1}{x}\right]$. Действительно, с одной стороны, ясно, что $q \leq p$, значит

$$\sum_{k=1}^q k \Delta a_k \leq \sum_{k=1}^p k \Delta a_k. \quad (7.15)$$

С другой стороны, $k \Delta a_k \downarrow$ по условию, поэтому

$$\sum_{k=1}^p k \Delta a_k = \sum_{k=1}^q k \Delta a_k + \sum_{q+1}^p k \Delta a_k \leq \sum_{k=1}^q k \Delta a_k + (p-q) q \Delta a_q.$$

Но так как $p = O(q)$, то в силу $k \Delta a_k \downarrow$ находим

$$(p-q) q \Delta a_q \leq C q^2 \Delta a_q \leq C \sum_{k=1}^q k \Delta a_k,$$

значит,

$$\sum_{k=1}^p k \Delta a_k \leq (C+1) \sum_{k=1}^q k \Delta a_k. \quad (7.16)$$

Соединяя (7.15) и (7.16), видим, что

$$\sum_{k=1}^p k \Delta a_k \sim \sum_{k=1}^q k \Delta a_k,$$

а это в соединении с (7.13) дает (7.14).

Наконец, остается убедиться, что

$$\sum_{k=1}^q k \Delta a_k \sim \int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt.$$

Для этого заметим, что из $t [a(t) - a(t+1)] \downarrow$ следует

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt &\geq \int_1^q t [a(t) - a(t+1)] dt = \sum_{k=1}^{q-1} \int_k^{k+1} t [a(t) - a(t+1)] dt \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{q-1} (k+1) \Delta a_{k+1} = \sum_{k=1}^q k \Delta a_k - \Delta a_1 \end{aligned}$$

и

$$\int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt \leq \sum_{k=1}^q \int_k^{k+1} t [a(t) - a(t+1)] dt \leq \sum_{k=1}^q k \Delta a_k,$$

этим доказательство заканчивается.

З а м е ч а н и е 1. Если $a(t)$ имеет производную, то можно писать также

$$f(x) \sim \int_1^{\frac{1}{x}} t |a'(t)| dt.$$

Действительно, $|a'(t)| \geq |a(t+1) - a(t)| \geq |a'(t+1)|$, если $a(t)$ выпукла. Но тогда

$$\int_1^{\frac{1}{x}} t |a'(t)| dt \geq \int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt$$

и, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{1}{x}} t |a'(t)| dt &= \int_1^2 t |a'(t)| dt + \int_2^{\frac{1}{x}} t |a'(t)| dt = O(1) + \int_1^{\frac{1}{x}-1} (t+1) |a'(t+1)| dt \leq \\ &\leq O(1) + \int_1^{\frac{1}{x}-1} (t+1) [a(t) - a(t-1)] dt \leq O(1) + \int_1^{\frac{1}{x}} t [a(t) - a(t+1)] dt. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. В тесной связи с вопросом о поведении $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ в окрестности $x = 0$ стоит работа Боса (Boas^[1]), где изучается, при каких условиях $\frac{f(x)}{x^\gamma}$ или $\frac{\bar{f}(x)}{x^\gamma}$ суммируемы. Оказывается, что:

а) если $0 < \gamma < 1$ и $a_n \downarrow 0$, то для $f(x) = \sum a_n \cos nx$ имеем $\frac{f(x)}{x^\gamma} \in L$ тогда и только тогда, когда сходится $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1} a_n$;

б) если $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ и $f(0) = 0$, то $\frac{f(x)}{x} \in L$ тогда и только тогда, когда $\sum a_n \ln n$ сходится;

в) если $\bar{f}(x) = \sum a_n \sin nx$, то для $0 \leq \gamma < 1$ имеем $\frac{\bar{f}(x)}{x^\gamma} \in L$ в том и только том случае, когда $\sum n^{\gamma-1} a_n < +\infty$.

§ 8. Дифференциальные свойства функций $f(x)$ и $\bar{f}(x)$

Мы знаем, что функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, определяемые рядами (4.1) и (4.2), непрерывны всюду, кроме точки $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, при выполнении (4.3). Возникает вопрос, должны ли эти функции на любом отрезке, не содержащем $x = 0$, иметь производную.

Докажем, что если $a_n \rightarrow 0$ и $\{a_n\}$ — выпуклая последовательность, то $f'(x)$ и $\bar{f}'(x)$ существуют и непрерывны на любом отрезке $\delta \leq |x| \leq \pi$, $\delta > 0$. Действительно, положим

$$\Phi_1(x) = x^2 f(x), \quad \Phi_2(x) = x^2 \bar{f}(x).$$

Мы видели в § 7, что $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ изображаются рядами, которые после дифференцирования сходятся равномерно. Значит, $\Phi_1'(x)$ и $\Phi_2'(x)$ существуют и непрерывны. Но тогда сразу ясно, что при $x \neq 0$ у $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ существуют производные и они непрерывны при $\delta \leq |x| \leq \pi$.

Заметим теперь, что если отказаться от условия выпуклости $\{a_n\}$, то $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ уже могут оказаться недифференцируемыми почти всюду.

Для построения такого примера возьмем последовательность целых чисел

$$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

которую подберем позже, и потребуем, чтобы

$$a_n = a_k; \quad n_{k-1} < n \leq n_k,$$

где числа a_k положительны и $a_k \downarrow 0$; мы их тоже подберем позже.

Так как вместо

$$f(x) = \sum a_n \cos nx$$

можно также написать

$$f(x) = \sum \Delta a_n D_n(x)$$

и $\Delta a_n = 0$, если $n \neq n_k$, то

$$f(x) = \sum \Delta a_{n_k} D_{n_k}(x) = \sum (a_k - a_{k+1}) D_{n_k}(x).$$

Положим $\beta_k = a_k - a_{k+1}$; числа $\beta_k > 0$ и пока в нашем распоряжении. Мы хотим подобрать $\{n_k\}$ и $\{\beta_k\}$ так, чтобы функция

$$f(x) = \sum \beta_k D_{n_k}(x)$$

оказалась почти всюду недифференцируемой. Но

$$D_{n_k}(x) = \frac{\sin\left(n_k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum \beta_k \sin(2n_k + 1) \frac{x}{2}$$

или

$$f(2x) = \frac{1}{2 \sin x} \sum \beta_k \sin(2n_k + 1)x. \quad (8.1)$$

Поэтому

$$2 \sin x f(2x) = \sum \beta_k \sin(2n_k + 1)x. \quad (8.2)$$

Если бы $f(x)$ имела производную на множестве E , $mE > 0$, то и $\varphi(x) = 2 \sin x f(2x)$ имела бы производную на некотором множестве E_1 , $mE_1 > 0$. Поэтому, дифференцируя ряд (8.2), получим ряд

$$\sum (2n_k + 1) \beta_k \cos(2n_k + 1)x, \quad (8.3)$$

который суммируется методом Пуассона на E_1 (см. § 58 главы I).

Покажем, что числа β_k и n_k можно выбрать так, чтобы это не имело места. Для этого достаточно выбрать n_k так, чтобы последовательность $2n_k + 1$ была лакунарной, а ряд

$$\sum (2n_k + 1)^2 \beta_k^2 = +\infty$$

и применить теорему Зигмунда, которая будет доказана в § 3 главы XI.

§ 9. Ряды с монотонными коэффициентами для функций из класса $\text{Lip } \alpha$

Докажем одну простую, но изящную теорему Лоренца (Lorentz ^[1]).
Т е о р е м а. *Если*

$$f(x) = \sum a_n \cos nx,$$

где $a_n \downarrow 0$, то для того, чтобы $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right). \quad (9.1)$$

Это же справедливо для

$$g(x) = \sum a_n \sin nx.$$

То, что условие является достаточным, было уже доказано в § 3 главы II, где даже не требовалось, чтобы $a_n \downarrow 0$. Остается доказать, что при выполнении этого условия соотношение (9.1) оказывается и необходимым.

Действительно, для функции $f(x)$ это можно доказать так. Имеем

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos kx - 1) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin^2 k \frac{x}{2}.$$

Полагая $x = \frac{\pi}{n}$, получим, в силу $|f(x) - f(0)| < C|x|^\alpha$,

$$2 \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^n a_k \sin^2 k \frac{\pi}{2n} \leq \frac{C\pi^\alpha}{n^\alpha},$$

откуда, учитывая, что для рассматриваемых значений k $\sin^2 k \frac{\pi}{2n} \geq \frac{1}{2}$, имеем

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^n a_k \leq \frac{C_1}{n^\alpha},$$

значит, из $a_n \downarrow$ следует

$$na_n \leq \frac{C_1}{n^\alpha},$$

т. е.

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),$$

а потому для $f(x)$ теорема доказана.

Для $g(x)$ рассуждаем так:

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (1 - \cos nx) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin^2 n \frac{x}{2}.$$

Но $g(0) = 0$, поэтому

$$\max_{0 \leq t \leq x} |g(t)| = \max_{0 \leq t \leq x} |g(t) - g(0)| \leq Cx^\alpha$$

в силу $g(x) \in \text{Lip } \alpha$. Поэтому

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin^2 n \frac{x}{2} \leq C x^{\alpha+1}$$

и тем более

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^n \frac{a_k}{k} \sin^2 k \frac{x}{2} \leq C x^{\alpha+1}.$$

Полагая $x = \frac{\pi}{n}$, отсюда так же находим

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^n \frac{a_k}{k} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right),$$

а потому, в силу монотонности a_n ,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right),$$

и теорема доказана.

Г Л А В А X I

ЛАКУНАРНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Введение

Напомним, что тригонометрический ряд называется *лакунарным*, если он имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad (1.1)$$

где натуральные числа n_k удовлетворяют неравенству

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Настоящая глава будет посвящена изучению тех рядов вида (1.1), для которых выполнено либо условие (1.2), либо, в некоторых случаях, какое-нибудь менее сильное требование, но во всяком случае такое, которое выполняется, если (1.2) имеет место. Мы увидим, что такие ряды обладают многими свойствами, сильно отличающими их от обычных тригонометрических рядов (где нет «лакун» в последовательности коэффициентов). Так, например, мы уже видели (см. глава I, § 65), что если лакунарный ряд есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду (тогда как обычный ряд Фурье может всюду расходиться). Теперь мы докажем, что у ограниченных функций, определяемых лакунарными рядами, ряды Фурье сходятся абсолютно (§ 7). Из одной лишь суммируемости методом T^* лакунарного ряда на множестве положительной меры уже следует, что он ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом (§ 3) и тем самым, в силу уже сказанного ранее, сходится почти всюду. Теоремы единственности для лакунарных рядов (§ 11) также резко отличаются от случая общих тригонометрических рядов (глава XIV).

§ 2. Свойства лакунарных последовательностей

Последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ называется *лакунарной*, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1.$$

Верхнюю грань чисел λ , для которых выполнено условие

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda,$$

назовем *степенью лакунарности* данной последовательности.

Грубо говоря, чем степень лакунарности больше, тем последовательность более разрежена.

Рассмотрим ряд свойств лакунарных последовательностей, которые будут употребляться при изучении поведения лакунарных рядов.

Свойство 1. Если выбрать ε так, чтобы

$$\varepsilon < \frac{\lambda - 1}{2(\lambda + 1)}, \quad (2.1)$$

то интервалы

$$\Delta_k = (n_k(1 - 2\varepsilon), n_k(1 + 2\varepsilon))$$

не перекрываются.

Действительно, имеем

$$n_k(1 + 2\varepsilon) < n_{k+1}(1 - 2\varepsilon),$$

если

$$\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} < \lambda,$$

а это и будет выполнено, если (2.1) имеет место.

Свойство 2. Каково бы ни было μ , всякую лакунарную последовательность можно разбить на конечное число лакунарных последовательностей, у каждой из которых степень лакунарности не меньше μ .

Возьмем число r столь большим, чтобы

$$\lambda r \geq \mu$$

и разобьем нашу последовательность на r последовательностей L ($i = 1, 2, \dots, r$) так:

$$n_i, n_{i+r}, \dots, n_{i+jr}, \dots \quad (L_i).$$

Ясно, что каждый член $\{n_k\}$ принадлежит одной и только одной из последовательностей (L_i) и, кроме того, для любого i имеем

$$\frac{n_{i+(j+1)r}}{n_{i+jr}} \geq \lambda r \geq \mu \quad (j = 1, 2, \dots),$$

и свойство 2 доказано.

Для дальнейшего введем

О п р е д е л е н и е. Последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2 , если любое натуральное число n можно лишь ограниченным числом способов представить в виде

$$n = n_k + n_j$$

или

$$n = n_k - n_j,$$

где n_k и n_j — члены нашей последовательности *).

Приняв это определение, докажем, что имеет место

Свойство 3. Всякая лакунарная последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2 .

*) Название B_2 происходит от идеи изображения n в виде алгебраической суммы двух членов; если писать $n = n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \dots \pm n_{k_p}$ и требовать, чтобы такое изображение было возможно лишь числом способов, зависящим только от p , но не от n , то говорят, что последовательность удовлетворяет свойству B_p ; однако этим свойством мы не будем пользоваться.

Действительно, допустим, что

$$n = n_p + n_j \quad \text{или} \quad n = n_p - n_j, \quad (2.2)$$

где $n_p > n_j$; если $n = n_p + n_j$, то $n_p < n < n_p \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$, т. е.

$$n \frac{\lambda}{1 + \lambda} < n_p < n.$$

Если же $n = n_p - n_j$, то $n_p \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < n < n_p$, т. е.

$$n < n_p < n \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Следовательно, всякое число, которое можно записать в виде $n = n_p \pm n_j$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\lambda}{\lambda + 1} n < n_p < n \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \quad (2.3)$$

Пусть n_q — самое маленькое, а n_{q+s} — самое большое из чисел последовательности $\{n_k\}$, удовлетворяющее условию (2.3). Так как

$$n_{q+s} < n \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

и

$$n_q > n \frac{\lambda}{\lambda + 1},$$

а

$$\frac{n_{q+s}}{n_q} \geq \lambda^s,$$

то

$$\lambda^s < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

и это значит, что s ограничено (независимо от n). Итак, число n_p может принять только одно из значений $n_q, n_{q+1}, \dots, n_{q+s}$, где s ограничено, т. е. только ограниченное число значений. Но из (2.2) имеем

$$n_j = n - n_p$$

или

$$n_j = n_p - n.$$

Так как n_p может при заданном n принять только ограниченное число различных значений, то это же верно и для n_j , значит, свойство 3 доказано.

В дальнейшем мы увидим, что ряд теорем, которые обычно формулируют для лакунарных рядов, справедлив и для любых последовательностей, удовлетворяющих условию B_2 (а это значит, что они верны в более общих предположениях, так как последовательность может обладать свойством B_2 и не быть лакунарной).

Свойство 4. Если $l_1 > l_2 > \dots > l_p$ и числа l_i все принадлежат лакунарной последовательности $\{n_k\}$ со степенью лакунарности $\lambda \geq 2$, то всякое число ν вида

$$\nu = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_p$$

лежит в интервале

$$\left(l_1 \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}, l_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1}\right).$$

Действительно, так как

$$\frac{l_i}{l_{i-1}} \leq \frac{1}{\lambda},$$

то

$$v < l_1 \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right) = l_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

и

$$v > l_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \dots \right) = l_1 \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}.$$

Свойство 5. Если r — любое положительное и $\lambda \geq r + 1$, то изображение любого числа n в виде

$$n = a n_{k_1} + b n_{k_2} + \dots,$$

где все a, b, \dots натуральные и не превосходят r , а $n_{k_1} > n_{k_2} > \dots$, возможно лишь единственным образом.

Действительно, пусть это неверно. Тогда, вычитая два таких изображения числа n друг из друга, найдем

$$0 = \alpha n_{k_1} + \beta n_{k_2} + \dots,$$

где все α, β, \dots целые и по модулю $\leq r$. Мы можем считать $\alpha \neq 0$, так как, если бы оно было равно 0, мы повели бы рассуждение, начиная с члена, содержащего n_{k_2} . Если $\alpha \neq 0$, то $|\alpha| \geq 1$, а потому из

$$|\alpha n_{k_1}| \leq |\beta n_{k_2}| + |\gamma n_{k_3}| + \dots$$

следует

$$1 < r \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right) = \frac{r}{\lambda - 1},$$

а мы предположили $\lambda \geq r + 1$. Мы пришли к противоречию. Значит, свойство 5 доказано.

Наконец, для дальнейшего иногда бывает полезно следующее усиление свойства 2.

Свойство 6. Пусть $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность и последовательности $\{L_i\}$ определены, как в свойстве 2. Если взять μ достаточно большим, то при $p \neq 1$ никакое число n_k не может иметь вид

$$v = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_p, \quad (2.4)$$

где $l_1 > l_2 > \dots > l_p$ и все $l_m \in L_i$ для одного и того же i .

Кроме того, если $n_k \in L_j$ для $j \neq i$, то существует число $C(\lambda)$, зависящее только от λ , такое, что

$$|n_k - v| \geq C(\lambda) l_1, \quad (2.5)$$

каково бы ни было v вида (2.4) и это верно как при $p \neq 1$, так и при $p = 1$.

Для доказательства сначала выберем ε так, как указано в свойстве 1, т. е. чтобы интервалы

$$\Delta_k = (n_k(1 - 2\varepsilon), n_k(1 + 2\varepsilon)) \quad (2.6)$$

не перекрывались. После этого возьмем $\mu > 2$ так, чтобы

$$\frac{1}{\mu - 1} < \varepsilon. \quad (2.7)$$

На основании свойства 4, так как степень лакунарности последовательности L_i не меньше μ , то число v , определяемое формулой (2.4), лежит в интервале

$$\left(l_1 \frac{\mu - 2}{\mu - 1}, l_1 \frac{\mu}{\mu - 1} \right)$$

и в силу (2.7) отсюда и подавно

$$l_1(1 - \varepsilon) < \nu < l_1(1 + \varepsilon). \quad (2.8)$$

Но l_1 — член последовательности $\{n_k\}$, пусть $l_1 = n_q$. Поэтому из (2.6) и (2.8) ясно, что ν принадлежит интервалу Δ_q . Поскольку интервалы Δ_k не перекрываются, то в Δ_q нет точек из $\{n_k\}$, кроме $n_q = l_1$. Значит, если $k \neq q$, то n_k вне Δ_q , а потому

$$(n_k - \nu) \geq l_1 \varepsilon = C(\lambda) l_1,$$

где $C(\lambda)$ зависит только от λ , так как выбор ε зависит только от λ .

Если $n_k \in (L_j)$, где $j \neq i$, то заведомо $n_k \neq n_q$ и поэтому (2.5) доказано. Если же $n_k = n_q = l_1$, то, поскольку в выражении для ν по формуле (2.4) предполагается $p \neq 1$, имеем заведомо $l_2 \neq 0$. Но тогда

$$|n_k - \nu| = |\nu - l_1| = |l_2 \pm l_3 \pm \dots \pm l_p| \geq l_2(1 - 2\varepsilon),$$

а так как $l_2 \neq 0$ и $1 - 2\varepsilon > 0$, то $n_k \neq \nu$, что и заканчивает доказательство.

§ 3. Лакунарные ряды, суммируемые на множестве положительной меры

Напомним (см. Вводный материал, § 5), что мы условились некоторую матрицу $\|\beta_{pq}\|$ называть матрицей T^* , если она удовлетворяет двум первым условиям Теплица, т. е.

$$1) \lim_{p \rightarrow \infty} \beta_{pq} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots),$$

$$2) \lim_{p \rightarrow \infty} (\beta_{p1} + \beta_{p2} + \dots + \beta_{pq} + \dots) = 1.$$

Мы условились также говорить, что ряд суммируется методом T^* на множестве E , если при всяком p ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} S_q(x)$$

сходится для любого $x \in E$ и если сумма $\sigma_p(x)$ этого ряда стремится к конечному пределу при $p \rightarrow \infty$ и $x \in E$ (здесь $S_q(x)$ — частные суммы заданного ряда).

Докажем следующую теорему Зигмунда (Zygmund [7]):

Теорема Зигмунда. Если лакунарный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (3.1)$$

суммируем некоторым методом T^* на множестве E , $mE > 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty. \quad (3.2)$$

Теорема остается в силе и в том случае, когда вместо лакунарности $\{n_k\}$ предполагается только, что эта последовательность удовлетворяет условию (B_2) . Это непосредственно видно из ее доказательства.

Мы рассмотрим сначала тот случай, когда в каждой строке матрицы $\|\beta_{pq}\|$ содержится лишь конечное число членов. Тогда

$$\sigma_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} S_q(x)$$

есть конечная сумма непрерывных функций, т. е. $\sigma_p(x)$ непрерывна ($p = 1, 2, \dots$).

Докажем существование такого \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, на котором $|\sigma_p(x)| < C$, где C — некоторая константа.

Действительно, по теореме Егорова можно найти замкнутое \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, $\mathcal{E} \subset E$, где $\sigma_p(x)$ сходится равномерно. Тогда $\sigma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p(x)$ непрерывна на \mathcal{E} , значит, существует константа M такая, что $|\sigma(x)| < M$ на \mathcal{E} , и найдется p_0 такое, что

$$|\sigma_p(x)| < M + 1 \quad \text{для } p > p_0 \text{ и } x \in \mathcal{E}.$$

Но так как $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_{p_0}(x)$ все непрерывны, то найдется K такое, что $|\sigma_i(x)| < K$ всюду для $i = 1, 2, \dots, p_0$. Взяв C превосходящим K и $M + 1$, получим $|\sigma_p(x)| < C$ на \mathcal{E} ($p = 1, 2, \dots$).

Заметим теперь, что если вместо ряда (3.1) мы рассмотрим ряд

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad (3.3)$$

где ν — любое число, то он, разумеется, будет суммироваться T^* на том же E ; составляя для него частные суммы $S_p^*(x)$ и для них соответствующие $\sigma_p^*(x)$, мы легко видим, что эти $\sigma_p^*(x)$ будут тоже оставаться ограниченными на \mathcal{E} ; пусть

$$|\sigma_p^*(x)| < A \quad \text{на } \mathcal{E} \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Число ν мы определим несколько позже.

Обозначая для краткости

$$A_k(x) = a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x = \varrho_k \cos(n_k x + \alpha_k)$$

и

$$R_m(p) = \beta_{pm} + \beta_{pm+1} + \dots, \quad (3.5)$$

мы можем написать (применяя преобразование Абеля)

$$\sigma_p^*(x) = \sum_{k=\nu}^{\infty} A_k(x) R_{n_k}(p), \quad (3.6)$$

где ряд справа содержит лишь конечное число членов, так как при любом p числа $R_m(p)$ становятся равными 0, начиная с некоторого m (вследствие предположения, что в каждой строке матрицы $||\beta_{pq}||$ — лишь конечное число членов).

Имеем в силу (3.4) и (3.6)

$$\begin{aligned} A^2 m \mathcal{E} &\geq \int_{\mathcal{E}} [\sigma_p^*(x)]^2 dx = \sum_{k=\nu}^{\infty} \varrho_k^2 R_{n_k}^2(p) \int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + \alpha_k) dx + \\ &+ \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \varrho_k \varrho_l R_{n_k}(p) R_{n_l}(p) \int_{\mathcal{E}} \cos(n_k x + \alpha_k) \cos(n_l x + \alpha_l) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначим для краткости

$$\bar{\varrho}_k = \varrho_k R_{n_k}(p)$$

и

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{\varrho}_k^2 \int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + \alpha_k) dx + \\ &+ \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{\varrho}_k \bar{\varrho}_l \int_{\mathcal{E}} \cos(n_k x + \alpha_k) \cos(n_l x + \alpha_l) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно, (3.7) переписывается так:

$$A^2 m \mathcal{E} \geq I(p). \quad (3.9)$$

Теперь оценим $I(p)$ снизу. Положим

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{E}} \cos mx \, dx, \quad \eta_m = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{E}} \sin mx \, dx, \\ b_{kl} &= \int_{\mathcal{E}} \cos(n_k x + a_k) \cos(n_l x + a_l) \, dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + a_k) \, dx &= \int_{\mathcal{E}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(n_k x + a_k) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} m \mathcal{E} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \cos 2(n_k x + a_k) \, dx \end{aligned}$$

и второй интеграл стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то найдется такое k_0 , что

$$\int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + a_k) \, dx > \frac{1}{4} m \mathcal{E} \quad \text{для} \quad k \geq k_0. \quad (3.11)$$

Далее, полагая $r_m^2 = \xi_m^2 + \eta_m^2$ и замечая, что ξ_m и η_m — коэффициенты Фурье от ограниченной функции $\psi(x)$, которая равна 1 на \mathcal{E} и равна 0 вне его, мы видим, что $\sum r_m^2 < +\infty$. Это позволяет нам доказать сходимость ряда

$$\sum_k \sum_{l \neq k} b_{kl}^2. \quad (3.12)$$

Действительно, мы имеем (считая $k > l$)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} b_{kl} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{E}} \{ \cos[(n_k + n_l)x + a_k + a_l] + \cos[(n_k - n_l)x + a_k - a_l] \} dx = \\ &= \cos(a_k + a_l) \xi_{n_k + n_l} - \sin(a_k + a_l) \eta_{n_k + n_l} + \\ &\quad + \cos(a_k - a_l) \xi_{n_k - n_l} - \sin(a_k - a_l) \eta_{n_k - n_l}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi} b_{kl} \right)^2 &\leq 2[\xi_{n_k + n_l}^2 + \eta_{n_k + n_l}^2 + \xi_{n_k - n_l}^2 + \eta_{n_k - n_l}^2] = \\ &= 2(r_{n_k + n_l}^2 + r_{n_k - n_l}^2), \quad k > l. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Следовательно, достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} r_{n_k + n_l}^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=l+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} r_{n_k - n_l}^2. \quad (3.14)$$

Но в силу свойства 3 (см. § 2) сумма каждого из этих рядов не превосходит $s \sum_{m=1}^{\infty} r_m^2$, где s — максимальное число способов, которым m можно представить в виде $n_k + n_l$ или $n_k - n_l$, а так как $\sum r_m^2 < +\infty$, то доказана сходимость рядов (3.14), а значит, и ряда (3.12).

Таким образом, можно найти такое l_0 , что

$$\left(\sum_{k=l_0}^{\infty} \sum_{\substack{l=l_0 \\ k \neq l}}^{\infty} b_{kl}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{8} m \mathcal{E}. \quad (3.15)$$

Число ν , с которого начинаются индексы в ряде (3.3), было до сих пор произвольным. Мы теперь выберем его так, чтобы оно превосходило l_0 из формулы (3.15), k_0 из формулы (3.11) и чтобы при $k \geq \nu$, $l \geq \nu$ и $k \neq l$ имели $|n_k - n_l| \geq l_0$ и $n_k + n_l \geq l_0$.

Тогда сначала из (3.10) и (3.11) получим

$$I(p) \geq \frac{1}{4} m \mathcal{E} \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2 - \left| \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{q}_k \bar{q}_l b_{kl} \right|, \quad (3.16)$$

затем, применяя ко второму члену правой части (3.16) неравенство Буняковского и опираясь на (3.15), найдем

$$\left| \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{q}_k \bar{q}_l b_{kl} \right| \leq \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{q}_k^2 \bar{q}_l^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} b_{kl}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2 \cdot \frac{1}{8} m \mathcal{E}. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) выводим *)

$$I(p) \geq \frac{1}{8} m \mathcal{E} \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2. \quad (3.18)$$

Поэтому из (3.9) и (3.18)

$$A^2 m \mathcal{E} \geq \frac{1}{8} m \mathcal{E} \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2,$$

т. е.

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2 \leq 8 A^2,$$

иначе говоря, вспоминая определение \bar{q}_k ,

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2 R_{n_k}^2(p) \leq 8 A^2. \quad (3.19)$$

В частности, при любом целом K из (3.19) получаем

$$\sum_{k=\nu}^K \bar{q}_k^2 R_{n_k}^2(p) \leq 8 A^2 = B,$$

где B — постоянное.

*) Вспоминая определение I_p , мы видим, что (3.18) означает

$$\begin{aligned} & \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2 \int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + a_k) dx + \\ & + \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{q}_k \bar{q}_l \int_{\mathcal{E}} \cos(n_k x + a_k) \cos(n_l x + a_l) dx \geq \frac{1}{8} m \mathcal{E} \sum_{k=\nu}^{\infty} \bar{q}_k^2. \end{aligned} \quad (3.19^*)$$

Для окончания доказательства мы можем забыть, что такое $I(p)$, и помнить только, что для него справедливо (3.9), но формула (3.19) нам еще понадобится в будущем. Мы предпочитаем поэтому написать ее здесь в явном виде и подчеркнуть, что при ее выводе относительно чисел \bar{q}_k не делалось никаких дополнительных предположений.

В силу (3.5) имеем

$$R_m(p) = (\beta_{p1} + \beta_{p2} + \dots + \beta_{ps} + \dots) - (\beta_{p1} + \dots + \beta_{pm-1}),$$

а потому в силу условий, которым удовлетворяют матрицы T^* , имеем $R_m(p) \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$ и m любом.

Значит

$$\sum_{k=p}^K \varrho_k^2 \leq B,$$

а так как K любое, то отсюда следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2$, что и требовалось доказать.

Нам осталось избавиться от ограничения, которое мы наложили на матрицу $\|\beta_{pq}\|$, предположив, что в каждой ее строке лишь конечное число членов отлично от нуля.

С этой целью мы заметим, что так как

$$\sigma_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} S_q(x) \quad \text{для } x \in E,$$

то найдется такое $F_p \in E$, $mF_p > mE\left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right)$ и такое q_0 (зависящее от p), что, полагая,

$$\sigma_{pq_0}(x) = \sum_{q=1}^{q_0} \beta_{pq} S_q(x),$$

имеем

$$|\sigma_{pq_0}(x) - \sigma_p(x)| < \frac{1}{p} \quad \text{для } x \in F_p.$$

Ясно, что если

$$F = \prod_{p=1}^{\infty} F_p,$$

то

$$mF > \frac{1}{2} mE > 0$$

и на этом F функции $\sigma_{pq_0}(x)$ стремятся к конечному пределу при $p \rightarrow \infty$.

Если, кроме того, предположить q_0 выбранным так, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\beta_{p1} + \beta_{p2} + \dots + \beta_{pq_0}) = 1,$$

то мы видим, что ряд суммируем методом T^* с матрицей $\|\beta_{pq}^*\|$, где $\beta_{pq}^* = \beta_{pq}$ для $1 \leq q \leq q_0$ и $\beta_{pq}^* = 0$ для $q > q_0$. Таким образом, дело свелось к матрицам уже ранее рассмотренного вида, и доказательство окончено.

С л е д с т в и е. Если мы рассмотрим метод суммирования $(C, 1)$, то он удовлетворяет всем трем условиям Теплица, т.е. и подавно он является методом T^* . Из доказанной теоремы следует, что лакунарный ряд, у которого $\sum a_k^2 + b_k^2$ расходится, не может суммироваться этим методом на множестве меры больше нуля. Но так как всякий ряд Фурье почти всюду суммируем методом Фейера, то, значит, мы приходим к выводу:

Лакунарный ряд, у которого $\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty$, не может быть рядом Фурье.

Это же утверждение справедливо, если вместо лакунарности предполагать только, что последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (B_2) .

З а м е ч а н и е. Мы видели (см. Вводный материал, § 5), что взятие подпоследовательности есть также некоторый метод суммирования. Отсюда вытекает, что предыдущая теорема может быть усилена и высказана так:

Если для лакунарного ряда какая-нибудь подпоследовательность частных сумм сходится на множестве E , $mE > 0$, то $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$.

Следовательно, если у лакунарного ряда $\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty$, то любая подпоследовательность его частных сумм расходится почти всюду.

Объединяя теорему Зигмунда с ранее упомянутой теоремой Колмогорова (см. глава I, § 65), можем сказать, что справедлива

Т е о р е м а. *Если для лакунарного ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty,$$

то он сходится почти всюду; если же $\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty$, то он не только почти всюду расходится, но и не может суммироваться никаким методом T^ на множестве меры больше нуля; кроме того, он в этом случае не есть ряд Фурье.*

§ 4. Поведение суммы лакунарного ряда там, где она существует

Мы доказали в § 3, что лакунарный ряд расходится почти всюду, если

$$\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty.$$

Однако он не может всюду расходиться, если только его коэффициенты стремятся к нулю. Действительно, в § 66 главы I было доказано, что если у лакунарного ряда коэффициенты стремятся к нулю, то множество E точек, где он сходится, имеет мощность континуума во всяком интервале (a, b) , лежащем на $[0, 2\pi]$, и сумма ряда обладает свойством D на этом множестве*).

В § 8 (замечание 2) будут сделаны некоторые добавления к вопросу о поведении суммы лакунарного ряда на множестве, где она существует. Здесь мы отметим еще, что если $a_k \rightarrow 0$ и $b_k \rightarrow 0$, но

$$\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty,$$

то ряд, получающийся интегрированием лакунарного ряда, изображает гладкую функцию, у которой нет производной почти всюду.

Действительно, мы знаем (см. глава I, § 66, замечание к теореме 3), что для лакунарного ряда с $a_k \rightarrow 0$ и $b_k \rightarrow 0$ множество точек, где ряд сходится, совпадает с множеством точек, где сумма обынтегрированного ряда имеет производную. Таким образом, мы убеждаемся в существовании гладких функций, лишенных производной почти всюду.

Например, ряд

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \cos 2^n x$$

*) Свойство D было определено в § 66 главы I.

расходится почти всюду и после его интегрирования получаем гладкую функцию

$$F(x) = \sum \frac{1}{2^n |n|} \sin 2^n x,$$

которая почти всюду лишена производной.

§ 5. Степень суммируемости функций, определяемых лакунарными рядами Фурье

Мы видели (§ 3), что если лакунарный ряд есть ряд Фурье от некоторой $f(x)$, то $f(x) \in L^2$. Но этот результат можно усилить, доказав теорему:

Теорема. Если лакунарный ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_n \sin n_k x$$

есть ряд Фурье от функции $f(x)$, то для любого $q > 1$ имеем $f(x) \in L^q$.

Докажем, что это верно для $q = 2r$, где r — любое целое, тогда это будет верно при всяком q (так как если $p > q$ и $f(x) \in L^p$, то и подавно $f(x) \in L^q$).

Мы уже знаем, что $f(x) \in L^2$, значит,

$$\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty.$$

Не нарушая общности, можно доказывать теорему, считая

$$\sum a_k^2 + b_k^2 = 1.$$

Положим

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} \quad (c_k = a_k - ib_k)$$

и будем доказывать, что если $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$ и $\sum |c_k|^2 = 1$, то при любом R , $0 \leq R < 1$, имеем

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(Re^{ix})|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C_q,$$

где C_q зависит только от q . Замечая, что всякий ряд Фурье почти всюду суммируется методом Абеля, применяя лемму Фату и пользуясь тем, что $f(x)$ есть действительная часть от $F(e^{ix})$, мы получим нужный результат.

Мы уже говорили, что достаточно предполагать $q = 2r$. Если мы обозначим

$$g(z) = [F(z)]^r = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} \right)^r,$$

то

$$g(z) = \sum \gamma_l z^{m_l},$$

причем каждый показатель m_l имеет вид

$$m_l = a n_{k_1} + b n_{k_2} + \dots, \quad (5.1)$$

где a, b, \dots — целые числа и $a + b + \dots = r$, а k_1, k_2, \dots мы можем расположить так, чтобы $k_1 > k_2 > \dots$.

Допустим сначала, что $\lambda \geq r + 1$. Тогда в силу свойства 5 лакунарных последовательностей (см. § 2) всякое натуральное число можно записать в форме (5.1) не более чем одним способом.

Итак, если $\lambda \geq r + 1$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|^{2r} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(Re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |\gamma_l|^2 R^{2m_l},$$

где, если m_l задано формулой (5.1), то только одним способом, и при этом

$$\gamma_l = \frac{r!}{a! b! \dots} c_{k_1}^a c_{k_2}^b \dots$$

Так как

$$|\gamma_l|^2 \leq r! \frac{r!}{a! b! \dots} |c_{k_1}|^{2a} |c_{k_2}|^{2b} \dots,$$

то мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|^{2r} d\theta \leq r! \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 R^{2n_k} \right)^r \leq r! \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^r = r!,$$

так как мы предположили $\sum |c_k|^2 = 1$.

Итак, для случая $\lambda \geq r + 1$ теорема уже доказана. В общем случае мы, пользуясь свойством 2 (§ 2), разложим ряд, определяющий $F(z)$, на конечное число, пусть s , лакунарных, для каждого из которых соответствующее $\lambda \geq r + 1$. Тогда

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_s,$$

$$|F|^{2r} \leq (|F_1| + \dots + |F_s|)^{2r} \leq s^{2r} (|F_1|^{2r} + \dots + |F_s|^{2r})$$

и, значит,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|^{2r} d\theta \leq r! s^{2r},$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

§ 6. Непрерывные функции с лакунарными рядами Фурье

Начнем с напоминания теоремы

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна и имеет лакунарный ряд Фурье, то этот ряд сходится равномерно.

Эта теорема (даже в несколько более общей форме) была уже доказана в § 65 главы I (следствие 1).

Правда, в § 7 будет доказано гораздо более сильное утверждение (теорема Сидона), но оно требует сложного доказательства, тогда как сформулированный результат был получен совсем элементарно.

Теперь заметим, что для лакунарных рядов легко установить тесную связь между модулем непрерывности функции и порядком ее коэффициентов Фурье. Например, мы имеем такую теорему:

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(x)$, у которой ряд Фурье является лакунарным, принадлежала классу $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье имели порядок $O(n^{-\alpha})$.

Необходимость условия имеет место даже тогда, когда ряд Фурье не является лакунарным. Действительно, мы знаем (см. глава I, § 21), что если $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности нашей функции, то

$$|a_n| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{и} \quad |b_n| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (6.1)$$

а так как для функции, удовлетворяющей условию Липшица порядка α , имеем

$$\omega(\delta) = O(\delta^\alpha),$$

то

$$a_n = O(n^{-\alpha}) \quad \text{и} \quad b_n = O(n^{-\alpha}).$$

Для доказательства достаточности напомним

$$f(x) = \sum \alpha_k \cos n_k x + \beta_k \sin n_k x. \quad (6.2)$$

В силу нашего условия

$$\alpha_k = O(n_k^{-\alpha}), \quad \beta_k = O(n_k^{-\alpha}), \quad (6.3)$$

так как $\alpha_k = a_{n_k}$ и $\beta_k = b_{n_k}$.

Так как ряд (6.2) сходится и даже равномерно, мы можем написать

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\cos n_k(x+h) - \cos n_k x] + \beta_k [\sin n_k(x+h) - \sin n_k x].$$

Выберем теперь для любого h число N так, чтобы

$$\frac{1}{n_{N+7}} \leq |h| < \frac{1}{n_N}. \quad (6.4)$$

Тогда напомним

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=1}^N \alpha_k [\cos n_k(x+h) - \cos n_k x] + \\ &\quad + \beta_k [\sin n_k(x+h) - \sin n_k x] + \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k [\cos n_k(x+h) - \cos n_k x] + \beta_k [\sin n_k(x+h) - \sin n_k x] = P + Q \end{aligned}$$

и оценим P и Q отдельно.

В силу теоремы о конечном приращении из (6.3) имеем

$$\alpha_k [\cos n_k(x+h) - \cos n_k x] \leq 2(\alpha_k |n_k| |h|) \leq 2 \frac{C}{n_k^\alpha} n_k |h| = 2C n_k^{1-\alpha} |h|$$

и аналогично для членов, содержащих синусы.

Тогда в силу определения лакунарности

$$|P| \leq 4C |h| \sum_{k=1}^N n_k^{1-\alpha} = O(n_N^{1-\alpha}) |h|$$

и в силу (6.4)

$$|P| = O(|h|^{a-1} |h|) = O(|h|^a).$$

Для Q оценка такова

$$|Q| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|) < 4C \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{n_k^\alpha} = O\left(\frac{1}{n_{N+1}^\alpha}\right) = O(|h|^a)$$

опять в силу (6.4), и теорема доказана.

§ 7. Абсолютная сходимость лакунарных рядов

Мы видели в § 5, что если лакунарный ряд есть ряд Фурье, то его сумма $f(x) \in L^p$, где p — любое.

Возникает вопрос, не должна ли $f(x)$ быть ограниченной?

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Действительно, мы докажем теорему (Szidon [2], [3]):

Т е о р е м а С и д о н а. *Если лакунарный ряд есть ряд Фурье от ограниченной функции, то он сходится абсолютно.*

Отсюда сразу следует, что если $\sum |a_k| + |b_k| = +\infty$, то $f(x)$ не может быть ограниченной функцией (хотя она и входит в L^p при любом p).

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала лакунарный ряд из одних косинусов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x,$$

являющийся рядом Фурье от функции $f(x)$, причем

$$|f(x)| \leq M.$$

В силу свойства 2 (см. § 2) можно разбить наш лакунарный ряд на r лакунарных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kr+i} \cos n_{kr+i} x \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

причем степень лакунарности каждой из последовательностей $\{L_i\} = \{n_{kr+i}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) как угодно велика. В силу свойства 6 можно считать эти последовательности такими, что если $p \neq 1$, $l_1 > l_2 > \dots > l_p$ и все эти l_m принадлежат одной из последовательностей $\{L_i\}$, то для любого ν вида

$$\nu = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_p \quad (7.1)$$

имеем $\nu \neq n_k$ ни при каком k .

Для сокращения записи положим при фиксированном i

$$a_{kr+i} = a_k, \quad n_{kr+i} = m_k$$

и будем доказывать, что

$$\sum |a_n| < +\infty$$

Если мы сумеем это сделать при любом i , то отсюда будет следовать и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty.$$

Рассмотрим вспомогательный тригонометрический полином

$$T_q(x) = \prod_{k=1}^q (1 + \varepsilon_k \cos m_k x),$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$. Ясно, что он неотрицателен и, если написать его в развернутом виде, то

$$T_q(x) = 1 + \sum_{k=1}^q \varepsilon_k \cos m_k x + \sum A_\nu \cos \nu x,$$

где всякое ν имеет вид

$$\nu = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_p,$$

причем $p \neq 1$, а числа l_i все принадлежат рассматриваемой последовательности $\{m_k\}$ и их можно расположить в порядке убывания. Действительно, произведение косинусов всегда можно преобразовать в сумму косинусов,

причем коэффициенты при x под знаком косинуса складываются или вычитаются.

Мы уже отмечали, что никакое из чисел вида (7.1) не может совпасть с каким-либо n_k . Заметив это, положим $\varepsilon_k = \operatorname{sign} a_k$ и покажем, что тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) T_q(x) dx = \sum_{k=1}^q |a_k|. \quad (7.2)$$

Действительно, в силу равенства Парсеваля, интеграл в левой части (7.2) должен равняться сумме парных произведений коэффициентов Фурье для $f(x)$ и $T_q(x)$. Но у $f(x)$ свободный член равен нулю и коэффициенты при $\cos jx$ отличны от нуля лишь при $j = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$), а у $T_q(x)$ числа ν , для которых $A_\nu \neq 0$, заведомо не имеют вид $\nu = n_k$, поэтому отличны от нуля лишь те произведения, где n_k равно некоторому m_j , а тогда $a_k = a_j$ и в то же время $\varepsilon_j = \operatorname{sign} a_j$, поэтому равенство (7.2) справедливо.

Но тогда, так как $T_q(x) \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^q |a_k| \leq M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_q(x) dx = 2M,$$

потому что свободный член у $T_q(x)$ равен 1.

Так как это неравенство справедливо при любом q , то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$.

Если бы мы рассмотрели ряд из одних синусов, то надо было бы построить полином $T_q(x)$, в котором вместо косинусов стояли бы синусы, тогда мы также доказали бы, что лакунарный ряд

$$\sum b_k \sin n_k x$$

от ограниченной функции удовлетворяет условию

$$\sum |b_k| < +\infty.$$

Наконец, в общем случае мы можем рассмотреть две функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Каждая из них ограничена, если $f(x)$ ограничена, и у каждой из них ряд лакунарный. Значит, к ним приложимы предыдущие рассуждения, а тогда они верны и в общем случае.

З а м е ч а н и е 1. Теорема Сидона сохраняет силу и тогда, когда $f(x)$ ограничена только с одной стороны, т. е. $f(x) \leq M$ или $f(x) \geq -M$. Это можно получить из теоремы Зигмунда, которую мы докажем в § 8.

З а м е ч а н и е 2. Теорему Сидона можно доказать в предположениях более широких, чем требование лакунарности последовательности $\{n_k\}$. Прежде всего, сам Сидон (Szidon^[8]) перенес ее на случай, когда $\{n_k\}$ можно разбить на конечное число лакунарных последовательностей. Дальнейшее продвижение в этом вопросе принадлежит Стечкину^[7]. Чтобы сформулировать его результаты, введем некоторые обозначения.

Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть $P_s(n)$ — число различных представлений целого n в форме

$$n = \sum_{j=1}^s \varepsilon_j n_{k_j}, \quad (7.3)$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$ ($j = 1, 2, \dots$), $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_s$.

Если мы положим

$$P_s = \sup_n P_s(n),$$

то для некоторых s не исключено, что $P_s = +\infty$. Если же P_s конечно, то говорят, что $\{n_k\}$ обладает свойством (B_s) (мы уже упоминали об этом в § 2).

Стечкин изучает тот случай, когда для любого s последовательность $\{n_k\}$ обладает свойством (B_s) . Более того, он требует, чтобы

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P_s < +\infty \quad (7.4)$$

и говорит, что последовательность N принадлежит классу R , если выполнено условие (7.4).

Разумеется, это условие (7.4) выполнено, в частности, если все P_s ограничены в совокупности. Как показал Ф. Рисс (F. Riesz [1]), если последовательность $\{n_k\}$ «достаточно редкая», то именно этот случай и имеет место. Точнее, если

$$2 \sum_{k=1}^p n_k < n_{p+1} \quad (p = 1, 2, \dots),$$

то для любого s представление n в форме (7.3) возможно только одним способом. Действительно, если

$$\sum_{j=1}^s \varepsilon_j n_{k_j} = \sum_{j=1}^s \varepsilon'_j n_{k'_j}, \quad (\varepsilon_j \neq \varepsilon'_j)$$

то мы имеем

$$\sum_{j=1}^{s_0} \eta_j n_{l_j} = 0 \quad (s \leq s_0 \text{ и } \eta_{s_0} \neq 0),$$

где каждое η_j может принимать лишь значения $0, \pm 1, \pm 2$ и $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{s_0}$. Но это невозможно, так как в силу (7.5)

$$\left| \sum_{j=1}^{s_0} \eta_j n_{l_j} \right| \geq |\eta_{s_0} n_{l_{s_0}}| - \sum_{j=1}^{s_0-1} |\eta_j n_{l_j}| \geq n_{l_{s_0}} - 2 \sum_{k=1}^{l_{s_0}-1} n_k > 0.$$

В частности, если последовательность лакунарная и

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda \geq 3,$$

то условие (7.5) выполняется, ибо

$$2 \sum_{k=1}^p n_k = 2 n_{p+1} \sum_{k=1}^p \frac{n_k}{n_{p+1}} \leq 2 n_{p+1} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda^{p+1-k}} < \frac{2}{\lambda-1} n_{p+1} \leq n_{p+1}.$$

Можно показать, что существуют последовательности, входящие в класс R , но такие, что их нельзя представить в виде конечного числа лакунарных последовательностей.

Если $N = \{n_k\}$ может быть разложена на конечное число последовательностей, каждая из которых входит в класс R , то мы будем говорить, что $N \in R_\sigma$.

Стечкин доказывает, что любая последовательность, разлагающаяся на конечное число лакунарных, принадлежит R_σ , и что если $N \in R_\sigma$, то

для нее имеет место теорема, аналогичная теореме Сидона, т. е. если $f(x)$ ограничена сверху и ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где $N = \{n_k\}$ принадлежит (R_σ) , то этот ряд сходится абсолютно.

Наконец, в той же работе С. Б. Стечкин ставил вопрос, при каких условиях, наложенных на последовательность $\{n_k\}$, из непрерывности функции $f(x)$ следует абсолютная сходимость ее ряда Фурье, если этот ряд имеет вид (7.6). Оказывается, что для этого необходимо, чтобы

$$n_k \geq C \gamma^k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $C > 0$ и $\gamma > 1$, т. е. последовательность $\{n_k\}$ растет не медленнее некоторой возрастающей геометрической прогрессии. В частности, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

то одной непрерывности $f(x)$ уже заведомо недостаточно для абсолютной сходимости ряда (7.6).

§ 8. Теорема Зигмунда

Теорему Сидона можно усиливать и в другом направлении, именно можно рассматривать вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ некоторый интервал I . Здесь имеет место теорема (Zygmund [6]):

Теорема Зигмунда. *Если в каждой точке некоторого интервала I верхний и нижний пределы частных сумм лакунарного ряда конечны, то этот ряд сходится абсолютно.*

Прежде всего заметим, что тогда найдется такой интервал (α, β) , содержащийся в I , на котором

$$|S_n(x)| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.1)$$

Действительно, пусть $F_i^{(k)}$ — множество тех $x \in I$, где $|S_i(x)| \leq k$; ясно, что $F_i^{(k)}$ замкнуто, следовательно, замкнуто и $F^{(k)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)}$, кроме

того, $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{(k)}$. Таким образом, хотя бы одно из $F^{(k)}$ плотно на некотором интервале, иначе их сумма была бы первой категории на I . Но тогда $F^{(k)}$ содержит отрезок, так как F_k замкнуто.

Далее заметим, что если вместо заданного лакунарного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos(n_k x + x_k), \quad q_k \geq 0 \quad (8.2)$$

рассмотреть ряд

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} q_k \cos(n_k x + x_k), \quad (8.3)$$

то их абсолютная сходимость имеет место одновременно, и если для ряда (8.2) справедливо неравенство (8.1) на некотором интервале (α, β) , то и для (8.3) справедливо аналогичное неравенство на том же (α, β) , если только M заменить на некоторое M_1 . Но в ряде (8.3) наименьшее из чисел n_k есть n_{k_0} и его можно сделать как угодно большим. Поэтому, не нарушая общности, мы можем (чтобы не менять обозначений) предположить сразу n_1 настолько

большим, насколько это нам понадобится, и вместо константы M_1 снова писать M .

Так как доказательство теоремы, предложенное Зигмундом, достаточно сложно, мы разобьем его на несколько этапов.

Сначала мы выберем число ε так, чтобы

$$\varepsilon < \frac{\lambda - 1}{2(\lambda + 1)}, \quad (8.4)$$

и его фиксируем; заметим, что оно зависит только от λ . Далее возьмем μ так, чтобы

$$\mu > \frac{2}{1 - 2\varepsilon}, \quad (8.5)$$

и, кроме того,

$$\frac{1}{\mu - 1} < \varepsilon. \quad (8.6)$$

В силу свойства 2 (§ 2) можно $\{n_k\}$ разбить на лакунарные последовательности (L_i) , у каждой из которых μ удовлетворяет условиям (8.5) и (8.6). Кроме того, в силу (8.6) эти последовательности будут таковы, что выполнено и свойство 6 (§ 2).

Рассмотрим вспомогательные полиномы

$$P_N^i(x) = \prod_{k=1}^N [1 + \cos(n_{i+kr}x + x_{i+kr})]. \quad (8.7)$$

Фиксируя i , положим для сокращения обозначений

$$m_k = n_{i+kr}, \quad a_k = x_{i+kr}$$

и

$$P_N(x) = \prod_{k=1}^N [1 + \cos(m_k x + a_k)]. \quad (8.8)$$

Начнем с оценки интегралов

$$\int_a^{\beta} P_N(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^{\beta} P_N(x) \cos(mx + a) dx,$$

где m — целое и a — действительное.

Будем помнить, что

$$\frac{m_{k+1}}{m_k} \geq \mu,$$

где μ удовлетворяет условиям (8.5) и (8.6).

Прежде всего заметим, что $P_N(x)$ можно записать в виде

$$P_N(x) = 1 + G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_N(x), \quad (8.9)$$

где $G_h(x)$ состоит из членов, каждый из которых представляет собой произведение h косинусов. В свою очередь, если расположить в порядке возрастания множители при x в тех косинусах, которые входят в группу $G_h(x)$, то можно написать

$$G_h(x) = G_{hh}(x) + G_{h,h+1}(x) + \dots + G_{hN}(x), \quad (8.10)$$

где в группу G_{hl} входят те члены, в которых максимальный множитель при x есть m_l . Каждый из членов группы G_{hl} после преобразования произведения

косинусов в сумму косинусов распадается на 2^{h-1} косинусов с коэффициентом $\frac{1}{2^{h-1}}$, а множители при x после этого преобразования имеют вид $\nu = m_l \pm m_i \pm \dots \pm m_1$, значит, в силу свойства 4 (§ 2) они принадлежат интервалу $(m_l \frac{\mu-2}{\mu-1}, m_l \frac{\mu}{\mu-1})$, а потому во всяком случае для таких ν всегда имеем

$$\nu \geq \frac{m_l}{2}.$$

Имеем для таких ν при любом a

$$\left| \int_a^\beta \cos(\nu x + a) dx \right| \leq \frac{2}{\nu} \leq \frac{4}{m_l} \quad (8.11)$$

для всех членов группы G_{hl} .

Из (8.9) и (8.10) заключаем, что

$$P_N(x) = 1 + \sum_{l=1}^N \sum_{h=1}^l G_{hl}. \quad (8.12)$$

Но при $h=1$ в группе G_{hl} только один член при всяком l , а при $h \geq 2$ (значит и $l \geq 2$) число членов равно $\binom{l-1}{h-1}$ (поскольку m_l закреплено, а предыдущие $h-1$ членов группы можно выбирать как угодно из числа $l-1$ тех m_i , которые предшествуют m_l). Поэтому окончательно G_{hl} распадается на $2^{h-1} \binom{l-1}{h-1}$ косинусов с коэффициентами, равными $\frac{1}{2^{h-1}}$, для каждого из которых справедлива оценка (8.11), а потому

$$\sum_{h=1}^l \int_a^\beta G_{hl}(x) dx \leq \frac{4}{m_l} + \sum_{h=2}^l 2^{h-1} \binom{l-1}{h-1} \frac{1}{2^{h-1}} \frac{4}{m_l} \leq 4 \frac{2^{l-1}}{m_l}, \quad (8.13)$$

а потому из (8.12) и (8.13) заключаем

$$\left| \int_a^\beta P_N(x) dx - (\beta - a) \right| \leq 4 \sum_{l=1}^N \frac{2^{l-1}}{m_l} < \frac{4}{m_1} \left(1 + \frac{2}{\mu} + \frac{2^2}{\mu^2} + \dots \right) = \frac{4}{m_1} \frac{\mu}{\mu-2}.$$

Так как мы имеем $m_1 \geq n_1$, а n_1 мы имеем право предполагать как угодно большим в силу замечания, сделанного в начале доказательства, то отсюда заключаем, что для любого $\eta > 0$, если только n_1 достаточно велико, имеем

$$\left| \int_a^\beta P_N(x) dx - (\beta - a) \right| < \eta. \quad (8.14)$$

Теперь мы будем оценивать интеграл

$$\int_a^\beta P_N(x) \cos(mx + a) dx.$$

При этом будем предполагать $m \in \{n_k\}$, так как остальные значения m впоследствии не понадобятся.

Будем различать два случая, а именно:

- а) $m \neq m_k$ ни при каком k ,
- б) $m = m_j$ для некоторого j .

В первом случае, если мы рассматриваем любой из членов вида $\cos(vx + b)$ из группы G_{hk} , мы имеем в силу свойства 6 нашей последовательности

$$|m - v| \geq C(\lambda) m_k,$$

а потому

$$\left| \int_a^\beta \cos(mx + a) \cos(vx + b) dx \right| \leq \frac{1}{m + v} + \frac{1}{|m - v|} \leq \frac{A(\lambda)}{m_k},$$

где $A(\lambda)$ — новая константа.

Отсюда, вспоминая величины коэффициентов и число членов в группе G_{hk} , заключаем

$$\left| \sum_{h=1}^k \int_a^\beta G_{hk} \cos(mx + a) dx \right| \leq \frac{A(\lambda)}{m_k} + \sum_{h=2}^k \binom{k-1}{h-1} 2^{h-1} \frac{1}{2^{h-1}} \frac{A(\lambda)}{m_k} \leq A(\lambda) \frac{2^k}{m_k}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_a^\beta \cos(mx + a) P_N(x) dx \right| \leq \frac{2}{m} + A(\lambda) \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{m_k} \leq \frac{2}{m} + \frac{2A(\lambda)}{m_1} \frac{\mu}{\mu - 2} < \eta,$$

где η можно сделать как угодно малым, если n_1 достаточно велико, так как $m = n_q \geq n_1$, а остальные величины фиксированы. Итак,

$$\left| \int_a^\beta \cos(mx + a) P_N(x) dx \right| < \eta, \quad (8.15)$$

где η как угодно мало, если $m \neq m_k$, а числа m_k входят в определение $P_N(x)$.

Наконец, рассмотрим, что будет, если $m = m_j$, где $1 \leq j \leq N$. Положим тогда

$$P_N^*(x) = \prod_{k=1}^N (1 + \cos(m_k x + \alpha_k)),$$

где знак \prod означает, что пропущен член, где $k = j$. Имеем

$$P_N(x) = (1 + \cos(m_j x + \alpha_j)) P_N^*(x).$$

Ясно, что для $P_N^*(x)$ оценки (8.14) и (8.15) не перестанут быть верны. Но

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \cos(m_j x + \alpha_j) P_N(x) dx &= \int_a^\beta P_N^*(x) \cos(m_j x + \alpha_j) dx + \\ &+ \int_a^\beta P_N^*(x) \cos^2(m_j x + \alpha_j) dx = \int_a^\beta P_N^*(x) \cos(m_j x + \alpha_j) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^\beta P_N^*(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^\beta P_N^*(x) \cos(2m_j x + 2\alpha_j) dx. \end{aligned} \quad (8.16)$$

На основании (8.14) имеем

$$\left| \frac{1}{2} \int_a^\beta P_N^*(x) dx - \frac{\beta - \alpha}{2} \right| < \frac{\eta}{2}. \quad (8.17)$$

Далее, так как m_j не фигурирует в $P_N^*(x)$, то из (8.15) заключаем

$$\left| \int_a^\beta P_N^*(x) \cos(m_j x + \alpha_j) dx \right| < \eta. \quad (8.18)$$

Наконец, так как μ удовлетворяет условию (8.5), то

$$m_{j-1}(1+2\varepsilon) \leq 2m_j \leq m_{j+1}(1-2\varepsilon).$$

Таким образом, $2m_j$ лежит вне всех интервалов $(m_k(1+2\varepsilon), m_{k+1}(1-2\varepsilon))$, если m_k любое из чисел, фигурирующих в $P_N^*(x)$ (само m_j в нем не фигурирует!), поэтому к третьему из интегралов в правой части (8.16) применима оценка (8.15), и мы находим

$$\left| \frac{1}{2} \int_a^\beta P_N^*(x) \cos(2m_j x + 2a_j) dx \right| < \frac{\eta}{2}. \quad (8.19)$$

Соединяя (8.16), (8.17), (8.18) и (8.19), получаем

$$\left| \int_a^\beta \cos(m_j x + a_j) P_N(x) dx - \frac{\beta - a}{2} \right| < 2\eta. \quad (8.20)$$

Вернемся теперь к нашему лакунарному ряду и возьмем частную сумму его с числом членов Nr , где N произвольно, а r — число лакунарных последовательностей (L_i) , на которые мы разбили $\{n_k\}$. Мы можем написать

$$S_{Nr}(x) = \sum_{k=1}^{Nr} e_k \cos(n_k x + x_k) = \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{N-1} e_{s+jr} \cos(n_{s+jr} x + x_{s+jr}). \quad (8.21)$$

Оценим интеграл

$$\int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx, \quad (8.22)$$

где $P_N^{(i)}(x)$ определено формулой (8.7), а (a, β) — тот интервал, где выполнено (8.1).

С одной стороны, так как при любом i полином $P_N^{(i)}(x) \geq 0$, имеем в силу (8.1) и (8.14)

$$\left| \int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx \right| \leq M \int_a^\beta P_N^{(i)}(x) dx \leq M(\beta - a + \eta) \leq (2\pi + \eta)M,$$

а потому

$$\left| \sum_{i=1}^r \int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx \right| \leq (2\pi + \eta)Mr. \quad (8.23)$$

С другой стороны,

$$\int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx = \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{N-1} e_{s+jr} \int_a^\beta \cos(n_{s+jr} x + x_{s+jr}) P_N^{(i)}(x) dx. \quad (8.24)$$

Интегралы, входящие в правую часть (8.24), при $s \neq i$ оцениваются по формуле (8.15), т. е. каждый из них по модулю меньше η , а для $s = i$ эти интегралы оцениваются по формуле (8.20), т. е. каждый такой интеграл по модулю отличается от $\frac{\beta - a}{2}$ меньше чем на 2η , откуда

$$\int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx > \sum_{\substack{j=0 \\ s \neq i}}^{N-1} e_{i+jr} \left(\frac{\beta - a}{2} - 2\eta \right) - \eta \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^r \sum_{j=0}^{N-1} e_{s+jr}$$

и тем более

$$\begin{aligned} \int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx &> \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \varrho_{i+jr} - 2\eta \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{N-1} \varrho_{s+jr} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \varrho_{i+jr} - 2\eta \sum_{k=1}^{Nr} \varrho_k. \end{aligned}$$

Суммируя теперь по i , находим

$$\sum_{i=r}^r \int_a^\beta S_{Nr}(x) P_N^{(i)}(x) dx > \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{k=1}^{Nr} \varrho_k - 2\eta r \sum_{k=1}^{Nr} \varrho_k > \frac{\beta - \alpha}{4} \sum_{k=1}^{Nr} \varrho_k, \quad (8.25)$$

если выбрать $\eta < \frac{\beta - \alpha}{8r}$.

Сопоставляя (8.25) и (8.23), видим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k < +\infty,$$

а это и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. Доказанная теорема Зигмунда сохраняет силу, если существует такой интервал I , в каждой точке которого

$$\text{либо } \overline{\lim} S_n(x) < +\infty, \text{ либо } \underline{\lim} S_n(x) > -\infty. \quad (8.26)$$

Действительно, прежде всего покажем, что тогда найдется интервал (α, β) , где

$$S_n(x) \leq M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8.27)$$

или же где

$$S_n(x) \geq -M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.28)$$

В самом деле, пусть E' и E'' — множества тех точек, где $\overline{\lim} S_n(x) < +\infty$ и соответственно $\underline{\lim} S_n(x) > -\infty$. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы Зигмунда, показываем, что

$$E' = F_1 + F_2 + \dots \quad \text{и} \quad E'' = F_1^* + F_2^* + \dots,$$

где все множества F_n и F_n^* замкнуты. Если бы E' и E'' оба были первой категории, то их дополнения CE' и CE'' должны были бы пересекаться, т. е. нашлась бы на I точка, где $\overline{\lim} S_n(x) = +\infty$ и $\underline{\lim} S_n(x) = -\infty$, что противоречит гипотезе. Итак, либо E' , либо E'' не первой категории, а тогда хоть одно из множеств F_n или F_n^* содержит интервал, а на нем либо (8.27), либо (8.28) имеет место.

Теперь, обращаясь к концу доказательства теоремы, мы видим, что условие $|S_n(x)| \leq M$ не было полностью использовано, а только учитывалось, что $S_n(x) \leq M$; значит, при выполнении (8.27) теорема доказана. Случай (8.28) сводится к случаю (8.27), если у всех коэффициентов ряда переменить знаки на обратные.

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что если для лакунарного ряда $a_k \rightarrow 0$ и $b_k \rightarrow 0$, но

$$\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty, \quad (8.29)$$

то для любого S во всяком интервале $(a, b) \in [0, 2\pi]$ можно найти точку, где ряд сходится к числу S .

Действительно, из (8.29) и подавно следует

$$\sum |a_k| + |b_k| = +\infty. \quad (8.30)$$

Отсюда вытекает, что в любом интервале $(a, b) \in [0, 2\pi]$ найдутся точки ξ , где

$$\overline{\lim} S_n(\xi) = +\infty, \quad \underline{\lim} S_n(\xi) = -\infty. \quad (8.31)$$

Так как иначе, в силу предыдущего замечания, мы пришли бы к противоречию с (8.30). Следовательно, множество E точек ξ , где выполнено (8.31), всюду плотно на $[0, 2\pi]$. Но так как к лакунарному ряду с коэффициентами, стремящимися к нулю, применима теорема 3 § 66 главы I, то для суммы $F(x)$ обынтегрированного ряда в точке ξ , где выполнено (8.31), выражение

$$\frac{F(\xi + h) - F(\xi - h)}{2h}$$

при $h \rightarrow 0$ колеблется между $-\infty$ и $+\infty$. Пусть S —любое число. Найдется последовательность $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ такая, что

$$\frac{F(\xi + h_n) - F(\xi - h_n)}{2h_n} = S,$$

а потому по теореме Лагранжа найдутся такие θ_n , $-1 < \theta_n < +1$, что $F'(\xi + \theta_n h_n) = S$. Но так как в любой точке x , где $F'(x)$ существует, ряд сходится и $S(x) = F'(x)$, то

$$S(\xi + \theta_n h_n) = S \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы уже отметили, что множество E точек, где выполнено (8.31), всюду плотно, а $\xi + \theta_n h_n$ как угодно близко к ξ , поэтому в любом интервале (a, b) найдется точка, где ряд сходится к числу S .

Мы знаем, что если $\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty$, то лакунарный ряд почти всюду расходится. Тем не менее, как мы видим, он должен сходиться на всюду плотном множестве и притом для любого S всегда есть точка, где он сходится к числу S .

С л е д с т в и е. Мы видели (см. глава I, § 63), что существуют ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, но расходящиеся всюду. Теперь ясно, что такие ряды не могут быть лакунарными.

З а м е ч а н и е 3. Теорему Сидона можно было бы вывести из теоремы Зигмунда, рассуждая следующим образом: рассмотрим фейеровские суммы ряда Фурье от $f(x)$. Если $|f(x)| \leq M$, то и $|\sigma_n(x)| \leq M$. Но для любого ряда $u_1 + u_2 + \dots$ имеем

$$S_n - \sigma_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n+1}.$$

В случае лакунарного ряда (где при вычислении фейеровских сумм надо заменять нулями отсутствующие члены) имеем

$$|S_N - \sigma_N| \leq \frac{n_1 \varrho_1 + n_2 \varrho_2 + \dots + n_N \varrho_N}{n_N} \leq \varrho_N + \frac{1}{\lambda} \varrho_{N-1} + \dots + \frac{1}{\lambda^{N-1}} \varrho_1. \quad (8.32)$$

Покажем, что правая часть (8.32) стремится к нулю. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Так как $\varrho_n \rightarrow 0$, то найдется такое n_0 , что $\varrho_n < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, а тогда

$$\varrho_N + \frac{1}{\lambda} \varrho_{N-1} + \dots + \frac{1}{\lambda^{N-n_0}} \varrho_{n_0} < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \dots \right) < \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda-1},$$

кроме того, так как $\varrho_n \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$\frac{\varrho_1}{\lambda^{N-1}} + \dots + \frac{\varrho_{n_0-1}}{\lambda^{N-n_0+1}} < C \left(\frac{1}{\lambda^{N-n_0+1}} + \frac{1}{\lambda^{N-n_0+2}} + \dots \right) < C \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda^{N-n_0-1}}.$$

Значит, $|S_N - \sigma_N|$ может быть сделано как угодно малым с ростом N , а потому из $|\sigma_n(x)| \leq M$ следует, что и $|S_n(x)|$ ограничены в совокупности, т. е. выполнены условия теоремы Зигмунда.

З а м е ч а н и е 4. В теореме Зигмунда предположение о сходимости на интервале нельзя заменить сходимостью на множестве положительной меры. Действительно, если взять последовательность чисел a_n и b_n так, что $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$, но $\sum |a_k| + |b_k| = +\infty$, то ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

есть лакунарный ряд, сходящийся почти всюду, но не сходящийся абсолютно.

Однако требование сходимости на интервале можно заменить требованием сходимости на множестве 2-й категории, как мы увидим в § 9.

§ 9. Лакунарные ряды, сходящиеся на множестве не первой категории

Из предыдущей теоремы можно сделать следующий вывод, принадлежащий Стечкину*):

Т е о р е м а. Если лакунарный ряд имеет конечные пределы неопределенности на множестве не первой категории, то он сходится абсолютно.

Действительно, мы уже говорили (см. § 8, замечание 1), что множество E тех точек, где $\lim S_n(x) < +\infty$, можно представить в виде

$$E = \sum E_p,$$

где E_p — множество тех x , при которых $S_n(x) \leq p$ ($n = 1, 2, \dots$), и каждое из этих E_p замкнуто. Значит, если бы E_p были все нигде не плотны, то E было бы первой категории. Итак, хотя бы одно E_p плотно, а потому содержит отрезок. Тогда применяем теорему Зигмунда и видим, что ряд сходится абсолютно.

§ 10. Теорема Эрдеша

Мы видели (см. глава I, § 65), что если для лакунарного ряда

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \tag{10.1}$$

выполнено условие $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$, то он сходится почти всюду (теорема А. Н. Колмогорова). Дадим теперь обобщение этой теоремы (Erdős [1]).

Т е о р е м а Э р д е ш а. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (B_2) и если $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$, то ряд (10.1) сходится почти всюду.

Так как было доказано (см. § 2), что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (B_2) , то теорема Эрдеша является прямым обобщением теоремы Колмогорова.

Для доказательства этой теоремы мы, прежде всего, докажем лемму, принадлежащую Сидону (Szidon [4]).

*) См. комментарий 91 к книге Н. Н. Лузина [м. 10].

Лемма Сидона. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (B_2) , то для всякого тригонометрического полинома

$$T(x) = \sum_{k=1}^m a_k \cos n_k x \quad \text{или} \quad T(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin n_k x$$

имеем неравенство

$$\int_0^{2\pi} T^4(x) dx \leq C \left(\int_0^{2\pi} T^2(x) dx \right)^2,$$

где C — константа, не зависящая ни от порядка полинома, ни от его коэффициентов.

Доказательство. Имеем

$$\left(\int_0^{2\pi} T^2(x) dx \right)^2 = \left(\pi \sum_{k=1}^m a_k^2 \right)^2 = \pi^2 \left(\sum_{k=1}^m a_k^4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sum_{j=1}^m a_k^2 a_j^2 \right). \quad (10.2)$$

С другой стороны, если для $T^2(x)$ обозначить через A_k коэффициенты Фурье, то

$$\int_0^{2\pi} T^4(x) dx = \int_0^{2\pi} [T^2(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum A_p^2 \right]. \quad (10.3)$$

Вычислим числа A_p ; имеем

$$\begin{aligned} T^2(x) &= \left(\sum_{k=1}^m a_k \cos n_k x \right)^2 = \sum_{k=1}^m a_k^2 \cos^2 n_k x + \sum_{k \neq j} a_k a_j \cos n_k x \cos n_j x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m a_k^2 \cos 2n_k x + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} a_k a_j \cos (n_k + n_j) x + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_k a_j \cos (n_k - n_j) x. \end{aligned}$$

Очевидно, что A_0^2 меньше правой части (10.2); теперь оценим A_p^2 для $p \neq 0$.

Так как A_p есть коэффициент при $\cos px$, то каждый раз, как

$$p = n_k + n_j \quad (10.4)$$

или

$$p = |n_k - n_j| \quad (10.5)$$

для каких-то k и j , мы должны брать $\frac{1}{2} a_k a_j$ в качестве одного из слагаемых, составляющих A_p ; иначе говоря,

$$A_p = \frac{1}{2} \sum_{k,j} a_k a_j, \quad (10.6)$$

где суммирование распространяется на те k и j , для которых выполнено (10.4) или (10.5).

Но в силу того, что $\{n_k\}$ обладает свойством (B_2) , найдется не более чем s способов, при помощи которых p можно представить в форме (10.4) или (10.5), где s не зависит от p ; поэтому число слагаемых в каждой из сумм, входящих в (10.6), не превосходит s . Поэтому

$$\left(\sum_{k,j} a_k a_j \right)^2 \leq s \sum_{k,j} a_k^2 a_j^2,$$

где снова $|n_k \pm n_j| = p$ и, следовательно,

$$\sum_{p=1}^m A_p^2 \leq s \sum_{k=1}^m a_k^2 \sum_{j=1}^m a_j^2. \quad (10.7)$$

Отсюда ясно, что правая часть равенства (10.3) не превосходит константу, умноженную на правую часть равенства (10.2), и это заканчивает доказательство.

Случай синусов совершенно аналогичен, так как

$$2 \sin kx \sin jx = \cos(k-j)x - \cos(k+j)x.$$

Итак, лемма Сидона доказана.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Эрдеша, нам понадобится еще одна лемма.

Л е м м а 2. Пусть дан тригонометрический полином

$$P(x) = a_m \cos mx + \dots + a_n \cos nx,$$

где $A(P) = a_m^2 + a_{m+1}^2 + \dots + a_n^2 = \varepsilon$.

Мы всегда можем разбить $P(x)$ на два слагаемых

$$P(x) = a_m \cos mx + \dots + a_{l-1} \cos(l-1)x + a_l' \cos lx + \\ + a_l'' \cos lx + \dots + a_n \cos nx,$$

где $a_l' + a_l'' = a_l$, так, чтобы удовлетворялись условия

$$a_m^2 + \dots + (a_l')^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}; \quad (a_l'')^2 + \dots + a_n^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (10.8)$$

и

$$|a_l'| \leq |a_l|, \quad |a_l''| \leq |a_l|. \quad (10.9)$$

Доказательство*). Если существует такое q , что

$$\sum_{k=1}^q a_k^2 = \sum_{q+1}^n a_k^2 = \frac{\varepsilon}{2},$$

то достаточно положить $l = q + 1$, $a_{q+1}' = 0$, $a_{q+1}'' = a_{q+1}$, и лемма доказана. Если этого нет, то найдется такое l , что

$$a_m^2 + \dots + a_{l-1}^2 < \frac{\varepsilon}{2} < a_m^2 + \dots + a_l^2.$$

Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} - (a_m^2 + \dots + a_{l-1}^2),$$

тогда

$$0 < \delta < a_l^2. \quad (10.10)$$

Мы имеем

$$a_{l+1}^2 + \dots + a_n^2 = \varepsilon - (a_m^2 + \dots + a_l^2) = \\ = \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta \right) - a_l^2 = \frac{\varepsilon}{2} + \delta - a_l^2. \quad (10.11)$$

Положим

$$a_l' = \frac{\delta}{a_l}, \quad a_l'' = a_l - a_l'.$$

*) По существу, лемма 2 есть утверждение, касающееся последовательности чисел a_m, \dots, a_n , а не тригонометрических полиномов $P(x)$.

Тогда $a_l = a'_l + a''_l$, но так как $\delta > 0$, то a'_l и a_l одного знака; кроме того, в силу (10.10), $|a'_l| < |a_l|$, следовательно $|a'_l| < |a_l|$, таким образом (10.9) удовлетворена. Далее

$$a_m^2 + \dots + a_{l-1}^2 + (a'_l)^2 = \frac{\varepsilon}{2} - \delta + (a'_l)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

так как

$$(a'_l)^2 = \frac{\delta^2}{a_l^2} = \delta \frac{\delta}{a_l^2} < \delta$$

в силу (10.10); наконец, в силу (10.11)

$$\begin{aligned} (a''_l)^2 + \dots + a_n^2 &= \frac{\varepsilon}{2} + \delta - a_l^2 + \left(a_l - \frac{\delta}{a_l}\right)^2 = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \delta - 2\delta + \frac{\delta^2}{a_l^2} = \frac{\varepsilon}{2} - \delta + (a'_l)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

как уже было подсчитано. Итак, (10.8) тоже удовлетворено, и лемма доказана.

С л е д с т в и е. Повторяя этот процесс, т. е. разбивая теперь каждую из двух частей, на которые мы разбили $P(x)$, еще на две и т. д., мы можем разбить $P(x)$ на 2^r частей так, чтобы у каждой из них сумма квадратов коэффициентов была $\leq \frac{\varepsilon}{2^r}$. Если взять r достаточно большим, например выбрать его так, чтобы

$$\frac{\varepsilon}{2^r} \leq \min a_k^2,$$

где минимум берется по всем отличным от нуля коэффициентам $P(k)$, мы видим, что каждый получившийся в результате разбиения кусок состоит не более чем из двух членов (с коэффициентами, отличными от нуля).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы Э р д е ш а. Будем проводить доказательство для ряда из одних косинусов. Для синусов оно проходит совершенно так же. Если же мы убедимся, что $\sum a_k \cos n_k x$ сходится почти всюду и $\sum b_k \sin n_k x$ тоже, то это верно и для их суммы.

Положим

$$P_m(x) = \sum_{2^m \leq n_k < 2^{m+1}} a_k \cos n_k x; \quad \sum_{2^m \leq n_k < 2^{m+1}} a_k^2 = \varepsilon_m. \quad (10.12)$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)$ сходится почти всюду, потому что функции

$$\sum_{s=1}^m P_s(x) = \sum_{1 \leq n_k < 2^{m+1}} a_k \cos n_k x$$

следует рассматривать как частные суммы $S_{2^{m+1}}(x)$ заданного ряда $\sum a_k \cos n_k(x)$.

Но так как у этого ряда $\sum a_k^2 < +\infty$, то к нему можно применить теорему Колмогорова (см. гл. I, § 65) о сходимости лакунарной подпоследовательности частных сумм для ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом. Если мы теперь докажем, что для любого q , удовлетворяющего условию

$$2^m \leq q < 2^{m+1},$$

имеем при $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{2^m \leq n_k < q} a_k \cos n_k x \rightarrow 0 \quad \text{почти всюду,}$$

то теорема будет полностью доказана.

Для каждого $P_m(x)$ найдем свое число ν (зависящее от m) столь большое, чтобы, разбивая $P_m(x)$ по лемме 2 на 2^ν частей, получили в каждой части не более 2 членов.

Заставим s пробегать значения $s = 1, 2, \dots, \nu$. Разбивая P_m по лемме 2 на 2^s частей $P_{ms}^{(i)}$, будем иметь для любой из них

$$A(P_{ms}^{(i)}) \leq \frac{\varepsilon_m}{2^s} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^s).$$

Рассмотрим для каждого $P_{ms}^{(i)}$ свое множество $E_{ms}^{(i)}$, состоящее из тех x , где

$$|P_{ms}^{(i)}(x)| > \frac{\frac{1}{4}\varepsilon_m}{2^{\frac{s}{4}}} \sqrt{s}.$$

Мы имеем

$$\int_0^{2\pi} [P_{ms}^{(i)}(x)]^4 dx \geq \int_{E_{ms}^{(i)}} [P_{ms}^{(i)}(x)]^4 dx \geq \frac{\varepsilon_m}{2^s} s^2 \text{mes } E_{ms}^{(i)}.$$

Но к каждому из $P_{ms}^{(i)}$ можно применять лемму Сидона, так как этот полином содержит только косинусы с аргументами $n_k x$, где $\{n_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (B_2) . Поэтому

$$\int_0^{2\pi} [P_{ms}^{(i)}(x)]^4 dx \leq C \left(\int_0^{2\pi} [P_{ms}^{(i)}(x)]^2 dx \right)^2 = C [\pi A P_{ms}^{(i)}]^2 = K \frac{\varepsilon_m^2}{2^{2s}},$$

где K — новая константа, откуда

$$\text{mes } E_{ms}^{(i)} \leq K \frac{\varepsilon_m}{2^{s^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^s).$$

Это справедливо для каждого из 2^s кусков, на которые разбит $P_m(x)$. Полагая

$$\mathcal{E}_m^{(s)} = \sum_{i=1}^{2^s} E_{ms}^{(i)},$$

находим

$$\text{mes } \mathcal{E}_m^{(s)} \leq \frac{\varepsilon_m}{s^2}.$$

Положим

$$\mathcal{E}_m = \sum_{s=1}^{\nu} \mathcal{E}_m^{(s)}$$

и

$$\mathcal{E} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_m.$$

Так как $\text{mes } \mathcal{E}_m \leq \varepsilon_m \sum \frac{1}{s^2} < B \varepsilon_m$, где B — постоянно, и так как $\sum \varepsilon_m = \sum a_k^2 < +\infty$, то

$$\sum \text{mes } \mathcal{E}_m < +\infty,$$

а потому

$$m\mathcal{E} = 0.$$

Докажем, что ряд $\sum a_k \cos n_k x$ сходится во всех точках $C\mathcal{E}$, т. е. почти всюду.

В самом деле, если $x_0 \in C\mathcal{E}$, то найдется такое m_0 , что для $m \geq m_0$ имеем $x_0 \notin \mathcal{E}_m$, значит, $x_0 \in \mathcal{E}_m^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, v$), а потому для $m \geq m_0$ имеем

$$|P_{ms}^{(i)}(x)| \leq \frac{1}{2^4} \frac{\varepsilon_m}{s} \sqrt{s} \quad (s = 1, 2, \dots, v). \quad (10.13)$$

Покажем, что тогда имеет место неравенство

$$\left| \sum_{2^m \leq n_k < q} a_k \cos n_k x_0 \right| \leq \frac{1}{2^4} \frac{\varepsilon_m}{1} \sqrt{1} + \frac{1}{2^4} \frac{\varepsilon_m}{2} \sqrt{2} + \dots + \frac{1}{2^4} \frac{\varepsilon_m}{v} \sqrt{v} + \max_{2^m \leq n_k < q} |a_k|. \quad (10.14)$$

В самом деле, разбивая $P_m(x)$ на 2 куска вида P_{m1} , смотрим, укладывается ли первый из них в сумме

$$\sum_{2^m \leq n_k < q} a_k \cos n_k x. \quad (10.15)$$

Если да, то эта сумма распадается на $P_{m1}^{(1)}$ плюс часть куска $P_{m1}^{(2)}$; если нет, то сама эта сумма есть часть куска $P_{m1}^{(1)}$; тогда мы разбиваем ее на куски вида $P_{m2}^{(i)}$. Если первый кусок вида $P_{m2}^{(1)}$ укладывается в сумме (10.15), то она разбивается на первый $P_{m2}^{(1)}$ плюс часть второго $P_{m2}^{(2)}$ и т. д. Каждый кусок некоторого $P_{ms}^{(i)}$ либо содержит в себе целый P_{ms+1} плюс часть другого P_{ms+1} , либо не содержит целых кусков P_{ms+1} , но содержит целый кусок некоторого $P_{ms'}$, $s' > s + 1$; продолжая этот процесс, мы разобьем всю сумму (10.15) на целые куски вида $P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mv}$, и может остаться только один член, но и он по модулю не превосходит $\max |a_k|$ по всем k , входящим в наш $P_m(x)$. Но каждый целый P_{ms} удовлетворяет в точке x_0 неравенству (10.13), а потому (10.14) доказано.

Так как

$$\max_{2^m \leq n_k < q} |a_k| < \sqrt{\varepsilon_m} < \varepsilon_m^{\frac{1}{4}}$$

и, кроме того, ряд $\sum \frac{\sqrt{s}}{2^4}$ сходится, то из (10.14) находим

$$\sum_{2^m \leq n_k < q} a_k \cos n_k x_0 < K \varepsilon_m^{\frac{1}{4}},$$

где K — абсолютная константа, т. е. сумма (10.15) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, и это заканчивает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Эта теорема представляет существенное обобщение теоремы Колмогорова: так как можно построить последовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию (B_2) и такую, что

$$n_k = O(k^3)$$

(см. Marcinkiewicz [7], а также Качмаж и Штейнгауз [М.7], стр. 359).

§ 11. Теорема единственности для лакунарных рядов

В главе XIV будет доказано, что существуют тригонометрические ряды, сходящиеся к нулю почти всюду (без того, чтобы все их коэффициенты были равны нулю). Мы хотим показать здесь, что для случая лакунарных рядов это уже невозможно; более того, для таких рядов невозможна даже сходи-

мость к нулю на множестве положительной меры (кроме случая, когда все коэффициенты равны нулю). Предварительно докажем теорему (см. Zygmund [8]).

Т е о р е м а 1. Пусть последовательность $\{n_k\}$ лакунарна. Если ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (11.1)$$

сходится на множестве E , $mE > 0$ к функции $F(x)$, абсолютно непрерывной на E^*), то продифференцированный ряд

$$\sum n_k (b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x) \quad (11.2)$$

сходится почти всюду на E к асимптотической производной $F^{[1]}(x)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 (a_k^2 + b_k^2) < +\infty. \quad (11.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через H множество точек, для которых $\varphi'(x)$ существует. Пусть E_1 — множество тех точек E , которые являются его точками плотности. Ясно, что если

$$E_2 = E_1 \cdot H,$$

то $mE_2 = mE$. Далее, по теореме 1 из § 23 Добавлений для любого $\varepsilon > 0$ найдем такое $\mathcal{E} \subset E_2$, что $m\mathcal{E} > mE_2 - \varepsilon$, и такую последовательность положительных чисел $h_n \rightarrow 0$, что для $x_0 \in \mathcal{E}$ имеем

$$x_0 \in E_2, x_0 + h_n \in E_2, x_0 - h_n \in E_2 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ясно, что

$$\frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0 - h_n)}{2h_n} = \frac{\varphi(x_0 + h_n) - \varphi(x_0 - h_n)}{2h_n} \rightarrow \varphi'(x_0).$$

С другой стороны, так как $x_0 \in E_2 \subset H$, то если $x \rightarrow x_0$, пробегая по точкам E , имеем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \varphi'(x_0), \quad (11.4)$$

а потому асимптотическая производная $F^{[1]}(x)$ в точке x_0 существует и $F^{[1]}(x_0) = \varphi'(x_0)$. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + h_n) - F(x - h_n)}{2h_n} = F^{[1]}(x)$$

всюду на \mathcal{E} , т. е. почти всюду на E , поскольку ε было произвольно.

Отсюда следует, что, продифференцировав ряд (11.1), мы получим ряд (11.2), который суммируется почти всюду на E к $F^{[1]}(x)$ обобщенным методом Лебега, соответствующим последовательности $\{h_k\}$ (см. глава VII, § 5).

Теперь заметим, что для коэффициентов ряда (11.2) выполняется условие

$$\sum_{k=1}^m n_k (|a_k| + |b_k|) = o(n_m)$$

в силу $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ и лакунарности последовательности $\{n_k\}$. Отсюда вытекает (см. § 5 главы VII), что обобщенный метод суммирования Лебега можно записать и в такой форме, при которой он оказывается методом T^* .

*) Функция $F(x)$ называется абсолютно непрерывной на множестве E , если она совпадает на E с такой функцией $\varphi(x)$, которая абсолютно непрерывна на отрезке, содержащем E .

Таким образом, ряд (11.2) суммируется некоторым методом T^* на множестве положительной меры, но тогда выполнено условие (11.3) и, значит, этот ряд есть ряд Фурье. Будучи лакунарным, он, следовательно, сходится почти всюду. Но на множестве E он суммируется почти всюду методом Лебега к $F^{[1]}(x)$, поэтому в силу теоремы § 5 главы VII он обязан сходиться почти всюду на E к $F^{[1]}(x)$. Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е. Если последовательность $\{n_k\}$ лакунарная и

$$\sum n_k^2(a_k^2 + b_k^2) = +\infty,$$

то ряд (11.1) не может сходиться к функции, имеющей асимптотическую производную на множестве меры больше нуля.

Следовательно, кроме случаев очень быстрого стремления a_k и b_k к нулю, лакунарные ряды изображают лишь плохие непрерывные функции.

В частности, например, для целого b , $0 < a < 1$, $ab \geq 1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos b^k x \quad (11.5)$$

сходится равномерно, но изображаемая им непрерывная функция заведомо не имеет производной (даже асимптотической) почти всюду, так как здесь роль n_k играет b^k , а роль a_k играет a^k , значит,

$$\sum n_k^2 a_k^2 = \sum (ab)^{2k} = +\infty.$$

Мы уже рассматривали ряд (11.5) (см. глава IX, § 5) и показали, что если b — нечетное целое и

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-a),$$

то определяемая им функция нигде не имеет конечной производной. Сейчас, предполагая только $ab \geq 1$ и b целым, мы можем без всяких выкладок из общих соображений заключить об отсутствии у его суммы производной почти всюду.

Вернемся к вопросу, поставленному в начале этого параграфа. Теорема 1 позволяет теперь получить следующую теорему:

Т е о р е м а 2. Если $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность и если ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (11.1)$$

сходится к нулю на множестве E , $mE > 0$, то все коэффициенты ряда равны нулю.

Прежде всего заметим, что по теореме Зигмунда, доказанной в § 3, из сходимости ряда (11.1) на E , $mE > 0$, следует, что он есть ряд Фурье. Пусть $F(x)$ — его сумма. По условию $F(x) = 0$ на E .

По теореме 1 продифференцированный ряд

$$\sum n_k (b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x) \quad (11.2)$$

снова сходится к нулю почти всюду на E .

Применяя теорему 1 к ряду (11.2) и так далее, мы убедимся, что $F(x)$ имеет на E производные всех порядков, и все они равны нулю почти всюду на E .

Кроме того, имеем для любого s

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{2s} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty,$$

откуда следует, что, продифференцировав ряд (11.1) любое число раз, мы получаем ряды, сходящиеся абсолютно.

Далее, мы можем написать для любого s :

$$\sum n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{E}, \quad (11.6)$$

где $m\mathcal{E} = mE$.

Докажем, что для некоторого k_0 , не зависящего от s , мы имеем

$$\int_{\mathcal{E}} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \right\}^2 dx \geq \frac{1}{8} m\mathcal{E} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2). \quad (11.7)$$

В самом деле, положим для краткости

$$n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = \tilde{\varrho}_k \cos(n_k x + \alpha_k).$$

Имеем для любого ν

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \left[\sum_{k=\nu}^{\infty} \tilde{\varrho}_k \cos(n_k x + \alpha_k) \right]^2 dx &= \sum_{k=\nu}^{\infty} \tilde{\varrho}_k^2 \int_{\mathcal{E}} \cos^2(n_k x + \alpha_k) dx + \\ &+ \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{j=\nu \\ k \neq j}}^{\infty} \tilde{\varrho}_k \tilde{\varrho}_j \int_{\mathcal{E}} \cos(n_k x + \alpha_k) \cos(n_j x + \alpha_j) dx. \end{aligned} \quad (11.8)$$

При доказательстве теоремы Зигмунда (см. § 3 этой главы, формула (3.19)) мы видели, что правая часть формулы (11.8) должна превосходить $\frac{1}{8} m\mathcal{E} \sum_{k=\nu}^{\infty} \tilde{\varrho}_k^2$, если ν достаточно велико, а это и значит, что найдется такое k_0 , при котором неравенство (11.7) будет иметь место.

Но в силу (11.6) мы имеем

$$\sum_{k=1}^{k_0} n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

на \mathcal{E} , а потому формулу (11.7) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} m\mathcal{E} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2) &\leq \int_{\mathcal{E}} \left[\sum_{k=1}^{k_0} n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{k_0} n_k^{2s} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \right]^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Отсюда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{8}{m\mathcal{E}} \pi \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2).$$

Выбранное нами k_0 не зависит от коэффициентов ряда. Мы можем его зафиксировать и больше не менять. Если теперь обозначить через M максимум $\varrho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$ для $1 \leq k \leq k_0$, то

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{4s} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{8}{m\mathcal{E}} \pi M \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s} = C \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s},$$

где C — постоянное. Допустим, что хоть одно из чисел $\varrho_k \neq 0$, пусть, например, $\varrho_m \neq 0$, $m \geq k_0 + 1$. Тогда

$$n_m^{4s} \varrho_m^2 \leq C \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s}$$

и это справедливо при любом s . Отсюда

$$n_m^{4s} \leq A \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{4s}, \quad A = \frac{C}{c_m^2}.$$

Но поскольку $m \geq k_0 + 1$, то

$$\frac{n_m}{n_{k_0}} = 1 + \frac{n_m - n_{k_0}}{n_{k_0}} \geq 1 + \frac{1}{n_{k_0}} = r > 1,$$

а потому

$$\frac{n_m^{4s}}{n_{k_0}^{4s}} \leq A \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{n_k}{n_{k_0}} \right)^{4s} \leq A k_0,$$

так как все $n_k \leq n_{k_0}$. Но тогда

$$r^s \leq A k_0$$

и так как это неравенство должно быть справедливо при любом s , то мы приходим к противоречию, потому что $r > 1$.

Итак, чтобы (11.9) было выполнено, необходимо

$$a_k = b_k = 0 \quad \text{для} \quad k > k_0.$$

Но если так, то наш ряд превращается в тригонометрический полином. А полином может обратиться в нуль на множестве меры больше нуля только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$a_k = b_k = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots$$

и теорема доказана.

Следствие 1. Сумма лакунарного ряда есть функция, которая не может быть постоянной ни на каком множестве положительной меры; иначе говоря, любое свое значение эта функция может принимать лишь на множестве меры нуль.

Следствие 2. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суммируемы, $f_1(x) = f_2(x)$ на E , $mE > 0$ и коэффициенты Фурье от $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны между собой, кроме, быть может, тех, которые стоят на местах с номерами $n_k \geq 1$, где $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность. Тогда

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{почти всюду.}$$

Отметим здесь без доказательства некоторые результаты Мандельброята [М.13]. Он изучал вопрос, при каких условиях, наложенных на числа n_k , из того, что суммируемая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

и имеет нуль «высокого порядка» в некоторой точке x_0 , следует, что она равна нулю почти всюду.

Отсылая за наиболее полными формулировками к работе автора, мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда

$$f(x) = \varphi(x) e^{-\frac{1}{(x-x_0)^m}},$$

где $m > 0$, а $\varphi(x)$ непрерывна и $\varphi(x_0) \neq 0$.

Будем говорить, что в этом случае $f(x)$ имеет в точке x_0 нуль *показательного порядка* m .

Условимся, кроме того, говорить, что последовательность $\{n_k\}$ имеет *показатель сходимости* γ , если γ есть нижняя граница чисел α , для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^\alpha} < +\infty.$$

В частности, для лакунарной последовательности $\{n_k\}$ имеем $\gamma = 0$, потому что для любого положительного α

$$\frac{1}{n_k^\alpha} < \frac{1}{(\lambda)^{k\alpha} n_1^\alpha} = \frac{1}{n_1^\alpha (\lambda^\alpha)^k}$$

и так как $\lambda^\alpha > 1$ при $\lambda > 1$ и $\alpha > 0$ любых, то $\sum \frac{1}{n_k^\alpha} < +\infty$ для лакунарной последовательности $\{n_k\}$ и $\alpha > 0$ любого.

Мандельброт доказал теорему:

Пусть $f(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$ и имеет ряд Фурье вида

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где последовательность $\{n_k\}$ имеет показатель сходимости $\sigma < 1$. Если

$$m > \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

и $f(x)$ имеет при $x = 0$ нуль показательного порядка m , то она равна нулю почти всюду.

В силу сделанного выше замечания, если $\{n_k\}$ лакунарна, то $\sigma = 0$. Поэтому, если $f(x)$ имеет лакунарный ряд Фурье и показательный нуль любого положительного порядка при $x = 0$, то она уже должна быть равна нулю почти всюду.

§ 12. О наилучшем приближении функций, заданных лакунарными тригонометрическими рядами

Мы здесь укажем без доказательства некоторые теоремы, которые показывают, что и в вопросе о наилучшем приближении функций тригонометрическими полиномами лакунарные ряды обладают специальными свойствами, резко отличающими их от общих тригонометрических рядов.

Наиболее замечательной теоремой в этом направлении является

Т е о р е м а **Б е р н ш т е й н а** [6]. *Если*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = 2p_k + 1, \quad (12.1)$$

где p_k целое, то для непрерывной $f(x)$, определяемой рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \cos(n_k x + \alpha_k),$$

наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка n дается частной суммой $S_n(x)$ ее ряда Фурье.

Чтобы сформулировать некоторые другие теоремы, введем обозначения:

$$R_n(f) = \max_x |f(x) - S_n(x)|$$

и

$$A_n(f) = \sum_{n_k > n}^{\infty} \varrho_k.$$

Ясно, что всегда $E_n(f) \leq R_n(f) \leq A_n(f)$. Результат С. Н. Бернштейна заключается в том, что при выполнении (12.1) имеем

$$E_n(f) = R_n(f).$$

Этот результат был дополнен Стечкиным^[2], доказавшим, что для *любого лакунарного ряда*

$$E_n(f) \sim R_n(f) \sim A_n(f)$$

(где знак \sim , как обычно, понимается в том смысле, что $A_n \sim B_n$, если $C_1 B_n \leq A_n \leq C_2 B_n$, где C_1 и C_2 — положительные константы). Впоследствии С. Б. Стечкин^[7] доказал, что это утверждение справедливо и тогда, когда последовательность $\{n_k\}$ разлагается на конечное число лакунарных.

Кроме того, он доказал, что если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = q_k \rightarrow \infty,$$

то имеет место и более сильное утверждение

$$E_n(f) \approx R_n(f) \approx A_n(f), \quad n \rightarrow \infty$$

т. е. справедливо асимптотическое равенство).

§ 13. Локальные теоремы для обобщенных лакунарных рядов

Нобль (Noble^[1]) поставил такую задачу: известно некоторое свойство функции не на $[-\pi, \pi]$, а лишь в окрестности какой-то точки x_0 . Если это свойство, будучи выполнено на $[-\pi, \pi]$, влечет некоторые следствия для ряда Фурье $\sigma(f)$, то при какой «лакунарности» те же результаты будут верны, когда это свойство выполнено лишь локально?

Это звучит пока слишком неопределенно, но сейчас мы уточним смысл сказанного.

Известно, что если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[-\pi, \pi]$, то

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если $f(x)$ удовлетворяет на $[-\pi, \pi]$ условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, то

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (13.1)$$

Допустим теперь, что $f(x) \in L$ на $[-\pi, \pi]$ и а) имеет ограниченное изменение для $|x - x_0| \leq \delta$ или б) удовлетворяет условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$ для $|x - x_0| \leq \delta$. Тогда Нобль показывает, что для ряда

$$\sum a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x, \quad (13.2)$$

если на числа n_k наложено соответствующее ограничительное условие, имеем снова в случае а)

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (13.3)$$

и в случае б)

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^\alpha}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^\alpha}\right). \quad (13.4)$$

В качестве такого условия Нобль, полагая*)

$$N_k = \min (n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k), \quad (13.5)$$

требует, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{\ln n_k} = +\infty. \quad (13.6)$$

Ясно, что для всех лакунарных рядов условие (13.6) выполнено, но оно может иметь место и для рядов, у которых пропуски между членами значительно меньше, чем у лакунарных.

Нобль доказывает еще несколько теорем такого типа. Мы остановимся здесь лишь на двух его теоремах, но зато дадим их в изложении П. Л. Ульянова, который, сохраняя метод Нобля, исправил некоторые дефекты в его доказательстве и к тому же усилил полученные им результаты.

Прежде чем переходить к этим теоремам, докажем следующую лемму:

Л е м м а. Пусть $0 < \delta < 1$. Тогда для достаточно большого n существует тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n с постоянным членом, равным 1, и такой, что

$$1) \quad |T_n(x)| \leq \frac{A_1}{\delta} \quad \text{для всех } x, \quad (13.7)$$

где A_1 — абсолютная константа,

$$2) \quad |T_n(x)| \leq A_2 (e^{-A(\delta)^n}) \quad \text{для } \delta \leq |x| \leq \pi, \quad (13.8)$$

где A_2 — абсолютная константа, $A(\delta)$ — положительная константа, зависящая только от δ (ее можно положить равной $\frac{\delta}{8e}$).

Для доказательства леммы положим

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\delta} & \text{при } |x| \leq \delta, \\ 0 & \text{при } \delta < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

$$h_0(x + 2\pi) = h_0(x)$$

и будем аппроксимировать эту функцию полиномами (но, разумеется, не равномерно, так как она разрывна).

Для этого мы сначала «сгладим» $h_0(x)$. Для любого целого $m > 2$ положим $\tau_m = \frac{\delta}{2m}$ и определим конечную последовательность $\{h_i(x)\}$

так:

$$h_{i+1} = \frac{1}{\tau_m} \int_x^{x+\tau_m} h_i(x) dx$$

для $0 \leq x \leq \pi$ и $i \leq m-1$; кроме того, потребуем, чтобы $h_i(x)$ были все четные.

Ясно, что

$$h_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } \delta \leq |x| \leq \pi, \\ \frac{\pi}{\delta} & \text{для } |x| \leq \frac{1}{2}\delta, \end{cases} \quad (13.9)$$

*) В цитируемой работе Нобля вместо $N_k = \min (n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k)$ было написано $N_k = \max (n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k)$. Но при этом условия дальнейшие рассуждения не проходят (мы имеем в виду выбор полинома $P(x)$, обладающего нужным свойством). Впоследствии Нобль указал на необходимость исправления этой ошибки (см. Noble^[1] Correction).

кроме того, $h_m(x)$ монотонна на $\left(\frac{1}{2}\delta, \delta\right)$ и она имеет $m - 1$ непрерывных производных, обращающихся в нуль в точках $-\pi$ и π . Из определения $h_m(x)$ легко следует, что

$$|h_m^{(m-1)}(x)| \leq \left\{ \left(\frac{2}{\tau_m} \right)^{m-1} \max |h_0(x)| \right\} = \left(\left(\frac{4m}{\delta} \right)^{m-1} \frac{\pi}{\delta} \right) \leq C_1 \left(\frac{4m}{\delta} \right)^m$$

равномерно относительно x . Поэтому, если мы обозначим через a_p и b_p коэффициенты Фурье от $h_m(x)$, то, интегрируя $m - 1$ раз по частям, найдем

$$|a_p| \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{p^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |h_m^{(m-1)}(x)| dx \leq 2C_1 \left(\frac{(4m)^m}{p^{m-1}\delta^m} \right) \quad (p \geq 1)$$

и аналогично для $|b_p|$.

Поэтому, обозначая через $S_n(x)$ n -ю частную сумму ряда Фурье от $h_m(x)$, мы имеем

$$|h_m(x) - S_n(x)| \leq 2C_1 \left(\frac{(4m)^m}{\delta^m} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^{m-1}} \right) \leq 2C_1 \left(\frac{4m}{\delta} \right)^m \frac{1}{n^{m-2}}$$

равномерно по x . При фиксированном n целесообразно выбрать m так, чтобы $m = m_n = \left\lfloor \frac{n\delta}{4e} \right\rfloor$; тогда для любого x мы получим при достаточно большом n

$$\begin{aligned} |h_{m_n}(x) - S_n(x)| &\leq 2C_1 \left[n^2 \cdot \left(\frac{4m}{n\delta} \right)^m \right] \leq 2C_1 (n^2 e^{-m}) \leq 2C_1 e^{2\ln n} e^{-\frac{n\delta}{4e} + 1} = \\ &= 2C_1 e e^{-n \left(\frac{\delta}{4e} - \frac{2\ln n}{n} \right)} \leq C_2 e^{-A(\delta)n}, \end{aligned}$$

где $C_2 = 2C_1 e$, а n взято достаточно большим для того, чтобы $\frac{2\ln n}{n} < \frac{\delta}{8e}$; тогда можно взять $A(\delta) = \frac{\delta}{8e}$.

Отсюда при достаточно большом n имеем для всех x

$$|S_n(x)| \leq |h_m(x)| + C_2 e^{-A(\delta)n}, \quad (13.10)$$

а потому в силу (13.9)

$$|S_n(x)| \leq \begin{cases} C_2 e^{-A(\delta)n} & \text{для } \delta \leq |x| \leq \pi, \\ \frac{\pi}{\delta} + C_2 e^{-A(\delta)n} \leq \frac{2\pi}{\delta} & \text{для всех } x, \end{cases}$$

если n взято достаточно большим.

Кроме того, в силу определения $S_n(x)$ имеем для его свободного члена

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_m(x) dx.$$

Но $h_m(x) = 0$ на $\delta \leq |x| \leq \pi$, $h_m(x) = \frac{\pi}{\delta}$ при $|x| \leq \frac{\delta}{2}$ и $h_m(x) \leq \frac{\pi}{\delta}$ при $\frac{\delta}{2} \leq |x| \leq \delta$, поэтому

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_0}{2} \leq 1.$$

Следовательно, можно подобрать константу λ_n так, чтобы у $T_n(x) = \lambda_n S_n(x)$ свободный член был равен 1 и притом $1 - \lambda_n \leq 2$. Тогда $T_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы, если положить $A_1 = 4\pi$, $A_2 = 2C_2$.

Итак, лемма доказана.

Докажем теперь следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть

$$N_k = \min(n_{k+1} - n_k, n_k - n_{k-1})$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{\ln n_k} = B. \quad (13.11)$$

Если $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение для $|x - x_0| \leq \delta$, и если

$$\sigma(f) = \sum a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x, \quad (13.12)$$

где числа n_k удовлетворяют условию (13.11) при $B \geq \frac{50}{\delta}$, то

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Доказательство этой, а также следующей за ней теоремы базируется на том, что если $\sigma(f)$ имеет лакуны $n_n < n < n_{n+1}$ и если $P(x)$ — любой тригонометрический полином порядка ниже N_k и с постоянным членом, равным 1, то

$$a_{n_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(x) \cos n_k x \, dx,$$

$$b_{n_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(x) \sin n_k x \, dx.$$

Но выбор полинома $P(x)$ в нашем распоряжении, и мы можем сделать его достаточно малым в нужной нам области.

Переходим к доказательству теоремы 1. Не нарушая общности, можно предполагать $x_0 = 0$. Положим

$$M_k = \min(N_k - 1, \left\lfloor n_k^{\frac{1}{2}} \right\rfloor). \quad (13.13)$$

Пусть $T_{M_k}(x)$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий условиям леммы, где роль n играет M_k . Тогда

$$a_{n_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx = I_1 + I_2. \quad (13.14)$$

Но

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} A_2 e^{-A(\delta)M_k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx. \quad (13.15)$$

Из (13.13) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{\ln n_k} = B_1 \geq B. \quad (13.16)$$

Поэтому для любого достаточно большого k

$$M_k \geq \frac{B}{2} \ln n_k.$$

Значит,

$$e^{-A(\delta)M_k} \leq \frac{1}{e^{\frac{A(\delta)B}{2} \ln n_k}} \leq \frac{1}{n_k}, \quad (13.17)$$

если только $A(\delta) \frac{B}{2} \geq 1$. Но в условии теоремы было взято $B \geq \frac{50}{\delta}$, а в лемме можно было брать $A(\delta) = \frac{\delta}{8e}$, значит, (13.17) справедливо. Из него и из (13.15) следует

$$I_2 = O\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

при k достаточно большом.

Для оценки I_1 заметим, что в силу условия теоремы $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $(-\delta, \delta)$; поэтому достаточно произвести оценку, считая $f(x)$ возрастающей. Тогда по второй теореме о среднем, интегрируя два раза по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx &= f(\delta) \int_{\eta_k}^{\delta} T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx = \\ &= f(\delta) \left\{ \left[T_{M_k} \frac{\sin n_k x}{n_k} \right]_{\eta_k}^{\delta} + \left[T'_{M_k}(x) \frac{\cos n_k x}{n_k^2} \right]_{\eta_k}^{\delta} - \int_{\eta_k}^{\delta} T''_{M_k}(x) \frac{\cos n_k x}{n_k^2} \, dx \right\}, \end{aligned}$$

где $-\delta < \eta_k < \delta$. Так как из (13.7) следует

$$|T_{M_k}(x)| \leq \frac{A_1}{\delta},$$

то по неравенству Бернштейна (см. Вводный материал, § 23) имеем

$$|T'_{M_k}(x)| \leq \frac{A_1 M_k}{\delta}, \quad |T''_{M_k}(x)| \leq \frac{A_1 M_k^2}{\delta};$$

отсюда

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x \, dx \right| &= \\ &= O\left[f(\delta) \frac{1}{\delta n_k}\right] + O\left[f(\delta) \frac{M_k}{\delta n_k^2}\right] + O\left[f(\delta) \frac{M_k^2}{\delta n_k^3}\right] = O\left(\frac{1}{n_k}\right), \end{aligned}$$

так как $M_k^2 = O(n_k)$.

Оценка для b_{n_k} проводится аналогично, и доказательство закончено.

С л е д с т в и е*). Если $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение на $|x - x_0| \leq \delta$ и ее ряд Фурье имеет вид (13.12), где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{\ln n_k} = +\infty,$$

*) Именно в таком виде теорему доказывал Нобль.

то

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Это немедленно следует из теоремы 1, если положить $B = +\infty$.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ и

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^a$$

для $|x - x_0| < \delta$, где C — константа и $0 < a < 1$. Если ряд $\sigma(f)$ удовлетворяет тем же условиям, как в теореме 1, то

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right).$$

Здесь поступаем аналогично. Снова полагаем $x_0 = 0$, но берем

$$M_k = \min\{N_k - 1, n_k^{1-a}\}.$$

Ясно, что (13.16) снова имеет место, значит,

$$M_k \geq \frac{B}{2} \ln n_k. \quad (13.18)$$

Имеем тогда

$$\begin{aligned} a_{n_k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_{M_k}(t) \cos n_k t dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right] T_{M_k}(t) \cos n_k t dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \left[T_{M_k}(t) - T_{M_k}\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right] \cos n_k t dt = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Так как

$$|T'_{M_k}(t)| \leq \frac{A_1 M_k}{\delta},$$

то мы получаем по теореме Лагранжа

$$|J_2| \leq \frac{A_1}{2\delta} \frac{M_k}{n_k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = O\left(\frac{M_k}{\delta n_k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt\right) = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right)$$

при фиксированном δ , так как $M_k \leq n_k^{1-a}$.

Интеграл J_1 мы разбиваем на две части, именно для $-\delta < t < \delta$ и для $\delta \leq |t| \leq \pi$, тогда $J_1 = J_3 + J_4$.

Имеем

$$|J_3| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right| |T_{M_k}(t)| dt = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right)$$

в силу условия Липшица и неравенства (13.7). Далее

$$|J_4| \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right| |T_{M_k}(t)| dt \leq 2 A_2 e^{-A(\delta)M_k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right),$$

так как для больших k в силу (13.8) и $A(\delta) \frac{B}{2} \geq 1$ имеем

$$e^{-A(\delta)M_k} \leq \frac{1}{e^{A(\delta) \frac{B}{2} \ln n_k}} \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n_k^a}.$$

Соединяя вместе оценки для J_2 , J_3 и J_4 , видим, что

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right).$$

Аналогично оценивается b_{n_k} . Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$ и

$$|f(x+h) - f(x)| = O(h^\alpha) \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq \delta, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и если ряд $\sigma(f)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{\ln n_k} = +\infty,$$

то

$$a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^a}\right).$$

Это немедленно вытекает из теоремы 2, если в ней взять $B = +\infty^*$.

З а м е ч а н и е 1. В теоремах 1 и 2 оценку снизу для B (т. е. $B \geq \frac{50}{\delta}$) разумеется, можно понизить, но мы не ставили себе целью искать здесь точную константу.

З а м е ч а н и е 2. В недавно появившейся работе Кеннеди (Kennedy^[1]) теоремы Нобля доказаны при единственном предположении

$$n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

однако лишь для $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$. Доказательства основаны на другой идее.

*) Именно в таком виде теорема была доказана Ноблем.

ГЛАВА XII

СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ ОБЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1. Введение

Мы видели (см. глава I, § 62), что если тригонометрический ряд сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю. С другой стороны (см. глава I, § 63), существуют всюду расходящиеся ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю.

Первый пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, но расходящегося почти всюду, был построен Н. Н. Лузиным в 1911 году. Он служил ответом на проблему, поставленную Фату: должен ли тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходиться почти всюду. Н. Н. Лузин [1] сначала построил степенной ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящийся в каждой точке единичной окружности, а затем показал, что его действительная часть есть тригонометрический ряд, расходящийся почти всюду*). Как показал С. Б. Стечкин [12], на самом деле у степенного ряда Н. Н. Лузина и действительная и чисто мнимая части являются всюду расходящимися тригонометрическими рядами**).

В § 2 изучается вопрос о скорости, с которой могут стремиться к нулю коэффициенты всюду расходящихся тригонометрических рядов.

Далее ставится следующая проблема. Пусть коэффициенты тригонометрического ряда не стремятся к нулю. Что можно сказать о множестве точек, где ряд сходится? Оказывается (см. § 3), это множество должно быть непременно первой категории***). В дальнейшем все множества меры нуль и

*) В настоящее время мы знаем, что существуют тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, и для которых любая подпоследовательность частных сумм расходится почти всюду (см. гл. XI, § 3).

**) Другие примеры всюду расходящихся тригонометрических рядов, как уже упоминалось в главе I, даны Штейнгаузом (Steinhaus [1], [5]). Герцог (Herzog [1]) доказал, что существуют тригонометрические ряды, расходящиеся в каждой точке, у которых все коэффициенты положительны.

***) Виола (Viola [1]) доказал следующее предложение: пусть для тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos (nx + a_n)$$

выполняется условие

$$r_{n_k} > a > 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, если $n_{k+1} - n_k < C$ ($k = 1, 2, \dots$), то множество точек, где ряд сходится, состоит не более чем из конечного числа точек; если $\frac{n_{k+1}}{n_k} < C$ ($k = 1, 2, \dots$), то это множество не более чем счетно.

первой категории делятся на такие, для которых может существовать ряд, сходящийся на них, без того, чтобы его коэффициенты стремились к нулю (их называют R -множествами), и те, для которых это невозможно.

В §§ 4, 5, 6, 11 изучаются необходимые условия для того, чтобы множество было R -множеством; частично к этому же примыкает и § 9; в § 8 даются достаточные условия. Как мы увидим дальше (в главах XIII и XIV), всякая классификация множеств меры нуль является чрезвычайно трудным вопросом, так как одни и те же множества при решении разных проблем ведут себя по-разному. Этого, в частности, мы касаемся в § 10.

§ 2. Коэффициенты всюду расходящихся тригонометрических рядов

После того как были построены первые примеры тригонометрических рядов, расходящихся почти всюду, а также всюду, некоторые авторы занимались изучением вопроса, с какой скоростью эти коэффициенты могут стремиться к нулю.

Прежде всего Р. О. Кузьмин^[2] оценивал коэффициенты степенного ряда Н. Н. Лузина и нашел, что они имеют порядок $O\left(n^{-\frac{1}{6}}\right)$.

Затем ряд авторов (см., например, Р. О. Кузьмин^[2], Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[3]) строили степенные ряды с коэффициентами быстрее стремящимися к нулю и также расходящиеся в каждой точке единичной окружности. Наконец, Недер (Neder^[1]) доказал следующую общую теорему:

Т е о р е м а Н е д е р а. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел a_n , лишь бы $a_n \rightarrow 0$ монотонно и $\sum a_n^2 = +\infty$, существует степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами

$$c_n = O(a_n),$$

расходящийся в каждой точке окружности $|z| = 1$.

Мы приводим здесь эту теорему без доказательства, так как докажем теорему С. Б. Стечкина^[12], из которой теорема Недера вытекает как следствие. Именно имеет место

Т е о р е м а. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел a_n , лишь бы $a_n \rightarrow 0$ монотонно и $\sum a_n^2 = +\infty$, существует пара сопряженных тригонометрических рядов с коэффициентами*

$$a_n = O(a_n), \quad b_n = O(a_n) \quad (2.1)$$

и расходящихся в каждой точке.

Для доказательства этого предложения нам понадобятся две леммы:

Л е м м а 1. *Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n^2 = +\infty$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ таких, что*

$$1) \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq p_{n+1} \leq \dots,$$

$$2) \quad \frac{1}{p_n} \leq a_{N_n}, \quad \text{где} \quad N_n = \sum_{k=1}^n p_k,$$

$$3) \quad \sum \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Положим $N_0 = 0$, пусть N_0, N_1, \dots, N_{n-1} уже определены; выберем N_n так, чтобы оно было наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим неравенству

$$(N - N_{n-1}) a_N > 1.$$

Такое число N_n должно существовать, так как если бы для всех $N > N_{n-1}$ мы имели

$$(N - N_{n-1}) a_N \leq 1,$$

то

$$a_N = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

а тогда $\sum a_n^2 < +\infty$ вопреки условию теоремы.

Итак,

$$(N - N_{n-1}) a_N \leq 1 \quad (N_{n-1} \leq N < N_n), \quad (2.2)$$

$$(N_n - N_{n-1}) a_{N_n} > 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.3)$$

Положим

$$p_n = N_n - N_{n-1},$$

тогда

$$N_n = \sum_{k=1}^n p_k,$$

и мы докажем, что числа p_n удовлетворяют условиям леммы.

Так как N_n натуральные, то и p_n также. Имеем из (2.3)

$$p_n a_{N_n} > 1,$$

следовательно,

$$\frac{1}{p_n} < a_{N_n},$$

т. е. удовлетворено второе условие, наложенное на числа p_n .

Из (2.2) следует

$$(N_n - 1 - N_{n-1}) a_{N_n} \leq 1,$$

т. е.

$$(p_n - 1) a_{N_n} \leq 1, \quad (2.4)$$

тем более (в силу монотонного убывания a_n)

$$(p_n - 1) a_{N_{n+1}} \leq 1,$$

а между тем

$$p_{n+1} a_{N_{n+1}} > 1,$$

значит, $p_{n+1} > p_n - 1$, т. е. $p_{n+1} \geq p_n$, и первое условие удовлетворено.

Остается доказать расходимость ряда $\sum \frac{1}{p_n}$.

Заметим сначала, что из (2.4) следует

$$p_n a_{N_n} \leq 1 + a_{N_n} \leq 1 + a_1 = C,$$

т. е.

$$a_{N_n} \leq \frac{C}{p_n}. \quad (2.5)$$

Оценим сверху кусок расходящегося ряда $\sum a_N^2$, именно

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} a_N^2 = \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} a_N^2 + \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} a_N^2 = S_1 + S_2. \quad (2.6)$$

Для S_1 мы используем монотонность чисел a_k и неравенство (2.5), это дает

$$S_1 \leq p_n a_{N_n}^2 \leq p_n \frac{C^2}{p_n^2} \leq \frac{C^2}{p_n}. \quad (2.7)$$

Для суммы S_2 в силу (2.2) имеем

$$S_2 \leq \sum_{N_n + p_n}^{N_{n+1} - 1} a_N^2 \leq \sum_{N + p_n}^{N_{n+1} - 1} \frac{1}{(N - N_n)^2} \sum_{p_n}^{N_{n+1} - N_n - 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{p_n}^{p_{n+1} - 1} \frac{1}{k^2} < \sum_{p_n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{p_n}. \quad (2.8)$$

Таким образом из (2.6), (2.7) и (2.8) следует

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} a_N^2 \leq \frac{K}{p_n},$$

где K — абсолютная константа, а потому

$$\sum \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_n}^{N_{n+1}-1} a_N^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = +\infty,$$

что и заканчивает доказательство леммы 1.

Переходим к доказательству леммы 2, касающейся тригонометрических полиномов. Условимся называть «отрезком» тригонометрического полинома

$$Q_p(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} q_k \cos(kx + \varphi)$$

всякий полином вида

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} q_k \cos(kx + \varphi), \quad 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1.$$

Л е м м а 2. Пусть $p \geq 24$. Для любого x , удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{\pi}{p} \leq x \leq \frac{3\pi}{p}, \quad (2.9)$$

найдется отрезок полинома

$$D_p(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos(kx + \varphi),$$

для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48} \quad (2.10)$$

(здесь числа k_1 и k_2 зависят от x и от φ).

Положим

$$x = \frac{\alpha}{p},$$

тогда

$$\pi \leq \alpha < 3\pi;$$

пусть $\psi_k = kx + \varphi$. Когда k пробегает значения $0, 1, \dots, p-1$, то $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ монотонно возрастают от φ до $\varphi + \frac{p-1}{p} \alpha$ и соседние точки находятся друг от друга на расстоянии $\frac{\alpha}{p}$. Рассмотрим функцию

$$y = \cos \psi \quad \text{для} \quad \varphi \leq \psi \leq \varphi + \frac{p-1}{p} \alpha.$$

Так как по условию леммы $p \geq 24$ и $\pi \leq a \leq 3\pi$, то сегмент $[\psi_0, \psi_{p-1}] = [\varphi, \varphi + \frac{p-1}{p}a]$ имеет длину

$$\frac{p-1}{p}a \geq \left(1 - \frac{1}{24}\right)\pi \geq \frac{23}{24}\pi.$$

Отсюда ясно, что каково бы ни было φ , этот сегмент содержит некоторый сегмент I_+ длины $\frac{\pi}{4}$, где $\cos \psi \geq \frac{1}{2}$, или сегмент I_- длины $\frac{\pi}{4}$, где $\cos \psi \leq -\frac{1}{2}$ (а может быть и два таких сегмента). Допустим что он содержит I_+ (рассуждение для I_- было бы такое же).

Сосчитаем число точек ψ_k , попавших на такой сегмент I_+ . Так как расстояние между соседними точками ψ_k равно $\frac{a}{p} \leq \frac{3\pi}{p}$, а $p \geq 24$, то на сегмент длины $\frac{\pi}{4}$ таких точек попадет не меньше, чем

$$\left[\frac{\pi}{4} : \frac{a}{p}\right] \geq \left[\frac{\pi}{4} : \frac{3\pi}{p}\right] = \left[\frac{p}{12}\right] \geq \frac{p}{12} - 1 \geq \frac{p}{24}.$$

Обозначим через k_1 наименьший и через k_2 наибольший номер k , для которого $\psi_k \in I_+$. Тогда $\psi_{k_1}, \psi_{k_1+1}, \dots, \psi_{k_2}$ все принадлежат I_+ и при этом

$$k_2 - k_1 + 1 \geq \frac{p}{24} \quad (2.11)$$

(кроме того, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1$).

Оценим сумму

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \psi_k.$$

Так как $\cos \psi_k \geq \frac{1}{2}$ для всех рассматриваемых значений ψ_k , то

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \geq \frac{1}{2}(k_2 - k_1 + 1) \geq \frac{p}{48}$$

в силу (2.11).

Если бы вместо I_+ у нас был бы I_- , то получили бы

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \leq -\frac{p}{48}$$

и тогда все равно

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48},$$

и лемма 2 доказана.

Введем теперь в рассмотрение сопряженные тригонометрические полиномы

$$T_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos[(N+k)x - k\gamma],$$

$$Q_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin[(N+k)x - k\gamma].$$

Так как их можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{N,p}(x, \gamma) &= \sum_{k=0}^{p-1} \cos [k(x - \gamma) + N_x] = D_p(x - \gamma, N_x), \\ Q_{N,p}(x, \gamma) &= \sum_{k=0}^{p-1} \sin [k(x - \gamma) + N_x] = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \cos \left[k(x - \gamma) + N_x - \frac{\pi}{2} \right] = D_p \left(x - \gamma, N_x - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

то получаем

С л е д с т в и е л е м м ы 2. Пусть $p \geq 24$. Для любого x , удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{\pi}{p} \leq x - \gamma \leq \frac{3\pi}{p}, \quad \text{т. е.} \quad \left| x - \gamma - \frac{2\pi}{p} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

найдутся такие отрезки полиномов $T_{N,p}(x, \gamma)$ и $Q_{N,p}(x, \gamma)$, для которых

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos [(N+k)x - k\gamma] \right| &\geq \frac{p}{48}, \\ \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sin [(N+k)x - k\gamma] \right| &\geq \frac{p}{48}. \end{aligned}$$

Теперь мы уже в состоянии перейти к доказательству сформулированной выше теоремы Стечкина.

Итак, пусть задана последовательность чисел a_n таких, что $a_n \downarrow 0$ и $\sum a_n^2 = +\infty$. На основании леммы 1 выберем натуральные p_n так, чтобы

$$p_n \leq p_{n+1} (n = 1, 2, \dots), \quad \sum \frac{1}{p_n} = +\infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{p_n} \leq a_{N_n}, \quad \text{где} \quad N_n = \sum_{k=1}^n p_k.$$

Так как $a_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то $p_n \rightarrow \infty$ (и притом монотонно). Из самого определения чисел N_n следует, что

$$N_{n-1} + p_n - 1 = N_n - 1 < N_n. \quad (2.13)$$

Положим

$$\gamma_n = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} - 3\pi \frac{1}{p_n} \quad (2.14)$$

и построим ряды

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} T_{N_{n-1} + p_n}(x, \gamma_n), \\ \bar{S}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} Q_{N_{n-1} + p_n}(x, \gamma_n). \end{aligned}$$

Докажем, что это будут сопряженные тригонометрические ряды, удовлетворяющие условиям доказываемой теоремы.

Прежде всего заметим, что это будут обычные тригонометрические ряды, так как порядок полинома $T_{N_{n-1} + p_n}$ есть $N_{n-1} + p_n - 1$ и в силу (2.13) он меньше, чем порядок самого младшего из членов полинома $T_{N_n, p_{n+1}}$ (и аналогично для $Q_{N_{n-1} + p_n}$).

Ряды $S(x)$ и $\bar{S}(x)$ являются сопряженными, так как $T_{N,p}(x, \gamma)$ и $Q_{N,p}(x, \gamma)$ — сопряженные тригонометрические полиномы при любых N и p .

Оценим коэффициенты рядов $S(x)$ и $\bar{S}(x)$. Имеем для $N_{n-1} \leq N < N_n$

$$|a_N| \leq \frac{1}{p_n} \quad \text{и} \quad |b_N| \leq \frac{1}{p_n}.$$

Но

$$\frac{1}{p_n} \leq a_{N_n} \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

в силу монотонности последовательности a_k , значит, коэффициенты наших рядов удовлетворяют нужному требованию.

Остается доказать расходимость этих рядов в каждой точке. Мы проведем это доказательство для ряда $S(x)$; так как для $\bar{S}(x)$ оно совершенно аналогично.

Пусть x_0 — любая точка на $[0, 2\pi]$. Так как ряд $\sum \frac{1}{p_n}$ расходится, то для любого целого неотрицательного l найдется такое натуральное число n_l , что

$$2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} \leq x_0 + 2\pi l < 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k}. \quad (2.15)$$

Ясно, что $n_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$.

Докажем, что

$$\left| x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - \frac{2\pi}{p_{n_l}} \right| \leq \frac{\pi}{p_{n_l}} \quad (2.16)$$

(т. е. для $x_0 + 2\pi l$ удовлетворено неравенство вида (2.12)). Действительно, из (2.14) следует

$$\gamma_{n_l} + \frac{2\pi}{p_{n_l}} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k} - \frac{\pi}{p_{n_l}} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} + \frac{\pi}{p_{n_l}}.$$

Вычитая теперь $\gamma_{n_l} + \frac{2\pi}{p_{n_l}}$ из (2.15), находим

$$-\frac{\pi}{p_{n_l}} \leq x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - \frac{2\pi}{p_{n_l}} < \frac{\pi}{p_{n_l}},$$

т. е. (2.16) доказано.

На основании следствия из леммы 2, как только p_{n_l} станет ≥ 24 , можно будет найти такой отрезок полинома $T_{N_{n_l}-p_{n_l}}(x_0, \gamma_{n_l})$, что

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos[(N_{n_l-1} + k)x_0 - k\gamma_{n_l}] \right| \geq \frac{p_{n_l}}{48},$$

откуда

$$\left| \frac{1}{p_{n_l}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos[(N_{n_l-1} + k)x_0 - k\gamma_{n_l}] \right| \geq \frac{1}{48}. \quad (2.17)$$

Выражение, стоящее под знаком модуля в этом неравенстве, есть отрезок ряда $S(x)$ при $x = x_0$.

Так как для всех l , для которых $p_{n_l} \geq 24$, неравенство (2.17) имеет место, а $p_{n_l} \rightarrow \infty$, то найдется бесконечное множество отрезков ряда $S(x)$, абсолютные величины которых не меньше $\frac{1}{48}$ при $x = x_0$, т. е. ряд в этой точке расходится.

З а м е ч а н и е. В связи с вопросом о скорости стремления к нулю коэффициентов всюду расходящихся тригонометрических рядов, есте-

ственно поставить вопрос и о «регулярности» их убывания. Напомним (см. § 4 главы XI), что лакунарные ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, не могут всюду расходиться, т. е. невозможен случай, когда $a_m = b_m = 0$ для всех m , кроме $m = n_k$, где $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность. В недавно появившейся работе Кеннеди (Kennedy^[2]) показано, что требование лакунарности здесь в известном смысле нельзя усилить. Точнее, имеет место теорема: если $\Phi(t) \downarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то существует всюду расходящийся ряд вида $\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$, где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 + \Phi(n_k).$$

§ 3. Расходимость на множестве второй категории

Мы видели в предыдущем параграфе, что если только $\varrho_n \downarrow 0$ и $\sum \varrho_n^2$ расходится, то существуют тригонометрические ряды, коэффициенты которых имеют порядок $O(\varrho_n)$, и однако эти ряды расходятся в каждой точке.

Салем поставил вопрос так: рассмотрим ряд

$$\sum \varrho_n \cos(nx - a_n), \quad (3.1)$$

где числа ϱ_n заданы. При каких ограничениях, наложенных на эти ϱ_n , мы можем утверждать, что для любых a_n ряд (3.1) сходится всюду, кроме, быть может, множества первой категории? Оказалось, что, кроме тривиальной гипотезы $\sum \varrho_n < +\infty$ (когда ряд (3.1) сходится и даже абсолютно для всех значений x), никаких других условий указать нельзя. Более того, Салем доказал следующую теорему (Salem^[4]):

Т е о р е м а. Пусть числа $\varrho_n \geq 0$ заданы и $\sum \varrho_n = +\infty$; тогда можно всегда подобрать числа a_n так, чтобы ряд

$$\sum \varrho_n \cos(nx - a_n)$$

расходился на множестве второй категории.

Для удобства рассуждений будем подбирать s_n так, чтобы получить ряд

$$\sum r_n e^{2\pi i(nx - s_n)}, \quad (3.2)$$

расходящийся на множестве второй категории, тогда либо

$$\sum r_n \cos(nx - s_n), \quad \text{либо} \quad \sum r_n \sin(nx - s_n)$$

обладает тем же свойством, а каждый из них есть ряд вида (3.1) при разумном подборе чисел a_n .

Пусть $\varphi(\nu)$ — функция, определенная для всех натуральных ν и принимающая целочисленные значения: мы будем предполагать $\varphi(\nu) \uparrow \infty$, но подберем ее позже.

Расположим все дроби вида $\frac{p}{q}$, где $0 \leq p \leq q$, в виде таблицы

0				
	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{1}$	
	$\frac{0}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$
.....				
$\frac{0}{p}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{2}{p}$...	$\frac{p}{p}$
.....				

Обозначим через $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ последовательность чисел, которые мы получим, если будем пробегать последовательно строки таблицы, а в каждой строке все элементы слева направо, но каждую дробь будем повторять по нескольку раз, а именно:

$$\begin{aligned} & \text{сначала } \varphi(0) \text{ раз напишем } \frac{0}{1}, \\ & \text{затем } \varphi(1) \text{ раз напишем } \frac{0}{1}, \\ & \quad \gg \varphi(2) \text{ раз напишем } \frac{1}{1}, \\ & \quad \gg \varphi(3) \text{ раз напишем } \frac{0}{2}, \\ & \quad \gg \varphi(4) \text{ раз напишем } \frac{1}{2}, \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Легко подсчитать при этом законе, что $\frac{p}{q}$ будет повторено $\varphi\left(\frac{q(q+1)}{2} + p\right)$ раз. Полагая

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

докажем, что так построенный ряд (3.2) удовлетворяет условиям теоремы.

Число членов m , которые мы встретим в ряде $\sum u_n$ раньше, чем дойдем до тех u_n , которые совпадают с дробью $\frac{p}{q}$, есть, очевидно,

$$m = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi\left(\frac{q(q+1)}{2} + p - 1\right). \quad (3.3)$$

Дальше пойдет $\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]$ членов вида $\frac{p}{q}$; рассмотрим соответствующий этим членам отрезок ряда (3.2), он имеет вид

$$\sigma = \sum_{n=m+1}^{m+\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]} r_n e^{2\pi i(n x - s_n)}.$$

Но $s_n = s_m + k \frac{p}{q}$ для $n = m + k$, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]} r_{m+k} e^{2\pi i\left[(m+k)x - s_m - k \frac{p}{q}\right]} = \\ &= e^{2\pi i(mx - s_m)} \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]} r_{m+k} e^{2\pi i k \left(x - \frac{p}{q}\right)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть $x = \frac{p_0}{q_0}$ — любая несократимая дробь. Для любого целого j можем написать $x = \frac{p_0 j}{q_0 j} = \frac{p_j}{q_j}$ и тогда из (3.4) для этого x находим

$$|\sigma| = \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q_j(q_j+1)}{2} + p_j\right]} r_{m_j+k}. \quad (3.5)$$

Здесь через m_j мы обозначили величину m из (3.3), если там вместо p и q писать p_j и q_j . Ясно, что $m_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Мы предположили $\sum r_n = +\infty$, потому для всякого n можно найти такое $\varphi(n)$, что

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \dots + r_{n+\varphi(n)} > n. \quad (3.6)$$

Поэтому если

$$\varphi \left[\frac{q_j(q_j+1)}{2} + p_j \right] \geq \psi(m_j) = \psi \left\{ \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi \left[\frac{q_j(q_j+1)}{2} + p_j - 1 \right] \right\}, \quad (3.7)$$

то будем иметь из (3.5)

$$|\sigma| > m_j \quad (3.8)$$

каждый раз, как x удовлетворяет неравенству (3.5). Значит, если мы определим $\psi(n)$ так, чтобы удовлетворялось (3.6), и $\varphi(v)$ так, чтобы

$$\varphi(v) \geq \psi[\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(v-1)], \quad (3.9)$$

то будет удовлетворено (3.8).

Но в этом рассуждении j любое целое. Поэтому для заданного рационального x в ряде (3.2) имеется бесконечное множество отрезков, удовлетворяющих (3.8), т. е. он неограниченно расходится для этого x . Итак, он неограниченно расходится для всякого рационального x , а тогда и на множестве второй категории (см. глава IV, § 19).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Поскольку r_n в этой теореме были любые, лишь бы $\sum r_n = +\infty$, то, в частности, можно предполагать $\sum r_n^2 < +\infty$ и, значит, получить расходимость ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом на множестве второй категории. Но, как отмечает сам Салем, построить таким методом ряд, расходящийся на множестве меры больше нуля, заведомо не удастся. Действительно, метод Салема заключается в том, что ряд

$$\sum r_n \cos(nx - a_n)$$

разлагается на счетное число кусков $U_k(x)$ и для каждого x из некоторого E найдется бесконечное множество кусков $U_{n_1}(x), U_{n_2}(x), \dots, U_{n_k}(x)$, (зависящих от x) и таких, что $|U_{n_k}(x)| > a > 0$. Но если

$$U_{n_k}(x) = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} r_n \cos(nx - a_n),$$

то

$$\int_0^{2\pi} U_{n_k}^2(x) dx = \pi \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} r_n^2,$$

а потому ряд $\sum_0^{2\pi} U_{n_k}^2(x) dx < +\infty$, значит, $\sum U_{n_k}^2(x)$ сходится почти всюду, а тогда $U_{n_k}(x) \rightarrow 0$ почти всюду, что противоречит $|U_{n_k}(x)| > a$ для $x \in E$, если $mE > 0$.

§ 4. Множества типа R

Мы знаем, что если $mE > 0$, то из сходимости тригонометрического ряда на E следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Однако этот результат может быть значительно обобщен. С этой целью введем

О п р е д е л е н и е. Множество E назовем *множеством типа R* или *кратко R -множеством**, если существует тригонометрический ряд, сходящийся на E , и такой, что его коэффициенты не стремятся к нулю.

*) Это название ввел Салем (Salem [3]); он упоминает, что назвал эти множества так в честь Райхмана, изучавшего их структуру.

Из результата, который мы только что напомним, сразу следует, что все R -множества имеют меру нуль. Мы ставим себе целью изучить вопрос, когда заданное множество меры нуль есть R -множество, и когда этого нет. Вопрос этот далеко не решен, поэтому мы вынуждены ограничиться указанием отдельно необходимых и отдельно достаточных условий.

Прежде всего установим вспомогательное предложение.

Л е м м а 1. *Если E есть R -множество, то оно сохраняет это свойство и после любого сдвига вдоль оси абсцисс.*

Действительно, пусть x_0 — любое число, и пусть \mathcal{E} — множество точек вида $t = x - x_0$ при $x \in E$. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4.1)$$

— тригонометрический ряд, сходящийся на E и такой, что

$$a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0.$$

Положим

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0,$$

$$\beta_n = b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0.$$

Тогда

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$$

и, однако, так как при $x = x_0 + t$ имеем

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt,$$

то сходимость (4.1) на E влечет сходимость

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt \quad \text{на } \mathcal{E},$$

т. е. \mathcal{E} есть R -множество.

Л е м м а 2. *Если E есть R -множество и E содержит точку 0, то найдется такая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k x = 0 \quad \text{при } x \in E.$$

Действительно, пусть ряд (4.1) сходится на E , но $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$. Если $x = 0$ принадлежит E , то ряд (4.1) сходится при $x = 0$, а это значит, что $\frac{a_0}{2} + \sum a_n$ сходится, откуда

$$a_n \rightarrow 0.$$

Из сходимости (4.1) на E следует

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \rightarrow 0 \quad \text{на } E$$

а так как $a_n \cos nx \rightarrow 0$, то, значит, и $b_n \sin nx \rightarrow 0$ на E . Но $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$, и $a_n \rightarrow 0$, значит $b_n \rightarrow 0$. Поэтому найдутся такие n_k , что

$$|b_{n_k}| > a > 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а в то же время

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \sin n_k x = 0 \quad \text{на } E,$$

отсюда и следует нужное утверждение.

В дальнейшем нам будет полезно следующее определение, принадлежащее Арбо (Arbault [1]):

О п р е д е л е н и е. Множество \mathcal{E} точек t , лежащих на $[0, 1]$, допускает нулевую последовательность, если существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k t = 0 \quad \text{для} \quad t \in \mathcal{E}.$$

Приняв это определение, мы можем сказать, что если E есть R -множество на $[0, 2\pi]$ и E содержит точку 0, то множество \mathcal{E} точек t вида $t = \frac{x}{2\pi}$, где $x \in E$, допускает нулевую последовательность. Действительно, в силу леммы 2 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k x = 0 \quad \text{для} \quad x \in E$$

или

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin 2\pi n_k t = 0 \quad \text{для} \quad t \in \mathcal{E}$$

и $\{2n_k\}$ есть нужная последовательность.

В дальнейшем мы для удобства будем вообще рассматривать множества на $(0, 1)$ и соответственно ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx. \quad (4.2)$$

Мы условимся говорить, чтобы не вводить новой терминологии, что множество E на $(0, 1)$ есть R -множество, если существует ряд (4.2), сходящийся на E и такой, что $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$.

Если так, то предыдущий результат можно сформулировать следующим образом:

Если E есть R -множество и E содержит точку 0, то E допускает нулевую последовательность.

Этот результат, несмотря на свою простоту, очень полезен во всем дальнейшем.

Чтобы получить новые сведения об R -множествах, нам понадобится рассмотреть очень интересный класс множеств, который, как мы увидим дальше, встречается в целом ряде проблем теории тригонометрических рядов. Это множество типа H (так их назвал Райхман (Rajchman [2]) в честь Харди и Литтлвуда, впервые рассмотревших эти множества (Hardy and Littlewood [2])).

§ 5. Множества типа H

Райхман дал для этих множеств два разных определения, одно арифметическое (Rajchman [2]) и другое геометрическое (Rajchman [4]), и доказал их эквивалентность.

Мы рассмотрим оба эти определения и будем при доказательствах пользоваться иногда одним, иногда другим.

Пусть E — замкнутое множество на $[0, 1]$. Точке $x \in E$ приводим в соответствие точку M_x с полярными координатами $r = 1$ и $\theta = 2\pi x$. Когда x пробегает E , точка M_x пробегает некоторое замкнутое множество \mathcal{E} на окружности радиуса 1. Пусть \mathcal{E}_k — множество точек M_{kx} для $x \in E$. Ясно, что точка M_{kx} совпадает с $M_{(kt)}$, где (t) — дробная часть числа t . Пусть $2\pi d_k$ — длина максимальной смежной дуги ко множеству \mathcal{E}_k .

О п р е д е л е н и е 1. Множество E называется H -множеством, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d_n > 0. \quad (5.1)$$

Например, если E есть канторово совершенное множество, то, полагая $n = 3^k$, видим, что все множества \mathcal{E}_{3^k} ($k = 1, 2, \dots$) совпадают между собой и

$$d_{3^k} = \frac{1}{3} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а потому канторово множество есть H -множество.

О п р е д е л е н и е 2. Множество E называется H -множеством, если существует последовательность целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и два числа α и δ , $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \delta < 1$, таких, что

$$0 \leq (n_k x - \alpha) \leq \delta \quad \text{для} \quad x \in E \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5.2)$$

где (t) — дробная часть числа t .

Здесь требование $\delta < 1$ является самым существенным.

Если ничего больше не добавить, то эти определения не эквивалентны, так как во втором не требуется замкнутости E . Однако, если всякую часть замкнутого H -множества условиться опять называть H -множеством, то можно убедиться в эквивалентности обоих определений.

Покажем, что всякое множество A , удовлетворяющее определению 2, содержится в некотором замкнутом множестве E , удовлетворяющем определению 1.

Действительно, пусть A есть множество, удовлетворяющее второму определению. Возьмем входящую в это определение последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и для каждого n_k рассмотрим на $[0, 1]$ множество F_k тех x , для которых хотя бы при одном целом N имеем

$$\alpha \leq n_k x - N \leq \alpha + \delta. \quad (5.3)$$

Так как $0 \leq N \leq n_k$, то таких чисел N может быть лишь конечное число ($N = 0, 1, \dots, n_k$) и, значит, множество точек $x \in [0, 1]$ и удовлетворяющих (5.3) хотя бы при одном N есть замкнутое множество. Пусть $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, значит, E тоже замкнуто. Если $x \in A$, то, полагая $N_k = [n_k x - \alpha]$, имеем в силу (5.2)

$$0 \leq n_k x - \alpha - N_k \leq \delta$$

или

$$\alpha \leq n_k x - N_k \leq \alpha + \delta,$$

т. е. $x \in F_k$ при любом k , значит, $x \in E$. Отсюда следует, что $A \subset E$. Теперь покажем, что E есть H -множество в смысле определения 1.

Если $x \in E$, то множество \mathcal{E}_{n_k} целиком умещается на дуге окружности, имеющей длину $2\pi\delta$, а потому максимальная смежная дуга к \mathcal{E}_{n_k} имеет длину не меньше, чем $2\pi(1 - \delta)$, т. е.

$$d_{n_k} \geq 1 - \delta,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n > 0,$$

т. е. E есть H -множество в смысле первого определения, а A есть часть H -множества*).

Обратно, пусть E удовлетворяет первому определению. Значит, найдется бесконечное множество таких \mathcal{E}_n , что для них

$$d_n > d > 0, \quad (5.4)$$

*) В ходе доказательства показано, что всякое H -множество содержится в замкнутом H -множестве. Этим мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

где $2\pi d_n$ — длина максимальной смежной к \mathcal{E}_n дуги. Возьмем такое N , что

$$\frac{2}{N} < d,$$

и разделим окружность радиуса 1 на N равных дуг $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$, каждая длины $\frac{2\pi}{N}$. Любая дуга σ длины $> 2\pi d$ покрывает целиком хотя бы одну из дуг Δ_i , а множеств \mathcal{E}_n , у которых максимальные смежные дуги удовлетворяют условию (5.4), имеется бесконечное множество. Значит найдется хоть одна дуга Δ_i такая, что

$$\Delta_i \subset (a_{n_k}, \beta_{n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где (a_{n_k}, β_{n_k}) — дуга длины $2\pi d_{n_k}$, смежная к \mathcal{E}_{n_k} . Если так, то \mathcal{E}_{n_k} все уместается вне дуги (a_{n_k}, β_{n_k}) , значит, и подалюбо вне Δ_i и если мы положим

$$\Delta_i = (2\pi\alpha, 2\pi\beta), \quad \text{где} \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1,$$

то в силу определения \mathcal{E}_{n_k} это значит, что

$$\alpha \leq n_k x - N_k \leq \beta$$

или

$$0 \leq n_k x - \alpha - N_k \leq \beta - \alpha \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Но Δ имеет длину $\frac{2\pi}{N}$, значит, $\beta - \alpha = \frac{1}{N} < 1$. Отсюда

$$0 \leq (n_k x - \alpha) < \delta, \quad \text{где} \quad \delta < 1,$$

и мы пришли ко второму определению.

Итак, оба определения эквивалентны.

Покажем теперь, что всякое H -множество имеет меру нуль.

Пусть A — рассматриваемое множество. Тогда, как мы видели выше, при любом k всякое $x \in A$ удовлетворяет условию $x \in F_k$, т. е. каждое $x \in A$ входит в один из n_k отрезков длины $\frac{\delta}{n_k}$, а именно

$$\frac{\alpha}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + \delta}{n_k}, \quad \frac{\alpha + 1}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + 1 + \delta}{n_k}, \dots, \quad \frac{\alpha + n_k - 1}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + n_k - 1 + \delta}{n_k}$$

(в случае, если $\alpha + \delta > 1$, крайний из этих отрезков разобьется на два куска, один слева от 1, другой справа от нуля). Обозначим через E_k это множество.

Вглядываясь в геометрическую картину расположения отрезков, составляющих E_k , мы легко видим, что если Δ есть любой сегмент на $[0, 1]$, то часть E_k , попавшая на Δ , имеет меру, которая стремится к $\delta \Delta$ при $k \rightarrow \infty$:

$$m(E_k \Delta) \rightarrow \delta \Delta \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Значит, если θ выбрано так, что $\delta < \theta < 1$ (а это возможно, потому что $\delta < 1$), то при достаточно большом k имеем

$$m(E_k \Delta) \leq \theta \Delta$$

и это же верно, если вместо одного сегмента Δ мы рассмотрим систему S из конечного числа сегментов, т. е.

$$m(E_k S) < \theta S \quad \text{при} \quad \text{достаточно} \quad \text{большом} \quad k.$$

Но для рассматриваемого H -множества A имеем

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

отсюда, в частности,

$$A \subset \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k},$$

где числа p_k можно выбрать как угодно. Но E_{p_1} есть система из конечного числа сегментов, а p_2 мы можем взять столь большим, чтобы

$$m(E_{p_2} E_{p_1}) < \theta m E_{p_1} < \theta^2.$$

Также p_3 можно взять столь большим, чтобы

$$m E_{p_3}(E_{p_2} E_{p_1}) < \theta m(E_{p_2} E_{p_1}) < \theta^3.$$

Продолжая этот процесс, видим, что

$$mA < \theta^k,$$

где k может быть сделано как угодно большим, а это и значит, что $mA = 0$.

З а м е ч а н и е. Иногда бывает удобно вместо (t) , т. е. дробной части t , рассматривать $\{t\}$, т. е. $t - N$, где N — ближайшее к t целое. Нетрудно убедиться, что если бы мы в определении H -множества рассматривали вместо $(n_k x - a)$ величину $\{n_k x - a\}$, но при этом предполагали $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$ вместо $0 \leq a < 1$ и требовали

$$|\{n_k x - a\}| < \delta, \quad \text{где} \quad \delta < \frac{1}{2},$$

то получили бы снова H -множество.

§ 6. Множества типа H_σ . Теорема Райхмана

О п р е д е л е н и е. Множество E есть *множество типа H_σ* , если оно может быть покрыто суммой конечного числа или счетного множества H -множеств.

Так как всякое H -множество содержится в замкнутом H и все они имеют меру нуль, то всякое H нигде не плотно, а тогда H_σ всегда 1-й категории.

Докажем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а. *Всякое множество, допускающее нулевую последовательность, есть множество типа H_σ .*

Действительно, пусть E допускает нулевую последовательность, следовательно, найдутся такие n_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k x = 0, \quad x \in E.$$

Но

$$\sin \pi n_k x = \pm \sin \pi \{n_k x\},$$

если же $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$, откуда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\{n_k x\}| = 0, \quad x \in E.$$

Обозначим через $E_m^{(p)}$ множество тех x , для которых

$$|\{n_k x\}| \leq \frac{1}{m}, \quad k \geq p.$$

Если взять $m > 2$, то $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}$ и тогда в силу определения H -множеств и

замечания в конце § 5 каждое $E_m^{(p)}$ есть H -множество. Но тогда для заданного m , полагая

$$\mathcal{E}_m = \sum_{p=1}^{\infty} E_m^{(p)},$$

видим, что \mathcal{E}_m есть H_σ . Ясно, что если $x \in E$, то для любого m найдется такое p , что $x \in E_m^{(p)}$, значит, $x \in \mathcal{E}_m$. Итак, $E \subset \mathcal{E}_m$, значит, E не только H_σ , но даже произведение счетного множества множеств \mathcal{E}_m типа H_σ , которые с ростом m могут лишь терять точки.

Как следствие получаем теорему:

Т е о р е м а Р а й х м а н а. *Всякое R -множество есть множество типа H_σ , т. е. тригонометрический ряд с коэффициентами, не стремящимися к нулю, может сходиться лишь на множестве типа H_σ .*

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим заданное R -множество E и сдвинем его по оси абсцисс так, чтобы получилось множество \mathcal{E} , содержащее точку 0. Это \mathcal{E} будет опять R -множеством и в силу леммы 2 § 4 множество \mathcal{E} допускает нулевую последовательность. В таком случае, по доказанному, \mathcal{E} будет типа H_σ . Но от сдвига H -множество не перестанет быть H , значит, H_σ не перестанет быть H_σ . Итак, первоначальное множество R имеет тип H_σ , и теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве E не первой категории, то его коэффициенты стремятся к нулю*).*

Действительно, в противном случае E было бы типа H_σ , т. е. заведомо 1-й категории.

Более того, в главе XIV мы познакомимся подробно с так называемыми M -множествами (см. определение в § 70 главы I). Будет доказано, что никакое M -множество не может быть типа H_σ (см. § 6 главы XIV). Отсюда следует, что если тригонометрический ряд сходится на M -множестве, то его коэффициенты стремятся к нулю.

§ 7. Достаточные условия для R -множеств

Полученное нами в § 6 необходимое условие для R -множеств очень слабо. Действительно, не только H_σ не должно быть R -множеством, но и H -множество (в этом мы убедимся в § 8). В поисках достаточных условий вернемся ко множествам, допускающим нулевую последовательность. Мы не знаем, всякое ли такое множество есть R -множество. Но мы видели в § 6, что если E допускает нулевую последовательность, то найдутся такие $\{n_k\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\{n_k x\}| = 0, \quad x \in E. \quad (7.1)$$

Покажем, что, несколько усиливая условие (7.1), мы можем добиться того, чтобы получить R -множество и даже R -множество специальной природы. Введем, следуя Арбо (Arbault [1]), такое определение**):

О п р е д е л е н и е. Множество E называется N_0 -множеством, если существует последовательность целых n_k такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi n_k x \quad (7.2)$$

сходится абсолютно на E .

*) Впервые эта теорема была доказана Юнгом (Young W. H. [1]).

**) Арбо пользовался этим определением при изучении абсолютной сходимости. Мы встретимся еще с множествами N_0 в главе XIII.

Так как для $x \in E$

$$\sum |\sin 2\pi n_k x| \leq 2 \sum |\sin \pi n_k x| < +\infty,$$

то отсюда следует и абсолютная сходимость ряда $\sum \sin 2\pi n_k x$ на E , а тогда из определения R -множества ясно, что всякое N_0 -множество есть R -множество.

Приняв это определение, докажем лемму:

Л е м м а. Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и пусть E обладает таким свойством: существует последовательность целых n_k таких, что для всякого $x \in E$ найдется k_x (зависящее от x) и такое, что

$$|\{n_k x\}| < \varepsilon_k \quad \text{для } k > k_x.$$

Тогда E есть N_0 -множество (а значит, и R -множество).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно предполагать, что $\sum \varepsilon_k < +\infty$, так как, выбрав из них подпоследовательность $\varepsilon_{k_s} = \varepsilon_s$, образующую сходящийся ряд, и полагая $n_{k_s} = m_s$, мы видим, что достаточно доказывать теорему для случая сходящегося ряда.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} b_{n_k} &= 1 & (k = 1, 2, \dots), \\ b_n &= 0, & \text{если } n \neq n_k \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Ряд

$$\sum b_n \sin \pi n x$$

сходится и даже абсолютно на E , так как для $x \in E$

$$|\sin \pi n_k x| = |\sin \pi \{n_k x\}| \leq \pi |\{n_k x\}| \leq \pi \varepsilon_k$$

для $k \geq k_x$, а $\sum \varepsilon_k < +\infty$. Кроме того,

$$\sum_{n \neq n_k} |b_n \sin \pi n x| = 0.$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin \pi n x| \text{ сходится на } E.$$

Отсюда следует, что E есть N_0 -множество.

Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, можно получить теорему.

Т е о р е м а. Всякое счетное множество есть R -множество (и даже N_0 -множество).

Действительно, пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

— заданное счетное множество (расположенное на $[0, 1]$).

Пусть ε_k — любые положительные числа, стремящиеся к нулю. Выберем число n_1 так, чтобы

$$\frac{1}{n_1} < \varepsilon_1$$

и чтобы в силу теоремы Минковского (см. Добавления, § 24), нашлось такое p'_1 , для которого

$$\left| x_1 - \frac{p'_1}{n_1} \right| \leq \frac{1}{n_1^2}.$$

Допустим, что $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ уже выбраны; тогда выбираем n_k так, чтобы

$$n_k > n_{k-1}, \quad \frac{1}{\frac{1}{k}} < \varepsilon_k \quad \text{и} \quad \left| x_i - \frac{p_i^{(k)}}{n_k} \right| < \frac{1}{\frac{1}{k}}$$

при некоторых целых $p_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Ясно, что мы имеем

$$|\{n_k x_i\}| < \frac{1}{\frac{1}{k}} < \varepsilon_k \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Теперь мы находимся в условиях предыдущей леммы; в самом деле, для каждого x_i , как только $k \geq i$, будем иметь

$$|\{n_k x_i\}| < \varepsilon_k.$$

Отсюда следует, что счетное множество есть N_0 -множество, а значит, и R -множество*).

Однако нетрудно показать на примере, что R -множества могут иметь мощность континуума, например быть совершенными. Чтобы убедиться в этом, разделим отрезок $[0, 1]$ на 3 равные части и выбросим средний интервал длины $\frac{1}{3}$; каждый из двух оставшихся сегментов $\varrho_1^{(1)}$ и $\varrho_2^{(1)}$ разделим на 9 равных частей и выбросим по интервалу длины $\frac{7}{9}$ от первоначального, сохранив слева и справа по сегменту длины $\frac{1}{9}$ от $\varrho_1^{(1)}$ или $\varrho_2^{(1)}$; вообще после m первых шагов процесса в оставшихся 2^m сегментах $\varrho_1^{(m)}, \dots, \varrho_{2^m}^{(m)}$ произведем деление на 3^{m+1} равных частей и, выбросив средние интервалы, сохраним слева и справа по сегменту длины $\frac{1}{3^{m+1}}$ $\varrho_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) и т. д.

Ясно, что получим совершенное множество P . Легко видеть, из построения, что если положить

$$n_m = 3^{1+2+\dots+m} = 3^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

то для любого $x \in P$ имеем

$$|\{n_m x\}| \leq \frac{1}{3^{m+1}} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

а потому на основании леммы, доказанной в начале этого параграфа, мы видим, что P есть R -множество.

§ 8. Базисы**)

Для того чтобы получить новые необходимые условия для R -множеств, введем понятие базиса, которое понадобится не только здесь, но и в главе XIII.

О п р е д е л е н и е. Множество точек E , лежащее на прямой, называется *базисом*, если для любой точки x на этой прямой найдутся такие

*) Доказательство проведено тем методом, которым В. В. Немыцкий [1] доказывал, что счетное множество есть N -множество (о понятии N -множества см. глава XIII, § 1).

**) Для чтения §§ 8 и 9 этой главы необходимо предварительно ознакомиться с определениями симметрических множеств и множеств с постоянным отношением. Эти определения даны в §§ 19 и 20 главы XIV.

точки x_1, x_2, \dots, x_n из E и такие целые числа k_1, k_2, \dots, k_n , что $x = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$.

Можно также писать

$$x = \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2x_2 + \dots + \varepsilon_mx_m,$$

где все $\varepsilon_i = \pm 1$, но уже точки $x_i \in E$ не обязательно различны.

В качестве интересного примера базиса можно привести канторово совершенное множество P . Штейнгауз (Steinhaus [7]) доказал, что для любого $t \in [0, 1]$ имеем $t = x + y$, где $x \in P$ и $y \in P$. Отсюда уже ясно, что любое t , $-\infty < t < +\infty$, можно представить в виде $t = nx + ny$, где n — целое, а $x \in P$ и $y \in P$.

Для доказательства теоремы Штейнгауза разобьем квадрат с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ на 9 равных квадратов и удалим внутренние точки 5 квадратов, образующих крест; с каждым из 4 оставшихся квадратов поступим так же, и т. д. В результате на плоскости получим множество π , проекции которого как на ось Ox , так и на ось Oy дают канторово множество P (рис. 44).

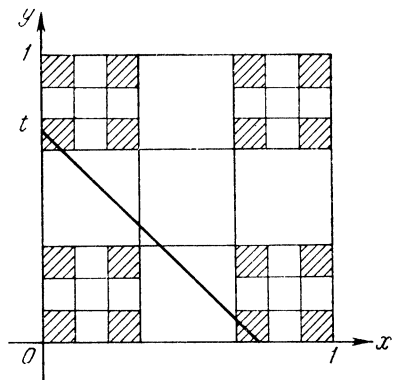


Рис. 44

Пусть t — любое число $0 \leq t \leq 1$. Проведем прямую $t = x + y$ и покажем, что она непременно пересечет множество π , а тогда $x \in P$ и $y \in P$. Для того чтобы убедиться в этом, мы заметим, что наша прямая пересекает основной квадрат, по крайней мере один из 4-х квадратов, оставшихся после удаления первого креста, по крайней мере один из 16 квадратов, оставшихся после второй операции удаления крестов, и т. д. Таким образом она пересекает каждое из множеств, в результате пересечения которых получается π ; значит, она пересечет и само π .

Итак, канторово множество есть базис.

Мы увидим несколько дальше, что этот результат можно получить и из более общего, касающегося совершенных множеств с постоянным отношением*), но сейчас мы ограничимся этим примером. Прежде чем вернуться к R -множествам, мы установим еще две теоремы о базисах.

Для этого сначала заметим, что если для некоторого множества E мы нашли такое $\delta > 0$, что любую точку отрезка $0 \leq t \leq \delta$ можно представить в виде

$$t = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m, \quad (8.1)$$

где все $x_i \in E$, а все k_i целые, то E есть базис.

Действительно, пусть x — любое положительное. Выберем целое n так, чтобы

$$(n-1)\delta \leq x < n\delta.$$

Тогда, полагая $\frac{x}{n} = t$, видим, что $0 \leq t < \delta$, и значит, t можно представить в форме (8.1). Отсюда следует, что

$$x = k_1nx_1 + k_2nx_2 + \dots + k_mnx_m. \quad (8.2)$$

Если x отрицательно, то $-x$ представляем в форме (8.2), а так как все $-k_i n$ снова целые, то и в этом случае нужное разложение получено.

*) См. § 20 главы XIV.

После этого замечания докажем теорему*).

Т е о р е м а 1. *Всякое множество меры больше нуля есть базис.*

Возьмем точку плотности x_0 рассматриваемого множества E . Окружим ее столь малым интервалом Δ , чтобы для любого $\delta \subset \Delta$ и содержащего x_0 иметь

$$m(E\delta) > \frac{3}{4}\delta.$$

Пусть δ_1 — интервал концентрический с Δ и такой, что

$$\delta_1 = \frac{3}{4}\Delta.$$

Имеем

$$m(E\delta_1) > \frac{3}{4}\delta_1 = \frac{9}{16}\Delta.$$

Если мы сдвинем δ_1 вправо или влево на величину h , $0 < h < \frac{\Delta}{8}$, то получим интервал δ_2 , все еще лежащий в Δ и содержащий x_0 , а множество E перейдет в E_h , причем

$$m(E_h\delta_2) > \frac{3}{4}\delta_2 = \frac{9}{16}\Delta.$$

Тем более

$$m(E\Delta) > \frac{9}{16}\Delta \quad \text{и} \quad m(E_h\Delta) > \frac{9}{16}\Delta,$$

откуда следует, поскольку $\frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, что множества E и E_h должны пересекаться. Пусть $x \in EE_h$. Тогда

$$x = x_1, \quad \text{где} \quad x_1 \in E$$

и

$$x = x_2 + h, \quad \text{где} \quad x_2 \in E,$$

т. е.

$$h = x_1 - x_2.$$

Итак, любое h из $(0, \frac{\Delta}{8})$ можно представить в виде $h = x_1 - x_2$. Значит, на основании предыдущего замечания можно утверждать, что E — базис. Более того, всякое x можно представить в виде

$$x = nx_1 - nx_2,$$

где $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, а n целое.

Из этой теоремы выведем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Всякий базис после любого сдвига остается базисом.*

Действительно, пусть E — базис, а x_0 — любое число. Обозначим через \mathcal{E} множество точек вида $t = x - x_0$, где $x \in E$. Надо доказать, что \mathcal{E} — снова базис.

Пусть x любое. Его можно записать в виде

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m,$$

где $x_i \in E$, а k_i целые. Положим

$$t_i = x_i - x_0.$$

Тогда

$$x = k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_m t_m + nx_0,$$

где $t_i \in \mathcal{E}$, а n целое.

*) Эта теорема доказана В. В. Немыцким [1].

Если таких представлений для x несколько, то выбираем какое-то одно из них.

Обозначим через E_n множество тех x , которые записываются в этой форме при заданном n ; имеем

$$(-\infty < x < +\infty) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n.$$

Значит, хотя бы одно из E_n имеет меру больше нуля; пусть это будет E_{n_0} . По предыдущей теореме E_{n_0} — базис; более того, как видно из доказательства теоремы 1, любое y можно записать в виде

$$y = py_1 - py_2,$$

где $y_1 \in E_{n_0}$, $y_2 \in E_{n_0}$, а p целое. Но тогда, так как

$$y_1 = k_1 t_1 + \dots + k_m t_m + nx_0,$$

$$y_2 = l_1 \tau_1 + \dots + l_\mu \tau_\mu + nx_0,$$

где все t_i и τ_i принадлежат \mathcal{E} , а k_i и l_i целые, то

$$y = pk_1 t_1 + \dots + pk_m t_m - pl_1 \tau_1 - \dots - pl_\mu \tau_\mu$$

и, значит, любое y представляется в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами через точки из \mathcal{E} , а это и означает, что \mathcal{E} — базис.

Вернемся теперь к R -множествам. Докажем теорему:

Т е о р е м а 3. *Базис не может быть R -множеством.*

Другими словами, если тригонометрический ряд сходится на множестве E , являющемся базисом, то его коэффициенты стремятся к нулю.

Прежде всего сдвинем E так, чтобы получить множество \mathcal{E} , содержащее точку 0. Если E было базисом, то и \mathcal{E} также по теореме 2. Если бы E было R -множеством, то и \mathcal{E} также по лемме 1 § 4, а тогда по лемме 2 § 4 множество \mathcal{E} допускает нулевую последовательность, т. е. существуют такие n_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k \pi t = 0, \quad t \in \mathcal{E}.$$

Но \mathcal{E} базис. Поэтому для любого t имеем

$$t = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_m t_m,$$

где все t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) принадлежат \mathcal{E} , а все a_i целые.

Заметим теперь, что для любых α и β

$$|\sin(\alpha + \beta)| \leq |\sin \alpha| + |\sin \beta|$$

и по индукции

$$|\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)| \leq \sum_{i=1}^n |\sin x_i|,$$

в частности,

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|$$

для любого целого n . Поэтому

$$|\sin \pi n_k t| \leq \sum_{i=1}^m |\sin \pi n_k a_i t_i| \leq \sum_{i=1}^m |a_i| |\sin \pi n_k t_i|,$$

а так как $\sin n_k t_i \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $i = 1, 2, \dots, m$ в силу того, что $t_i \in \mathcal{E}$, мы видим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k t = 0$$

при любом t . Если так, то вся бесконечная прямая $-\infty < t < +\infty$ есть множество, допускающее нулевую последовательность. Но это неверно, поскольку в силу теоремы § 6 такое множество имеет тип H_σ , т. е. уже неверное первой категории и меры нуль.

С л е д с т в и е. *Канторово множество не есть R -множество.*

Действительно, мы видели в начале этого параграфа, что канторово множество есть базис. Таким образом, H -множества не должны быть R -множествами (и тем более множества типа H_σ).

Покажем теперь (мы уже упоминали об этом в начале параграфа), что свойство канторова множества быть базисом есть следствие более общего результата, касающегося симметрических совершенных множеств с постоянным отношением (см. определение этих множеств в главе XIV, § 20). Чтобы иметь возможность доказать, что эти множества являются базисами, нам понадобятся две леммы:

Л е м м а 1. *Каковы бы ни были $2p$ точек $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2p}$, лежащих на $[0, 1]$, можно всегда, не меняя суммы их абсцисс, разместить их в отрезках $\left[0, \frac{1}{p}\right]$ и $\left[\frac{p-1}{p}, 1\right]$.*

Действительно, пусть $x = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2p}$. Так как $0 \leq \theta_i \leq 1$, то $0 \leq x \leq 2p$. Поэтому $x = k + \theta$, где k — целое, $0 \leq k \leq 2p-1$ и $0 \leq \theta \leq 1$. Если $k < p$, то, полагая

$$\theta'_1 = \theta'_2 = \dots = \theta'_k = 1 \quad \text{и} \quad \theta'_{k+1} = \dots = \theta'_{2p} = \frac{\theta}{2p-k},$$

видим, что

$$\sum_{i=1}^{2p} \theta'_i = k + \theta = x.$$

При этом

$$\frac{\theta}{2p-k} < \frac{\theta}{p} \leq \frac{1}{p},$$

значит все условия удовлетворены.

Если же $p \leq k \leq 2p-1$, то положим $\theta'_1 = \dots = \theta'_{k+1} = 1 - \frac{1-\theta}{k+1}$ и $\theta'_i = 0$ при $i > k+1$. Тогда

$$1 - \theta'_i \leq \frac{1}{k+1} < \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, k+1$$

и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \theta'_i = k+1 - (k+1) \frac{1-\theta}{k+1} = k + \theta = x.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $p \geq 2$ — натуральное число, S — любая система из конечного числа непересекающихся сегментов равной длины, ϱ и S' — система, получаемая из нее, если из каждого сегмента выкинуть центральный интервал так, чтобы длины двух оставшихся сегментов были равны $\frac{\varrho}{p}$. Тогда, каковы бы ни были $2p$ точек на S , их всегда можно разместить на S_1 , не меняя суммы их абсцисс.*

Действительно, любая точка x_i из S имеет вид $x_i = a_i + \theta_i q$, где a_i — левый конец сегмента из S , содержащего x_i , и $0 \leq \theta_i \leq 1$.

Если таких точек x_i имеем $2p$ штук, то

$$\sum x_i = \sum a_i + q \sum \theta_i.$$

На основании леммы 1 можно написать

$$\sum \theta_i = \sum \theta'_i,$$

где для любого i имеем $0 \leq \theta'_i \leq \frac{1}{p}$ или $\frac{p-1}{p} \leq \theta'_i \leq 1$, поэтому, полагая

$$x'_i = a_i + q \theta'_i,$$

видим, что $\sum x'_i = \sum x_i$, и каждое x'_i принадлежит одному из сегментов системы S' .

Из доказанных лемм легко вывести теорему.

Т е о р е м а 4. *Всякое симметрическое множество P с постоянным отношением есть базис, и, следовательно, не есть R -множество.*

Действительно, пусть ξ есть то число, которое фигурирует в определении множества P с постоянным отношением. Выберем целое p так, чтобы

$$\frac{1}{p} < \xi.$$

Пусть x — любая точка на $[0, 1]$. Положим сначала

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{2p} = \frac{x}{2p}.$$

Тогда

$$\sum \theta_i = x.$$

Обозначим через S_1 систему из двух сегментов, оставшихся после удаления первого интервала в процессе построения P , через S_2 систему из 4 сегментов, оставшихся после второго шага процесса построения P , и вообще через S_m систему из 2^m сегментов, оставшихся после m первых шагов процесса построения P . В силу леммы 2 можно найти такие θ'_i , лежащие на S_1 , что $\sum \theta'_i = \sum \theta_i = x$; по той же лемме найдутся такие θ''_i , что

$$\sum \theta''_i = \sum \theta'_i = x$$

и все θ''_i лежат на S_2 и т. д.; в m -м шаге найдутся $\theta_i^{(m)}$, лежащие на S_m и $\sum \theta_i^{(m)} = x$, и так при любом m .

В итоге мы найдем такие x_i , лежащие на P , что $x = \sum x_i$, и так как это верно при любом x , то P есть базис.

§ 9. О мере Хаусдорфа и размерности Хаусдорфа для R -множеств

Хаусдорф ввел следующее определение для метрических пространств:

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X — пространство и p — любое действительное число $0 \leq p < +\infty$. Пусть для данного $\varepsilon > 0$

$$m_p^\varepsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^p,$$

где $X = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots$ — произвольное разложение пространства X на счетное число подмножеств диаметра меньшего, чем ε , и p — показатель степени*).

*) $\delta(A)$, где A — подмножество X , обозначает диаметр множества A ; при этом считают $[\delta(E)]^0 = 0$, если E пусто, и $[\delta(E)]^0 = 1$ в противном случае.

Тогда

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon$$

называется *p*-мерной мерой пространства *X*.

Легко доказывается, что если $p < q$, то $m_p(X) \geq m_q(X)$, причем, если $m_p(X) < +\infty$, то $m_q(X) = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Хаусдорфовой размерностью множества *X* называется верхняя грань всех действительных чисел *p*, для которых $m_p(X) > 0$.

Так, для канторова множества хаусдорфова размерность равна $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Действительно, каково бы ни было *n*, можно разбить это множество *P* на 2^n частей диаметра $\frac{1}{3^n}$, поэтому при $\varepsilon = \frac{1}{3^n}$

$$m_p^\varepsilon = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{1}{3^n}\right)^p = \frac{2^n}{3^{np}} = 1, \quad \text{если} \quad p = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

С другой стороны, пусть $p > \frac{\ln 2}{\ln 3}$; так как *n* можно взять как угодно большим, то $\left(\frac{2}{3^p}\right)^n$ как угодно мало, а потому $m_p^\varepsilon = 0$ и $m_p(X) = 0$.

Совершенно так же доказывается, что если *P* — совершенное множество с постоянным отношением ξ , то его хаусдорфова размерность есть $\frac{\ln 2}{|\ln \xi|}$.

Поскольку размерность по Хаусдорфу может служить для классификации множеств меры нуль, можно поставить вопрос, нельзя ли по размерности этих множеств судить о том, будут ли они *R*-множествами или нет. Однако на этот вопрос приходится дать отрицательный ответ, так как имеет место

Т е о р е м а. Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно найти совершенное множество хаусдорфовой размерности меньше ε и, однако, не *R*-множество. Напротив, для любого $\theta < 1$ можно найти множество размерности θ и являющееся *R*-множеством (и даже N_0 -множеством).

Первая половина этой теоремы доказывается так: выбираем ξ столь малым, чтобы

$$\frac{\ln 2}{|\ln \xi|} < \varepsilon,$$

и строим совершенное множество с постоянным отношением ξ . Тогда его размерность меньше ε и, однако, оно не есть *R*-множество в силу теоремы 4 § 8.

Для доказательства второй половины теоремы мы, следуя Салему (см. Salem [4]), рассмотрим на $[0, 1]$ симметрическое*) множество *P* с отношениями ξ_k , выбранными так: для некоторой последовательности натуральных чисел $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$, которые мы определим позже, будем брать $\xi_{i_j-1} = \frac{1}{2^j}$ ($j = 1, 2, \dots$), если же $k \neq i_j - 1$, будем полагать $\xi_k = \frac{1}{2}$ (т. е. в этом случае из сегмента $q^{(k)}$ ничего не выкидывается, но он делится пополам при переходе к шагу $k+1$). Ясно, что при $k = i_j$ будем иметь

$$q^{(k)} = \frac{1}{2^k j!},$$

причем таких сегментов $q^{(k)}$ имеется 2^k штук.

*) Определение этих множеств дано в главе XIV, § 19.

Если положить

$$n_k = 2^k (j-1)! \quad \text{для} \quad k = i_j,$$

то

$$n_k \varrho^{(k)} = \frac{1}{j}. \quad (9.1)$$

С другой стороны, обозначая через $\alpha_s^{(k)}$ левые концы сегментов $\varrho_s^{(k)}$ ($s = 1, 2, \dots, 2^k$), видим из построения, что при $k = i_j$

$$|\{n_k \alpha_s^{(k)}\}| = O\left(\frac{1}{j}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, 2^k). \quad (9.2)$$

Но так как для любых x и y

$$|\{x + y\}| \leq |\{x\}| + |\{y\}|$$

и любая точка $x \in P$ отстоит не более чем на $\varrho^{(k)}$ от одной из точек $\alpha_s^{(k)}$ ($s = 1, 2, \dots, 2^k$), мы видим, что

$$|\{n_k x\}| = O\left(\frac{1}{j}\right) \quad \text{для} \quad x \in P, \quad k = i_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Теперь мы находимся в условиях леммы § 8 и из нее заключаем, что P есть R -множество (и даже N_0 -множество).

Остается показать, что числа $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$ можно подобрать так, чтобы хаусдорфова размерность была равна θ , где θ наперед заданное, $0 < \theta < 1$.

Пусть θ задано, $0 < \theta < 1$. Покажем, что можно подобрать числа i_j так, чтобы

$$0 < A < 2^{i_j} \left(\frac{1}{2^{i_j} j!}\right)^\theta < B < +\infty. \quad (9.3)$$

Если это удастся, то

$$B > m_\theta^\varepsilon(P) > A \quad \text{для} \quad \varepsilon = \frac{1}{2^{i_j} j!},$$

а потому

$$B \geq m_\theta(P) > 0$$

и, с другой стороны, для всякого $\theta' > \theta$ будем иметь $m_{\theta'}(P) = 0$, потому что $m_\theta(P) < +\infty$. Итак, хаусдорфова размерность P будет равна θ , если мы найдем i_j такие, что (9.3) имеет место. Но для этого достаточно, чтобы

$$\ln A < i_j \ln 2 - \theta(i_j \ln 2 + \ln j!) < \ln B$$

или

$$\theta \ln j! + \ln A < i_j(1 - \theta) \ln 2 < \theta \ln j! + \ln B,$$

откуда

$$\frac{\theta \ln j! + \ln A}{(1 - \theta) \ln 2} < i_j < \frac{\theta \ln j! + \ln B}{(1 - \theta) \ln 2}. \quad (9.4)$$

Если выбрать A и B так, чтобы

$$\frac{\ln B - \ln A}{(1 - \theta) \ln 2} > 1,$$

то всегда можно найти возрастающие целые i_j так, чтобы (9.4) удовлетворялось, и это заканчивает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. При построении этого примера мы убедились, что в противоположность множествам с постоянным отношением, которые никогда не бывают R -множествами, симметрические множества с переменным отношением могут быть R -множествами.

§ 10. Необходимый признак для замкнутых R -множеств

Мы уже отмечали, что необходимый признак для R -множеств, а именно, что всякое R есть H_σ , является слишком слабым утверждением.

Укажем здесь один результат Салема (Salem^[31]), дающий необходимое условие для R -множеств в случае, когда они замкнуты.

Мы знаем (см. § 4), что если E есть R -множество и содержит точку 0, то оно допускает нулевую последовательность, т. е. найдутся такие n_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k x = 0, \quad x \in E. \quad (10.1)$$

Допустим теперь, что E замкнуто. Построим любую монотонную функцию $F(x)$, постоянную на смежных к E интервалах. Так как из (10.1) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin^2 \pi n_k x = 0,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^2 \pi n_k x dF = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \sin^2 \pi n_k x dF = 0 \quad (10.2)$$

(переход к пределу под знаком интеграла Стильтьеса законен, так как $\sin^2 \pi n_k x$ ($k = 1, 2, \dots$) есть последовательность функций, ограниченных в совокупности).

Но из (10.2) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - \cos 2\pi n_k x) dF = 0,$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos 2\pi n_k x dF = F(1) - F(0).$$

Отсюда вытекает такая теорема Салема:

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы замкнутое множество E , содержащее точку $x = 0$, было R -множеством, необходимо, чтобы для любой монотонной $F(x)$, постоянной на смежных к нему интервалах,*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos 2\pi nx dF = F(1) - F(0). \quad (10.3)$$

Впоследствии мы сопоставим это утверждение с одной теоремой об абсолютной сходимости тригонометрических рядов (см. глава XIII, § 6).

Является ли выведенное условие и достаточным? Этот вопрос остается открытым, но можно доказать такое предложение (см. Salem^[31]).

Т е о р е м а 2. *Если E есть замкнутое множество и $F(x)$ — любая монотонная функция, постоянная на смежных к E интервалах и удовлетворяющая условию (10.3), то найдется $E_1 \subset E$, для которого*

$$\int_{E-E_1} dF = 0,$$

и это E_1 есть R -множество (и даже N_0 -множество).

Чтобы убедиться в этом, заметим, что (10.3) влечет существование последовательности $\{n_k\}$, для которой (10.2) имеет место. Поэтому можно найти такую последовательность $\{m_k\}$, что

$$\int_0^1 \sin^2 \pi m_k x dF < \frac{1}{k^4} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_0^1 \sin^2 \pi m_k x dF < \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_E \sin^2 \pi m_k x dF < +\infty.$$

Поэтому (см. Вводный материал, § 14 и Добавления, § 8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin^2 \pi m_k x < +\infty, \quad (10.4)$$

почти всюду по мере F , т. е. сходится на некотором E_1 таком, что

$$\int_{E-E_1} dF = 0. \quad (10.5)$$

Так как при любом N

$$\sum_{k=1}^N |\sin \pi m_k x| \leq \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N k^2 \sin^2 \pi m_k x \right)^{\frac{1}{2}},$$

то в силу (10.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sin \pi m_k x| < +\infty \quad \text{на} \quad E_1$$

и, следовательно, E_1 есть R -множество (и даже N_0 -множество). Теорема 2 доказана.

§ 11. Сумма двух R -множеств

Поставим вопрос: должна ли сумма двух R -множеств снова быть R -множеством?

Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Именно, имеет место следующий результат Марцинкевича (Marcinkiewicz^[2]).

Существует множество E , являющееся базисом, и такое, что

$$E = A + B,$$

где каждое из слагаемых есть R -множество (и даже N_0 -множество).

Доказательство. Положим

$$\varphi_\nu(t) = \operatorname{sign} \sin 2^\nu \pi t$$

и

$$S(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \varphi_\nu(t).$$

Ясно, что $S(t)$ принимает все значения между -1 и $+1$. Действительно, если α любое между -1 и $+1$, то его можно записать по двоичной системе счисления в виде

$$\alpha = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_\nu \dots$$

и подобрать t так, чтобы

$$\varphi_\nu(t) = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел которую мы подберем позже. Положим

$$\sigma_k(t) = \sum_{v=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{2^v} \varphi_v(t),$$

$$S_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k+1}(t); \quad S_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{2k}(t).$$

Ясно, что $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. Обозначим через A и B соответственно множество значений функций $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Покажем, что множество $E = A + B$ есть базис. Действительно, если z — любая точка на $[-1, +1]$, то найдется такое t , что $S(t) = z$, т. е.

$$z = S_1(t) + S_2(t) = x + y,$$

где $x \in A$, $y \in B$, значит, $x \in E$ и $y \in E$, а это и означает, что E — базис.

Остается показать, что, если мы разумно подберем последовательность $\{n_k\}$, то каждое из множеств A и B есть R -множество (и даже N_0 -множество).

Пусть $m = 1$. Допустим, что $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ уже определены. Существует всего $3^{n_{k-1}}$ чисел вида

$$\sum_{v=1}^{n_{k-1}} \frac{1}{2^v} \varphi_v(t),$$

(так как sign принимает только 3 значения: $-1, 0, +1$). Обозначим их $\theta_i^{(k-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, 3^{n_{k-1}}$). Можно найти такое натуральное $m_k > n_{k-1}$, что

$$|\{m_k \theta_i^{(k-1)}\}| \leq \frac{1}{k^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 3^{n_{k-1}}) \quad (11.1)$$

(см. теорему Минковского в § 24 Добавлений).

Выберем $n_k > m_k$ так, чтобы

$$\frac{m_k}{2^{n_k}} \leq \frac{1}{2k^2}. \quad (11.2)$$

В силу (11.1) и (11.2) каждое число θ вида

$$\theta = \sum_1^{n_{k-1}} \frac{1}{2^v} \varphi_v(t) + \sum_{n_k}^{\infty} \frac{1}{2^v} \varphi_v(t)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\{m_k \theta\}| \leq \frac{2}{k^2}.$$

Отсюда следует, что если $x \in A$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sin m_{2k+1} \pi x| < +\infty,$$

а если $x \in B$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sin m_{2k} \pi x| < +\infty,$$

т. е. A и B — множества типа R (и даже типа N_0).

ГЛАВА XIII

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1. Введение

В настоящей главе мы прежде всего (§ 2) указываем некоторые классические результаты, касающиеся вопроса о том, какое влияние оказывают точки абсолютной сходимости на сходимость и расходимость ряда.

Затем мы начинаем изучать вопрос, на каких множествах ряд может сходиться абсолютно, без того, чтобы сходиться абсолютно всюду на $[-\pi, \pi]$. Здесь удобно ввести следующую терминологию:

О п р е д е л е н и е. Множество E назовем *множеством типа А.С.*, если из абсолютной сходимости тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos(nx - a_n) \quad \varrho_n > 0 \quad (1.1)$$

на E следует $\sum \varrho_n < +\infty$. Если множество E не есть А.С.-множество, то назовем его *N-множеством*.

В главе I, § 61 была доказана теорема Данжуа—Лузина, которую при введенной сейчас терминологии можно сформулировать так: всякое множество положительной меры есть А.С.-множество. В § 3 настоящей главы мы показываем, что и любое множество 2-й категории есть А.С.-множество. Таким образом, N -множества всегда меры нуль и первой категории.

Из определения N -множества следует, что существует ряд (1.1), сходящийся абсолютно на нем, и такой, что $\sum \varrho_n = +\infty$. Мы доказываем (§ 4), что, не нарушая общности, можем считать такой ряд состоящим из одних синусов.

Дальнейшее изучение N -множеств показывает, что ряд результатов, доказанных нами в главе XII для R -множеств, справедлив и для N -множеств. Так, например, всякое счетное множество есть N -множество (§ 6), никакой базис не есть N -множество (§ 5), сумма двух N -множеств может оказаться базисом (§ 8). В § 7 мы показываем, что существуют N -множества, не являющиеся R -множествами; в обратную сторону вопрос не решен.

Мы изучаем, далее, такой вопрос, который можно было бы назвать проблемой относительных А.С.-множеств, а именно следующий: пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Пусть ряд (1.1) удовлетворяет условию: $\varrho_n = O(\varepsilon_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Если из абсолютной сходимости такого ряда на E следует $\sum \varrho_n < +\infty$, то будем E называть А.С.-множеством относительно последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

Пользуясь одним добавлением к теореме Данжуа—Лузина (см. § 10), Яно доказал, что если $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, то при любом α множества положительной α -емкости*) являются А.С.-множествами относительно $\{\varepsilon_n\}$. В § 10 этот результат получается как следствие гораздо более общей теоремы о выпуклой емкости.

Наконец, в § 11 мы рассматриваем проблему абсолютной сходимости ряда при специальных предположениях относительно коэффициентов ряда, например для рядов с почти убывающими коэффициентами, для лакунарных, для нуль-рядов и т. д.

Есть еще много вопросов, связанных с абсолютной сходимостью, которых мы здесь не затронули**). Мы рекомендуем интересующимся ознакомиться с диссертацией Арбо (Arbault^[1]), специально посвященной этой теме, где содержится ряд таких результатов, которые для изложения потребовали бы слишком много места.

§ 2. Влияние точек абсолютной сходимости на сходимость ряда

Фату (Fatou^[2]) первый обратил внимание на то, что наличие хотя бы одной точки абсолютной сходимости у тригонометрического ряда позволяет сделать некоторые заключения о множестве его точек сходимости, а также и сходимости сопряженного ряда.

Именно, имеет место

Т е о р е м а Ф а т у. *Всякая точка абсолютной сходимости ряда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

есть точка симметрии для множества его точек сходимости, для множества точек сходимости сопряженного ряда, а также для множеств точек абсолютной сходимости данного ряда и сопряженного с ним.

Полагая для краткости

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2}, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx, \\ B_n(x) &= b_n \cos nx - a_n \sin nx, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

при помощи элементарных выкладок убеждаемся, что

$$\begin{aligned} A_n(x+h) + A_n(x-h) &= 2 A_n(x) \cos nh, \\ B_n(x+h) - B_n(x-h) &= -2 A_n(x) \sin nh. \end{aligned}$$

*) Понятие α -емкости и выпуклой емкости даны в § 12 главы V.

**) Обращаем внимание читателя на работу А. О. Гельфонда^[1], где показано, что для любых чисел q_n , лишь бы $q_n \rightarrow 0$, можно так подобрать k_n , чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin k_n x$$

сходился абсолютно на несчетном множестве точек.

Отметим также, что, как показал Виола (Viola^[1]), если у ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

коэффициенты ограничены и $\sum \frac{n_k}{n_{k+1}} < +\infty$, то множество точек, где он сходится абсолютно, имеет мощность континуума на любом интервале.

Допустим, что ряд (2.1) сходится абсолютно при $x = x_0$, т. е. $\sum |A_n(x_0)| < +\infty$. Тогда ясно, что сходимость $\sum A_n(x_0 + h)$ влечет сходимость $\sum A_n(x_0 - h)$ и аналогично для $B_n(x)$, это же справедливо и для точек абсолютной сходимости. Используя это простое замечание, Н. Н. Лузин^{[М.9], [М.10]} доказал следующие две теоремы:

Т е о р е м ы Л у з и н а. 1) Если тригонометрический ряд имеет бесконечное множество точек абсолютной сходимости, то он либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится.

2) Если тригонометрический ряд сходится абсолютно в двух точках, расстояние между которыми несоизмеримо с π , то он либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится.

Вторая из этих теорем сразу следует из первой. Действительно, пусть $x_1 - x_0 = \xi$, где ξ — несоизмеримо с π , и ряд сходится абсолютно в точках

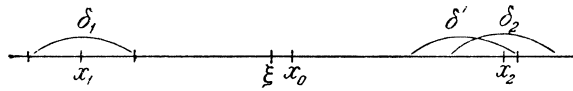


Рис. 45

x_0 и x_1 . По теореме Фату он тогда должен сходиться абсолютно во всех точках вида $x_n = x_0 + n\xi$, где n — любое целое (так как они попарно симметричны относительно друг друга), а значит, и во всех точках t_n , лежащих на $[0, 2\pi]$ и таких, что $t_n \equiv x_n \pmod{2\pi}$. Но в силу того, что ξ несоизмеримо с π , этих точек t_n бесконечно много, так как все они между собой различны и, следовательно, мы находимся в условиях первой теоремы.

Для доказательства первой теоремы заметим, что если множество A точек абсолютной сходимости бесконечно, то оно должно иметь предельную точку, а тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти две точки ξ_1 и ξ_2 из A на расстоянии меньше, чем ε . Так как всякая точка вида $\xi_1 + n(\xi_2 - \xi_1)$, где n целое, снова принадлежит A , мы легко убеждаемся, что множество точек, принадлежащих A , всюду плотно.

Допустим теперь, что для некоторого множества E , лежащего на отрезке длины 2π , множество \mathcal{E} точек симметрии всюду плотно, и покажем, что тогда $mE = 0$ или $mE = 2\pi$.

Действительно, если бы это было не так, то имели бы

$$mE > 0 \quad \text{и} \quad mCE > 0.$$

Тогда E и CE имеют точки плотности; пусть x_1 — точка плотности для E , x_2 для CE . Можно, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найти такое δ , что если δ_1 содержит x_1 , δ_2 содержит x_2 и $\delta_1 \leq \delta$, $\delta_2 \leq \delta$, то

$$\text{а) } \frac{m(E \delta_1)}{\delta_1} \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{б) } \frac{m(CE \delta_2)}{\delta_2} > 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим точку $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и найдем такую точку $\xi \in \mathcal{E}$, что $|x_0 - \xi| < \frac{\delta}{4}$; это возможно, так как множество \mathcal{E} по условию всюду плотно. Рассмотрим интервал δ_1 длины δ с центром в x_1 (рис. 45); если мы его отобразим зеркально относительно точки ξ , то получим интервал δ' длины $\leq \delta$, который будет содержать x_2 . Ясно, что

$$\frac{m(E \delta')}{\delta'} \geq 1 - \varepsilon, \quad (2.3)$$

потому что каждая точка из $(E \delta)$ при отображении около ξ перейдет снова

в точку из E (так как ξ — точка симметрии) и при этом попадет в δ' , поэтому $m(E \delta') = m(E \delta_1)$, а $\delta' = \delta_1$, поэтому выполнено а). С другой стороны, выполнено б), поэтому

$$\frac{m(CE \delta')}{\delta'} \geq 1 - \varepsilon, \quad (2.4)$$

и так как неравенства (2.3) и (2.4) несовместимы, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то теорема доказана.

§ 3. Теорема Лузина о категории множества точек абсолютной сходимости

Мы переходим к вопросу о том, какие множества являются $A.C.$ -множествами, хотя они и имеют меру нуль.

Теорема Лузина^{[М.9], [М.10]}. Если тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве не первой категории, то ряд из его коэффициентов сходится абсолютно.

Иными словами: всякое множество не первой категории есть $A.C.$ -множество, даже если оно имеет меру нуль.

В самом деле, пусть E — множество всех x , где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n |\cos(nx + a_n)| < +\infty, \quad (3.1)$$

а $\sum \varrho_n = +\infty$. Покажем, что E есть множество первой категории. С этой целью обозначим через $S(x)$ сумму ряда (3.1) и через $S_n(x)$ его частные суммы. Пусть $F_n^{(m)}$ есть множество тех x , для которых $S_n(x) \leq m$. Ясно, что $F_n^{(m)}$ замкнуто, ибо все $S_n(x)$ непрерывны. Поэтому и

$$F^{(m)} = \prod_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)}$$

тоже замкнуто. Но $F^{(m)}$ есть множество точек, где $S_n(x) \leq m$ при $n = 1, 2, \dots$, следовательно и $S(x) \leq m$. Ясно, что и наоборот, если $S(x) \leq m$, то и $S_n(x) \leq m$ при всяком n , так как $S_n(x) \leq S(x)$. Значит, $F^{(m)}$ есть множество тех x , где $S(x) \leq m$, а тогда

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} F^{(m)}.$$

Остается доказать, что каждое F_m нигде не плотно, тогда будет видно, что E первой категории.

Если бы $F^{(m)}$ для некоторого m было плотно на каком-то отрезке $[a, b]$, то в силу его замкнутости оно содержало бы отрезок $[a, b]$. На этом отрезке $S(x) \leq m$, т. е. ряд сходится абсолютно на $[a, b]$. Но тогда он должен иметь $\sum \varrho_n < +\infty$ в силу теоремы Лузина—Данжуа, а это противоречит гипотезе. Теорема доказана.

§ 4. Простейшие свойства N -множеств. Редукция к ряду из синусов

Мы уже видели, что множества положительной меры, а также не первой категории — всегда $A.C.$ -множества. Итак, N -множества должны иметь меру нуль и быть первой категории. Для их дальнейшего изучения докажем лемму (аналогичную лемме 1 § 4 главы XII):

Лемма 1. Если E есть N -множество, то, сдвинув его как угодно вдоль оси абсцисс, получим снова N -множество.

Действительно, пусть

$$-\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4.1)$$

— тригонометрический ряд, сходящийся абсолютно на E , но такой, что ряд $\sum \varrho_n$ расходится, где $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Пусть x_0 — любое и \mathcal{E} — множество тех $t = x - x_0$, для которых $x \in E$. Полагая, как в упомянутой лемме,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0, \\ \beta_n &= b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0, \end{aligned}$$

мы видим, что

$$-\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt$$

сходится абсолютно для $t \in \mathcal{E}$, и, однако, $\sum \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = +\infty$, так как $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = \varrho_n^2$. Значит, \mathcal{E} есть N -множество, и лемма доказана.

Эта лемма будет использована для упрощения формул, которыми нам придется пользоваться при изучении N -множеств.

Предварительно введем

О п р е д е л е н и е. Множество E назовем N^* -множеством, если существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

сходящийся абсолютно на E и такой, что

$$\sum |b_n| = +\infty.$$

Ясно, что каждое N^* -множество есть N -множество, но обратное не очевидно. Однако мы увидим дальше, что обратное утверждение все же справедливо, а потому понятие N^* -множества введено нами лишь временно. Когда его тождество с понятием N -множества будет установлено, мы сможем при доказательстве всех теорем, касающихся N -множеств, оперировать всегда лишь с рядами по одним синусам.

Сделаем предварительно следующее

З а м е ч а н и е. Если множество E есть N -множество и содержит точку 0, то E есть N^* -множество.

Действительно, пусть E есть N -множество. Значит, существует ряд

$$-\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сходящийся абсолютно на E , но $\sum \varrho_n = +\infty$. Поскольку E содержит точку 0, то

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, а потому и

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |\cos nx|$$

сходится всюду, следовательно, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx|$$

сходится на E . Но если $\sum |a_n| = +\infty$, а $\sum |a_n| < +\infty$, то заведомо $\sum |b_n| = +\infty$. Поэтому E есть N^* -множество.

Покажем теперь*), что класс N^* -множеств не расширится, если вместо рядов вида $\sum b_n \sin nx$ рассматривать ряды

$$\sum b_n \sin k_n x, \quad (4.2)$$

где k_n любые, вообще не целые, лишь бы $k_n \rightarrow \infty$. Точнее, мы хотим показать, что если для множества E на $[-\pi, \pi]$ существует ряд вида (4.2), сходящийся абсолютно на E , но с $\sum |b_n| = +\infty$, то E есть N^* -множество.

Сначала предположим, что все k_n целые. Однако они могут быть не все различны и не идти в порядке возрастания, поэтому (4.2) не есть обычный тригонометрический ряд. Но в силу того, что $k_n \rightarrow \infty$, для любого целого p может найтись лишь конечное число таких n , что $k_n = p$.

Рассмотрим ряд

$$\sum |b_n| \sin k_n x. \quad (4.3)$$

Он сходится абсолютно на E , как и ряд (4.2). Если мы переставим члены ряда (4.2) так, чтобы числа k_n были расположены в порядке возрастания, а когда несколько из них равны между собой, то поставим их друг за другом в любом порядке, а затем сложим подобные члены, то получится новый ряд по синусам, вида обычного тригонометрического ряда, он будет абсолютно сходиться на E (так как с перестановки членов абсолютно сходящегося ряда и их группировки его абсолютная сходимость не нарушится), а ряд из модулей его коэффициентов снова будет расходящимся.

Итак, случай целых k_n разобран.

Пусть теперь k_n не целые. Положим

$$\varepsilon_n = \frac{1}{S_n}, \quad \text{где} \quad S_n = \sum_{k=1}^n |b_k|.$$

Тогда (см. следствие теоремы 1 в § 25 Добавлений) имеем

$$\sum \frac{|b_n|}{S_n} = +\infty, \quad \sum \frac{|b_n|}{S_n^2} < +\infty,$$

т. е.

$$\sum |b_n| \varepsilon_n = +\infty, \quad \sum |b_n| \varepsilon_n^2 < +\infty.$$

На основании следствия теоремы Минковского (см. Добавления, § 24) полагая для заданного числа n

$$k_n = t_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_n = \frac{1}{S_n},$$

можем найти такое целое λ_n , что

$$\lambda_n \leq S_n$$

и

$$|\{\lambda_n k_n\}| \leq \frac{2}{S_n}.$$

Следовательно, существует такое целое p_n , что

$$\lambda_n k_n = p_n + \theta_n,$$

где

$$|\theta_n| \leq \frac{2}{S_n}.$$

*) Это было доказано Арбо (Arbault [1]).

Пусть теперь

$$\varrho_n = \frac{|b_n|}{S_n},$$

тогда

$$\sum \varrho_n = +\infty.$$

Докажем, что ряд

$$\sum \varrho_n \sin p_n x$$

сходится абсолютно на E . Действительно, имеем для $-\pi \leq x \leq \pi$

$$|\sin p_n x| \leq |\sin \lambda_n k_n x| + |\sin \theta_n x| \leq \lambda_n |\sin k_n x| + \frac{2\pi}{S_n},$$

а потому

$$\begin{aligned} \sum |\varrho_n \sin p_n x| &\leq \sum \frac{|b_n|}{S_n} S_n |\sin k_n x| + 2\pi \sum \frac{|b_n|}{S_n^2} \leq \\ &\leq \sum |b_n| |\sin k_n x| + 2\pi \sum \frac{|b_n|}{S_n^2} < +\infty \quad \text{на } E, \end{aligned}$$

так как ряд (4.2) сходится абсолютно на E .

Нам остается заметить, что так как $k_n \rightarrow \infty$ по условию, а λ_n — целое, то $p_n \rightarrow \infty$, поскольку $\theta_n \rightarrow 0$ в силу $\sum |b_n| = +\infty$. Значит, на основании сделанного ранее замечания о случае целых p_n можно утверждать, что множество E есть N^* -множество.

В качестве следствия получаем теорему (см. Arbault^[1]).

Т е о р е м а 1. Если E есть N^* -множество, то и множество \mathcal{E} , получающееся из него преобразованием подобия, есть N^* -множество.

Действительно, пусть ξ любое и \mathcal{E} — множество точек t , лежащих на $[-\pi, \pi)$ и таких, что $t \equiv \xi x \pmod{2\pi}$, где $x \in E$. Тогда если ряд

$$\sum b_n \sin nx$$

сходится абсолютно на E , то ряд

$$\sum b_n \sin \frac{n}{\xi} t$$

сходится абсолютно на \mathcal{E} . Полагая $k_n = \frac{n}{\xi}$, видим, что $k_n \rightarrow \infty$, и мы находимся в условиях предыдущей теоремы.

Итак, \mathcal{E} есть N^* -множество.

Ниже (см. теорему 3) будет доказано, что всякое N есть N^* . Поэтому отсюда будет следовать, что

Преобразование подобия превращает любое N -множество снова в N -множество.

Докажем теперь теорему, принадлежащую Салему (Salem^[4]):

Т е о р е м а 2. Если к N^* -множеству добавить точку, то получим снова N^* -множество.

Для удобства рассуждений здесь и в дальнейшем будем считать, что множества лежат на $[0, 1]$, а рассматриваемые ряды имеют вид

$$\sum b_n \sin n\pi x \tag{4.4}$$

(надо было бы брать множества на $[-1, 1]$, но ввиду нечетности синуса на $[-1, 0]$ происходит то же, что на $[0, 1]$). Пусть ряд (4.4) сходится абсолютно на E , но $\sum |b_n| = +\infty$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n |b_k|$. Пусть ξ — любая точка, не

принадлежащая E . На основании упомянутого выше следствия теоремы Минковского, если n дано, то, полагая

$$v = 1, \quad x_1 = n\xi, \quad \varepsilon = \frac{1}{S_n},$$

мы можем найти такое целое λ_n , что

$$|\{\lambda_n n\xi\}| \leq \frac{2}{S_n} \quad (4.5)$$

и при этом

$$\lambda_n \leq S_n. \quad (4.6)$$

Положим

$$\varrho_n = \frac{|b_n|}{S_n} \quad (4.7)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum \varrho_n \sin n\lambda_n \pi x. \quad (4.8)$$

В силу $\sum |b_n| = +\infty$ имеем

$$\sum \varrho_n = +\infty.$$

С другой стороны, мы покажем, что ряд (4.8) сходится абсолютно на множестве \mathcal{E} , получаемом из E присоединением точки ξ ; тогда будет ясно, что \mathcal{E} есть N^* -множество (мы можем не думать о том, являются ли числа $n\lambda_n$ все различными или нет, так как во всяком случае $n\lambda_n \rightarrow \infty$, а тогда мы имеем случай рядов вида (4.2).

Для $x \in E$ из (4.6) и (4.7) имеем

$$\sum \varrho_n |\sin n\lambda_n \pi x| \leq \sum \varrho_n \lambda_n |\sin n\pi x| \leq \sum |b_n \sin n\pi x| < +\infty,$$

потому что ряд (4.4) абсолютно сходится на E .

С другой стороны, в силу (4.7) и (4.5)

$$\sum \varrho_n |\sin n\lambda_n \pi \xi| = \sum \varrho_n |\sin \pi \{\lambda_n n\xi\}| \leq 2 \sum \frac{\varrho_n}{S_n} = 2 \sum \frac{|b_n|}{S_n^2} < +\infty.$$

Таким образом теорема доказана.

Мы теперь в состоянии доказать, что имеет место

Теорема 3. *Всякое N -множество есть N^* -множество, т. е. для любого N -множества E на $(0, 1)$ найдется ряд*

$$\sum b_n \sin n\pi x,$$

сходящийся абсолютно на E , хотя $\sum |b_n| = +\infty$.

Действительно, сначала мы возьмем любую точку $\xi \in E$ и сдвинем E так, чтобы эта точка попала в начало координат. Получим новое множество \mathcal{E} , составленное из точек $t = x - \xi$, где $x \in E$. По лемме 1 множество \mathcal{E} будет снова N -множеством. Но так как оно содержит точку 0, то оно будет N^* -множеством. Присоединим к нему точку $-\xi$. В силу теоремы 2 полученное множество \mathcal{E}_1 будет снова N^* -множеством. С другой стороны, \mathcal{E}_1 состоит из точек вида $t = x - \xi$, где либо $x \in E$, либо $x = 0$. Значит, оно получается сдвигом на ξ из множества E_1 , которое составлено из E и точки $x = 0$. Поэтому E_1 , которое есть сдвиг \mathcal{E}_1 , есть N -множество. Но оно содержит точку 0, поэтому оно N^* -множество. Но всякая часть N^* -множества есть, очевидно, N^* -множество, а $E \subset E_1$. Итак, E есть N^* -множество, и теорема доказана.

Таким образом, в дальнейшем при изучении N -множеств мы можем ограничиться рассмотрением рядов из синусов.

§ 5. Базисы и абсолютная сходимость

Покажем, что в проблеме абсолютной сходимости (как и в проблеме сходимости, изучавшейся в главе XII), базисы ведут себя так же, как множества положительной меры, а именно имеет место

Т е о р е м а *). *Всякий базис есть А.С.-множество.*

Пусть E — базис; если бы E было N -множеством, то (см. § 4) существовал бы ряд

$$\sum b_n \sin n \pi x, \quad (5.1)$$

сходящийся абсолютно на E , но с $\sum |b_n| = +\infty$.

Раз E — базис, то для любого x имеем

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m,$$

где все $x_i \in E$, а все k_i целые. Но если так, то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin n \pi x| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| (|k_1| |\sin n \pi x_1| + \dots + |k_m| |\sin n \pi x_m|) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |k_i| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| |\sin n \pi x_i| < +\infty, \end{aligned}$$

т. е. ряд (5.1) сходится абсолютно для любых x .

Однако тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ и мы пришли к противоречию. Значит, E не есть N -множество, т. е. оно А.С.-множество, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы видели (см. § 8 главы XII), что всякое симметрическое множество с постоянным отношением есть базис. Значит, все такие множества являются А.С.-множествами (в частности, и канторово множество тоже). В силу результатов § 9 главы XII существуют и А.С.-множества хаусдорфовой размерности как угодно малой.

§ 6. Общие свойства N - и R -множеств

В § 7 главы XII было введено понятие N_0 -множества и отмечено, что всякое N_0 -множество есть R -множество. С другой стороны, из самого их определения ясно, что все N_0 -множества суть N -множества. Из этого факта мы сразу можем заключить, что некоторые теоремы, доказанные нами в главе XII, дадут нам новые сведения об N -множествах.

Так, например, лемма § 7 дает достаточное условие для того, чтобы множество было типа N_0 , а значит, и N ; существуют N -множества хаусдорфовой размерности, как угодно близкой к единице (так как в § 9 главы XII мы строили N_0 -множества, опираясь на эту лемму); всякое счетное множество есть N -множество (потому что оно N_0 -множество, как показано в § 7 главы XII).

Покажем теперь, что для замкнутых N -множеств справедливо такое же необходимое условие, которое мы доказали в § 10 главы XII для замкнутых R -множеств, а именно

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы замкнутое множество E , лежащее на $[0, 1]$, было N -множеством, необходимо, чтобы для любой монотонной $F(x)$, постоянной на смежных к E интервалах, было выполнено условие*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos 2 \pi n x dF = F(1) - F(0). \quad (6.1)$$

*) Эта теорема была доказана В. В. Немыцким^[1] для ряда из синусов; теперь мы видим, что она справедлива и в общем случае.

Действительно, раз E есть N -множество, то существует ряд

$$\sum b_n \sin \pi n x,$$

сходящийся абсолютно на E , хотя $\sum |b_n| = +\infty$.

Ясно, что тогда и

$$\sum |b_n| \sin^2 \pi n x < +\infty \quad \text{для} \quad x \in E,$$

а потому для всякого $x \in E$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |b_k| - \sum_{k=1}^n |b_k| \cos 2\pi kx$$

ограничено (хотя, быть может, и неравномерно относительно x). Пусть

$$R_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^n |b_k| \cos 2\pi kx}{\sum_{k=1}^n |b_k|}.$$

Тогда, так как $\sum_{k=1}^n |b_k| \rightarrow +\infty$, имеем

$$R_n(x) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x \in E.$$

Кроме того, $|R_n(x)| \leq 1$. Так как $F(x)$ монотонна и постоянна на смежных к E интервалах, то можно, переходя к пределу под знаком интеграла Стильтеса, написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x) dF = \int_E dF = \int_0^1 dF = F(1) - F(0),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |b_k| \int_0^1 \cos 2\pi kx dF}{\sum_{k=1}^n |b_k|} = F(1) - F(0), \quad (6.2)$$

а так как при любом k

$$\left| \int_0^1 \cos 2\pi kx dF \right| \leq F(1) - F(0),$$

то равенство (6.2) возможно только, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \cos 2\pi nx dF = F(1) - F(0),$$

и теорема доказана.

Наконец, аналогично теореме 2 § 10 главы XII имеет место

Теорема 2. Если E есть замкнутое множество и $F(x)$ — любая монотонная функция, постоянная на смежных к E интервалах и удовлетворяющая условию (6.1), то найдется такое $E_1 \subset E$, что

$$\int_{E-E_1} dF = 0$$

и E_1 есть N -множество (и даже N_0 -множество).

Это вытекает из того, что в теореме 2 § 10 главы XII построенное множество E_1 было N_0 -, а значит и N -множеством.

§ 7. Взаимоотношение между классами множеств N , N_0 и R

Мы знаем, что всякое N_0 -множество есть N -множество. Возникает вопрос, не совпадают ли эти классы? Арбо (Arbault^[1]) доказал, что это не так. Прежде чем провести доказательство, сделаем следующее простое замечание: если E есть N_0 -множество, то оно допускает нулевую последовательность (см. определение в § 7 главы XII). Это очевидно, так как сходимость

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sin n_k \pi x|$$

на E влечет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k \pi x = 0 \quad \text{для} \quad x \in E. \quad (7.1)$$

Поэтому если мы построим N -множество, не допускающее ни одной нулевой последовательности, то мы докажем существование N -множеств, которые не будут N_0 -множествами. Для построения такого примера докажем теорему Арбо:

Теорема 1. *Множество E точек сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2^n \pi x|}{n}$ не допускает ни одной нулевой последовательности.*

Ясно, что это N -множество, поскольку $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, покажем сначала, что достаточно ограничиться рассмотрением последовательностей вида

$$n_k = 2^{p_k} m_k, \quad (7.2)$$

где m_k нечетное, а $p_k \rightarrow \infty$.

Действительно, любое n_k можно представить в форме (7.2), если только считать, что p_k может быть и равно 0. Значит, вопрос сводится лишь к тому, чтобы показать, что $p_k \rightarrow \infty$.

Пусть это неверно, т. е. существует последовательность n_k вида (7.2), для которой справедливо (7.1), и при этом числа p_k для бесконечного множества значений k остаются меньше некоторой константы M . Тогда можно выбрать из нашей последовательности n_k такую подпоследовательность, для которой все p_k равны между собой; пусть они равны какому-то p .

Итак, для чисел вида

$$n_k = 2^p m_k$$

имеем (7.1).

Если взять $x = \frac{1}{2^{p+1}}$, то оно заведомо принадлежит E (поскольку все члены ряда, начиная с $n = p + 1$, равны нулю), а между тем

$$\left| \sin 2^p m_k \frac{\pi}{2^{p+1}} \right| = \left| \sin m_k \frac{\pi}{2} \right| = 1,$$

так как m_k нечетное. Поэтому (7.1) невозможно, если n_k не удовлетворяет условию (7.2).

Итак, достаточно доказывать отсутствие нулевой последовательности удовлетворяющей условию (7.2).

Мы будем искать такое α , что $\alpha \in E$, и при этом

$$|\sin n_k \pi \alpha| > C > 0. \quad (7.3)$$

Тогда (7.1) будет нарушено, и теорема доказана. Но при доказательстве существования $\alpha \in E$ и удовлетворяющего (7.3) можно считать p_k растущими как угодно быстро.

В самом деле, если p'_k — подпоследовательность, выбранная из $\{p_k\}$, и если для

$$n'_k = 2^{p'_k} m'_k$$

имеем (7.3), то условие (7.1) будет нарушено для $\{n'_k\}$, а значит, и по-прежнему для всей последовательности $\{n_k\}$.

Итак, будем искать α , удовлетворяющее (7.3), считая p_k растущими как угодно быстро. В частности, нам достаточно предположить, что

$$\frac{m_k}{2^{p_{k+1}-p_k}} < \frac{1}{4}, \quad (7.4)$$

а этого при заданных m_k всегда можно добиться, если p_{k+1} достаточно велико сравнительно с p_k .

Рассмотрим теперь число α , определяемое формулой

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_{k+1}}}. \quad (7.5)$$

Мы потребуем, чтобы числа p_k удовлетворяли (7.4) и, кроме того

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} < +\infty. \quad (7.6)$$

Мы докажем позже, что такое $\alpha \in E$. Сейчас мы хотим показать, что для него

$$|\sin n_k \pi \alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.7)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$2^{p_k} m_k \alpha \equiv \frac{m_k}{2} + 2^{p_k} m_k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\theta_s}{2^{p_{k+1}+s}} \pmod{1},$$

где числа θ_s равны 1 или 0, а потому в силу нечетности m_k

$$\frac{1}{2} < (2^{p_k} m_k \alpha) < \frac{1}{2} + \frac{m_k}{2^{p_{k+1}-p_k}} \quad (7.8)$$

и в силу (7.4) отсюда следует, что правая часть (7.8) заключена между $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$.

Поэтому

$$|\sin 2^{p_k} m_k \pi \alpha| > \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. (7.7) доказано.

Нам остается убедиться, что найденное нами число α принадлежит множеству E , т. е. что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2^n \pi \alpha|}{n} \quad (7.9)$$

сходится. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим любое целое число n и найдем s из условия

$$p_{s-1} < n \leq p_s.$$

Имеем

$$2^n \alpha = 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_{k+1}}} \equiv 2^n \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{2^{p_{k+1}}} \pmod{1}, \quad (7.10)$$

Правая часть (7.10) не превосходит $\frac{1}{2^{p_s-n}} \leq 1$, поэтому

$$|\sin 2^n \pi \alpha| \leq \sin \frac{\pi}{2^{p_s-n}} \leq \frac{\pi}{2^{p_s-n}}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=p_{s-1}+1}^{p_s} \frac{|\sin 2^n \pi \alpha|}{n} < \frac{\pi}{2^{p_s} p_{s-1}} \sum_{n=p_{s-1}+1}^{p_s} 2^n < \frac{2\pi}{p_{s-1}},$$

а потому в силу (7.6) ряд (7.9) сходится, и доказательство закончено.

Из этой теоремы, как мы уже говорили, вытекает

С л е д с т в и е. Существуют N -множества, не являющиеся N_0 -множествами.

Действительно, этим свойством будут обладать все N -множества, не допускающие нулевых последовательностей, а мы убедились, что они существуют.

Но та же теорема позволит нам доказать и один незамеченный Арбо (результат*), а именно:

Т е о р е м а 2. Существуют N -множества, не являющиеся R -множествами.

Действительно, возьмем снова множество E тех точек, где сходится абсолютно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{n}.$$

Ясно, что точка $x = 0$ принадлежит E . В § 4 главы XII было доказано, что если R -множество содержит точку $x = 0$, то оно допускает нулевую последовательность. Следовательно, E не может быть R -множеством; вместе с тем оно N -множество. Теорема доказана.

К сожалению, мы не можем сказать, существует ли R -множество, не являющееся N -множеством.

Неизвестно также, существуют ли другие множества, кроме N_0 -множеств, которые являются и N -множествами и R -множествами одновременно.

§ 8. Сумма двух N -множеств

В § 11 главы XII мы показали на примере, что множество может оказаться базисом и вместе с тем разлагаться на сумму двух N_0 -множеств. Однако это был базис специально подобранный.

В уже упомянутой работе Арбо показано, что канторово множество нельзя представить не только в виде суммы двух, но даже в виде суммы счетного множества N -множеств. Мы не будем доказывать здесь это предположение, так как оно потребовало бы от нас изложения материала, очень далекого от всего, что рассматривается в этой книге. Мы отсылаем также читателя к упомянутой статье Арбо, если он хочет более детально изучить вопрос о том, при каких дополнительных условиях, наложенных на слагаемые, сумма конечного числа или счетного множества N -множеств есть N -множество. Здесь мы ограничиваемся доказательством теоремы:

Т е о р е м а. Если к N -множеству добавить любое счетное, то получим снова N -множество**).

*) Этот результат публикуется здесь впервые.

**) Арбо пишет, что эта теорема была доказана Эрдешем другим методом, но не опубликована; мы даем здесь доказательство Арбо.

Доказательство. Пусть E есть N -множество. Значит, существует ряд

$$\sum b_n \sin n\pi x, \quad (8.1)$$

сходящийся абсолютно на E , но с $\sum |b_n| = +\infty$.

Прежде всего заметим, что, не нарушая общности, можно считать $0 < b_n \leq 1$.

Действительно, во-первых замена b_n на $|b_n|$ не влияет на абсолютную сходимость ряда (8.1) на E . Значит, можно считать все b_n неотрицательными. Если некоторые b_n равны нулю, то, заменяя их на $b'_n = b_n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$ и $\sum \varepsilon_n < +\infty$, мы получим новый ряд, где уже все коэффициенты b'_n строго положительны, и опять $\sum |b'_n| = +\infty$, а $\sum b'_n \sin n\pi x$ сходится абсолютно на E .

Наконец, если некоторые $b_n > 1$, то, заменяя их на 1, мы получим новый ряд, опять сходящийся абсолютно на E ; что же касается расходимости ряда из коэффициентов, она также по-прежнему будет иметь место, так как если чисел b_n , замененных единицами, было конечное число, то расходимость нарушиться не может, а если их было бесконечное множество, то в новом ряде коэффициентов будет бесконечное множество единиц, а тогда он заведомо расходится.

Итак, будем считать $0 < b_n \leq 1$. Поэтому, полагая

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k,$$

имеем

$$S_n \leq n. \quad (8.2)$$

и

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots$$

Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{S_n} = +\infty. \quad (8.3)$$

Положим

$$\varrho_n = \frac{b_n}{S_n}. \quad (8.4)$$

Тогда на основании (8.3)

$$\sum \varrho_n = +\infty. \quad (8.5)$$

Выберем теперь $p(n)$ так, чтобы $p(n) \uparrow \infty$, но

$$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p(n)}}} < +\infty. \quad (8.6)$$

Для этого достаточно предположить, например

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p(n)}}} \geq \ln^2 n$$

или

$$\frac{1}{p(n)} \ln n \geq 2 \ln \ln n,$$

т. е.

$$p(n) \leq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{\ln \ln n}.$$

Примем

$$p(n) = \frac{\ln n}{2 \ln \ln n},$$

тогда $p(n) \uparrow \infty$ и (8.6) удовлетворено.

Так как S_n возрастает монотонно, то и $p(S_n)$ также. Обозначим

$$q_n = [p(S_n)].$$

Ясно, что $q_n \uparrow \infty$ и q_n целое.

На основании теоремы 1 § 25 Добавлений из (8.6) следует (так как $q_n \leq p(S_n)$)

$$\sum \frac{b_n}{S_n^{1+\frac{1}{q_n}}} \leq \sum \frac{b_n}{S_n^{1+\frac{1}{p(S_n)}}} < +\infty. \quad (8.7)$$

Поэтому из (8.4) и (8.7)

$$\sum \frac{q_n}{S_n^{\frac{1}{q_n}}} < +\infty. \quad (8.8)$$

Пусть теперь $\{a_j\}$ — любое счетное множество, и пусть \mathcal{E} получается от присоединения к E всех точек a_j . Покажем, что \mathcal{E} есть опять N -множество.

Пусть n задано. Положим

$$na_j = t_j \quad (j = 1, 2, \dots, q_n).$$

На основании следствия теоремы Минковского (см. § 24 Добавлений) мы можем найти такое целое λ_n , что

$$\lambda_n \leq S_n \quad (8.9)$$

и при этом

$$|\{\lambda_n t_j\}| \leq \frac{2}{S_n^{\frac{1}{q_n}}} \quad (j = 1, 2, \dots, q_n).$$

откуда

$$|\sin \pi \{\lambda_n na_j\}| \leq \frac{2\pi}{S_n^{\frac{1}{q_n}}} \quad (j = 1, 2, \dots, q_n). \quad (8.10)$$

Покажем, что тогда ряд

$$\sum q_n \sin \pi n \lambda_n x \quad (8.11)$$

сходится абсолютно на \mathcal{E} , откуда в силу (8.5) будет следовать, что \mathcal{E} есть N -множество.

Имеем на основании (8.9) и (8.4)

$$\begin{aligned} \sum q_n |\sin \pi n \lambda_n x| &\leq \sum q_n \lambda_n |\sin \pi x| \leq \\ &\leq \sum q_n S_n |\sin \pi x| = \sum |b_n| |\sin \pi x| < +\infty \quad \text{для } x \in E, \end{aligned}$$

потому что ряд (8.1) сходится абсолютно на E по условию.

С другой стороны, для любого a_j в силу $q_n \rightarrow \infty$ будем иметь $q_n \geq j$, как только n станет достаточно велико, а тогда будет справедливо (8.10).

Итак, при $x = a_j$ все члены ряда (8.11), начиная с некоторого момента, удовлетворяют неравенству

$$q_n |\sin \pi n \lambda_n a_j| \leq 2\pi \frac{|b_n|}{S_n^{1+\frac{1}{q_n}}},$$

т. е. они меньше членов ряда, сходящегося в силу (8.8).

Таким образом, ряд (8.11) сходится абсолютно и при $x = a_j$, каково бы ни было j . Это заканчивает доказательство теоремы.

Возникает вопрос, нельзя ли найти такие несчетные множества, что если добавить такое множество к любому N -множеству, получим снова N -множество.

В работе Арбо есть ряд теорем, относящихся к этому вопросу. В частности, он доказывал существование совершенных множеств, обладающих этим свойством. Этот результат кажется нам очень интересным, но, к сожалению, в доказательстве содержится неточность, которую нам не удалось исправить. Именно, выбрав $q(n) \uparrow \infty$ так, чтобы

$$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{q(n)}}} < +\infty,$$

можно было бы на основании теоремы 1 § 25 Добавлений утверждать, что для любых

$$\varrho_n \geq 0, \sum \varrho_n = +\infty, \quad (8.12)$$

имеем

$$\sum \frac{\varrho_n}{S_n^{1+\frac{1}{q(S_n)}}} < +\infty$$

(где $S_n = \sum_{k=1}^n \varrho_k$). Однако Арбо пишет*)

$$\sum \frac{\varrho_n}{S_n^{1+\frac{1}{q(n)}}} < +\infty. \quad (8.13)$$

Между тем, как бы мы ни выбирали $q(n) \uparrow \infty$, формула (8.13) заведомо не может иметь места для любых ϱ_n , удовлетворяющих (8.12). В самом деле, если (8.12) имеет место, то, как известно,

$$\sum \frac{\varrho_n}{S_n} = +\infty.$$

Если выбрать $S_n = \sqrt{q(n)}$, то $\varrho_n = S_n - S_{n-1} \geq 0$ и $\sum \varrho_n = +\infty$, а между тем

$$S_n^{\frac{1}{q(n)}} = (\sqrt{q(n)})^{\frac{1}{q(n)}} \rightarrow 1,$$

поэтому и

$$\sum \frac{\varrho_n}{S_n^{1+\frac{1}{q(n)}}} = +\infty,$$

что противоречит (8.13).

Таким образом, доказательство теряет силу; вопрос о справедливости самой теоремы остается открытым.

§ 9. Дополнение Салема к теореме Лузина—Данжуа

Мы хотим теперь изучить, как уже говорилось во введении к этой главе, проблему об относительных А. С.-множествах. Но прежде чем переходить к этому вопросу, укажем одно любопытное дополнение к теореме Лузина—Данжуа, принадлежащее Салему (Salem^[4]).

Теорема 1. Если $\alpha < \frac{2}{\pi}$ и $\sum \varrho_n = +\infty$, то множество E тех точек, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} \leq \alpha, \quad (9.1)$$

имеет меру нуль.

*) Аналогичная неточность была им допущена при доказательстве предыдущей теоремы, где он писал $p(n)$ вместо $p(S_n)$; но там, вводя $q(n) = [p(S_n)]$, удавалось получить нужный результат.

В самом деле, пусть $f(x)$ — характеристическая функция для множества E . Так как функции

$$\frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - a_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k}$$

ограничены в своей совокупности, точнее не превосходят 1, то из (9.1) вытекает

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - a_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} dx \leq \alpha \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (9.2)$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{a_k}{k}\right) |\cos kx| dx}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} \leq \alpha \int_0^{2\pi} f(x) dx. \quad (9.3)$$

Так как можно считать $|a_k| \leq 2\pi$, то

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{a_k}{k}\right) - f(x) \right| dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Но в силу леммы Фейера (см. глава I, § 20)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\cos kx| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{a_k}{k}\right) |\cos kx| dx}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \varepsilon_k \right)}{\sum_{k=1}^n \varrho_k},$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; но мы предположили, что $\sum_{k=1}^n \varrho_k \rightarrow \infty$, следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varrho_k}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = 0,$$

а тогда получается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{a_k}{k}\right) |\cos kx| dx}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

что противоречит (9.3), если $\alpha < \frac{2}{\pi}$ и $mE > 0$.

Ясно, что если $\sum \varrho_n = +\infty$, а $\sum \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)| < +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = 0,$$

а потому теорему Лузина—Данжуа можно получить как следствие из только что доказанной теоремы Салема.

Интересно, что в этой теореме требование $\alpha < \frac{2}{\pi}$ не может быть усилено.

Даже если принять $\alpha = \frac{2}{\pi}$, то теорема уже не будет иметь места, если только $\varrho_n = O(1)$. Действительно, имеет место теорема Салема^[4]:

Т е о р е м а 2. Если $\varrho_n = O(1)$, $\sum \varrho_n = +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \frac{2}{\pi} \quad \text{почти всюду.}$$

Доказательство опирается на лемму.

Л е м м а. Пусть γ_n — любые комплексные числа, лишь бы $|\gamma_n| = O(1)$ и $\sum |\gamma_k| = +\infty$. Тогда

$$R_n(x) = \frac{\sum_1^n \gamma_k e^{ikx}}{\sum_1^n |\gamma_k|} \rightarrow 0 \quad \text{почти всюду.}$$

Не нарушая общности, можно считать $|\gamma_n| < 1$, так как от умножения всех чисел γ_n на одну и ту же константу величина $R_n(x)$ не изменится и расходимость $\sum |\gamma_n|$ тоже.

Применяя равенство Парсеваля и учитывая $|\gamma_n| < 1$, находим

$$\int_0^{2\pi} |R_n(x)|^2 dx = 2\pi \frac{\sum_1^n |\gamma_k|^2}{\left(\sum_1^n |\gamma_k|\right)^2} < \frac{2\pi}{\sum_1^n |\gamma_k|}.$$

В силу $|\gamma_n| < 1$ и $\sum |\gamma_n| = +\infty$ можно всегда выбрать последовательность целых чисел n_k так, чтобы

$$k^2 \leq \sum_1^{n_k} |\gamma_s| < (k+1)^2.$$

Тогда ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |R_{n_k}(x)|^2 dx < \sum \frac{2\pi}{k^2} < +\infty,$$

а отсюда вытекает, что $\sum |R_{n_k}(x)|^2 < +\infty$ почти всюду, следовательно,

$$R_{n_k}(x) \rightarrow 0 \quad \text{почти всюду.}$$

Пусть теперь n любое целое. Определим k так, чтобы

$$n_k \leq n < n_{k+1}.$$

Мы имеем

$$\left| R_n(x) \sum_{s=1}^n |\gamma_s| - R_{n_k}(x) \sum_{s=1}^{n_k} |\gamma_s| \right| \leq \sum_{s=1}^{n_{k+1}} |\gamma_s|.$$

Следовательно,

$$\left| R_n(x) - \frac{\sum_{s=1}^{n_k} |\gamma_s|}{\sum_{s=1}^n |\gamma_s|} R_{n_k}(x) \right| \leq \frac{\sum_{s=1}^{n_{k+1}} |\gamma_s|}{\sum_{s=1}^n |\gamma_s|} \leq \frac{\sum_{s=1}^{n_{k+1}} |\gamma_s|}{\sum_{s=1}^{n_k} |\gamma_s|} - 1 < \frac{(k+2)^2}{k^2} - 1, \quad (9.4)$$

и так как правая часть (9.4) стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$ и $R_{n_k}(x) \rightarrow 0$ почти всюду, то

$$R_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ почти всюду,}$$

и, значит, лемма доказана.

Возвращаемся к теореме. Разлагая $|\cos x|$ в ряд Фурье, мы находим

$$|\cos x| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx},$$

где $c_0 = \frac{2}{\pi}$ и $c_m = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. Следовательно,

$$|\cos(kx - \alpha_k)| = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m e^{ikmx} e^{-ima_k},$$

и

$$\frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m Q_{mn}(x),$$

где

$$Q_{mn}(x) = \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k e^{-ima_k} e^{ikmx}}{\sum_{k=1}^n \varrho_k}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k = +\infty$ и $\varrho_k = O(1)$, то мы вправе применить лемму 1 и увидим, что при $m \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{mn}(x) = 0$$

всюду вне некоторого множества E_m , $mE_m = 0$. Полагая $E = \sum E_m$, видим, что $mE = 0$, и для всякого $x \notin E$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{mn}(x) = 0$ при $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

С другой стороны,

$$Q_{mn}(x) = 1 \quad \text{при} \quad m = 0.$$

Кроме того, $|Q_{mn}(x)| \leq 1$ для любых m, n и x .

Отсюда легко получить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k \cos(kx - \alpha_k)}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = c_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{для} \quad x \in CE. \quad (9.5)$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m Q_{mn}(x) = c_0 + \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N c_m Q_{mn}(x) + \sum_{|m| > N} c_m Q_{mn}(x), \quad (9.6)$$

где N выбрано так, чтобы $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Средний член правой части (9.6) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как число слагаемых ограничено, а $Q_{mn}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $m \neq 0$ для $x \in SE$. Далее, из

$$|c_m| < \frac{A}{m^2},$$

где A постоянно, следует, что крайний член в правой части (9.6) по модулю не превосходит

$$A \sum_{|m| > N} \frac{1}{m^2} < 2 \frac{A}{N} < 2 A \varepsilon,$$

и это заканчивает доказательство теоремы.

§ 10. Выпуклая емкость множеств и абсолютная сходимость*)

В § 12 главы V мы рассматривали понятие емкости и обобщенной емкости множеств относительно некоторой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$. Мы хотим сейчас приложить эти понятия к изучению абсолютной сходимости.

Прежде всего докажем одну лемму, касающуюся самих обобщенных емкостей.

Л е м м а 1. Если $E = \sum E_n$, где все множества E_n имеют обобщенную емкость нуль относительно некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$, то и E имеет обобщенную емкость нуль относительно той же последовательности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, т. е. что E имеет положительную обобщенную емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$. Тогда, сохраняя все обозначения, введенные в § 12 главы V, имеем: существует такая мера $\mu < E$, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, x - y) d\mu(x) d\mu(y) < K$$

для $0 \leq r < 1$, где K постоянно.

Из $E = \sum E_n$ и $\mu < E$ следует, что найдется по крайней мере одно множество, пусть E_k , для которого

$$\mu(E_k) = m \neq 0.$$

Положим для любого B -множества \mathcal{E}

$$\bar{\mu}(\mathcal{E}) = \frac{1}{m} \mu(\mathcal{E} E_k).$$

Тогда новая мера $\bar{\mu}$ сосредоточена на E_k , $\bar{\mu} < E_k$, и при этом

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, x - y) d\bar{\mu}(x) d\bar{\mu}(y) < K,$$

потому что $Q(r, t) \geq 0$ для любых t и r .

*) Этот параграф рекомендуется читать после §§ 19, 20 главы XIV и § 12 главы V.

Но отсюда следует, что E_k имеет положительную обобщенную емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, что противоречит условиям леммы.

Итак, лемма 1 доказана*).

Переходя к вопросу об абсолютной сходимости, докажем сперва, что утверждение Салема, рассмотренное в § 9, может быть высказано для случая множеств нулевой емкости относительно некоторых $\{\lambda_n\}$ в следующем виде (Темко^[2]).

Т е о р е м а. Пусть $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность $\lambda_n \downarrow 0$ и $\sum \lambda_n = +\infty$. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\sum \varrho_n \cos (nx + a_n), \quad (10.1)$$

где $\varrho_n \geq 0$ и $\sum \varrho_n = +\infty$. Если

$$\varrho_n = O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}\right), \quad (10.2)$$

то соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^m \varrho_n |\cos (nx + a_n)|}{\sum_1^m \varrho_n} = \frac{2}{\pi} \quad (10.3)$$

имеет место всюду, кроме, может быть, множества E обобщенной емкости нуль относительно последовательности $\{\lambda_n\}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что она содержит в себе, как частный случай, следующий результат Яно (Yano^[1]): если $\varrho_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то каково бы ни было α , $0 < \alpha < 1$, соотношение (10.3) имеет место всюду, кроме, быть может, множества E , для которого α -емкость равна нулю.

Действительно, в § 12 главы V было доказано, что множество E имеет нулевую α -емкость в том и только в том случае, когда оно имеет нулевую емкость относительно последовательности $\left\{\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right\}$. Если положить $\lambda_n = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$, то $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \sim n^\alpha$ и

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \sim \frac{1}{n},$$

а потому мы находимся в условиях теоремы Темко.

Для доказательства теоремы нужна лемма (аналогичная лемме, доказанной Салемом, см. § 9).

Л е м м а. 2. Пусть $\{\gamma_n\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} 1) \quad |\gamma_n| &= O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}\right), \\ 2) \quad \sum |\gamma_n| &= +\infty. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Тогда

$$R_m(x) = \frac{\sum_1^m \gamma_n e^{inx}}{\sum_1^m |\gamma_n|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (10.5)$$

исключая, быть может, множество E нулевой обобщенной емкости относительно $\{\lambda_n\}$.

*) Это предложение было доказано Темко, но она пользовалась определением емкости, а не обобщенной емкости.

Доказательство. Пусть E — множество тех точек, где $R_m(x) \not\rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Допустим, что его обобщенная емкость относительно $\{\lambda_n\}$ положительна. Тогда по теореме 2 § 12 главы V найдется такая мера $\mu < E$, что если

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\mu, \quad \beta_n = \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\mu, \quad (10.6)$$

то

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < +\infty. \quad (10.7)$$

Имеем

$$|R_m(x)|^2 = \frac{\sum_{k=1}^m \gamma_k e^{ikx} \sum_{l=1}^m \bar{\gamma}_l e^{-ilx}}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2} = \frac{\sum_{k=1}^m |\gamma_k|^2}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2} + \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k \bar{\gamma}_l e^{i(k-l)x}}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |R_m(x)|^2 \, d\mu \leq \frac{\sum_{k=1}^m |\gamma_k|^2}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2} + \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^m |\gamma_k| |\bar{\gamma}_l| (|\alpha_{k-l}| + |\beta_{k-l}|)}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2} = I_1 + I_2. \quad (10.8)$$

Но так как числа $|\gamma_n|$ ограничены в совокупности в силу условия 1) леммы, то

$$I_1 < C \frac{\sum_{k=1}^m |\gamma_k|}{\left(\sum_{k=1}^m |\gamma_k|\right)^2} = \frac{C}{\sum_{k=1}^m |\gamma_k|}, \quad (10.9)$$

где C постоянное.

Для оценки I_2 напомним

$$A = \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^m |\gamma_k| |\bar{\gamma}_l| (|\alpha_{k-l}| + |\beta_{k-l}|) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=k+1}^m = A_1 + A_2. \quad (10.10)$$

Оценим A_2 . Имеем, применяя неравенство Буняковского,

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{k=1}^m |\gamma_k| \left\{ \sum_{l=k+1}^m |\bar{\gamma}_l| \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} (|\alpha_{k-l}| + |\beta_{k-l}|) \sqrt{\lambda_l} \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m |\gamma_k| \left\{ \sum_{l=k+1}^m |\bar{\gamma}_l|^2 \frac{1}{\lambda_l} \cdot 2 \sum_{l=k+1}^m (|\alpha_{k-l}|^2 + |\beta_{k-l}|^2) \lambda_l \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_l \leq \lambda_{l-k}$ и $|\alpha_{k-l}| = |\alpha_{l-k}|$, $|\beta_{k-l}| = |\beta_{l-k}|$, то

$$\sum_{l=k+1}^m (|\alpha_{k-l}|^2 + |\beta_{k-l}|^2) \lambda_l \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} (|\alpha_{l-k}|^2 + |\beta_{l-k}|^2) \lambda_{l-k} < C_1,$$

где C_1 — постоянное в силу (10.7). Кроме того, заметим, что в силу расходимости ряда $\sum \lambda_n$ и условия (10.4)

$$\sum_{l=k+1}^m |\bar{\gamma}_l|^2 \frac{1}{\lambda_l} < C_2,$$

поэтому окончательно

$$A_2 < C_3 \sum_{k=1}^m |\gamma_k|. \quad (10.11)$$

Оценка A_1 может быть сведена к A_2 переменной порядка суммирования; поэтому

$$A_1 < C_4 \sum_{k=1}^m |\gamma_k|. \quad (10.12)$$

Так как из определения I_2 , A_1 и A_2 (см. (10.8) и (10.10)) имеем

$$I_2 = \frac{A_1 + A_2}{\sum |\gamma_k|^2},$$

то из (10.11) и (10.12) находим

$$I_2 < \frac{C_5}{(\sum |\gamma_k|)}. \quad (10.13)$$

Соединяя (10.8), (10.9) и (10.13), находим

$$\int_0^{2\pi} |R_m(x)|^2 d\mu < \frac{C_6}{\sum_{k=1}^m |\gamma_k|}.$$

Определим последовательность целых чисел n_ν так, чтобы

$$\frac{1}{(\nu+1)^2} \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_\nu} |\gamma_k|} < \frac{1}{\nu^2}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |R_{n_\nu}(x)|^2 d\mu < +\infty$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |R_{n_\nu}(x)|^2 < +\infty$$

всюду, за исключением множества μ меры нуль.

В частности, отсюда следует, что

$$R_{n_\nu}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \nu \rightarrow \infty,$$

за исключением, быть может, множества μ меры нуль.

Пусть теперь для любого n найдено ν такое, что

$$n_\nu \leq n < n_{\nu+1}.$$

Тогда

$$\left| R_n(x) \sum_{k=1}^n |\gamma_k| - R_{n_\nu}(x) \sum_{k=1}^{n_\nu} |\gamma_k| \right| < \sum_{k=n_\nu+1}^n |\gamma_k|,$$

а потому

$$\begin{aligned} \left| R_n(x) - \frac{\sum_{k=1}^{n_\nu} |\gamma_k|}{\sum_{k=1}^n |\gamma_k|} R_{n_\nu}(x) \right| &< \frac{\sum_{k=n_\nu+1}^n |\gamma_k|}{\sum_{k=1}^n |\gamma_k|} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n_{\nu+1}} |\gamma_k|}{\sum_{k=1}^{n_\nu} |\gamma_k|} - 1 < \left(\frac{\nu+2}{\nu} \right)^2 - 1 = o(1) \quad \text{при} \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

почти всюду по мере μ ; но это невозможно, так как $R_n(x) \not\rightarrow 0$ на E , а $\mu \prec E$, т. е. $\mu(E) = 1$. Из противоречия вытекает, что лемма доказана.

Теперь для доказательства теоремы опять рассуждаем, как в § 9. Имеем

$$|\cos x| = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} c_j e^{ijx},$$

где $c_0 = \frac{2}{\pi}$ и $c_j = O\left(\frac{1}{j^2}\right)$. Отсюда снова находим

$$\frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} c_j Q_{jn}(x),$$

где

$$Q_{jn}(x) = \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k e^{-ija_k} e^{ij kx}}{\sum_{k=1}^n \varrho_k}.$$

Так как $\sum_1^\infty \varrho_k = +\infty$ и $\varrho_k = O\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}\right)$, то мы вправе применить лемму 2 и утверждать, что при $j \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{jn}(x) = 0$$

всюду, кроме, быть может, некоторого множества E_j нулевой обобщенной емкости относительно последовательности $\{\lambda_n\}$.

Полагая

$$E = \sum_{j=1}^\infty E_j,$$

видим по лемме 1, что обобщенная емкость E относительно $\{\lambda_n\}$ также равна нулю. Но рассуждения § 9 показывают, что во всякой точке x , не принадлежащей E , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(kx - \alpha_k)|}{\sum_{k=1}^n \varrho_k} = \frac{2}{\pi}$$

и этим доказательство теоремы заканчивается.

С л е д с т в и е. Если выполнены условия теоремы, т. е. $\sum \varrho_n = +\infty$ и

$$\varrho_n = O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right),$$

то тригонометрический ряд

$$\sum \varrho_n \cos(nx - \alpha_n) \tag{10.14}$$

может сходиться абсолютно лишь на множестве E , обобщенная емкость которого относительно $\{\lambda_n\}$ равна нулю.

В качестве примера, приняв $\lambda_n = \frac{1}{n}$, приходим к выводу, что если $\sum \varrho_n = +\infty$ и

$$\varrho_n = O\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$

то ряд (10.14) может сходиться абсолютно лишь на множестве нулевой логарифмической емкости (так как мы видели в § 12 главы V, что в случае положительной логарифмической емкости емкость (в смысле Темко) для последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ положительна, а тогда и обобщенная емкость относительно этой последовательности положительна).

§ 11. Абсолютная сходимость для рядов специального вида

До сих пор мы изучали абсолютную сходимость или для произвольных тригонометрических рядов, или (§ 10) предполагая, что коэффициенты стремятся к нулю с некоторой определенной скоростью.

В этом параграфе мы хотим показать, что при некоторых специальных предположениях относительно коэффициентов ряда его абсолютная сходимость всюду вытекает уже из абсолютной сходимости в одной точке, или в двух, находящихся на расстоянии, удовлетворяющем тому или иному условию.

Простейшей теоремой в этом направлении была теорема Фату, доказавшего, что если у тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

величины $|a_n|$ монотонно убывают, то абсолютная сходимость его в одной точке уже влечет $\sum |a_n| < +\infty$.

Сас (Szász^[4]) несколько усилил эту теорему. Чтобы сформулировать его результат, введем терминологию, принадлежащую С. Н. Бернштейну.

О п р е д е л е н и е. Последовательность положительных чисел ϱ_n назовем *почти монотонно убывающей*, если существует такая константа C , что

$$\varrho_{n+1} < C \varrho_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(аналогично определяется *почти монотонное возрастание* :

$$\varrho_{n+1} > C \varrho_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $C > 0$).

Приняв эту терминологию, можем теорему Саса сформулировать так:
Т е о р е м а С а с а. Если для ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (11.1)$$

последовательность $\{|a_n|\}$ почти монотонно убывает и ряд (11.1) сходится абсолютно хотя бы в одной точке, то

$$\sum |a_n| < +\infty.$$

Положим для краткости $|a_n| = \varrho_n$. Имеем по условию

$$\varrho_{n-1} \geq \frac{1}{C} \varrho_n, \quad n \geq 2.$$

Не нарушая общности, здесь можно считать $C \geq 1$; тогда

$$\begin{aligned} \varrho_{n-1} |\cos(n-1)x| + \varrho_n |\cos nx| &\geq \\ &\geq \frac{\varrho_n}{C} [|\cos(n-1)x| + |\cos nx|] \geq \frac{\varrho_n}{C} [\cos^2(n-1)x + \cos^2 nx] = \\ &= \frac{1}{C} \varrho_n [1 + \cos x \cos(2n-1)x] \geq \frac{1}{C} \varrho_n (1 - |\cos x|) \quad \text{для } n \geq 2. \end{aligned}$$

Если ряд (11.1) сходится абсолютно в точке x_0 , то при $x_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$ теорема тривиальна; если же $x_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то из неравенства

$$\varrho_{n-1} |\cos(n-1)x_0| + \varrho_n |\cos nx_0| \geq \frac{1}{C} \varrho_n (1 - |\cos x_0|) = \varrho_n \gamma,$$

где $\gamma \neq 0$, заключаем

$$\sum_{n=1}^N \varrho_n \leq \varrho_1 + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^N [\varrho_{n-1} |\cos(n-1)x_0| + \varrho_n |\cos nx_0|] \leq \varrho_1 + \frac{2A}{\gamma},$$

где $A = \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n |\cos nx_0| < +\infty$.

Значит, $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n < +\infty$, а это и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Т е о р е м а. Если $\{b_n\}$ почти монотонно убывает и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

сходится абсолютно хотя бы в одной точке x_0 , $x_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то

$$\sum |b_n| < +\infty.$$

Действительно, замечая только, что

$$\sin^2(n-1)x + \sin^2 nx = 1 - \cos x \cos(2n-1)x > 1 - |\cos x|,$$

мы видим, что предыдущее доказательство повторяется слово в слово.

Перейдем к доказательству других теорем, касающихся абсолютной сходимости при специальных предположениях относительно коэффициентов.

Предварительно докажем лемму (см. Salem^[4]).

Л е м м а 1. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos(k_n x - a_n) \quad (11.2)$$

сходится абсолютно в двух точках x_1 и x_2 , причем

$$x_1 - x_2 = \delta \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Пусть

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \cos 2k_n \delta < 1. \quad (11.3)$$

Тогда

а) если ϱ_n монотонно убывает

или

б) если при любом целом p и любом n

$$\frac{\varrho_{n+p}}{\varrho_n} < C,$$

то

$$\sum \varrho_n < +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из абсолютной сходимости (11.2) в x_1 и x_2 , замечая, что

$$\begin{aligned} |\sin k_n \delta| &= |\sin[(k_n x_1 - a_n) - (k_n x_2 - a_n)]| \leq \\ &\leq |\cos(k_n x_1 - a_n)| + |\cos(k_n x_2 - a_n)|, \end{aligned}$$

находим

$$\sum \varrho_n |\sin k_n \delta| < +\infty. \quad (11.4)$$

Покажем, что если выполнено а) или б), то из (11.4) следует $\sum \varrho_n < +\infty$.

Прежде всего заметим, что (11.4) влечет

$$\sum \varrho_n \sin^2 k_n \delta < +\infty,$$

а потому найдется такое A , что

$$\sum_1^m \varrho_n \sin^2 k_n \delta < A \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Поэтому если бы $\sum \varrho_n = +\infty$, то имели бы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^m \varrho_n \sin^2 k_n \delta}{\sum_{n=1}^m \varrho_n} = 0,$$

откуда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta}{\sum_{n=1}^m \varrho_n} = 1. \quad (11.5)$$

Докажем, что условия (11.3) и (11.5) несовместны, если на числа ϱ_n наложено условие а), высказанное в формулировке леммы 1.

На основании (11.3) существует такое α , $0 < \alpha < 1$, что для некоторого m_0

$$\frac{1}{m} \left| \sum_{n=1}^m \cos 2k_n \delta \right| < \alpha \quad \text{при} \quad n \geq m_0. \quad (11.6)$$

Положим для краткости $\sum_{p=1}^n \cos 2k_p \delta = v_n$, тогда

$$|v_n| < \alpha n, \quad \text{если} \quad n \geq m_0. \quad (11.7)$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{m_0} \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| + \left| \sum_{m_0+1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m_0} \varrho_n + \left| \sum_{m_0+1}^{m-1} (\varrho_n - \varrho_{n+1}) v_n + \varrho_m v_m - \varrho_{m_0+1} v_{m_0} \right|. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Если выполнено условие а), то ϱ_n монотонно убывают, а тогда из (11.7) и (11.8) находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| &< \sum_{n=1}^{m_0} \varrho_n + \alpha \left\{ \sum_{m_0+1}^{m-1} (\varrho_n - \varrho_{n+1}) n + \varrho_m m + \varrho_{m_0+1} m_0 \right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m_0} \varrho_n + \alpha (\varrho_{m_0+1} + \varrho_{m_0+2} + \dots + \varrho_m) + 2 \varrho_{m_0+1} m_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left| \sum_{n=1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| < C + \alpha \sum_{n=1}^m \varrho_n,$$

где C — константа, которая зависит лишь от m_0 , но не от m . Так как $\sum_{n=1}^m \varrho_n \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то, выбрав α' так, чтобы $\alpha < \alpha' < 1$, имеем

$$\left| \sum_{n=1}^m \varrho_n \cos 2k_n \delta \right| < \alpha' \sum_{n=1}^m \varrho_n,$$

если m достаточно велико, а это противоречит (11.5).

Если выполнено условие б), то, полагая

$$r_n = \frac{1}{C} \max(\varrho_n, \varrho_{n+1}, \dots),$$

мы видим, что $\varrho_n \leq Cr_n$, кроме того,

$$r_n \leq \frac{\varrho_n}{C} \max\left(1, \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}, \dots, \frac{\varrho_{n+p}}{\varrho_n}, \dots\right),$$

а так как $\frac{\varrho_{n+p}}{\varrho_n} < C$, то

$$r_n \leq \varrho_n. \quad (11.9)$$

Итак, сходимость $\sum \varrho_n$ и $\sum r_n$ имеет место одновременно. Но числа r_n по самому своему построению монотонно убывают. В силу (11.4) и (11.9) имеем

$$\sum r_n \sin^2 k_n \delta < +\infty, \quad (11.10)$$

а тогда, по только что доказанному, из (11.3) и (11.10) следует

$$\sum r_n < +\infty,$$

значит и $\sum \varrho_n < +\infty$.

Итак, лемма полностью доказана.

В качестве следствия этой леммы получим следующие теоремы Салема:

Т е о р е м а 1. Пусть ряд

$$\sum \varrho_n \cos (nx - a_n)$$

сходится абсолютно в двух точках x_1 и x_2 , $x_1 - x_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Тогда если выполнено одно из двух условий,

а) ϱ_n монотонно убывает

или

$$\text{б) } \frac{\varrho_{n+p}}{\varrho_n} < C \quad (n = 1, 2, \dots; p = 1, 2, \dots),$$

то

$$\sum \varrho_n < +\infty.$$

В самом деле, если $x_1 - x_2 = \delta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то

$$\sum_{n=1}^m \cos 2n\delta = D_m(2\delta) - \frac{1}{2},$$

где $D_m(x)$ — ядро Дирихле. Поэтому

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos 2n\delta \right| = \left| \frac{\sin(2m+1)\delta}{2\sin\delta} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\delta}, \quad (11.11)$$

следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^m \cos 2n\delta}{m} = 0,$$

и мы находимся в условиях леммы 1.

Теорема 1 доказана.

Для того чтобы получить некоторые другие следствия из леммы 1, докажем сначала лемму:

Л е м м а 2. Если числа $\left(k_n \frac{\delta}{2\pi}\right)$ равномерно распределены*) на $(0, 1)$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos 2 k_n \delta = o(1).$$

Действительно, тогда на основании теоремы Вейля (см. Добавления, § 26) при любом m , и, в частности, при $m = 2$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e^{2\pi i 2 \left(\frac{k_s \delta}{2\pi}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e^{i 2 k_s \delta} = 0.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e^{i 2 k_s \delta} = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \cos 2 k_s \delta = 0. \quad (11.12)$$

В частности, если выполнено условие (11.12), то выполнено условие (11.3) леммы 1, а потому мы сразу получаем теорему (Salem^[4]):

Т е о р е м а 2. Если числа $\left(k_n \frac{\delta}{2\pi}\right)$ равномерно распределены на отрезке $(0, 1)$ и ряд

$$\sum e_n \cos (k_n x - \alpha_n)$$

сходится абсолютно в двух точках x_1 и x_2 , где $x_1 - x_2 = \delta$, то при выполнении одного из условий а) или б) леммы 1 имеем

$$\sum e_n < +\infty.$$

С л е д с т в и е. Если e_n удовлетворяют одному из двух условий леммы 1 и ряд

$$\sum e_n \cos (n^p x - \alpha_n) \quad (p - \text{целое})$$

сходится абсолютно в двух точках x_1 и x_2 , $x_1 - x_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то $\sum e_n < +\infty$.

Действительно, если $x_1 - x_2 = \delta$ есть число несоизмеримое с π , то числа $\left(n^p \frac{\delta}{2\pi}\right)$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$ (см. Добавления, § 26), а потому мы находимся в условиях предыдущей теоремы.

Если же $\frac{\delta}{\pi}$ рационально, то

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \cos 2 n^p \delta < 1.$$

В самом деле, пусть $\delta = \frac{r}{q} \pi$, где $\frac{r}{q}$ — несократимая дробь. Ясно, что если n пробегает числа от 1 до q , то $n^p r$ пробегает полную систему вычетов по модулю q и, значит, $\left(2 n^p \frac{r}{q} \pi\right) \pmod{2\pi}$ пробегает в каком-то порядке

*) Понятие равномерного распределения дано в § 26 Добавлений.

систему чисел $2\pi \frac{s}{q}$, где $s = 0, 1, \dots, q-1$. Пусть $m = Nq + \mu$, где $0 \leq \mu \leq q-1$ и N целое. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \cos 2n^p \delta &= \sum_{n=1}^{Nq} \cos 2n^p \delta + \sum_{Nq+1}^m \cos 2n^p \delta = \\ &= N \sum_{s=1}^q \cos 2\pi \frac{s}{q} + \sum_{Nq+1}^m \cos 2n^p \delta. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Второе слагаемое в (11.13) по модулю $\leq q-1$, поэтому после деления на m оно стремится к нулю. Надо показать, что

$$\overline{\lim} \frac{1}{m} N \sum_{s=1}^q \cos 2\pi \frac{s}{q} < 1. \quad (11.14)$$

Но это справедливо, так как при $m \rightarrow \infty$ отношение $\frac{N}{m} \rightarrow \frac{1}{q}$, а

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=1}^q \cos 2\pi \frac{s}{q} \right| &= \left| -\frac{1}{2} + D_q\left(\frac{2\pi}{q}\right) \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2q+1)\frac{\pi}{q}}{2 \sin \frac{\pi}{q}} \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{q}} < \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \end{aligned}$$

так как $\sin x \geq x \frac{2}{\pi}$, если $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Поэтому при достаточно больших m имеем

$$\frac{1}{m} N \left| \sum_{s=1}^q \cos 2\pi \frac{s}{q} \right| < \frac{1}{2q} + \frac{1}{4} + \varepsilon, \quad (11.15)$$

где ε как угодно мало и, значит, правая часть (11.15) меньше единицы, а потому (11.14) доказано и этим доказательство следствия теоремы 2 окончено.

З а м е ч а н и е. Если вместо $\{n^p\}$ взять лакунарную последовательность, то результата, аналогичного следствию теоремы 2, уже получить нельзя. Действительно, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \sin 2^n \pi x$$

с монотонно убывающими ϱ_n и $\sum \varrho_n = +\infty$ сходится абсолютно во всех точках вида $\frac{p}{2^q}$, где p и q — любые целые (поскольку при таких значениях x все члены ряда, начиная с некоторого номера, обращаются в нуль).

Легко привести и примеры лакунарных рядов с монотонно убывающими коэффициентами, сходящихся абсолютно на несчетном множестве точек без того, чтобы сходиться абсолютно всюду*).

Заканчивая главу, посвященную абсолютной сходимости рядов, мы считаем необходимым коснуться вопроса о точках абсолютной сходимости для так называемых нуль-рядов, т. е. рядов, сходящихся к нулю почти всюду, но не всюду. Существование таких рядов будет доказано в главе XIV.

Докажем теорему В. Я. Козлова^[1].

*) Напомним, что лакунарным рядам была посвящена глава XI, где, в частности, исследовались и достаточные условия абсолютной сходимости этих рядов.

Т е о р е м а. Нуль-ряд не может иметь двух точек абсолютной сходимости на расстоянии, не соизмеримом с π .

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

рассматриваемый нуль-ряд. Положим для краткости

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Мы уже видели (см. § 2), что

$$A_n(x+h) + A_n(x-h) = 2A_n(x) \cos nh.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

почти всюду сходится к нулю, то при любом x_0 ряды $\sum A_n(x_0+h)$ и $\sum A_n(x_0-h)$ сходятся к нулю для почти всех h , а значит, и $\sum A_n(x_0) \cos nh$ сходится к нулю для почти всех h . Но если x_0 есть точка абсолютной сходимости нуль-ряда, то $\sum |A_n(x_0)| < +\infty$, следовательно, $\sum A_n(x_0) \cos nh$ сходится равномерно относительно h , и так как он для почти всех h сходится к нулю, то

$$A_n(x_0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть теперь x_1 — другая точка абсолютной сходимости заданного нуль-ряда. Тогда

$$A_n(x_1) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 &= 0, \\ a_n \cos nx_1 + b_n \sin nx_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как определитель системы есть $\sin n(x_1 - x_0) \neq 0$, если $n(x_1 - x_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что у нуль-ряда не может быть двух точек абсолютной сходимости на расстоянии, не соизмеримом с π .

С л е д с т в и е 1. Нуль-ряд может иметь лишь конечное число точек абсолютной сходимости.

Действительно, допустим, что это неверно и x_0, x_1, x_2, \dots — точки абсолютной сходимости нуль-ряда. Так как найдется такое m , что $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$, то уравнения

$$\begin{aligned} a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0 &= 0, \\ a_m \cos mx_k + b_m \sin mx_k &= 0 \end{aligned}$$

имеют отличное от нуля решение, а это значит, что $\sin m(x_k - x_0) = 0$. Но это не может наблюдаться для бесконечного множества значений k , так как $\sin mt$ лишь конечное число раз обращается в 0 на отрезке $[0, 2\pi]$.

С л е д с т в и е 2. Не существует нуль-ряда вида

$$\sum a_n \cos p^n x + b_n \sin p^n x,$$

где p — целое.

Этот результат можно было бы получить из теоремы Зигмунда о лакунарных рядах (см. § 11 главы XI), но поскольку ее доказательство сложно, мы предпочитаем здесь дать в два слова элементарное доказательство.

Рассмотрим сначала ряд $\sum \beta_n \sin p^n x$. Он имеет бесконечное множество точек абсолютной сходимости, так как все точки вида $x = 2\pi \frac{l}{p^k}$ обладают этим свойством при любых целых l и k . Поэтому если такой ряд сходится к нулю почти всюду, то все $\beta_n = 0$.

Пусть теперь

$$A_n(x) = a_n \cos p^n x + b_n \sin p^n x.$$

Если ряд $\sum A_n(x)$ есть нуль-ряд, то будут при любом x нуль-рядами относительно h и $\sum A_n(x+h)$ и $\sum A_n(x-h)$, но

$$A_n(x+h) - A_n(x-h) = 2(b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x) \sin p^n h,$$

значит

$$\sum (b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x) \sin p^n h$$

есть (относительно h) нуль-ряд, а потому

$$b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Это рассуждение справедливо для всякого x , а потому

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема доказана.

К этим результатам Козлова сделаем следующее добавление, принадлежащее Я. В. Быкову^[4].

Если нуль-ряд сходится абсолютно в двух точках, то мы уже знаем, что их расстояние δ соизмеримо с π . Пусть

$$\delta = \frac{r}{s} \pi,$$

где дробь $\frac{r}{s}$ несократима. При доказательстве следствия I мы видели, что если при некотором m имеем $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$, то $\sin m \delta = 0$, т. е. $\sin m \frac{r}{s} \pi = 0$. Так как $\frac{r}{s}$ несократимая дробь, то m должно делиться на s , значит у нуль-ряда отличны от нуля лишь коэффициенты с номерами $m = ks$, где k — целое, т. е. ряд имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ksx + \beta_k \sin ksx.$$

Отсюда вытекает такое следствие:

Если у нуль-ряда лишь конечное число коэффициентов равно нулю, то он может сходиться абсолютно лишь в двух точках на расстоянии, равном π .

Действительно, в этом случае число s из предыдущего рассуждения должно быть равно 1 и, значит, $\delta = r\pi$, где r целое. Но так как $x_1 \neq x_2$, то $\delta \neq 0$, кроме того, $\delta \neq 2\pi$, иначе бы x_1 и x_2 снова надо было считать совпадающими. Итак, $\delta = \pi$.

ГЛАВА XIV

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

§ 1. Введение

Настоящая глава будет посвящена двум вопросам, тесно связанным между собой, и уже немного освещенным в главе I. Первый из них — вопрос, на который частично отвечает теорема дю Буа-Реймона (см. § 72 главы I), можно формулировать так: зная, что тригонометрический ряд сходится к некоторой функции, установить, должен ли он быть ее рядом Фурье. Такая формулировка выражена в неточной форме, и здесь прежде всего надо уточнить, где сходится тригонометрический ряд и к какой функции. Было показано, что если тригонометрический ряд сходится всюду к ограниченной функции, то этот ряд будет ее рядом Фурье (см. § 72 главы I). В настоящей главе (см. § 4) это предложение значительно обобщается, а именно доказывается, что если тригонометрический ряд сходится всюду, вне счетного множества, к конечной суммируемой функции, то этот ряд есть ее ряд Фурье. Отсюда, в частности, вытекает теорема Юнга: если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, вне счетного множества, то все его коэффициенты равны нулю. Этот результат является обобщением теоремы Кантора (см. главу I, § 70) о том, что сходимость тригонометрического ряда к нулю всюду, или всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, влечет равенство нулю всех его коэффициентов.

В § 70 главы I мы условились говорить, что некоторое множество E есть M -множество, если существует тригонометрический ряд, сходящийся к нулю вне E , но имеющий отличные от нуля коэффициенты. Если множество E не есть M -множество, мы условились называть его U -множеством. Таким образом, все множества распадаются на M - и U -множества. Из теоремы Кантора и Юнга следует, что всякое пустое конечное или счетное множество есть U -множество. С другой стороны, в § 70 главы I было доказано, что всякое множество положительной меры есть M -множество.

Таким образом, остается нерешенным вопрос, какие из несчетных множеств меры нуль будут M - и какие U -множествами; это и будет второй темой данной главы (тождество этого вопроса с проблемой единственности разложения функции в тригонометрический ряд уже разъяснялось в главе I, § 70). Ввиду того, что проблема единственности чрезвычайно трудна, она не только не решена в общем виде, но даже и для наиболее простого случая, когда рассматриваемое множество является замкнутым. С другой стороны, она представляет очень большой интерес, так как обнаружилось, что при ее решении приходится иметь дело с очень тонкими свойствами

структуры множеств, и поэтому при ее решении оказывается необходимым учитывать не только геометрический характер множества (т. е. расположение его на прямой), но и арифметическую природу входящих в него точек.

Укажем вкратце расположение материала в данной главе.

В § 2 и § 3 даются вспомогательные результаты, необходимые как для получения обобщенной теоремы дю Буа-Реймона (доказываемой в § 4), так и для дальнейших результатов по единственности. В § 5 подробно разъясняется постановка проблемы единственности; в § 6 изучаются свойства так называемых нуль-рядов, т. е. рядов, сходящихся к нулю почти всюду, но не всюду. Как следствие полученных результатов доказывается, что сумма счетного множества замкнутых U -множеств есть U -множество.

В § 7 доказывается существование несчетных U -множеств, его дополняет § 8. В §§ 9 и 10 рассматривается вопрос, при каких монотонных преобразованиях U -множество переходит в U -множество, и когда оно может стать M -множеством. Начиная с § 11, мы сосредоточиваем наше внимание на случае совершенных множеств; хотя и для них проблема единственности, как уже говорилось, еще не решена, но все же она упрощается, так как здесь имеется метод, позволяющий свести решение проблемы к вопросу о поведении коэффициентов Фурье от некоторой функции, постоянной на смежных к заданному множеству интервалах (см. § 11). Этот метод и применяется дальше. Сначала (в § 12) рассматриваются простейшие примеры совершенных M -множеств.

В § 13 их класс значительно расширяется, в § 17 изучается вопрос, в какой мере введенные ограничения необходимы. Чтобы иметь возможность судить об этом, понадобилось получить более глубокие сведения о замкнутых U -множествах — этому посвящены §§ 14 и 15. В частности, в § 15 рассмотрен класс множеств, представляющих обобщение понятия H -множества (см. главу XII, § 5). Построение этих множеств позволило решить ряд трудных вопросов проблемы единственности, которые много лет оставались нерешенными, в частности построить U -множество, не содержащееся ни в каком H_σ (см. § 16), и изучить связь между M -множествами и « M -множествами в узком смысле» (см. § 18). §§ 19—21 посвящены изучению конкретных классов совершенных множеств; здесь обнаруживается (см. § 20), что даже в самом казалось бы простом случае геометрической структуры множества вопрос о том, будет ли оно U - или M -множеством, очень труден и решается только с привлечением теории алгебраических чисел.

В § 22 мы даем краткий обзор результатов, полученных для совершенных множеств более сложной природы.

В § 23 мы сопоставляем ряд результатов, полученных в главах XII, XIII и XIV и касающихся множеств меры нуль. Мы сравниваем R -, N - и U -множества и ставим ряд проблем.

В § 24 мы разбираем вопрос о скорости, с которой могут стремиться к нулю коэффициенты нуль-рядов.

В § 25 и 26 мы указываем на обобщения проблемы единственности. Они могут быть сделаны в разных направлениях. Во-первых, можно говорить об U -множествах для того или иного метода суммирования, т. е. о тех множествах, для которых из суммируемости ряда к нулю некоторым методом следует равенство нулю всех коэффициентов. Во-вторых, можно говорить об относительных U -множествах, т. е., например, рассматривать не всевозможные тригонометрические ряды, а лишь ряды из некоторого класса S и говорить, что E есть U -множество в классе S , если каждый ряд из класса S , сходящийся к нулю вне E , должен иметь все коэффициенты равными нулю.

Наконец (см. § 27), можно объединить оба последних обобщения и рассматривать ряды из некоторого класса S , суммируемые к нулю тем или иным методом вне E , и таким образом изучать U -множества относительно класса S и заданного метода суммирования.

§ 2. Вспомогательные теоремы о верхней и нижней производной Шварца

В § 67 главы I мы ввели понятие о второй производной Шварца и применили его к доказательству теоремы дю Буа-Реймона — Лебега.

Напомним, что числа

$$\overline{D^2} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

и

$$\underline{D^2} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

были названы соответственно верхней и нижней Шварцевой производной от $F(x)$ в точке x . Мы сейчас установим некоторые свойства этих производных, которые дадут нам возможность значительно обобщить как полученную в § 72 главы I теорему дю Буа-Реймона, так и результаты о единственности разложения функции в тригонометрический ряд, изложенные в § 70 главы I.

Прежде всего заметим следующее: из самого определения выпуклой функции (см. Вводный материал, § 3) сразу вытекает, что если $F(x)$ выпукла на некотором $[a, b]$, то

$$\Delta_h^2 F(x) \geq 0 \quad \text{для} \quad x \in (a, b)$$

и достаточно малого h , а потому $\overline{D^2} F(x) \geq 0$ при $x \in (a, b)$. С другой стороны, ясно, что если $F''(x) \geq 0$ на (a, b) , то $F(x)$ должна быть выпуклой на этом интервале. Мы сейчас докажем теорему, которая является обобщением этого утверждения.

Т е о р е м а 1. Если $F(x)$ непрерывна на (a, b) и если

$$\overline{D^2} F(x) \geq 0$$

всюду на (a, b) , кроме, быть может, некоторого счетного множества E , в точках которого она гладкая, то $F(x)$ выпукла на (a, b) . Аналогично, если

$$\underline{D^2} F(x) \leq 0,$$

кроме точек E , то $F(x)$ вогнута. Наконец, если

$$D^2 F = 0,$$

кроме точек E , и гладкая в точках E , то $F(x)$ линейна на (a, b) .

Достаточно провести доказательство для $\overline{D^2} F(x) \geq 0$, так как случай $\underline{D^2} F(x) \leq 0$ сводится к нему, если вместо $F(x)$ рассмотреть $-F(x)$. Кроме того, если функция одновременно выпукла и вогнута, то она линейна, а значит последнее утверждение также будет доказано.

Допустим сначала, что нам удалось доказать теорему в предположении

$$\overline{D^2} F > 0$$

всюду, кроме E . Тогда, полагая

$$F_n(x) = F(x) + \frac{1}{2} \frac{x^2}{n},$$

мы видим, что $\bar{D}^2 F_n(x) = \bar{D}^2 F(x) + \frac{1}{n}$, и поэтому, так как для всех $F_n(x)$ имеем $\bar{D}^2 F_n(x) > 0$, мы можем утверждать, что они выпуклы. Но предел последовательности выпуклых функций есть функция выпуклая*), а потому и $F(x)$ будет выпуклой.

Итак, допустим, что

$$\bar{D}^2 F(x) > 0$$

всюду вне E и является гладкой в точках множества E . Нам надо доказать, что она выпукла. Допустим, что это неверно и докажем, что тогда множество E должно иметь мощность континуума; это приведет нас к противоречию.

Если $F(x)$ не является выпуклой на (a, b) , то найдется такой интервал (α, β) , содержащийся в (a, b) , что дуга кривой $y = F(x)$ лежит выше хорды, проходящей через точки $(\alpha, F(\alpha))$ и $(\beta, F(\beta))$. Пусть $y = kx + m$ — уравнение прямой, проходящей через эти точки, тогда

$$R(x) = F(x) - kx - m > 0 \quad \text{на} \quad (\alpha, \beta).$$

Если взять угловой коэффициент q , достаточно мало отличающийся от k , то и для функции

$$\varrho(x) = F(x) - qx - m$$

можно найти отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$, где будем также иметь неравенство $\varrho(x) > 0$. Так как $\varrho(x)$ непрерывна и положительна, то ее максимум на $[\alpha_1, \beta_1]$ положителен и достигается в некоторой точке: Обозначим через x_q самую правую из точек, в которых $\varrho(x)$ имеет максимум; значит,

$$\varrho(x) \leq \varrho(x_q) \quad \text{на} \quad \alpha_1 \leq x \leq x_q \quad \text{и} \quad \varrho(x) < \varrho(x_q) \quad \text{для} \quad x_q < x \leq \beta_1.$$

Но так как

$$\bar{D}^2 F(x) = \bar{D}^2 \varrho(x),$$

а в точке максимума $\Delta_n^2 \varrho(x) \leq 0$, если h достаточно мало, и, значит, $\bar{D}^2 \varrho(x_q) \leq 0$, то отсюда

$$\bar{D}^2 F(x_q) \leq 0,$$

т. е. x_q есть точка множества E .

Если мы докажем, что для разных значений q точки x_q различны, то будет доказано, что E имеет мощность континуума, поскольку можно взять континуум различных прямых $qx + m$ с угловыми коэффициентами, достаточно близкими к угловому коэффициенту k .

Так как x_q есть точка максимума для $\varrho(x)$, то

$$\frac{\varrho(x_q + h) - \varrho(x_q)}{h} \leq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varrho(x_q - h) - \varrho(x_q)}{-h} \geq 0$$

для всех достаточно малых h . Следовательно,

$$D^+ \varrho(x_q) \leq 0 \quad \text{и} \quad D_- \varrho(x_q) \geq 0^{**}).$$

*) Действительно, если у каждой из допредельных функций любая дуга лежит ниже или на соответствующей хорде, то это свойство сохраняется и в пределе.

**) Мы обозначаем через D^+ , D^- , D_+ и D_- соответственно верхнее правое, верхнее левое, нижнее правое и нижнее левое производные числа. Через \bar{D} обозначается наибольшее из двух верхних, через \underline{D} — наименьшее из двух нижних производных чисел.

Но по условию $F(x)$ гладкая в точках множества E , значит, в x_q , а стало быть это верно и для $\varrho(x)$; поэтому для $\varrho(x)$ имеем

$$D\varrho(x_q) = D^+\varrho(x_q) \leq 0$$

и

$$D\varrho(x_q) = D_-\varrho(x_q) \geq 0,$$

а потому оба эти числа должны быть равны нулю, т. е. в точке x_q функция $\varrho(x)$ имеет обыкновенную производную, равную нулю. Но тогда

$$\varrho'(x_q) = 0, \quad \text{т. е.} \quad F'(x_q) = q.$$

Значит, для разных q точки x_q все различны, а это и заканчивает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Если исключительных точек нет, то о гладкости функции $F(x)$ ничего и не надо предполагать; отсюда следует, что *если*

$$D^2 F(x) = 0 \quad \text{на} \quad (a, b),$$

то $F(x)$ линейна на (a, b) . Это уже было доказано (см. главу I, § 67).

Переходим к доказательству следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. Пусть $f(x)$ суммируема на (a, b) и конечна на нем всюду, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества E . Если $F(x)$ непрерывна на (a, b) и гладкая в точках E , то при выполнении неравенств

$$\underline{D}^2 F(x) \leq f(x) \leq \overline{D}^2 F(x)$$

всюду вне E , имеем

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du + Ax + B$$

всюду на (a, b) , где A и B — постоянны.

Построим две последовательности непрерывных функций $u_n(x)$ и $v_n(x)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $u_n(a) = v_n(a) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),
- 2) $u_n(x)$ сходится равномерно к $\int_a^x f(t) dt$ на (a, b) ; также $v_n(x)$,
- 3) всюду, где $f(x)$ конечна, имеем

$$\overline{D} u_n(x) \leq f(x) \leq \underline{D} v_n(x).$$

По поводу существования таких последовательностей см. § 27 Добавлений.

Если мы теперь положим

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt \quad \text{и} \quad V_n(x) = \int_a^x v_n(t) dt,$$

то функции $U_n(x)$ и $V_n(x)$ имеют непрерывные производные; поэтому, применяя формулу Коши, находим

$$\frac{V_n(x+h) + V_n(x-h) - 2V_n(x)}{h^2} = \frac{v_n(x+\theta h) - v_n(x-\theta h)}{2\theta h}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Но при любом $\varepsilon > 0$ правая часть этого равенства при достаточно малом h должна удовлетворять неравенству

$$\frac{v_n(x+\theta h) - v_n(x-\theta h)}{2\theta h} \geq \underline{D} v_n(x) - \varepsilon,$$

поэтому имеем и

$$\underline{D}^2 V_n(x) \geq \underline{D} v_n(x) - \varepsilon,$$

а так как ε как угодно мало, то

$$\underline{D}^2 V_n(x) \geqslant D v_n(x),$$

а в точках, не принадлежащих E , это влечет

$$\underline{D}^2 V_n(x) \geqslant f(x).$$

Аналогично доказываем, что всюду вне E

$$\bar{D}^2 U_n(x) \leqslant f(x).$$

Положим

$$P_n(x) = U_n(x) - F(x),$$

$$Q_n(x) = V_n(x) - F(x).$$

Так как для любых α_n и β_n имеем всегда

$$\overline{\lim} (\alpha_n - \beta_n) \geqslant \underline{\lim} \alpha_n - \underline{\lim} \beta_n,$$

$$\underline{\lim} (\alpha_n - \beta_n) \leqslant \overline{\lim} \alpha_n - \overline{\lim} \beta_n,$$

то

$$\bar{D}^2 Q_n(x) \geqslant \underline{D}^2 V_n(x) - \underline{D}^2 F(x) \geqslant f(x) - f(x) = 0.$$

и аналогично

$$\underline{D}^2 P_n(x) \leqslant \bar{D}^2 U_n(x) - \bar{D}^2 F(x) \leqslant f(x) - f(x) = 0.$$

Поэтому на основании теоремы 1 функция $Q_n(x)$ выпукла, а $P_n(x)$ вогнута.

Но из равномерной сходимости $u_n(t)$ и $v_n(t)$ к $\int_a^t f(u) du$ следует, что $U_n(x)$ и $V_n(x)$ равномерно сходятся к $\int_a^x dt \int_a^t f(u) du$, а потому последовательности $Q_n(x)$ и $P_n(x)$ равномерно сходятся к разности

$$R(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du - F(x).$$

Но эта разность, как предел последовательности и выпуклых и вогнутых функций, должна быть линейна, т. е. $R(x) = Ax + B$, откуда и вытекает, что

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du + Ax + B.$$

Таким образом, теорема доказана. Мы можем получить из нее целый ряд важных следствий. Одно из них касается вопроса о почленном интегрировании тригонометрических рядов.

§ 3. Законность почленного интегрирования тригонометрического ряда

Мы видели (глава 1, § 41), что всякий ряд Фурье можно почленно интегрировать, даже если он расходится, т. е. даже и в этом случае результат почленного интегрирования ряда Фурье от $f(x)$ есть ряд, сходящийся к неопределенному интегралу от $f(x)$.

Естественно поставить вопрос: дан любой тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. Что можно сказать о проинтегрированном ряде? Мы знаем, что обобщенная риманова сумма для общего тригонометрического ряда в некоторых случаях играет ту же роль, какую играет

функция $f(x)$ при изучении поведения ряда Фурье $\sigma(f)$. В вопросе об интегрировании это также имеет место, как показывает

Т е о р е м а. Пусть тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется на некотором интервале (a, b) методом Римана к $f(x)$. Если $f(x)$ на этом интервале суммируема и конечна всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек, то ряд можно почленно интегрировать в любом интервале (α, β) , целиком лежащем внутри (a, b) , и проинтегрированный ряд сходится на (α, β) равномерно к неопределенному интегралу от $f(x)$.

Эта теорема была доказана Н. Н. Лузиным (см. [М.9], [М.10], § 90) в предположении, что $f(x)$ непрерывна, но доказательство мгновенно переносится на случай суммируемой $f(x)$.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (3.1)$$

— заданный тригонометрический ряд. Проинтегрируем его формально два раза; получим после первого интегрирования

$$C + \frac{a_0}{2} x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n} \quad (3.2)$$

и после второго

$$\frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (3.3)$$

Пусть $F(x)$ есть сумма ряда (3.3), т. е. функция Римана для ряда (3.1). По теореме 3 § 68 главы I функция $F(x)$ гладкая. Поэтому по теореме 2 § 2 имеем

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du + Ax + B \quad \text{на} \quad a \leq x \leq b.$$

Полагая

$$F_1(x) = A + \int_a^x f(u) du, \quad (3.4)$$

видим, что $F_1(x)$ абсолютно непрерывна на (a, b) и

$$F'(x) = F_1(x) \quad \text{всюду на} \quad (a, b).$$

С другой стороны, ряд, входящий в формулу (3.2), есть ряд Фурье от некоторой $\varphi(x)$. Раз $F(x)$ есть сумма ряда (3.3), а он получается в результате интегрирования ряда (3.2), т. е. ряда $\sigma(\varphi)$, то

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (3.5)$$

и, в частности,

$$F'(x) = \frac{a_0}{2} x + C + \varphi(x) \quad \text{почти всюду на} \quad [a, b].$$

Объединяя (3.4) и (3.5), получим, что $\varphi(x)$ на $[a, b]$ эквивалентна абсолютно непрерывной функции, так как

$$\frac{a_0}{2} x + C + \varphi(x) = F_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad [a, b].$$

Поэтому ряд (3.2) сходится равномерно на любом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ к функции $F_1(x)$ и сходится к $F_1(x)$ всюду на (a, b) . Теорема доказана.

После этого краткого отступления вернемся к нашей цели — обобщению теоремы дю Буа-Реймона и проблеме единственности.

§ 4. Обобщение теоремы дю Буа-Реймона; теорема Валле-Пуссена

Л е м м а д ю Б у а - Р е й м о н а. Если для тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4.1)$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю, функции

$$\bar{S}(x) = \overline{\lim} S_n(x)$$

и

$$\underline{S}(x) = \underline{\lim} S_n(x)$$

конечны для некоторого значения x , то, полагая

$$S(x) = \frac{1}{2} [\bar{S}(x) + \underline{S}(x)] \quad \text{и} \quad \delta(x) = \frac{1}{2} [\bar{S}(x) - \underline{S}(x)],$$

имеем для его функции Римана

$$S - \mu \delta \leq \bar{D}^2 F(x) \leq S + \mu \delta$$

и

$$S - \mu \delta \leq \underline{D}^2 F(x) \leq S + \mu \delta,$$

где μ — абсолютная постоянная.

В самом деле, полагая

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{и} \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

имеем

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2.$$

Так как $S_n(x) = A_0 + A_1(x) + \dots + A_n(x)$, то, проделав преобразование Абеля, получим

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(x)] \left[\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right].$$

Но мы уже видели (см. главу I, § 68), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \right| dt, \quad (4.2)$$

причем последний интеграл сходится. Замечая, что

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(x) \left[\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right],$$

мы находим, что

$$\begin{aligned} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} - S(x) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(x) - S(x)] \left[\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Так как

$$\overline{\lim} [S_n(x) - S(x)] = \bar{S}(x) - S(x) = \delta,$$

$$\underline{\lim} [S_n(x) - S(x)] = \underline{S}(x) - S(x) = -\delta,$$

то можно найти столь большое N , что

$$|S_n(x) - S(x)| < \delta + \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (4.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta^2 F(x)}{4h^2} - S(x) \right| &\leq \sum_{n=0}^N |S_n(x) - S(x)| \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right| + \\ &+ \sum_{N+1}^{\infty} |S_n(x) - S(x)| \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, так как N конечно, а каждый множитель при $S_n(x) - S(x)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$; второе слагаемое в силу (4.3) не превосходит $(\delta + \varepsilon)\mu$, где μ — интеграл в правой части (4.2). Поэтому, замечая, что ε как угодно мало, и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, находим

$$|\bar{D}^2 F(x) - S(x)| \leq \mu\delta$$

и

$$|\underline{D}^2 F(x) - S(x)| \leq \mu\delta,$$

а это и требовалось доказать.

Из доказанной леммы легко теперь вывести следующее важное следствие (Vallée-Poussin^[2]):

Теорема Валле-Пуссена. Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, имеет пределы неопределенности $\lim S_n(x)$ и $\lim \underline{S}_n(x)$ конечными всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества E , и обе функции суммируемы на $[-\pi, \pi]$, то этот тригонометрический ряд суммируется методом Римана почти всюду и является рядом Фурье от своей римановской суммы.

Действительно, по только что доказанному, для функции Римана этого ряда (4.1) имеем

$$S(x) - \mu\delta \leq \underline{D}^2 F(x) \leq \bar{D}^2 F(x) \leq S(x) + \mu\delta(x),$$

где $S(x) = \frac{1}{2} [\bar{S}(x) + \underline{S}(x)]$ и $\delta(x) = \frac{1}{2} [\bar{S}(x) - \underline{S}(x)]$. В силу условий теоремы $S(x)$ и $\delta(x)$ обе суммируемы. Значит, полагая $f(x) = \bar{D}^2 F(x)$ (или $f(x) = \underline{D}^2 F(x)$), видим, что $f(x)$ заключена между $S(x) - \mu\delta(x)$ и $S(x) + \mu\delta(x)$ и они суммируемы; следовательно, на основании теоремы § 2 имеем

$$F(x) = \int_{-\pi}^x \left(\int_{-\pi}^t f(u) du \right) dt + Ax + B \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi]. \quad (4.4)$$

Так как это верно и при $f(x) = \underline{D}^2 F(x)$ и при $f(x) = \bar{D}^2 F(x)$, то ясно, что они почти всюду совпадают, т. е. $D^2 F(x)$ существует и, кроме того,

$$F(x) = \int_{-\pi}^x \left(\int_{-\pi}^t D^2 F(u) du \right) dt + Ax + B.$$

Пусть

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum a_n \cos nx + \beta_n \sin nx \quad (4.5)$$

есть ряд $\sigma(f)$; покажем, что он совпадает с рядом (4.1).

Действительно, в силу (4.4) имеем

$$\Delta^2 F(x) = \int_0^{2\pi} [F'(x+t) - F'(x-t)] dt = \int_0^{2\pi} dt \int_{-t}^t f(x+u) du. \quad (4.6)$$

Умножим два крайних члена тождества (4.6) на $\frac{1}{\pi} \cos mx$ и проинтегрируем по x от 0 до 2π (интегрирование можно произвести под знаком интеграла; $f(x)$ — периодическая), поэтому мы находим:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+u) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos m(x-u) \, dx = a_m \cos mu + \beta_m \sin mu,$$

откуда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x) \cos mx \, dx = a_m \int_0^{2\pi} dt \int_{-t}^t \cos mu \, du = 4 a_m \frac{\sin^2 mu}{m^2}. \quad (4.7)$$

С другой стороны, так как $F(x)$ есть риманова функция для ряда (4.1), находим

$$\Delta^2 F(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin na}{n} \right)^2,$$

где ряд равномерно сходится. Таким образом, для значения того же интеграла имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x) \cos mx \, dx = 4 a_m \frac{\sin^2 ma}{m^2}.$$

Сравнивая эту формулу с (4.7), получим $a_m = a_m$; подобно этому и $b_m = \beta_m$. Итак, ряд (4.1) есть ряд Фурье от $f(x)$, а это и требовалось доказать.

В качестве непосредственного следствия получаем такое обобщение теоремы дю Буа-Реймона, доказанной в § 72 главы I.

Обобщение теоремы дю Буа-Реймона. Если тригонометрический ряд сходится к суммируемой функции $f(x)$ и она конечна всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, то этот ряд есть ее ряд Фурье).*

Действительно, в этом случае

$$\overline{\lim} S_n(x) = \underline{\lim} S_n(x) = \lim S_n(x) = f(x)$$

и, применяя теорему Валле-Пуссена, мы видим, что наш тригонометрический ряд будет рядом Фурье от своей римановой суммы, а она должна совпадать с $f(x)$.

Полезно отметить, что и этот результат можно высказать в более общей форме, а именно:

*Теорема**). Если для тригонометрического ряда $\lim S_n(x)$ и $\overline{\lim} S_n(x)$ конечны всюду, кроме, быть может, счетного множества E , и если*

$$\underline{\lim} S_n(x) \geq g(x),$$

где $g(x)$ суммируема и конечна вне E , то данный ряд есть ряд Фурье.

*) И. И. Привалов [2] доказал, что если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Пуассона всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, замкнутого U -множества, к суммируемой функции $f(x)$, то этот ряд есть ряд Фурье от $f(x)$.

**) Эта теорема принадлежит Банаху, но нигде не была опубликована (см. Зигмунд [М.6], сноска к стр. 275); частный случай ее, когда $g(x) = 0$, был ранее доказан Штейнгаузом (Steinhaus [4]).

Мы ограничимся доказательством этой теоремы для случая, когда $\lim S_n(x) = \overline{\lim} S_n(x)$. Предварительно докажем лемму:

Л е м м а. Если функция $\Phi(x)$ выпукла на $[a, b]$, то $D^2 \Phi(x)$ существует почти всюду на (a, b) и суммируема на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$.

В самом деле, по теореме § 3 Вводного материала выпуклая функция $\Phi(x)$ может быть записана в виде

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ монотонна на (a, b) . Поэтому

$$\frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} = \frac{1}{h^2} \int_0^h [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] dt. \quad (4.8)$$

Так как $\varphi(x)$ монотонна, то $\varphi'(x)$ существует почти всюду на $[a, b]$ и суммируема на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Поэтому

$$\varphi(x+t) - \varphi(x-t) = 2\varphi'(x)t + o(t)$$

почти всюду, откуда сразу следует, что при $h \rightarrow 0$ правая часть (4.8) стремится к $\varphi'(x)$ почти всюду. Значит,

$$D^2 \Phi(x) = \varphi'(x)$$

почти всюду на (a, b) , и лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Положим

$$f(x) = \lim S_n(x) = \overline{\lim} S_n(x).$$

Заметим, что если $F(x)$ — функция Римана для рассматриваемого тригонометрического ряда, то в силу условий теоремы

$$D^2 F(x) = f(x) \text{ всюду вне } E,$$

и значит, $D^2 F(x)$ всюду вне E конечна и, кроме того,

$$D^2 F(x) \geq g(x).$$

Строим для $g(x)$ минорантные функции $u_n(x)$ так, как это было сделано для $f(x)$ в § 2. Сохраняя все обозначения § 2, имеем тогда

$$\overline{D^2} U_n(x) \leq g(x),$$

откуда следует, что всюду вне E

$$\overline{D^2} (F - U_n) \geq D^2 F - \overline{D^2} U_n(x) \geq g(x) - g(x) = 0.$$

Значит, разность $F(x) - U_n(x)$ выпукла. Но в силу самого построения функций $u_n(x)$ они стремятся равномерно к

$$\int_a^x g(t) dt = G(x),$$

а потому функции $U_n(x)$ стремятся к

$$\Psi(x) = \int_a^x G(t) dt.$$

Отсюда следует, что $F(x) - \Psi(x)$ тоже выпукла. Но тогда по лемме этого параграфа $D^2(F - \Psi) = f - g$ существует почти всюду и суммируема на любом интервале. Значит, $f(x)$ суммируема, а тогда мы возвращаемся к только что доказанной теореме (обобщение теоремы дю Буа-Реймона).

§ 5. Теорема Юнга. Постановка проблемы единственности

В качестве другого следствия обобщенной теоремы дю Буа-Реймона (см. § 4) можно получить теорему Юнга (Young W. H.^[1]).

Теорема Юнга. *Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества E , то все его коэффициенты равны нулю иначе говоря, всякое счетное множество есть U -множество *).*

Действительно, ряд сходится к нулю, т. е. к суммируемой функции всюду, кроме, быть может, счетного множества. Значит, он является рядом Фурье от нуля, а тогда все его коэффициенты равны нулю.

В § 70 главы I мы доказали, что всякое пустое или конечное множество есть U -множество. Сейчас было доказано, что и любое счетное множество есть U -множество. С другой стороны, в § 70 главы I было доказано, что всякое множество положительной меры есть M -множество. Таким образом, остается нерешенным вопрос, что можно сказать о множествах меры нуль, но несчетных.

Существование M -множеств меры нуль долгое время казалось совершенно неправдоподобным. Привычка пренебрегать множествами меры нуль, вызванная целым рядом результатов, возникших после создания интеграла Лебега, заставляла думать, что и в вопросе о единственности разложения функции в тригонометрический ряд множеством меры нуль можно пренебречь. Эта гипотеза была опровергнута результатом Д. Е. Меньшова^[1], опубликованным в 1916 г.; он построил первый пример совершенного M -множества меры нуль (см. ниже § 12).

После этого естественно было поставить вопрос, существуют ли несчетные U -множества. Ответ на этот вопрос был дан одновременно и независимо А. Райхманом (Rajchman^{[2], [3]}) и Н. К. Бари^[1]. Райхман рассмотрел класс H -множеств (см. их определение в § 5 главы XII) и доказал, что все они будут U -множествами (см. ниже § 7).

Н. К. Бари совершенно иным методом также построила некоторый класс совершенных U -множеств. Она доказала также, что сумма конечного числа или счетного множества замкнутых U -множеств есть снова U -множество (см. § 6).

Проблема о том, каково необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное несчетное множество меры нуль было U -множеством, не решена до сих пор даже для случая совершенных множеств. Мы здесь изложим основные результаты, полученные при попытке разрешить эту весьма трудную проблему. Интерес этой проблемы станет особенно ясным, когда читатель увидит, что здесь вопросы теории функций оказываются теснейшим образом переплетенными с теорией диофантовых приближений и свойствами целых алгебраических чисел. Не имея возможности полностью изложить здесь все работы, посвященные единственности разложения функции в тригонометрический ряд, мы постараемся осветить основные методы и указать возникающие трудности, а также отметить проблемы, на которые стоит обратить внимание.

*) См. определение U - и M -множеств в § 70 главы I.

§ 6. Свойства нуль-рядов; сумма замкнутых U -множеств

О п р е д е л е н и е 1. Условимся называть *нуль-рядом* тригонометрический ряд, который сходится к нулю почти всюду на $[-\pi, \pi]$, но не всюду.

Начнем с напоминания некоторых теорем, которые были доказаны в других главах. Именно в § 11 главы XI было доказано, что если лакунарный ряд сходится к нулю на множестве положительной меры, то все его коэффициенты равны нулю. Отсюда сразу вытекает, что *нуль-ряд не может быть лакунарным*.

Далее из теорем Козлова и Быкова, доказанных в § 11 главы XIII, мы знаем, что нуль-ряд не может сходиться абсолютно в двух точках на расстоянии, несоизмеримом с π , а если у него лишь конечное число коэффициентов равно нулю, то он может иметь только две точки абсолютной сходимости, и их расстояние равно π .

В § 18 главы VIII было доказано, что ряд, сопряженный к нуль-ряду, не может быть рядом Фурье.

Теперь мы хотим указать новые свойства нуль-рядов и для этого введем

О п р е д е л е н и е 2. Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, будем называть *ядром нуль-ряда*. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— рассматриваемый нуль-ряд и $S_n(x)$ — его частная сумма. Множество точек, где

$$\overline{\lim} |S_n(x)| = +\infty,$$

будем называть *приведенным ядром нуль-ряда*.

Из теоремы Валле-Пуссена (см. § 4) следует, что приведенное ядро должно быть несчетным множеством. Действительно, если бы множество точек, где $\overline{\lim} |S_n(x)| = +\infty$, было счетным, то $\overline{\lim} S_n(x)$ и $\underline{\lim} S_n(x)$ были бы конечны всюду, кроме счетного множества, и суммируемы, так как

$$\underline{\lim} S_n(x) = \overline{\lim} S_n(x) = 0$$

почти всюду, а тогда этот ряд был бы рядом Фурье от функции, равной нулю, в результате чего все его коэффициенты были бы равны нулю.

Отметим здесь некоторые простые, но важные для дальнейшего свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов.

Прежде всего ясно из самого определения, что ядро нуль-ряда есть M -множество. Легко показать ^{*)}, что оно B -измеримо и типа $G_{\delta\sigma}$.

Приведенное ядро имеет даже более простую природу: оно типа G_δ . В самом деле, если F_m есть множество точек, где

$$|S_n(x)| \leq m \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то F_m замкнуто, а множество $R = \sum_{m=1}^{\infty} F_m$ есть множество типа F_σ . Но ясно, что приведенное ядро N нашего нуль-ряда есть $N = CR$, а потому N типа G_δ .

^{*)} Действительно, если обозначить через \mathcal{E}_{mn} множество тех x , для которых $|S_n(x)| \leq \frac{1}{m}$, то множество тех точек, где ряд сходится к нулю, имеет вид $\mathcal{E} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{mn}$. Но так как \mathcal{E}_{mn} замкнуто, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{mn}$ имеет тип F_σ , а значит, \mathcal{E} типа $F_{\sigma\delta}$. Но ядро нуль-ряда есть $C\mathcal{E}$, а потому оно типа $G_{\delta\sigma}$.

Для изучения свойств ядра E , приведенного ядра нуль-ряда мы будем существенно опираться на доказанные в § 71 главы I теоремы Райхмана о формальном произведении тригонометрических рядов.

Докажем теорему (см. Н. К. Бари^[1]).

Т е о р е м а 1. *Всякая порция*) ядра нуль-ряда содержит порцию приведенного ядра того же ряда. Существует другой нуль-ряд, для которого соответственно ядром и приведенным ядром будут служить именно эти порции ядра и приведенного ядра данного нуль-ряда.*

В самом деле, пусть E и N — соответственно ядро и приведенное ядро данного нуль-ряда. Пусть δ — любой интервал, содержащий хоть одну точку из E . Пусть $\lambda(x)$ — периодическая функция с периодом 2π , равная 0 вне δ , положительная на δ и имеющая непрерывные производные до третьего порядка включительно. Тогда ряд Фурье для $\lambda(x)$ имеет коэффициенты порядка $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, а потому он быстро сходится. Составим формальное произведение данного нуль-ряда на ряд Фурье от $\lambda(x)$. Коэффициенты нуль-ряда стремятся к нулю по теореме Кантора—Лебега (см. § 62 главы I), так как он сходится почти всюду. Все условия теоремы о формальном произведении выполнены. Значит, оно сходится к нулю всюду вне δ и во всех точках δ , где сходится к нулю первоначальный ряд, т. е. почти всюду. Однако оно не может всюду сходиться к нулю, так как в точках $\delta(E)$ формальное произведение заведомо не сходится к нулю. Следовательно, это произведение есть нуль-ряд. У него существует ядро и приведенное ядро, причем из теоремы о формальном произведении сразу видно, что это ядро есть порция $\delta(E)$ ядра первоначального ряда, а приведенное ядро доказывает существование порции приведенного ядра и, разумеется, с ним совпадает.

В качестве мгновенного следствия теоремы 1 получаем:

С л е д с т в и е 1. *Всякая порция ядра нуль-ряда есть M -множество.*

Выведем из теоремы 1 еще некоторые следствия.

С л е д с т в и е 2. *Если E есть M -множество, то можно построить ряд, сходящийся к нулю вне E , у которого n первых членов имеют равные нулю коэффициенты (n — любое целое).*

Для краткости будем писать тригонометрические ряды в комплексной форме.

Докажем сначала, что существует ряд, сходящийся к нулю вне E , и со свободным членом, равным нулю. Для этого возьмем две разные порции $\delta_1(E)$ и $\delta_2(E)$ ядра нуль-ряда, построенного для E , и составим нуль-ряды

$$\sum c_n^{(1)} e^{inx} \quad \text{и} \quad \sum c_n^{(2)} e^{inx}, \quad (6.1)$$

для которых эти порции будут ядрами. Если $c_0^{(1)} = 0$ или $c_0^{(2)} = 0$, то все доказано; в противном случае строим ряд

$$\sum \left(\frac{c_n^{(1)}}{c_0^{(1)}} - \frac{c_n^{(2)}}{c_0^{(2)}} \right) e^{inx}, \quad (6.2)$$

у него не все коэффициенты нули, так как ряды (6.1) расходятся в разных точках, а потому они линейно независимы, и, однако, свободный член ряда (6.2) равен нулю. Этот ряд, очевидно, сходится к нулю вне E .

Тем же процессом можно уничтожить коэффициенты при любом конечном числе членов ряда.

*) Порцией $\delta(E)$ множества E называем ту его часть, которая лежит в интервале δ .

Иногда бывает полезно предложение, в некотором смысле обратное, а именно

С л е д с т в и е 3. *Для всякого M -множества существует нуль-ряд с отличным от нуля свободным членом.*

В самом деле, пусть $\sum c_n e^{inx}$ нуль-ряд, составленный для данного множества, и $c_0 = 0$. Пусть

$$\lambda(x) = C + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n}{|n|^3} e^{inx} \quad (n \neq 0 \text{ в } \Sigma'). \quad (6.3)$$

Константу C надо выбрать так, чтобы $\lambda(x) \neq 0$ всюду на $[0, 2\pi]$. Это возможно, ибо сумма в правой части (6.3) есть ограниченная функция.

Так как ряд (6.3), определяющий $\lambda(x)$, сходится быстро, то можно применить к формальному произведению данного нуль-ряда и ряда для $\lambda(x)$ теорему Райхмана. Мы получим нуль-ряд, который (в силу $\lambda(x) \neq 0$) имеет то же ядро, как и данный, но его свободный член имеет вид

$$k_0 = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{|c_p|^2}{p^3} \quad (p \neq 0),$$

т. е.

$$k_0 > 0.$$

Этими вспомогательными предложениями иногда приходится пользоваться.

Из теоремы 1 вытекает также следующий результат*).

Т е о р е м а 2. *Пусть E — ядро нуль-ряда; тогда существует такое совершенное множество P , что $E \subset P$, и всякая порция $\delta(P)$ содержит непустую порцию $\delta(E)$.*

Действительно, пусть N — приведенное ядро рассматриваемого ряда и P — множество его точек конденсации. Известно, что тогда P должно быть совершенным, а $N - P$ — не более чем счетным. Докажем сначала, что $E \subset P$. Действительно, если d — некоторый смежный к P интервал и $d(E)$ — определяемая им непустая порция E , то по теореме 1 она содержит порцию $d(N)$, которая будет приведенным ядром некоторого нового нуль-ряда, т. е. несчетным множеством, а $N - P$ не более чем счетно. Из полученного противоречия вытекает, что $E \subset P$.

Пусть теперь $\delta(P)$ — любая порция P . Так как всякая точка P есть точка конденсации для N , то $\delta(N)$ не пусто, а тогда и $\delta(E)$ не пусто. Теорема доказана.

Основным следствием, вытекающим из теоремы 2, является следующий результат (см. Н. К. Бари^{[1],[4]}).

Т е о р е м а 3. *Сумма конечного числа или счетного множества замкнутых U -множеств есть U -множество.*

Пусть $S = \sum F_n$, где F_n — замкнутые U -множества. Допустим, что существует нуль-ряд, сходящийся к нулю всюду вне S . Пусть E — его простое и \bar{N} — его приведенное ядро. Обозначим через P совершенное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Покажем, что хоть одно из F_n плотно на некоторой порции P . Действительно, если бы это было неверно, то S было бы первой категории на P , а тогда N и подавно, а это невозможно, так как N типа G_δ и всюду плотно на P . Итак, хоть одно из F_n плотно на некоторой порции P . Значит, существует такая порция $\delta(P)$, которая содержится целиком в некотором F_n . Но тогда эта порция $\delta(P)$ есть U -множество. С другой

*) Этот результат высказан в работе Н. К. Бари^[1] в несколько иной форме, хотя по существу доказано было именно то, что мы формулируем сейчас как теорему 2.

стороны, $\delta(P)$ содержит $\delta(E)$, а в силу следствия 1 теоремы 1 $\delta(E)$ есть M -множество. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Если отказаться от требования замкнутости всех слагаемых, то относительно суммы U -множества, вообще говоря, нельзя утверждать, что она будет U -множеством даже тогда, когда речь идет о двух слагаемых. Действительно, если допустить рассмотрение неизмеримых множеств, то можно построить такие два U -множества, сумма которых совпадает со всем отрезком $[0, 2\pi]^*$. Если потребовать, чтобы оба слагаемых U -множества были измеримы, или даже B -измеримы, то вопрос о их сумме все еще остается нерешенным. Можно только указать один простой частный случай, а именно: *сумма двух U -множеств, из которых одно замкнуто, есть опять U -множество.*

Действительно, пусть E_1 и E_2 — два U -множества, причем E_1 замкнуто. Допустим, что $E = E_1 + E_2$ есть M -множество. Тогда существует тригонометрический ряд

$$\sum c_n e^{inx}, \quad (6.4)$$

у которого ядро \mathcal{E} содержится в E . Пусть δ — некоторый смежный интервал к E_1 и $\delta(\mathcal{E})$ — порция \mathcal{E} , определяемая этим интервалом. Если бы все $\delta(\mathcal{E})$ были пустыми, то $\mathcal{E} \subset E_1$, что невозможно, так как E_1 есть U -множество. Если же некоторое $\delta(\mathcal{E})$ непусто, то по теореме 1 существует новый нуль-ряд, для которого $\delta(\mathcal{E})$ будет ядром и, значит, M -множеством. Однако $\delta(E) \subset E_2$, и тогда E_2 содержит M -множество, что невозможно.

Отметим еще один простой случай, когда можно высказаться о сумме двух U -множеств.

Если два U -множества лежат на неперекрывающихся интервалах, то их сумма есть U -множество.

Действительно, пусть E_1 лежит на δ_1 , а E_2 на δ_2 ; если существует нуль-ряд, сходящийся к нулю вне $E = E_1 + E_2$, то его простое ядро содержится в E , значит, его порция $\delta_1(E)$, которая должна быть M -множеством, содержится в E_1 , а это невозможно.

В общем случае даже если оба множества B -измеримы, как мы уже говорили, вопрос о сумме двух U -множеств остается нерешенным.

Укажем еще один важный, но нерешенный вопрос: должно ли всякое множество не первой категории быть M -множеством? Этот вопрос до сих пор остается открытым**).

§ 7. H -множества. Теорема Райхмана

В предыдущем параграфе мы рассматривали некоторые общие теоремы, касающиеся U - и M -множеств. Сейчас мы имеем в виду доказать существование несчетных U -множеств. Мы уже говорили (см. § 5), что первые результаты в этом направлении были получены одновременно и независимо Н. К. Бари^[1] и А. Райхманом (Rajchman^[2]). Не имея возможности излагать здесь оба доказательства, построенные на совершенно разных идеях, мы ограничимся здесь теоремой Райхмана, так как она относится к классу H -множеств, которые уже были рассмотрены в § 5 главы XII и в дальнейшем будут часто встречаться.

Пусть \mathcal{E} — множество точек $2\pi x$ для $x \in E$; если E есть H -множество, то множество \mathcal{E} будем называть H -множеством относительно отрезка $[0, 2\pi]$.

*) Мы опускаем построение этого примера как мало интересного: его можно найти в работе Н. К. Бари^[1], § 5.

**) В 1936 г. появилась заметка Е. А. Нерсесовой^[1], где без доказательства утверждалось, что этот вопрос решается положительно. Однако доказательство, насколько нам известно, опиралось на одну теорему Верблунского, которая, как мы теперь знаем, оказалась неверной (см. об этом в § 17).

Докажем теорему Райхмана:

Т е о р е м а 1. *Всякое Н-множество относительно отрезка $[0, 2\pi]$ есть U-множество *).*

Чтобы доказать эту теорему, надо убедиться в том, что если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \quad (7.1)$$

сходится к 0 вне \mathcal{E} , то все c_n будут равны нулю. Это эквивалентно утверждению, что если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (7.2)$$

сходится к 0 вне E , где E есть Н-множество на $[0, 1]$, то все c_n равны нулю. Именно так Райхман и проводил первоначальное доказательство своей теоремы **).

На основании следствия 2 теоремы 1 § 6 достаточно доказать, что $c_0 = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{np} e^{i2\pi n x}, \quad (7.3)$$

где p любое целое, и докажем, что он сходится к нулю вне E_p , где E_p — совокупность точек (px) для $x \in E$.

В самом деле, если $x \notin E_p$, то точки

$$\frac{x}{p}, \frac{x}{p} + \frac{1}{p}, \frac{x}{p} + \frac{2}{p}, \dots, \frac{x}{p} + \frac{p-1}{p}$$

не входят в E , значит, ряд (7.2) сходится к нулю в каждой такой точке, а потому и ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} c_n e^{i2\pi n \left(\frac{x}{p} + \frac{k}{p}\right)} \quad (7.4)$$

сходится к 0 для $x \notin E_p$. Но так как

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{i2\pi n \left(\frac{x}{p} + \frac{k}{p}\right)} = e^{i2\pi n \frac{x}{p}} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{i2\pi n \frac{k}{p}} = e^{i2\pi n \frac{x}{p}} \delta_{np},$$

где $\delta_{np} = 0$, если n не делится на p , и $\delta_{np} = 1$, если $\frac{n}{p} = m$ целое, то ряд (7.4) имеет вид

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_{mp} e^{i2\pi m x},$$

т. е. совпадает с рядом (7.3), а это и доказывает, что ряд (7.3) сходится к нулю вне E_p .

Важно заметить, что здесь свободный член c_0 тот же, как и в ряде (7.1). Мы хотим доказать, что $c_0 = 0$. Если это неверно, то можно, не нарушая общности, считать $c_0 = 1$, так как от умножения всех c_n на одну константу ряд (7.2) не перестанет быть нуль-рядом.

*) В дальнейшем мы увидим, что это неважно, на каком отрезке строится множество, так как подобное растяжение переводит U-множество снова в U-множество.

**) Впоследствии им было дано другое доказательство теоремы о том, что Н-множество суть U-множества (см. Rajchman [4]).

Далее, не нарушая общности, можно предполагать множество E замкнутым. Если E есть H -множество, то найдется такой интервал d и такая последовательность чисел n_k , что для всех $k = 1, 2, \dots$ интервал d лежит в некотором смежном интервале к E_{n_k} (см. § 5 главы XII, рассуждение, проведенное при доказательстве эквивалентности двух определений H -множеств).

Ряд (7.2) сходится всюду вне E , значит, $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать n_k столь большим, что

$$|c_{mn_k}| < \varepsilon \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (7.5)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_{mn_k} e^{2\pi i m x} \quad (7.6)$$

и обозначим через $F_k(x)$ сумму дважды обынтегрированного ряда (7.6), т. е.

$$F_k(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{c_{mn_k}}{m^2} e^{2\pi i m x} \quad (m \neq 0)$$

(мы предположили $c_0 = 1$).

Так как $|c_{mn_k}| < \varepsilon$ для $m = 1, 2, \dots$, то

$$F_k(x) = \frac{x^2}{2} + \tau(x), \quad (7.7)$$

где

$$|\tau(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\varepsilon}{12}. \quad (7.8)$$

Но так как ряд (7.6) сходится к 0 на всяком смежном к E_{n_k} интервале и, следовательно, на интервале d , то $F_k(x)$ линейна на d , т. е.

$$A_k x + B_k = \frac{x^2}{2} + \tau(x) \quad \text{на } d.$$

Пусть $d = (a, \beta)$ и пусть

$$\alpha' = a + \frac{d}{6}, \quad \beta' = \beta - \frac{d}{6}$$

(где d обозначает и самый интервал и его длину).

Ясно, что можно найти на (α', β') такую точку ξ_k , что $|\xi_k - A_k| > \frac{d}{6}$, так как если бы такой точки не было, то для любых двух точек x_k и y_k из (α', β') имели бы $|x_k - y_k| \leq \frac{d}{3}$, а между тем

$$\beta' - \alpha' = \beta - a - \frac{d}{3} = \frac{2}{3}d.$$

Пусть ξ_k — такая точка, что $|\xi_k - A_k| > \frac{d}{6}$, и пусть

$$x_k = \xi_k - \frac{d}{6}, \quad y_k = \xi_k + \frac{d}{6}.$$

Точки x_k и y_k лежат в $(a, \beta) \equiv d$, а потому

$$A_k x_k + B_k = \frac{x_k^2}{2} + \tau(x_k),$$

$$A_k y_k + B_k = \frac{y_k^2}{2} + \tau(y_k),$$

значит,

$$A_k(x_k - y_k) = (x_k - y_k) \frac{x_k + y_k}{2} + \tau(x_k) - \tau(y_k),$$

откуда в силу (7.8)

$$\left| \left(A_k - \frac{x_k + y_k}{2} \right) (x_k - y_k) \right| \leq |\tau(x_k)| + |\tau(y_k)| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Но $|x_k - y_k| = \frac{d}{3}$, поэтому

$$\left| \left(A_k - \xi_k \right) \frac{d}{3} \right| \leq \frac{\varepsilon}{6},$$

а так как $|A_k - \xi_k| > \frac{d}{6}$, то

$$\frac{d^2}{18} < \frac{\varepsilon}{6},$$

т. е.

$$d^2 < 3\varepsilon.$$

Но ε как угодно мало, а $d > 0$, значит, мы пришли к противоречию, допустив $c_0 \neq 0$. Тем самым теорема доказана.

§ 8. Множества типа H^*

Некоторое обобщение понятия множества типа H было дано А. А. Шнейдером^[1].

О п р е д е л е н и е. Условимся говорить, что множество E , лежащее на $[0, 1]$, есть *множество типа H^** , если существует такая неограниченно возрастающая последовательность действительных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$$

и такое число $d > 0$, что для всякого множества E_{λ_k} найдется интервал длины $\geq d$, не содержащий точек этого множества (здесь E_t — множество точек x , где $x = (t\xi)$, а $\xi \in E$).

А. А. Шнейдер доказал теорему:

Т е о р е м а. *Всякое множество типа H^* состоит из конечного числа H -множеств.*

Пусть E — множество типа H^* , а d и λ_k — те числа, которые входят в определение этих множеств. Покажем, что порция множества E , находящаяся в каком-нибудь интервале (a, b) длины $\frac{d}{2}$, будет H -множеством. Пусть $n_k = [\lambda_k]$ (квадратные скобки обозначают взятие целой части).

Рассмотрим множество $E - a$, т. е. множество E , сдвинутое на a , и пусть \mathcal{E} — его часть, расположенная на $(0, \frac{d}{2})$. Докажем, что \mathcal{E} есть H -множество.

Пусть k — любое натуральное. Так как \mathcal{E} есть часть $E - a$, то, очевидно, найдутся такие числа α_k и β_k , что

$$\beta_k - \alpha_k = d$$

и все точки вида $x = (\lambda_k \xi)$, где $\xi \in \mathcal{E}$, лежат вне интервала (α_k, β_k) . Рассмотрим точки z вида $(n_k \xi)$, где снова $\xi \in \mathcal{E}$, и докажем, что они все лежат вне интервала $(\alpha_k, \beta_k - \frac{d}{2})$.

В самом деле, так как для $\xi \in \mathcal{E}$ имеем $0 \leq \xi \leq \frac{d}{2}$ и $n_k = [\lambda_k]$, т. е. $0 \leq \lambda_k - n_k < 1$, то

$$0 \leq \lambda_k \xi - n_k \xi < \frac{d}{2}.$$

Пусть для данного ξ имеем $N_k = [\lambda_k \xi]$, тогда

$$\lambda_k \xi = N_k + (\lambda_k \xi); \quad n_k \xi = \lambda_k \xi - (\lambda_k - n_k) \xi,$$

значит,

$$n_k \xi = N_k + (\lambda_k \xi) - \frac{\theta d}{2},$$

где $0 \leq \theta < 1$.

Если $(\lambda_k \xi) - \theta \frac{d}{2} < 0$, то

$$(n_k \xi) = 1 + (\lambda_k \xi) - \theta \frac{d}{2} > 1 - \frac{d}{2} \geq \beta_k - \frac{d}{2},$$

если же $(\lambda_k \xi) - \theta \frac{d}{2} \geq 0$, то

$$(n_k \xi) = (\lambda_k \xi) - \theta \frac{d}{2}.$$

В этом случае при $(\lambda_k \xi) < \alpha_k$ имеем и $(n_k \xi) < \alpha_k$; если же $(\lambda_k \xi) > \beta_k$, то $(n_k \xi) > \beta_k - \frac{d}{2}$.

Итак, мы убедились, что для любого k множество точек $(n_k \xi)$, где $\xi \in \mathcal{E}$, лежит целиком вне интервала длины $\frac{d}{2}$, а так как n_k целые, то \mathcal{E} есть H -множество. Отсюда ясно, так как от сдвига на a ничего не изменяется, то часть E , попавшая на (a, b) , есть H -множество. Все множество E распадается на конечное число таких частей.

Таким образом, мы показали, что всякое H^* состоит из конечного числа H -множеств, расположенных на непересекающихся попарно интервалах. Отсюда уже ясно, что H^* есть U -множество.

Класс множеств H^* шире класса H -множеств, как показал А. А. Шнейдер^[1], но мы не будем на этом останавливаться, так как рассмотрение H^* -множеств во всяком случае не выведет нас очень далеко: они содержатся как часть в классе множеств H_σ , т. е. таких, которые состоят не более чем из счетного множества H -множеств. Из теоремы 3 § 6 следует, что всякое H_σ есть U -множество *). Райхман думал **), что и, обратно, всякое U -множество есть часть множества типа H_σ . Эта гипотеза долгое время не была никем ни подтверждена, ни опровергнута, и лишь в 1952 г. И. И. Пятецкий-Шапиро показал, что она неверна. Об этом мы расскажем в § 16. Здесь же мы хотим отметить, что, пользуясь множествами типа H_σ , можно построить U -множество, которое имеет мощность континуума в любом интервале на $[0, 2\pi]$, как бы мал он ни был.

Пример U -множества, имеющего мощность континуума во всяком интервале. Возьмем отрезок $[0, 2\pi]$ и поместим на нем канторово множество. На каждом смежном интервале к нему поместим по множеству, получаемому из канторова подобным преобразованием, превращающим интервал $[0, 2\pi]$ в этот интервал; в каждом смежном интер-

*) Применять эту теорему можно потому, что всякое H -множество содержится в замкнутом H -множестве (см. § 5 главы XII).

**) Об этом он высказался в письме к Н. Н. Лузину.

вале к вновь полученному множеству совершаем такую же операцию, и так до бесконечности. Так как каждое из множеств, которое мы получаем из канторова указанным способом, тождественно некоторой части канторова множества, то оно типа H , а значит результат сложения всех этих множеств есть множество типа H_σ , и, следовательно, U -множество, в то же время оно имеет мощность континуума в любом как угодно малом интервале на $[0, 2\pi]$.

§ 9. Подобное преобразование U -множеств

Пусть E — некоторое множество, лежащее на $[0, 2\pi]$ и $\theta > 0$. Обозначим через E_θ множество точек θx для $x \in E$.

Возникает вопрос, должно ли E_θ быть U -множеством, если E есть U -множество.

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой Зигмунда и Марцинкевича (Marcinkiewicz and Zygmund^[3]).

Т е о р е м а 1. Если E есть U -множество на $0 \leq x \leq 2\pi$ и E_θ — множество точек θx для $x \in E$, то в случае, когда E_θ лежит на $[0, 2\pi]$ (например, заведомо при $0 < \theta < 1$), это множество снова будет U -множеством.

Этот интересный результат может быть получен мгновенно, если только опираться на тесную связь между проблемой единственности в теории тригонометрических рядов и в теории тригонометрических интегралов, ранее установленную Зигмундом (Zygmund^[3]).

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_s e^{isx} ds, \quad c_{-s} = c_s, \quad (9.1)$$

где интеграл понимается как $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega}$.

Вводится дополнительное требование

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |c_s| ds = 0. \quad (9.2)$$

Множество E назовем U -множеством для тригонометрических интегралов, если из того, что интеграл (9.1) при условии (9.2) сходится к нулю для всех x вне E , следует, что $c_s = 0$ для почти всех s . Множество E здесь лежит на $(-\infty, +\infty)$.

Зигмунд доказал следующее предложение, доказательство которого мы вынуждены опустить за недостатком места *).

Т е о р е м а 2. Всякое U -множество для тригонометрических рядов есть U -множество для тригонометрических интегралов, и наоборот.

Вторую половину этого утверждения надо понимать в том смысле, что каждый кусок множества E , лежащий в интервале длины $\leq 2\pi$, будет U -множеством для тригонометрических рядов.

Из этого результата сразу вытекает теорема Зигмунда и Марцинкевича.

В самом деле, если бы E_θ было M -множеством для тригонометрических рядов, то оно было бы M -множеством для тригонометрических интегралов, т. е. нашелся бы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u) e^{ixu} du,$$

*) Для доказательства этого предложения Зигмунду пришлось целый ряд классических теорем, а также теоремы Райхмана о формальном произведении, переносить со случая тригонометрических рядов на тригонометрические интегралы.

сходящийся к 0 для всех x вне E_θ без того, чтобы $\gamma(u)$ было равно нулю почти всюду.

Положим $x = \xi\theta$; тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u) e^{i\xi u} du$$

сходится к 0 для всех ξ вне E ; полагая

$$\gamma^*(u) = \frac{1}{\theta} \gamma\left(\frac{u}{\theta}\right),$$

видим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^*(u) e^{i\xi u} du$$

сходится к 0 для всех ξ вне E , хотя $\gamma^*(u) \not\equiv 0$, следовательно, E есть M -множество для тригонометрических интегралов, а стало быть, и для тригонометрических рядов. Мы пришли к противоречию.

Отметим, что, так как здесь доказательство проведено со ссылкой на теорию тригонометрических интегралов, мы считаем целесообразным провести доказательство полностью для одного простейшего случая, которым в дальнейшем будем часто пользоваться, а именно для случая H -множеств. Докажем здесь теорему:

Т е о р е м а 3. Пусть H_θ лежит на $[0, 1]$ и является множеством точек $t = \theta x$, где x принадлежит H -множеству. Тогда H_θ есть либо H -множество, либо сумма конечного числа H -множеств.

Эта теорема была доказана Н. К. Бари^[3] (до появления работы Зигмунда и Марцинкевича, которую мы только что упоминали). Доказательство было очень просто, однако теперь, после того как уже введено понятие множеств типа H^* , его можно провести совсем в два слова.

Действительно, если E есть множество типа H , то для него существует последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и интервал d такие, что $(n_k x) \in d$ при $k = 1, 2, \dots$ и любом $x \in E$. Если положить $\lambda_k = \frac{n_k}{\theta}$, то последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и интервал d таковы, что для точек $t = x\theta$, принадлежащих E_θ , имеем $(\lambda_k t) = \left(\frac{n_k}{\theta} \theta k\right) = (n_k x) \in d$. Значит, E_θ есть множество H^* , а тогда мы возвращаемся к теореме § 8*).

§ 10. Преобразование U -множества в M -множество

Мы видели в § 9, что подобное преобразование всякого U -множества есть опять U -множество. Возникает вопрос, нельзя ли несколько обобщить этот результат, а именно указать те монотонные функции $y = \varphi(x)$, которые переводят отрезок $[-\pi, \pi]$ в самого себя, превращают всякое U -множество снова в U -множество. Разумеется, от таких функций $\varphi(x)$ естественно требовать, чтобы они имели всюду конечную и отличную от нуля производную, так как в противном случае тривиально построить пример U -множества, превращающегося в M -множество.

Однако Салем (Salem^[6]) доказал, что уже такая простая функция, как

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} \left[3x + \frac{1}{\pi} x^2 \operatorname{sign} x \right],$$

) А. А. Шнейдер показал, что и обратно, всякое H^ есть результат подобного преобразования некоторого H , но этот факт нам не понадобится.

переводящая отрезок $[-\pi, \pi]$ в самого себя, монотонная, непрерывная и имеющая производную, которая заключена между двумя положительными константами на $[-\pi, \pi]$, может, тем не менее, превратить U -множество в M -множество.

За недостатком места мы не даем здесь доказательства этого предложения и отсылаем читателя к его работе или же к статье Н. К. Бари^[4], § 13.

§ 11. Критерий для совершенных M -множеств

Выше мы отметили некоторые нерешенные проблемы, касающиеся незамкнутых U -множеств. Правда, вопрос о том, когда замкнутое и, в частности, совершенное множество будет U - и когда M -множеством, также еще далек от разрешения, но здесь можно указать общий метод, которым пользуются в целом ряде работ при решении в том или ином частном предположении вопроса о принадлежности множества к классу U - или к классу M -множеств.

Докажем такую теорему:

Т е о р е м а. *Для того чтобы совершенное множество P было M -множеством, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F(x)$, обладающая свойствами:*

а) $F(x)$ постоянна на каждом смежном к P интервале, но не на всем отрезке $[0, 2\pi]$,

б) $F(x) = Ax + B + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ имеет коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (здесь A может быть отлично от нуля или $A = 0$).

У с л о в и е н е о б х о д и м о . Действительно, пусть P — совершенное M -множество, δ_n ($n = 1, 2, \dots$) его смежные интервалы. Следовательно, существует тригонометрический ряд

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad (11.1)$$

сходящийся к нулю на каждом δ_n и с отличными от нуля коэффициентами. Ясно, что $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$, так как ряд сходится почти всюду.

Обынтегрируем формально ряд (11.1); получим

$$C + c_0 x - \sum'_{n=-\infty}^{n=+\infty} i \frac{c_n}{n} e^{inx} \quad (11.2)$$

(в сумме \sum' пропущен член, где $n = 0$).

Ряд в правой части (11.2) должен сходиться почти всюду, так как его коэффициенты имеют вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Пусть

$$F(x) = C + c_0 x - \sum'_{n=-\infty}^{n=+\infty} i \frac{c_n}{n} e^{inx}.$$

Тогда $F(x)$ определена почти всюду. Ясно, что $F(x)$ постоянна на каждом δ_n , так как почленное интегрирование ряда, сходящегося на интервале к непрерывной функции, законно (см. § 3). Вместе с тем $F(x)$ не константа, так как иначе бы все c_n были равны нулю. Наконец, полагая

$$\Phi(x) = - \sum'_{n=-\infty}^{n=+\infty} i \frac{c_n}{n} e^{inx},$$

видим, что $F(x)$ имеет коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$ и

$$F(x) = C + c_0 x + \Phi(x).$$

Итак, необходимость доказана.

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Допустим, что для некоторого совершенного множества P удалось построить функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям а) и б). Так как

$$F(x) = Ax + B + \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ имеет коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sigma(\Phi)$ почти всюду сходится и мы можем написать

$$F(x) = Ax + B' + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\gamma_n}{n} e^{inx}, \quad (11.3)$$

где $\gamma_n = o(1)$, а B' — некоторая новая константа. Если мы продифференцируем формально ряд (11.3), то получим ряд

$$A + i \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx} \quad (11.4)$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю. Результат двукратного интегрирования ряда (11.4), т. е. результат интегрирования (11.3), будет ряд, сходящийся равномерно к некоторой функции $\Psi(x)$ (функции Римана для ряда (11.4)). Ясно, что $\Psi(x)$ линейна на каждом δ_n , поскольку $F(x)$ постоянна на нем. Поэтому $D^2\Psi(x) = 0$ на каждом δ_n , т. е. (11.4) суммируется к нулю, а значит, и сходится к нулю на δ_n (см. § 71 главы I). Итак, (11.4) сходится к нулю всюду вне P .

Если бы $A = 0$ и все $\gamma_n = 0$, то $F(x)$ была бы константа, вопреки нашей гипотезе. Значит, у ряда (11.4) не все коэффициенты равны нулю. Итак, P есть M -множество, и теорема доказана.

§ 12. Пример Меньшова

Мы сейчас воспользуемся теоремой § 11, чтобы построить некоторый класс совершенных M -множеств; в частности этот класс содержит уже не раз упоминавшееся множество Меньшова — первое из известных в науке M -множеств меры нуль.

Пусть $\varepsilon_m > 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$. Рассмотрим совершенное множество P , которое получается следующим процессом: из сегмента $\varrho^{(0)} = [0, 2\pi]$ удаляем концентрический с ним интервал длины $\varrho^{(0)}\varepsilon_1$; из двух оставшихся сегментов длины $\varrho^{(1)}$ удалим по концентрическому интервалу длины $\varrho^{(1)}\varepsilon_2$. При m -й операции удалим из каждого из 2^{m-1} оставшихся сегментов длины $\varrho^{(m-1)}$ по концентрическому интервалу длины $\varrho^{(m-1)}\varepsilon_m$ и т. д. Продолжая таким образом, получим совершенное множество P . Ясно, что если R_m есть система сегментов, оставшихся после m первых операций, то

$$mR_m = 2\pi(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_m), \quad (12.1)$$

а потому при $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m = +\infty$ имеем $mR_m \rightarrow 0$, т. е. $mP = 0$. Д. Е. Меньшов^[1] рассматривал случай

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m+1}$$

и доказал, что полученное совершенное множество меры нуль есть M -множество. Этот результат остается в силе для любых

$$\varepsilon_m, \quad 0 < \varepsilon_m < 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_m \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Наше утверждение станет тривиальным, если $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty$, так как тогда, как видно из (12.1), будем иметь $mP > 0$, а мы уже знаем, что множество положительной меры есть M -множество. Поэтому в дальнейшем будем предполагать $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m = +\infty$, а тогда $mR_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

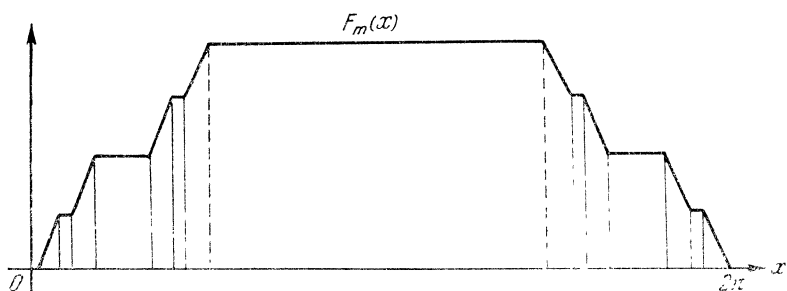


Рис. 46

Пусть S_m — система из $2^m - 1$ интервалов, удаленных при первых m операциях. Перенумеруем их слева направо

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2^m-1}.$$

Пусть $F_m(x)$ — непрерывная функция, определяемая условиями

$$F_m(0) = F_m(2\pi) = 0,$$

$$F_m(x) = \begin{cases} \frac{l}{2^{m-1}} & \text{для } x \leq \pi \text{ и } x \in \delta_l, (l = 1, 2, \dots, 2^m - 1), \\ \frac{2^m - l}{2^{m-1}} & \text{для } x \geq \pi \text{ и } x \in \delta_l \end{cases}$$

$F_m(x)$ интерполируется линейно вне S_m .

Ясно, что $F_m(x)$ есть ломаная линия; график ее изображен на рис. 46 для случая $\varepsilon_m = \frac{1}{m+1}$.

Из определения сразу же вытекает, что (рис. 47)

$$1^\circ F_{m+1}(x) = F_m(x) \text{ на } S_m,$$

$$2^\circ |F_{m+1}(x) - F_m(x)| \leq \frac{\varepsilon_{m+1}}{2^m} (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$3^\circ F'_m(x) = 0 \text{ на } S_m,$$

$$4^\circ F'_m(x) = \pm \frac{2}{mR_m} \text{ вне } S_m,$$

причем знак $+$ имеем при $x < \pi$ и знак $-$ при $x > \pi$.

Если обозначить через η_m наибольшее из чисел ε_k для $k = m+1, m+2, \dots$, то из 2° следует, что последовательность $F_m(x)$ сходится равномерно к непрерывной функции $F(x)$, причем

$$|F(x) - F_m(x)| \leq \frac{\eta_m}{2^{m-1}} \quad (0 \leq x \leq 2\pi). \quad (12.2)$$

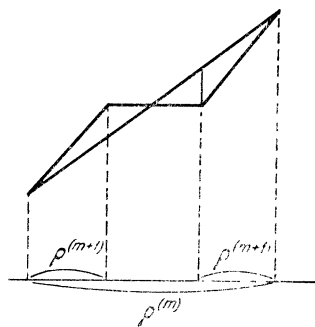


Рис. 47

Ясно, что $F(x)$ постоянна на каждом смежном к P интервале, но не всюду на $[0, 2\pi]$.

Покажем, что ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Этим будет доказано, что P есть M -множество (см. теорему § 11).

Пусть n — любое целое. Возьмем число m так, чтобы

$$\frac{2^{m-1}}{\sqrt{\eta_{m-1}} m R_{m-1}} \leq n < \frac{2^m}{\sqrt{\eta_m} m R_m}. \quad (12.3)$$

Это всегда возможно и притом единственным образом, ибо η_m монотонно убывает, а $\frac{2^m}{m R_m}$ монотонно стремится к бесконечности, поскольку $m R_m \downarrow 0$; ясно, что при $n \rightarrow \infty$ будем иметь и $m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} n \int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx} dx &= \\ &= n \int_0^{2\pi} [F(x) - F_m(x)] e^{-inx} dx + n \int_0^{2\pi} F_m(x) e^{-inx} dx = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Так как $F(x) = F_m(x)$ на S_m (см. 1°), то из (12.2) и (12.3) следует

$$|I_1| = \left| n \int_{R_m} [F(x) - F_m(x)] e^{-inx} dx \right| \leq n \frac{\eta_m}{2^{m-1}} m R_m < 2 \sqrt{\eta_m}.$$

Следовательно, $I_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как $\eta_m \rightarrow 0$.

Интеграл I_2 мы проинтегрируем по частям, и так как $F_m(0) = F_m(2\pi) = 0$, то получим

$$I_2 = -i \int_0^{2\pi} F'_m(x) e^{-inx} dx.$$

Но $F'_m(x) = 0$ вне R_m , значит,

$$I_2 = i \int_{R_m} F'_m(x) e^{-inx} dx.$$

На каждом из сегментов системы R_m имеем (см. 4°)

$$|F'_m(x)| = \frac{2}{m R_m},$$

кроме того,

$$\left| \int_a^b e^{inx} dx \right| \leq \frac{2}{n} \quad \text{для любых } a \text{ и } b;$$

поэтому, так как число сегментов системы R_m равно 2^m , мы имеем (в силу (12.3))

$$|I_2| \leq \frac{2}{m R_m} \frac{2}{n} 2^m < \frac{2}{m R_m} \frac{2 \sqrt{\eta_{m-1}} m R_{m-1}}{2^{m-1}} 2^m = \frac{8 \sqrt{\eta_{m-1}}}{1 - \varepsilon_m},$$

так как $m R_m = (1 - \varepsilon_m) m R_{m-1}$ по построению множества P . Раз η_m и ε_m стремятся к 0 при $m \rightarrow \infty$, то $I_2 \rightarrow 0$, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема может быть получена, как следствие из теоремы § 13; однако, так как доказательство этой последней много длиннее и сложнее, мы предпочли дать простое доказательство для данного конкретного класса множеств, тем более, что такие множества будут еще встречаться дальше (см. § 19).

§ 13. Достаточные условия для М-множеств

Мы видели в § 12, что если процесс построения совершенного множества ведется таким образом, чтобы в каждом его шаге все оставшиеся сегменты были равны между собой, а отношение длины выбрасываемого интервала к длине сегмента, из которого он выбрасывается, стремилось к нулю вместе с номером m шага процесса, то получается М-множество. Н. К. Бари поставила вопрос, не остается ли теорема в силе, если совершенно избавиться от требования равенства длин сегментов каждого шага и сохранить лишь требование, касающееся стремления к нулю отношения длины интервала, который выбрасывается, к длине сегмента, из которого он выброшен.

Однако ей не удалось провести доказательство во всей общности и она наложила некоторое ограничение на взаимоотношение длин оставшихся после выбрасывания сегментов.

Чтобы сформулировать результат Н. К. Бари и дальнейшие теоремы, полученные в этом направлении, условимся в обозначениях.

Будем строить совершенное множество P так.

Из отрезка $[0, 2\pi]$ выбрасываем интервал $\delta_1^{(1)}$; из двух оставшихся сегментов $\varrho_1^{(1)}$ и $\varrho_2^{(1)}$ выбрасываем по интервалу $\delta_1^{(2)}$ и $\delta_2^{(2)}$ и т. д. Из 2^{m-1} сегментов $\varrho_1^{(m-1)}, \varrho_2^{(m-1)}, \dots, \varrho_{2^{m-1}}^{(m-1)}$ выбрасываем соответственно интервалы $\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \dots, \delta_{2^{m-1}}^{(m)}$, остающиеся сегменты называем $\varrho_1^{(m)}, \varrho_2^{(m)}, \dots, \varrho_{2^m}^{(m)}$. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем совершенное множество P .

Положим

$$\varepsilon_m = \sup_{1 \leq i \leq 2^{m-1}} \frac{\delta_i^{(m)}}{\varrho_i^{(m-1)}} \quad (13.1)$$

и

$$\eta_m = \sup_{k \geq m} \varepsilon_k. \quad (13.2)$$

В § 12 был рассмотрен случай, когда $\varepsilon_m \rightarrow 0$ (а значит, и $\eta_m \rightarrow 0$), но все $\varrho_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) равны между собой. Тогда получилось М-множество.

Из двух сегментов $(m+1)$ -го шага процесса, лежащих в некотором сегменте m -го шага, пусть $\varrho_i^{(m)}$, мы обозначим через $\sigma_i^{(m+1)}$ тот, который больше и через $\tau_i^{(m+1)}$ тот, который меньше *).

В работе Н. К. Бари [3] было доказано, что если

$$\theta_m = \sup_{1 \leq i \leq 2^{m-1}} \frac{\sigma_i^{(m)}}{\tau_i^{(m)}} \quad \text{и} \quad \theta_m < C \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где C — постоянно и, кроме того, $\varepsilon_m \rightarrow 0$, то снова получается М-множество.

Верблунский (Verblunsky [1]), стремясь избавиться от ограничения, наложенного на θ_m , доказывал, что теорема сохраняет силу при единственном условии $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Но в 1952 г. Сивин и Крестенсоном (Civin and Krestenson [1]) была обнаружена ошибка в доказательстве Верблунского. Они, однако, не смогли решить вопроса о том, падает ли только доказательство, или же и сама теорема. И. И. Пятецкий-Шапиро [1] построил пример, показывающий, что и сама теорема в столь общей формулировке неверна (см. об этом в § 17).

Сивин и Крестенсон в вышеупомянутой работе ввели следующие условия:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = 0 \quad \text{и} \quad \theta_m = o\left(\frac{1}{\eta_m}\right). \quad (A)$$

В этих условиях они утверждали, что снова получится М-множество.

*) Если они равны, то $\sigma_i^{(m+1)}$, например, левый, а $\tau_i^{(m+1)}$ правый.

Мы проведем здесь доказательство этого результата, несколько упрощая рассуждение Сивина и Крестенсона.

Итак, докажем теорему:

Т е о р е м а. Если совершенное множество P , построенное указанным выше процессом, удовлетворяет условиям (A), то оно M -множество.

Для доказательства, прежде всего, заметим, что, не нарушая общности, можно числа θ_m предполагать монотонно возрастающими.

В самом деле, пусть

$$\bar{\theta}_m = \max\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\},$$

тогда

$$\frac{\sigma_i^{(m)}}{\tau_i^{(m)}} \leq \bar{\theta}_m \quad (i = 1, 2, \dots, 2^m),$$

и если мы докажем, что $\bar{\theta}_m = o\left(\frac{1}{\eta_m}\right)$, то старые условия можно заменить новыми, где $\{\theta_m\}$ — уже монотонная последовательность.

Мы имеем два случая: 1) θ_m ограничены в своей совокупности и 2) существует последовательность $\theta_{m_1}, \theta_{m_2}, \dots, \theta_{m_k}, \dots$ такая, что

$$\theta_{m_1} < \theta_{m_2} < \dots < \theta_{m_k} < \dots; \lim \theta_{m_k} = +\infty.$$

В первом случае из $\eta_m \rightarrow 0$ и $\theta_m < C$ ($m = 1, 2, \dots$) сразу следует $\bar{\theta}_m \eta_m \rightarrow 0$, т. е. $\bar{\theta}_m = o\left(\frac{1}{\eta_m}\right)$. Во втором случае, обозначая через μ_m то из чисел $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, которое равно $\bar{\theta}_m$ (или последнее из них, если их несколько), видим, что $\mu_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, а тогда из (A)

$$\bar{\theta}_m \eta_m = \theta_{\mu_m} \eta_m = \frac{\alpha_{\mu_m}}{\eta_{\mu_m}} \eta_m,$$

где $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Но $\eta_{\mu_m} \geq \eta_m$ и $\alpha_{\mu_m} \rightarrow 0$, ибо $\mu_m \rightarrow \infty$, а потому

$$\bar{\theta}_m \eta_m \rightarrow 0, \quad \text{т. е.} \quad \bar{\theta}_m = o\left(\frac{1}{\eta_m}\right),$$

а это и требовалось доказать.

Построим теперь функцию $F(x)$ непрерывную, постоянную на смежных к P интервалах и такую, что

$$I_n = n \int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx} dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и будет следовать, что P есть M -множество.

Сначала построим последовательность непрерывных периодических функций $F_m(x)$ так: пусть

$$F_1(0) = F_1(2\pi) = 0; \quad F_1(x) = 1 \quad \text{на} \quad \delta^{(1)},$$

$F_1(x)$ линейна на $\varrho_1^{(1)}$ и $\varrho_2^{(1)}$.

Допустим, что $F_1(x), \dots, F_m(x)$ уже построены и притом так, что $F_m(x)$ постоянна на всех интервалах системы S_m , где

$$S_m = \sum_{k=1}^m D_k, \quad D_k = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \delta_i^{(k)}$$

и $F_m(x)$ интерполируется линейно на каждом $\varrho_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$).

Пусть $R_m = \sum_{i=1}^{2^m} \varrho_i^{(m)}$. Мы определим $F_{m+1}(x)$ так:

$$F_{m+1}(x) = F_m(x) \quad \text{на} \quad S_m.$$

Имеем $\varrho_i^{(m)} = \sigma_i^{(m+1)} + \delta_i^{(m+1)} + \tau_i^{(m+1)}$.

Полагаем, требуя, чтобы $F_{m+1}(x)$ была непрерывна,

$$F_{m+1}(x) = \begin{cases} F_m(x) & \text{на} \quad \sigma_i^{(m+1)}, \\ \text{const} & \text{на} \quad \delta_i^{(m+1)}, \end{cases}$$

$F_{m+1}(x)$ интерполируется линейно на $\tau_i^{(m+1)}$. Тогда $F_{m+1}(x)$ полностью определена.

Обозначим через $\Delta_i^{(m)}$ приращение $F_m(x)$ на $\varrho_i^{(m)}$ и через $\Delta_{\tau_i}^{(m+1)}$ приращение $F_{m+1}(x)$ на $\tau_i^{(m+1)}$. Тогда по построению (рис. 48)

$$\left| \frac{\Delta_{\tau_i}^{(m+1)}}{\Delta_i^{(m)}} \right| = \frac{\tau_i^{(m+1)} + \delta_i^{(m-1)}}{\varrho_i^{(m)}}.$$

Но $\frac{\delta_i^{(m+1)}}{\varrho_i^{(m)}} \leq \varepsilon_{m+1}$; $\frac{\tau_i^{(m+1)}}{\varrho_i^{(m)}} < \frac{1}{2}$, поэтому

$$\left| \frac{\Delta_{\tau_i}^{(m+1)}}{\Delta_i^{(m)}} \right| \leq \frac{3}{4} \quad \text{для} \quad m \geq m_0, \quad (13.3)$$

если только m_0 выбрано так, что

$$\varepsilon_{m+1} \leq \frac{1}{4} \quad \text{для} \quad m \geq m_0.$$

Для заданного m каждая точка x принадлежит либо S_m , либо R_m . Если $x \in S_m$, то

$$F_{\mu+1}(x) - F_\mu(x) = 0 \quad (\mu = m, m+1, \dots).$$

Если $x \in R_m$, то $x \in \varrho_i^{(m)}$ для некоторого i . Если $x \in \sigma_i^{(m+1)}$, то $F_{m+1}(x) = F_m(x)$, если же $x \in \tau_i^{(m+1)}$ или $x \in \delta_i^{(m+1)}$, то

$$|F_{m+1}(x) - F_m(x)| \leq \frac{\delta_i^{(m+1)}}{\varrho_i^{(m)}} |\Delta_i^{(m)}| \leq \varepsilon_{m+1} |\Delta_i^{(m)}|. \quad (13.4)$$

Каждая точка $x \in P$ принадлежит некоторой бесконечной последовательности $\varrho^{(0)} \supset \varrho_{i_1}^{(1)} \supset \dots \supset \varrho_{i_m}^{(m)} \supset \dots$, где числа i_m определяются этим x .

Каждая точка x из CP принадлежит конечной последовательности

$$\varrho^{(0)} \supset \varrho_{i_1}^{(1)} \supset \dots \supset \varrho_{i_p}^{(p)} \supset \delta^{(p+1)}.$$

Если $x \in \varrho_{i_{m+1}}^{(m+1)}$, то либо $x \in \sigma_{i_m}^{(m+1)}$, и тогда $F_{m+1}(x) - F_m(x) = 0$, либо $x \in \tau_{i_m}^{(m+1)}$ или $x \in \delta_{i_m}^{(m+1)}$, и тогда мы будем пользоваться неравенством (13.4).

Пусть $m \geq m_0$ и

$$r_m(x) = \sum_{q=m}^{\infty} [F_{q+1}(x) - F_q(x)] \quad (13.5)$$

есть остаток ряда

$$F_1(x) + [F_2(x) - F_1(x)] + \dots \quad (13.6)$$

Тогда

$$|r_m(x)| \leq \sum_{q=m}^{\infty} |F_{q+1}(x) - F_q(x)| = \sum_{q=m}^{\infty} |F_{q+1}(x) - F_q(x)|, \quad (13.7)$$

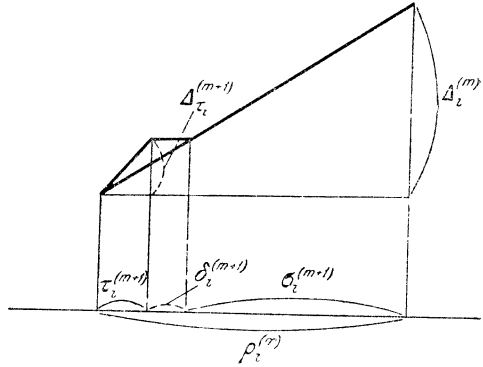


Рис. 48

где знак ' означает, что в сумме выкинуты те члены, которые равны нулю; такие будут, когда x попадает либо в некоторый смежный интервал к P , либо в такой сегмент, где $F_{q+1}(x) = F_q(x)$. Мы уже видели, что каждый раз, как этого равенства нет, можно применять формулу (13.4). Поэтому из (13.4) и (13.2) имеем

$$|r_m(x)| \leq \eta_{m+1} \sum_{q=m}^{\infty} |\Delta_{i_q}^q|, \quad (13.8)$$

причем, если для некоторого значения q член $\Delta_{i_q}^q$ в этой сумме не последний, то следующий за ним член $\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}$ ($s \geq 1$) появился от рассмотрения некоторого $\varrho_{i_{q+s}}^{q+s}$, который во всяком случае содержится в $\varrho_{i_{q+1}}^{q+1}$, а этот последний есть $\tau_{i_q}^{q+1}$ (иначе мы бы имели $F_{q+1}(x) - F_q(x) = 0$ и член $\Delta_{i_q}^q$ в формуле (13.8) должен был бы отсутствовать).

Но если так, то по формуле (13.3) имеем заведомо

$$|\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}| \leq |\Delta_{i_{q-1}}^{q+1}| \leq \frac{3}{4} |\Delta_{i_q}^q|,$$

так как $q \geq m$, а $m \geq m_0$. Значит, для $m \geq m_0$

$$|r_m(x)| \leq \eta_{m+1} |\Delta_{i_m}^m| \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^q \leq 4 \eta_{m+1} |\Delta_{i_m}^m|. \quad (13.9)$$

Отсюда следует, что ряд (13.6) равномерно сходится к некоторой $F(x)$ непрерывной, постоянной на смежных к P интервалах, и притом

$$|F(x) - F_m(x)| \leq 4 \eta_{m+1} |\Delta_{i_m}^m| \quad \text{на} \quad \varrho_{i_m}^{(m)}. \quad (13.10)$$

Мы будем доказывать, что если

$$I_n = n \int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx} dx,$$

то $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$. Отсюда и будет следовать, что P есть M -множество.

Пусть n задано. Для каждой точки $x \in P$ найдем такое $k = k(x, n)$, что

$$\left| \sqrt{\frac{\theta_k}{\eta_k}} \frac{1}{\varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}} \right| \leq |n| < \left| \sqrt{\frac{\theta_{k+1}}{\eta_{k+1}}} \frac{1}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \right|, \quad (13.11)$$

где $\varrho_{i_k}^{(k)}$ — последовательность сегментов, определяющих точку x . Это k определено единственным образом, так как $\frac{\theta_k}{\eta_k}$ монотонно возрастает и $\frac{1}{\varrho_{i_k}^{(k)}}$ тоже.

Ясно, что для всех точек $x \in P$, принадлежащих одному и тому же $\varrho_{i_k}^{(k)}$, число $k(x, n)$ одно и то же.

Определим систему V_n , составленную из сегментов так: сегмент $\varrho_{i_k}^{(k)}$ отнесем к этой системе, если для него выполнено неравенство (13.11).

Из определения видно, что тот сегмент $\varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}$, который содержит $\varrho_{i_k}^{(k)}$, входящий в V_n , заведомо не может войти в V_n . Система V_n состоит из конечного числа сегментов, неперекрывающихся и целиком покрывающих P . В самом деле, во-первых, всякое $x \in P$ непременно войдет в некоторый $\varrho_{i_k}^{(k)}$, принадлежащий V_n , ибо числа $\frac{1}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \sqrt{\frac{\theta_{k-1}}{\eta_{k-1}}}$ монотонно растут до бесконечности

и, во-вторых, никакой сегмент, вошедший в V_n , не может содержать сегмента более высокого ранга, который входит в эту же систему V_n .

Заметим еще, что если через ζ_n обозначим наименьшее из чисел k , для которых $\varrho_{i_k}^{(k)} \in V_n$, то $\zeta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, так как если бы нашлся такой

$\varrho_{i_k}^{(k)}$, для которого для бесконечного множества значений n было бы верно (13.11), то это означало бы, что $\varrho_{i_k}^{(k)} < \sqrt{\frac{\theta_{k+1}}{\eta_{k+1}}} \frac{1}{n_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), что при $n_\nu \rightarrow \infty$ становится невозможным.

Для дальнейшего введем новую последовательность функций, $\varphi_n(x)$, определяемых так:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} F_k(x), & \text{если } \varrho_{i_k}^{(k)} \in V_n, \\ F(x), & \text{если } x \in CV_n. \end{cases}$$

Имеем

$$I_n = n \int_0^{2\pi} [F(x) - \varphi_n(x)] e^{-inx} dx + n \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) e^{-inx} dx = I'_n + I''_n. \quad (13.12)$$

Далее

$$I'_n = n \int_{V_n} [F(x) - \varphi_n(x)] e^{-inx} dx = n \sum_{V_n} \int_{\varrho_{i_k}^{(k)}} [F(x) - F_k(x)] e^{-inx} dx,$$

где \sum_{V_n} означает сумму, распространенную на все те $\varrho_{i_k}^{(k)}$, которые принадлежат V_n .

Поэтому на основании (13.10)

$$|I'_n| \leq 4 |n| \sum_{V_n} \eta_{k+1} |\Delta_{i_k}^{(k)}| \varrho_{i_k}^{(k)}.$$

Но на основании (13.11) отсюда

$$|I'_n| \leq 4 \sum_{V_n} \eta_{k+1} \sqrt{\frac{\theta_{k+1}}{\eta_{k+1}}} \frac{1}{\varrho_{i_k}^{(k)}} |\Delta_{i_k}^{(k)}| \varrho_{i_k}^{(k)} \leq 4 \max_{k \geq \zeta_n} \sqrt{\eta_{k+1} \theta_{k+1}} \sum_{V_n} |\Delta_{i_k}^{(k)}|.$$

Так как V_n состоит из неперекрывающихся сегментов, целиком покрывающих P , то сумма приращений $F(x)$ на них равна ее полному изменению на $[0, 2\pi]$, т. е. равна 2, а потому

$$|I'_n| \leq 8 \max_{k \geq \zeta_n} \sqrt{\eta_{k+1} \theta_{k+1}}.$$

Мы видели, что $\zeta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\theta_k \eta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в силу условия теоремы, согласно которому $\theta_k = o\left(\frac{1}{\eta_k}\right)$; отсюда вытекает

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} I'_n = 0. \quad (13.13)$$

Далее имеем, интегрируя по частям,

$$I''_n = + \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \varphi'_n(x) e^{-inx} dx = + \frac{1}{i} \sum_{V_n} \frac{\Delta_{i_k}^{(k)}}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \int_{\varrho_{i_k}^{(k)}} e^{-inx} dx,$$

откуда

$$|I''_n| \leq \frac{2}{|n|} \sum_{V_n} \frac{|\Delta_{i_k}^{(k)}|}{\varrho_{i_k}^{(k)}}.$$

Но на основании (13.11) это дает

$$|I''_n| \leq 2 \sum_{V_n} |\Delta_{i_k}^{(k)}| \cdot \frac{\varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \sqrt{\frac{\eta_k}{\theta_k}}. \quad (13.14)$$

Так как $\varrho_{i_k}^{(k)} = \sigma_{i_k}^{(k+1)} + \delta_{i_k}^{(k+1)} + \tau_{i_k}^{(k+1)}$ и, кроме того,

$$\varrho_{i_k}^{(k)} \geq \tau_{i_{k-1}}^{(k)}, \quad \delta_{i_{k-1}}^{(k)} \leq \varepsilon_k \varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)} \leq \eta_k \varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}, \quad \tau_{i_{k-1}}^{(k)} \leq \sigma_{i_{k-1}}^{(k)},$$

то

$$(1 - \eta_k) \frac{\varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \leq 2 \frac{\sigma_{i_{k-1}}^{(k)}}{\tau_{i_{k-1}}^{(k)}} \leq 2 \theta_k,$$

откуда

$$\frac{\varrho_{i_{k-1}}^{(k-1)}}{\varrho_{i_k}^{(k)}} \leq \frac{2}{1 - \eta_k} \theta_k < 3 \theta_k, \quad (13.15)$$

если только k достаточно велико (ибо $\eta_k \rightarrow 0$). Поэтому из (13.14) и (13.15) получаем

$$|I_n''| \leq 6 \sum_{V_n} |\Delta_{i_k}^k| \sqrt{\theta_k \eta_k} \leq 6 \max_{k \geq \zeta_n} \sqrt{\eta_k \theta_k} \sum_{V_n} |\Delta_{i_k}^{(k)}| \leq 12 \max_{k \geq \zeta_n} \sqrt{\theta_k \eta_k},$$

но последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $\zeta_n \rightarrow \infty$, а $\theta_k \eta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это и заканчивает доказательство теоремы.

§ 14. Достаточные условия для замкнутых U -множеств

В предыдущем параграфе мы указали некоторые условия, достаточные для того, чтобы замкнутое множество было M -множеством. Здесь мы займемся аналогичным вопросом для U -множеств. Это позволит нам, в частности, судить о том, насколько необходимы те ограничения, которые были введены в теореме предыдущего параграфа.

Прежде всего мы докажем одну лемму, касающуюся формальных произведений (Rajchman [4]).

Л е м м а Р а й х м а н а. Пусть

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

есть тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и пусть

$$\lambda_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n^{(p)} e^{inx}$$

есть последовательность функций, для которых

- 1) $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\alpha_n^{(p)}| < A$, где A — абсолютная константа,
- 2) $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_0^{(p)} = \alpha_0 \neq 0$,
- 3) $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_n^{(p)} = 0$ при $n \neq 0$.

Тогда, обозначая через

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n^{(p)} e^{inx}$$

формальное произведение рядов $\sum c_n e^{inx}$ и $\sum \alpha_n^{(p)} e^{inx}$, имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} c_n^{(p)} = \alpha_0 c_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Доказательство. Положим $\varepsilon_m = \max_{|n| \geq m} |c_n|$. Пусть n фиксировано. Берем $N > |n|$ и напишем

$$c_n^{(p)} = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \alpha_s^{(p)} c_{n-s} = \sum_{s=-N}^N \alpha_s^{(p)} c_{n-s} + \sum_{s=-\infty}^{-N-1} \alpha_s^{(p)} c_{n-s} + \sum_{s=N+1}^{\infty} \alpha_s^{(p)} c_{n-s} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Член σ_1 содержит лишь конечное число слагаемых; все эти слагаемые, кроме $\alpha_0^{(p)} c_n$, стремятся к 0 при $p \rightarrow \infty$, значит,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_1 = \alpha_0 c_n.$$

Для s , заключенного между $-\infty$ и $-N-1$, имеем $n-s > n+N$ и тогда очевидно $|c_{n-s}| \leq \varepsilon_{n+N}$, откуда

$$|\sigma_2| \leq \varepsilon_{n+N} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\alpha_s^{(p)}| < A \varepsilon_{n+N}.$$

Для $s > N$, поскольку мы взяли $N > |n|$, имеем $|n-s| = s-n > N-n$ и

$$|c_{n-s}| \leq \varepsilon_{N-n},$$

а потому

$$|\sigma_3| \leq \varepsilon_{N-n} \sum |\alpha_s^{(p)}| < A \varepsilon_{N-n}.$$

Оставляя n постоянным и устремляя N к $+\infty$, мы видим, что разность

$$c_n^{(p)} - \alpha_0 c_n$$

при достаточно больших p и N может быть сделана как угодно малой, т. е.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} c_n^{(p)} = \alpha_0 c_n,$$

а это и требовалось доказать.

Из доказанной леммы выведем следующую теорему*):

Т е о р е м а. Для того чтобы множество E было U -множеством, достаточно, чтобы существовала последовательность функций

$$f_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n^{(p)} e^{inx}, \quad (14.1)$$

удовлетворяющая условиям

- 1) $f_p(x) = 0$ для $x \in E$ ($p = 1, 2, \dots$),
- 2) ряд Фурье для $f_p(x)$ быстро сходится
- 3) существует константа A , для которой

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\alpha_n^{(p)}| < A \quad (p = 1, 2, \dots),$$

- 4) $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_n^{(p)} = 0$ для $n \neq 0$ и $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_n^{(p)} = \alpha_0 \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что при выполнении условий 1) — 4) множество E не есть U -множество, т. е. существует нуль-ряд

$$\sum c_n e^{inx}, \quad (14.2)$$

сходящийся к нулю вне E .

*) В неявном виде этой теоремой уже пользовался А. Райхман; явно ее сформулировал И. И. Пятецкий-Шапиро (см. [2], а также [3]).

Рассмотрим формальное произведение ряда (14.2) на ряд (14.1); пусть это будет

$$\sum c_n^{(p)} e^{inx}. \quad (14.3)$$

В силу только что доказанной леммы имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} c_n^{(p)} = c_n \alpha_0 \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (14.4)$$

Но ряд (14.3) должен сходиться к 0 на E , потому что $f_p(x) = 0$ на E и должен сходиться к нулю на каждом смежном к E интервале, потому что там ряд (14.2) сходится к нулю.

Итак, (14.3) сходится к нулю всюду; но тогда

$$c_n^{(p)} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и это верно при всяком p . Отсюда, пользуясь формулой (14.4) и тем, что $\alpha_0 \neq 0$, заключаем

$$c_n = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и, значит, (14.2) вовсе не был нуль-рядом.

Теорема доказана.

Теперь мы приведем без доказательства несколько теорем И. И. Пятецкого-Шапиро, дающих достаточные условия для того, чтобы замкнутое множество было U -множеством.

О п р е д е л е н и е. Множество E назовем *элементарным U -множеством*, если существует последовательность функций, удовлетворяющих всем условиям предыдущей теоремы, или тем же условиям 1), 3) и 4) и одному из условий 2') или 2''):

2') каждая $f_n(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $f'_n(x) \in L^{p_n}$ ($p_n > 1$),

2'') $f_n(x) = 0$ на некотором открытом множестве E_n , содержащем E .

Можно доказать, что при замене условия 2) на 2') или 2'') рассматриваемое множество все еще будет U -множеством *).

И. И. Пятецкий-Шапиро доказал также (см. [3], теорема III), что

Всякое замкнутое U -множество представимо в виде суммы конечного числа или счетного множества элементарных U -множеств.

§ 15. Множества типа $H^{(s)}$

Предыдущие теоремы хотя и очень интересны, но носят все же вспомогательный характер, так как в них ничего не говорится о структуре рассматриваемого замкнутого множества E . Мы сейчас укажем достаточные условия, выраженные в структурных терминах, где упомянутые выше теоремы будут применены в ходе доказательств.

И. И. Пятецкий-Шапиро [2] ввел понятие множеств типа $H^{(s)}$, обобщающее понятие H -множества.

Прежде всего условимся в терминологии. Последовательности

$$\{n_k^{(1)}\}, \{n_k^{(2)}\}, \dots, \{n_k^{(s)}\}, \dots,$$

*) И. И. Пятецкий-Шапиро поставил вопрос, не будет ли E снова U -множеством, если мы предположим, что функции $f_p(x)$ удовлетворяют только условиям 1), 3) и 4). Этот вопрос остается нерешенным.

составленные из целых чисел, мы назовем *независимыми*, если для любого вектора (x_1, x_2, \dots, x_s) с целочисленными координатами x_i и с $\sum_{i=1}^s x_i^2 > 0$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |n_k^{(1)} x_1 + n_k^{(2)} x_2 + \dots + n_k^{(s)} x_s| = +\infty.$$

О п р е д е л е н и е. Множество $E \subset [0, 1]$ называется *множеством типа $H^{(s)}$* , если найдется s независимых последовательностей $\{n_k^{(1)}\}$, $\{n_k^{(2)}\}$, \dots , $\{n_k^{(s)}\}$ и параллелепипед Δ , лежащий в единичном кубе s -мерного евклидова пространства такой, что

$$\{(n_k^{(1)} x), (n_k^{(2)} x), \dots, (n_k^{(s)} x)\} \bar{\in} \Delta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

для любого $x \in E$.

Ясно, что при $s = 1$ множество типа $H^{(s)}$ становится обычным множеством типа H .

Если E есть множество точек вида $2\pi x$, где $x \in \mathcal{E}$, а \mathcal{E} — множество типа $H^{(s)}$, то мы будем говорить, что E есть *множество типа $H^{(s)}$ относительно отрезка $[0, 2\pi]$* .

И. И. Пятецкий-Шапиро доказал теорему:

Т е о р е м а. *Всякое множество типа $H^{(s)}$ относительно отрезка $[0, 2\pi]$ есть U -множество.*

Как и при доказательстве теоремы о том, что H -множества относительно отрезка $[0, 2\pi]$ являются U -множествами (см. § 7), мы будем для упрощения формул рассматривать все на отрезке $[0, 1]$, но писать тригонометрические ряды в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{2\pi i n x}. \quad (15.1)$$

Разумеется, теорема § 14 сохраняет силу, если рассматриваются множества на $[0, 1]$, но ряды для функций $f_p(x)$ пишутся уже в форме (15.1); на это мы и будем дальше опираться.

Раз \mathcal{E} есть множество типа $H^{(s)}$, то найдутся последовательности $n_k^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, s$; $k = 1, 2, \dots$) и параллелепипед Δ , входящие в определение $H^{(s)}$, т. е. такие, что для любого $x \in \mathcal{E}$ при всяком k выполнено одно из условий:

$$\left. \begin{aligned} (n_k^{(1)} x) &\bar{\in} \Delta_1, \\ (n_k^{(2)} x) &\bar{\in} \Delta_2, \\ &\dots\dots\dots \\ (n_k^{(s)} x) &\bar{\in} \Delta_s, \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ — те интервалы, из которых строится s -мерный параллелепипед.

Пусть $\varphi_l(x)$ ($l = 1, 2, \dots, s$) — функция с периодом, равным 1, и удовлетворяющая условиям

$$1^\circ \varphi_l(x) = 0 \quad \text{вне } \Delta_l,$$

$$2^\circ \varphi_l(x) > 0 \quad \text{на } \Delta_l,$$

$$3^\circ \int_0^1 \varphi_l(x) dx = 1,$$

$$4^\circ \text{ ряд Фурье для } \varphi_l(x) \text{ быстро сходится.}$$

Положим

$$f_p(x) = \varphi_1[(n_p^{(1)}x)] \varphi_2[(n_p^{(2)}x)] \dots \varphi_s[(n_p^{(s)}x)].$$

Ясно, что

$$f_p(x) = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{E} \quad (p = 1, 2, \dots),$$

так как для любой точки $x \in \mathcal{E}$ при всяком p имеем выполненным хотя бы одно из условий (15.2), а потому хотя бы одно из выражений $\varphi_l[(n_p^{(l)}x)]$ окажется равным нулю в этой точке, а значит, и $f_p(x)$ тоже будет равно нулю.

Изучим теперь коэффициенты разложения $f_p(x)$ в ряд Фурье. Пусть

$$f_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n^{(p)} e^{2\pi i n x}. \quad (15.3)$$

Для каждой из функций $\varphi_l(x)$ имеем, в силу того, что она периодическая с периодом 1

$$\varphi_l[(n_p^{(l)}x)] = \varphi_l[n_p^{(l)}x].$$

Поэтому, если

$$\varphi_l(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \beta_m^{(l)} e^{2\pi i m x},$$

то

$$\varphi_l[(n_p^{(l)}x)] = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \beta_m^{(l)} e^{2\pi i m n_p^{(l)} x}. \quad (15.4)$$

Для получения ряда (15.3) надо перемножить ряды (15.4) при $l = 1, 2, \dots, s$. Так как все эти ряды быстро сходящиеся, то, как легко видеть, это же будет верно для ряда (15.3); значит, функции $f_p(x)$ удовлетворяют условию 2) теоремы § 14. Далее, ясно, что

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\alpha_n^{(p)}| \leq \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |\beta_m^{(1)}| \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |\beta_m^{(2)}| \dots \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |\beta_m^{(s)}|,$$

т. е. и условие 3) выполнено.

Остается доказать, что и 4) выполнено. С этой целью возьмем такое постоянное C , что

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |\beta_m^{(l)}| < C \quad (l = 1, 2, \dots, s).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В каждом из рядов (15.4) возьмем k членов, где k столь велико, чтобы

$$\sum_{|m| \geq k+1} |\beta_m^{(l)}| < \frac{\varepsilon}{2^s C^{s-1}} \quad \text{для} \quad l = 1, 2, \dots, s,$$

и обозначим

$$T_p^{(l)}(x) = \sum_{m=-k}^k \beta_m^{(l)} e^{2\pi i m n_p^{(l)} x},$$

$$r_p^{(l)}(x) = \sum_{|m| \geq k+1} \beta_m^{(l)} e^{2\pi i m n_p^{(l)} x}.$$

Тогда

$$f_p(x) = \prod_{l=1}^s [T_p^{(l)}(x) + r_p^{(l)}(x)],$$

причем $|T_p^{(l)}(x)| \leq C$ при любых $l = 1, 2, \dots, s$ и $p = 1, 2, \dots$, а

$$|r_p^{(l)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2^s C^{s-1}} \quad (l = 1, 2, \dots, s; p = 1, 2, \dots),$$

откуда

$$f_p(x) = \prod_{l=1}^s T_p^{(l)}(x) + \varrho_p(x) = T_p(x) + \varrho_p(x),$$

где $q_p(x)$ состоит из $2^s - 1$ слагаемых, каждое из них есть произведение s сомножителей и по крайней мере один из них по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{2^s C^{s-1}}$, а все остальные по модулю не больше C , значит, каждое слагаемое по модулю не больше $\frac{\varepsilon}{2^s}$, откуда

$$|q_p(x)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Итак,

$$|f_p(x) - T_p(x)| < \varepsilon. \quad (15.5)$$

Заметим теперь, что произведение

$$T_p(x) = \prod_{l=1}^s T_p^{(l)}(x) \quad (15.6)$$

есть тригонометрический полином, у которого коэффициенты могут быть отличны от нуля лишь тогда, когда они стоят множителями при

$$e^{2\pi i (m_1 n_p^{(1)} + m_2 n_p^{(2)} + \dots + m_s n_p^{(s)}) x},$$

где m_1, m_2, \dots, m_s — любые целые.

Но последовательности $n_p^{(l)}$ независимы, т. е. для любых m_1, m_2, \dots, m_s будем иметь

$$|m_1 n_p^{(1)} + \dots + m_s n_p^{(s)}| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty,$$

если только $m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_s^2 > 0$. Отсюда следует, что выражение $m_1 n_p^{(1)} + \dots + m_s n_p^{(s)}$ может равняться нулю лишь при $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 0$, т. е. у полинома $T_p(x)$, если только p достаточно велико, свободный член есть просто произведение свободных членов полиномов $T_p^{(l)}(x)$ при $l = 1, 2, \dots, s$, а так как они все равны 1, в силу условия 3° для функций $\varphi_l(x)$, то при достаточно большом p

$$\int_0^1 T_p(x) dx = 1.$$

Отсюда и из (15.5) следует, что

$$\left| \int_0^1 f_p(x) dx - 1 \right| < \varepsilon$$

при p достаточно большом, а так как ε как угодно мало и

$$\alpha_0^{(p)} = \int_0^1 f_p(x) dx, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_0^{(p)} = 1,$$

то и вторая часть условия 4° для функций $f_p(x)$ выполнена.

Теперь докажем, что $\alpha_n^{(p)} \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, если $n \neq 0$. Для этого заметим, что

$$\alpha_n^{(p)} = \int_0^1 f_p(x) e^{-2\pi i n x} dx = \\ = \int_0^1 [f_p(x) - T_p(x)] e^{-2\pi i n x} dx + \int_0^1 T_p(x) e^{-2\pi i n x} dx. \quad (15.7)$$

Но в силу (15.5) первый интеграл по модулю меньше ε , а под знаком второго интеграла стоит тригонометрический полином, у которого при достаточно большом p не будет свободного члена.

Действительно, мы видели, что при достаточно большом p полином $T_p(x)$ имеет вид

$$T_p(x) = 1 + \sum \gamma_j e^{2\pi i(m_1 n_p^{(j)} + \dots + m_s n_p^{(s)} k)},$$

где γ_j — какие-то константы; поэтому

$$T_p(x) e^{-2\pi i n x} = e^{-2\pi i n x} + \sum \gamma_j e^{2\pi i(m_1 n_p^{(j)} + \dots + m_s n_p^{(s)} - n)}. \quad (15.8)$$

Число членов полинома $T_p(x)$ не зависит от p ; поэтому, каковы бы ни были m_1, m_2, \dots, m_s , входящие в формулу (15.8), имеем при $p \rightarrow \infty$

$$|m_1 n_p^{(1)} + \dots + m_s n_p^{(s)}| \rightarrow \infty,$$

а потому, если p достаточно велико, то полином $T_p(x) e^{-2\pi i n x}$, каково бы ни было n , не будет иметь свободного члена, т. е. второй интеграл в равенстве (15.7) равен нулю, если p достаточно велико. Стюда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_n^{(p)} = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0,$$

и доказательство закончено.

§ 16. Существование U -множества, не содержащегося ни в каком $H^{(s)}$

Это существование будет доказано, если мы построим такое множество типа $H^{(2)}$, которое не содержится в сумме счетного множества H -множеств (поскольку всякое $H^{(2)}$ есть U -множество) (см. § 15).

И. И. Пятецкий-Шапиро [2] доказал для любого $s \geq 2$ существование $H^{(s)}$, не содержащегося в сумме счетного множества множеств типа $H^{(s-1)}$, но мы для ясности изложения ограничимся случаем $s = 2$.

Для построения указанного примера будем каждую точку x интервала $(0, 1)$ разлагать в двоичную дробь

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots, \quad (16.1)$$

причем в случае, когда таких разложений будет два, выбираем из них то, где 1 написана конечное число раз.

Пусть целые числа $l_1, l_2, \dots, m_1, m_2, \dots$ выбраны так, чтобы

$$1^\circ \quad l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \dots < l_k < m_k < \dots,$$

$$2^\circ \quad m_k - l_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

$$3^\circ \quad \frac{l_k}{l_{k+1}} > \alpha > 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Например, можно, как это делал И. И. Пятецкий-Шапиро, взять $l_k = (2k-1)^2$, $m_k = (2k)^2$.

На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим все те точки, для которых $\alpha_{l_1} = 1$ и $\alpha_{m_1} = 1$, все остальные α_s — любые. Они образуют систему из конечного числа кусков *) (на рис. 49 взято $l_1 = 2$, $m_1 = 5$). Мы выкидываем интервалы, состоящие из всех внутренних точек каждого такого куска длины $\frac{1}{2^{m_1}}$ (на рис. 49 они отмечены маленькими дужками). Это — первый шаг процесса. Для каждого k мы в k -м шаге процесса рассматриваем все те точки, для которых $\alpha_{l_k} = 1$ и $\alpha_{m_k} = 1$, остальные α_s любые, лишь бы только это было в

*) Слово «кусок» здесь употребляется потому, что в данный момент нет необходимости различать интервал, полуинтервал и отрезок.

еще сохранившейся (после предыдущих процессов выбрасывания) части отрезка. Мы выкидываем *интервалы*, состоящие из всех внутренних точек каждого такого куска длины $\frac{1}{2^{m_k}}$. Прделав это для всех $k = 1, 2, 3, \dots$, мы получим, очевидно, замкнутое множество F . Покажем, что оно есть множество типа $H^{(2)}$.

Для этого заметим, что если (y) — дробная часть y , то для x с разложением (16.1) имеем

$$(2^m x) = 0, \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \quad (16.2)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 = \Delta_2 = \left(\frac{1}{2}, 1 \right) = \Delta, \\ p_k = 2^{l_k-1}, q_k = 2^{m_k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

мы докажем, что при $x \in F$ и любом k

$$\text{либо } (p_k x) \notin \Delta, \quad \text{либо } (q_k x) \notin \Delta. \quad (16.4)$$

В самом деле, если для некоторого k и заданного x имеем $(p_k x) \in \Delta$, то $\alpha_{l_k} = 1$; с другой стороны, если $(q_k x) \in \Delta$, то $\alpha_{m_k} = 1$, значит, если для

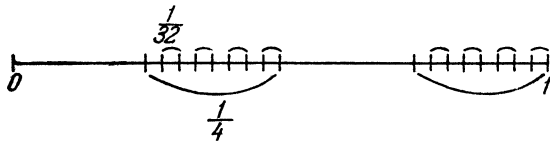


Рис. 49

некоторого k ни одно из условий (16.4) не выполнено, то для этого k имеет место $\alpha_{l_k} = 1$, $\alpha_{m_k} = 1$, а между тем при построении F все точки x , для которых хотя бы при одном k условие $\alpha_{l_k} = \alpha_{m_k} = 1$ выполнено, были удалены (точки, являющиеся концами смежных к F интервалов таковы, что $(p_k x)$ или $(q_k x)$ может попасть в один из концов Δ , но не в самый интервал).

Итак (16.4) доказано. Остается убедиться, что последовательности $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ независимы, тогда будет ясно, что F есть множество типа $H^{(2)}$. Но если a и b любые целые, $a^2 + b^2 > 0$, то

$$|a p_k + b q_k| = |a \cdot 2^{l_k-1} + b \cdot 2^{m_k-1}| = 2^{l_k-1} |a + b \cdot 2^{m_k-l_k}| \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и доказательство закончено.

Мы теперь должны показать, что F не может быть частью множества типа H_σ .

Этот результат был сначала доказан И. И. Пятецким-Шапиро в работе [2], но доказательство там достаточно сложно. Впоследствии им было дано очень простое доказательство, которое нигде не опубликовано; мы здесь излагаем его с согласия автора.

Введем сначала понятие точки густоты.

О п р е д е л е н и е. Точку ξ назовем *точкой густоты* для замкнутого множества F , если для любой последовательности интервалов $(\xi, \xi + h_m)$, стягивающихся к точке ξ , максимум длин смежных к F интервалов (или их частей), попавших на $(\xi, \xi + h_m)$, имеет величину $o(h_m)$.

Покажем, что H -множества не имеют ни одной точки густоты *). Действительно, пусть E такое множество. Пусть E_k — множество точек (kx) ,

*) Как всегда, достаточно рассматривать замкнутые H -множества.

где $x \in E$. В силу определения H -множеств найдется такая последовательность $\{n_k\}$, что максимальный смежный интервал δ_k ко множеству E_{n_k} имеет длину $\delta_k > \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Пусть ξ — любая точка $[0, 1]$; положим $\Delta_k = \left(\xi, \xi + \frac{1}{n_k}\right)$. Интервалы Δ_k стягиваются к ξ . Когда мы образуем множество E_{n_k} , мы должны $[0, 1]$ растянуть в n_k раз, при этом Δ_k растянется в интервал длины, равной 1, но на него попадет интервал δ_k , смежный к E_{n_k} и длины $> \delta$; значит, длина максимального смежного интервала к E , лежащего на Δ_k , больше $\frac{\delta}{n_k}$, т. е. не есть $o\left(\frac{1}{n_k}\right)$, а потому у E нет точек густоты.

Заметим теперь, что если какое-либо замкнутое множество есть часть H_σ , то оно должно иметь порцию, которая будет H -множеством (по известной теореме Бэра *)); в таком случае на этой порции не должно быть точек густоты.

Покажем, что построенное нами множество F типа $H^{(2)}$ обладает, напротив, тем свойством, что во всякой его непустой порции $\delta(F)$ есть точка густоты. Отсюда и будет следовать, что оно не может быть частью множества типа H_σ .

Пусть $\xi' \in \delta(F)$ и

$$\xi' = 0, a_1 a_2 \dots$$

— ее двоичное разложение. Покажем, что при достаточно большом p точка

$$\xi = 0, a_1 a_2 \dots a_p 000 \dots$$

также входит в $\delta(F)$. Действительно, она должна войти в δ , потому что $\xi' \in \delta$ и $|\xi' - \xi| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$, а p достаточно велико; с другой стороны, она должна войти в F , так как, заменяя все a_{p+1}, a_{p+2}, \dots нулями, мы никогда не введем в рассмотрение таких точек, где выполнено условие $a_{l_k} = a_{m_k} = 1$, которое запрещалось для точек, входящих в F .

Мы хотим показать, что ξ есть точка густоты для F . С этой целью возьмем любое натуральное m , для которого $m > \frac{p}{a}$, где a — число, входящее в условие 3°, наложенное на числа l_k . Далее найдем для каждого такого m свое ν так, чтобы

$$l_{\nu-1} < m \leq l_\nu. \quad (16.5)$$

Положим $j = m_\nu - m - 1$; тогда $j \geq 0$, ибо $m_\nu - l_\nu \geq 1$. Рассмотрим все точки β вида

$$\beta = 0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_p 000 \dots 0}_m \delta_1 \delta_2 \dots \delta_j 000 \dots,$$

где числа δ_i ($i = 1, 2, \dots, j$) независимо друг от друга принимают значения 0 и 1, а a_1, a_2, \dots, a_p те же, как в разложении числа ξ .

Ясно, что все такие β принадлежат интервалу $\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$, так как

$$0, 0 \dots 0 \delta_1 \delta_2 \dots \delta_j 000 \dots \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \dots = \frac{1}{2^m}.$$

Но мы докажем, кроме того, что всякое такое $\beta \in F$.

*) См. Добавления, § 5.

Действительно, для этого достаточно убедиться, что для знаков α'_i двоичного разложения β мы ни при каком k не будем иметь

$$\alpha'_{l_k} = 1 \quad \text{и} \quad \alpha'_{m_k} = 1$$

одновременно.

Пусть $k \geqslant v$, тогда $m_k \geqslant m_v = j + m + 1$ в силу выбора j , а потому $\alpha'_{m_k} = 0$ по построению числа β .

Пусть $k \leqslant v - 2$; тогда $m_k \leqslant m_{v-2} < l_{v-1} < m$ и, следовательно, либо $\alpha'_{m_k} = 0$, либо α'_{m_k} совпадает с некоторым α_s ($s = 1, 2, \dots, p$) и α'_{l_k} тоже совпадает с одним из них; но так как числа α_s те же, что и у точки $\xi \in F$, то положения, при котором $\alpha'_{m_k} = 1$ и одновременно $\alpha'_{l_k} = 1$, не может наблюдаться.

Осталось разобрать случай $k = v - 1$. Но здесь мы заметим, что так как по условию 3°

$$\frac{l_{v-1}}{l_v} > a,$$

то $l_{v-1} > al_v \geqslant at$ в силу (16.5); но t было выбрано так, чтобы $t > \frac{p}{a}$, поэтому $l_{v-1} > p$. С другой стороны, $l_{v-1} < m$ в силу (16.5). Отсюда следует, что $\alpha'_{l_{v-1}} = 0$ и, значит, здесь тоже не может быть запрещенной комбинации знаков $\alpha'_{l_{v-1}} = 1$ и $\alpha'_{m_{v-1}} = 1$.

Итак, мы убедились, что $\beta \in F\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$.

Заметим теперь, что если на $\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$ мы возьмем любой интервал длины $> \frac{1}{2^{m_{v-1}}}$, то он содержит хотя бы одну точку вида β .

Действительно, всякая точка из $\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$ имеет вид

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p 00 \dots 0 \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots,$$

где $\alpha_{m+i} = 0$ или 1 независимо друг от друга ($i = 1, 2, \dots$). Если $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_{m+j}$ любые, а $\alpha_{m+i} = 0$ при $i > j$, то получается точка вида β .

Следовательно, справа от каждой точки вида β точки, не имеющие вид β , могут лежать лишь в интервале длины

$$\frac{1}{2^{m+j+1}} + \frac{1}{2^{m+j+2}} + \dots = \frac{1}{2^{m+j}} = \frac{1}{2^{m_{v-1}}}.$$

Таким образом, расстояние между всякой точкой вида β в $\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$ и ближайшей к ней справа точкой вида β не превосходит $\frac{1}{2^{m_{v-1}}}$, и, следовательно, в любом интервале длины, превосходящей $\frac{1}{2^{m_{v-1}}}$, непременно будут точки вида β , а они принадлежат F . Значит, максимум длины смежного к F интервала или его части, попавшей на $\left(\xi, \xi + \frac{1}{2^m}\right)$, есть $\frac{1}{2^{m_{v-1}}}$. Но

$$\frac{1}{2^{m_{v-1}}} : \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m_v - m - 1}},$$

а так как $m \leqslant l_v$, а $m_v - l_v \rightarrow \infty$ по условию 2° , то

$$\frac{1}{2^{m_v - m - 1}} \leqslant \frac{1}{2^{m_v - l_v - 1}} = o(1),$$

откуда видно, что

$$\frac{1}{2^{m_p-1}} = o\left(\frac{1}{2^m}\right).$$

Пусть теперь h — любое положительное. Найдем такое m , что

$$\frac{1}{2^{m+1}} \leq h < \frac{1}{2^m}. \quad (16.6)$$

Тогда длина максимального смежного к F интервала или его части, попавшей на $(\xi, \xi + h)$, не превосходит длину максимального смежного к F интервала, или его части, попавшей на $(\xi, \xi + \frac{1}{2^m})$, т. е. она есть $o\left(\frac{1}{2^m}\right)$, а значит, и $o(h)$ в силу (16.6), а потому ξ есть точка густоты для F .
Доказательство закончено.

§ 17. О точности достаточных условий для совершенных M -множеств

В § 13 мы рассматривали совершенные множества, которые строятся так, чтобы (см. обозначения этого параграфа)

$$\frac{\delta_i^{(m)}}{\varrho_i^{(m-1)}} \leq \varepsilon_m \quad (i = 1, 2, \dots, 2^{m-1})$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0. \quad (17.1)$$

Добавляя еще некоторое дополнительное условие, касающееся отношений длин $\sigma_i^{(m+1)}$ и $\tau_i^{(m+1)}$, мы доказывали, что тогда получается M -множество, и упомянули, что Верблюдский хотел доказать достаточность одного только условия (17.1), однако в доказательстве была ошибка. Мы теперь, следуя И. И. Пятецкому-Шапиро^[1], покажем, что и сама теорема Верблюдского неверна, т. е. что существуют замкнутые U -множества, для которых отношение длины выбрасываемого интервала к длине сегмента, из которого он выбрасывается, стремится к нулю, когда номер шага процесса построения стремится к бесконечности.

Докажем, что этим свойством будет обладать то множество F , которое было построено в § 16 (для данного примера даже нет необходимости требовать, чтобы числа l_k и m_k удовлетворяли условию 3° , достаточно того, чтобы

$$l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \dots < l_k < m_k < \dots$$

и $m_k - l_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$).

Условимся называть «нормальным» процессом построения замкнутого множества π на отрезке $[0, 1]$ следующий процесс: сначала удаляется максимальный смежный к π интервал или самый правый из максимальных, если их несколько; в каждом из оставшихся сегментов удаляем максимальный смежный интервал к π или самый правый из максимальных и т. д.

Покажем, что если к построенному нами множеству F применить нормальный процесс, то условие (17.1) будет удовлетворено.

Действительно, пусть δ — некоторый смежный к F интервал. Значит, существует такое k , что δ состоит из точек x , для которых

$$a_{l_k} = 1 \quad \text{и} \quad a_{m_k} = 1.$$

В таком случае длина этого δ есть $\frac{1}{2^{m_k}}$.

Внутри интервала Δ , составленного из тех точек, где $\alpha_{l_k} = 1$, он может занимать $2^{m_k - l_k - 1}$ разных положений, но даже если он самый левый, т. е. выкидывается из Δ позже всех остальных, то левее его лежит целый интервал Δ' тех точек, где $\alpha_{l_k} = 0$, и которые заведомо еще не тронуты предыдущими процессами выкидывания. Поэтому сегмент ϱ , из которого выкидывается наш интервал δ , имеет длину не меньше чем $\frac{1}{2^{l_k}}$, а значит, отношение $\delta : \varrho \leq \frac{1}{2^{m_k - l_k}}$. Но так как с уменьшением величины δ номер шага процесса, когда он выкидывается, стремится к бесконечности, то $\frac{1}{2^{m_k - l_k}} \rightarrow 0$, поскольку $m_k - l_k \rightarrow \infty$, и наше утверждение доказано.

Мы видим таким образом, что если к условию (17.1) ничего не добавлять, то множество F не должно быть M -множеством.

Остается, однако, открытым вопрос, насколько добавочное условие, введенное Сивиным и Крестенсоном (см. § 13), является необходимым. Не исключена возможность, что оно может быть ослаблено.

§ 18. М-множества в узком смысле

Для дальнейшего нам будет полезно ввести следующее

О п р е д е л е н и е. Совершенное множество P называется M -множеством в узком смысле, если существует функция $F(x)$ с ограниченным изменением, постоянная на каждом смежном к P интервале, но не на всем отрезке $[0, 2\pi]$, и такая, что ее коэффициенты Фурье—Стилтьеса удовлетворяют условию

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF = o(1) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \pm \infty. \quad (18.1)$$

Легко доказать следующую теорему:

Т е о р е м а. Всякое M -множество в узком смысле есть M -множество (в обычном смысле).

В самом деле, пусть P — это множество. Значит, существует $F(x)$ с ограниченным изменением, непостоянная на $[0, 2\pi]$, у которой коэффициенты Фурье—Стилтьеса равны $o(1)$, хотя эта функция постоянна на смежных к P интервалах. Положим

$$\Phi(x) = F(x) - \left[F(0) + \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi} x \right] \quad (18.2)$$

и докажем, что у $\Phi(x)$ коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Действительно, прежде всего заметим, что из (18.2) следует

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(2\pi) = 0. \quad (18.3)$$

Кроме того, снова в силу (18.2) $\Phi(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF - \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF = o(1) \quad (18.4)$$

в силу (18.1). Но

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi = \Phi(x) e^{-inx} \Big|_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} \Phi(x) e^{-inx} dx = in \int_0^{2\pi} \Phi(x) e^{-inx} dx = o(1) \quad (18.5)$$

в силу (18.3) и (18.4). Но (18.5) означает, что у функции $\Phi(x)$ коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а так как

$$F(x) = \Phi(x) + Ax + B, \quad (18.6)$$

где A и B постоянны, то мы находимся в условиях применимости теоремы § 11, а это и значит, что P есть M -множество.

Теорема доказана.

Долгое время предполагали, что может быть и обратно: всякое совершенное M -множество есть M -множество в узком смысле. Если бы это оказалось верным, то проблему о том, является ли совершенное множеством M - или U -множеством, было бы гораздо легче решать. Однако, И. И. Пятецкий-Шапиро показал [3], что *существуют совершенные M -множества, не являющиеся M -множествами в узком смысле.*

Тем не менее в целом ряде интересных частных случаев доказательство того, что данное совершенное множество есть M -множество, удается провести, показав, что оно M -множество, в узком смысле и опираясь на только что доказанную теорему. В этом мы убедимся, изучая в следующих параграфах конкретные примеры. Но предварительно сделаем одно замечание.

З а м е ч а н и е. Вместо того чтобы рассматривать коэффициенты Фурье—Стилтьеса, можно рассматривать *преобразование Фурье—Стилтьеса*

$$c(t) = \int_0^{2\pi} e^{-itx} dF,$$

где t уже не должно быть целым числом. Ясно, что если $c(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm \infty$, то и подавно $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$, где n целое. Но нетрудно убедиться, что и обратное справедливо; более того, если $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$, то $c(t) \rightarrow 0$ равномерно при $t \rightarrow \pm \infty$.

Прежде всего заметим, что условие

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} dF = o(1). \quad (18.7)$$

влечет непрерывность $F(x)$ на $[0, 2\pi]$. Действительно, при доказательстве предыдущей теоремы мы видели, что из (18.7) следует (18.6), где $\Phi(x)$ с ограниченным изменением и имеет коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а значит, она непрерывна (см. § 42 главы I). Нам надо доказать, что $c(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

Проведем доказательство для $t \rightarrow +\infty$; для $t \rightarrow -\infty$ оно такое же. Положим

$$t = n + \theta,$$

где n целое, и $0 \leq \theta < 1$. Покажем сначала, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta x} dF = 0, \quad (18.8)$$

если $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ задано; выберем сначала δ столь малым, чтобы

$$V(\delta) - V(0) < \varepsilon \quad \text{и} \quad V(2\pi) - V(2\pi - \delta) < \varepsilon, \quad (18.9)$$

где через $V(x)$ обозначено полное изменение $F(x)$ на $(0, x)$. Достигнуть выполнения этих неравенств возможно, так как $F(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Пусть

$$\begin{aligned}\psi(x) &= e^{-i\theta x} \quad \text{на} \quad (\delta, 2\pi - \delta), \\ \psi(0) &= \psi(2\pi) = 0\end{aligned}$$

и $\psi(x)$ определяется на $[0, \delta]$ и $[2\pi - \delta; 2\pi]$, так, чтобы $|\psi(x)| \leq 1$ и была непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Так как $\psi(x)$ непрерывна, то можно по теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ найти такой тригонометрический полином, что

$$|\psi(x) - \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-ikt}| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (18.10)$$

Тогда в силу (18.9) и (18.10)

$$\begin{aligned}& \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta x} dF - \int_0^{2\pi} e^{-inx} \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-ikx} dF \right| \leq \\& \leq \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left[e^{-i\theta x} - \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-ikx} \right] dF \right| \leq \\& \leq \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left[\psi(x) - \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-ikx} \right] dF \right| + \int_0^{2\pi} |\psi(x) - e^{-i\theta x}| dF \leq \\& \leq \varepsilon [V(2\pi) - V(0)] + 2 \int_0^{\delta} dV + 2 \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} dV = \\& = \varepsilon [V(2\pi) - V(0)] + 2[V(\delta) - V(0)] + 2[V(2\pi) - V(2\pi - \delta)] < C\varepsilon, \quad (18.11)\end{aligned}$$

где C постоянное. Но так как $c_m = o(1)$ при $m \rightarrow \pm \infty$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{-ikx} dF = \sum_{k=-N}^N \gamma_k \int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)x} dF = o(1)$$

при $n \rightarrow \pm \infty$.

Отсюда следует, что и

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta x} dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \pm \infty$$

и θ постоянном, т. е. (18.8) доказано.

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ мы найдем столь большое p , что

$$4\pi \frac{V(2\pi) - V(0)}{p} < \varepsilon. \quad (18.12)$$

Для любой из p точек вида $\theta_j = \frac{j}{p}$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) находим свое n_j такое, что

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-in_j x} e^{-i\theta_j x} dF \right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geq n_j.$$

Пусть n' — наибольшее из чисел n_0, n_1, \dots, n_{p-1} и пусть $T > n' + 1$. Тогда для любого $t \geq T$ имеем в разложении $t = n + \theta$ заведомо $n > n'$, а тогда

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta_j x} dF \right| < \varepsilon \quad (j = 0, 1, \dots, p-1). \quad (18.13)$$

Но

$$\int_0^{2\pi} e^{-itx} dF = \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta x} dF \quad (18.14)$$

и если выбрать θ_j так, чтобы $|\theta - \theta_j| < \frac{1}{p}$, что всегда возможно в силу определения чисел θ_j , то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta x} dF - \int_0^{2\pi} e^{-inx} e^{-i\theta_j x} dF \right| &\leq \int_0^{2\pi} |e^{-i\theta x} - e^{-i\theta_j x}| dF \leq \\ &\leq |\theta - \theta_j| 4\pi |V(2\pi) - V(0)| < \varepsilon \end{aligned} \quad (18.15)$$

в силу выбора числа p . Соединяя (18.14), (18.15), (18.12) и (18.13), находим

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-itx} dF \right| < 2\varepsilon \quad \text{для} \quad t \geq T$$

и это заканчивает доказательство.

Это замечание о преобразованиях Фурье—Стилтьеса окажется полезным в § 2 главы XV. Кроме того, оно может быть использовано для доказательства теоремы:

Если E есть M -множество в узком смысле и E_θ — множество точек θx для $x \in E$, то в случае, когда E_θ лежит на $[0, 2\pi]$, это множество снова будет M -множеством в узком смысле.

Обозначим через b верхнюю грань множества E_θ ; по условию $b \leq 2\pi$.

Пусть $F(x)$ — функция с ограниченным изменением, постоянная на смежных к E интервалах и такая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx} dF \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \pm \infty. \quad (18.1)$$

Такая $F(x)$ существует, потому что E есть M -множество в узком смысле. Положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{\theta}\right) & \text{для} \quad 0 \leq x \leq b, \\ \Phi(b) & \text{для} \quad b \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Ясно, что $\Phi(x)$ постоянна на смежных к E_θ интервалах. Докажем, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} d\Phi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \pm \infty, \quad (18.16)$$

тогда будет доказано, что E_θ есть M -множество в узком смысле.

Действительно, полагая $y = \theta x$, имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{-iny} d\Phi(y) = \int_0^b e^{-iny} d\Phi = \int_0^{\frac{b}{\theta}} e^{-in\theta x} dF = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta x} dF \quad (18.17)$$

(так как на $\left[\frac{b}{\theta}, 2\pi\right]$ нет точек E , поскольку на $[b, 2\pi]$ нет точек E_θ).

Но мы доказали, что (18.1) влечет

$$\int_0^{2\pi} e^{-itx} dF \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \pm \infty$$

без того, чтобы t было целым, поэтому, полагая $t = n\theta$, видим, что правая часть (18.17) стремится к нулю при $n \rightarrow \pm \infty$ и, значит, (18.16) доказано.

§ 19. Симметричные совершенные множества

Условимся называть совершенное множество *симметричным*, если оно получается следующим процессом: из отрезка $\varrho^0 = [0, 2\pi]$ удаляется центральный интервал длины $\delta^{(1)}$, остаются два сегмента равной длины $\varrho^{(1)}$; удаляем из каждого из них по центральному интервалу одинаковой длины $\delta^{(2)}$, остается 4 сегмента длины $\varrho^{(2)}$, ...; из 2^{k-1} сегментов длины $\varrho^{(k-1)}$ удаляется по центральному интервалу равной длины $\delta^{(k)}$, остается 2^k сегментов длины $\varrho^{(k)}$ и т. д. Если $2^k \varrho^{(k)} \rightarrow 0$, то полученное симметрическое множество имеет меру нуль.

Обозначим через $\lambda^{(k)}$ отношение $\frac{\delta^{(k)}}{\varrho^{(k-1)}}$; мы видели в § 12, что если $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то полученное множество есть M -множество.

Мы видели далее (см. § 13), что когда симметрия нарушается, но «не слишком сильно», то опять получается M -множество; в противном случае может получиться и U -множество (см. § 17).

Теперь, отказываясь от рассмотрения несимметричных множеств, поскольку даже и для симметричных картина, как мы увидим дальше, достаточно сложна, мы хотим изучить роль условия $\lambda_k \rightarrow 0$.

Допустим, что λ_k не стремится к нулю.

В случае, когда $\lambda_k = \frac{1}{3}$ ($k = 1, 2, \dots$), мы получаем классический пример канторова множества, и оно, будучи H -множеством, есть U -множество. Поэтому возникал вопрос, не будет ли всегда при $\lambda_k = \lambda$ ($k = 1, 2, \dots$), где λ — какое угодно постоянное число, $0 < \lambda < 1$, полученное множество U -множеством. Отрицательный ответ на этот вопрос был дан Н. К. Бари^[3]; в § 20 мы разберем детально этот случай совершенных множеств. Здесь же мы, оставаясь в предположении, вообще говоря, непостоянного λ_k , выведем некоторые общие формулы.

Нам будет удобно ввести обозначение

$$\xi_k = \frac{\varrho^{(k+1)}}{\varrho^{(k)}},$$

т. е. обозначить буквой ξ_k отношение длины сегмента шага $k + 1$ к сегменту шага k . Ясно, что $0 < \xi_k < \frac{1}{2}$ и с предыдущим числом λ_k это ξ_k связывается так:

$$\varrho^{(k+1)} = \frac{\varrho^{(k)} - \delta^{(k+1)}}{2},$$

т. е.

$$\xi_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^{(k+1)}}{\varrho^{(k)}} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_{k+1}).$$

Значит, в случае, когда $\lambda_k \rightarrow 0$, имеем $\xi_k \rightarrow \frac{1}{2}$; и в этом случае, как мы знаем, получается M -множество.

Для изучения поведения таких множеств в других случаях будет полезно раз навсегда вывести формулу, выражающую коэффициенты Фурье—Стилтьеса от некоторой монотонной функции, постоянной на смежных интервалах к данному множеству. Прежде всего заметим, что точки симметрического множества могут быть записаны в виде

$$x = 2\pi[\varepsilon_1(1 - \xi_1) + \varepsilon_2\xi_1(1 - \xi_2) + \dots + \varepsilon_k\xi_1\xi_2\dots\xi_{k-1}(1 - \xi_k) + \dots], \quad (19.1)$$

где каждое ε_p равно 0 или 1.

Если выкинутые в k -м шаге 2^{k-1} интервалов обозначить через $\delta_p^{(k)}$ ($p = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$), то их длины равны $2\pi \xi_1 \dots \xi_{k-1} (1 - 2\xi_k)$. Их правые концы получаются из формулы (19.1) при $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_i = 0$ для $i > k$. Левые концы получаются при $\varepsilon_k = 0$ и $\varepsilon_i = 1$ для $i > k$. Остающиеся сегменты обозначаем $\varrho_p^{(k)}$ ($p = 1, 2, \dots, 2^k$). Построим функцию

$$F(x) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \dots,$$

где числа ε_i равны 0 или 1 и определяются из формулы (19.1), когда x задано.

Геометрически говоря, если бы заданное множество было канторовым, получилась бы известная канторова ступенчатая кривая. В общем случае она выглядит так же, только ее ступеньки помещаются над смежными интервалами заданного множества.

Хилл и Тамаркин (Hille and Tamarkin^[1]) указали метод для вычисления коэффициентов Фурье—Стилтьеса для канторовой кривой*). Следуя их методу, Салем (Salem^[9]) вычисляет эти коэффициенты и в общем случае так же, а именно: пусть

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} dF.$$

Если $\alpha_p^{(k)}$ ($p = 1, 2, \dots, 2^k$) — левые концы сегментов $\varrho_p^{(k)}$, то их абсциссы получаются из формулы (19.1) при $\varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1$ в конечном разложении

$$\alpha_p^{(k)} = 2\pi [\varepsilon_1(1 - \xi_1) + \varepsilon_2 \xi_1(1 - \xi_2) + \dots + \varepsilon_k \xi_1 \dots \xi_{k-1}(1 - \xi_k)].$$

Разделим $[0, 2\pi]$ на сегменты длины, стремящейся к нулю, каждый из которых либо содержит один целый сегмент $\varrho_p^{(k)}$, либо не содержит никакой его части. Так как в интервалах $\delta_p^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) функция $F(x)$ постоянна, а на каждом $\varrho_p^{(k)}$ она возрастает на $\frac{1}{2^k}$, мы получаем в качестве приближенной величины для интеграла Стилтьеса I_n

$$I_n^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sum e^{2\pi ni [\varepsilon_1(1-\xi_1) + \varepsilon_2 \xi_1(1-\xi_2) + \dots + \varepsilon_k \xi_1 \dots \xi_{k-1}(1-\xi_k)]},$$

где суммирование распространяется на все комбинации $\varepsilon_i = 0$ и $\varepsilon_i = 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_n^{(k)} &= \frac{1}{2^k} \prod_{j=1}^k [1 + e^{2\pi ni \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{j-1}(1-\xi_j)}] = \\ &= \prod_{j=1}^k e^{\pi ni \xi_1 \dots \xi_{j-1}(1-\xi_j)} \cos \pi n \xi_1 \dots \xi_{j-1}(1 - \xi_j). \end{aligned}$$

Но

$$1 - \xi_1 + \xi_1(1 - \xi_2) + \xi_1 \xi_2(1 - \xi_3) + \dots = 1.$$

Значит,

$$I_n = e^{\pi ni} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi n \xi_1 \dots \xi_{j-1}(1 - \xi_j). \quad (19.2)$$

Этой формулой мы и будем постоянно пользоваться. Если при некотором выборе чисел ξ_j мы обнаружим, что $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то соответствующее множество будет M -множеством.

Переходим к рассмотрению частных случаев выбора ξ_k .

*) См. также Карлеман (Carleman^[3]).

§ 20. Совершенные множества «с постоянным отношением»

Рассмотрим тот интересный частный случай, когда $\xi_k = \xi$ ($k = 1, 2, \dots$). Получаемые в этом случае совершенные множества будем называть *симметрическими множествами с постоянным отношением* ξ . При $\xi = 1/3$ мы имеем канторово множество, и оно, как известно, есть множество типа H , т. е. U -множество. Случай симметрического множества, где ξ — рациональное число, был разобран в 1937 году Н. К. Бари^[3]. Ему было доказано, что если ξ рационально, то получаемое множество будет U в том и только в том случае, когда $\frac{1}{\xi}$ есть целое число *).

В 1943 году вопросом о симметрических множествах с постоянным отношением занялся Салем^[9]. Для того чтобы сформулировать его результат, нам придется ввести следующее

О п р е д е л е н и е. Целое алгебраическое число**) θ называется *числом Пизо*, если оно является корнем некоторого алгебраического полинома с целыми коэффициентами и с коэффициентом, равным 1 при старшем члене, у которого остальные корни, называемые сопряженными к θ , по модулю < 1 .

Имеет место следующая замечательная

Т е о р е м а. Для того чтобы симметрическое множество с постоянным отношением ξ было U -множеством, необходимо и достаточно, чтобы число $\theta = \frac{1}{\xi}$ было числом Пизо.

Эта теорема была сформулирована Салемом в уже цитированной работе. Однако в этой работе безукоризненно была доказана лишь одна половина теоремы, а именно, что если θ не есть число Пизо, то рассматриваемое множество есть M -множество. Что же касается второй половины утверждения, то в ее доказательстве содержалась ошибка ***). В 1954 году И. И. Пятецкий-Шапиро^[4] доказал, что если θ есть число Пизо степени n (т. е. корень алгебраического уравнения n -й степени) и если $\theta > 2^n$, то множество P с постоянным отношением $\xi = \frac{1}{\theta}$ есть U -множество. И, наконец, только в 1955 году Зигмунд и Салем (Salem et Zygmund^[4]), используя метод И. И. Пятецкого-Шапиро, освободились от наложенного им ограничения $\theta > 2^n$ и доказали, что первоначально высказанная Салемом теорема верна. Перейдем теперь к доказательству этой теоремы. Его естественно разбить на две части.

У с л о в и е н е о б х о д и м о, иначе говоря: *если $\theta = \frac{1}{\xi}$ не есть число Пизо, то совершенное множество с постоянным отношением ξ есть M -множество.*

*) Мы записываем теорему в такой форме, которая удобна для сравнения с дальнейшими результатами. В работе Н. К. Бари формулировка была слегка отлична, а именно она обозначала через λ отношение длины выбрасываемого интервала к сегменту, из которого он выбрасывается, и доказала, что если $\lambda = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то множество будет M при $p < q - 2$ и U , если $p = q - 2$ или $p = q - 1$. Нетрудно видеть, что так как $\xi = \frac{1 - \lambda}{2}$, т. е. $\frac{1}{\xi} = \frac{2q}{q - p}$, то из несократимости дроби $\frac{p}{q}$ следует вывод: $\frac{1}{\xi}$ есть целое число в том и только в том случае, когда $p = q - 2$ или $p = q - 1$.

**) Напомним, что некоторое число называется целым алгебраическим, если оно является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами и с коэффициентом, равным 1 при старшем члене.

***) Эта ошибка была обнаружена участниками семинара по теории функций в Московском государственном университете еще в 1945 году. Позже, в 1948 году, появилась новая заметка Салема (Salem^[12]), где он сам указывает на эту ошибку и разбирает некоторые частные случаи, когда его утверждение все же верно.

Чтобы доказать это, мы в формуле (19.2) положим $\xi_k = \xi$ ($k = 1, 2, \dots$). Получим

$$I_n = e^{\pi n i} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{j-1} (1 - \xi). \quad (20.1)$$

На основании доказанного в § 19 мы можем утверждать, что если для некоторого ξ будем иметь $I_n \rightarrow 0$, то соответствующее множество с постоянным отношением ξ будет M -множеством. Тем более это будет верно, если мы докажем, что для некоторого ξ , полагая

$$I(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi t \xi^{j-1} \quad (20.2)$$

имеем $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В работе Н. К. Бари^[3] доказывалось прямым методом*), что если ξ рационально и $\xi \neq \frac{1}{m}$, где m — целое, то $I(t) \rightarrow 0$, если $I(t)$ определено формулой (20.2). Мы приводим это доказательство в § 30 Добавлений.

Салем (Salem^[9]) не требовал рациональности ξ и показал, что если $\theta = \frac{1}{\xi}$ не есть число Пизо, то $I(t) \rightarrow 0$. Но здесь уже доказательство проводится от противного, а именно имеет место

Л е м м а 1. Если $0 < \xi < 1$ и

$$I(t) = \prod_{j=1}^{\infty} |\cos \pi t \xi^{j-1}|$$

не стремится к нулю при $t \rightarrow \pm \infty$, то $\xi = \frac{1}{\theta}$, где θ — число Пизо.

В самом деле, если $I(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \pm \infty$, то найдется такая последовательность $t_1 < t_2 < \dots < t_s < \dots$, что $t_s \rightarrow +\infty$, но

$$I(t_s) > a > 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

(в случае, когда последовательность $t_s \rightarrow -\infty$, доказательство проводится абсолютно так же). Так как $\theta = \frac{1}{\xi}$, то $\theta > 1$. Выбираем для каждого s число $n = n(s)$ так, чтобы

$$\theta^{n-1} < t_s \leq \theta^n.$$

Тогда можно написать $t_s = \lambda_s \theta^n$, где $\frac{1}{\theta} < \lambda_s \leq 1$.

Так как числа λ_s лежат на конечном отрезке, то из t_s можно выбрать подпоследовательность $\{t_q\}$ так, что соответствующая подпоследовательность λ_q стремится к некоторому пределу λ , $\frac{1}{\theta} \leq \lambda \leq 1$. Так как

$$I(t_q) = I(\lambda_q \theta^{n(q)}) \leq |\cos \pi \lambda_q \cos \pi \lambda_q \theta \dots \cos \pi \lambda_q \theta^{n(q)}|$$

и каждое $I(t_q) > a$, то

$$\prod_{j=0}^{n(q)} (1 - \sin^2 \pi \lambda_q \theta^j) \geq a^2 \quad (q = 1, 2, \dots),$$

значит, и

$$e^{-\sum_{j=0}^{n(q)} \sin^2 \pi \lambda_q \theta^j} \geq a^2,$$

*) См. также Kerschner^[1] (Кершнер получил этот результат почти одновременно с Н. К. Бари, но совсем другим методом).

откуда

$$\sum_{j=0}^{n(q)} \sin^2 \pi \lambda_q \theta^j \leq \ln \frac{1}{a^2} \quad (q = 1, 2, \dots).$$

Пусть q фиксировано. Если $r > q$, то из

$$\sin^2 \pi \lambda_r + \sin^2 \pi \lambda_r \theta + \dots + \sin^2 \pi \lambda_r \theta^{n(r)} \leq \ln \frac{1}{a^2}$$

и подаловно следует

$$\sin^2 \pi \lambda_r + \sin^2 \pi \lambda_r \theta + \dots + \sin^2 \pi \lambda_r \theta^{n(q)} < \ln \frac{1}{a^2}.$$

Если зафиксировать q , а r устремлять к бесконечности, то в пределе получим

$$\sin^2 \pi \lambda + \sin^2 \pi \lambda \theta + \dots + \sin^2 \pi \lambda \theta^{n(q)} \leq \ln \frac{1}{a^2}. \quad (20.3)$$

Но так как это рассуждение справедливо при любом q , то это значит, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^m \quad (20.4)$$

сходится (и его сумма меньше или равна $\ln \frac{1}{a^2}$).

Но было доказано Пизо (Pisot [1]), а также Салемом (Salem [9]), что если для некоторого θ существует такое λ , $\frac{1}{\theta} \leq \lambda < 1$, при котором ряд (20.4) сходится, то θ есть число Пизо *) (а λ — алгебраическое число из тела $K(\theta)$).

Таким образом, лемма 1 доказана, а вместе с тем закончено и доказательство необходимости условия теоремы.

Переходим к доказательству достаточности.

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Иначе говоря, имеет место

Т е о р е м а З и г м у н д а и С а л е м а. Пусть P — совершенное множество с постоянным отношением ξ , где $\xi = \frac{1}{\theta}$, а θ — число Пизо. Тогда P есть U -множество.

Заметим прежде всего, что всегда $\xi < \frac{1}{2}$, а потому $\theta > 2$.

Мы будем опираться на следующую лемму (как всегда через $\{x\}$ обозначается разность между x и ближайшим к нему целым числом).

Л е м м а 2. Пусть θ — число Пизо степени n и $\theta > 2$. Тогда существует такое $\lambda > 0$ и такое целое N , что

$$\frac{\lambda}{(\theta - 1) \theta^N} + \sum_{m=0}^{\infty} |\{\lambda \theta^m\}| < \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{1}{n}}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что если x_1, x_2, \dots, x_n — корни уравнения с целыми коэффициентами, а $Q(x)$ — любой многочлен с целыми коэффициентами, то все числа

$$c_m = \sum_{i=1}^n Q(x_i) x_i^m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

*) Мы даем доказательство этой теоремы в § 29 Добавлений.

являются целыми. Действительно, если

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p,$$

$$c_m = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^p a_k x_i^k \right) x_i^m = \sum_{k=0}^p a_k \sum_{i=1}^n x_i^{m+k} = \sum_{k=0}^p a_k b_{mk},$$

где все b_{mk} целые, как симметрические функции корней уравнения с целыми коэффициентами, а потому и c_m все целые.

Пусть теперь $Q(x)$ — многочлен степени $n-1$ с целыми коэффициентами, которые мы будем подбирать позже. Положим

$$\lambda = Q(\theta), \quad \mu_i = Q(\alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ числа, сопряженные с θ .

Мы можем выбрать $Q(\theta)$ так, чтобы $Q(\theta) > 0$, т. е. $\lambda > 0$. По только что доказанному, полагая

$$c_m = Q(\theta) \theta^m + \sum_{i=1}^{n-1} Q(\alpha_i) \alpha_i^m = \lambda \theta^m + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \alpha_i^m,$$

видим, что все c_m целые.

Так как θ — число Пизо, то

$$|\alpha_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Поэтому полагая

$$\lambda \theta^m = c_m + \delta_m,$$

видим, что

$$|\delta_m| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu_i| |\alpha_i^m|, \quad (20.5)$$

а потому

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_m| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu_i| \frac{1}{1 - |\alpha_i|}.$$

Рассмотрим теперь n линейных форм

$$L(\theta) = \frac{\lambda}{(\theta - 1) \theta^N} = \frac{1}{(\theta - 1) \theta^N} (a_0 + a_1 \theta + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}),$$

$$L_i(\alpha_i) = \frac{\mu_i}{1 - |\alpha_i|} = \frac{1}{1 - |\alpha_i|} (a_0 + a_1 \alpha_i + \dots + a_{n-1} \alpha_i^{n-1})$$

относительно n целочисленных переменных a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Мы хотим добиться, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\left. \begin{aligned} |L(\theta)| &< \frac{1}{8n \cdot 2^{\frac{N}{n}}}, \\ |L(\alpha_i)| &< \frac{1}{8n \cdot 2^{\frac{N}{n}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

По теореме Минковского (см. Добавления, § 28) эти неравенства можно решить в целых a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , если определитель D нашей системы форм по модулю не превосходит произведение правых частей неравенств (20.6), т. е.

$$|D| < \frac{1}{8^n n^n 2^N}.$$

Но этот определитель имеет вид

$$\frac{1}{(\theta-1)\theta^N} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-|\alpha_i|} \begin{vmatrix} 1 & \theta & \dots & \theta^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{C(\theta)}{\theta^N},$$

где $C(\theta)$ — величина, зависящая только от θ , но не от N . Значит, неравенство

$$\frac{C(\theta)}{\theta^N} < \frac{1}{8^n n^n 2^N}$$

действительно удовлетворяется при достаточно большом N , потому что $\theta > 2$ по условию леммы, значит,

$$\left(\frac{2}{\theta}\right)^N < \frac{1}{(8n)^n C(\theta)}$$

при достаточно большом N .

Но если неравенства (20.6) удовлетворены, то

$$\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N} + \sum_{i=1}^{n-1} |\mu_i| \frac{1}{1-|\alpha_i|} < \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{N}{n}}}. \quad (20.7)$$

Остается заметить, что так как в силу (20.6)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_m| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu_i| \frac{1}{1-|\alpha_i|} < 1, \quad (20.8)$$

то уже во всяком случае все $|\delta_m| < 1$, а потому из

$$\lambda\theta^m = c_m + \delta_m,$$

где c_m целое, следует, что $|\{\lambda\theta^m\}| \leq |\delta_m|$, но тогда из (20.7) и (20.8) следует

$$\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N} + \sum_{m=0}^{\infty} |\{\lambda\theta^m\}| < \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{N}{n}}}$$

и лемма 2 полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы Зигмунда и Салема. Для точек множества P имеем (см. § 19)

$$x = 2\pi(\theta-1) \left(\frac{\varepsilon_1}{\theta} + \frac{\varepsilon_2}{\theta^2} + \dots + \frac{\varepsilon_m}{\theta^m} + \dots \right),$$

где $\varepsilon_m = 0$ или 1 ($m = 1, 2, \dots$).

Обозначим через Q множество точек x , для которых

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\theta} + \frac{\varepsilon_2}{\theta^2} + \dots + \frac{\varepsilon_m}{\theta^m} + \dots,$$

и докажем, что если θ — число Пизо степени n , то Q — множество типа $H^{(n)}$ в смысле И. И. Пятецкого-Шапиро. Если так, то Q , а значит, и P будут U -множествами *) (см. §§ 15 и 9).

*) Так как в § 9 теорема о подобном преобразовании U -множеств дана без полного доказательства (со ссылкой на теорию тригонометрических интегралов), то мы в § 31 Добавлений доказываем теорему о подобном преобразовании множеств типа $H^{(s)}$, которая позволяет убедиться в справедливости сделанного здесь утверждения.

Рассмотрим число λ , удовлетворяющее условиям предыдущей леммы, и оценим для него $\lambda\theta^m x$ при $x \in Q$ и любом m . Имеем, взяв N из той же леммы,

$$\lambda\theta^m x = \lambda(\theta^{m-1}\varepsilon_1 + \theta^{m-2}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m) + \\ + \lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta} + \dots + \frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right) + \lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+N+1}}{\theta^{N+1}} + \dots\right).$$

Сохраняя обозначения леммы 2, имеем

$$\lambda\theta^m = c_m + \delta_m,$$

где c_m — целое; поэтому по модулю 1

$$\lambda|\theta^{m-1}\varepsilon_1 + \theta^{m-2}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m| \equiv |\delta_{m-1}\varepsilon_1 + \dots + \delta_0\varepsilon_m| \leq \sum_{k=0}^m |\delta_k|,$$

так как все ε_i по модулю не превосходят 1. Кроме того,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{m+N+k}}{\theta^{N+k}} \right| \leq \frac{1}{\theta^N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^k} = \frac{1}{(\theta-1)\theta^N},$$

а потому по модулю 1

$$\left| \lambda\theta^m x - \lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta} + \dots + \frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right) \right| \leq \frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N} + \sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k| < \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{N}{2}}} \quad (20.9)$$

в силу леммы 2, согласно которой были найдены λ и N .

Обозначим через g_m дробную долю числа $\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta} + \dots + \frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)$ и рассмотрим в евклидовом пространстве $R^{(n)}$ точку O_k с координатами $g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_{k+n}$. Каковы бы ни были k и числа ε_i , точек O_k имеется не более 2^{N+n-1} штук. Действительно, каждое ε_i принимает только два значения 0 или 1, а если g_{k+1} уже закреплено, то g_{k+2} может иметь только 2 разных значения и т. д.

Пусть теперь $x \in Q$ и P_k — точка $(\{\lambda\theta^{k+1}x\}, \{\lambda\theta^{k+2}x\}, \dots, \{\lambda\theta^{k+n}x\})$. В силу неравенства (20.9)

$$|\{\lambda\theta^{k+s}x\} - g_{k+s}| < \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{N}{2}}} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. точка P_k находится внутри куба со стороной $\frac{1}{2^{\frac{N}{2}+2}}$ и с центром либо в

O_k , либо в точке, некоторые из координат которой находятся от координат O_k на расстоянии, равном 1. Так как таких кубов имеется не более чем 2^{N+2n-1} , то их общий объем не превосходит

$$2^{N+2n-1} \left(\frac{1}{2^{\frac{N}{2}+2}} \right)^n = \frac{1}{2}$$

и, значит, в «единичном кубе» пространства $R^{(n)}$ существует фиксированный куб, не содержащий никакой точки P_k .

Но так как $\lambda\theta^m = c_m + \delta_m$ и $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то это же свойство справедливо для точек P_k^i , имеющих координатами дробные части от $c_{k+1}x, c_{k+2}x, \dots, c_{k+n}x$. Отсюда будет следовать, что Q есть множество типа $H^{(n)}$, если мы докажем, что последовательности $\{c_{k+1}\}, \{c_{k+2}\}, \dots, \{c_{k+n}\}$

независимы, т. е., что при любых целых l_1, l_2, \dots, l_n , лишь бы они не были все равны нулю, имеем

$$|l_1 c_{k+1} + l_2 c_{k+2} + \dots + l_n c_{k+n}| \rightarrow \infty$$

при $k \rightarrow \infty$.

Последнее равенство справедливо, ибо

$$\sum_{s=1}^n l_s c_{k+s} = \sum_{s=1}^n l_s (\lambda \theta^{k+s} - \delta_{k+s}) = \lambda \theta^{k+1} \sum_{s=1}^{n-1} l_{s+1} \theta^s - \sum_{s=1}^n l_s \delta_{k+s}$$

и так как $\theta > 2$, а $\sum_{s=0}^{n-1} l_{s+1} \theta^s \neq 0$ в силу того, что θ — алгебраическое число степени n , а не $n-1$, то

$$\lambda \theta^{k+1} \left| \sum_{s=0}^{n-1} l_{s+1} \theta^s \right| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

а

$$\sum_{s=1}^n l_s \delta_{k+s} \rightarrow 0,$$

потому что $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Так как всякое целое число m есть число Пизо, поскольку оно является корнем уравнения $x - m = 0$, то, в частности, при $\xi = \frac{1}{m}$ множество с постоянным отношением ξ есть U -множество. Нетрудно сообразить, что оно в этом случае будет просто H -множеством. Действительно, если мы растянем отрезок $[0, 2\pi]$ в nm раз, где n — любое целое, то множество точек вида $(nm x)$ совпадет с P , а потому его максимальный смежный интервал будет иметь длину $2\pi(1 - 2\xi)$, а это и значит, что P есть H -множество.

В случае, когда $\xi = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима и $p \neq 1$, множество с постоянным отношением ξ является уже M -множеством (см. § 30 Добавлений).

З а м е ч а н и е 2. Доказанная теорема позволяет показать, что вопрос о том, является ли заданное множество U - или M -множеством, не может быть решен при помощи таких понятий, как α -емкость (или хаусдорфова размерность), даже в таком простом случае, как множества с постоянным отношением. Точнее: каково бы ни было α , существуют U -множества положительной α -емкости, и наоборот, существуют M -множества α -емкости нуль. Это вытекает из того, что, как показали Поля и Сеге (Polya und Szego [1]) (см. также Salem and Zygmund [1]), для того, чтобы множество с постоянным отношением ξ имело положительную α -емкость, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k (\xi^k)^\alpha} < +\infty.$$

Поэтому, если α задано, то, выбрав ξ так, чтобы $2\xi^\alpha \leq 1$, получим множество α -емкости нуль, а выбрав ξ так, чтобы $2\xi^\alpha > 1$, получим множество положительной α -емкости. Полагая $\frac{1}{\xi} = \theta$, видим, что множество имеет α -емкость нуль или положительную в зависимости от того, будет ли $\ln \theta \geq \frac{\ln 2}{\alpha}$ или $\ln \theta < \frac{\ln 2}{\alpha}$. Но, разумеется, можно выбрать как числа Пизо, так и числа, не являющиеся числами Пизо, и при заданном α удовлетворяющие любому из этих неравенств (множество чисел Пизо всюду плотно на $1 < \theta < \infty$). Все же, как мы увидим в § 27, понятие α -емкости, а также и выпуклой емкости оказываются полезными в проблеме единственности, но, правда, при изучении так называемых «относительных» U -множеств.

§ 21. Несимметричные совершенные множества «с постоянным разбиением»

Теорема Зигмунда и Салема, доказанная в предыдущем параграфе, может быть обобщена. Введем понятие множества с постоянным разбиением.

Пусть $[A, B]$ — сегмент длины L и N — любое целое положительное. Возьмем число ξ , $0 < \xi < \frac{1}{N+1}$, и удалим из $[A, B]$ любые N интервалов без общих концов между собой и с $[A, B]$, но так, чтобы длины оставшихся $N+1$ отрезков все были равны $L\xi$. Пусть $0 = L a_0, L a_1, \dots, L a_N$ — расстояния абсцисс левых концов этих отрезков от точки A . Мы скажем, что имеем $(N, \xi, a_1, \dots, a_N)$ -разбиение отрезка $[A, B]$.

Если мы начнем с $(N, \xi, a_1, \dots, a_N)$ -разбиения отрезка $[0, 2\pi]$, затем сделаем такое же разбиение в каждом из отрезков длины $2\pi\xi$, оставшихся после удаления N интервалов первого шага и т. д., то полученное совершенное множество назовем *множеством с постоянным разбиением*.

Можно доказать теорему: для того чтобы множество с постоянным разбиением $(N, \xi, a_1, \dots, a_N)$ было U -множеством, необходимо и достаточно, чтобы 1) $\xi = \frac{1}{\theta}$, где θ — число Пизо,

2) a_1, a_2, \dots, a_N — алгебраические числа из тела $K(\theta)$.

Доказательство этой теоремы, данное Салемом (Salem^[9]), содержало ошибку в части, касающейся достаточности условия, но в настоящее время есть новое доказательство в работе Салема и Зигмунда (Salem et Zygmund^[5]). Доказательство необходимости можно найти также в работе Н.К. Бари^[4], § 9.

§ 22. Краткий обзор результатов, относящихся к симметричным совершенным множествам с переменным отношением

В § 20 мы видели, что уже при решении вопроса о том, будет ли совершенное множество с постоянным отношением M - или U -множеством, приходится изучать арифметическую природу числа ξ , характеризующего это отношение. Тем более трудна проблема в общем случае симметрических совершенных множеств. Не имея возможности детально разбирать здесь все те частные случаи, которые были изучены, мы отсылаем интересующихся к работам Салема (Salem^[9]) и к статье Н.К. Бари^[4], здесь же ограничимся самыми краткими указаниями.

Салем изучал вопрос, что будет, если существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$, и доказал, что если $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi \neq 0$ и если $\theta = \frac{1}{\xi}$ не есть число Пизо, то рассматриваемое множество будет M -множеством. Обратная теорема уже не верна, так как если $\xi_k \rightarrow \frac{1}{2}$, то, как мы видели (см. § 12), получается снова M -множество, хотя $\theta = 2$ есть число Пизо (как всякое целое число).

Естественно поставить вопрос, что будет, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$. В этом случае множества будут «очень худыми», и можно было бы ожидать, что они должны оказаться U -множествами.

Но эта гипотеза неверна, в чем мы убедимся в конце этого параграфа. Пока же отметим, что если ξ_k стремится к нулю достаточно быстро, например, если

$$\xi_k = o\left(\frac{1}{k}\right).$$

то полученное множество есть U -множество (см. Salem^[9]).

Однако, в другой работе (Salem^[5]) Салем доказал*), что в достаточно широких предположениях относительно ξ_k , выражаясь образно, гораздо более вероятно получить M -, чем U -множество. Мы сейчас уточним, что надо понимать под этой фразой.

Рассмотрим снова симметричное совершенное множество P с переменным отношением ξ_k . Пусть $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — две последовательности чисел $0 < a_k < b_k < \frac{1}{2}$. Если мы возьмем ξ_k так, что $a_k \leq \xi_k \leq b_k$, и положим

$$\xi_k = a_k + \eta_k(b_k - a_k),$$

то $0 < \eta_k < 1$. Отобразим сегмент $0 \leq t \leq 1$ на счетно-мерный куб $0 \leq \eta_k \leq 1$ ($k = 1, 2, \dots$) следующим образом: если

$$t = 0, a_1 a_2 \dots$$

есть двоичное разложение числа t , то положим

$$\eta_1(t) = 0, a_1 a_3 a_5 a_{10} \dots,$$

$$\eta_2(t) = 0, a_2 a_5 a_9 \dots,$$

$$\eta_3(t) = 0, a_4 a_8 \dots,$$

$$\dots\dots\dots$$

За исключением точек t , для которых одно из двух возможных разложений содержит конечное число двоичных знаков (они образуют множество меры нуль), полученное соответствие будет взаимно однозначным.

Таким образом, мы установили соответствие между множествами P , для которых $a_k \leq \xi_k \leq b_k$, и значениями переменного t на сегменте $0 \leq t \leq 1$. Если некоторое свойство будет справедливо для всех P , кроме, быть может, тех, которые соответствуют множеству значений t меры нуль, мы будем говорить, что это свойство выполняется «для почти всех P ».

Салем доказал следующее предложение.

Т е о р е м а. *Рассмотрим все симметрические совершенные множества P , для которых $a_k \leq \xi_k \leq b_k$, где $0 < a_k < b_k < \frac{1}{2}$, и последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ «не слишком близки» друг к другу, а именно $b_p - a_p \geq \frac{1}{w(p)}$, где $w(p)$ — возрастающая последовательность, для которой $\ln w(p) = o(p)$.*

Тогда, если для некоторого β , $0 < \beta < \frac{1}{2}$, имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_p)^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2} - \beta} = \alpha > 0,$$

то почти все множества P являются M -множествами.

Заметим, что последовательность $\{b_k\}$ всегда можно выбрать так, чтобы все рассматриваемые множества имели меру нуль.

Покажем, что из этой теоремы вытекает существование симметричных совершенных M -множеств с отношениями ξ_k , стремящимися к нулю.

Действительно, можно взять, например

$$a_k = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad w(k) = e^{\sqrt{k}}, \quad b_k = a_k + \frac{1}{w(k)}.$$

*) Доказательство можно найти и в работе Н. К. Бари^[4], § 12.

Тогда $\ln w(k) = \sqrt{k} = o(k)$; кроме того,

$$a_1 a_2 \dots a_k = \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{4}},$$

а по формуле Стирлинга имеем

$$k! = k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} \delta_k,$$

где $\delta_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{4}} \alpha_k,$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha \neq 0$, т. е.

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} = \alpha_k \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}},$$

а потому, взяв $\beta = \frac{1}{4}$, мы видим, что условия теоремы выполнены. Но так как $a_k \leq \xi_k \leq b_k$ и притом a_k и b_k стремятся к нулю, то и $\xi_k \rightarrow 0$, и, значит, можно найти такие $\xi_k \rightarrow 0$, при которых получается M -множество, как упоминалось выше.

§ 23. Проблемы, связанные с классификацией множеств меры нуль

Мы хотим напомнить здесь разбросанные по различным главам результаты, касающиеся поведения множеств меры нуль, с тем, чтобы вывести некоторые общие заключения и поставить новые проблемы.

Как известно, в первое время после создания интеграла Лебега принято было думать, что множества меры нуль всегда можно пренебрегать. Но уж очень скоро стало ясным, что разные множества меры нуль ведут себя по-разному, и поэтому появилась потребность как-то классифицировать эти множества. Так возникли понятия размерности по Хаусдорфу, логарифмической емкости, α -емкости и т. п. Однако, нам хочется отметить, что в настоящее время стала ясной невозможность ввести какое бы то ни было разграничение, при котором одни множества меры нуль оказались бы «пренебрегаемыми» во всех вопросах, а другие, наоборот, такими, что с ними всегда надо считаться как со множествами меры больше нуля. Поясним эту мысль на примере: пусть мы решаем проблему единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Тогда канторово множество можно считать «пренебрегаемым», так как сходимость тригонометрического ряда к нулю вне его влечет равенство нулю всех его коэффициентов (т. е. оно ведет себя в этом вопросе, как пустое множество). Напротив, в вопросе об абсолютной сходимости оно ведет себя так, как множество положительной меры, т. е. если ряд сходится абсолютно на нем, то уже сходится абсолютно и на всем отрезке.

Сопоставляя результаты, полученные в главе XII по поводу R -множеств, в главе XIII по поводу N -множеств и в главе XIV по поводу U -множеств, мы можем прийти к таким выводам: счетные множества являются R -множествами (§ 7 главы XII), N -множествами (§ 6 главы XIII) и U -множествами (§ 5 главы XIV), т. е. ведут себя как пустые во всех трех проблемах, которые мы изучали в этих главах. Множества R и N всегда являются множествами первой категории (§ 6 главы XII и § 3 главы XIII), относительно U -множеств вопрос остается открытым.

Взаимоотношение множеств R , N и U далеко еще не изучено. Можно только сказать, что заведомо всякое R -множество есть U -множество, поскольку всякое R есть H_σ (см. § 6 главы XII), а всякое H_σ есть U -множество (§ 6 главы XIV); обратное заведомо не имеет места, так как канторовское множество есть U - (§ 7 главы XIV) и не есть R -множество (§ 9 главы XII). Тот же пример показывает, что, существуют U -множества, не являющиеся N -множествами (§ 5 главы XIII). Должно ли всякое N -множество быть U -множеством, также неизвестно; можно только сказать, что замкнутое N -множество не может быть M -множеством *в узком смысле*, так как в силу теоремы § 6 главы XIII для любой монотонной $F(x)$, постоянной на смежных к N -множеству интервалах, коэффициенты Фурье—Стилтьеса не могут стремиться к нулю. Однако, поскольку существуют M -множества, не являющиеся M -множествами в узком смысле (§ 18 главы XIV), мы видим, что даже для замкнутых N -множеств вопрос о том, должны ли они быть U -множествами, не решен.

В § 9 главы XIII было показано, что существуют N -множества, не являющиеся R -множествами; в обратную сторону вопрос не решен.

Напомним, что N - и U -множества инвариантны относительно операции подобия (§ 4 главы XIII и § 9 главы XIV) (для R -множеств этот вопрос не решен). Сумма двух R -множеств или двух N -множеств может не быть R -множеством или N -множеством (§ 11 главы XII и § 8 главы XIII), для U -множеств, если они замкнутые, вопрос решается положительно (§ 6 главы XIV), в остальных случаях он не решен. Добавление к N -множеству счетного множества не выводит за класс N -множеств (§ 8 главы XIII); для R -множеств и U -множеств этот вопрос не решен.

Изучение поведения замкнутых множеств обычно значительно проще, чем в общем случае, однако и здесь возникают очень большие трудности. Даже если рассматривать симметрические совершенные множества (§ 19 главы XIV), то лишь в случае, когда $\xi_k \rightarrow \frac{1}{2}$, заведомо получаются M -множества (§ 12 главы XIV), а в случае, когда $\xi_k \rightarrow 0$ очень быстро (например, $\xi_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$), получаются U -множества (§ 22 главы XIV), в остальных же случаях начинают играть роль арифметические законы. Эти арифметические законы, в частности, не дают возможности использовать понятие размерности по Хаусдорфу для классификации множеств в отношении любой из рассмотренных трех проблем: мы видели в § 9 главы XII, что множество может иметь размерность как угодно близкую к единице и быть R - и N -множеством, а при размерности, близкой к нулю, не быть ни R -, ни N -множеством.

Так же обстоит дело и с проблемой единственности: поскольку множество с постоянным отношением ξ имеет размерность $\frac{\ln 2}{|\ln \xi|}$, то можно сделать эту величину как угодно близкой к единице, взяв ξ достаточно близким к $\frac{1}{2}$, но при этом, если $\theta = \frac{1}{\xi}$ не есть число Пизо, мы получим M -множество (§ 20 главы XIV). И наоборот, если положить $\xi = \frac{1}{m}$, где m — целое, то множество будет U -множеством (так как $\theta = \frac{1}{\xi} = m$ — число Пизо), а между тем $\frac{\ln 2}{\ln m}$ может быть сделан как угодно малым, если m достаточно велико.

Все сказанное здесь имеет целью показать, что проблемы, которые мы изучали в трех последних главах, еще очень далеки от разрешения и требуют проникновения в тонкие вопросы теории чисел.

§ 24. О быстроте стремления к нулю коэффициентов нуль-ряда

Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (24.1)$$

сходится к нулю почти всюду. Возникает вопрос, при какой скорости стремления к нулю его коэффициентов отсюда уже следует

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (24.2)$$

Ясно, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то (24.2) сразу вытекает, так как ряд (24.1) оказывается рядом Фурье. Однако, если мы предположим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = +\infty, \quad (24.3)$$

то ряд (24.1) не должен быть рядом Фурье, и тогда заранее нельзя сказать, должно ли (24.2) иметь место, или ряд (24.1) может быть нуль-рядом.

Из критерия § 11 вытекает, что если мы найдем монотонную функцию $F(x)$, постоянную на смежных интервалах к некоторому совершенному множеству P меры нуль, и такую, что ее коэффициенты Фурье—Стилтьеса стремятся к нулю, то это P будет M -множеством и коэффициенты Фурье—Стилтьеса для $F(x)$ будут коэффициентами нуль-ряда. Поэтому вопрос о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты нуль-рядов, тесно связан с вопросом о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF \quad (24.4)$$

для монотонных сингулярных функций.

Этим вопросом занимался ряд авторов, например, Литтлвуд (Littlewood^[3]), Винер и Винтнер (Wiener and Wintner^[1]), Шеффер (Schaeffer^[1]), Салем (Salem^[6]) и, наконец, Ивашев-Мусатов^{[1], [2]}. Наиболее сильным результатом является результат Ивашева-Мусатова^[2]. Он показал, образно говоря, что если функция $\chi(y)$, заданная на полупрямой $y \geq 0$, стремится к нулю достаточно регулярно при $y \rightarrow \infty$, и если

$$\int_0^y \chi^2(\eta) d\eta \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (24.5)$$

то можно найти такую непрерывную на $[0, 2\pi]$ монотонно неубывающую $F(x)$, постоянную на смежных интервалах к некоторому совершенному множеству P меры нуль, что

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF = o(\chi(n)), \quad (24.6)$$

т. е. что, грубо говоря, при известной регулярности, c_n может как угодно быстро стремиться к нулю, лишь бы $\sum |c_n|^2 = +\infty$.

Можно сразу сказать, что если на $\chi(y)$ не наложить никаких ограничений, кроме (24.5), то выполнение (24.6) невозможно, так как, например, лакунарных нуль-рядов, как мы знаем, не существует (см. § 6). Однако все же возможно, что наложенные О. С. Ивашевым-Мусатовым на функцию $\chi(y)$ условия регулярности можно ослабить; эти условия таковы:

1) $y \chi^2(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ имеем $y^{1+\varepsilon} \chi^2(y) \rightarrow \infty$,

3) существует такое $m > \frac{1}{2}$, что $y^m \chi(y) \uparrow \infty$.

Как построение множества P , так и самое доказательство теоремы Ивашева-Мусатова очень сложны, поэтому мы их здесь не даем. Здесь же мы отметим лишь следующее: если не стремиться получить соотношение (24.6), а только заботиться о том, чтобы $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ расходился так медленно, как мы захотим, то можно не требовать никакой регулярности. Точнее, можно найти такую $F(x)$, постоянную на смежных к P интервалах, для которой $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$ и при этом

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = O(\Psi(N)), \quad (24.7)$$

где $\Psi(N) \uparrow \infty$ как угодно медленно. Это предложение мы сейчас и докажем. Но для удобства сравнения с результатами § 12 главы V мы будем писать коэффициенты Фурье—Стилтьеса не в комплексной, а в действительной форме. Итак, докажем теорему, на которую мы уже опирались в § 12 главы V.

Т е о р е м а. Пусть $\Psi(n) > 0$ и $\Psi(n) \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, но в остальном она произвольна. Существует совершенное множество P , $mP = 0$, и такая монотонная $F(x)$, постоянная на смежных к P интервалах, что для

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dF \quad \text{и} \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dF \quad (24.8)$$

имеем

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \beta_n \rightarrow 0 \quad (24.9)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2 = O(\Psi(n)). \quad (24.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$g(n) = \Psi(2^n). \quad (24.11)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\frac{g(n-1)}{g(n)} \rightarrow 1.$$

Действительно, если (24.10) выполнено для $\Psi^*(n)$, где $\Psi^*(n) \leq \Psi(n)$, то оно верно и для $\Psi(n)$, а $\Psi^*(n)$ можно подобрать так, чтобы

$$\frac{g^*(n-1)}{g^*(n)} \rightarrow 1,$$

где $g^*(n) = \Psi^*(2^n)$.

Теперь положим

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{g(n-1)}{g(n)}. \quad (24.12)$$

Тогда

$$0 < \varepsilon_n < 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Строим совершенное множество P так, как указано в § 12, но принимая за ε_n числа из (24.12). Тогда, сохраняя все обозначения этого параграфа, имеем

$$mR_m = 2\pi \prod_{k=1}^m (1 - \varepsilon_k) = 2\pi \prod_{k=1}^m \frac{g(k-1)}{g(k)} = \frac{2\pi}{g(m)}, \quad (24.13)$$

а потому $mR_m \rightarrow 0$ и $mP = 0$

Строим $F_m(x)$ так *):

$$\begin{aligned} F_m(0) &= 0, \quad F_m(2\pi) = 1, \\ F_m(x) &= \frac{l}{2^m} \quad \text{на } \delta_l \quad (l = 1, 2, \dots, 2^{m-1}), \end{aligned}$$

$F_m(x)$ интерполируется линейно на сегментах ϱ_i^m системы R_m ($i = 1, 2, \dots, 2^m$).

Ясно, что $F_{m+1}(x) = F_m(x)$ на S_m , $F'_m(x) = 0$ на S_m ,

$$|F_{m+1}(x) - F_m(x)| \leq \frac{\varepsilon_{m+1}}{2^m}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (24.14)$$

и

$$F'_m(x) = \frac{2}{mR_m} \quad \text{вне } S_m. \quad (24.15)$$

Если обозначить $\eta_m = \max_{k \geq m} \varepsilon_k$, то последовательность $F_m(x)$ сходится равномерно к непрерывной $F(x)$, причем

$$|F(x) - F_m(x)| \leq \frac{\eta_m}{2^{m-1}}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (24.16)$$

Ясно, что $F(x)$ монотонна, постоянна на каждом смежном к P интервале, но не константа на $[0, 2\pi]$.

Покажем, что для нее числа

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dF, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dF$$

удовлетворяют условию (24.10). С этой целью мы подсчитаем сначала модуль непрерывности $F(x)$. Имеем в силу (24.15)

$$|F_m(x+h) - F_m(x)| \leq |h| \frac{2}{mR_m}$$

и в силу (24.16)

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq |F(x+h) - F_m(x+h)| + |F_m(x+h) - F_m(x)| + \\ &+ |F_m(x) - F(x)| \leq \frac{\eta_m}{2^{m-1}} + |h| \frac{2}{mR_m} + \frac{\eta_m}{2^{m-1}}. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Выберем при заданном h число m так, чтобы

$$\frac{2^m}{\eta_{m-1} m R_{m-1}} \leq \frac{1}{|h|} < \frac{2^{m+1}}{\eta_m m R_m}. \quad (24.18)$$

Это при малых h всегда возможно и притом единственным образом, так как последовательность

$$\frac{2^{m+1}}{\eta_m m R_m}$$

монотонно возрастает и стремится к бесконечности.

В силу (24.13) и (24.18) находим из (24.17)

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq \frac{\eta_m}{2^{m-2}} + |h| \frac{2}{mR_m} \leq \\ &\leq 8 \frac{|h|}{mR_m} + |h| \frac{2}{mR_m} = O(|h| g(m)). \end{aligned} \quad (24.19)$$

*) В § 12 мы строили функции $F_m(x)$ несколько иначе, в результате чего они не были монотонны. Однако, для определяемых здесь $F_m(x)$ график на $[0, 2\pi]$ выглядит так же, как для прежних на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а потому дальнейшие формулы, например (24.14), (24.15), (24.16), получаются так же, как в § 12.

Но так как из (24.18)

$$2^m \leq \frac{1}{|h|} \eta_{m-1} m R_{m-1} < \frac{1}{|h|},$$

то

$$m < \log_2 \frac{1}{|h|},$$

а потому в силу $g(m) \uparrow \infty$ из (24.19) и (24.11)

$$|F(x+h) - F(x)| = O\left(|h| g\left(\log_2 \frac{1}{2|h|}\right)\right) = O\left(|h| \Psi\left(\frac{1}{|h|}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\omega(\delta, F) = O\left(\delta \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right)\right). \quad (24.20)$$

Это и есть оценка, которую мы хотели получить.

Построим функцию $f(x)$ так:

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) - \frac{x}{2\pi} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ f(x+2\pi) &= f(x) \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

Ясно, что $f(x)$ — периодическая, непрерывная на $-\infty < x < +\infty$ (ибо $f(2\pi) = F(2\pi) - 1 = 0 = f(0)$); кроме того, она с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$ в силу монотонности $F(x)$. Мы имеем для модуля непрерывности этой функции в силу (24.20)

$$\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta, F) + \omega\left(\delta, \frac{x}{2\pi}\right) = O\left(\delta \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) + O(\delta) = O\left(\delta \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right)\right). \quad (24.21)$$

Поэтому, полагая

$$\varphi_n(u) = \sum_{k=1}^n \left[f\left(u + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2,$$

найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \left| f\left(u + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| du \leq \\ &\leq 2\pi \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \operatorname{var}_{0 \leq x \leq 2\pi} f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right] = O\left[\frac{1}{n} \Psi(n)\right] \end{aligned} \quad (24.22)$$

в силу (24.21).

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля, обозначая через A_k и B_k коэффициенты Фурье для $f(x)$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = 8\pi n \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) \sin^2 \frac{k\pi}{2n}. \quad (24.23)$$

Поэтому из (24.20) и (24.23) находим

$$8\pi n \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = O\left[\frac{1}{n} \Psi(n)\right],$$

откуда и подавно

$$\sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2} \Psi(n)\right).$$

Так как $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin^2 k \frac{\pi}{2n} \geq \frac{k^2}{n^2} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

а потому

$$\sum_{k=1}^n k^2 (A_k^2 + B_k^2) = O(\Psi(n)). \quad (24.24)$$

Теперь заметим, что коэффициенты Фурье—Стилтьеса от $F(x)$ могут быть вычислены так:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dF = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, df, \quad (n \neq 0)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dF = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, df.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nx \, df &= f(x) \cos nx \Big|_0^{2\pi} + n \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \, df &= f(x) \sin nx \Big|_0^{2\pi} - n \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \end{aligned}$$

и так как $f(0) = f(2\pi) = 0$, то

$$\alpha_n = n B_n, \quad \beta_n = -n A_n,$$

откуда, принимая во внимание (24.24), находим

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2 = O(\Psi(n)),$$

что и надо было доказать.

То, что $\alpha_n \rightarrow 0$ и $\beta_n \rightarrow 0$, доказывается почти так же, как в § 12, и этим заканчивается доказательство теоремы.

§ 25. 0 единственности для различных методов суммирования

Проблему единственности можно несколько обобщить.

Условимся говорить, что множество E есть *множество единственности для метода суммирования T* и обозначать его через $U(T)$, если для всякого тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (25.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

суммируемого методом T к нулю всюду вне E , имеем $a_n = b_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Гипотеза о том, что $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$, существенна, так как, если от нее отказаться, то уже множество, состоящее из одной точки, перестает быть множеством единственности даже для простейших методов суммирования.

Например, ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ с ограниченными коэффициентами суммируем $(C, 1)$ к 0 для всех x , кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Так как при доказательстве теоремы Кантора о том, что пустое множество есть U -множество, пользуются фактически только тем, что если ряд сходится к нулю, он и суммируется к нулю методом Римана, то тем самым доказано, что пустое множество есть $U(R)$, где R — метод суммирования Римана. Аналогичные предложения могут быть доказаны для методов суммирования Чезаро и Пуассона *).

Естественно поставить вопрос, что можно сказать о множествах $U(T)$, где T — какой-либо метод суммирования с матрицей Теплица (см. Вводный материал, § 5).

Зигмунд и Марцинкевич (Marcinkiewicz and Zygmund [3]) доказали следующую теорему.

Теорема Существует некоторый метод Теплица, для которого пустое множество не является множеством единственности.

Другими словами, существует ряд (25.1), суммируемый к нулю всюду некоторым методом Теплица, и у которого не все коэффициенты равны нулю, но стремятся к нулю. Мы увидим, что этот метод в известном смысле очень похож на метод Римана.

Рассмотрим множество P с постоянным отношением $\xi < \frac{1}{4}$, но являющееся M -множеством (их существование доказано в § 20). Тогда существует ряд (25.1), сходящийся к 0 всюду вне P . Пусть $F(x)$ — его риманова функция, т. е.

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Функция $F(x)$ линейна на каждом смежном к P интервале. Следовательно, если $x, x+h, x-h$ принадлежат одному и тому же смежному к P интервалу, включая и его концы, то

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0. \quad (25.2)$$

Пусть x — любая точка из P . Обозначая через $\varrho_1^{(m)}, \varrho_2^{(m)}, \dots, \varrho_{2^m}^{(m)}$ сегменты, покрывающие P в m -м шаге процесса его построения (мы их нумеруем слева направо), мы можем сказать, что для этой точки существует единственная последовательность $\varrho_{i_m}^{(m)}$ такая, что

$$x = \prod_{m=0}^{\infty} \varrho_{i_m}^{(m)}. \quad (25.3)$$

Допустим сначала, что $x \neq 0$ и $x \neq 2\pi$. Тогда если только m достаточно велико, то $1 < i_m < 2^m$. Для всякого такого m сегмент $\varrho_{i_m}^{(m)}$ лежит между двумя смежными к P интервалами, пусть $I_1^{(m)}$ и $I_2^{(m)}$, где $I_1^{(m)}$ слева, а $I_2^{(m)}$ справа от $\varrho_{i_m}^{(m)}$. Длины этих интервалов вообще различны, но из самого процесса построения P и из условия $\xi < \frac{1}{4}$ сразу следует, что

$$a_m < \frac{1}{2} I_1^{(m)} \quad \text{и} \quad a_m < \frac{1}{2} I_2^{(m)},$$

где a_m — длина каждого $\varrho_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$).

*) Как показал И. И. Привалов [2], если ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируем методом Пуассона к нулю всюду вне замкнутого U -множества, то все его коэффициенты равны нулю. Таким образом, для замкнутых множеств $U(P)$ суть обычные U -множества (P — для метода Пуассона).

Отсюда следует, что точки $x + a_m$, $x + \frac{3}{2}a_m$, $x + 2a_m$ принадлежат $I_2^{(m)}$ или его левому концу, а точки $x - a_m$, $x - \frac{3}{2}a_m$, $x - 2a_m$ — к $I_1^{(m)}$ или его правому концу. Таким образом, в силу (25.2) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{F(x + a_m) + F(x + 2a_m) - 2F\left(x + \frac{3}{2}a_m\right)}{\left(\frac{1}{2}a_m\right)^2} = \\ = \frac{F(x - a_m) + F(x - 2a_m) - 2F\left(x - \frac{3}{2}a_m\right)}{\left(\frac{1}{2}a_m\right)^2} = 0. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Поэтому выражение

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{F(x + a_m) + F(x + 2a_m) - 2F\left(x + \frac{3}{2}a_m\right)}{\left(\frac{1}{2}a_m\right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{F(x - a_m) + F(x - 2a_m) - 2F\left(x - \frac{3}{2}a_m\right)}{\left(\frac{1}{2}a_m\right)^2} \right\} \end{aligned}$$

стремится к 0 в любой точке x , кроме, быть может, точек 0 и 2π . Однако нетрудно сообразить, что и в этих точках соотношение (25.4) имеет место, и таким образом $\sigma_m(x) \rightarrow 0$ всюду.

Положим $h_m = \frac{a_m}{4}$. Тогда соотношение $\sigma_m(x) \rightarrow 0$ принимает вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \left(\frac{\sin kh_m}{kh_m} \right)^2 \cos 6kh_m \right\} = 0. \quad (25.5)$$

Если обозначить частные суммы ряда (25.1) через $S_n(x)$, то, применяя преобразование Абеля, можно равенство (25.5) переписать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = 0, \quad (25.6)$$

где

$$a_{nk} \rightarrow \left(\frac{\sin kh_n}{kh_n} \right)^2 \cos 6kh_n - \left(\frac{\sin(k+1)h_n}{(k+1)h_n} \right)^2 \cos 6(k+1)h_n \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (25.7)$$

Но равенство (25.6) означает, что ряд (25.1) суммируется к 0 методом суммирования с матрицей $\|a_{nk}\|$, определяемой формулой (25.7), и нам осталось доказать, что эта матрица есть матрица Теплица.

С этой целью обнаружим, что выполнены все три условия Теплица, т. е.

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0,$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < C.$$

То, что условия 1) и 2) выполнены, проверяется мгновенно. Мы можем написать

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_{kh_n}^{(k+1)h_n} \left[\frac{d}{du} \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \cos 6u \right) \right] du \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{du} \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \cos 6u \right) \right| du,$$

а этот последний интеграл сходится, таким образом условие 3) также выполнено.

Интересно отметить, что так как суммируемость по Риману к некоторому числу S эквивалентна условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kh + b_k \sin kh) \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \right] = S,$$

то рассмотренный здесь метод суммирования, в котором вместо множителя $\left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2$, где $h \rightarrow 0$, стоит выражение $\left(\frac{\sin kh_n}{kh_n} \right)^2 \cos 6kh_n$, где $h_n \rightarrow 0$, действительно очень похож на метод Римана. Однако результаты в смысле множеств $U(R)$ и $U(T)$ для этого метода T , как мы видим, совершенно различны.

§ 26. Множества относительной единственности

Существует другое направление, в котором можно обобщать проблему единственности.

Пусть (S) — последовательность положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon_n \downarrow 0.$$

О п р е д е л е н и е. Множество E , лежащее на $[0, 2\pi]$, мы назовем *множеством единственности относительно последовательности* (S) или, кратко, $U(S)$, если всякий тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$|c_n| \leq \varepsilon_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (26.1)$$

и сходящийся к нулю всюду вне E , имеет все коэффициенты, равными нулю

Ясно, что всякое U -множество есть $U(S)$ для любой последовательности (S) , но легко видеть, что и обратно, если E есть $U(S)$ для любой последовательности (S) , то E есть просто U -множество.

Мы сейчас докажем, следуя Зигмунду (Zygmund^[21]), теорему.

Т е о р е м а. *Какова бы ни была последовательность (S) , можно найти соответствующее ей множество $U(S)$ меры сколь угодно близкой к 2π .*

Таким образом, если отказаться рассматривать любые тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, а вводить некоторые специальные ограничения, то как бы слабы ни были эти ограничения, мы все же приходим к такому парадоксальному на первый взгляд результату: множества единственности уже не должны иметь меру нуль.

Для доказательства этого предложения рассмотрим множество P_s точек x , удовлетворяющих условию

$$\eta_s \leq \left(s \frac{x}{2\pi} \right) \leq 1 - \eta_s, \quad (26.2)$$

где η_s — последовательность чисел $0 < \eta_s < \frac{1}{2}$, выбранных так, чтобы

$$\eta_s \rightarrow 0, \quad \text{но} \quad \frac{\varepsilon_s}{\eta_s} \rightarrow 0. \quad (26.3)$$

Ясно, что $mP_\varepsilon = 2\pi(1 - 2\eta_s)$, а потому, если выбрать целые числа $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ так, чтобы

$$4\pi(\eta_{n_1} + \eta_{n_2} + \dots + \eta_{n_k} + \dots) < \varepsilon,$$

то будем иметь, полагая

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} P_{n_k},$$

$$mCP \leq \sum mCP_{n_k} < 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{n_k} < \varepsilon,$$

значит,

$$mP > 2\pi - \varepsilon.$$

Мы докажем, что P есть U -множество относительно последовательности (S) , составленной из чисел ε_s .

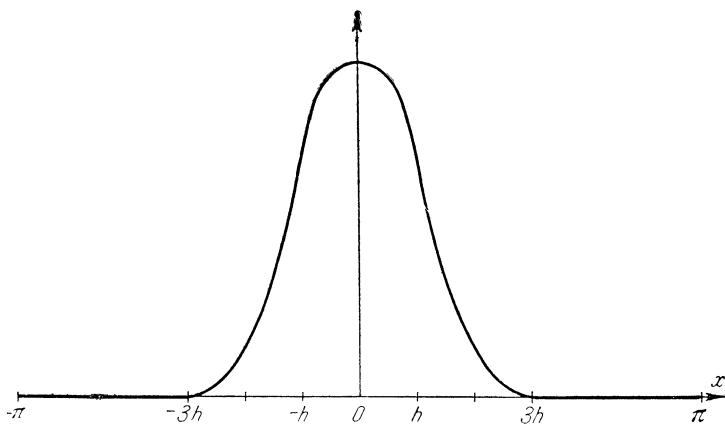


Рис. 50

С этой целью построим вспомогательную функцию (рис. 50) так:

$$\lambda(x, h) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2h^3} + \frac{3}{2h} & \text{на } 0 \leq x \leq h, \\ \frac{(x-3h)^2}{4h^3} & \text{на } h \leq x \leq 3h, \\ 0 & \text{на } 3h \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\lambda(-x, h) = \lambda(x, h), \quad \lambda(x + 2\pi) = \lambda(x).$$

Ее ряд Фурье имеет вид

$$\lambda(x, h) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nh}{n^3 h^3} \cos nx \right]$$

или в комплексной форме

$$\lambda(x, h) = \frac{2}{\pi} \left[1 + \sum'_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin^3 nh}{n^3 h^3} e^{inx} \right],$$

где знак \sum' означает, что $n = 0$ пропущено.

Пусть h_s выбрано так, что $3h_s = 2\pi\eta_s$. Легко сообразить, что тогда

$$\lambda_s(x) = \lambda(sx, h_s) = 0 \quad \text{на} \quad P_s. \quad (26.4)$$

Действительно, из

$$\eta_s \leq \left(s \frac{x}{2\pi}\right) \leq 1 - \eta_s$$

следует для некоторого целого N_s

$$2\pi\eta_s + 2\pi N_s \leq sx \leq 2\pi(1 - \eta_s) + 2\pi N_s,$$

т. е.

$$3h_s \leq sx - 2\pi N_s \leq 2\pi - 3h_s$$

и в силу периодичности $\lambda(x, h)$ отсюда следует нужное утверждение, так как $\lambda(x, h) = 0$ при $3h \leq x \leq 2\pi - 3h$.

Пусть теперь

$$\sum c_n e^{inx} \quad (26.5)$$

— тригонометрический ряд, удовлетворяющий условию (26.1).

Рассмотрим формальное произведение ряда (26.5) на ряд Фурье от $\frac{\pi}{2} \lambda_s(x)$. Имеем

$$\frac{\pi}{2} \lambda_s(x) = \frac{\pi}{2} \lambda(sx, h_s) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin^3 nh_s}{n^3 h_s^3} e^{insx}. \quad (26.6)$$

Пусть

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n^{(s)} e^{inx} \quad (26.7)$$

— это произведение. Легко видеть, что если $s = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$) и ряд (26.5) сходится к нулю вне P , то ряд (26.7) сходится к нулю всюду. В самом деле, ряд (26.6) сходится быстро, а у ряда (26.5) коэффициенты стремятся к нулю в силу (26.1). Значит, применимы теоремы Райхмана о формальном произведении. Но из сходимости (26.5) к нулю вне P следует его сходимость вне всякого P_{n_k} , поэтому вне P_{n_k} ряд (26.7) для $s = n_k$ сходится к нулю. С другой стороны на P_{n_k} заведомо $\lambda_{n_k}(x) = 0$ в силу (26.4), а потому ряд (26.7) сходится к нулю на P_{n_k} , значит и всюду. Но тогда

$$c_m^{(n_k)} = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Если мы теперь докажем, что

$$c_m^{(s)} \rightarrow c_m \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty$$

и при $m = 0, \pm 1, \dots$, то отсюда будет следовать, что все $c_m = 0$ ($m = 0, \pm 1, \dots$).

Имеем по формуле для коэффициентов формального произведения

$$c_m^{(s)} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_{m-p} \gamma_p^{(s)},$$

где $\gamma_p^{(s)}$ — коэффициенты ряда (26.6). Но эти коэффициенты равны нулю, если p не имеет вид $p = ns$, и равны $\frac{\sin^3 nh_s}{(nh_s)^3}$ в этом последнем случае, кроме того, $\gamma_0^{(s)} = 1$, поэтому

$$c_m^{(s)} = c_m + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{m-n} \frac{\sin^3 nh_s}{(nh_s)^3}. \quad (26.8)$$

Чтобы убедиться, что $c_m^{(s)} \rightarrow c_m$ при $s \rightarrow \infty$, надо, следовательно, доказать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m-ns} \frac{\sin^3 nh_s}{(nh_s)^3} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty \quad (m = 0, \pm 1, \dots).$$

Это будет доказано, если докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{m-ns}| \left| \frac{\sin nh_s}{nh_s} \right|^3 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m+ns}| \left| \frac{\sin nh_s}{nh_s} \right|^3 \rightarrow 0.$$

Если $n = 1$, то из $|c_{m-s}| \rightarrow 0$ и $|c_{m+s}| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ видим, что суммирование можно начинать с $n = 2$. Но в этом случае, приняв $s > |m|$, имеем $(n-1)s > |m|$ для $n = 2, 3, \dots$, а потому в силу неравенства (26.1) и монотонности чисел ε_n имеем

$$|c_{m-ns}| \leq \varepsilon_s \quad \text{и} \quad |c_{m+ns}| \leq \varepsilon_s, \quad n = 2, 3, \dots; \quad s = |m|.$$

Значит, достаточно доказать, что

$$\varepsilon_s \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin^3 nh_s}{n^3 h_s^3} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Но это действительно имеет место, так как $h_s = \frac{2\pi}{3} \eta_s$, а $\frac{\varepsilon_s}{\eta_s} \rightarrow 0$ в силу (26.3); поэтому

$$\varepsilon_s \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin nh_s}{nh_s} \right|^3 = \frac{\varepsilon_s}{h_s} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin nh_s|^3}{n^3 h_s^3} = \frac{3}{2\pi} \frac{\varepsilon_s}{\eta_s} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin nh_s|^3}{n^3 h_s^3},$$

а

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin nh_s|^3}{n^3 h_s^3} < h_s \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sin nh_s}{nh_s} \right)^2 < C,$$

что легко доказать непосредственно (подобно рассуждению в § 66 главы I). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. С этой теоремой интересно сопоставить ранее отмеченный факт, касающийся единственности для лакунарных рядов.

Допустим, что лакунарный ряд сходится к нулю вне некоторого множества \mathcal{E} , $m\mathcal{E} < 2\pi$. Следовательно, он сходится к нулю на множестве меры больше нуля, а тогда все его коэффициенты равны нулю по теореме § 11 главы XI.

Отсюда вытекает, что если в качестве последовательности (s) взять последовательность чисел ε_m , где

$$\varepsilon_m = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n_k,$$

$$\varepsilon_{n_k} \neq 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{n_k} = 0,$$

где n_k — лакунарная последовательность, то всякое множество E меры $< 2\pi$ есть $U(s)$ для этой последовательности.

Правда, Зигмунд в своем определении множеств типа $U(s)$ предполагал все $\varepsilon_n > 0$ и последовательность ε_n монотонно убывающей, но ничто не мешает нам рассмотреть определение, в котором такое требование отсутствует. Кстати, теорема Зигмунда сохраняет силу и при этом более общем определении. Только при доказательстве надо сначала взять

$$\varrho_k = \max_{n \geq k} \varepsilon_n,$$

затем выбрать последовательность η_k так, чтобы $\eta_k \rightarrow 0$ и $\frac{\varrho_k}{\eta_k} \rightarrow 0$, и дальше проводить все по-прежнему, но заменив ε_k через ϱ_k .

З а м е ч а н и е 2. Зигмунд доказал также, правда наложив на последовательность (s) некоторые ограничения, что можно построить множества $U(s)$ меры 2π .

§ 27. Множества относительной единственности для различных методов суммирования

Введенное Зигмундом определение множеств относительной единственности (см. § 26) можно расширить. Во-первых, вместо рассмотрения рядов, у которых коэффициенты удовлетворяют условию

$$|a_n| \leq \varepsilon_n, \quad |b_n| \leq \varepsilon_n,$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — заданная последовательность, можно рассматривать вообще некоторый класс T тригонометрических рядов и говорить, что множество E есть $U(T)$ -множество, если каждый раз, как ряд входит в класс T и сходится к нулю всюду, вне E , то его коэффициенты все равны нулю. Во-вторых, сходимость можно заменить суммируемостью тем или иным методом. Укажем один результат, где оба эти расширения введены одновременно. Он принадлежит Броману (Browman^[1]). Именно, при заданном α ($0 < \alpha < 1$) рассматривается класс T_α тригонометрических рядов, для которых удовлетворено условие

$$\sum \frac{a_n^2 + b_n^2}{n^\alpha} < +\infty. \quad (27.1)$$

Множество E называется *множеством $U(T_\alpha)$ относительно метода Абеля*, если каждый раз, как тригонометрический ряд принадлежит классу T_α и суммируется к нулю методом Абеля всюду вне E , то все его коэффициенты равны нулю *). Броман доказывает теорему:

Для того чтобы замкнутое множество E было множеством $U(T_\alpha)$ относительно метода Абеля, необходимо и достаточно, чтобы его $(1 - \alpha)$ -емкость была равна нулю.

О понятии α -емкости см. § 12 главы V.

Там же было доказано, что $(1 - \alpha)$ -емкость множества равна нулю тогда и только тогда, когда его выпуклая емкость относительно последовательности $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ равна нулю.

Это сразу наводит на мысль рассматривать вместо условия (27.1) более общее условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \lambda_n < +\infty,$$

где $\{\lambda_n\}$ — некоторая выпуклая последовательность, и изучать U -множества в этом классе рядов.

И действительно, как показала Темко **), при известных ограничениях, налагаемых на $\{\lambda_n\}$, U -множествами относительно метода Абеля в этом классе будут те и только те множества, для которых выпуклая емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равна нулю.

*) При этом определении не требуется, чтобы коэффициенты ряда стремились к нулю.

**) Работа сдана в печать в Математический сборник.

ГЛАВА XV

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ

§ 1. Введение

В 1915 году в своей диссертации Н. Н. Лузин ввел такое определение: *функция $f(x)$ изображима тригонометрическим рядом*, если существует такой тригонометрический ряд, который либо сходится к ней почти всюду, либо суммируется к ней почти всюду одним из трех методов: Фейера, Римана или Пуассона.

Введя это определение, Н. Н. Лузин доказал (см. [М.9], [М.10], § 79), что если $f(x)$ — любая функция, измеримая и конечная почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то она изображима тригонометрическим рядом, суммируемым к ней почти всюду методами Римана и Пуассона.

И. И. Привалов^[3] доказал, что в тех же условиях можно найти тригонометрический ряд, суммируемый к $f(x)$ почти всюду методом Фейера.

Вопрос о том, можно ли заменить суммируемость сходимостью, оставался очень долго нерешенным. Но в 1940 году Д. Е. Меньшов^[3] разрешил его в положительном смысле опять для любой измеримой функции, конечной почти всюду. Этот результат Д. Е. Меньшова будет изложен в § 2.

Возникает вопрос, необходимо ли для изображимости функции тригонометрическим рядом предполагать, что она почти всюду конечна? Что можно сказать об изображимости $f(x)$ для случая, когда $f(x) = +\infty$ или $f(x) = -\infty$ на множестве меры больше нуля? Этому вопросу мы посвящаем § 3. Здесь выясняется, что ответ различен в зависимости от того, как понимать слово «изобразимость», т. е. в зависимости от тех методов, которыми мы суммируем ряд. Если же речь идет не о суммируемости, а об обычной сходимости, то проблема не решена до сих пор. Чтобы подойти к ее решению, представляется целесообразным изучить для любого тригонометрического ряда поведение его пределов неопределенности (т. е. верхнего и нижнего предела его частных сумм). Этому посвящен § 4. Из доказанных там теорем, в частности, вытекает, что если говорить не о произвольном тригонометрическом ряде, а о ряде Фурье, то для него случай $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\infty$ не может наблюдаться на множестве E , $mE > 0$.

§ 5 посвящен вопросу о том, каково множество тех функций, которые могут быть пределами некоторой подпоследовательности $S_{n_k}(x)$ частных сумм тригонометрического ряда. Здесь формулируется одна весьма общая теорема Д. Е. Меньшова. В качестве одного из частных случаев этой теоремы получается существование универсальных рядов, т. е. таких тригонометрических рядов, что для любой измеримой функции $f(x)$ найдется подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ частных сумм ряда, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду. § 6 посвящен таким рядам.

Наконец, в § 7, расширяя понятие «изобразимости» функции тригонометрическим рядом, мы говорим о результатах, которые можно получить, если вместо обычной сходимости (или суммируемости тем или иным методом) рассматривать сходимость по мере.

§ 2. Изображение функции, конечной почти всюду

Мы уже говорили в § 1, что Н. Н. Лузин доказал для любой $f(x)$, измеримой и конечной почти всюду, существование такого тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

который суммируется к ней почти всюду методом Римана или Пуассона. Мы отметили далее, что Д. Е. Меньшов усилил этот результат, заменив суммируемость обычной сходимостью. Мы будем здесь доказывать эту теорему Д. Е. Меньшова с некоторым добавлением. Прежде чем сформулировать нужную теорему, условимся в терминологии.

Следуя Н. Н. Лузину, мы будем называть *примитивной* для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, всякую непрерывную функцию $F(x)$, для которой

$$F'(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } [a, b].$$

Н. Н. Лузин^[2] доказал, что для существования примитивной у функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была измерима и конечна почти всюду. Этот свой результат он использовал при решении вопроса об изобразимости функции тригонометрическим рядом. Именно, предполагая $f(x)$ измеримой и конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, он построил для нее примитивную $F(x)$ и доказал, что если продифференцировать ряд Фурье от $F(x)$, то получится тригонометрический ряд, суммируемый к $f(x)$ методами Римана и Пуассона почти всюду на $[-\pi, \pi]$ (см. [М.9], [М.10], § 79).

Д. Е. Меньшов доказал для любой $f(x)$, измеримой и конечной почти всюду, существование почти всюду сходящегося к ней тригонометрического ряда. Однако он при этом не ставил вопроса о том, можно ли получить такой ряд, отправляясь от одной из примитивных для $F(x)$. Оказывается, что это делать возможно, именно мы докажем такую теорему (см. Н. К. Бари^[6]):

Т е о р е м а. Для любой функции $f(x)$, измеримой и конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует такая непрерывная на этом отрезке $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, и результат почленного дифференцирования ряда Фурье от $F(x)$ есть тригонометрический ряд, сходящийся к $f(x)$ почти всюду.

Заметим, что даже если бы $f(x)$ была суммируемой, существование такой $F(x)$ не является очевидным. В самом деле, если взять в качестве $F(x)$ неопределенный интеграл Лебега от $f(x)$, то результат почленного дифференцирования ряда Фурье от $F(x)$ совпадает с рядом Фурье от $f(x)$, а этот последний может расходиться почти всюду, и даже всюду (см. глава V, §§ 17 и 20).

С другой стороны, если тригонометрический ряд сходится почти всюду к $f(x)$, то после его почленного интегрирования получается ряд, который хотя и сходится почти всюду, но его сумма $F(x)$ может оказаться неограниченной во всяком интервале, как бы мал он ни был (см. глава VIII, § 13); таким образом, $F(x)$ даже не обязана быть непрерывной, и тем более примитивной для $f(x)$.

После этих предварительных замечаний переходим к доказательству теоремы.

Прежде всего нам понадобится несколько лемм.

Л е м м а 1. *Какова бы ни была абсолютно непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция*) $\Phi(x)$, для любого интервала (a, b) , лежащего на этом отрезке, и для любого $\sigma > 0$ существует такая непрерывная и с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$ функция $\chi(x)$, что*

а) $\chi(x)$ постоянна на всех смежных интервалах к некоторому совершенному множеству P меры нуль, лежащему на $[a, b]$, и совпадает с $\Phi(x)$ вне (a, b) ;

б) полное изменение $\chi(x)$ на $[a, b]$ не больше полного изменения $\Phi(x)$ на том же отрезке;

в) если $F(x) = \Phi(x) - \chi(x)$, то $|F(x)| \leq \sigma$ на $[-\pi, \pi]$ и $F(x)$ равна нулю вне (a, b) ;

г) коэффициенты Фурье для $F(x)$ имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Эта лемма является усилением леммы Н. Н. Лузина (см. [М.9], стр. 34 или [М.10], стр. 78) и по сути дела ею уже пользовался Д. Е. Меньшов (см. [8], лемма 1), хотя она и не сформулирована у него в таком виде.

Чтобы доказать эту лемму, мы прежде всего покажем, что если $\Phi(x)$ абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то можно построить такую непрерывную монотонную $\chi(x)$, совпадающую с $\Phi(x)$ в точках α и β и постоянную на всех смежных интервалах к некоторому множеству меры нуль, лежащему на $[\alpha, \beta]$, что

$$n \int_{\alpha}^{\beta} [\Phi(t) - \chi(t)] e^{int} dt = o(1) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Действительно, как известно (см. глава XIV, § 18), существуют такие непрерывные монотонные $g(x)$, $g(0) = 0$, $g(2\pi) = 1$, постоянные на всех смежных интервалах к некоторому совершенному множеству меры нуль на $[0, 2\pi]$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} dg = 0$$

(здесь n может и не быть целым; см. главу XIV, § 18). Покажем, что функция $\chi(t)$, определяемая условием

$$\chi(t) = \Phi(\alpha) + g\left(\frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} 2\pi\right) [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)],$$

удовлетворяет нашим требованиям. Действительно, она непрерывна, монотонна, совпадает с $\Phi(t)$ при $t = \alpha$ и $t = \beta$, постоянна на смежных интервалах к некоторому совершенному множеству меры нуль на $[\alpha, \beta]$ и для нее, как легко видеть, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-int} d\chi = 0, \quad (2.2)$$

так как аналогичное равенство, но на отрезке $[0, 2\pi]$, имело место для $g(x)$. Но, интегрируя по частям, мы находим

$$n \int_{\alpha}^{\beta} [\Phi(t) - \chi(t)] e^{-int} dt = -i \int_{\alpha}^{\beta} e^{-int} d\Phi + i \int_{\alpha}^{\beta} e^{-int} d\chi, \quad (2.3)$$

*) Мы здесь не предполагаем $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$, так что после периодического продолжения $\Phi(x)$ с периодом 2π она может оказаться разрывной в точках $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

так как обинтегрированный член равен нулю в силу совпадения $\Phi(t)$ и $\chi(t)$ в концах $[a, \beta]$. Первый из интегралов правой части (2.3) стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности $\Phi(t)$, а второй в силу (2.2), откуда и вытекает справедливость формулы (2.1).

Закончив это вспомогательное построение, разобьем теперь отрезок $[a, b]$, заданный в формулировке леммы 1, на конечное число, пусть N , отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ и $x_0 = a$, $x_N = b$ так, чтобы колебание $\Phi(t)$ на каждом из них было меньше σ . Построим на каждом из них $\chi_k(t)$, как только что было указано, в виде монотонной кривой, совпадающей с $\Phi(x)$ в x_k и x_{k+1} и постоянной на смежных интервалах к некоторому совершенному множеству P_k , лежащему на $[x_k, x_{k+1}]$. Положим $\chi(t) = \Phi(t)$ вне (a, b) и $\chi(t) = \chi_k(t)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, N-1$). Тогда ясно, что функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям а) и б) леммы и функция $F(t)$ удовлетворяет условию в); что касается условия г), то оно есть немедленное следствие формулы

$$n \int_{-\pi}^{\pi} [\Phi(t) - \chi(t)] e^{-int} dt = \sum_{k=0}^{N-1} n \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\Phi(t) - \chi(t)] e^{-int} dt,$$

где каждое из слагаемых правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу (2.1), а число слагаемых не зависит от n , а лишь от σ .

Таким образом, лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству небольшой вспомогательной леммы 2.

Л е м м а 2. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, лежащий на $[-\pi, \pi]$, и $F(x)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$ и равная нулю вне $[a, b]$. Если $S_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье для $F(x)$, а V — ее полное изменение на $[a, b]$, то

$$|S'_n(x)| \leq \frac{V}{2\varrho} \quad (2.4)$$

для любой точки $x \in [0, 2\pi]$, расстояние которой от $[a, b]$ не меньше числа ϱ . Действительно, имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) D_n(t-x) dt, \quad (2.5)$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле. Поэтому

$$S'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{d}{dt} D_n(t-x) dt = -\frac{1}{\pi} \int_a^b F(t) \frac{d}{dt} D_n(t-x) dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $v_n(t)$ — непрерывная ломаная линия, совпадающая с $F(t)$ в точках a и b и такая, что

$$|F(t) - v_n(t)| < \frac{\varepsilon}{n^2} \quad (a \leq t \leq b). \quad (2.6)$$

Имеем на основании (2.5)

$$\begin{aligned} S'_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_a^b [F(t) - v_n(t)] \frac{d}{dt} D_n(t-x) dt - \frac{1}{\pi} \int_a^b v_n(t) \frac{d}{dt} D_n(t-x) dt = \\ &= I'_n(x) + I''_n(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Но

$$\left| \frac{d}{dt} D_n(t-x) \right| \leq n^2$$

при любых t и x , поэтому из (2.6) следует

$$|I'_n(x)| < 2\varepsilon, \quad (2.8)$$

так как $b - a \leq 2\pi$.

В интеграле $I'_n(x)$ производим интегрирование по частям. Так как $v_n(t)$ совпадает с $F(t)$ в точках a и b , то обынтегрированный член равен нулю, поэтому

$$|I''_n(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b v'_n(t) D_n(t-x) dt \right|. \quad (2.9)$$

Но в силу условий леммы 2 для $t \in [a, b]$ мы должны иметь

$$|t - x| \geq \varrho,$$

а так как для $\varrho \leq |u| \leq \pi$ имеем

$$|D_n(u)| \leq \frac{\pi}{2\varrho},$$

то из (2.9) выводим

$$|I''_n(x)| \leq \frac{1}{2\varrho} \int_a^b |v'_n(t)| dt.$$

Но $v_n(t)$ абсолютно непрерывна, поэтому $\int_a^b |v'_n(t)| dt$ равен ее полному изменению на $[a, b]$, а это последнее не может превзойти полное изменение $F(x)$ на том же отрезке в силу построения ломаной $v_n(t)$. Отсюда

$$|I''_n(x)| \leq \frac{V}{2\varrho}. \quad (2.10)$$

Из (2.7), (2.8) и (2.10) находим

$$|S'_n(x)| \leq 2\varepsilon + \frac{V}{2\varrho},$$

но так как ε могло быть взято как угодно малым, то неравенство (2.4) имеет место, и, значит, лемма 2 доказана.

Соединяя леммы 1 и 2, мы имеем возможность доказать теперь лемму 3 (она является некоторым видоизменением леммы 4, упомянутой работы Д. Е. Меньшова).

Л е м м а 3. Пусть $\varphi(x)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$ и равна нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$, лежащего на $[-\pi, \pi]$. Тогда для любого $\sigma > 0$ можно найти такую $F(x)$, непрерывную и с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$, что

- а) $F(x)$ есть примитивная для $\varphi(x)$ на $[-\pi, \pi]$,
- б) $|F(x)| \leq \sigma$ на $[-\pi, \pi]$ и $F(x) = 0$ вне $[a, b]$,
- в) результат почленного дифференцирования ряда Фурье от $F(x)$ есть тригонометрический ряд, равносходящийся*) с рядом Фурье от $\varphi(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$,
- г) если $S_n(x)$ есть частная сумма ряда Фурье от $F(x)$, а точка x отстоит от $[a, b]$ на расстоянии, не меньшем ϱ , то

$$|S'_n(x)| \leq \frac{1}{\varrho} \int_a^b |\varphi(x)| dx. \quad (2.11)$$

*) Напомним, что два тригонометрических ряда называются равносходящимися в некоторой точке, если их разность в этой точке сходится к нулю.

Доказательство. Положим

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^x \varphi(t) dt.$$

Тогда $\Phi(x)$ абсолютно непрерывна. Строим функцию $\chi(x)$, удовлетворяющую условию леммы 1 для заданных в лемме 3 отрезка $[a, b]$ и числа σ : затем положим, как в лемме 1,

$$F(x) = \Phi(x) - \chi(x). \quad (2.12)$$

Условие а) удовлетворено потому, что $\chi(x)$ постоянна на каждом смежном интервале к некоторому множеству P меры нуль на $[a, b]$; значит, $\chi'(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, а потому $F'(x) = \Phi'(x) = \varphi(x)$ почти всюду на $[a, b]$. С другой стороны, вне $[a, b]$ функция $\chi(x)$ по построению совпадает с $\Phi(x)$, значит, $F(x) = 0$ вне (a, b) , но и $\varphi(x) = 0$ вне (a, b) по условию; следовательно, $F'(x) = \varphi(x)$ даже всюду вне (a, b) .

Условие б) удовлетворено в силу условия в) леммы 1.

Для доказательства того, что в) имеет место, заметим следующее: в силу условия г) леммы 1 коэффициенты Фурье для $F(x)$ имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $\sigma(F)$ есть ее ряд Фурье и $\sigma'(F)$ ряд, получаемый из него почленным дифференцированием, то у $\sigma'(F)$ коэффициенты стремятся к нулю. Этим же свойством обладают и ряд Фурье $\sigma(\varphi)$, а значит, и их разность $T = \sigma(\varphi) - \sigma'(F)$. Нам надо доказать, что T сходится к нулю почти всюду, тогда условие в) будет удовлетворено.

Если мы обозначим через $\Psi(x)$ функцию Римана для ряда T , то ясно, что $\Psi(x)$ есть неопределенный интеграл от $\Phi(x) - F(x)$ (или отличается от него на линейную функцию), а так как $\chi(x)$ постоянна на всех смежных интервалах δ_n ко множеству P , то $\Psi(x)$ линейна на каждом таком δ_n и потому ее шварцева производная равна нулю на всех δ_n . Значит, T суммируется к нулю методом Римана на каждом δ_n и, следовательно, сходится к нулю на каждом δ_n (см. глава I, § 71), т. е. он сходится к нулю почти всюду на $[a, b]$, поскольку $mP = 0$. Кроме того, вне $[a, b]$ мы имеем $\varphi(x) = 0$, значит, $\Phi(x)$ постоянна, и $F(x) = 0$ в силу условия б) нашей леммы, следовательно, рассуждая так же, убеждаемся, что T сходится к нулю вне (a, b) . Итак, условие в) выполнено.

Наконец, для доказательства г) заметим, что так как $\chi(x)$ удовлетворяет условию б) леммы 1, то ее полное изменение на $[a, b]$, пусть $V(\chi)$, не превосходит полного изменения $V(\Phi)$ функции $\Phi(x)$ на том же отрезке, а потому в силу (2.12) имеем

$$V(F) \leq V(\Phi) + V(\chi) \leq 2V(\Phi) \leq 2 \int_a^b |\varphi(t)| dt \quad (2.13)$$

(последнее неравенство следует из того, что $\Phi(x)$ абсолютно непрерывна). Наконец, применяя лемму 2 и пользуясь неравенством (2.13), сразу видим, что условие г) также выполнено. Итак, лемма 3 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, напомним еще один замечательный результат Д. Е. Меньшова (см. глава VI, § 5).

Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует последовательность совершенных, нигде не плотных множеств P_μ ($\mu = 1, 2, \dots$) таких, что

$$\left. \begin{aligned} 1) & \text{ множества } P_\mu \text{ не имеют попарно общих точек,} \\ 2) & \text{ если } Q = P_1 + P_2 + \dots + P_\mu + \dots, \text{ то } mQ = 2\pi, \\ 3) & f(x) = f_\mu(x) \text{ на } P_\mu (\mu = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

где все $f_\mu(x)$ — непрерывные функции с равномерно сходящимися рядами Фурье на $[0, 2\pi]$.

Переходим к доказательству основной теоремы.

Пусть $f(x)$ — любая функция, измеримая и конечная почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Строим множества P_μ и функции $f_\mu(x)$ из упомянутой теоремы Д. Е. Меньшова. Покроем каждое P_μ системами $H_\mu^{(m)}$, состоящими из конечного числа неперекрывающихся отрезков; мы будем их выбирать так, чтобы при любых μ и m каждая точка P_μ лежала строго внутри одного из отрезков составляющих $H_\mu^{(m)}$, чтобы

$$H_\mu^{(m)} \subset H_\mu^{(m-1)} \quad (m = 2, 3, \dots)$$

и, кроме того, чтобы для $1 \leq \mu \leq m$ и $1 < \mu' \leq m$, но $\mu \neq \mu'$, множества $H_\mu^{(m)}$ и $H_{\mu'}^{(m)}$ не имели общих точек. Это всегда возможно, так как множества P_μ совершенные и попарно без общих точек.

Положим

$$g_m(x) = \begin{cases} f_\mu(x) & \text{на } H_\mu^{(m)}, \\ 0 & \text{вне } \sum_{\mu=1}^m H_\mu^{(m)} \end{cases} \quad (1 \leq \mu \leq m). \quad (2.15)$$

Тогда

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) \quad (2.16)$$

на множестве Q , определенном равенством (2.14), т. е. почти всюду. Действительно, если $x \in Q$, то найдется такое μ , что $x \in P_\mu$, значит, $x \in H_\mu^{(m)}$ для $m = 1, 2, \dots$ и потому при $m \geq \mu$ будем иметь $g_m(x) = f_\mu(x)$. Но на P_μ имеем $f_\mu(x) = f(x)$, значит, $g_m(x) = f(x)$ при $m \geq \mu$. Итак, (2.16) доказано.

Полагая

$$\begin{cases} \Psi_1(x) = g_1(x), \\ \Psi_m(x) = g_m(x) - g_{m-1}(x) \quad \text{для } m \geq 2, \end{cases} \quad (2.17)$$

видим, на основании (2.16), что

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(x) \quad \text{на } Q. \quad (2.18)$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{E}_m = H_m^{(m)} + \sum_{\mu=1}^{m-1} (H_\mu^{(m-1)} - H_\mu^{(m)}) \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Оно состоит из конечного числа отрезков или полуотрезков, которые мы можем предполагать неперекрывающимися. Так как $g_m(x) = 0$ вне $\sum_{\mu=1}^m H_\mu^{(m)}$, а $g_{m-1}(x) = 0$ вне $\sum_{\mu=1}^{m-1} H_\mu^{(m-1)}$ в силу (2.15), и также в силу (2.15) из $H_\mu^{(m)} \subset H_\mu^{(m-1)}$ следует, что $g_m(x) = g_{m-1}(x)$ на $H_\mu^{(m)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m-1$), то

$$\Psi_m(x) = 0 \quad \text{вне } \mathcal{E}_m. \quad (2.19)$$

Пусть

$$Q_m = P_1 + P_2 + \dots + P_m. \quad (2.20)$$

Тогда Q_{m-1} содержится в $\sum_{\mu=1}^{m-1} H_\mu^{(m)}$, а потому не имеет общих точек с \mathcal{E}_m .

Мало того, поскольку мы выбирали $H_\mu^{(m)}$ так, чтобы любая точка из P_μ лежала строго внутри одного из отрезков, составляющих $H_\mu^{(m)}$ (при μ и m любых),

то Q_{m-1} не имеет и общих точек с замкнутым множеством $\bar{\mathcal{E}}_m$, которое получится из \mathcal{E}_m присоединением к составляющим его интервалам всех их концов. Значит, расстояние от $\bar{\mathcal{E}}_m$ до Q_{m-1} , а стало быть, и от \mathcal{E}_m до Q_{m-1} есть положительное число; обозначим его через ϱ_m :

$$\varrho_m = \varrho(Q_{m-1}, \mathcal{E}_m) > 0. \quad (2.21)$$

Однако в силу того, что мера Q_{m-1} стремится к 2π при $m \rightarrow \infty$ ясно, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_m = 0. \quad (2.22)$$

Обозначим еще через \mathcal{E}_1 множество $H_1^{(1)}$, оно также состоит из конечного числа отрезков, как и $\bar{\mathcal{E}}_m$ ($m \geq 2$). Для дальнейшего отрезки, составляющие множества $\bar{\mathcal{E}}_m$ для $m \geq 2$, нам понадобится раздроблять на еще более мелкие отрезки. Именно, заметим сначала, что все функции $g_m(t)$, определяемые формулой (2.15), ограничены, так как каждая из $f_\mu(x)$ непрерывна. Поэтому в силу (2.18) и все $\Psi_m(t)$ ограничены. Следовательно, существуют такие константы γ_m , что

$$|\Psi_m(t)| \leq \gamma_m, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Мы можем эти γ_m предполагать отличными от нуля.

Пусть

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{v_1}$$

— отрезки, составляющие $\bar{\mathcal{E}}_1$ и перенумерованные в любом порядке. Далее, $\bar{\mathcal{E}}_2$ разобьем на неперекрывающиеся отрезки Δ_s с общими концами, которые нумеруем, начиная с $v_1 + 1$ до некоторого v_2 , и требуем, чтобы

$$\Delta_s < \frac{\varrho_2}{2\gamma_2}, \quad v_1 \leq s \leq v_2$$

и т. д. Вообще $\bar{\mathcal{E}}_m$ разобьем на неперекрывающиеся интервалы Δ_s , такие, что

$$\Delta_s < \frac{\varrho_m}{m\gamma_m}, \quad v_{m-1} < s \leq v_m. \quad (2.24)$$

Мы видели, что $\varrho(Q_{m-1}, \mathcal{E}_m) = \varrho_m > 0$ (см. (2.21)), поэтому из построения интервалов Δ_s следует

$$|t - x| \geq \varrho_m, \quad \text{если } x \in Q_{m-1} \text{ и } t \in \Delta_s \text{ при } v_{m-1} < s \leq v_m. \quad (2.25)$$

Положим

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \Psi_m(x) & \text{на } \Delta_s \\ 0 & \text{вне } \Delta_s \end{cases}, \quad \text{если } v_{m-1} < s \leq v_m. \quad (2.26)$$

Имеем в силу (2.23) и (2.24)

$$\left| \int_{\Delta_s} \varphi_s(x) dx \right| \leq \gamma_m \Delta_s < \frac{\varrho_m}{m}. \quad (2.27)$$

При $v_{m-1} < s \leq v_m$ и $v_{m-1} < s' \leq v_m$, если $s \neq s'$, то $\varphi_s(x)$ и $\varphi_{s'}(x)$ никогда не являются одновременно отличными от нуля. Поэтому из (2.26) следует,

что $\Psi_m(x) = \sum_{s=v_{m-1}+1}^{v_m} \varphi_s(x)$, значит,

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x) \quad \text{на } Q \quad (2.28)$$

в силу формулы (2.19).

Заметим, что в силу построения функций $f_m(x)$, для каждой из них ряд Фурье сходился равномерно. На основании (2.15), так как отрезок $[-\pi, \pi]$ распадается на конечное число отрезков, на каждом из которых $g_m(x)$ либо совпадает с $f_\mu(x)$ при некотором μ , либо равна нулю, то в силу принципа локализации ее ряд Фурье должен сходиться всюду, кроме конечного числа точек. Из определения $\Psi_m(x)$ (см. (2.18)) и $\varphi_s(x)$ (см. (2.26)) тогда ясно, что и для каждой $\varphi_s(x)$ ряд Фурье сходится всюду, кроме конечного числа точек.

Пусть теперь

$$h_1 > h_2 > \dots > h_s > \dots, \lim_{s \rightarrow \infty} h_s = 0,$$

— последовательность положительных чисел, и

$$n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$$

— последовательность целых чисел, мы их обе потом определим рекуррентно. Положим

$$\sigma_s = \min \left(\frac{1}{2^s n_s^2}, \frac{h_s}{2^s} \right). \quad (2.29)$$

Покажем, что для каждого $s = 1, 2, \dots$ существует функция $F_s(x)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $F_s(x)$ непрерывна и с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$,
- 2) $|F_s(x)| \leq \sigma_s$ $[-\pi \leq x \leq \pi]$,
- 3) $F_s(x) = 0$ вне Δ_s ,
- 4) $F'_s(x) = \varphi_s(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$,
- 5) $S'_n(F_s, x) \rightarrow \varphi_s(x)$ почти всюду,
- 6) если $x \in Q_{m-1}$ и $\nu_{m-1} < s \leq \nu_m$, то

$$|S'_n(F_s, x)| \leq \frac{1}{m}.$$

Действительно, существование $F_s(x)$, удовлетворяющей первым четырем условиям, есть следствие леммы 3, так как $\varphi_s(x) = 0$ вне Δ_s ; в силу той же леммы продифференцированный ряд Фурье от $F_s(x)$ должен быть почти всюду равносходящимся с рядом Фурье от $\varphi_s(x)$; но этот последний, как мы уже отмечали, сходится всюду, кроме конечного числа точек и, следовательно, почти всюду сходится к $\varphi_s(x)$. Отсюда сразу следует справедливость условия 5).

Чтобы доказать, что и 6) удовлетворено, заметим, что, если $t \in \Delta_s$, где $\nu_{m-1} < s \leq \nu_m$, то $t \in \mathcal{E}_m$, а потому по формуле (2.21) имеем

$$\varrho(Q_{m-1}, \Delta_s) \geq \varrho_m. \quad (2.30)$$

Но тогда, так как $F_s(x)$ построена по лемме 3, она удовлетворяет условию г) этой леммы, значит,

$$|S'_n(F_s, x)| \leq \frac{1}{\varrho} \int_{\Delta_s} |\varphi_s(x)| dx, \quad (2.31)$$

где ϱ — расстояние от x до Δ_s , но $x \in Q_{m-1}$, поэтому из (2.30), (2.31) и (2.27) следует

$$|S'_n(F_s, x)| \leq \frac{1}{m}, \quad x \in Q_{m-1}, \quad (2.32)$$

а это и есть условие 6).

Так как $|F_s(x)| \leq \sigma_s \leq \frac{1}{2^s}$ на основании (2.29), то, полагая

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x), \quad (2.33)$$

видим, что ряд сходится равномерно, значит, $F(x)$ есть непрерывная функция. Мы докажем, что она удовлетворяет условиям теоремы, т. е. является примитивной для $f(x)$, и ряд, получающийся от почленного дифференцирования ее ряда Фурье, сходится к $f(x)$ почти всюду.

Мы имеем

$$S'_n(F, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \left[\frac{d}{dt} D_n(t-x) \right] dt$$

и в силу равномерной сходимости ряда (2.33)

$$S'_n(F, x) = \sum_{s=1}^{\infty} S'_n(F_s, x). \quad (2.34)$$

Пусть $n_1 = 1$ и $h_1 = 2\pi$. Допустим, что числа $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ и $h_1 > h_2 > \dots > h_{k-1}$ уже выбраны; про эти последние мы будем предполагать, что если для данного s число m подбирается так, чтобы

$$v_{m-1} < s \leq v_m \quad (m > 1), \quad (2.35)$$

то

$$h_s \leq \frac{1}{2} \varrho_m \quad (2.36)$$

для всех s , удовлетворяющих неравенству (2.35). На числа h_s , для $s = 1, 2, \dots, v_1$, ограничений накладывать не надо. Число ϱ_m в неравенстве (2.36) есть то самое, которое определено формулой (2.21).

Если все n_1, n_2, \dots, n_{k-1} и h_1, h_2, \dots, h_{k-1} выбраны, то числа σ_s , определяемые формулой (2.29) для $s = 1, 2, \dots, k-1$, также определены и, значит, функции $F_s(x)$ тоже ($s = 1, 2, \dots, k-1$).

В силу свойства 5) функций $F_s(x)$ можно по теореме Егорова найти такое множество E_k , $mE_k > 2\pi - \frac{1}{k^2}$, что

$$|S'_n(F_s, x) - \varphi_s(x)| < \frac{1}{k^2} \quad \text{для} \quad x \in E_k \quad (s = 1, 2, \dots, k-1),$$

если только n достаточно велико. Выберем же $n_k > n_{k-1}$ и столь большим, чтобы для $n \geq n_k$ все предыдущие неравенства удовлетворялись. Тогда

$$\sum_{s=1}^{k-1} |S'_n(F_s, x) - \varphi_s(x)| < \frac{1}{k} \quad \text{для} \quad n \geq n_k \quad \text{и} \quad x \in E_k. \quad (2.37)$$

Заметим теперь, что $F'_s(x) = \varphi_s(x)$ почти всюду в силу свойства 4) функций $F_s(x)$. Поэтому по теореме Егорова можно найти такое W_k , $mW_k > 2\pi - \frac{1}{k^2}$, что

$$\left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} - \varphi_s(x) \right| < \frac{1}{k^2} \quad (s = 1, 2, \dots, k-1), \quad x \in W_k,$$

если только $|h|$ достаточно мало *). Выберем h_k таким, чтобы все предыдущие неравенства удовлетворялись при $|h| \leq h_k$, тогда

$$\sum_{s=1}^{k-1} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} - \varphi_s(x) \right| < \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad |h| \leq h_k, \quad x \in W_k. \quad (2.38)$$

*) Теорема Егорова обычно формулируется для последовательностей измеримых функций. Однако, как показал Г. П. Толстов [1], если $f(x, y)$ измерима B по совокупности переменных и $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = F(x)$ на множестве E , $mE > 0$, то можно для любого $\varepsilon > 0$ найти множество $\mathcal{E} \subset E$, $m\mathcal{E} > mE - \varepsilon$, на котором $f(x, y) \rightarrow F(x)$ равномерно при $y \rightarrow 0$. В нашем случае теорема применима, так как каждая из $F_s(x)$ непрерывна и, значит, $\frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h}$ измерима B по совокупности переменных x и h .

Мы потребуем, кроме того, чтобы $h_k < h_{k-1}$ и чтобы $h_k < \frac{1}{2} \varrho_m$, если m выбрано так, что $\nu_{m-1} < k \leq \nu_m$. После этого мы h_k фиксируем; выбор n_k и h_k фиксирует σ_k и функцию $F_k(x)$. Таким образом, все функции $F_k(x)$ построены. Заметим, что $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, так как при $k \rightarrow \infty$ имеем $m \rightarrow \infty$, а $\varrho_m \rightarrow 0$ в силу (2.22).

Положим

$$E = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k \quad \text{и} \quad W = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k.$$

Тогда $mE = 2\pi$ и $mW = 2\pi$. Наконец, пусть

$$\mathcal{E} = QEW.$$

Тогда $m\mathcal{E} = 2\pi$.

Докажем, что если $x \in \mathcal{E}$, то $F'(x) = f(x)$, и ряд Фурье от $F(x)$ сходится к $f(x)$.

Пусть $x \in \mathcal{E}$, тогда $x \in Q$; значит, найдется такое μ , что $x \in P_\mu$; кроме того, $x \in E$ и $x \in W$; значит, найдется такое k_0 , что $x \in E_k$ для $k \geq k_0$ и $x \in W_k$ для $k \geq k_0$.

Пусть n задано. Определяем k так, чтобы

$$n_k \leq n < n_{k+1}, \quad (2.39)$$

после этого для найденного k ищем m так, чтобы

$$\nu_{m-1} < k \leq \nu_m. \quad (2.40)$$

Мы возьмем n столь большим, чтобы для соответствующего ему k иметь $k > k_0$ и для соответствующего m иметь $m - 1 \geq \mu$. При таком требовании из (2.20) следует, что

$$x \in Q_{m-1} \quad (2.41)$$

и, кроме того, из требования $k > k_0$ следует

$$x \in W_k \quad \text{и} \quad x \in E_k. \quad (2.42)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Мы выберем n столь большим, чтобы для соответствующих ему k и m иметь

$$\frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \frac{1}{k} < \varepsilon \quad (2.43)$$

и

$$\left| f(x) - \sum_{s=1}^{k-1} \varphi_s(x) \right| < \varepsilon. \quad (2.44)$$

Последнее возможно, потому что $x \in Q$, а на множестве Q имеем равенство (2.28).

После того, как n выбрано столь большим, мы будем иметь в силу (2.34) и (2.44)

$$\begin{aligned} |S'_n(F, x) - f(x)| &\leq |S'_n(F, x) - \sum_{s=1}^{k-1} \varphi_s(x)| + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{k-1} |S'_n(F_s, x) - \varphi_s(x)| + |S'_n(F_k, x)| + \sum_{s=k+1}^{\infty} |S'_n(F_s, x)| + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Но на основании $x \in E_k$ и (2.37), (2.39) и (2.43) получаем

$$\sum_{s=1}^{k-1} |S'_n(F_s, x) - \varphi_s(x)| < \frac{1}{k} + \varepsilon. \quad (2.46)$$

В силу (2.40), (2.41), (2.32) и (2.43) имеем

$$|S'_n(F_k, x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon. \quad (2.47)$$

Наконец, так как $\left| \frac{d}{dt} D_n(t-x) \right| \leq n^2$, то для любой $F_s(x)$ имеем

$$|S'_n(F_s, x)| \leq \frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_s(x)| dx \leq 2n^2 \sigma_s.$$

Тогда на основании (2.39), монотонного возрастания чисел n_k и определения σ_s по формуле (2.29) имеем

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} |S'_n(F_s, x)| \leq 2n_{k+1}^2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^s n_s^2} < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon. \quad (2.48)$$

Из (2.45), (2.46), (2.47) и (2.48) следует

$$|S'_n(F, x) - f(x)| < 4\varepsilon$$

и, таким образом, мы убедились, что продифференцированный ряд Фурье от $F(x)$ сходится к $f(x)$ в рассматриваемой точке x . Таким образом, первая половина теоремы доказана.

Для доказательства второй половины заметим, прежде всего, что

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h}.$$

Пусть $h \neq 0$ задано. Подбираем k так, чтобы

$$h_{k+1} \leq |h| \leq h_k. \quad (2.49)$$

Мы будем предполагать h столь малым, что для соответствующего ему k имеем $k \geq k_0$, т. е. $x \in W_k$, и, кроме того, как и раньше, удовлетворены (2.43) и (2.44). Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &\leq \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \sum_{s=1}^{k-1} \varphi_s(x) \right| + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{k-1} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} - \varphi_s(x) \right| + \left| \frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} \right| + \\ &\quad + \sum_{s=k+1}^{\infty} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} \right| + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.50)$$

На основании (2.42), (2.49), (2.38) и (2.43) имеем

$$\sum_{s=1}^{k-1} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} - \varphi_s(x) \right| < \varepsilon. \quad (2.51)$$

Заметим теперь, что в силу (2.41) и (2.30) из того, что $v_{m-1} < k \leq v_m$, следует для $t \in \Delta_k$

$$\varrho(x, t) \geq \varrho(Q_{m-1}, \Delta_k) \geq \varrho_m.$$

Кроме того, из (2.49) и (2.36) следует $|h| < \frac{1}{2} \varrho_m$, значит, для $t \in \Delta_k$

$$\varrho(x+h, t) \geq \varrho(x, t) - \varrho(x, x+h) \geq \varrho_m - \frac{1}{2} \varrho_m = \frac{1}{2} \varrho_m > 0,$$

т. е. точки x и $x + h$ обе лежат на положительном расстоянии от Δ_k , а $F_k(x) = 0$ всюду вне этого отрезка, поэтому

$$F_k(x) = 0 \quad \text{и} \quad F_k(x + h) = 0. \quad (2.52)$$

Наконец, в силу (2.49) имеем $|h| \geq h_{k+1}$, а потому

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} \right| \leq \frac{2}{h_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{\infty} \sigma_s. \quad (2.53)$$

На основании (2.29) и монотонного убывания чисел h_s имеем

$$\sigma_s \leq \frac{h_s}{2^s} \leq \frac{h_{k+1}}{2^s} \quad \text{для} \quad s \geq k+1,$$

а потому из (2.53) следует

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} \left| \frac{F_s(x+h) - F_s(x)}{h} \right| \leq 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon \quad (k \geq 2). \quad (2.54)$$

Соединяя (2.50), (2.51), (2.52) и (2.54), найдем

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < 3\varepsilon$$

при $x \in \mathcal{E}$, значит, $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

§ 3. Изображение функций, обращающихся в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры

Мы видели (см. § 2), что если функция $f(x)$ измерима и конечна почти всюду, то вопрос об ее изобразимости тригонометрическим рядом решен до конца. Но возникает вопрос: если $f(x) = +\infty$ или $f(x) = -\infty$ на каких-то множествах положительной меры, то что можно тогда сказать об изобразимости такой функции тригонометрическим рядом?

Оказывается, что здесь дело обстоит по-разному в зависимости от того, идет ли речь о сходимости или о суммируемости тем или иным методом.

До сих пор неизвестно, можно ли найти тригонометрический ряд, который сходится к $+\infty$ или к $-\infty$ на множестве положительной меры. Правда, обычно в таких случаях ряд не называют «сходящимся», но понятно, что мы имеем в виду утверждение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty \quad (3.1)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\infty \quad (3.2)$$

на множестве E , $mE > 0$.

Этот случай естественно отличать от случая расходимости, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ просто не существует.

Единственное, что мы можем сказать по этому вопросу, относится к рядам Фурье. В § 4 будет доказано, что для ряда Фурье выполнение одного из условий (3.1) или (3.2) на множестве положительной меры является невозможным *).

*) Более того, в § 4 будет доказано, что для ряда Фурье, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$ на E , $mE > 0$, то $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\infty$ почти всюду на E .

Если требование сходимости $\kappa + \infty$ (или $\kappa - \infty$) заменить на требование суммируемости $\kappa + \infty$ (или $\kappa - \infty$), то надо еще уточнить, о каком методе суммирования идет речь. Ю. Б. Гермейером^[1] доказано, что не может существовать тригонометрический ряд, который суммируется методом Римана $\kappa + \infty$ (или $\kappa - \infty$) на множестве положительной меры. Между прочим, отсюда вовсе не вытекает, что нельзя построить ряд, сходящийся $\kappa + \infty$ на множестве положительной меры, так как теорема о том, что сходимость ряда в точке x_0 к числу S влечет его суммируемость κS в точке x_0 методом Римана, верна лишь для S конечного.

Что касается метода Пуассона, то здесь дело обстоит иначе. Именно, Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым^[1] доказано, что существует аналитическая функция $w(z)$, голоморфная внутри круга $|z| < 1$ и такая, что $\operatorname{Re} w(z)$ стремится к $+\infty$, когда z стремится по радиусам к точкам некоторого множества меры 2π , лежащего на окружности (см. также И. И. Привалов^[М.19], глава IV, § 5). Так как действительная часть аналитической функции есть гармоническая функция, то ее можно изобразить в виде

$$P(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

и утверждать, что при $r \rightarrow 1$ функция $P(r, x) \rightarrow +\infty$ для всех x , принадлежащих некоторому множеству E , $mE = 2\pi$; следовательно, ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

суммируем почти всюду методом Пуассона $\kappa + \infty$.

§ 4. О пределах неопределенности частных сумм тригонометрического ряда

Обозначим

$$\overline{S}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

$$\underline{S}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

и будем называть функции $\overline{S}(x)$ и $\underline{S}(x)$ соответственно верхним и нижним пределами неопределенности частных сумм тригонометрического ряда.

Для решения вопроса об изобразимости функции тригонометрическим рядом важно иметь ясное представление о поведении этих функций $\overline{S}(x)$ и $\underline{S}(x)$. Докажем прежде всего следующую теорему (Marcinkiewicz and Zygmund^[2]):

Теорема Зигмунда и Марцинкевича. Если тригонометрический ряд суммируем методом $(C, 1)$ на множестве E , $mE > 0$ к конечной функции $S(x)$, и если

$$-\infty < \overline{\lim} S_n(x) < +\infty \quad \text{для } x \in E,$$

то почти всюду на E

$$\underline{\lim} S_n(x) > -\infty$$

и

$$S(x) = \frac{1}{2} [\overline{\lim} S_n(x) + \underline{\lim} S_n(x)].$$

Полагаем

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} \{S_k(x)\}.$$

Очевидно, что

$$\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \bar{S}(x).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу теоремы Егорова и C -свойства можно найти такое M , что

$$M \subset E, \quad mM > mE - \varepsilon,$$

все функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на M и последовательность $\varphi_n(x)$ сходится на M равномерно. Если так, то $\bar{S}(x)$ непрерывна на M .

Заметим теперь, что так как $\varphi_n(x) \rightarrow \bar{S}(x)$ равномерно на M , то можно написать

$$S_n(x) \leq \varphi_n(x) \leq \bar{S}(x) + \eta_n \quad \text{для } x \in M, \quad (4.1)$$

где $\eta_n \rightarrow 0$.

Пусть $x \in E$; тогда рассматриваемый ряд суммируем $(C, 1)$ к $S(x)$ в этой точке. В силу формулы Рогозинского (см. глава IV, § 6) тогда для любого α из $0 \leq \alpha \leq \frac{A}{n}$ имеем в этой точке x

$$\frac{1}{2} [S_n(x + \alpha) + S_n(x - \alpha)] - S(x) = [S_n(x) - S(x)] \cos n\alpha + R_n(x, \alpha), \quad (4.2)$$

где $R_n(x, \alpha) \rightarrow 0$ равномерно относительно α на $0 \leq \alpha \leq \frac{A}{n}$.

Но на основании леммы из § 13 Добавлений, если x_0 есть точка M , являющаяся его точкой плотности, то можно найти λ_n такие, что

$$x_0 + \lambda_n \in M, \quad x_0 - \lambda_n \in M \quad (4.3)$$

и

$$\lambda_n = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (4.2) находим

$$\varepsilon_n + \frac{1}{2} [S_n(x_0 + \lambda_n) + S_n(x_0 - \lambda_n)] - S(x_0) = [S_n(x_0) - S(x_0)] \cos n\lambda_n, \quad (4.4)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Соединяя (4.1) и (4.4), получаем

$$\cos n\lambda_n [S_n(x_0) - S(x_0)] \leq \frac{1}{2} [\bar{S}(x_0 + \lambda_n) + \bar{S}(x_0 - \lambda_n)] - S(x_0) + \varepsilon_n + \eta_n,$$

а так как $n\lambda_n \rightarrow \pi$ и $\bar{S}(x)$ непрерывна на M , то в силу (4.3) находим

$$- [S(x_0) - S(x_0)] \leq \bar{S}(x_0) - S(x_0),$$

откуда

$$2S(x_0) \leq \bar{S}(x_0) + S(x_0).$$

В частности, в силу конечности $\bar{S}(x_0)$ и $S(x_0)$ имеем

$$S(x_0) \geq 2S(x_0) - \bar{S}(x_0) > -\infty. \quad (4.5)$$

Но так как x_0 — любая точка плотности M , а $mM > mE - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ было наперед задано, то (4.5) справедливо почти всюду на E .

Итак, утверждение теоремы о том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) > -\infty \text{ почти всюду на } E,$$

уже доказано.

Теперь рассмотрим ряд

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kx + d_k \sin kx,$$

где $c_k = -a_k$, $d_k = -b_k$. Для него будем иметь, обозначая его частные суммы через $S_n^{\text{D}}(x)$:

$$\overline{\Psi}(x) = \overline{\lim} S_n^{\text{D}}(x) = -\underline{S}(x).$$

Но мы уже видели, что $\underline{S}(x)$ почти всюду на E конечна. Значит, к $\overline{\lim} S_n^{\text{D}}(x)$ можно применить предыдущие рассуждения и получим, что

$$\underline{\Psi}(x) \geq -2S(x) - \overline{\Psi}(x).$$

Значит,

$$-S(x) \geq \underline{S}(x) - 2S(x)$$

или

$$\underline{S}(x) \leq -\overline{S}(x) + 2S(x) \text{ почти всюду на } E. \quad (4.6)$$

Объединяя (4.5) и (4.6), видим, что теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если рассматриваемый тригонометрический ряд есть ряд Фурье от $f(x)$, то для почти всех $x \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\overline{S}(x) = \overline{\lim} S_n(x) = f(x) + \varphi(x),$$

$$\underline{S}(x) = \underline{\lim} S_n(x) = f(x) - \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая неотрицательная функция.

Это непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и из того, что ряд Фурье от $f(x)$ почти всюду суммируем к $f(x)$ методом $(C, 1)$.

Отсюда, в частности, следует, что если на некотором E , $mE > 0$ для ряда Фурье имеем $\overline{\lim} S_n(x) = +\infty$, то почти всюду на E имеем $\underline{\lim} S_n(x) = -\infty$. Таким образом, для ряда Фурье невозможен случай *), когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\infty \text{ на } E, mE > 0.$$

Для общих тригонометрических рядов до сих пор не решен вопрос, может ли на некотором E , $mE > 0$, иметь место соотношение

$$\overline{\lim} S_n(x) = +\infty, \quad \underline{\lim} S_n(x) > -\infty.$$

Возвращаясь к рядам Фурье, отметим следующий результат Д. Е. Меньшова^{[9], [12]}, представляющий теорему, обратную к только что доказанной.

Т е о р е м а 1 М е н ь ш о в а. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная неотрицательная функция, измеримая на $[0, 2\pi]$. Тогда существует такая $f(x) \in L$, что для ее ряда Фурье

$$\left. \begin{aligned} \overline{\lim} S_n(x) &= f(x) + \varphi(x) \\ \underline{\lim} S_n(x) &= f(x) - \varphi(x) \end{aligned} \right\} \text{ почти всюду на } [-\pi, \pi].$$

*) Впрочем, это последнее утверждение можно было бы получить и без теоремы Зигмунда и Марцинкевича. Действительно, мы знаем, что если $S_n \rightarrow +\infty$, то и $\sigma_n \rightarrow +\infty$, где σ_n — чезаровские суммы (см. § 6 Вводного материала). Между тем у ряда Фурье $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду по теореме Фейера—Лебега (см. глава I, § 49).

При этом $\varphi(x)$ может быть равна $+\infty$ на множестве положительной меры.

Эта теорема позволила Д. Е. Меньшову решить вопрос о том, можно ли построить тригонометрический ряд по заданным пределам неопределенности. Именно он доказал следующую теорему.

Теорема 2 Меньшова ^[12]. Пусть $F(x)$ и $g(x)$ — две функции, измеримые на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие условию

$$g(x) \leq F(x) \quad \text{почти всюду на } [-\pi, \pi].$$

Если $g(x)$ и $F(x)$ обе конечны почти всюду, или $g(x) = -\infty$, а $F(x) = +\infty$ почти всюду, то можно найти тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, для которого $g(x)$ есть нижний, а $F(x)$ верхний предел неопределенности почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Чтобы получить теорему 2 из теоремы 1, достаточно положить

$$\varphi(x) = \frac{F(x) - g(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{F(x) + g(x)}{2},$$

если $F(x)$ и $g(x)$ почти всюду конечны и

$$\varphi(x) = +\infty, \quad \psi(x) = 0,$$

если $g(x) = -\infty$, $F(x) = +\infty$ почти всюду.

Тогда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ измеримы, $\psi(x)$ конечна и $\varphi(x) \geq 0$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

На основании теоремы 1 строим $f(x)$ так, чтобы, обозначая через $S_n(x)$ частные суммы ее ряда Фурье, иметь

$$\overline{\lim} S_n(x) = f(x) + \varphi(x),$$

$$\underline{\lim} S_n(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Пусть T_1 есть этот ряд Фурье. Так как $\psi(x) - f(x)$ измерима и конечна почти всюду, то на основании теоремы § 2 можно найти тригонометрический ряд T_2 , сходящийся к ней почти всюду. Тогда, складывая T_1 и T_2 , получим тригонометрический ряд T , для частных сумм которого $S_n^*(x)$ будем иметь

$$\overline{\lim} S_n^*(x) = \psi(x) + \varphi(x) = F(x),$$

$$\underline{\lim} S_n^*(x) = \psi(x) - \varphi(x) = g(x).$$

Остается заметить, что у ряда T коэффициенты стремятся к нулю, так как это верно для T_1 , как ряда Фурье, и для T_2 , поскольку он сходится почти всюду. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 2 остается в силе, если $g(x)$ и $F(x)$ конечны на некотором E , и $g(x) = -\infty$, $F(x) = +\infty$ на CE ($mE > 0$ и $mCE > 0$). Действительно, если положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{F(x) - g(x)}{2} & \text{на } E, \\ +\infty & \text{на } CE, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{F(x) + g(x)}{2} & \text{на } E, \\ 0 & \text{на } CE, \end{cases}$$

то дальнейшие рассуждения проходят без изменений.

Это замечание принадлежит П. Л. Ульянову.

Таким образом, вопрос об определении тригонометрического ряда по заданным пределам неопределенности $g(x)$ и $F(x)$ решен полностью, если на любом множестве положительной меры либо $g(x)$ и $F(x)$ почти всюду конечны, либо $g(x) = -\infty$, а $F(x) = +\infty$.

Если на множестве E , $mE > 0$, одна из функций конечна, а другая бесконечна, или обе равны $+\infty$ (или $-\infty$), то задача еще не решена и, по-видимому, чрезвычайно трудна.

§ 5. О множестве предельных функций для тригонометрического ряда

Д. Е. Меньшов поставил и решил еще один важный вопрос, касающийся поведения последовательностей частных сумм тригонометрических рядов. Чтобы его сформулировать, введем определение.

О п р е д е л е н и е 1. Мы скажем, что измеримая функция $f(x)$ есть *предельная функция для некоторого тригонометрического ряда в смысле сходимости почти всюду*, если существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } [-\pi, \pi],$$

где $S_n(x)$ — частные суммы данного ряда.

Д. Е. Меньшов поставил следующую проблему. Пусть $M = \{f(x)\}$ — некоторое множество измеримых функций, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$. При каких условиях оно может быть множеством всех предельных функций для некоторого тригонометрического ряда? Он дал на этот вопрос исчерпывающий ответ. Чтобы сформулировать этот ответ, нужно ввести определение.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть множество $M = \{f(x)\}$ составлено из измеримых функций, определенных почти всюду на некотором отрезке $[a, b]$. Функцию $\varphi(x)$ назовем *предельным элементом множества M в смысле сходимости почти всюду*, если существует последовательность функций $\varphi_n(x)$, принадлежащих M и таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Множество M будем называть *замкнутым в смысле сходимости почти всюду на $[a, b]$* , если оно содержит все свои предельные элементы.

Приняв эти определения, мы можем сформулировать следующую теорему Д. Е. Меньшова^[18]:

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы множество $M = \{f(x)\}$, составленное из измеримых функций, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$, было множеством всех предельных функций в смысле сходимости почти всюду для некоторого тригонометрического ряда, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Добавим к этому, что тригонометрический ряд, который строит Д. Е. Меньшов для множества $M = \{f(x)\}$ (в случае, когда оно замкнуто в смысле сходимости почти всюду), имеет коэффициенты, стремящиеся к нулю.

Отметим здесь сразу некоторые интересные частные случаи.

Прежде всего, если множество M есть пустое, то из только что сформулированной теоремы следует существование тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и у которого никакая подпоследовательность частных сумм не является сходящейся почти всюду. Правда, этот

результат можно получить и изучая лакунарные ряды, так как мы видели (см. главу XI, § 3), что если у лакунарного ряда

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

какая-нибудь подпоследовательность частных сумм сходится на множестве положительной меры, то $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$. Значит, для лакунарных рядов с $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$, но $\sum a_k^2 + b_k^2 = +\infty$, множество предельных функций (в смысле определения 1) является пустым.

Если множество M состоит из одной единственной функции $f(x)$, то мы приходим к выводу: существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, у которого всякая подпоследовательность частных сумм либо сходится почти всюду к заданной функции $f(x)$, либо расходится на множестве меры больше нуля.

Построение таких рядов было сделано Д. Е. Меньшовым еще до получения им общей теоремы. Он вводил тогда понятие почти сходящегося тригонометрического ряда, несколько более жесткое, чем требование, чтобы у ряда была одна только предельная функция в смысле сходимости почти всюду. Именно, он предложил называть тригонометрический ряд *почти сходящимся к функции $f(x)$* , если существует подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ частных сумм этого ряда, для которой $\lim S_{n_k}(x) = f(x)$ почти всюду, и если каждый раз, как некоторая подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ сходится к конечной функции $\varphi(x)$ на множестве $E \subset [-\pi, \pi]$, $mE > 0$, то $\varphi(x) = f(x)$ почти всюду на E .

По поводу почти сходящихся рядов Д. Е. Меньшов^[17] доказал следующую теорему, носящую парадоксальный характер.

Теорема 2. *Каковы бы ни были три измеримые функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, можно любой тригонометрический ряд разложить на сумму трех тригонометрических рядов, каждый из которых почти сходится на $[-\pi, \pi]$ соответственно к $f_1(x)$, к $f_2(x)$ и к $f_3(x)$.*

Если дополнительно потребовать, чтобы у заданного тригонометрического ряда последовательность частных сумм была конечна по мере, т. е. для любого M , множество

$$E_n \{ |S_n(x)| > M \}$$

удовлетворяло условию $\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = 0$, то в случае, когда коэффициенты заданного ряда стремятся к нулю, можно добиться и того, чтобы у трех рядов, на которые мы его разлагаем, коэффициенты тоже стремились к нулю.

Сам Д. Е. Меньшов рассматривает эту теорему как указание на то, что почти сходящиеся ряды не оправдали надежд, которые можно было на них возлагать в смысле «хорошего» изображения определяемых ими функций.

Но вернемся к теореме 1. Рассмотрим еще один ее частный случай, а именно тот, где $M = \{f(x)\}$ состоит из всех измеримых функций, определенных на $[-\pi, \pi]$. Такое множество, очевидно, тоже замкнуто в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Отсюда сразу вытекает существование так называемых универсальных тригонометрических рядов, которым мы посвятим § 6.

§ 6. Универсальные тригонометрические ряды

О п р е д е л е н и е 1. Тригонометрический ряд называется *универсальным*, если для любой измеримой $f(x)$ найдется такая подпоследовательность частных сумм этого ряда, которая сходится к $f(x)$ почти всюду.

Самое существование таких рядов, конечно, несколько не очевидно. Различные авторы подходили к этому вопросу разными путями. Как мы уже

рой $f(x) \varphi_n(x) \in L$ при любом n , то всегда можно изменить $f(x)$ на CE так, чтобы она стала ортогональной к любым N функциям из нашей системы (N — какое угодно целое число).

Доказательство. По условию теоремы, $mCE > 0$. В силу существенной линейной независимости системы мы можем утверждать, что рассматриваемые N функций линейно независимы на CE . Не нарушая общности, можно предполагать систему занумерованной так, что эти функции будут $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$. Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\|a_{ij}\| \neq 0,$$

где

$$a_{ij} = \int_{CE} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N).$$

Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{на } E, \\ \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) & \text{на } CE \end{cases}$$

и покажем, что константы c_k можно подобрать так, чтобы $\psi(x)$ была ортогональна ко всем $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Действительно, это равносильно равенствам

$$\int_a^b \psi(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

или

$$\int_E f(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{k=1}^N c_k \int_{CE} \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^N c_k \int_{CE} \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = - \int_E f(x) \varphi_j(x) dx \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

или

$$\sum_{k=1}^N c_k a_{kj} = - \int_E f(x) \varphi_j(x) dx.$$

Но определитель этой системы не равен нулю, значит она разрешима (если она окажется однородной, то все c_k равны нулю, но этот случай нет необходимости исключать).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть E — любое множество, лежащее на $[-\pi, \pi]$, $mE < 2\pi$. Каково бы ни было целое число n и суммируемая функция $f(x)$, ее можно так изменить на CE , чтобы она стала ортогональной ко всем тригонометрическим полиномам порядка не выше n .

Для дальнейшего будет полезен еще один специальный случай, а именно:

Следствие 2. Пусть E — любое множество на $[-\pi, \pi]$, симметричное относительно точки $x = 0$ и $mE < 2\pi$. Пусть n — любое целое, а $f(x)$ произвольная нечетная суммируемая функция. Тогда можно изменить $f(x)$ на CE так, чтобы она осталась нечетной, но стала ортогональной ко всем нечетным тригонометрическим полиномам порядка не выше n .

Действительно, в предыдущем построении мы принимаем за функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ функции $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin Nx$. Тогда $\psi(x)$ на CE представляет нечетный тригонометрический полином $P_N(x)$ и совпадает с нечетной $f(x)$ на E . Так как E симметрично относительно $x = 0$, то если $x > 0$ и $x \in E$, имеем $-x \in E$, значит, $\psi(-x) = f(-x) = -f(x) = -\psi(x)$, а если $x > 0$ и $x \in CE$, то $-x \in CE$ и $\psi(-x) = P_N(-x) = -P_N(x) = -\psi(x)$ и, значит, все доказано.

Мы теперь имеем возможность доказать теорему.

Теорема 3. Универсальные тригонометрические ряды существуют.

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами:

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x), \dots$$

Ясно, что для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной на $[-\pi, \pi]$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином $\omega_n(x)$, что

$$|\varphi(x) - \omega_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

Пусть n_1 — порядок тригонометрического полинома $\omega_1(x)$.

Положим $g_1(x) = \omega_1(x)$, тогда

$$|\omega_1(x) - g_1(x)| < \varepsilon_1 \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi].$$

Пусть $\theta_1(x) = \omega_2(x) - g_1(x)$. Изменим ее вне отрезка $[-\pi + \varepsilon_1, \pi - \varepsilon_1]$ так, чтобы новая функция $\tilde{\theta}_1(x)$ стала ортогональной ко всем тригонометрическим полиномам порядка $\leq n_1$. Так как $\tilde{\theta}_1(x)$ на $[-\pi + \varepsilon_1, \pi - \varepsilon_1]$ совпадает с тригонометрическим полиномом, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi + 2\varepsilon_1, \pi - 2\varepsilon_1]$, значит, обозначая через $g_2(x)$ его частную сумму, состоящую из достаточно большого числа членов, можем добиться того, чтобы

$$|\tilde{\theta}_1(x) - g_2(x)| < \varepsilon_2 \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_1, \pi - 2\varepsilon_1]$$

или

$$|\omega_2(x) - g_1(x) - g_2(x)| < \varepsilon_2 \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_1, \pi - 2\varepsilon_1].$$

Так как $\tilde{\theta}_1(x)$ ортогональна ко всем тригонометрическим полиномам порядка $\leq n_1$, то в $g_2(x)$ входят лишь члены, содержащие $\cos kx$ или $\sin kx$ при $k > n_1$.

Допустим, что мы уже построили тригонометрические полиномы $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{m-1}(x)$ такие, что

а) в каждом $g_s(x)$ содержатся лишь такие $\cos kx$ и $\sin kx$, для которых $k > n_{s-1}$, где n_{s-1} — порядок полинома $g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_{s-1}(x)$ ($s \leq m-1$);

б) имеем

$$|\omega_s(x) - g_1(x) - g_2(x) - \dots - g_s(x)| < \varepsilon_s \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_{s-1}, \pi - 2\varepsilon_{s-1}]$$

для $s = 1, 2, \dots, m-1$.

Тогда мы построим $g_m(x)$ так: рассмотрим функцию

$$\theta_m(x) = \omega_m(x) - [g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_{m-1}(x)]$$

и изменим ее вне $[-\pi + \varepsilon_{m-1}, \pi - \varepsilon_{m-1}]$ так, чтобы она стала ортогональной ко всем тригонометрическим полиномам порядка $\leq n_{m-1}$, где n_{m-1} — порядок полинома $g_1(x) + \dots + g_{m-1}(x)$. Получим функцию $\tilde{\theta}_m(x)$. Она совпадает с тригонометрическим полиномом на $[-\pi + \varepsilon_{m-1}, \pi - \varepsilon_{m-1}]$, поэтому на $[-\pi + 2\varepsilon_{m-1}, \pi - 2\varepsilon_{m-1}]$ имеет равномерно сходящийся ряд Фурье и, значит, взяв достаточно большое число его первых членов, получим полином $g_m(x)$ такой, что

$$|\tilde{\theta}_m(x) - g_m(x)| < \varepsilon_m \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_{m-1}, \pi - 2\varepsilon_{m-1}],$$

т. е.

$$|\omega_m(x) - [g_1(x) + \dots + g_m(x)]| < \varepsilon_m \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_{m-1}, \pi - \varepsilon_{m-1}].$$

Продолжая этот процесс, мы построим $g_m(x)$ для всех m ; тогда

$$g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x) + \dots$$

есть обычный тригонометрический ряд, так как по самому построению функций $g_m(x)$, если $\cos kx$ или $\sin kx$ содержится в $g_m(x)$, то $k > n_{m-1}$, где n_{m-1} — порядок полинома $g_1(x) + \dots + g_{m-1}(x)$.

Докажем, что этот ряд является универсальным.

В самом деле, пусть $f(x)$ — любая измеримая функция на $[-\pi, \pi]$. Всегда можно построить последовательность непрерывных функций $f_m(x)$, сходящихся к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Для всякой такой $f_m(x)$ можно найти $\omega_{k_m}(x)$ так, чтобы

$$|f_m(x) - \omega_{k_m}(x)| < \varepsilon_m \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Но

$$|\omega_{k_m}(x) - [g_1(x) + \dots + g_{k_m}(x)]| < \varepsilon_{k_m} \quad \text{на} \quad [-\pi + 2\varepsilon_{k_m-1}, \pi - 2\varepsilon_{k_m-1}].$$

Поэтому имеем

$$|f_m(x) - [g_1(x) + \dots + g_{k_m}(x)]| < \varepsilon_m + \varepsilon_{k_m} \quad \text{на} \quad [\pi + 2\varepsilon_{k_m-1}, \pi - 2\varepsilon_{k_m-1}],$$

а потому подпоследовательность частных сумм ряда $\sum g_m(x)$ с номерами k_m сходится к $f(x)$ почти всюду.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $f(x)$ такова, что можно найти последовательность непрерывных $f_m(x)$, сходящихся к ней всюду на $[-\pi, \pi]$ или хотя бы всюду, кроме концов этого отрезка, то из приведенного доказательства ясно, что и выбранная подпоследовательность частных сумм нашего ряда сходится к $f(x)$ всюду, кроме, быть может, точек $x = -\pi$ и $x = \pi$. В частности, если $f(x) = +\infty$ всюду, то можно положить $f_m(x) = m$ и получить отсюда следствие.

Т е о р е м а 4. Существует тригонометрический ряд, у которого некоторая подпоследовательность его частных сумм сходится к $+\infty$ для $-\pi < x < \pi$.

Полагая $f_m(x) = \frac{1}{m}$, мы можем получить теорему

Т е о р е м а 5. Существует тригонометрический ряд, у которого некоторая подпоследовательность частных сумм сходится к 0 для $-\pi < x < \pi$ (и при этом коэффициенты ряда не все равны нулю).

Если стремиться к получению ряда, у которого подпоследовательность частных сумм сходится к нулю всюду без исключения, то надо несколько изменить предыдущее построение. Это можно сделать так: среди тригонометрических многочленов $\omega_n(x)$ оставить лишь нечетные (это не мешает выбору $\omega_{k_m}(x)$ так, чтобы $\omega_{k_m}(x)$ отличалось от $f_m(x)$ как угодно мало). В силу следствия 2, так как $\theta_1(x)$ — нечетная функция, можно добиться, чтобы и $\tilde{\theta}_1(x)$ обладала этим свойством, тогда им будет обладать и $g_2(x)$; продолжая это рассуждение, убедимся, что все $g_m(x)$ будут нечетными тригонометрическими полиномами, а тогда ряд $\sum g_m(x)$ сходится к нулю и в точках $-\pi$ и π . Итак, окончательно:

Т е о р е м а 6. Существует тригонометрический ряд, у которого некоторая подпоследовательность частных сумм сходится к нулю на $-\infty < x < +\infty$ (и при этом не все коэффициенты ряда равны нулю).

Теорема 4 интересна тем, что, как мы отмечали в § 3, до сих пор неизвестно, может ли тригонометрический ряд сходиться к $+\infty$ на множестве меры больше нуля. Тем более это неясно, если речь идет о сходимости на целом интервале $[-\pi, \pi]$. Но если речь идет о сходимости подпоследовательности частных сумм к $+\infty$, то ответ дан теоремой 4.

Теоремы 5 и 6 можно сопоставить с результатами главы XIV. Мы знаем, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, или всюду, кроме,

быть может, счетного множества точек, то все его коэффициенты равны нулю. Мы видим, что это уже не имеет места, если вместо сходимости ряда говорить о сходимости подпоследовательности его частных сумм.

Возвращаясь к универсальным рядам, укажем, еще одну интересную теорему Д. Е. Меньшова [5a], [6]:

Т е о р е м а М е н ь ш о в а. *Всякий тригонометрический ряд можно представить в виде суммы двух универсальных тригонометрических рядов; при этом, если коэффициенты заданного ряда стремятся к нулю, то и у двух рядов, на которые мы его разлагаем, коэффициенты удовлетворяют тому же условию.*

Таким образом мы видим, что, несмотря на кажущуюся парадоксальность самого понятия универсального ряда, оказывается, любой тригонометрический ряд можно разложить на два ряда такого вида.

З а м е ч а н и е 2. Заканчивая рассмотрение универсальных рядов, мы считаем необходимым обратить внимание читателя на работу А. А. Талаляна^[2]. Он доказал, что для любой полной ортогональной нормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует универсальный ряд, т. е. можно построить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

обладающий свойством: для любой измеримой $f(x)$ существует подпоследовательность частных сумм этого ряда, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду. При этом $f(x)$ может обращаться в $+\infty$ или в $-\infty$ на множестве положительной меры.

Можно добиться того, чтобы у этого ряда $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (вопрос о стремлении к нулю коэффициентов универсального ряда, построенного В. Я. Козловым, остается открытым*)).

§ 7. Сходимость по мере тригонометрических рядов

Желая изобразить функцию тригонометрическим рядом, можно также вместо того, чтобы искать ряд, сходящийся или суммируемый к ней тем или иным методом, поставить вопрос о существовании ряда, сходящегося к ней по мере.

Напомним, что некоторая последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ называется *сходящейся по мере* к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $E_n(\varepsilon)$ тех точек из $[a, b]$, где

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon,$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m E_n(\varepsilon) = 0.$$

Это определение не годится, если $f(x)$ становится бесконечной на множестве положительной меры. Но в этом случае уславливаются считать, что $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, если можно написать $f_n(x) = \varphi_n(x) + r_n(x)$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ почти всюду, а $r_n(x)$ сходится по мере к нулю.

Д. Е. Меньшов [7] доказал следующую общую теорему.

*) В последнее время студенты Московского университета М. И. Лившиц и А. Я. Подрабинович доказали, что у ряда В. Я. Козлова коэффициенты не стремятся к нулю.

Теорема Меньшова. Для любой функции $f(x)$, измеримой на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере на этом отрезке*).

Мы отсылаем к работе автора, не имея возможности привести здесь доказательство этой теоремы. Отметим только, что так как от функции $f(x)$ не требуется ничего, кроме измеримости, то, в частности, она может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве меры больше нуля, или хотя бы всюду.

Таким образом, эту теорему следует рассматривать как одно из решений вопроса: можно ли изобразить тригонометрическим рядом любую измеримую функцию, не обязательно конечную почти всюду. Этот вопрос, как мы уже отмечали, не раз, для случая обычной сходимости не решен. Аналогично мы отмечали, что проблема отыскания тригонометрического ряда по заданным пределам неопределенности решена лишь в предположении, что на любом множестве положительной меры эти пределы конечны почти всюду или верхний равен $+\infty$, а нижний $-\infty$ (см. теорему § 4 и замечание к ней).

Однако если вместо обычных пределов рассматривать «пределы неопределенности по мере», то можно получить исчерпывающие результаты.

Мы будем говорить, что измеримая функция $F(x)$ есть *верхний предел по мере* на $[a, b]$ для последовательности измеримых на $[a, b]$ функций $f_n(x)$, если для любой $\varphi(x)$, измеримой на $[a, b]$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \{ E [f_n(x) > \varphi(x)] E [\varphi(x) > F(x)] \} = 0$$

и, кроме того, если для любой $\Psi(x)$, измеримой на $[a, b]$ и такой, что $mE[F(x) > \Psi(x)] > 0$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m E \{ E [f_n(x) > \Psi(x)] E [F(x) > \Psi(x)] \} > 0.$$

Точно так же мы скажем, что измеримая функция $g(x)$ есть *нижний предел по мере* на $[a, b]$ для последовательности $\{f_n(x)\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \{ E [f_n(x) < \tau(x)] E [\tau(x) < g(x)] \} = 0$$

для любой $\tau(x)$, измеримой на $[a, b]$, и если для любой измеримой $\chi(x)$, для которой $mE[g(x) < \chi(x)] > 0$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \{ E [f_n(x) < \chi(x)] E [g(x) < \chi(x)] \} > 0.$$

Приняв эти определения, можем сформулировать следующую теорему Д. Е. Меньшова^[7]:

Теорема. Пусть $F(x)$ и $g(x)$ — любые измеримые на $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяющие условию

$$g(x) \leq F(x) \quad \text{почти всюду на } [-\pi, \pi].$$

Тогда существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и такой, что для него функции $F(x)$ и $g(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$.

*) Отметим, что А. А. Талалян^[1] перенес этот результат на любые ортогональные нормированные полные системы. Точнее, он доказал, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — система, обладающая этими свойствами на $[a, b]$, то для любой измеримой $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, сходящийся по мере к $f(x)$ на $[a, b]$. Можно, кроме того, добиться чтобы $a_n \rightarrow 0$.

ДОБАВЛЕНИЯ

К ГЛАВЕ II

§ 1. Принцип Фрагмена—Линделефа

Пусть $f(z)$, $z = x + iy$, непрерывна и ограничена в полосе S

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad -\infty < y < +\infty,$$

кроме того, регулярна внутри S . Если $|f| \leq K$ на границах полосы, т. е. при $x = \alpha$ и $x = \beta$, то $|f(z)| \leq K$ также и внутри S .

Допустим сначала, что

$$|f(x + iy)| \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

равномерно относительно x , $\alpha \leq x \leq \beta$, если $y \rightarrow \pm \infty$. Если $z_0 = x_0 + iy_0$ лежит внутри S , то берем η столь большим, чтобы $|f(x + i\eta)| \leq K$ при $\alpha \leq x \leq \beta$ и чтобы прямоугольник $\alpha \leq x \leq \beta$, $|y| \leq \eta$ содержал точку z_0 . Тогда, применяя известный в теории аналитических функций принцип максимума модуля, видим, что $|f(z_0)| \leq K$.

Итак, при условии (1.1) теорема доказана.

В общем же случае мы полагаем

$$f_n(z) = f(z) e^{\frac{z^2}{n}} = f(z) e^{\frac{x^2 - y^2}{n}} e^{2i \frac{xy}{n}}$$

Тогда $f_n(z)$ удовлетворяет условию (1.1), значит, полагая $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$, имеем $|f_n(z)| \leq K e^{\frac{\gamma^2}{n}}$ на границе S . Поэтому для любого z_0 внутри S имеем $|f_n(z_0)| \leq K e^{\frac{\gamma^2}{n}}$ и, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$|f(z_0)| \leq K$$

Можно было бы показать, что если $f(z_0) = K$ в некоторой внутренней точке, то $f(z) = \text{const}$ в S , но нам это не понадобится.

Другая форма принципа Фрагмена—Линделефа. Пусть $f(z)$ непрерывна и ограничена в полосе S , а также регулярна всюду внутри S , и пусть

$$|f(\alpha + iy)| \leq K_1, \quad |f(\beta + iy)| \leq K_2$$

для всех y . Тогда если $L(t)$ — линейная функция, принимающая значения 1 и 0 соответственно для $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$|f(x_0 + iy)| \leq K_1^{L(x_0)} \cdot K_2^{1-L(x_0)}. \quad (1.2)$$

Хотя этот результат и выглядит как усиление предыдущего, однако, он сам из него вытекает. Действительно, полагая

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{K_1^{L(z)} K_2^{1-L(z)}},$$

мы видим, что $f_1(z)$ удовлетворяет условиям, высказанным в первой формулировке принципа Фрагмена—Линделефа, если там положить $K = 1$.

§ 2. Модуль непрерывности и модуль гладкости в L^p ($p \geq 1$)

Если $f \in L^p [-\pi, \pi]$, то полагаем

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

т. е.

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p}.$$

В частности, бывает полезен *квадратический модуль непрерывности*

$$\omega^2(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^2},$$

а также *квадратический модуль гладкости*

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\|_{L^2}.$$

В случае, когда $f(x)$ определена не на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, а лишь на некотором $[a, \beta]$ и принадлежит L^p на нем, то аналогично определяют

$$\omega^p(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p[a, b]},$$

$$\omega_2^p(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\|,$$

если δ таково, что $x \pm h \in [a, \beta]$ при $x \in [a, b]$ и $0 \leq |h| \leq \delta$.

Ясно, что для модулей непрерывности и модулей гладкости в L^p имеют место те же свойства, как для обычного модуля непрерывности, т. е.

- 1) $\omega^{(p)}(\delta, f)$ монотонно возрастает,
- 2) для любого $\lambda > 0$

$$\omega^{(p)}(\lambda\delta, f) \leq C \lambda \omega^{(p)}(\delta, f),$$

где C постоянное, и аналогично для $\omega_2^{(p)}(\delta, f)$.

§ 3. Обращение неравенства Гельдера

Мы знаем (см. § 9 Вводного материала), что если $f(x) \in L^2$ ($p > 1$), а $\varphi(x) \in L^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $f(x)\varphi(x) \in L$.

Аналогично, если $\{a_n\} \in l^p$, а $\{b_n\} \in l^q$, то $\{a_n b_n\} \in L$.

Покажем, что эти утверждения в известном смысле обратимы. Точнее, имеет место

Т е о р е м а. Если $\{a_n\}$ — такая последовательность, что

$$\sum |a_n b_n| < +\infty,$$

какова бы ни была последовательность b_n , лишь бы $\sum |b_n|^q < +\infty$ ($q > 1$), то

$$\sum |a_n|^p < +\infty$$

(где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

И аналогично, если $f(x)\varphi(x) \in L$ для любой $\varphi(x) \in L^q$ ($q > 1$), то $f(x) \in L^p$ (где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, допустим противное, т. е. $\sum |a_n|^p = +\infty$. Положим

$$u_n = |a_n|^p.$$

По теореме § 25 Добавлений, полагая $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, имеем

$$\sum \frac{u_n}{S_n^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum \frac{u_n}{S_n} = +\infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Положим $b_n = \frac{u_n}{S_n^{\frac{1}{q}}}$; тогда

$$\sum |b_n|^q = \sum \frac{u_n}{S_n^q} < +\infty, \quad \text{так как} \quad q > 1,$$

и в то же время

$$\sum |a_n| |b_n| = \sum u_n^{\frac{1}{p}} \frac{u_n^{\frac{1}{q}}}{S_n} = \sum \frac{u_n}{S_n} = +\infty.$$

Это противоречит тому, что $\sum |a_n| |b_n| < +\infty$ для любых b_n , для которых $\sum |b_n|^q < +\infty$.

Из противоречия вытекает справедливость доказываемого утверждения.

Рассуждение для интегралов можно свести к только что доказанному предложению для рядов. Действительно, допустим, что $f(x) \in L^p$. Тогда

$$\int_a^b |f|^p dx < +\infty$$

Возьмем любое ε и разобьем ось Ox (как это делается при построении интеграла Лебега) на части точками деления $l_0 = 0, l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$, находящимися друг от друга на расстоянии, не превосходящем ε . Пусть

$$E_i = \{l_i \leq |f(x)| < l_{i+1}\}.$$

Так как

$$l_i \leq |f(x)| < l_i + \varepsilon,$$

то

$$l_i^p \leq |f(x)|^p < 2^p(l_i^p + \varepsilon^p)$$

(в силу неравенства § 8 Вводного материала) на E_i , а поэтому очевидно, что

$$\sum l_i^p mE_i < +\infty.$$

Если мы из этого ряда отбросим все члены, где $mE_i = 0$, то его расходимость не нарушится. Полагая теперь

$$\begin{aligned} a_i^p &= l_i^p mE_i, & \text{если} & \quad mE_i \neq 0, \\ a_i &= 0, & \text{если} & \quad mE_i = 0, \end{aligned}$$

видим, что

$$\sum a_i^p < +\infty.$$

По только что доказанному можно найти такие $|b_i|$, что $\sum |b_i|^q < +\infty$, но

$$\sum |a_i b_i| = +\infty.$$

Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{|b_i|}{(mE_i)^{\frac{1}{q}}}, & \text{если} \quad mE_i \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad mE_i = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx \geq \sum' l_i \frac{|b_i|}{(mE_i)^{\frac{1}{q}}} mE_i,$$

где знак \sum' означает выбрасывание тех i , где $mE_i = 0$. Но

$$\sum' l_i \frac{|b_i|}{(mE_i)^{\frac{1}{q}}} = \sum' \frac{|a_i| |b_i|}{(mE_i)^{\frac{1}{p}} (mE_i)^{\frac{1}{q}}} mE_i = \sum' |a_i| |b_i| = +\infty.$$

С другой стороны,

$$\int_a^b |\varphi(x)|^q dx = \sum' \frac{|b_i|^q}{mE_i} mE_i = \sum |b_i|^q < +\infty.$$

Значит,

$$\int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx = +\infty,$$

хотя

$$\int_a^b |\varphi(x)|^q dx < +\infty,$$

и мы пришли к противоречию.

§ 4. Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема. Если мы имеем последовательность линейных функционалов $U_n(x)$ в пространстве L^p ($p > 1$) и если

$$|U_n(x)| < +\infty$$

для всех x и $n = 1, 2, \dots$, то существует такая константа M , что

$$\|U_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Эта теорема есть частный случай гораздо более общего результата о линейных функционалах в пространствах Банаха (см., например, Качмаж и Штейнгауз [м.7], глава I, теорема 151).

К ГЛАВЕ IV

§ 5. Категория множества

О п р е д е л е н и е. Множество E называется *множеством первой категории* на $[a, b]$, если оно является суммой конечного или счетного числа множеств, нигде не плотных на $[a, b]$.

Это определение принадлежит Бэру. Следуя Н. Н. Лузину, будем говорить, что E есть *множество второй категории* на $[a, b]$, если его дополнение SE есть множество первой категории на $[a, b]$.

Наконец, если E не является множеством первой категории, то будем говорить кратко: E *не первой категории**.

Пусть F — любое замкнутое. Если Δ — любой отрезок, то часть F , попавшая на Δ , называется *порцией* F . Множество M называется *нигде не плотным на F* , если на всякой порции F найдется другая непустая порция, не содержащая ни одной точки множества M ; назовем множеством *первой категории на F* множество E , являющееся суммой конечного или счетного числа множеств, нигде не плотных на F . Множества второй и не первой категории на F определяются так, как для отрезка, с заменой $[a, b]$ на F .

Всякое множество второй категории на $[a, b]$ есть множество мощности континуума на любом отрезке Δ , лежащем на $[a, b]$ (см., например, Н. Н. Лузин [м.11], § 21).

Если множество E типа G_δ (т. е. пересечение счетного множества открытых множеств) всюду плотно на $[a, b]$, то оно второй категории на $[a, b]$; действительно, в этом случае его дополнение есть F_σ (т. е. сумма счетного числа замкнутых множеств), и каждое из этих замкнутых должно быть нигде не плотным, в противном случае оно содержало бы отрезок, а это противоречит тому, что E всюду плотно.

Имеет место следующая теорема Бэра.

*Всякое непустое замкнутое множество есть множество второй категории на самом себе**).*

В качестве следствия этой теоремы получаем: если непустое замкнутое множество F содержится в сумме счетного множества замкнутых множеств $F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots$, то найдется такое n и такая непустая порция $\Delta(F)$ множества F , что $\Delta F \in F_n$.

Действительно, хоть одно из F_n не может быть нигде не плотным на F . Но это и значит, что среди отрезков, содержащих точки F , найдется такой отрезок Δ , что $\Delta(F_n)$ плотно на $\Delta(F)$, а так как F_n замкнуто, то $\Delta(F) \subset \Delta(F_n) \subset F_n$.

*) Бэр такие множества называл множествами второй категории, но в настоящее время во всех статьях по дескриптивной теории множеств принята более точная терминология Н. Н. Лузина.

**) См., например, Н. Н. Лузин [м.11], § 21, где доказательство проведено для отрезка, но проходит без изменений и для замкнутого множества.

З а м е ч а н и е. С точки зрения дескриптивной, множества второй категории весьма «густо» расположены на отрезке, так как, удаляя из него счетное множество множеств первой категории, мы не можем исчерпать отрезок, — все еще остается множество второй категории. Но с метрической точки зрения они все же могут быть «пренебрегаемыми», так как множества второй категории могут иметь меру нуль (достаточно построить на $(0, 1)$ сумму счетного множества совершенных нигде не плотных множеств P_n без общих точек и таких, что $mP_n = \frac{1}{2^n}$, тогда $C(P_1 + \dots + P_n + \dots)$ есть множество второй категории и меры нуль).

§ 6. Теоремы Римана и Каратеодори

Т е о р е м а. Если G есть область, ограниченная простой замкнутой кривой Γ , то существует функция $w = f(z)$, дающая конформное отображение G на круг $|w| < 1$, причем между границей Γ и точками окружности эта функция устанавливает гомеоморфное соответствие.

Это утверждение есть результат теоремы Римана о существовании конформного отображения на круг для любой односвязной области расширенной плоскости с границей, содержащей более одной точки (см., например, Маркушевич [М. 14], стр. 376), и теоремы Каратеодори о соответствии границ при конформном отображении (см., например, Маркушевич [М. 14], стр. 409, теорема 5 и ее следствие).

§ 7. Связь между модулем непрерывности и наилучшим приближением функции

Т е о р е м а Д ж е к с о н а. Если $f(x)$ периодическая с периодом 2π и непрерывная, то

$$E_n(f) \leq C\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad (7.1)$$

где C — абсолютная константа (можно принять $C = 12$).

(См., например, Натансон [Н. 15], стр. 117.)

Для дальнейшего нам будет нужно следующее усиление этой теоремы, а именно неравенство

$$E_n(f) \leq C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right). \quad (7.2)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, заметим, что при доказательстве теоремы Джексона в книге Натансона имеем на стр. 116 равенство (100)

$$U_n(x) - f(x) = \frac{3}{\pi n(2n^2 + 1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Если написать, как это сделано на той же странице,

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leq 2\omega(2t), \quad (7.3)$$

то отсюда далее получается

$$|U_n(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{3}{2}\pi\right) \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но мы можем вместо (7.3) написать

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leq \omega_2(2t).$$

Тогда все дальнейшие рассуждения до конца этого параграфа проходят совершенно так же, и мы получаем

$$|U_n(x) - f(x)| \leq M\omega_2\left(\frac{1}{n}\right),$$

где M — абсолютная константа.

После этого тем же рассуждением, как при доказательстве теоремы Джексона, получаем формулу (7.2), где C — другая абсолютная константа.

Аналогичные формулы справедливы и в пространстве L^p , т. е.

$$E_n^p(f) \leq C \omega^{(p)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad (7.4)$$

$$p \geq 1.$$

$$E_n^{(p)}(f) \leq C \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad (7.5)$$

Они доказываются так же, только во всех формулах надо вместо нормы в пространстве C брать норму в пространстве L^p .

Имеют место и формулы, выражающие, наоборот, модули непрерывности через наилучшие приближения. Так, например, как показали А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [1],

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{A}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(2)}(f), \quad (7.6)$$

а Стечкин [5] перенес этот результат на пространство C , т. е. получил неравенство

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{A}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k(f) \quad (7.7)$$

(здесь A — абсолютная константа *).

Наконец, отметим, что если вместо отрезка длины 2π рассматривать отрезок $[a, b]$, то справедливы аналогичные формулы, но константы, входящие в их правые части, уже не являются абсолютными, а зависят от a, b и нормы функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Однако, когда в ходе рассуждения речь идет об одной и той же функции, это обстоятельство не мешает получению нужных оценок.

Для примера покажем, как получить формулу, аналогичную (7.1) для отрезка $[a, b]$. Надо функцию $f(x)$, заданную на $[a, b]$, продолжить на отрезок $[0, 2\pi]$ как-нибудь, лишь бы получилась функция $f_1(x)$, непрерывная на всем отрезке и принимающая одинаковые значения в концах (например, положить $f(0) = f(2\pi) = 0$ и проинтерполировать ее линейно между 0 и a и между b и 2π).

Если $T_n(x)$ есть полином наилучшего приближения для $f_1(x)$ на $[0, 2\pi]$, то

$$|f_1(x) - T_n(x)| \leq E_n(f_1), \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

и поэтому

$$|f(x) - T_n(x)| \leq E_n(f_1), \quad a \leq x \leq b.$$

Тогда

$$E_n(f, a, b) \leq E_n(f_1). \quad (7.8)$$

Но в силу неравенства Джексона

$$E_n(f_1) \leq C \omega\left(\frac{1}{n}, f_1\right) \quad (7.9)$$

В силу построения $f_1(x)$ ясно, что на $[a, b]$ ее модуль непрерывности совпадает с $\omega[\delta, a, b, f]$, а на отрезках, где она линейна, имеем

$$\omega(\delta, f_1) \leq K\delta,$$

где K — константа, зависящая от нормы $f_1(x)$ на $[0, 2\pi]$, следовательно, от a, b и нормы $f(x)$ на $[a, b]$. Но поскольку для любой функции φ модуль непрерывности $\omega(\delta, \varphi) > a\delta$, где $a > 0$ (если только $\varphi(x)$ не константа), то отсюда ясно, что

$$\omega(\delta, f_1) \leq B\omega(\delta, a, b, f), \quad (7.10)$$

где B — константа, зависящая от нормы f на $[a, b]$, а потому из (7.8), (7.9) и (7.10)

$$E_n(f, a, b) \leq A\omega\left(\frac{1}{n}, a, b, f\right), \quad (7.11)$$

где A — константа, зависящая от нормы f на $[a, b]$.

*) У Стечкина формула (7.7) записана несколько иначе, а именно в правой части стоит $\frac{A}{n} \sum_{k=1}^n E_k$; это объясняется тем, что через E_n он обозначал не наилучшее приближение полиномами порядка не выше n , а наилучшее приближение полиномами порядка не выше $n-1$; таким образом, E_n в наших обозначениях превращается в E_{n+1} в его обозначениях.

Аналогично справедлива формула

$$E_n(f, a, b) \leq A\omega_2\left(\frac{1}{n}, a, b, f\right), \quad (7.12)$$

где снова A уже зависит от a, b и нормы f . Наконец, справедливы и формулы, аналогичные (7.6) и (7.7).

Отметим, что связь между наилучшими приближениями и модулями непрерывности изучалась многими авторами, продолжавшими работы Джексона и С. Н. Бернштейна. Нам понадобится одна теорема из этого круга идей, а именно:

Теорема Бернштейна. Для того чтобы $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

(См., например, Натансон [М. 15], стр. 132.)

Нетрудно установить, что эта теорема равносильна такому утверждению:

Если $0 < \alpha < 1$, то условия

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$$

эквивалентны, т. е. каждое из них влечет другое.

Для $\alpha = 1$ это уже неверно, но здесь, как показал А. Зигмунд (Zygmund [14]), надо брать вместо модуля непрерывности модуль гладкости, т. е.

Условия

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_2(\delta, f) = O(\delta)$$

эквивалентны.

(См., например, Натансон [М. 15], стр. 142.)

По поводу дальнейших работ в этом направлении см. Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [1].

К ГЛАВЕ V

§ 8. μ-меры и интегралы

Некоторый класс K множеств, определенных в пространстве \mathcal{E} , называется *вполне аддитивным*, если

- 1) пустое множество входит в K ,
- 2) если E принадлежит K , то и его дополнение CE (относительно \mathcal{E}) принадлежит K ,
- 3) если все E_n принадлежат K , то и $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит K .

Функцию $\mu(E)$ называем *мерой*, если она определена и неотрицательна для каждого E из класса K и если

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

для любой последовательности множеств E_n из K , попарно не имеющих общих точек. Число $\mu(E)$ называется μ -мерой множества E . Если в каждой точке E , за исключением быть может, точек, принадлежащих E , μ -меры нуль, имеет место некоторое свойство V мы будем говорить, что свойство V выполнено почти всюду по мере μ на E .

Интеграл Лебега, определенный, как в классическом случае, но когда вместо меры Лебега употребляется μ -мера, обозначается

$$\int_E f d\mu. \quad (8.1)$$

По поводу его свойств см., например, Сакс [М. 22], глава I. В частности, в § 12 там доказывается, что все теоремы, отмеченные нами в § 14 Вводного материала и касающиеся интегрирования последовательностей функций, остаются справедливыми, если вместо обычного интеграла Лебега брать интегралы по мере μ .

В дальнейшем нам придется встречаться с интегралами вида

$$\int_E f dF(x), \quad (8.2)$$

где $F(x)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на каком-то отрезке $[a, b]$. Если каждому отрезку $[a, \beta] \subset [a, b]$ поставить в соответствие число $F(\beta) - F(a)$, то мы имеем аддитивную функцию сегментов. Если функция F монотонна, то такая функция является неотрицательной. В § 6 главы III книги Сакса [М.22] дается подробное разъяснение того, что значит мера, определенная с помощью неотрицательной аддитивной функции сегмента. Таким образом, определение интеграла (8.2) сводится к определению интеграла (8.1), если μ -мера определена, отправляясь от монотонной $F(x)$. Если же $F(x)$ не монотонна, то ее сначала представляют в виде $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — соответствующим образом подобранные монотонные функции, и затем определяют интеграл (8.2), как разность интегралов такого же вида, но для функций F_1 и F_2 (см. Сакс [М.22], глава III, §§ 4, 5 и 13).

Таким образом, для интегралов вида (8.2) также оказываются справедливыми упомянутые выше теоремы об интегрировании последовательностей функций.

К ГЛАВЕ VII

§ 9. Чезаровские средние (C, α)

Пусть для некоторого ряда $\sum u_n$ при $0 \leq x < 1$ ряд $\sum u_n x^n$ сходится. Положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n. \quad (9.1)$$

Также при $0 \leq x < 1$ можем написать

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (9.2)$$

Производя умножение степенных рядов, получаем

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \quad (9.3)$$

где $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Подобно этому можно написать, умножая на $\frac{1}{1-x}$,

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n,$$

где $S_n^{(1)} = S_0 + S_1 + \dots + S_n$, и вообще

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

где $S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)}$ для любого целого k .

Тот же результат мы получили бы, если бы, обозначая через $A_n^{(k)}$ коэффициенты разложения $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ в степенной ряд, т. е. полагая

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum A_n^{(k)} x^n, \quad (9.4)$$

умножали (9.1) на (9.4) по правилу умножения степенных рядов.

Теперь будем рассматривать случай, когда α не является целым. Если для $\alpha > -1$ обозначить через $A_n^{(\alpha)}$ коэффициенты разложения $(1-x)^{-1-\alpha}$ в ряд, т. е. положить

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)} x^n, \quad (9.5)$$

то можно написать

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\alpha)} x^n, \quad (9.6)$$

где числа $S_n^{(\alpha)}$ определяются, как коэффициенты ряда, получающегося от умножения (9.1) на (9.5).

О п р е д е л е н и е. Ряд $\sum u_n$ называется *суммируемым (C, α) к числу S* , если, полагая

$$\sigma_n^{(\alpha)} = \frac{S_n^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}, \quad (9.7)$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(\alpha)} = S.$$

В частности, при $\alpha = 1$ имеем

$$A_n^{(1)} = n + 1, \quad S_n^{(1)} = S_0 + S_1 + \dots + S_n, \quad \sigma_n^{(1)} = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n + 1},$$

т. е. мы возвращаемся к методу средних арифметических (поэтому он и был назван $(C, 1)$). Из формулы (9.5) ясно, что

$$A_n^{(\alpha)} = \frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}{n!}, \quad (9.8)$$

а потому при $\alpha > -1$ все $A_n^{(\alpha)}$ положительны.

Нетрудно убедиться, что

$$A_n^{(\alpha)} \sim n^\alpha, \quad (9.9)$$

так как

$$\ln A_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \ln \frac{\alpha + k}{k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = \alpha \ln n + O(1).$$

Значит, $\ln \frac{A_n^{(\alpha)}}{n^\alpha}$ стремится к отличному от нуля пределу при $n \rightarrow \infty$, а это и доказывает справедливость (9.9) *).

Установим теперь связь между методами (C, α) и (C, α') при $\alpha' > \alpha$. С этой целью выведем сначала две вспомогательные формулы.

Докажем, что для любых α и β

$$A_n^{(\alpha + \beta + 1)} = \sum_{k=0}^n A_k^{(\alpha)} A_{n-k}^{(\beta)}. \quad (9.10)$$

В самом деле,

$$\sum A_n^{(\alpha + \beta + 1)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha + \beta + 2}} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\beta+1}} = \sum A_k^{(\alpha)} x^k \sum A_s^{(\beta)} x^s. \quad (9.11)$$

*) Иногда бывает необходима более точная формула, чем (9.9), а именно

$$A_n^{(\alpha)} = C(\alpha) n^\alpha + O(n^{\alpha-1}),$$

где $C(\alpha)$ — постоянная, зависящая только от α . Чтобы убедиться в ее справедливости, напомним

$$\begin{aligned} \ln A_n^{(\alpha)} &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha^2}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right] = \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^3}\right) = \alpha H_n + C_1 + \frac{C_2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

где $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, а C_1 и C_2 — постоянные, зависящие лишь от α . Но известно, что

$$H_n = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad \text{где } \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(а C — эйлерова постоянная). Подсчитаем H_n точнее. Имеем

$$H_{n+1} - H_n = \ln \frac{n+1}{n} + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{1}{n+1}.$$

Перемножая ряды в правой части (9.11), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получаем (9.10).

Аналогично доказывается формула

$$S_n^{(\alpha+\beta+1)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(\beta)} S_k^{(\alpha)}. \quad (9.12)$$

Действительно, в силу (9.5) и (9.6)

$$\sum S_n^{(\alpha+\beta+1)} x^n = \frac{\sum S_n x^n}{(1-x)^{\alpha+\beta+1}} = \frac{\sum S_n x^n}{(1-x)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\beta+1}} = \sum S_k^{(\alpha)} x^k \sum A_s^{(\beta)} x^s,$$

откуда тем же рассуждением убеждаемся в справедливости (9.12).

Полагая в формуле (9.12) $\alpha = 0$, находим

$$S_n^{(\beta+1)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(\beta)} S_k.$$

Так как это справедливо при любом β , то, полагая $\alpha = \beta + 1$, найдем

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(\alpha-1)} S_k. \quad (9.13)$$

Закончив вывод вспомогательных формул, докажем теперь теорему:

Теорема. Если $\alpha' > \alpha > -1$, то суммируемость (C, α) влечет суммируемость (C, α') .

Действительно, пусть $h = \alpha' - \alpha$, тогда $h > 0$. Имеем

$$\sigma_n^{(\alpha')} = \frac{S_n^{(\alpha')}}{A_n^{(\alpha')}} = \frac{S_n^{(\alpha+h)}}{A_n^{(\alpha+h)}}.$$

Но по формуле (9.12)

$$S_n^{(\alpha+h)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(h-1)} S_k^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(h-1)} A_k^{(\alpha)} \sigma_k^{(\alpha)}.$$

Поэтому

$$\sigma_n^{(\alpha')} = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{(h-1)} A_k^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha+h)}} \sigma_k^{(\alpha)}.$$

Полагая

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{(h-1)} A_k^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha+h)}},$$

видим, что матрица $\|a_{nk}\|$ положительна ($h > 0$). Покажем, что она T -матрица.

Поэтому

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{C_3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Значит,

$$\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) = \frac{C_4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Итак,

$$H_n = \ln n + C + \frac{C_4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и

$$\ln A_n^{(\alpha)} = \alpha \ln n + C_5 + \frac{C_6}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда

$$A_n^{(\alpha)} = e^{\alpha \ln n} e^{C_5} e^{\frac{C_6}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = C_7 n^\alpha \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = C_7 n^\alpha + O(n^{\alpha-1}),$$

а это и требовалось доказать.

Действительно, $A_k^{(\alpha)}$ постоянно при k фиксированном,

$$A_{n-k}^{(h-1)} \sim (n-k)^{h-1}, \quad A_n^{(\alpha+h)} \sim n^{\alpha+h},$$

значит,

$$a_{nk} \sim \left(\frac{n-k}{n} \right)^h \frac{1}{(n-k)n^\alpha} = o(1) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

потому что $h > 0$ и $\alpha > -1$. Далее,

$$a_{n_0} + a_{n_1} + \dots + a_{n_k} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(h-1)} A_k^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha+h)}} = \frac{A_n^{(\alpha+h)}}{A_n^{(\alpha+h)}} = 1.$$

Значит, и второе условие для матриц T удовлетворено; третье удовлетворено в силу положительности $\|a_{ni}\|$. Итак, $\{\sigma_n^{(\alpha')}\}$ получается из $\{\sigma_n^{(\alpha)}\}$ преобразованием при помощи T -матрицы, а тогда

$$\sigma_n^{(\alpha)} \rightarrow s \quad \text{влечет} \quad \sigma_n^{(\alpha')} \rightarrow s,$$

и теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если ряд сходится, то он суммируется (C, α) при любом $\alpha > 0$, и его чезаровская сумма совпадает с обычной суммой.

Действительно, достаточно в предыдущей теореме положить $\alpha = 0$.

§ 10. Сравнение методов (C, α) с методом A^*

В § 7 Вводного материала было доказано, что если ряд суммируем $(C, 1)$, то он суммируем и методом Абеля. Здесь будет доказана более общая теорема, а именно:

Т е о р е м а. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируем (C, α) при $\alpha > -1$ к числу S , то он суммируем A^* к числу S .

Действительно, согласно формулам (9.1), (9.6) и (9.7) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(\alpha)} x^k = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\alpha)} \sigma_k^{(\alpha)} x^k, \quad (10.1)$$

где, по условию теоремы,

$$\sigma_k^{(\alpha)} \rightarrow S \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad (10.2)$$

Мы должны показать, что если $x_n \rightarrow 1$ по некасательному пути, т. е. если

$$\left| \frac{1-x_n}{1-|x_n|} \right| \leq C \quad (n=1, 2, \dots), \quad (10.3)$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x_n^k = S, \quad (10.4)$$

или, следуя (10.1), надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\alpha)} \sigma_k^{(\alpha)} x_n^k = S \quad (10.5)$$

Положим

$$a_{nk} = (1-x_n)^{\alpha+1} x_n^k A_k^{(\alpha)}, \quad (10.6)$$

тогда (10.5) будет доказано, если мы примем во внимание (10.2) и убедимся, что матрица $\|a_{nk}\|$ есть матрица Теплица. Но это действительно имеет место, так как

$$1^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

(потому что $\alpha > -1$),

$$2^\circ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} x_n^k A_k^{(\alpha)} = 1$$

на основании (9.5),

$$3^\circ \sum_{k=0}^{\infty} |1 - x_n|^{a+1} |x_n^k| |A_k^a| \leq \left| \frac{1 - x_n}{1 - |x_n|} \right|^{a+1} \leq C^{a+1}$$

на основании (10.3).

§ 11. Применение линейных методов суммирования к функциональным рядам

Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) определены на некотором отрезке $[a, b]$.

Мы скажем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ суммируется к $S(x)$ линейным методом с матрицей A на некотором $[a, \beta] \subset [a, b]$, если для всякого $x \in [a, \beta]$ соответствующий числовой ряд суммируем этим методом и его сумма есть $S(x)$, т. е. если

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k(x)$$

определены на всех $x \in [a, \beta]$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x) \quad \text{на} \quad a \leq x \leq \beta.$$

Если $\sigma_n(x) \rightarrow S(x)$ равномерно на $[a, \beta]$, то будем говорить, что $\sum u_n(x)$ равномерно суммируема к $S(x)$ на $[a, \beta]$.

Легко доказать, что если матрица $\|a_{nk}\|$ есть T -матрица и если

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad a \leq x \leq \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.1)$$

где все c_n постоянны, то равномерная сходимость $\sum u_n(x)$ на $[a, \beta]$ влечет его равномерную суммируемость на $[a, \beta]$ методом, определяемым этой матрицей.

Действительно, в силу условия (11.1) и равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на (a, β) найдется такое M , что

$$|S(x)| \leq M \quad \text{на} \quad [a, \beta].$$

В силу той же равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ находим такое N , что

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geq N, \quad a \leq x \leq \beta,$$

но тогда

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - S(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k(x) - S(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} + o(1) \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^N a_{nk} [S_k(x) - S(x)] \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} a_{nk} [S_k(x) - S(x)] \right| + o(1) \leq \\ &\leq 2M \sum_{k=0}^N |a_{nk}| + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} |a_{nk}| + o(1). \end{aligned}$$

В первой сумме число слагаемых ограничено и $a_{nk} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном k ; значит, эта сумма стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (и она не зависит от x); во втором слагаемом $\sum_{N+1}^{\infty} |a_{nk}| < C$, где C — константа из условия 3° для матриц T , т. е. вся сумма меньше εC . Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, мы можем дополнить результаты предыдущего параграфа, а именно доказать теорему:

Т е о р е м а. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ состоит из функций, ограниченных на множестве E , и суммируется методом (C, α) ($\alpha > -1$) равномерно на E , то он суммируем методом Абеля также равномерно на E .

Более того, он суммируем методом A^* равномерно, если только угол, внутри которого идут пути, зафиксирован, т. е. если

$$\left| \frac{1-x}{1-|x|} \right| < C, \quad (11.2)$$

где C — константа, не зависящая от точки $t \in E$.

Действительно, в рассуждениях § 10, где мы устанавливали, что матрица $\|a_{nk}\|$, определяемая формулой (10.6), есть матрица Теплица, все остается в силе, если только принять во внимание (11.2), а тогда, пользуясь только что доказанной теоремой о равномерной суммируемости, мы и приходим к нужному результату, так как ограниченность каждой функции $u_k(t)$ влечет и ограниченность каждой $\sigma_k^{(a)}(t)$.

§ 12. Теоремы тауберова типа

Так принято называть те теоремы, в которых из суммируемости ряда $\sum' u_n$ некоторым методом при наложении каких-нибудь условий на u_n следует сходимость $\sum' u_n$. Название дано потому, что Таубер (Tauber [1]) доказал теорему:

Теорема 1 (Таубера). Если $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируется методом Абеля и $nu_n \rightarrow 0$, то $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится.

Если ряд $\sum' u_n$ суммируем A , то во всяком случае $\sum' u_n r^n$ сходится при $0 \leq r < 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$; в силу того, что $nu_n \rightarrow 0$, можно найти такое m , что $|nu_n| < \varepsilon$ для $n > m$. Положим

$$r = 1 - \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n r^n \right| < \varepsilon \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \leq \frac{\varepsilon}{m} \frac{1}{1-r} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{n=0}^m u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^m u_n (1-r^n) \right| + \varepsilon < \varepsilon + (1-r) \sum_{n=0}^m n |u_n|, \quad (12.1)$$

потому что $|1-r^n| < n(1-r)$.

Но из $nu_n \rightarrow 0$ следует $\sum_{n=0}^m n |u_n| = o(m)$, а $1-r = \frac{1}{m}$, поэтому второй член правой части (12.1) есть $o(1)$ и, в силу произвольности ε , вся правая часть может быть сделана как угодно малой. Но если $r \rightarrow 1$, то $m \rightarrow \infty$; в силу того, что ряд $\sum' u_n$ суммируем A , имеем $\lim_{r \rightarrow 1} \sum' u_n r^n = S$, где S некоторое конечное; но тогда и $\sum_{n=0}^m u_n \rightarrow S$, т. е. ряд сходится, и теорема доказана.

Теорема 2 (обобщение теоремы Таубера). Если $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируется методом Абеля, а последовательность $\{nu_n\}$ суммируется к нулю методом $(C, 1)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится.

Очевидно, что, не нарушая общности, можно считать $u_0 = 0$ и можно считать, что ряд суммируется к 0. Положим $c_n = nu_n$ и $\gamma_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

Имеем по условию: $\{c_n\}$ суммируемо $(C, 1)$ к нулю, значит, $c_1 + c_2 + \dots + c_n = o(n)$, а потому $\gamma_n = o(n)$.

Имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{\gamma_n}{n}.$$

Последний член есть $o(1)$. Поэтому

$$S_n = S_n^* + o(1),$$

где S_n^* — сумма первых n членов ряда $0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$. Но этот ряд суммируется методом Абеля к нулю.

Действительно, рассмотрим ряд $\sum v_n$, для которого

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{\gamma_n}{n}.$$

Этот ряд сходится к нулю, а потому он и суммируется к 0 методом Абеля. Значит, $S_n - S_n^*$ можно рассматривать как n -ю частную сумму ряда, суммируемого к 0 методом Абеля. Но и S_n есть n -я частная сумма ряда, который суммируется к нулю методом Абеля, значит, это верно и для ряда $\sum \gamma_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$. Но члены этого ряда $\frac{\gamma_k}{k(k+1)}$ имеют порядок $o\left(\frac{1}{k}\right)$, а потому по теореме Таубера из его суммируемости к 0 следует его сходимость к 0. Но тогда $S_n^* = o(1)$, а $S_n = S_n^* + o(1) = o(1)$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если $\sum u_k$ суммируется методом Абеля и $u_k \geq 0$, то $\sum u_k$ сходится. Действительно, если бы это было неверно, то имели бы $\sum u_k = +\infty$, но тогда $\sum u_k$ суммируется к $+\infty$ методом Абеля, поскольку этот метод вполне регулярен (см. Вводный материал, § 7).

Укажем еще без доказательства следующую теорему:

Теорема Харди и Литтльвуда. Если $a_n \geq 0$ и

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{v=0}^{\infty} a_v r^v = 0,$$

то

$$\sum_{v=0}^n a_v = o(n)$$

(См. Харди [М. 24], теорема 96, стр. 197.)

Теорема 4. Если ряд

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (12.2)$$

суммируем $(C, 1)$ и если

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то ряд (12.2) сходится.

Доказательство. Положим

$$r_n = \sum_{k=n+1}^n \frac{u_k}{k}.$$

Тогда условие теоремы есть $r_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Имеем

$$\frac{u_n}{n} = r_{n-1} - r_n, \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.3)$$

Так как разность между частной суммой S_n и чезаровской суммой σ_n для ряда (12.2) имеет вид

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k,$$

то для того, чтобы теорема была доказана, достаточно убедиться, что $a_n \rightarrow 0$, если положить

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы можем написать

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 \frac{u_k}{k}.$$

Если положить

$$U_k = \sum_{m=1}^k \frac{u_m}{m} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и $U_0 = 0$, то в силу преобразования Абеля

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} U_k [k^2 - (k+1)^2] + \frac{U_n n^2}{n+1}.$$

Но $U_k = r_0 - r_k$, поэтому

$$a_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} (r_0 - r_k) (2k+1) + \frac{n^2}{n+1} (r_0 - r_n).$$

Так как $r_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$\frac{n^2}{n+1} r_n = O(n) o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1);$$

так же

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} r_k (2k+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} o\left(\frac{1}{k}\right) O(k) = o(1).$$

Поэтому

$$a_n = -\frac{r_0}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) + \frac{n^2}{n+1} r_0 + o(1) = -\frac{r_0}{n+1} n^2 + \frac{n^2}{n+1} r_0 + o(1) = o(1),$$

и теорема доказана.

Лемма Фейера. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируем $(C, 1)$ и если

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |u_k|^2 < +\infty, \quad (12.4)$$

то $\sum u_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $\sum_{k=0}^n u_k = S_n$. Тогда, как известно,

$$S_n - \sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{k u_k}{n+1}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что сходимость ряда (12.4) влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k |u_k|}{n} = 0. \quad (12.5)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ любое; выберем p так, чтобы

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} k |u_k|^2 < \varepsilon^2,$$

тогда

$$\sum_{k=p+1}^n k |u_k| = \sum_{k=p+1}^n \sqrt{k} (\sqrt{k} |u_k|) \leq \sqrt{\sum_{k=p+1}^n k} \sqrt{\sum_{k=p+1}^n k |u_k|^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n k\right)} \varepsilon \leq n \varepsilon.$$

Значит,

$$\frac{\sum_{k=1}^n k |u_k|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^p k |u_k|}{n} + \frac{\sum_{k=p+1}^n k |u_k|}{n} \leq 2\varepsilon,$$

если n достаточно велико, и лемма доказана.

З а м е ч а н и е. В этой лемме члены ряда могут принимать не только действительные, но и комплексные значения. Кроме того, можно рассмотреть случай, когда члены ряда являются некоторыми ограниченными функциями от переменного z , и тогда если ряд $\sum u_k(z)$ суммируем $(C, 1)$ равномерно на некотором множестве и если ряд

$$\sum k |u_k(z)|^2$$

сходится равномерно на этом множестве, то $\sum u_k(z)$ сходится равномерно. Доказательство полностью сохраняет силу, так как можно выбрать p зависящим только от ε , а не от z так, чтобы

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} k |u_k(z)|^2 < \varepsilon.$$

Теорема 5. Если $w(n) \geq 0$ и $w(n) \uparrow \infty$, то из ограниченности частных сумм ряда

$$\sum u_n w(n) \quad (12.6)$$

следует сходимость ряда $\sum u_n$.

Действительно, если S_n — частные суммы ряда (12.6) и

$$|S_n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то, взяв $\varepsilon > 0$, можно выбрать p столь большим, чтобы

$$\frac{M}{w(p)} < \varepsilon.$$

Теперь для любого $q > p$ находим

$$\sum_{n=p+1}^q u_n = \sum_{n=p+1}^q u_n w(n) \frac{1}{w(n)} = \sum_{p+1}^{q-1} S_n \Delta \left(\frac{1}{w(n)} \right) + S_q \frac{1}{w(q)} - S_p \frac{1}{w(p+1)},$$

а потому

$$\left| \sum_{n=p+1}^q u_n \right| \leq M \sum_{n=p+1}^{q-1} \Delta \left[\frac{1}{w(n)} \right] + \frac{M}{w(q)} + \frac{M}{w(p)} \leq M \frac{1}{w(p+1)} + \frac{M}{w(p)} < 2\varepsilon$$

и, следовательно, ряд $\sum u_n$ сходится.

Следствие. Если ряд $\sum u_n$ расходится и $w(n) \uparrow \infty$, то частные суммы ряда $\sum u_n w(n)$ должны быть неограниченными.

Теорема 6. Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$ и $S_n = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$, где $\{\mu_n\}$ — выпуклая последовательность, стремящаяся к нулю, то $\sum u_n \mu_n$ сходится.

Действительно, применяя дважды преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=0}^n u_k \mu_k = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k \Delta^2 \mu_k + p \sigma_{n-1} \Delta \mu_{n-1} + S_n \mu_n. \quad (12.7)$$

Но $S_n \mu_n = o(1)$ по условию, а $p \Delta \mu_{n-1} = o(1)$ по свойствам выпуклых последовательностей (см. Вводный материал, § 3), наконец, σ_{n-1} стремится к конечному пределу по условию леммы. Значит, два последних члена правой части (12.7) стремятся к нулю. Ряд $\sum (k+1) \Delta^2 \mu_k$ сходится (см. Вводный материал, § 3). Отсюда ясно, что сходится ряд $\sum (k+1) \sigma_k \Delta^2 \mu_k$, а значит, и $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \mu_k$, и лемма доказана.

§ 13. Лемма о точках плотности

Пусть E — любое множество положительной меры и \mathcal{E} — множество его точек плотности. Пусть A — любое число и $x_0 \in \mathcal{E}$. Тогда найдется такая последовательность λ_n , что

$$x_0 + \lambda_n \in \mathcal{E}, \quad x_0 - \lambda_n \in \mathcal{E}, \quad \lambda_n = \frac{A}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положим (см. рис. 51)

$$\begin{aligned} a_k^{(n)} &= x_0 + \frac{A}{n} \frac{k}{k+1}, & \beta_k^{(n)} &= x_0 + \frac{A}{n} \frac{k+2}{k+1}, \\ a_k^{(n)} &= x_0 - \frac{A}{n} \frac{k+2}{k+1}, & b_k^{(n)} &= x_0 - \frac{A}{n} \frac{k}{k+1}, \\ \delta_k^{(n)} &= [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}], & \Delta_k^{(n)} &= [a_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}]. \end{aligned}$$

Так как x_0 есть точка плотности для E , а значит, и для \mathcal{E} , то при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{m \mathcal{E} \Delta_k^{(n)}}{\Delta_k^{(n)}} \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \frac{m \mathcal{E} \delta_k^{(n)}}{\delta_k^{(n)}} \rightarrow 1,$$

следовательно, для любого k можно найти такое n_k , что

$$\frac{m \mathcal{E} \Delta_k^{(n)}}{\Delta_k^{(n)}} > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{m \mathcal{E} \delta_k^{(n)}}{\delta_k^{(n)}} > \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n \geq n_k. \quad (13.1)$$

Не нарушая общности, можно числа n_k взять так, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$.

Положим

$$\gamma_n = \frac{1}{k+1} \quad \text{при} \quad n_k \leq n < n_{k+1}.$$

Так как при $n_k \leq n < n_{k+1}$ имеем

$$a_k^{(n)} = x_0 + \frac{A}{n} (1 - \gamma_n), \quad \beta_k^{(n)} = x_0 + \frac{A}{n} (1 + \gamma_n),$$

$$a_k^{(n)} = x_0 - \frac{A}{n} (1 + \gamma_n), \quad b_k^{(n)} = x_0 - \frac{A}{n} (1 - \gamma_n),$$

и в силу (13.1) множество точек \mathcal{E} , попавших на $\Delta_k^{(n)}$, имеет меру, превосходящую половину

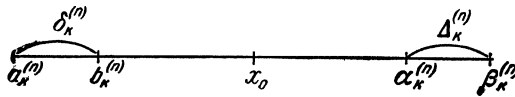


Рис. 51

длины этого отрезка, и это же верно для $\delta_k^{(n)}$, причем $\Delta_k^{(n)} = \delta_k^{(n)}$, то можно найти такие числа $\eta_n \rightarrow 0$, что

$$x_0 \pm \frac{A}{n} (1 + \eta_n) \in \mathcal{E},$$

и, полагая

$$\lambda_n = \frac{A}{n} (1 + \eta_n),$$

видим, что числа λ_n удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. При сохранении условий леммы для любого δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}$, можно найти такие a_n , что для всех достаточно больших n

$$x_0 - a_n \in \mathcal{E}, \quad x_0 + a_n \in \mathcal{E}, \quad \delta < n a_n < 1 - \delta. \quad (13.2)$$

Действительно, достаточно положить $a_n = \lambda_n$ из предыдущей леммы, где взято $A = \frac{1}{2}$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

поэтому

$$n a_n = \frac{1}{2} + o(1),$$

и, следовательно, при достаточно больших n условие (13.2) удовлетворено.

§ 14. О точках Лебега в L^p

Нам понадобится одно вспомогательное предложение, обобщающее результат, касающийся точек Лебега.

Л е м м а 1. Если $f(x) \in L^p$ ($p \geq 1$), то при $h \rightarrow 0$

$$\int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|^p dt = o(h) \quad \text{почти всюду}. \quad (14.1)$$

В случае $p = 1$ это предложение есть теорема о том, что почти все точки являются точками Лебега.

Здесь доказательство проводится тем же методом. Обозначим через r любое рациональное число, и пусть E_r — множество тех x , для которых соотношение

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(x \pm t) - r|^p dt \rightarrow |f(x) - r|^p \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (14.2)$$

нарушается. Такое множество E_r должно иметь меру, равную нулю (так же как и в случае $p = 1$). Пусть $E = \sum' E_r$ по всем рациональным r , тогда $mE = 0$. Докажем, что для любого $x \in E$ формула (14.1) имеет место.

Действительно, сначала для $\varepsilon > 0$ и для заданного $x \in E$ находим такое r , что

$$|f(x) - r| < \varepsilon.$$

Далее заметим, что в силу неравенства Минковского

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(x \pm t) - r|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |r - f(x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (14.3)$$

Второе слагаемое меньше ε в силу выбора числа r , а первое при $h \rightarrow 0$ стремится к $|f(x) - r|$, поскольку $x \in E$, а значит, в нем (14.2) ни при каком r не нарушается. Значит, первый член правой части (14.3) стремится к величине, не превосходящей ε . Так как ε как угодно мало, то отсюда следует справедливость нашего утверждения.

С л е д с т в и е. Положим

$$\Phi_p(x, h) = \int_0^h |\varphi_x(t)|^p dt,$$

где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$. Тогда

$$\Phi_p(x, h) = o(h) \quad \text{почти всюду.} \quad (14.4)$$

Действительно, так как

$$|\varphi_x(t)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|,$$

то из неравенства Минковского и из (14.1) следует

$$\left\{ \frac{\Phi_p(x, h)}{h} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(x-t) - f(x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = o(1)$$

почти всюду, а это и надо было доказать.

§ 15. Слабая сходимость линейных функционалов

Для любого линейного нормированного пространства E совокупность всех линейных функционалов $f(x)$, определенных на E , называют сопряженным пространством и обозначают через \bar{E} .

Последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$ из \bar{E} называют слабо сходящейся к функционалу $f_0 \in \bar{E}$, если $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ для любого $x \in E$.

Имеет место

Т е о р е м а. Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ линейных функционалов слабо сходилась к линейному функционалу f_0 , необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) последовательность $\{\|f_n\|\}$ была ограничена,
- 2) $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ для любого x из некоторого множества G , линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в E .

(См., например, Люстерник и Соболев [М.12], стр. 194, теорема 2.)

К ГЛАВЕ VIII

§ 16. Образ множества

Пусть E — некоторое множество и $f(x)$ — функция, определенная на E . Назовем *образом множества* совокупность всех точек y , для которых $y = f(x)$ хотя бы при одном $x \in E$. Будем такое множество обозначать через $f(E)$.

Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а. Если $f(x)$ не убывает на измеримом E и если $f'(x) \leq p$ для $x \in E$, то

$$m f(E) \leq p m E.$$

(См., например, Натансон [М. 16], стр. 226; правда, там доказательство проведено в предположении, что $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$, содержащем E , но доказательство проходит без большого изменения и в нашем случае.)

С л е д с т в и е. Пусть $f(x)$ не убывает на $[a, b]$ и $E \in [a, b]$. Если $mE = 0$ и $f'(x)$ конечна в каждой точке E , то

$$m f(E) = 0.$$

Удалим из $[a, b]$ те интервалы, где $f(x)$ постоянна; таких интервалов не более чем счетное множество, пусть δ_n ($n = 1, 2, \dots$) — эти интервалы. Для каждого из них $f(\delta_n)$ состоит из одной точки. Таким образом, остается рассмотреть множество \mathcal{E} , оставшееся на $[a, b]$ после удаления всех δ_n ; на нем, очевидно, $f(x)$ уже строго возрастает. Пусть $E_{\mathcal{E}} = E^*$, тогда $mE^* = 0$. Ясно, что $E^* = \sum E_n^*$, где множество E_n^* состоит из тех точек E^* , где $|f'(x)| \leq n$. В силу теоремы имеем $m f(E_n^*) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), а потому $m f(E^*) = 0$, откуда и $m f(E) = 0$.

§ 17. Сингулярные функции

Принято называть функцию *сингулярной*, если она не постоянна, но имеет производную, равную нулю почти всюду на отрезке, где она определена.

Если $f(x)$ — сингулярная функция на $[a, b]$ и имеет ограниченное изменение на этом отрезке, то функция $V_n^x f$ также является сингулярной на отрезке $[a, b]$.

Для доказательства см. Сакс [М. 22], стр. 193, теорема (9.6), утверждение (ii).

§ 18. Неравенство Бернштейна в пространстве L^p ($p \geq 1$)

Зигмунд (Zygmund [9]) доказал следующее неравенство:

Если $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка n , то для любого $p \geq 1$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |T'_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq n \left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это означает, что

$$\|T'_n(x)\|_{L^p[-\pi, \pi]} \leq n \|T_n(x)\|_{L^p[-\pi, \pi]},$$

тогда как неравенство Бернштейна означало такую же оценку, но для случая, когда нормы берутся в пространстве C .

Для упрощения доказательства мы ограничимся установлением неравенства

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |T'_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 2n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (18.1)$$

так как множитель 2 в правой части не будет мешать в доказательствах тех теорем, которые выводятся из неравенства Бернштейна.

Итак, установим справедливость (18.1). С этой целью заметим, что так как

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u) D_n(u-x) du,$$

то

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u) D'_n(u-x) du = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u+x) D'_n(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u+x) [\sin u + 2 \sin 2u + \dots + n \sin nu] du. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Если мы к выражению, стоящему в квадратных скобках в (18.2), прибавим тригонометрический полином

$$(n-1) \sin(n+1)u + (n-2) \sin(n+2)u + \dots + \sin(2n-1)u,$$

то величина интеграла не изменится, потому что $T_n(x+u)$ есть полином порядка n . Но

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \sin ku + \sum_{k=1}^{n-1} k \sin(2n-k)u &= n \sin nu + \sum_{k=1}^{n-1} k [\sin ku + \sin(2n-k)u] = \\ &= n \sin nu + 2 \sin nu \sum_{k=1}^{n-1} k \cos(n-k)u = \\ &= 2n \sin nu \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} \cos ku \right] = 2n \sin nu K_{n-1}(u), \end{aligned}$$

где $K_{n-1}(u)$ — ядро Фейера порядка $n-1$. Отсюда

$$T'_n(x) = \frac{2n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u+x) \sin nu K_{n-1}(u) du.$$

Поэтому

$$|T'_n(x)| \leq \frac{2n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(u+x)| K_{n-1}(u) du. \quad (18.3)$$

Но

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(u+x)| K_{n-1}(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(u)| K_{n-1}(u-x) du, \quad (18.4)$$

и так как для $\varphi(t) = \frac{1}{\pi} K_{n-1}(t)$ удовлетворены все условия леммы § 9 Вводного материала, то, полагая

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(u)| K_{n-1}(u-x) du,$$

имеем

$$\|\sigma(x)\|_p \leq \|T_n(x)\|_p, \quad (18.5)$$

а потому из (18.3), (18.4) и (18.5)

$$\|T'_n(x)\|_p \leq 2n \|\sigma(x)\|_p \leq 2n \|T_n(x)\|_p,$$

а это и надо было доказать.

§ 19. Неравенство Привалова

С. Н. Бернштейн рассматривал случай, когда задан максимум тригонометрического полинома $T(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$; тогда из

$$|T(x)| \leq M \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi] \quad (19.1)$$

он вывел

$$|T'(x)| \leq nM \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi], \quad (19.2)$$

где n — порядок полинома.

И. И. Привалов поставил вопрос: что можно сказать о $T'(x)$, если неравенство (19.1) выполнено лишь на некотором отрезке $[a, b]$ длины, меньшей чем 2π ? Он получил следующий результат [М. 18]:

Т е о р е м а П р и в а л о в а. Пусть $T(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n и

$$|T(x)| \leq M \quad \text{на} \quad [a, b]. \quad (19.3)$$

Тогда для любого $[a', b']$, лежащего внутри $[a, b]$, имеем

$$|T'(x)| \leq C(a, a', b', b) nM, \quad (19.4)$$

где $C(a, a', b', b)$ — константа, зависящая только от a, a', b', b , но не от коэффициентов полинома.

И. И. Привалов доказывал свою теорему, переходя от тригонометрических полиномов к алгебраическим. Мы дадим здесь другое доказательство (см. Н. К. Бари [7]).

Рассмотрим сначала случай, когда $T(x)$ — четный тригонометрический полином, т. е. состоит только из одних косинусов. Положим

$$\cos x = \frac{\cos b - \cos a}{2} \cos t + \frac{\cos a + \cos b}{2} \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad (19.5)$$

Тогда, если t будет пробегать отрезок $[0, \pi]$, то x пробежит отрезок $[a, b]$ (в направлении от b к a).

Поскольку

$$T(x) = P[\cos x],$$

где P — многочлен n -й степени, то подстановка (19.5) дает

$$T(x) = P[\cos x] = P^*(\cos t), \quad (19.6)$$

где P^* — снова многочлен n -й степени, но уже определенный на $[0, \pi]$. Тогда

$$P^*(\cos t) = \tau(t), \quad (19.7)$$

где $\tau(t)$ — тригонометрический полином порядка n . Из (19.6) и (19.7) в силу (19.3) получаем

$$|\tau(t)| \leq M \quad \text{на} \quad (0, \pi). \quad (19.8)$$

Но так как $\tau(t)$ — четный тригонометрический полином, то неравенство (19.8) справедливо и на $[-\pi, \pi]$. Поэтому мы вправе применить неравенство Бернштейна, а это дает

$$|\tau'(t)| \leq nM \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi]. \quad (19.9)$$

Но

$$\tau'(t) = T'(x) \frac{dx}{dt},$$

а из (19.5) находим

$$-\sin x \frac{dx}{dt} = -\frac{\cos b - \cos a}{2} \sin t,$$

поэтому

$$T'(x) = \tau'(t) \frac{2}{\cos b - \cos a} \frac{\sin x}{\sin t}. \quad (19.10)$$

Заметим теперь, что если x пробегает лишь отрезок $[a', b']$, который целиком внутри (a, b) , то, как видно из формулы (19.5), t не может стать равно 0 или π , иначе говоря, $\sin t > a$, где a — некоторое положительное число, зависящее только от расстояния от a' до a и от b' до b . Поэтому из (19.9) и (19.10)

$$|T'(x)| \leq \frac{2}{\cos b - \cos a} \frac{1}{a} nM \leq C(a, a', b', b) nM \quad \text{на} \quad (a', b')$$

и неравенство (19.4) для случая четного полинома доказано.

Пусть теперь $T(x)$ — нечетный полином, тогда он состоит из одних синусов.

Мы предположим пока $0 < a < b < \pi$ (на доказательстве теоремы в окончательной форме это не отразится). Имеем

$$T(x) = \sin x T_1(x), \quad (19.11)$$

где $T_1(x)$ — четный тригонометрический полином порядка $n-1$. Поэтому по доказанному имеем

$$|T_1'(x)| \leq C(a, a', b', b)(n-1) M_1 \quad \text{на} \quad (a', b'),$$

где M_1 — максимум модуля $T_1(x)$. Но так как мы предположили, что $0 < a < b < \pi$, то

$$|\sin x| > a \text{ для } a \leq x \leq b,$$

где $a > 0$. Отсюда и из (19.3) имеем

$$M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |T_1(x)| \leq \frac{M}{a}. \quad (19.12)$$

Но

$$T'(x) = \cos x T_1(x) + \sin x T_1'(x),$$

а потому

$$|T'(x)| \leq M + C(a, a', b', b)(n-1) \frac{M}{a} \leq C^*(a, a', b', b) nM \text{ на } (a', b')$$

и наше утверждение снова доказано (правда, пока с ограничением $0 < a < b < \pi$).

Наконец, переходим к общему случаю. Пусть $T(x)$ — любой тригонометрический полином порядка n и $|T(x)| \leq M$ на $[a, b]$. Возьмем любой $[a', b']$ внутри (a, b) и пусть $\varepsilon = \min(a' - a, b - b')$. Выберем число η так, чтобы $\eta < \frac{\varepsilon}{4}$.

Пусть $a' - \eta \leq x \leq b'$, тогда $x \pm 3\eta \in [a, b]$ в силу выбора η . Положим

$$T_1(u) = \frac{T(x+u) + T(x-u)}{2} \text{ и } T_2(u) = \frac{T(x+u) - T(x-u)}{2}. \quad (19.13)$$

Тогда $T_1(u)$ и $T_2(u)$ тригонометрические полиномы порядка n , причем

$$|T_1(u)| \leq M \text{ и } |T_2(u)| \leq M$$

для $0 \leq u \leq 3\eta$ и $a' - \eta \leq x \leq b'$.

В силу уже доказанного, так как $T_2(u)$ — нечетный полином, мы можем применить предыдущие результаты, лишь если u не обращается в нуль. Но на отрезке $\left(\frac{\eta}{2}, 3\eta\right)$ мы имеем право применять доказанное неравенство, а потому на $[\eta, 2\eta]$, лежащем внутри $\left(\frac{\eta}{2}, 3\eta\right)$, имеем

$$|T_2'(u)| \leq C(\eta) nM, \quad \eta \leq u \leq 2\eta.$$

Тем более для $T_1'(u)$ это тоже справедливо, т. е.

$$|T_1'(u)| \leq C(\eta) nM, \quad \eta \leq u \leq 2\eta.$$

Из (19.13) имеем

$$T(x+u) = T_1(u) + T_2(u),$$

а потому

$$|T'(x+u)| \leq 2C(\eta) nM, \quad a' - \eta \leq x \leq b', \quad \eta \leq u \leq 2\eta.$$

Если x — любая точка из (a', b') , то можно положить $x_1 = x - \eta$, тогда $a' - \eta \leq x_1 < b'$ и

$$|T'(x_1+u)| \leq 2C(\eta) nM, \quad \eta \leq u \leq 2\eta.$$

В частности, при $u = \eta$ имеем $x_1 + \eta = x$, откуда

$$|T'(x)| \leq 2C(\eta) nM,$$

а так как η зависит только от a, a', b' и b , то теорема полностью доказана.

Как и для неравенства Бернштейна, здесь можно перенести полученный результат на пространство L^p , т. е. доказать теорему (см. Н. К. Бари [7]).

Т е о р е м а. Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка n и $[a, b]$ — любой отрезок на $[-\pi, \pi]$. Для любого $[a', b']$, лежащего внутри (a, b) , найдется такая константа C , зависящая лишь от a, a', b' и b , что

$$\left(\int_{a'}^{b'} |T_n'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(a, a', b', b) n \left(\int_a^b |T_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

§ 20. Теорема Бэра

Следуя Бэру, функцию $f(x)$, определенную на некотором совершенном множестве P , называют *точечно разрывной на P* , если точки непрерывности $f(x)$ на P образуют множество E , всюду плотное на P .

Бэр доказал следующую важную теорему:

Теорема Бэра. Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть представлена в виде

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad (20.1)$$

где все $f_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и сходимость имеет место в каждой точке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была точечно разрывна на всяком совершенном множестве $P \in [a, b]$.

(См., например, Н. Н. Лузин [М. 11], § 47.)

Из этой теоремы, в частности, сразу следует, что если $f(x)$ представима в виде (20.1), то на любом отрезке $[a, \beta]$, лежащем внутри $[a, b]$, найдутся точки, где $f(x)$ непрерывна, а стало быть, и такие отрезки, где она остается ограниченной.

§ 21. Неравенство Иенсена

Пусть $\Phi(u)$ — непрерывная функция, выпуклая и определенная для всех значений u . Пусть $p(x) \geq 0$ на $[a, b]$, а $f(x)$ измерима и конечна почти всюду на $[a, b]$; кроме того, $f(x)p(x)$ суммируема на $[a, b]$. Тогда, если только

$$\int_a^b p(x) dx > 0,$$

имеем

$$\Phi \left[\frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \right] \leq \frac{\int_a^b \Phi[f(x)]p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \quad (21.1)$$

(См., например, Натансон [М. 16], гл. X, § 5, теорема 6.)

Если $\int_a^b p(x) dx = 1$, то получаем просто

$$\Phi \left[\int_a^b f(x)p(x) dx \right] \leq \int_a^b \Phi[f(x)]p(x) dx. \quad (21.2)$$

К ГЛАВЕ X

§ 22. Некоторые неравенства для функций из класса L^p

Теорема 1. Если $f(x) \in L^p[-\pi, \pi]$ и $\Phi(x) = \int_0^x |f(t)| dt$, то

$$\int_0^\pi \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^p dx \leq A_p \int_0^\pi |f(x)|^p dx \quad (p > 1), \quad (22.1)$$

где A_p зависит только от p .

Чтобы убедиться в этом, заметим, прежде всего, что при $\varepsilon > 0$ имеем, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^p dx = - \frac{\Phi^p(x)}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_\varepsilon^\pi + \frac{1}{p-1} \int_\varepsilon^\pi [\Phi^p(x)]' x^{1-p} dx = \\ &= - \frac{\Phi^p(\pi)}{(p-1)\pi^{p-1}} + \frac{\Phi^p(\varepsilon)}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_0^\pi \Phi^{p-1}(x) |f(x)| x^{1-p} dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$I(\varepsilon) < \frac{\Phi^p(\varepsilon)}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_\varepsilon^\pi \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^{p-1} |f(x)| dx. \quad (22.2)$$

По неравенству Гельдера

$$\Phi(x) = \int_0^x |f(t)| dt \leq \left\{ \int_0^x |f|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^x 1 \cdot dt \right\}^{\frac{p-1}{p}} = o\left(x^{\frac{p-1}{p}}\right) \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

а потому

$$\frac{\Phi^p(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее, снова по неравенству Гельдера,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^{p-1} |f(x)| dx &\leq \left\{ \int_{\varepsilon}^{\pi} \left(\frac{\Phi(x)}{x} \right)^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= [I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (22.3)$$

Соединяя (22.2) и (22.3), находим

$$I(\varepsilon) < o(1) + \frac{p}{p-1} [I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Деля обе части на $[I(\varepsilon)]^{\frac{p-1}{p}}$, находим

$$[I(\varepsilon)]^{\frac{1}{p}} < o(1) + \frac{p}{p-1} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$\left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{\Phi(x)}{x} \right)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

т. е. доказывает существование интеграла (22.2) и даже дает для него оценку

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\Phi(x)}{x} \right)^p dx \leq A_p \int_0^{\pi} |f(x)|^p dx, \quad (22.4)$$

где $A_p = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ — постоянная, зависящая только от p .

Теорема 2. Пусть $p > 1$, $\varphi(x) \geq 0$ и $\varphi^p(x)$ суммируема на $(1, \infty)$; если

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t) dt,$$

то и $\Phi^p(x)$ суммируема на $(1, \infty)$ и

$$\int_1^{\infty} \frac{\Phi^p(x)}{x^2} dx \leq A_p \int_1^{\infty} \varphi^p(x) x^{p-2} dx, \quad (22.5)$$

где A_p зависит только от p .

Эта теорема доказывается аналогично тому, как было доказано неравенство (22.4). Сначала заметим, что можно написать для любого $a > 1$ и любого $x > a$

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \int_a^x \varphi(t) t^{\frac{p-2}{p}} t^{\frac{p-2}{p}} dt \leq \left(\int_a^x \varphi^p(t) t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x t^{-\frac{p-2}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (22.6)$$

Отсюда мы выведем, что

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t) dt = o\left(x^{\frac{1}{p}}\right) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (22.7)$$

В самом деле, второй сомножитель в (22.6) имеет порядок $x^{\frac{1}{p}}$, а первый можно сделать как угодно малым, если a достаточно велико. Следовательно, взяв $\varepsilon > 0$ любое, можно выбрать a так, чтобы

$$\int_a^x \varphi(t) dt < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}.$$

Зафиксируем такое a , тогда

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \varphi(t) dt < \Phi(a) + \varepsilon x^{\frac{1}{p}}.$$

Но при достаточно большом x будем иметь $\Phi(a) < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}$, а тогда

$$\Phi(x) < 2\varepsilon x^{\frac{1}{p}}$$

Так как ε произвольно, то (22.7) доказано.

Далее имеем, интегрируя по частям

$$\int_1^x \frac{\Phi^p(t)}{t^2} dt = -\frac{\Phi^p(t)}{t} \Big|_1^x + p \int_1^x \Phi^{p-1}(t) \varphi(t) \frac{dt}{t}. \quad (22.8)$$

Так как $\frac{\Phi^p(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ в силу (22.7), то остается оценить интеграл в правой части (22.8). Для этого напишем

$$\Phi^{p-1}(t) \varphi(t) \frac{1}{t} = [\Phi^{p-1}(t) t^{-\frac{p-2}{p}}] [\varphi(t) t^{\frac{p-2}{p}}]$$

и применим неравенство Гельдера; получим

$$\int_1^x \Phi^{p-1}(t) \varphi(t) \frac{dt}{t} \leq \left(\int_1^x \frac{\Phi^p(t)}{t^2} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \varphi^p(t) t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\int_1^x \frac{\Phi^p(t)}{t^2} dt \leq o(1) + p \left(\int_1^x \frac{\Phi^p(t)}{t^2} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_1^x \varphi^p(t) t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (22.9)$$

Деля обе части (22.9) на первый из двух сомножителей правой части, найдем

$$\left(\int_1^x \frac{\Phi^p(t)}{t^2} dt \right)^{\frac{1}{p}} < o(1) + p \left(\int_1^x \varphi^p(t) t^{p-2} dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

и при $x \rightarrow \infty$ видим, что (22.5) справедливо. Этим заканчивается доказательство теоремы.

К ГЛАВЕ XI

§ 23. Вспомогательные теоремы из метрической теории множеств

Л е м м а *). Пусть $E \subset [a, b]$, $mE > 0$ и E_h — множество E , сдвинутое на h . Тогда

$$m(E_{-h}E_hE) \rightarrow mE \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $f(x)$, $f_h(x)$ и $f_{-h}(x)$ — характеристические функции множеств E , E_h , E_{-h} . Легко видеть, что

$$f_h(x) = f(x-h), \quad f_{-h}(x) = f(x+h).$$

*) Эта лемма и две следующие теоремы доказаны П. Л. Ульяновым.

Поэтому

$$m(E_{-h}EE_h) = \int_a^b f(x)f(x+h)f(x-h)dx.$$

С другой стороны, можно написать

$$mE = \int_a^b f^3(x)dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq mE - m(E_{-h}EE_h) = \left| \int_a^b f(x)[f(x+h)f(x-h) - f^2(x)]dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b f(x+h)|f(x-h) - f(x)|dx + \int_a^b |f(x+h) - f(x)|f(x)dx \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x-h) - f(x)|dx + \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по теореме об интегральных модулях непрерывности (см. Вводный материал, § 25).

Таким образом лемма доказана.

Из этой леммы вытекает

Т е о р е м а 1. Пусть $E \subset [a, b]$, $mE > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество E_ε , $mE_\varepsilon > mE - \varepsilon$ и последовательность чисел $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$ таких, что если $x_0 \in E_\varepsilon$, то

$$x_0 \in E, \quad x_0 + h_n \in E, \quad x_0 - h_n \in E \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23.1)$$

В самом деле, по лемме можно найти такие h_n , что

$$mE - m(E_{-h_n}E E_{h_n}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \quad (23.2)$$

Пусть

$$E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_{-h_n}E E_{h_n}).$$

Ясно, что $E_0 \subset E$. С другой стороны, из (23.2) вытекает, что

$$m(E - E_0) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{т. е.} \quad mE_0 > mE - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь достаточно положить $E_\varepsilon = E_0$, и теорема 1 доказана, так как если $x_0 \in E_\varepsilon$, то $x_0 \in E_{-h_n}E E_{h_n}$ для всех n , а это значит, что для всех n выполнено (23.1), и теорема 1 доказана.

Отсюда легко выводится

Т е о р е м а 2. Если $E \subset [a, b]$ и $mE > 0$, то найдется множество $\mathcal{E} \subset E$, $m\mathcal{E} = mE$, и последовательность положительных чисел $h_n \rightarrow 0$ таких, что если $x_0 \in E$, то

$$x_0 - h_n \in E \text{ и } x_0 + h_n \in E \text{ для } n \geq n(x_0).$$

Действительно, положим

$$\mathcal{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_{-h_n}E E_{h_n}),$$

где множества E_{h_n} выбраны, как в теореме 1. Ясно, что $m\mathcal{E} = mE$, так как, полагая

$$H_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} (E_{-h_i}E E_{h_i}),$$

имеем $H_k \subset H_{k+1}$ при любом k и в силу (23.2) $m(E - H_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Наконец, $mE = \lim mH_k$, и это заканчивает доказательство.

К ГЛАВЕ XII

§ 24. Теорема Минковского

Теорема Минковского. Пусть

$$t_1, t_2, \dots, t_v$$

— любые числа. Каково бы ни было A , можно найти такое целое $q > A$ и такие целые p_1, p_2, \dots, p_v , что

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{v}}} \quad (i = 1, 2, \dots, v). \quad (24.1)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если все t_i рациональны, то теорема становится тривиальной. Действительно, приводя тогда эти числа к общему знаменателю, имеем

$$t_i = \frac{s_i}{q_0} \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

где все s_i целые. Умножая числитель и знаменатель на N , где $N > A$ и целое, и полагая $q_0 N = q$, имеем

$$t_i = \frac{s'_i}{q} \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

где s'_i опять целые. Но тогда

$$\left| t_i - \frac{s'_i}{q} \right| = 0 < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{v}}} \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

и, кроме того, $q > A$. Значит, в этом случае теорема доказана.

Итак, интересно рассматривать лишь тот случай, когда хотя бы одно t_i иррационально.

Заметим теперь, что если дана последовательность чисел $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и если для иррационального числа t мы подобрали рациональные $\frac{p_m}{q_m}$ так, что

$$\left| t - \frac{p_m}{q_m} \right| < \varepsilon_m,$$

то знаменатели q_m неограниченно возрастают с ростом m .

Действительно, если бы это было неверно, то нашлось бы такое число A , что бесконечное множество знаменателей q_m не превосходит A , но тогда, будучи целыми, они могут принять лишь конечное число разных значений. Если так, то нашлось бы такое число q' , что $q_m = q'$ для бесконечного множества значений m . Но расстояние от t до ближайшего рационального числа со знаменателем q' есть постоянная величина, а потому разность

$\left| t - \frac{p_i}{q'} \right|$ не может быть сделана меньше ε_m для бесконечного множества значений m .

Пусть теперь m — любое целое. Разобьем v -мерный куб $-\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}$ ($i = 1, \dots, v$) на $T = m^v$ кубиков за счет того, что каждое ребро делим на m равных частей. Рассмотрим точки M_k с координатами $\{kt_1\}, \{kt_2\}, \dots, \{kt_v\}$, где $k = 0, 1, \dots, T$. Таких точек будет $T + 1$, все они лежат в нашем кубе, значит хотя бы в одном кубике их две. Пусть это точки M_{k_1} и M_{k_2} ; для определенности положим $k_1 > k_2$. Имеем

$$|\{k_1 t_i\} - \{k_2 t_i\}| \leq \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

или

$$|(k_1 - k_2)t_i - p_i| \leq \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

где p_i какие-то целые. Положим $q = k_1 - k_2$. Тогда $q \leq T$ и

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{mq} \quad (i = 1, 2, \dots, v). \quad (24.2)$$

На основании предыдущих замечаний, так как хоть одно из t_i иррационально, то для того, чтобы выполнялись условия (24.2), а значит, и подалю условия

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, v), \quad (24.3)$$

необходимо, чтобы с ростом m число q возрастало. Можно, следовательно, взять m столь большим, чтобы то q , для которого выполнены все неравенства (24.2), удовлетворяло требованию $q > A$.

Итак, взяв m достаточно большим, можно найти такое q , что $q > A$ и

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{mq}.$$

Но так как $m^v = T$, то $m = T^{\frac{1}{v}}$, а $T \geq q$, поэтому $m > q^{\frac{1}{v}}$, откуда

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+\frac{1}{v}}} \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

и теорема полностью доказана.

Следствие теоремы Минковского. Для любых действительных t_1, t_2, \dots, t_v и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое целое λ , что

$$|\{\lambda t_i\}| \leq 2\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, v) \quad (24.4)$$

и

$$\lambda \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^v. \quad (24.5)$$

Заметим сначала, что достаточно рассматривать случай $\varepsilon < \frac{1}{2}$, так как $|\{y\}| \leq \frac{1}{2}$ при любом y . Пусть теперь

$$m = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$$

Из доказательства теоремы Минковского видно, что можно всегда найти такое $q \leq m^v$ что

$$\left| t_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{mq}$$

или

$$|qt_i - p_i| \leq \frac{1}{m},$$

откуда

$$|\{qt_i\}| \leq \frac{1}{m}.$$

Но так как $m^v \leq \frac{1}{\varepsilon^v}$ и

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 2\varepsilon,$$

поскольку $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то, обозначая $\lambda = q$, видим, что неравенства (24.4) и (24.5) выполнены, а потому наше следствие доказано.

§ 25. Несколько теорем из теории рядов

Теорема 1. Пусть $f(x)$ положительна при $x > 0$ и $f(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Если $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), последовательность $\{u_n\}$ ограничена и $\sum u_n = +\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} \quad \text{и} \quad \sum \frac{u_n}{f(S_n)}$$

сходятся или расходятся одновременно (здесь $S_n = u_1 + \dots + u_n$).

Эта теорема доказана Валле-Пуссенем (см. [М.5] т. I, § 366, упр. 3) и Данжуа (Denjoy [3]).

Для доказательства изобразим на плоскости кривую $y = \frac{1}{f(x)}$ и отметим на ней точки M_n с координатами $\left(S_n, \frac{1}{f(S_n)}\right)$ (рис. 52).

Ясно, что прямоугольники P_n с площадью $u_n \frac{1}{f(S_n)}$ лежат под этой кривой, а потому, когда $\sum \frac{1}{f(n)}$ сходится (т. е. когда кривая ограничивает конечную площадь, то и $P_2 + \dots + P_n + \dots < +\infty$, т. е. $\sum \frac{u_n}{f(S_n)}$ сходится.

Напротив, если $\sum \frac{1}{f(n)}$ расходится, а это значит, что площадь, ограничиваемая нашей кривой, бесконечна, то $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n + \dots = \infty$, где Q_n — прямоугольник с площадью $u_n \frac{1}{f(S_{n-1})}$. Поэтому ряд

$$\sum \frac{u_n}{f(S_{n-1})}$$

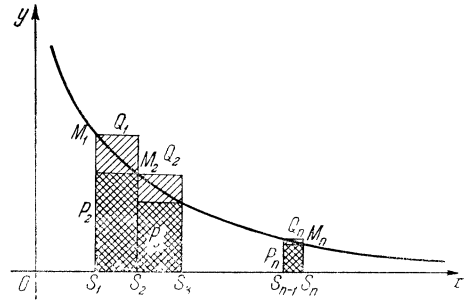


Рис. 52

расходится. Но тогда и $\sum \frac{u_n}{f(S_n)}$ также расходится, так как разность этих рядов есть сходящийся ряд. В самом деле, так как $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность, то $|u_n| < M$ ($n = 1, 2, \dots$), а потому для любых m и n , $n > m$, имеем

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k \left[\frac{1}{f(S_{k-1})} - \frac{1}{f(S_k)} \right] \right| \leq M \sum_{k=m}^n \left[\frac{1}{f(S_{k-1})} - \frac{1}{f(S_k)} \right] = M \left[\frac{1}{f(S_{m-1})} - \frac{1}{f(S_n)} \right]$$

и так как при $n \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, то и левая также, а тогда $\sum u_k \left[\frac{1}{f(S_{k-1})} - \frac{1}{f(S_k)} \right]$ есть сходящийся ряд.

Следствие. При сохранении тех же условий для u_n имеем

$$\sum \frac{u_n}{S_n} = +\infty \quad \text{и} \quad \sum \frac{u_n}{S_n^{1+\varepsilon}} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для доказательства достаточно положить $f(x) = x$ или $f(x) = x^{1+\varepsilon}$ в предыдущей теореме и заметить, что

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{и} \quad \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0.$$

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 2. Если $u_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$ и

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

то

$$\sum \frac{u_k}{R_k^{1-a}} < +\infty, \quad \text{где} \quad 0 < a \leq 1.$$

Действительно, на отрезке $(0, S)$, где $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, отмечаем точки $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ такие, что $A_{n-1} - A_n = u_n$ (рис. 53). Строим кривую

$$y = \frac{1}{x^{1-a}}$$

К ГЛАВЕ XIII

§ 26. Равномерное распределение

О п р е д е л е н и е. Последовательность точек

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

лежащих на $[a, b]$, будем называть *равномерно распределенной* на этом отрезке, если для любого интервала δ , лежащего на $[a, b]$, среди первых N точек из $\{x_n\}$ число N_δ тех точек, которые попали на интервал δ , удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_\delta}{N} = \delta.$$

Это понятие играет в теории чисел важную роль. В качестве примера последовательности, равномерно распределенной на $[0, 1]$, можно привести последовательность дробных долей $(n\theta)$ любого иррационального числа θ .

То, что эта последовательность равномерно распределена, можно было бы доказать непосредственно, но мы получим это из одной теоремы Вейля (Weyl [2]).

Т е о р е м а 1 (Вейля). *Для того чтобы последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ была равномерно распределена на $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы при любом целом $m \neq 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m x_k} = 0. \quad (26.1)$$

Чтобы убедиться в этом, докажем лемму:

Л е м м а. *Если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ — равномерно распределенная на $[0, 1]$ последовательность, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (26.2)$$

Для доказательства рассмотрим сначала случай, когда $f(x)$ есть функция ступенчатая на $[0, 1]$, т. е. $[0, 1]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых $f(x)$ постоянна. Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ — эти отрезки и c_1, c_2, \dots, c_m — значения $f(x)$ на них. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^m c_k \delta_k$$

и, с другой стороны, число p_k точек из x_1, \dots, x_n , попавших на δ_k , удовлетворяет условию

$$\frac{p_k}{n} \rightarrow \delta_k \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$p_k = n(\delta_k + \varepsilon_k^{(n)}), \text{ где } \varepsilon_k^{(n)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k p_k = \sum_{k=1}^m c_k \delta_k + \sum_{k=1}^m c_k \varepsilon_k^{(n)} \rightarrow \sum_{k=1}^m c_k \delta_k = \int_0^1 f(x) dx.$$

Если теперь функция $f(x)$ любая интегрируемая по Риману, то мы можем для любого ε подобрать две ступенчатые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ так, чтобы

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

и

$$\varepsilon + \int_0^1 f_1(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f_2(x) dx - \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_1(x_j) = \int_0^1 f_1(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx - \varepsilon$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_2(x_j) = \int_0^1 f_2(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \varepsilon,$$

откуда при достаточно большом n

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_2(x_j) \leq \int_0^1 f(x) dx + 2\varepsilon$$

и

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_1(x_j) \geq \int_0^1 f(x) dx - 2\varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx,$$

и лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы Вейля.

Условие необходимо. Положим для заданного m

$$f(x) = e^{2\pi i m x},$$

тогда, так как при $m \neq 0$ и целом

$$\int_0^1 e^{2\pi i m x} dx = 0, \quad (26.3)$$

мы, применяя лемму к действительной и мнимой части, сразу получаем справедливость утверждения.

Условие достаточно. Действительно, если (26.1) выполнено при всяком целом $m \neq 0$, то отсюда следует в силу (26.3), что при $f(x) = e^{2\pi i m x}$ равенство (26.2) имеет место. Но тогда для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)$$

равенство (26.2) также будет иметь место.

Пусть теперь $f(x)$ любая непрерывная на $[0, 1]$. Тогда можно подобрать тригонометрический полином $f_\varepsilon(x)$ такой, что $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Тогда $f_1(x) = f_\varepsilon(x) - \varepsilon$ и $f_2(x) = f_\varepsilon(x) + \varepsilon$ — два тригонометрических полинома такие, что $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, причем их интегралы отличаются от интеграла от $f(x)$ меньше, чем на 2ε . Ясно тогда, что соотношение (26.2) верно для $f(x)$. Наконец, пусть $f(x)$ ступенчатая; аппроксимируя ее сверху и снизу непрерывными, интегралы которых отличаются от ее интеграла как угодно мало, видим, что и для $f(x)$ соотношение (26.2) справедливо. В частности, оно верно, если $f(x) = 1$ на некотором δ и равно нулю вне его, а тогда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k}{n} = \int_0^1 f(x) dx = \delta,$$

где p_k — число точек из x_1, x_2, \dots, x_n , попавших на δ ; мы видим, что равномерность распределения этих точек доказана.

Итак, теорема Вейля доказана. В частности, из нее сразу вытекает равномерность распределения точек $(n\theta)$ на $[0, 1]$, если θ иррационально. Действительно,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m (k\theta)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m k \theta} = \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i m \theta} - e^{2\pi i m (n+1)\theta}}{1 - e^{2\pi i m \theta}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

так как θ , а значит, и $m\theta$ иррационально, а потому $e^{2\pi i m \theta} \neq 1$.

Теорема 2. Если θ иррациональное, то числа $(n^p \theta)$, где $n = 1, 2, \dots$, а p — целое, равномерно распределены на $[0, 1]$.

Для доказательства, согласно критерия Вейля, достаточно доказать, что при любом целом $m \neq 0$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m k^p \theta} = o(1)$$

Так как $m\theta$ опять иррационально при любом $m \neq 0$, то достаточно доказать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k p \theta} = o(1)$$

для любого иррационального θ .

Для случая $p = 1$ теорема только что была доказана. Покажем, что если она верна для $1, 2, \dots, p-1$, то верна и для p , тогда она будет справедлива для всех целых p .

Сделаем предварительно общее замечание: пусть $\varphi(n)$ — некоторая комплексная функция целочисленного аргумента такая, что

$$|\varphi(n)| = 1$$

при любом n . Тогда при любом n и любом $m < n$

$$\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{k=1}^n \varphi(k+1) + \alpha_1, \quad \text{где } |\alpha_1| \leq 2,$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{k=1}^n \varphi(k+2) + \alpha_2, \quad \text{где } |\alpha_2| \leq 4,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{k=1}^n \varphi(k+m) + \alpha_m, \quad \text{где } |\alpha_m| \leq 2m,$$

откуда, складывая, найдем

$$\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(k+j) + O(m).$$

Число m мы подберем позже.

Пусть теперь $\varphi(k) = e^{2\pi i k p \theta}$, тогда

$$\sum_{k=1}^n e^{2\pi i k p \theta} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m e^{2\pi i (k+j) p \theta} + O(m),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k p \theta} \right|^2 &\leq 2 \left\{ \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m e^{2\pi i (k+j) p \theta} \right|^2 + O(m^2) \right\} \leq \\ &\leq 2 \left\{ \frac{n}{m^2} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^m e^{2\pi i (k+j) p \theta} \right|^2 + O(m^2) \right\} \end{aligned} \quad (26.4)$$

(в силу неравенства Буняковского). Но

$$\left| \sum_{j=1}^m e^{2\pi i (k+j) p \theta} \right|^2 = \sum_{j=1}^m e^{2\pi i (k+j) p \theta} \sum_{l=1}^m e^{-2\pi i (k+l) p \theta} = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m e^{2\pi i [(k+j)^p - (k+l)^p] \theta}. \quad (26.5)$$

Поэтому из (26.4) и (26.5) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k p \theta} \right|^2 \leq \frac{2n}{m^2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n e^{2\pi i [(k+j)^p - (k+l)^p] \theta} + O(m^2). \quad (26.6)$$

В сумме, стоящей в правой части (26.6), имеется m членов, для которых $j = l$; каждый такой член равен n , поскольку соответствующие слагаемые во внутренней сумме (где суммирование идет по k) все равны 1 и число их равно n . Если же $j \neq l$, то

$$(k+j)^p - (k+l)^p$$

есть многочлен порядка $p-1$ (относительно k) с целыми коэффициентами. Так как теорема предполагается уже доказанной для $1, 2, \dots, p-1$, то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i P_{p-1}(k) \theta} = o(1),$$

если $P_{p-1}^{(k)}$ — многочлен степени не выше $p-1$ относительно k . Поэтому при $j \neq l$ имеем

$$\sum_{k=1}^n e^{2\pi i[(k+j)^p - (k+l)^p]\theta} = o(n). \quad (26.7)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Подберем m так, чтобы $\frac{1}{m} < \varepsilon$. В силу (26.7) для любых фиксированных l и j можно подобрать n_1 так, что для $n \geq n_1$

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i[(k+j)^p - (k+l)^p]\theta} \right| < \varepsilon n. \quad (26.8)$$

В правой части (26.6) число членов суммы, где $j = l$, равно m , а к каждому из членов, где $j \neq l$, можно применить (26.8), число этих последних членов меньше, чем m^2 , отсюда

$$\left| \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n e^{2\pi i[(x+j)^p - (x+l)^p]\theta} \right| < mn + \varepsilon m^2 n \quad \text{для } n \geq n_1,$$

т. е. в силу (26.6)

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k^p \theta} \right|^2 \leq \frac{2n}{m^2} (mn + \varepsilon m^2 n) + O(m^2) \leq 2 \frac{n^2}{m} + 2\varepsilon n^2 + Cm^2 \quad \text{для } n \geq n_2,$$

где C — постоянное. Выбирая n_2 так, чтобы $n_2 \geq m$ и $C \frac{m^2}{n^2} < \varepsilon$ при $n \geq n_2$, найдем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k^p \theta} \right|^2 \leq \frac{2}{m} + 2\varepsilon + \varepsilon < 5\varepsilon \quad \text{при } n \geq n_2$$

в силу $\frac{1}{m} < \varepsilon$, т. е.

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k^p \theta} \right| < \sqrt{5\varepsilon}, \quad n \geq n_2,$$

а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это и значит, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k^p \theta} = o(1),$$

и теорема доказана.

К ГЛАВЕ XIV

§ 27. Мажорантные и минорантные функции

Пусть $f(x)$ суммируема на (a, b) . Непрерывную функцию $v(x)$ мы назовем *мажорантной функцией* для

$$\int_a^x f(t) dt,$$

если:

- 1) $v(a) = 0$,
- 2) $\int_a^x f(t) dt \leq v(x)$, $a \leq x \leq b$,
- 3) $\overline{D}v(x) \geq f(x)$ всюду, где $f(x) \neq +\infty$.

Здесь мы обозначили, как принято

$$\underline{D}F(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \overline{D}F(x_0) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Аналогично непрерывная $u(x)$ называется *минорантной функцией* для того же интеграла, если

- 1) $u(a) = 0$,

$$2) \int_a^x f(t) dt \geq u(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$3) \overline{D}u(x) \leq f(x) \text{ всюду, где } f(x) \neq -\infty.$$

Это понятие введено Валле-Пуссенем. Он доказал, что такие функции существуют и, более того, что можно для любого $\varepsilon > 0$ построить $v(\varepsilon, x)$ и $u(\varepsilon, x)$ так, чтобы

$$\int_a^x f(t) dt \leq v(\varepsilon, x) \leq \int_a^x f(t) dt + \varepsilon$$

и

$$\int_a^x f(t) dt - \varepsilon \leq u(\varepsilon, x) \leq \int_a^x f(t) dt$$

(см. Валле-Пуссен [М. 5] т. I, § 269; тот же результат можно получить, изучая связь интегралов Лебега и Перрона, см. Натансон [М. 16] гл. XVI, §§ 2, 3, 4 и 5).

§ 28. Теорема Минковского о системе линейных форм

Минковский (Minkowski [М. 31]) доказал теорему:

Пусть дана система из n линейных форм

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ L_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ L_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Если определитель системы $D \neq 0$, то существуют такие целые x_1, x_2, \dots, x_n , что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ и

$$|L_i| \leq \sqrt[n]{|D|} \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в целом ряде книг по теории чисел; в частности очень наглядно оно изложено Б. Н. Делоне (см. [1], § 23).

§ 29. Теорема Пизо

Теорема Пизо (Pisot [1]). *Пусть $\theta > 1$ и существует такое λ , что*

$$\frac{1}{\theta} \leq \lambda \leq 1$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n < +\infty. \quad (29.1)$$

*Тогда θ есть число Пизо *).*

Положим

$$w_n = \lambda \theta^n \quad (29.2)$$

и

$$w_n = a_n + \mu_n, \quad (29.3)$$

где a_n — ближайшее к w_n целое (по недостатку или по избытку), т. е. $-\frac{1}{2} \leq \mu_n \leq \frac{1}{2}$.

Ясно тогда, что из (29.1) следует $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi \mu_n < +\infty$, а это возможно только при

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 < +\infty. \quad (29.4)$$

Докажем теперь, что между числами a_n существует рекуррентное соотношение вида

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \dots + b_k a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (29.5)$$

*) Определение числа Пизо дано в § 20 главы XIV. Пизо доказывал также, что λ есть алгебраическое число из тела $K(\theta)$, но это нам не понадобится.

где все b_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — рациональные числа. Для этого предварительно докажем, что найдется такое k , для которого, полагая

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}, \quad (29.6)$$

имеем

$$D_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq k. \quad (29.7)$$

В самом деле, из членов каждой колонны D_n , начиная со второй, вычитаем члены предыдущей колонны, умноженные на θ , тогда получим

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & -\theta a_0 & \dots & a_n & -\theta a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & -\theta a_1 & \dots & a_{n+1} & -\theta a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & -\theta a_n & \dots & a_{2n} & -\theta a_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \eta_0 & \dots & \eta_{n-1} \\ a_1 & \eta_1 & \dots & \eta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \eta_n & \dots & \eta_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad (29.8)$$

где мы положили $\eta_p = a_{p+1} - \theta a_p$:

В силу (29.2) и (29.3) имеем

$$\eta_p = w_{p+1} - \mu_{p+1} - \theta(w_p - \mu_p) = \theta\mu_p - \mu_{p+1},$$

откуда

$$|\eta_p| < \theta|\mu_p| + |\mu_{p+1}|$$

и, значит,

$$\eta_p^2 \leq (\theta^2 + 1)(\mu_p^2 + \mu_{p+1}^2). \quad (29.9)$$

В силу (29.4), полагая

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^2,$$

имеем $R_n \geq R_{n+1}$ и $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу (29.9)

$$\sum_{p=m}^{\infty} \eta_p^2 \leq (\theta^2 + 1)(R_m + R_{m+1}) \leq 2(\theta^2 + 1)R_m. \quad (29.10)$$

По теореме Адамара*) имеем из (29.8)

$$D_n^2 \leq (a_0^2 + \dots + a_n^2) \sum_0^n \eta_p^2 \sum_1^{n+1} \eta_p^2 \dots \sum_{n-1}^{2n-1} \eta_p^2 \leq [2(\theta^2 + 1)]^n \sum_{p=0}^n a_p^2 R_0 R_1 \dots R_{n-1}. \quad (29.11)$$

Но

$$a_p = w_p - \mu_p = w_p \left(1 - \frac{\mu_p}{w_p}\right) \quad (29.12)$$

и так как $w_p \uparrow$ и $w_1 = \lambda\theta \geq 1$ в силу $\frac{1}{\theta} \leq \lambda \leq 1$, то

$$|a_p| \leq w_p \left(1 + \frac{1}{2w_1}\right) \leq \frac{3}{2} w_p. \quad (29.13)$$

Следовательно, в силу (29.12) и (29.13)

$$\sum_0^n a_p^2 \leq \frac{9}{4} \sum_0^n w_p^2 = \frac{9}{4} \lambda^2 \sum_0^n \theta^{2p} < 3 \frac{\theta^{2n+1} - 1}{\theta - 1} < C \theta^{2n}, \quad (29.14)$$

где C — абсолютная константа.

*) Теорема Адамара заключается в том, что если

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_{i1}|^2 \sum_{i=1}^n |x_{i2}|^2 \dots \sum_{i=1}^n |x_{in}|^2.$$

См., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, стр. 208.

Из (29.11) и (29.14) находим

$$D_n^2 < C\theta^{2n} [2(\theta^2 + 1)]^n R_0 R_1 \dots R_{n-1} = C [2\theta^2(\theta^2 + 1)]^n R_0 R_1 \dots R_{n-1} = C \varrho_0 \varrho_1 \dots \varrho_{n-1},$$

где $\varrho_n = 2\theta^2(\theta^2 + 1) R_n$, а так как $R_n \rightarrow 0$, то $\varrho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $D_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Но D_n — определитель, элементами которого служат целые числа, значит D_n — целое число. Поэтому $D_n \rightarrow 0$ возможно только, если $D_n = 0$, начиная с некоторого номера k , т. е. (29.7) доказано. Однако для дальнейшего нам важно убедиться, что $k \neq 0$, т. е. что случай $D_n = 0$ для $n = 0, 1, \dots$ невозможен. С этой целью заметим, что a_0 есть ближайшее целое к $w_0 = \lambda\theta^0 = \lambda$, но $\frac{1}{\theta} \leq \lambda \leq 1$ следовательно, $a_0 = 0$ или 1. Если $a_0 = 1$, то $D_0 = a_0 \neq 0$ и доказательство закончено; если же $a_0 = 0$, то

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -a_1^2 \neq 0,$$

так как a_1 есть ближайшее целое к $w_1 = \lambda\theta$ и из $\frac{1}{\theta} \leq \lambda < 1$ следует, что $w_1 \geq 1$, т. е. $a_1 \neq 0$, а потому и $D_1 \neq 0$.

Итак, существует такое $k \geq 1$, что

$$D_{k-1} \neq 0 \text{ и } D_k = D_{k+1} = \dots = 0. \quad (29.15)$$

Докажем, что тогда соотношение (29.5) имеет место именно при этом k (и при разумно подобранных рациональных числах $b_1 \dots b_k$).

Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} &= -a_k, \\ \vdots & \\ a_{k-1} x_0 + a_k x_1 + \dots + a_{2k-2} x_{k-1} &= -a_{2k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (29.16)$$

Так как $D_{k-1} \neq 0$, в силу (29.15), то у этой системы существует решение, которое мы обозначим

$$x_0 = b_k, x_1 = b_{k-1}, \dots, x_{k-1} = b_1.$$

В силу того, что все a_n целые, числа b_1, \dots, b_k все рациональны.

Но по известной теореме из курса Высшей алгебры, если выполнено (29.15) и мы рассматриваем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_0 x_0 + \dots + a_n x_n &= 0, \\ a_1 x_0 + \dots + a_{n+1} x_n &= 0, \\ \vdots & \\ a_n x_0 + \dots + a_{2n} x_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29.17)$$

то числа x_k, x_{k+1}, \dots, x_n можно выбрать как угодно, например,

$$x_k = 1, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0, \quad (29.18)$$

подставить их в (29.17), решить полученную при этом систему относительно x_0, \dots, x_{k-1} (пусть $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{k-1}^0$ — это решение) и утверждать, что тогда

$$x_0^0, x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k = 1, x_{k+1} = \dots = x_n = 0$$

является уже решением всех уравнений системы (29.17). Но при подстановке (29.18) система (29.17) превращается в (29.16), т. е. решением ее будет

$$x_0^0 = b_k, x_1^0 = b_{k-1}, \dots, x_{k-1}^0 = b_1,$$

и отсюда следует, что

$$a_n b_k + a_{n+1} b_{k-1} + \dots + a_{n+k-1} b_1 + a_{n+k} = 0$$

справедливо для всех n , а это и есть соотношение (29.5), которое мы хотели получить (причем все b_i рациональны).

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$\sum_0^\infty a_n z^n$$

и докажем, что имеет место соотношение

$$\sum_0^{\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{1 + b_1 z + \dots + b_k z^k}, \quad (29.19)$$

где $P(z)$ — полином степени не выше $k-1$ с рациональными коэффициентами. Действительно, если мы произведем умножение

$$(1 + b_1 z + \dots + b_k z^k) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{\infty} A_p z^p, \quad (29.20)$$

то для любого $p \geq k$ коэффициент A_p при z^p равен нулю, так как, если считать $b_0 = 1$, то можем написать

$$A_p = \sum_{s=0}^k b_s a_{p-s} \quad (29.12)$$

и, полагая $p - k = n$, видим, что $A_p = 0$ в силу рекуррентного соотношения (29.5) для всех $p \geq k$.

Значит, правая часть (29.20) содержит лишь члены $A_0, A_1 z, \dots, A_{k-1} z^{k-1}$. Кроме того, их коэффициенты рациональны, так как они получаются по формуле (29.21) из рациональных b_n и целых a_n . Итак, правая часть (29.20) есть многочлен $P(z)$ степени не выше $k-1$ с рациональными коэффициентами и, значит, (29.19) справедливо.

Умножая числитель и знаменатель правой части (29.19) на некоторое целое число, мы можем добиться того, чтобы оба многочлена имели уже целые коэффициенты; кроме того, можно предположить (разделив, если нужно, на общий множитель), что общий наибольший делитель этих многочленов равен 1.

Итак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{R(z)}{T(z)}, \quad (29.22)$$

где $R(z)$ и $T(z)$ — многочлены с целыми коэффициентами и $D[R(z), T(z)] = 1$.

Пусть

$$T(z) = t_0 + t_1 z + \dots + t_s z^s. \quad (29.23)$$

Покажем, что все числа $\sigma_i = \frac{t_i}{t_0}$ целые.

Так как $D[R(z), T(z)] = 1$, то по известной теореме алгебры*) можно найти два многочлена с целыми коэффициентами, пусть $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ так, чтобы

$$P_1(z) R(z) + Q_1(z) T(z) = 1$$

или, умножая на целое t_0 ,

$$P_2(z) R(z) + Q_2(z) T(z) = t_0, \quad (29.24)$$

где $P_2(z)$ и $Q_2(z)$ — новые многочлены с целыми коэффициентами. Полагая

$$\varphi(z) = \frac{t_0}{T(z)}, \quad (29.25)$$

имеем в силу (29.24) и (29.22)

$$\varphi(z) = P_2(z) \frac{R(z)}{T(z)} + Q_2(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) P_2(z) + Q_2(z).$$

*) Имеется в виду хорошо известная

Теорема. Если $R(x)$ и $T(x)$ — два взаимно простых многочлена с целыми коэффициентами, то найдутся такие два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами, для которых

$$P(x) R(x) + Q(x) T(x) = 1. \quad (A)$$

Эта теорема обычно доказывается без требования, чтобы коэффициенты у $R(x)$ и $T(x)$ были целыми. Но тот способ, при помощи которого отыскивают многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, удовлетворяющие условию (A), показывает, что их коэффициенты окажутся целыми, если таковыми были коэффициенты у $R(x)$ и $T(x)$.

Таким образом, $\varphi(z)$ есть степенной ряд с целыми коэффициентами. Но $T(0) = t_0$ в силу (29.23), значит, в силу (29.25)

$$\varphi(0) = 1,$$

а потому из (29.25)

$$\frac{t_0}{T(z)} = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots, \quad (29.26)$$

где все β_i — целые. Следовательно, полагая

$$\frac{t_i}{t_0} = \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

найдем из (29.26) и (29.23)

$$\frac{1}{1 + \sigma_1 z + \dots + \sigma_s z^s} = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$$

Отсюда ясно, что все σ_i целые. Действительно,

$$1 = (1 + \sigma_1 z + \dots + \sigma_s z^s)(1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots),$$

а потому

$$\beta_1 + \sigma_1 = 0,$$

т. е. σ_1 целое,

$$\beta_2 + \beta_1 \sigma_1 + \sigma_2 = 0,$$

т. е. σ_2 целое, и т. д.

Итак,

$$T(z) = t_0 [1 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \dots + \sigma_s z^s],$$

где все σ_i целые.

Из (29.22) тогда получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{R(z)}{t_0 [1 + \sigma_1 z + \dots + \sigma_s z^s]}, \quad (29.27)$$

где все σ_i — целые.

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n \quad (29.28)$$

и докажем, что его радиус сходимости $R \geq 1$, а на окружности радиуса 1 он не может иметь полюсов.

Действительно, из (29.4) следует при $r < 1$, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n r^n \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} < +\infty,$$

поэтому если $|z| = r < 1$, то ряд (29.28) сходится; докажем, что при $|z_0| = 1$ в точке z_0 не может быть полюса.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем N так, чтобы $|\mu_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Тогда при $r < 1$

$$(1-r) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z_0^n r^n \right| \leq (1-r) \left| \sum_{n=0}^N \mu_n z_0^n r^n \right| + (1-r) \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_0|^n r^n < (1-r) \sum_{n=0}^N |\mu_n| + \varepsilon r^N,$$

и эта величина может быть сделана как угодно малой при $r \rightarrow 1$, значит,

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z_0^n r^n \right| = 0,$$

откуда и вытекает, что в z_0 не может быть полюса.

Но если $|\theta z| < 1$, то

$$\sum a_n z^n = \sum w_n z^n - \sum \mu_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n z^n - \sum \mu_n z^n = \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n,$$

значит, $\sum a_n z^n$ не может иметь полюса при $|z| < \frac{1}{\theta}$, а при $z = \frac{1}{\theta}$ должен быть полюс. Но тогда из (29.27) следует, что

$$\frac{R(z)}{t_0 [1 + \sigma_1 z + \dots + \sigma_s z^s]}$$

имеет полюс при $z = \frac{1}{\theta}$ и не имеет других полюсов при $|z| \leq 1$. Следовательно, $\frac{1}{\theta}$ есть корень уравнения $1 + \sigma_1 z + \dots + \sigma_s z^s = 0$, а остальные корни этого уравнения таковы, что $|z_i| > 1$. Но тогда уравнение

$$z^s + \sigma_1 z^{s-1} + \dots + \sigma_s = 0$$

имеет корнем $z = \theta$, а остальные корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ таковы, что $|\alpha_i| < 1$ ($i = 1, \dots, s-1$), а это и значит, что θ есть число Пизо.

§ 30. Об одной диофантовой задаче

В § 20 главы XIV ставился вопрос, для каких ξ , $0 < \xi < 1$, имеем

$$I(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi t \xi^j \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (30.1)$$

Заметим, прежде всего, что это имеет место для всякого ξ , обладающего таким свойством (назовем его *свойством A*): *существует такое $\varepsilon > 0$, что число $\psi(t)$ членов последовательности**)

$$\{t\}, \{t\xi\}, \dots, \{t\xi^j\}, \dots, \quad (30.2)$$

удовлетворяющих неравенству $|\{t\xi^j\}| \geq \varepsilon$,

стремится к бесконечности, т. е. $\psi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, если ξ обладает свойством A, то можно написать

$$|I(t)| \leq \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi t \xi^j|,$$

где знак \prod' означает, что мы сохраняем лишь те значения j , для которых (30.2) имеет место. Но так как для таких j имеем

$$|\cos \pi t \xi^j| = |\cos \pi \{t\xi^j\}| \leq \cos \pi \varepsilon = \eta < 1,$$

то

$$|I(t)| \leq \eta^{\psi(t)} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

поскольку $0 < \eta < 1$ и $\psi(t) \rightarrow \infty$.

В § 20 главы XIV мы обещали доказать, что (30.1) имеет место, если ξ — правильная дробь и $\xi \neq \frac{1}{m}$, где m целое. Теперь мы видим, что это будет доказано, если мы убедимся, что такие ξ обладают свойством A. Это же мгновенно вытекает из следующей теоремы (см. Н. К. Бари [3]).

Теорема. Пусть $\frac{u}{v}$ — правильная несократимая дробь, $u \neq 1$ и $\varepsilon < \frac{1}{u+v}$. Тогда при достаточно большом t число $\psi(t)$ членов последовательности

$$\left\{t \left(\frac{u}{v}\right)\right\}, \left\{t \left(\frac{u}{v}\right)^2\right\}, \dots, \left\{t \left(\frac{u}{v}\right)^j\right\}, \dots,$$

для которых

$$\left| \left\{t \left(\frac{u}{v}\right)^j\right\} \right| \geq \varepsilon, \quad (30.3)$$

удовлетворяет неравенству

$$\psi(t) > C \ln \ln t, \quad (30.4)$$

где C — константа, зависящая только от u и v .

*) Мы, как всегда, обозначаем через $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого числа.

Положим

$$r_j = \left\{ t \left(\frac{u}{v} \right)^j \right\}, \quad (30.5)$$

тогда

$$t \left(\frac{u}{v} \right)^j = w_j + r_j, \quad (30.6)$$

где все w_j целые и $-\frac{1}{2} \leq r_j < \frac{1}{2}$.

Пусть m — наименьшее целое число, для которого при заданном t

$$t \left(\frac{u}{v} \right)^m < \frac{1}{2}. \quad (30.7)$$

Имеем

$$m \geq \frac{\ln t + \ln 2}{\ln v - \ln u}. \quad (30.8)$$

Кроме того, ясно, что

$$w_j \begin{cases} > 0 & \text{для } j < m, \\ = 0 & \text{для } j \geq m. \end{cases} \quad (30.9)$$

Назовем число r_j «хорошим», если оно удовлетворяет условию (30.3), и «плохим», если

$$|r_j| < \varepsilon. \quad (30.10)$$

Докажем, что среди чисел r_1, r_2, \dots, r_m имеется $\varphi(m)$ хороших, где

$$\varphi(m) > \gamma \ln m, \quad (30.11)$$

а $\gamma > 0$ — положительная константа, зависящая только от u и v . Если это будет доказано, то в силу (30.8) будем иметь

$$\varphi(m) > \beta \ln \ln t,$$

где β — некоторая другая положительная константа, зависящая только от u и v , а так как $\varphi(t) \geq \varphi(m)$ по самому определению этих чисел, то наша теорема будет доказана.

Чтобы оценить $\varphi(m)$, допустим сначала, что два последовательных числа r_j и r_{j+1} оба плохие. Так как из (30.6) следует

$$t \left(\frac{u}{v} \right)^{j+1} = w_{j+1} + r_{j+1} = t \left(\frac{u}{v} \right)^j \frac{u}{v} = \frac{u}{v} (w_j + r_j),$$

то

$$|vw_{j+1} - uw_j| \leq |r_{j+1}|v + |r_j|u < \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v} = 1 \quad (30.12)$$

в силу того, что r_j и r_{j+1} оба плохие.

Но так как в левой части (30.12) стоит целое число и оно строго меньше 1, то оно равно нулю, т. е.

$$uw_j = vw_{j+1}.$$

Повторяя это рассуждение в случае, когда $r_j, r_{j+1}, \dots, r_{j+s}$ все плохие, найдем

$$u^s w_j = v^s w_{j+s}.$$

Но так как дробь $\frac{u}{v}$ несократима, то отсюда следует

$$w_j = v^s l, \quad (30.13)$$

где l целое, и притом $l \neq 0$ в силу (30.9), так как $j < m$.

Из (30.6) и (30.7) находим

$$t \left(\frac{u}{v} \right)^m = t \left(\frac{u}{v} \right)^j \left(\frac{u}{v} \right)^{m-j} < \frac{1}{2},$$

а потому

$$(w_j + r_j) \left(\frac{u}{v} \right)^{m-j} < \frac{1}{2},$$

т. е. в силу (30.13)

$$(v^s l + r_j) < \frac{1}{2} \left(\frac{v}{u} \right)^{m-j}.$$

Следовательно,

$$v^s l \leq \frac{1}{2} \left(\frac{v}{u} \right)^{m-j} + |r_j| \leq \left(\frac{v}{u} \right)^{m-j},$$

так как $\frac{v}{u} > 1$ и $m-j \geq 0$, а $|r_j| \leq \frac{1}{2}$.

Так как l целое и $l \neq 0$, то отсюда и подалвно

$$v^s \leq \left(\frac{v}{u} \right)^{m-j},$$

а потому

$$s \ln v \leq (m-j) (\ln v - \ln u),$$

т. е.

$$s \leq (m-j)\alpha, \quad (30.14)$$

где

$$\alpha = 1 - \frac{\ln u}{\ln v} < 1,$$

поскольку $u \neq 1$.

Итак, мы пришли к выводу: если группа плохих членов из конечной последовательности r_1, r_2, \dots, r_m начинается с номера j и состоит из $s+1$ членов, то s и j связаны неравенством (30.14).

Если все r_1, r_2, \dots, r_m хорошие, то $\varphi(m) = m$ и доказывать нечего. Если этого нет, то, вообще говоря, существует γ групп ($\gamma \geq 1$), каждая из которых состоит из записанных подряд плохих членов

$$(r_{j_1}, r_{j_1+1}, \dots, r_{j_1+s_1}); (r_{j_2}, r_{j_2+1}, \dots, r_{j_2+s_2}); \dots; (r_{j_\gamma}, r_{j_\gamma+1}, \dots, r_{j_\gamma+s_\gamma}),$$

где $s_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, \gamma$), а между каждыми двумя группами стоит по крайней мере по одному хорошему члену. Таким образом число хороших членов

$$\varphi(m) \geq \gamma - 1,$$

а точное его выражение

$$\varphi(m) = m - [(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + \dots + (s_\gamma + 1)] = m - (s_1 + s_2 + \dots + s_\gamma) - \gamma. \quad (30.15)$$

Так как $s_i \leq m\alpha$ и для любого $i \geq 2$ имеем, в силу расположения r_j в порядке возрастания индексов

$$j_i \geq s_1 + s_2 + \dots + s_{i-1}, \quad (30.16)$$

то из (30.14) и (30.16)

$$s_i \leq (m - j_i)\alpha \leq [m - (s_1 + \dots + s_{i-1})]\alpha$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} m - (s_1 + \dots + s_\gamma) &\geq m - (s_1 + \dots + s_{\gamma-1}) - [m - (s_1 + \dots + s_{\gamma-1})]\alpha = \\ &= [m - (s_1 + \dots + s_{\gamma-1})](1 - \alpha) \geq [m - (s_1 + \dots + s_{\gamma-2})](1 - \alpha)^2 \geq \dots \\ &\dots \geq (m - s_1)(1 - \alpha)^{\gamma-1} \geq m(1 - \alpha)^\gamma, \end{aligned}$$

а потому в силу (30.15)

$$\varphi(m) \geq m(1 - \alpha)^\gamma - \gamma.$$

Теперь заметим, что может быть два случая

$$\text{а) } m(1 - \alpha)^\gamma \geq \sqrt[\gamma]{m} \text{ или б) } m(1 - \alpha)^\gamma < \sqrt[\gamma]{m},$$

соответственно этому имеем

$$v \leq \frac{\frac{1}{2} \ln m}{|\ln(1 - \alpha)|} \quad \text{или} \quad v > \frac{\frac{1}{2} \ln m}{|\ln(1 - \alpha)|}.$$

Но тогда в случае а)

$$\varphi(m) \geq \sqrt[\gamma]{m} - \frac{1}{2} \frac{\ln m}{|\ln(1 - \alpha)|} > \gamma \ln m,$$

если $\gamma > 0$ разумно подобрано, а в случае б)

$$\varphi(m) \geq \nu - 1 > \frac{1}{2} \frac{\ln m}{|\ln(1-\alpha)|} - 1.$$

Значит, неравенство (30.11) доказано и этим закончено доказательство теоремы.

§ 31. О множествах типа $(H^{(s)})^*$

Назовем множество E *множеством типа $(H^{(s)})^*$* , если оно определено так, как это сделано для $H^{(s)}$ (см. § 15 главы XIV), но вместо целых чисел $n_k^{(l)}$ берутся любые такие $\lambda_k^{(l)}$, что $\lambda_k^{(l)} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ ($1 \leq l \leq s$); определение независимости последовательностей сохраняем прежнее. Докажем*) несколько свойств множеств типа $(H^{(s)})^*$.

1. Каково бы ни было a , если E есть $(H^{(s)})^*$ (или $H^{(s)}$), то и $\mathcal{E} = E - a$ есть $(H^{(s)})^*$ (соответственно $H^{(s)}$). Здесь $E - a$ означает множество точек t вида $t = x - a$, где $x \in E$; кроме того, мы будем, для простоты, считать E лежащим не на интервале $(0, 1)$, а на окружности длины 1, таким образом, сдвиги можно брать любыми.

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ — интервалы, входящие в определение E , т. е. найдутся такие независимые $\{\lambda_k^{(l)}\}$ ($l = 1, 2, \dots, s$), что для любого $x \in E$ и для любого k хотя бы при одном l имеем

$$(\lambda_k^{(l)} x) \notin \Delta_l.$$

Пусть $d = \min(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s)$. Возьмем такое целое m , что $\frac{1}{m} \leq \frac{d}{6}$ и разобьем окружность на m равных дуг. Найдется хотя бы одна дуга, в которую попадет бесконечное множество точек вида $(\lambda_k^{(1)} a)$, фиксируем ее, пусть c_1 — ее левый конец. Выбросим все те $\lambda_k^{(1)}$, для которых $(\lambda_k^{(1)} a)$ не попало на эту дугу, тогда для всех оставшихся k

$$c_1 \leq (\lambda_k^{(1)} a) < c_1 + \frac{1}{m}.$$

Из последовательностей $\{\lambda_k^{(2)}\}, \dots, \{\lambda_k^{(s)}\}$ выбросим все те члены, у которых индексы k такие же, как у выброшенных $\lambda_k^{(1)}$. Полученные таким образом последовательности назовем «очищенными». Из очищенной последовательности $\{\lambda_k^{(2)}\}$ выделим таким же образом подпоследовательность, для которой при некотором c_2 имеем

$$c_2 \leq (\lambda_k^{(2)} a) < c_2 + \frac{1}{m},$$

причем отметим все k , для которых при этом были выброшены члены $\lambda_k^{(2)}$, и выбросим все $\lambda_k^{(l)}$ с такими же k также при всех $l \neq 2$. Продолжим этот процесс «очистки». В результате через s шагов получим последовательности

$$\{\gamma_k^{(1)}\}, \{\gamma_k^{(2)}\}, \dots, \{\gamma_k^{(s)}\}$$

такие, что каждая $\{\gamma_k^{(l)}\}$ есть подпоследовательность $\{\lambda_k^{(l)}\}$, т. е. $\gamma_j^{(l)} = \lambda_{k_j}^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, s$), и последовательность k_j ($j = 1, 2, \dots$) одна и та же для всех l . Отсюда ясно, что последовательности $\{\gamma_k^{(l)}\}$ независимы, так как при $\sum_{l=1}^s x_l^2 > 0$ имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=1}^s \gamma_j^{(l)} x_l \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=1}^s \lambda_{k_j}^{(l)} x_l \right| = +\infty,$$

поскольку $\lambda_k^{(l)}$ были независимы. Кроме того, в силу построения $\{\gamma_k^{(l)}\}$ имеем при любом l

$$c_l \leq (\gamma_k^{(l)} a) < c_l + \frac{1}{m} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где значения c_l какие-то, но важно, что они от k не зависят.

Пусть теперь $t \in \mathcal{E}$, тогда $t = x - a$, где $x \in E$. Если $\Delta_l = (A_l, B_l)$, то положим $\delta_l = (a_l, b_l)$, где

$$a_l = A_l - c_l + \frac{1}{m}; \quad b_l = B_l - c_l - \frac{1}{m}.$$

*) Приведенные ниже доказательства даны студентом Московского университета М. И. Лившицем.

Ясно, что

$$\delta_l = \Delta_l - \frac{2}{m} \geq d - \frac{2}{m} \geq \frac{2}{3} d.$$

Покажем, что если $t \in \mathcal{E}$, то для любого k найдется такое l , что

$$(\gamma_k^{(l)} t) \bar{\in} \delta_l;$$

тогда будет ясно, что \mathcal{E} есть $(H^{(s)})^*$ (или $H^{(s)}$, если числа $\lambda_k^{(l)}$ были все целые, что имеет место, когда E есть $H^{(s)}$).

Действительно, раз $x \in E$, то для любого k найдется такое l , что

$$(\gamma_k^{(l)} x) \bar{\in} \Delta_l,$$

т. е.

$$\gamma_k^{(l)} x \bar{\in} (A_l + N, B_l + N)$$

при любом целом N . Но

$$\gamma_k^{(l)} t = \gamma_k^{(l)} x - \gamma_k^{(l)} a = \gamma_k^{(l)} x - c_l - \theta_k^{(l)} \frac{1}{m}, \text{ где } 0 \leq \theta_k^{(l)} < 1.$$

Поэтому

$$\gamma_k^{(l)} t \bar{\in} (A_l - c_l + N - \theta_k^{(l)} \frac{1}{m}, B_l - c_l - \theta_k^{(l)} \frac{1}{m} + N)$$

при любом целом N , т. е. и подавно

$$(\gamma_k^{(l)} t) \in (a_l, b_l) = \delta_l,$$

а потому наше предложение доказано.

Теперь выведем свойство II.

II. *Всякое $(H^{(s)})^*$ есть сумма конечного числа $H^{(s)}$, лежащих на непересекающихся интервалах.*

Этот факт обобщает теорему А. А. Шнейдера о множествах типа H^* (см. § 8 главы XIV).

Сохраним все обозначения, введенные при доказательстве свойства I. Пусть E_j — часть E , попавшая на $\left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right)$. Роль a пусть играет $\frac{j}{m}$, тогда сдвинутое E_j превратится в \mathcal{E}_j , лежащее на $\left[0, \frac{1}{m}\right)$. Оно будет типа $(H^{(s)})^*$, поскольку E_j типа $(H^{(s)})^*$, как часть E . Но мы покажем, что \mathcal{E}_j есть $H^{(s)}$.

Действительно, мы нашли, что для $t \in \mathcal{E}_j$ будем иметь при всяком k такое l , что

$$(\gamma_k^{(l)} t) \bar{\in} \delta_l(j),$$

где $\delta_l(j)$ получается, как δ_l тогда, когда роль a играет $\frac{j}{m}$. Для нас важно, что длина $\delta_l(j)$ не зависит от j и не меньше, чем $\frac{2}{3} d$.

Положим

$$n_k^{(l)} = \lfloor \gamma_k^{(l)} \rfloor.$$

Тогда все $n_k^{(l)}$ целые и при этом, так как для $t \in \mathcal{E}_j$ имеем $0 \leq t < \frac{1}{m}$, то

$$|n_k^{(l)} t - \gamma_k^{(l)} t| < \frac{1}{m}.$$

Следовательно, если $\delta_l(j) = (a_l(j), b_l(j))$ и $\bar{\delta}_l(j) = (a_l(j) + \frac{1}{m}, b_l(j) - \frac{1}{m})$, то во всяком случае

$$(n_k^{(l)} t) \bar{\in} \bar{\delta}_l(j).$$

Но длина $\bar{\delta}_l(j)$ не меньше, чем $\frac{2}{3} d - \frac{2}{m} \geq \frac{1}{3} d$. Значит, если мы докажем, что $\{n_k^{(l)}\}$ независимы, то \mathcal{E}_j будет $H^{(s)}$ множеством. Но это ясно, так как если $\sum x_i^2 > 0$, то

$$\left| \sum_{l=1}^s n_k^{(l)} x_l \right| = \left| \sum_{l=1}^s \gamma_k^{(l)} x_l \right| - \sum_{l=1}^s |x_l| \rightarrow \infty$$

при $k \rightarrow \infty$. Итак, всякое \mathcal{E}_j есть $H^{(s)}$, значит, и E_j также в силу свойства I, а тогда все доказано.

С л е д с т в и е. Всякое $(H^s)^*$ относительно $[0, 2\pi]$ есть U -множество.

Действительно, всякая сумма U -множеств, лежащих на неперекрывающихся отрезках, есть U -множество (см. § 6 главы XIV). Теперь можно доказать теорему:

Т е о р е м а. Пусть E есть множество типа $H^{(s)}$ относительно $[0, 1]$; пусть ξ любое и \mathcal{E} — множество точек вида $t = x\xi$, где $x \in E$. Если \mathcal{E} лежит на $[0, 1]$, то оно есть $(H^{(s)})^*$ и, следовательно, U -множество.

Действительно, пусть $\{n_k^{(l)}\}$ и Δ_l — числа, входящие в определение E , как множества типа $H^{(s)}$. Положим

$$\lambda_k^{(l)} = \frac{n_k^{(l)}}{\xi}.$$

Тогда $\lambda_k^{(l)} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и для $t \in \mathcal{E}$ имеем

$$(\lambda_k^{(l)} t) = (n_k^{(l)} x), \text{ где } x \in E.$$

Независимость $\{\lambda_k^{(l)}\}$ ($l = 1, 2, \dots, s$) очевидна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из хода доказательства видно, что получено несколько более сильное утверждение, а именно: если E есть множество типа $(H^{(s)})^*$ и \mathcal{E} лежит на $(0, 1)$, то \mathcal{E} есть снова $(H^s)^*$ (\mathcal{E} имеет тот же смысл, как в только что доказанной теореме).

БИБЛИОГРАФИЯ

А. МОНОГРАФИИ И УЧЕБНИКИ

а) На русском языке

1. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного, ГОНТИ, 1938.
2. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Харьков, 1938.
3. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, Изд. АН СССР, т. I, 1952 г., т. II, 1954 г.
4. Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Москва, 1937.
5. Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, перев. с франц., ГТТИ, Москва, 1933.
6. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, перев. с англ., ГОНТИ НКТП СССР, 1939.
7. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, перев. с нем., Физматгиз, Москва, 1958.
8. Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, перев. франц., ГТТИ, 1934.
9. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, Москва, 1915.
10. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, изд. 2-е, Гостехиздат, Москва, 1951.
11. Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, 1940.
12. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.
13. Мандельбройдт С., Квазианалитические классы функций, перев. с франц., ОНТИ, 1937.
14. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, Москва, 1950.
15. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
16. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.
17. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, перев. с нем., Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1941.
18. Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919.
19. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1950.
20. Рима н Б., Сочинения, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1948.
21. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, перев. с франц., ИЛ, Москва, 1954.
22. Сакс С., Теория интеграла, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1949.
23. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, перев. с англ., Гостехиздат, 1948.
24. Харди Г., Расходящиеся ряды, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1951.
25. Харди Г., Литтлвуд Д. и Полн а Г., Неравенства, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1948.

б) На иностранных языках

26. Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.
27. Denjoy A., *Calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Paris, 1941—1949.
28. Hardy G. H. and Rogosinski W., *Fourier Series*, Cambridge, 1944.
29. Hobson E. W., *Theory of functions of a real variable and the Theory of Fourier series*, Cambridge, 1921.
30. Lebesgue H., *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906.
31. Minkowski H., *Diophantische Approximationen*, Leipzig, 1907.
32. Plessner A., *Trigonometrische Reihen Pascals*, «Repertorium der höheren Analysis», т. I₃, Leipzig und Berlin, 1929.
33. Tonelli L., *Serie trigonometriche*, Bologna, 1928.
34. Vallée-Poussin Ch. J., *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1919.

Б. ЦИТИРОВАННАЯ ЖУРНАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Сокращенные названия журналов

а) На русском языке

ДАН Доклады Академии наук СССР. **ИАН** Известия Академии наук СССР, серия математическая. **МС** Математический сборник. **ТМИС** Труды Математического института им. В. А. Стеклова. **ТММО** Труды Московского математического общества. **ТЛИ** Труды Ленинградского индустриального института, раздел физико-математический. **УМН** Успехи математических наук. **УЗМ** Ученые записки Московского государственного университета.

б) На иностранных языках

AEN Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (Paris). **AJM** American Journal of Mathematics (Baltimore). **AM** Acta Mathematica (Uppsala). **Ac. Sz.** Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae (Szeged). **Ann. di M.** Annali di Matematica pura ed applicata (Bologna). **Ann.-Sc. N. P.** Annali di Scuola Normale Superiore di Pisa. **Ann. M.** Annals of Mathematics (Princeton). **At. A. L.** Atti Accademia Nazionale dei Lincei (Rome). **BAMS** Bulletin of the American Mathematical Society. **BSMF** Bulletin de la Société Mathématique de France (Paris). **CR** Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris. **DMJ** Duke Mathematical Journal (Durham). **FM** Fundamenta Mathematicae (Warszawa). **GN** Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. **JEP** Journal de l'Ecole Polytechnique (Paris). **JIMS** The Journal of the Indian Mathematical Society (Madras). **JLMS** Journal of the London Mathematical Society. **J.M.Ph.** Journal of Mathematics and Physics (Massachusetts Institute of Technology). **J.r.a.M.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (Berlin). **MA** Mathematische Annalen (Berlin—Göttingen—Heidelberg). **Mat** Matematica (Cluj). **MZ** Mathematische Zeitschrift (Berlin—Göttingen—Heidelberg). **Pr. A.M.S.** Proceedings of the American Mathematical Society. **PKNA** Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (Amsterdam). **PNAS** Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (Washington). **QJ** Quarterly Journal of Mathematics (Oxford). **RCMP** Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **St.M.** Studia Mathematica (Wroclaw). **TMJ** Tôhoku Mathematical Journal. **TAMS** Transactions of the American Mathematical Society.

Бари Н. К., 1. Sur l'unicité du développement trigonométrique, CR, 177 (1923), 1195—1197; FM, 9 (1927), 62—118.

2. Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, MA, 103 (1930), 145—248; 598—653.

3. Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème d'unicité du développement trigonométrique, MC, 2 (44) (1937), 699—722.

4. Проблема единственности изображения функции тригонометрическим рядом, УМН, 4, вып. 3 (31) (1949), 3—68.

5. Дополнение к моей статье «Проблема единственности изображения функции тригонометрическим рядом», УМН, 7, вып. 5 (51) (1952), 193—196.

6. О примитивных функциях и тригонометрических рядах, сходящихся почти всюду, MC, 31 (73), 1952, 687—702.

7. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, ИАН, 18 (1954), 159—176.

8. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, ИАН, 19 (1955), 285—302.
9. О локально-наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами, УЗМ, вып. 181, Математика, т. VIII (1956), стр. 107—138.
- Бари Н. К. и Меньшов Д. Е., 1. Sur l'intégrale des Lebesgue—Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues, Ann. di M., Serie IV, т. V (1927—28), 19—54.
- Бари Н. К. и Стечкин С. Б., 1. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, ТММО, т. V (1956), 485—522.
- Безикович А. С., 1. Об одном структурном свойстве функций и ансамблей, МС, 31 (1922), 128—147.
- Бернштейн С. Н., 1. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Собр. соч., т. I, стр. 11—104.
2. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, Сочинения, т. I, стр. 217—223.
3. Об одном методе суммирования тригонометрических рядов, Сочинения, т. I, стр. 523—525.
4. Замечание по поводу заметки Р. Салема, Сочинения, т. II, стр. 159—160.
5. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, Сочинения, т. II, стр. 166—169.
6. О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье, Сочинения, т. II, стр. 178—183.
- Быков Я. В., 1. К теории тригонометрических рядов, Уч. зап. Каз. унив., 98:7 (1939), 47—51.
- Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., 1. Коммутативные нормированные кольца, УМН, 1:2 (1946), 48—146.
- Гельфанд А. О., 1. Распределение дробных долей и сходимость функциональных рядов с пропусками, УЗМ, вып. 148, Математика, т. IV (1951), 60—68.
- Гермейер Ю. Б., 1. Производные Римана и Валье-Пуссена и их применение к некоторым вопросам из теории тригонометрических рядов, Диссертация, Москва, 1946.
- Делоне Б. Н., 1. Геометрия положительных квадратических форм, УМН, т. III, 1937, 16—62.
- Джваршейвили А. Г., 1. Об одном признаке сходимости ряда Фурье, Сообщ. Акад. наук Груз. ССР, 11 (1950), 403—407.
- Ивашев-Мусатов О. С., 1. О коэффициентах Фурье—Стилтьеса сингулярных функций, ИАН, 20 (1956), 179—196.
2. О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов, ИАН, 21 (1957), 559—578.
- Кайдаш Н. М., 1. О сходимости почти всюду рядов Фурье, Диссертация, МГУ, Москва, 1954.
- Козлов В. Я., 1. О связи между абсолютной сходимостью и единственностью разложения функций в тригонометрический ряд, ДАН, 15 (1937), 417—420.
2. О полных системах ортогональных функций, МС, 26 (68) (1950), 351—364.
- Колмогоров А. Н., 1. Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, FM, 4 (1923), 324—328.
2. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, FM, 7 (1925), 23—28.
3. Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, CR, 183 (1926), 1327—1329.
4. Ueber die Summen durch den Zufall bestimmten Grössen, MA, 99 (1928), 309—319.
5. Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy, FM, 11 (1928), 27—28.
6. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, FM, 5 (1924), 96—97.
7. Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ (1936).
- Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А., 1. Sur la convergence des séries de Fourier, CR, 178 (1925), 303—305.
- Колмогоров А. Н. и Хинчин А. Я., 1. Ueber Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, МС, 32 (1925), 668—677.
- Конюшков А. А., 1. О классах Липшица, ИАН, 21 (1957), 423—448.
2. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье, МС, 44 (86), 1958, 53—84.
- Кузьмин Р. О., 1. О некоторых тригонометрических неравенствах, Журн. Ленинград. физ.—мат. о-ва, 1 (1927), 233—239.
2. О тригонометрических рядах, расходящихся повсюду, ТЛИ, раздел физ.—мат., 10, вып. 3 (1936), 53—56.

- Лейбензон З. Л., 1. О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье, УМН, 9, № 3 (61), 1954, 157—162.
- Лозинский С. М., 1. On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes, МС, 14 (56) (1944), 175—268.
2. Об одной теореме N. Wiener'a, ДАН, 49 (1945), 562—565, ДАН, 53 (1946), 691—694.
3. Обращение теоремы Джексона, ДАН, 83 (1952), 645—647.
- Лузин Н. Н., 1. Об одном случае ряда Тейлора, Сочинения, т. I, стр. 25—30.
2. К основной теореме интегрального исчисления, Сочинения, т. I, стр. 5—24.
3. К абсолютной сходимости тригонометрических рядов, Собр. соч., т. I, стр. 31—40.
4. Функция (в математике), БСЭ (1-е изд.) (1934), т. 59, 314—334.
- Лузин Н. Н. и Привалов И. И., 1. О единственности и множественности тригонометрических рядов, Лузин, Собр. соч., т. I, стр. 280—318.
- Меньшов Д. Е., 1. Sur l'unicité du développement trigonométrique, CR, 163 (1916), 433—436.
2. Sur les séries de Fourier des fonctions continues, МС, 8 (50) (1940), 493—518.
3. Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques, МС, 9 (51) (1941), 667—692.
4. Sur la convergence uniforme des séries de Fourier, МС, 11 (53) (1942), 69—76.
5. Sur les sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues, МС, 15 (57) (1944), 385—432.
- 5а. Об универсальных тригонометрических рядах, ДАН, 49 (1945), 79—82.
6. О частных суммах тригонометрических рядов, МС, 20 (62) (1947), 197—237.
7. О сходимости по мере тригонометрических рядов, ТМИС, 32 (1950), 3—97.
8. О сходимости тригонометрических рядов, Ас. Sz., 12, Pars A (1950), 170—184.
9. О пределах неопределенности тригонометрических рядов, ДАН, 74 (№ 2) (1950), 181—184.
10. О некоторых вопросах теории тригонометрических рядов, Вестн. Моск. ун-та., сер. физ.-мат., № 8 (1950), 3—10.
11. О рядах Фурье непрерывных функций, УЗМ, 148 (1951), Математика, т. IV, 108—132.
12. О пределах неопределенности рядов Фурье, МС, 30 (72) (1952), 601—650.
13. О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММО, 1 (1952), 5—58.
14. О некоторых свойствах рядов Фурье, ИАН, 18 (1954), 379—388.
15. О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов, УЗМ, вып. 165, Математика, т. 7 (1954), 3—33.
16. О пределах неопределенности по мере частных сумм тригонометрических рядов, МС, 34 (76) (1954), 557—574.
17. О почти сходящихся тригонометрических рядах, МС, 37 (79) (1955), 265—292.
18. О пределах последовательностей частных сумм тригонометрических рядов, ДАН, 106 (1956), 777—780.
- Натансон И. П., 1. О суммировании рядов Фурье по методу С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского, ТЛИ, № 4, вып. 2 (1937), стр. 39—44.
- Немыцкий В. В., 1. О некоторых классах линейных множеств в связи с абсолютной сходимостью тригонометрических рядов, МС, 33 (1926), 5—32.
- Нерсесова Е. А., 1. Sur la multiplicité du développement trigonométrique, CR, т. 202 (1936), 195—197.
- Никольский С. М., 1. О линейных методах суммирования рядов Фурье, ИАН, 12 (1948), 259—278.
- Плесснер А. И., 1. О сопряженных тригонометрических рядах, ДАН 4 (1935), 235—238.
- Риман Б., 1. О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда, Сочинения, Гостехиздат, 1948, 225—261.
- Привалов И. И., 1. Sur les fonctions conjuguées, BSMF, 44 (1916), 100—103.
2. Обобщение теоремы Paul du Bois-Reymond'a, МС, т. 31 (1923), 229—231.
3. О дифференцировании рядов Фурье, МС, т. 30 (1915), 320—324.
- Пятецкий-Шапиро И. И., 1. К вопросу о единственности разложения функций в тригонометрический ряд, ДАН, 85 (1952), 497—500.
2. К проблеме единственности разложения функций в тригонометрический ряд, УЗМ, вып. 155, Математика, т. V (1952), 54—72.
3. Дополнение к работе «К проблеме единственности разложения функций в тригонометрический ряд», УЗМ, вып. 165, Математика, т. VII (1954), 79—97.
- Смирнов В. И., 1. Sur les valeurs limites des fonctions analytiques, CR, 188 (1929), 131—133.

- Стечкин С. Б., 1. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна, ДАН, 60 (1948), 1511—1514.
2. Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами, ДАН, т. 76 (1951), 33—36.
3. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, МС, т. 29 (71) (1951), 225—232.
4. О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, УМН, VI, № 2 (1951), 148—149.
5. О порядке наилучшего приближения непрерывных функций, ИАН, 15 (1951), 219—242.
6. О теореме Колмогорова—Селиверстова, ИАН, 17 (1953), 499—512.
7. Об абсолютной сходимости рядов Фурье, ИАН, т. 17 (1953), 87—98; т. 19 (1955), 221—246 т. 20 (1956), 385—412.
8. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, ДАН, т. 29 (71) (1951), 225—231; ДАН, т. 102 (1955), 37—40.
9. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами, ИАН, 20 (1956), 197—206.
10. Одна экстремальная задача для многочленов, ИАН, 20 (1956), 765—774.
11. О коэффициентах Фурье непрерывных функций, ИАН, 21 (1957), 93—116.
12. О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке, ИАН, 21 (1957), 711—728.
- Талалян А. А., 1. О сходимости ортогональных рядов, ДАН, 110 (1956), 515—516.
2. Сходимость почти всюду ортогональных рядов, Диссертация, Мат. инст. АН СССР, 1956 г.
- Темко К. В., 1. Выпуклая емкость и ряды Фурье, ДАН, т. 110, № 6 (1956); УЗМ, Математика, т. 9, вып. 186 (1959), 83—108.
2. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, МС, 43 (85) (1957), 401—408.
- Тиман А. Ф., 1. Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами, ИАН, 11 (1947), 263—282.
2. О некоторых методах суммирования рядов Фурье, ИАН, 14 (1950), 85—94.
3. Замечания о тригонометрических полиномах и рядах Фурье—Стилтьеса, УМН, XII, вып. 2 (74) (1957), 175—183.
- Тиман А. Ф. и Тиман М. Ф., 1. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, ДАН, 71 (1950), 17—20.
- Толстов Г. П., 1. Замечание к теореме Д. Ф. Егорова, ДАН, 22 (1939), 309—311.
2. О точках плотности линейных измеримых множеств, МС, 10 (52) (1942), 249—264.
- Ульянов П. Л., 1. Обобщение теоремы Марцинкевича, ИАН, 17 (1953), 513—524.
2. О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, УМН, VIII, № 6 (1953), 133—141.
3. О тригонометрических рядах с монотонно убывающими коэффициентами, ДАН, 90 (1953), 33—36.
4. Применение А-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов, МС, 35 (77), 1954, 469—490.
5. О продолжении функций, ДАН, 105 (1955), 913—915.
6. Об А-интеграле Коши I, УМН, XI № 5 (1956), 223—229.
7. А-интеграл и сопряженные функции, УЗМ, вып. 181, Математика, т. VIII (1956), 139—157.
8. О расходимости рядов Фурье, УМН, т. XII (75) (1957), 75—132.
9. О перестановках тригонометрической системы, ДАН, т. 116 (1957), 568—571.
10. О локальных свойствах сходящихся рядов Фурье, УЗМ, Математика, т. 9, вып. 186 (1959), 71—82.
11. Особые интегралы и ряды Фурье, Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., № 5 (1959), 33—42.
12. О рядах по переставленной тригонометрической системе, ИАН, 22, № 4 (1958), стр. 515—542.
13. О безусловной сходимости и суммируемости, ИАН, 22 (1958), 811—840.
- Фаддеев Д. К., 1. О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a, МС, I (43) (1936), 351—368.
- Харшиладзе Ф. И., 1. О методе суммирования С. Н. Бернштейна рядов Фурье, МС, 11 (53) (1942), 121—148.
- Хинчин А. Я., 1. Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy, CR, 162 (1916), 287—290.
2. Ueber die diadische Brüche, MZ, 18 (1923), 109—116.

- Черейская В. И., 1. Теорема о равномерной сходимости рядов Фурье, УЗМ, Матем., т. VIII (1956), 159—164.
- Шилов Г. Е., 1. О коэффициентах Фурье одного класса непрерывных функций, ДАН, 35 (1942), 3—7.
- Широков Ф. В., 1. О сопряженных тригонометрических рядах, Диссертация, МГУ, Москва, 1956.
- Шнейдер А. А., 1. О множествах, являющихся обобщением H -множеств, МС, т. 34 (76), 1954, 249—258.
- Alexits G. Ueber den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, Ac. Sz., 4 (1953), 95—101.
- Arbault J., 1. Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique, BSMF, 80 (1952), 253—317.
- Baia da E., 1. Il corpo convesso di Carathéodory, Ann. di M. (4) 39 (1955), 75—85.
- Banach S., 1. Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, St. M., т. II (1930), 207—220.
- Bellman R., 1. Random summability and Fourier series, BAMS, 49 (1943), 732—733.
2. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants, BAMS, 50 (1944), 741—744.
- Besicovitch A. S., 1. A general metric property of summable functions, JLMS, 1 (1926), 120—128.
- Boas R. P., 1. Integrability of trigonometric series, III, QJ, ser. (2), 3 (1952), 217—221.
- Beurling A., 1. Ensembles exceptionnels, AM, 72 (1940), 1—13.
- Bohr H., 1. Ueber einen Satz von J. Pal, Ac. Sz., 7 (1935), 129—135.
- Boks T. J., 1. Sur le rapport entre les méthodes d'intégration de Riemann et de Lebesgue, RCMP, 45 (1921), 211—264.
- Browman A., 1. On two classes of trigonometrical series, Thesis., University of Uppsala, Uppsala, 1947.
- Calderon A., 1. On theorems of M. Riesz and A. Zygmund, PAMS, 1 (1950), 533—535.
- Calderon A. P. and Zygmund A., 1. On the theorem of Hausdorff—Young and its extensions, Contribution to Fourier Analysis, Annals of Math. Studies, № 25 (1950), 166—188.
- Cantor G., 1. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, MA, 5 (1872), 123—132.
- Carathéodory C., 1. Ueber den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen die gegebene Werte nicht annehmen, MA, 64 (1907), 95—115.
2. Ueber den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, RCMP, 32 (1911), 193—217.
- Carleman T., 1. Ueber die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, AM, 41 (1918), 377—384.
2. A theorem concerning Fourier series, PLMS, 21 (1923), 483—492.
3. Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.
- Civin P. and Christenson H. E., 1. The multiplicity of a class of perfect sets, Pr. A. M. S., 4 (1953), 260—263.
- Denjoy A., 1. Sur quelques propriétés des séries à termes positifs, BSMF, 40, 3 (1912), 223—228.
2. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, CR, 156 (1912), 135—136.
3. Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables, AEN (3), XXXIV (1916), 127—222; (3), XXXV (1917), 181—236.
4. Sur l'intégrale riemannienne, CR, 169 (1919), 219—221.
- Du Bois-Reymond P., 1. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen, Abh. Akad. Wiss., München, XII (1876), 1—103.
2. Beweis das die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen, Abh. Akad. Wiss., München, XII (1876), 117—166.
- Erdős P., 1. On the convergence of trigonometric series, J. M. Ph., 22 (1943), 37—39.
- Fatou P., 1. Séries trigonométriques et séries de Taylor, AM, 30 (1906), 335—400.
2. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, BSMF, 41 (1918), 47—53.
- Fejér L., 1. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, JRAM, 138 (1910), 22—53.
2. Sur les singularités des séries de Fourier de fonctions continues, AEN, 28 (1911), 63—103.
3. La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, CR, 156 (1913), 46—49.
4. Ueber die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihen, GN (1925), 13—17.
- Frostman O., 1. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Lund, 1935.

- Gergen J. J., 1. Convergence and summability criteria for Fourier series, QJ (Oxf. ser.), 1 (1930), 252—275.
- Ghizzetti A., 1. Ricerche sui momenti di una funzione limitata compressa fra limiti assegnati, At. A. L. (7), 13 (1942), 1165—1199.
2. Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata compressa fra limiti assegnati, Ann. Sc. N. P. (3), 4 (1950), 131—156.
3. Ricerche abeliane e tauberiane compiute nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del calcolo, Ann. di M. (4), 34 (1953), 113—132.
- Gibbs W., 1. Fourier series, Nature, 59 (1908), 200.
- Hahn H., 1. Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge, Arch. d. Math. u. Phys., 28 (1919), 34—45.
- Hardy G. H., 1. On the summability of Fourier series, PLMS, 2, 12 (1913), 365—372.
2. Notes on some points in the integral calculus, Mess. of Math., 49 (1919), 149—155; 58 (1928), 50—52.
3. Remarks on three recent notes in the Journal, JLMS, 3 (1928), 166—169.
4. On certain criteria for the convergence of the Fourier series of a continuous function, Mess. of Math., 47 (1918), 149—156.
- Hardy G. H. and Littlewood J. E., 1. Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, CR, 156 (1913), 1307—1309.
2. Some problems concerning Diophantine approximation, AM, 37 (1914), 193—238.
3. Some problems of diophantine approximation: a remarkable trigonometrical series, PNAS, 2 (1916), 583—586.
4. Abel's theorem and its converse, PLMS, 18 (1919), 205—235.
5. Solution of the Cesaro summability problems for power series and Fourier series, MZ, 19 (1923), 67—96.
6. On the strong summability of Fourier Series, PLMS, 26 (1926), 273—286.
7. On the absolute convergence of Fourier series, JLMS, 3 (1928), 250—253.
8. Some new properties of Fourier constants, MA, 97 (1926), 159—209; JLMS, 6 (1931), 3—9.
9. Some new convergence criteria for Fourier series, JLMS, 7 (1932), 252—256; Ann. Sc. N. P., 3 (1934), 43—62.
10. The strong summability of Fourier series, FM, 25 (1935), 162—189.
11. Notes on the theory of series, XX; Generalization of a theorem of Paley, QJ, 8 (1937), 161—171.
12. The allied series of a Fourier series, PLMS (2), 24 (1925), 211—246.
- Hartman Ph. and Wintner A., 1. On sine series with monotone coefficients, JLMS, 28 (1953), 102—104.
- Hausdorff F., 1. Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, MZ, 16 (1923), 163—169.
- Helson H., 1. Proof of a conjecture of Steinhaus, PNAS, 40 (1954), 205—206.
2. On a theorem of F. and M. Riesz, Colloq. math., 3, № 2 (1955), 113—117.
- Herzog F., 1. A note on power series which diverge everywhere on the unit circle, Michigan Math. J., 2, № 2 (1953—1954), 175—177.
- Herzog F. und Piranian G., 1. Sets of convergence of Taylor series, DMJ, 16 (1949), 529—534.
- Heywood Ph., 1. A note on a theorem of Hardy on trigonometrical series, JLMS, 29 (1954), 373—378.
2. On the integrability of functions defined by trigonometric series, QJ, Oxford, ser. (2), 5 (1954), 71—76; 6 (1955), 77—79.
- Hille E. and Tamarkin J. D., 1. Remarks on a known example of a monotone continuous function, Am. Math. Monthly, 36 (1929), 255—264.
- Hille E. and Klein G., 1. Riemann's localization theorem for Fourier series, DMJ, 21 (1954), 587—591.
- Hobson E. W., 1. On the convergence of series of orthogonal functions, PLMS (2), 12 (1913), 297—308.
- Izumi Shin-ichi, 1. Some trigonometrical series, X, TMJ (2), 6 (1954), 69—72.
- Izumi S., Matsuyama N., Tsuchikura T., 1. Some negative examples, TMJ (2), 5 (1953), 43—51.
- Izumi S., Sâtô M., 1. Some trigonometrical series, XVIII, Proc. Jap. Acad., 32 (1956), 20—23.
- Jurkat W. und Peyerimhoff A., 1. Der Satz von Fatou—Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz, Arch. Math., 4 (1953), 285—297.
- Kaczmarz S., 1. Integrale vom Dinischen Typus, St. M., III (1931), 189—199.
- Kahane J. P., 1. Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes, J. Math. pures et appl., 35 (1956), 249—259.
2. Sur un problème de Littlewood, PKNA, Indag. math., A. 60, №3 (1957), 268—271.

- Kennedy P. B., 1. Fourier series with gaps, QJ, 7 (1956), 224—230.
 2. Remark on a theorem of Zygmund, JLMS, 33, № 1 (1958), 71—72.
- Kerschner R., 1. On singular Fourier—Stieltjes transforms, AJM, 58 (1936), 450—452.
- Khintchine A. and Kolmogoroff A., 1. Ueber Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, MC, 32 (1925), 668—677.
- Kuttner B., 1. A theorem on trigonometric series, JLMS, 10 (1935), 131—135.
- Landau E., 1. Ueber das Vorzeichen der Gausschen Summe, GN (1928), 19—20.
 2. Ueber eine trigonometrische Summe, GN (1928), 21—24.
- Lebesgue H., 1. Recherches sur la convergence des séries de Fourier, MA, 61 (1905), 251—280.
 2. Sur les intégrales singulières, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse (3), I (1909), 25—117.
- Lévy P., 1. Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Comp. Math., 1 (1934), 1—14.
 2. Sur quelques problèmes actuellement irrésolus et sans doute insolubles dans les théories des séries et des intégrales de Fourier, JEP, 145 (1939), 179—194.
- Littlewood J. E., 1. On the mean values of power series, PLMS, 25 (1924), 328—337; JLMS, 5 (1930), 179—182.
 2. On a theorem of Kolmogoroff, JLMS, 1 (1926), 229—231.
 3. On the Fourier coefficients of functions of bounded variation, QJ, 7 (1936), 219—226.
 4. Mathematical notes (14). On a theorem of Hardy and Littlewood, JLMS, 13 (1938), 194—195.
 5. On a theorem of Paley, JLMS, 29 (1954), 387—395.
- Littlewood J. E. and Paley R., 1. Theorems on Fourier series and power series, JLMS, 6 (1931), 230—233.
- Lorentz G. G., 1. Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen, MZ, 51 (1948), 135—149.
- Lukacs F., 1. Ueber die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourier-Reihe, J. r. a. M., 150 (1920), 107—112.
- Marcinkiewicz J., 1. Sur les séries de Fourier, FM, 27 (1936), 38—69.
 2. Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno, № 1 (1938), 19—24.
 3. Sur quelques intégrales du type de Dini, Ann. Soc. Polonaise Math., 17 (1938), 42—50.
 4. Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, Ann. Sc. N. P. 8 (1939), 239—240.
 5. Sur la sommabilité forte des séries de Fourier, JLMS, 14 (1939), 162—168.
 6. Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Mat., 16 (1940), 66—73.
 7. Sur la convergence des séries orthogonales, St. M., 6 (1936), 39—45.
- Marcinkiewicz J. and Zygmund A., 1. On the behaviour of trigonometric series and power series, TAMS, 50 (1941), 407—453.
 2. On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, FM, 26 (1936), 1—43.
 3. Two theorems on trigonometric series, MC, 2 (44), (1937), 733—738.
 4. Some theorems on orthogonal systems, FM, 28 (1937), 309—335.
- Mazurkiewicz S., 1. Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt$, St. M., III (1931), 114—118.
- Morse M. and Transue W., 1. A new application of the Young—Pollard convergence criteria for a Fourier series, DMJ, 18 (1951), 563—571.
- Sz. Nagy B., 1. Méthodes de sommation des séries de Fourier, I, Ac. Sz., 12 (1950), 204—210.
- Nash J. P., 1. Uniform convergence of Fourier series, The Rice Inst. Pamphl. (1953), Spec. Issue, Nov. 31—57.
- Neder L., 1. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, MA, 84 (1921), 117—136.
 2. Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier—Reihe, MZ, 49 (1944), 644—646.
- Noble M. E., 1. Coefficient properties of Fourier series with a gap condition, MA, 128, 55—62; correction (1954), 256.
- Orlicz W., 1. Ueber Kunjugierte Exponentenfolgen, St. M., 3 (1931), 200—211.
 2. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (III), Bull. Acad. Pol., Sér. (1932), 229—238.

3. Ueber unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I), St. M., IV (1933), 33—37.
- P a g n i M., 1. Un'osservazione sui coefficienti di Fourier di funzione crescenti, At. A. L. (8), 4 (1948), 672—675.
- P á l J., 1. Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier, CR, 158 (1914), 101—103.
- P a l e y R., 1. Some theorems on orthogonal functions, St. M., 3 (1931), 226—238.
2. On Fourier series with positive coefficients, J. LMS, 7 (1932), 205—208.
3. A note on power series, J. LMS, 7 (1932), 122—130.
- P a l e y R. and Z y g m u n d A., 1. On some series of functions, Proc. Cambr. Phil. Soc., 261 (1930), 337—357, 458—474, 28 (1932), 190—205.
- P i s o t C., 1. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. N. P. (2), 7 (1928), 205—248.
- P l a n c h e r e l M., 1. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, CR, t. 157 (1913), 539—541.
- P l e s s n e r A., 1. Ueber Konvergenz von trigonometrischen Reihen, J. r. a. M., 155 (1925), 15—25.
- P o l y a G. und S z e g ö G., 1. Ueber den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, J. r. a. M., 165 (1931), 4—48.
- R a d e m a c h e r H., 1. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen, MA, 87 (1922), 112—138.
- R a j c h m a n A., 1. Sur le principe de localisation de Riemann, C. R. de la Soc. Sci. de Varsovie, 11 (1918), 115—122.
2. Sur l'unicité du développement trigonométrique, FM, 3 (1922), 287—301.
3. Rectification et addition à ma Note «Sur l'unicité du développement trigonométrique», FM, IV (1923), 366—367.
4. Sur la multiplication des séries trigonométriques et sur une classe d'ensembles fermés, MA, 95 (1926), 388—408.
- R i e s z F., 1. Ueber die Fourier Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, MZ, 2 (1918), 312—315.
2. Ueber eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, MZ, 18 (1923), 117—124.
3. Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion, MZ, 18 (1922), 87—95.
- R i e s z M., 1. Sur les fonctions conjuguées, MZ, 27 (1927), 218—244.
- R i e s z M. and R i e s z F., 1. Ueber Randwerte einer analytischen Funktion, Quatr. Congrès des Math. Scand. (1916), 27—44.
- R o g o s i n s k i W., 1. Ueber die Abschnitte trigonometrischer Reihen, MA, 95 (1925), 110—134.
- 1a. Ueber die Abschnitte der Fourierreihen. Jahresb. der Deutsch. Math. Vereinigung 33, H. 9—12, 2 Abt. (1925), 87—88.
2. Reihensummierung durch Abschnitts-Koppelungen, MZ, 25 (1926), 132—149.
3. Abschnittverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen, MZ, 41 (1936), 75—136.
- R u d i n W., 1. Transformations des coefficients de Fourier, CR, 243 (1956), 638—640.
- S a l e m R., 1. Essais sur les séries trigonométriques, Actual. Sci. et Industr., № 862, Paris, 1940.
2. On some properties of symmetrical perfect sets, BAMS, 47 (1941), 820—828.
3. On trigonometrical series whose coefficients do not tend to zero, BAMS, 47 (1941), 899—901.
4. The absolute convergence of trigonometric series, DMJ, 8 (1941), 317—334.
5. On sets of multiplicity for trigonometrical series, AJM, 64 (1942), 531—538.
6. On singular monotonic functions of Cantor type, J. M. Ph., 21 (1942), 69—82.
7. A singularity of the Fourier series of continuous functions, DMJ, 10 (1943), 711—716.
8. On a theorem of Zygmund, DMJ, 10 (1943), 23—31.
9. Sets of uniqueness and sets of multiplicity, TAMS, 54 (1943), 218—228; 56 (1944), 32—49.
10. On a theorem of Bohr and Pál, BAMS, 50 (1944), 579—580.
11. Sur les transformations des séries de Fourier, FM, 33 (1945), 108—114.
12. Rectifications to the papers «Setz of uniqueness and sets of multiplicity I and II», TAMS, 63 (1948), 595—598.
13. New theorems on the convergence of Fourier series, PKNA, Indag. Math., 16 (1954), 550—555.
14. On a problem of Smiethies, PKNA, Indag. Math., 16 (1954), 403—407.
15. On strong summability of Fourier series, AJM, 77 (1955), 393—403.
- S a l e m R. and Z y g m u n d A., 1. Capacity of sets and Fourier series, TAMS, 59 (1946), 23—41.

2. On a theorem of Banach, PNAS, 33 (1947), 293—295.
3. On lacunary trigonometric series, PNAS, USA, 33 (1947), 333—338, part II, там же 34 (1948), 54—62.
4. Sur un théorème de Piatetcki—Shapiro, CR, 240 (1955), 2040—2042.
5. Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant, CR, 240 (1955), 2281—2283.
6. Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, AM, 91 (1954), 245—301.
- Satō Masaka, 1. Uniform convergence of Fourier series, Proc. Japan Acad., 30 (1954), 528—531; 698—701; 809—813; т. 31 (1955), 261—263, 600—605; т. 32 (1956), 99—104.
- Schaeffer A. C., 1. The Fourier—Stieltjes coefficients of a function of bounded variation, AJM, 61 (1939), 934—940.
- Sierpinski W., 1. Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, FM, 2 (1921), 41—49.
- Stein P., 1. On a theorem of M. Riesz, JLMS, 8 (1933), 242—247.
- Steinhaus H., 1. Sur une série trigonométrique divergente, C. R. de la Soc. sci. de Varsovie, V, Fasc. 3 (1912), 223—227.
2. Sur un problème de M. M. Lusin et Sierpinski, Bull. Acad. Sci. Cracovie (1913), 435—450.
3. Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier, Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie (1913), 113—116.
4. Sur quelques propriétés des séries trigonométriques et de celles de Fourier, Roczniki Akad. Umiejętności Cracow, 56 (1925), 175—225.
5. A divergent trigonometrical series, JLMS, 4 (1929), 86—88.
6. Nowa własność mnogości G. Cantora, 7 (1917).
- Sunouchi G., 1. On the convergence test of Fourier series, Math. Japon., 1 (1948), 41—44.
2. Convergence criteria for Fourier series, TMJ, 4 (1953), 187—193.
3. A Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere, Kodai Math. Sem. Rep., 1 (1953), 27—28.
4. On the strong summability of Fourier series, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 526—533.
- Szász O., 1. Ueber den Konvergenzexponent der Fourierschen Reihen, Münch. Sitzungsber. (1922), 135—150.
2. Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen, AM, 61 (1933), 185—201.
3. On the partial sums of certain Fourier series, AJM, 59 (1937), 696—708.
4. On the absolute convergence of trigonometric series, Ann. M., 47 (1946), 213—220.
- Szidon S., 1. Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen, MZ, 10 (1921), 121—127.
2. Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen in denen sehr viele Glieder fehlen, MA, 96 (1926), 418—419.
3. Verallgemeinerung eines Satzes über die Absolute Konvergenz von Fourier-Reihen mit Lücken, MA, 97 (1927), 675—676.
4. Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourierreihen, J. r. a. M., 163 (1930), 251—252.
5. Ein Satz über Fouriersche Reihen stetiger Funktionen, MZ, 34 (1932), 485—486.
6. Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier Koeffizienten, MZ, 32 (1934), 477—480.
7. Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, MZ, 32 (1934), 481—482.
8. Ueber orthogonale Entwicklungen, Ac. Sz., 10 (1943), 206—253.
- Tandori K., 1. Bemerkung zur Divergenz der Fourierschen Reihen stetiger Funktionen, Publ. Math., 2, Debrecen (1952), 191—193.
- Tauber A., 1. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatsh. f. Math. u. Phys., 8 (1897), 273—277.
- Titchmarsh E. C., 1. On conjugate functions, PLMS, 29 (1929), 49—80.
- Toeplitz O., 1. Ueber allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Math. Fizyczne, 22 (1911), 113—119.
- Tsuchikura T., 1. Remark on a theorem of Erdős and a problem of Zalcwasser, J. Math. Tokyo, 1 (1951), 27—31.
- Turán Pál, 1. Egy Steinhausféle problémáról. (Об одной проблеме Штейнгауза), Mat. Lapok, 4 (1953), 263—275.
2. On the strong summability of Fourier series, J. Ind. Math. Soc. (N. S.), 12 (1948), 8—12.
- Vallée-Poussin Ch. J., 1. Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier, RCMS, XXXI (1911), 296—299.

2. Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Bull. Acad. Roy. de Belg.* (1912), 702—718.
 3. Capacité des ensembles, Paris, 1937.
 - Verblunsky S., 1. On a class of perfect sets, *AM*, 65 (1935), 283—305.
 - Viola T., 1. Sull'insieme dei punti die convergenza delle serie trigonometriche generali, *Ann. Sc. N. P.* (2), 4 (1935), 155—162.
 - Wang F. T., 1. Note on H_2 summability of Fourier series, *JLMS*, 19 (1944), 208—209.
 - Weyl H., 1. Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, *MA*, 67 (1909), 225—245.
 2. Ueber die Gleichverteilung von Zahlen Mod. Eins., *MA*, 77, 3 (1916), 313—352.
 - Wiener N., 1. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *Massachusetts's Journal of Math.*, 3 (1924), 72—94.
 2. Tauberian theorems, *Ann. M.*, 33 (1932), 1—100.
 - Wiener N. and Wintner A., 1. Fourier Stieltjes transforms and singular infinite convolutions, *AJM*, 60 (1938), 513—522.
 - Yano Sh., 1. Notes on Fourier analysis (XV). On the absolute convergence of trigonometrical series, *TMJ*, 1 (1949), 46—49.
 - Young Fr., 1. Transformations of Fourier coefficients, *PAMS*, 3 (1952), 783—791.
 - Young L. C., 1. Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier, *CR*, 204 (1937), 470—472.
 - Young W. H., 1. A note on trigonometrical series, *Mess. of Math.*, 38 (1909), 44—48.
 2. Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe, *Münch. Sitzungsberichte*, 41 (1911), 361—371.
 3. Sur la généralisation du théorème de Parseval, *CR*, 155 (1912), 30—33.
 4. On the multiplication of successions of Fourier constants, *Proc. Roy. Soc. (A)*, 87 (1912), 331—339.
 5. On the determination of the summability of a function by means of its Fourier coefficients, *PLMS*, 12 (1913), 71—88.
 6. Sur la convergence des séries de Fourier, *CR*, 163 (1916), 187—190.
 7. On the convergence of the derived series of Fourier series, *PLMS*, 17 (1916), 195—236.
 - Zeller Karl, 1. Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen, *Arch. Math.*, 6 (1955), 335—340.
 - Zygmund A., 1. O module ciagłoci sumy szeregu sprezonego z szeregiem Fouriera, *Prace Math. fiz.*, 33 (1924), 125—132.
 2. Contribution à l'unicité du développement trigonométrique, *MZ*, 24 (1926), 40—46.
 3. Ueber die Beziehungen der Eindeutigkeitsfragen in den Theorien der trigonometrischen Reihen und Integrale, *MA*, 99 (1928), 562—589.
 4. Sur la convergence absolue des séries de Fourier, *JLMS*, 3 (1928), 194—196.
 5. Sur les fonctions conjuguées, *FM*, 13 (1929), 284—303; 18 (1932), 312.
 6. Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances, *St. M.*, III (1931), 77—91.
 7. On the convergence of lacunary trigonometric series, *FM*, 16 (1930), 90—107; 18 (1932), 312.
 8. On lacunary trigonometric series, *TAMS*, 34 (1932), 435—446.
 9. A remark on conjugate series, *PLMS*, 34 (1932), 392—400.
 10. Sur le caractère de divergence des séries orthogonales, *Mat.*, 9 (1935), 86—88.
 11. Proof of a theorem of Paley, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 34 (1938), 125—133.
 12. Note on the formal multiplication of trigonometrical séries, *Bull. Sem. Math. Univ. Wilno*, 2 (1939), 52—56.
 13. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence, *FM*, 30 (1938), 170—196; *PLMS*, 47 (1942), 326—350.
 14. Smooth functions, *DMJ*, 12 (1945), 47—76.
 15. On the theorem of Fejér—Riesz, *BAMS*, 52 (1946), 310—318.
 16. An example in Fourier series, *St. M.*, 10 (1948), 113—119.
-

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля лемма 18
 — метод суммирования 27
 — преобразование 17
 Абеля—Пуассона метод суммирования 152
 абсолютная сходимость и локальные свойства 638
 — — — модуль непрерывности 629
 — — тригонометрических рядов — см. условия сходимости
 Арбо 736, 750, 754, 755, 759, 761, 764
 Ахизера—Крейна теорема 235
 А-интеграл 585
 А-метод 27
 А*-метод 30, 887
 α -емкость — см. емкость (α)
 α -мера — см. хаусдорфова мера
 Базис 738, 757
 Банах 222, 312, 790, 880
 Банаха—Штейнгауза теорема 880
 Бари Н. К. 330, 351, 363, 392, 794, 795, 796, 802, 807, 827, 853, 898, 916
 Безикович 534
 Беллман 244
 Бёрлинг 363
 Бернштейн С. Н. 47, 209, 608, 618, 625, 713, 773, 883
 Бернштейна неравенство 47, 895
 Бернштейна—Рогозинского метод суммирования 483
 Бесселя неравенство 70
 Бляшке 540
 Бор 303
 Броман 851
 Быков Я. В. 780
 Бэр 880, 898
 Валле-Пуссен 247, 363, 789
 Ванг 489
 Вейерштрасса теорема 47, 93
 Вейль 331, 907
 Верблунский 807, 822
 верхний предел неопределенности частных сумм 865
 — — последовательности множеств 39
 Винер 205, 644
 вполне аддитивный класс множеств 883
 выпуклые кривые 19
 — последовательности 20
 — функций 19, 783
 Гельдера неравенство 32, 878
 Гельфанд И. М. 646
 Гермейер Ю. Б. 865
 Герцог 426
 Гиббса явление 123
 гладкие функции 181, 612, 689
 Гобсон 331
 Грама определитель 871
 Данжуа—Лузина теорема 173
 Джваршейшили А. Г. 338
 Джексон 881
 Дини признак 119, 246, 521
 Дини—Липшица признак 280, 293
 Дирихле множитель 440
 — проблема 160
 — ядро 94
 дифференциальные свойства суммы ряда 631, 676
 дю Буа-Реймон 198, 788, 790
 D-свойство 182
 Егоров Д. Ф. 529
 единственности проблема 792
 единственность лакунарных рядов 710
 емкость выпуклая 364
 — логарифмическая 363
 — обобщенная 367, 768
 — (α) 363
 Жордана признак сходимости 121, 246
 Замкнутость и ее связь с полнотой 72
 — системы функций 72
 Зигмунд 224, 227, 294, 306, 361, 364, 489, 510, 568, 613, 684, 696, 709, 801, 831, 845, 847, 865, 883, 895
 Ивашев—Мусатов О. С. 840
 Идзуми 267
 Иенсена неравенство 899
 изображение функции рядом 852
 индексы сходимости 354
 интеграл по мере m 883
 — Пуассона — см. Пуассона интеграл
 — тригонометрический 801
 — (A) 585
 — (P) 573
 — (Q) 585
 интегрирование тригонометрического ряда 787
 — — — Фурье 86, 220
 «исправление» функции 448, 459
 Каган 638
 Кайдаш Н. М. 384
 Кальдерон 564
 Кантора теорема единственности 191
 Кантора—Лебега теорема 174
 канторово совершенное множество 738, 739, 742, 744
 Каратеодори 235, 881
 Карлеман 311
 категория множества 880
 Качмаж 531
 Кеннеди 720
 класс аддитивный 883
 — H_δ 538
 — T_α 881
 Козлов В. Я. 778, 871
 Колмогоров А. Н. 179, 332, 391, 579
 Колмогорова и Хинчина теорема 225
 комплексная форма ряда Фурье 58
 — — тригонометрического ряда 55

- Конюшков А. А. 244, 647
 коэффициенты нуль-ряда 840
 — Тейлора функций из H_1 545
 — Фурье 57, 60, 63
 — — и интегральный модуль непрерывности 79
 — — непрерывных функций 311
 — — суммируемых функций 221
 — — функций из L^p 210
 — — класса $Lip\ \alpha$ 208, 691
 — — с ограниченным изменением 80, 203
 Крестенсон 807
 критерии сходимости рядов Фурье — см. условия сходимости
 критерий непрерывности функций с ограниченным изменением 205
 Кузьмин Р. О. 620, 722
 Кутнер 604
 Лакунарные последовательности 24, 178, 680
 — ряды 178, 185, 680, 684, 689, 693, 696, 701, 708, 713
 — — обобщенные 714
 — — Фурье 179, 688, 690
 — — — от непрерывных функций 691
 Ландау 621
 Лебега константы 115
 — метод суммирования 486
 — — — обобщенный 486
 — признак сходимости 254
 — теоремы 39, 41, 117
 Лебега—Гергена признак сходимости 263
 Леви 640
 Лейбензон З. Л. 646
 линейная зависимость 871
 линейный метод суммирования — см. метод суммирования
 линейных функционалов общий вид 45
 — — слабая сходимость 871, 46
 Литтльвуд 217, 226, 270, 271, 361, 579
 логарифмическая мера 384
 Лозинский С. М. 208, 481
 локализации принцип — см. принцип локализации
 Лоренц 204, 208, 209, 678
 Лузин Н. Н. 305, 331, 533, 556, 721, 751, 752, 787, 852, 865
 Лузина—Данжуа теорема 173, 764
 Лузина—Привалова теорема 528
 Мажорантные функции 910
 Мандельбройт 712
 Марцинкевич 332, 346, 380, 391, 402, 421, 489, 493, 510, 644, 801, 845, 865
 матрица Беллмана 244
 — Тёплица (T -матрица) 26
 — треугольная 474
 — Харди 244
 — F 474
 — F_c 474
 — T^* 26
 Меньшов Д. Е. 327, 438, 448, 459, 792, 804, 852, 857, 867, 868, 869, 870, 875
 мера 883
 — логарифмическая 384
 — Хаусдорфа 743
 Мерсера теорема 76
 метод суммирования (см. также суммируемость) 25
 — — Абеля (метод A) 28, 152
 — — Бернштейна—Рогозинского 483
 — — вполне регулярный 25
 — — Лебега 485
 — — линейный 25, 488
 — — множителей 29
 — — Пуассона 152
 — — регулярный 25
 — — Римана 187
 — — с треугольной матрицей 473
 — — средних арифметических (метод $(C, 1)$) 26
 — — Фейера 137
 — — Чезаро (C, α) 482, 887
 Минковский 35, 903, 911
 миноратные функции 910
 множество, допускающее нулевую последовательность 732
 — единственности — см. множество типа U
 — — для метода суммирования 844
 — — относительно последовательности 847
 — замкнутое в смысле сходимости почти всюду 869
 — меры нуль 838
 — относительно единственности 847, 851
 — положительной выпуклой емкости 364
 — — логарифмической емкости 363
 — — обобщенной емкости 367, 368
 — — α -емкости 363
 — с постоянным разбиением 836
 — типа А. С. 749, 752
 — — H 732, 733, 736, 796
 — — H_σ 735, 818
 — — $H^{(s)}$ 815
 — — H^* 799
 — — $(H^{(s)})^*$ 919
 — — M 192, 793, 794, 802, 803, 807, 822, 837
 — — M в узком смысле 823, 826
 — — — N 749, 752, 757, 759, 761
 — — N_0 736, 759
 — — N^* 753
 — — R 722, 730, 741, 743, 746, 757, 759
 — — U 781, 795, 797, 800, 801, 802, 812, 815, 817, 829
 — — U элементарное 814
 — — $U(S)$ 847
 — — $U(T)$ 844
 — — $U(T_\Delta)$ 851
 множители сходимости 146, 338
 модуль гладкости 57
 — — интегральный 878
 — — квадратичный 612
 — непрерывности 50, 881
 — — интегральный 51, 878
 — — квадратичный 609
 моменты функции 234
 Надь 476
 наилучшее приближение 49, 881
 Неванлинна 363
 Недер 320, 722
 некасательный путь 30
 Немыцкий В. В. 740, 757
 ненегативная последовательность 234
 неравенства Бернштейна 47, 895
 — Бесселя 69
 — Буяковского 33
 — Гёльдера 32, 878
 — для функций из L^p 32, 878, 899
 — Иенсена 899
 — Лебега 279
 — Минковского 35
 — Привалова 897
 — числовые 31
 — Юнга 32
 нижний предел неопределенности частных сумм 865

- Никольский С. М. 473, 476
 Нобль 714
 нормированные функции 61
 нулевая последовательность 732, 759
 нуль-ряд 778, 793, 840
 Образ множества 895
 операции над рядами Фурье 81
 Орлич 222, 313, 345
 ортогональная система функций 62
 ортогональный ряд 63
 особенности дю Буа-Реймона 128
 — Лебега 128
 — ряда Фурье 123, 128, 316
O- и *o*-отношения 36
 Палей — см. Пэли
 Паль 303
 Парсеваля равенство 73, 74
 — — для произведения двух функций 75, 218
 Пейеримхоф 640
 Пизо 829, 911
 Пираниан 426
 Планшерель 331
 Плесснер А. И. 332, 339, 516, 605
 Поля (Пюйа) 835
 полиномы тригонометрические 47, 307
 — — наилучшего приближения 49
 — — экстремальные 307
 — Фейера 128
 полнота 64
 — тригонометрической системы 65
 порция множества 794
 последовательность выпуклая 20
 — лакунарная — см. лакунарные последовательности
 — негативная 234
 — нулевая 732, 759
 — почти монотонно убывающая 773
 — с ограниченным изменением 19
 пределы неопределенности частных сумм 865
 предельная функция 869
 предельный элемент 869
 Привалов И. И. 519, 560, 790, 845, 852, 865, 897
 признаки сходимости — см. условия сходимости
 — типа Вейля 331
 примитивная 853
 принцип локализации 110, 198
 — Фрагмена—Линделёфа 877
 проблема моментов 234
 произведение рядов 85
 пространство L^p 15, 35, 45, 46, 899
 — C 15, 44
 Пуассона интеграл 152, 154, 156
 — метод суммирования 152, 865
 — суммы 152, 165
 — ядро 152
 Пуассона—Стилтьеса интеграл 163
 пуассоновские суммы 152, 165
 Пэли 217, 277, 306, 313
 Пятацкий-Шапиро И. И. 800, 814, 818, 822, 824
 Равноизмеримые функции 580
 равномерное распределение 907
 равномерной сходимости условия — см. условия сходимости равномерной
 Радемахера теорема 223
 — функции 61, 223, 314
 размерность 744
 Райхман 425, 736, 792, 796, 812
 расходимость тригонометрических рядов 721, 728
 Римана метод суммирования 187, 865
 — принцип локализации 110, 198, 421, 431, 521
 — теоремы 187, 881
 — функция 187, 788
 Римана—Стилтьеса интеграл 43
 Рисс 211, 550, 566, 571, 599, 634
 Рисса формулы 568, 587, 664
 Рисса—Фишера теорема 73, 74
 Рогозинского тождество 287
 Рудин 245
 ряд лакунарный — см. лакунарные ряды
 — по синусам или по косинусам 95, 649, 657
 — почти сходящийся 870
 — с ограниченным изменением 547, 549
 — сопряженный — см. сопряженный ряд
 — универсальный 870
 — Фурье аналитических функций 88
 — — для произведения 85
 — — «свертки» 82
 — — лакунарный (см. также лакунарные ряды) 179, 688, 690
 — — многократно дифференцируемых функций 88
 — — непрерывных функций 128, 130, 132, 133, 311, 691
 — — ортогональный 61
 — — расходящийся (см. также расходимость) 391, 406, 412
 — — сопряженной функции 582
 — — тригонометрический 58, 61
 — — функции из L^p 593, 657, 664
 — — с произвольным периодом 59
 — — функций четных и нечетных 61
 — Фурье—Стилтьеса 87
 — Фурье — (A) 590, 659
 — числовой 21, 546, 889, 904
 ряда Фурье дифференцирование 87, 161
 — — интегрирование 86, 220
 — — коэффициенты 57, 60, 63, 311
 — — суммирование — см. суммирование
 — — сходимость — см. условия сходимости
 — — в метрике L^p 593, 664
 — — усиленная 509
 Салем 137, 228, 231, 243, 285, 291, 306, 310, 323, 337, 354, 361, 364, 378, 500, 668, 671, 728, 746, 755, 764, 769, 776, 802, 828, 829, 831, 837
 Сас 279, 609, 647, 773
 Сато 299
 свертка функций 82, 34
 сдвинутые множества 901
 Сеге 835
 Селиверстов Г. А. 332
 Серпинский 434
 Сидон 226, 653, 693, 704
 сильная суммируемость 488
 симметрическая производная 161
 симметрические множества с постоянным отношением 829
 симметричные совершенные множества 827, 836

- сингулярные функции 895
 система функций замкнутая 72
 — — линейно зависящая 87
 — — нормированная 61
 — — ортогональная 62
 — — полная 64
 — — существенно линейно независимая 871
 Смирнов В. И. 519, 583
 сопряженные функции 518, 528, 550, 554, 566, 572, 582, 589
 сопряженный ряд 54, 103, 107, 406, 518, 526, 591, 593, 604
 Стечкин С. Б. 316, 348, 350, 426, 563, 609, 625, 628, 636, 646, 694, 703, 714, 722, 882
 суммирование — см. метод суммирования
 суммируемость сильная 488
 — (H, κ) 488
 — — с переменным показателем 500
 — $(H, 2)$ 493
 — $(C^*, 0)$ 516
 Сунуоти 407
 суперпозиция функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье 641
 существенная верхняя грань 33
 — линейная независимость 871
 сходимость абсолютная — см. абсолютная сходимость
 — в точке — см. условия сходимости
 — по мере 39
 — почти всюду — см. условия сходимости
 — равномерная (см. также условия сходимости) 68, 91
 С-свойство усиленное 457
 Талалян А. А. 875
 Тамаркин 828
 Тандори 522
 тауберовы теоремы 889
 Темко К. В. 364, 369, 851
 теорема о среднем 2-я 19
 Тёплица матрицы — см. T -матрицы
 — условия регулярности метода 26
 Тиман А. Ф. 243, 484, 882
 Титчмарш 572, 582, 586
 Толстов Г. П. 390, 422, 529
 точно разрывные функции 898
 точки абсолютной сходимости 750
 — густоты 819
 — Лебега 41, 893
 — плотности 893
 — разрыва суммы ряда Фурье 123, 128
 — расходимости — см. ряд Фурье расходящийся
 Туран 139, 501
 T -матрицы 26
 T^* -матрицы 26, 684
 Ульянов П. Л. 271, 342, 344, 351, 353, 435, 504, 538, 587, 590, 601, 659, 664, 667
 усиленная сходимость 509
 условие B_2 681
 — (I) 572
 — (L) 22, 23
 условия сходимости абсолютной 91, 209, 607, 608, 614, 618, 629, 632, 634, 636, 637, 640, 646, 752, 773
 — — в точке 118, 120, 121, 177, 179, 246, 247, 249, 254, 258, 271, 337
 — — (почти всюду) 346, 350, 378, 379, 380, 402, 521, 534, 751
 — — равномерной (см. также условия сходимости абсолютной) 91, 121, 177, 273, 276, 279, 280, 283, 291, 296, 299, 691
 — Тёплица 26
 Фату 40, 156, 160, 161, 178, 331, 750, 773
 Фейера леммы 77, 891
 — метод суммирования 137
 — суммы 136, 165
 — теоремы 139, 303
 — ядро 138
 Фейера—Лебега теорема 143
 фейеровские методы 481
 Фишера—Рисса теорема 73
 Фрагмена—Линделёфа принцип 877
 Фробениуса теорема 28
 Фростман 363
 Фубини теорема 44
 Фурье ряд — см. ряд Фурье
 — формулы 57, 63
 Фурье—Стилтьеса преобразование 824
 — — ряд 87, 163
 Φ -ограниченное изменение 287
 Хан 434
 Харди 244, 331, 488, 490
 Харди—Литтльвуда признак 271
 — — теоремы 217, 270, 271, 549, 890
 Хаусдорфа—Юнга теорема 211
 хаусдорфова мера 743
 — размерность 744
 Хелли теоремы 43
 Хелсона теорема 236
 Хилл 828
 Хинчин А. Я. 314
 Целлер 427
 Цутикура 500
 Частные суммы ряда Фурье 55, 103, 107, 117, 144, 865
 Чезаро метод — см. метод суммирования
 — средние 884
 число Пизо 829, 911
 — целое алгебраическое 829
 Шварца производная 185, 783
 Шилов Г. Е. 632, 637
 Широков Ф. В. 606
 Шнейдер А. А. 799
 Экстремальные свойства отрезков ряда Фурье 69
 — — полиномов 307
 элементарное U -множество 814
 Эрдеш 703, 761
 Юнг 32, 244, 249, 287, 521, 736, 792
 Юркат 640
 Ядро Дирихле 94
 — — сопряженное 94
 — метода суммирования 481
 — нуль-ряда 793
 — — приведенное 793
 — Пуассона 152
 — Фейера 138