ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ в 7–9 классах

7

8

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ в 7–9 классах

Пособие для учителей

7-е издание

Москва
«Просвещение»
2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
И39

Авторы:
Л. С. Атанасян,
В. Ф. Бутузов,
Ю. А. Глазков,
В. Б. Некрасов,
И. И. Юдина

Рецензенты:
учитель школы № 871 Москвы
И. В. Малышева,
учитель школы-гимназии № 67 Москвы
Л. И. Звавич

Изучение геометрии в 7—9 классах. Пособие для
И39 учителей / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др.]. — 7-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 255 с. : ил. — ISBN 978-5-09-021736-1.

Пособие предназначено для учителя, который преподает геометрию в 7—9 классах по учебнику авторов Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. Оно написано в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре.

Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-021736-1

© Издательство «Просвещение», 1997
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2001

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит комментарий к теоретическому и задачному материалу и методические рекомендации по проведению уроков по теме каждого параграфа В самом начале комментариев и рекомендаций к данному параграфу говорится о назначении этого параграфа. Далее внимание учителя обращается на те или иные моменты, связанные с изучением теоретического материала и решением задач. Для наиболее сложных теорем курса даны примерные планы проведения их доказательств. Эти планы рекомендуется записать на доске и в тетрадях, чтобы учащиеся смогли лучше усвоить логику рассуждений как при изучении теоретического материала в классе, так и при домашней работе с учебником Указаны теоремы, которые можно предложить учащимся проработать самостоятельно по учебнику.

При изучении курса геометрии решению задач должно быть уделено большое внимание. Все новые понятия, теоремы, свойства геометрических фигур, способы рассуждений должны усваиваться в процессе решения задач. На решение задач следует отводить в среднем не менее половины каждого урока. Достижению этой цели способствует большое количество и разнообразие задач, содержащихся в учебнике. Основными являются задачи к каждому параграфу. Среди них в начале курса значительную роль играют практические задания (начертить ту или иную фигуру, измерить те или иные отрезки или углы и т. д.). Дополнительные задачи к каждой главе имеют двоякое назначение: для основной работы, если задач к какому-то параграфу главы окажется недостаточно, и для повторения материала данной главы. Более трудные задачи можно использовать для внеклассной работы. По каждому классу в учебнике приведены задачи повышенной трудности. Они не являются обязательными и предназначены для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими особый интерес к математике. Их можно использовать также в кружках и на факультативных занятиях.

Помимо задач учебника, можно использовать упражнения, предложенные в данной книге. Среди них есть задачи по готовым рисункам, которые могут помочь подвести учащихся к новым понятиям и утверждениям, а также задачи для лучшего осмысления и усвоения изученного материала, для подготовки к самостоятельной или контрольной работе Даны образцы возможного оформления решения задач

К каждому параграфу даны рекомендации по распределению задач для работы в классе и дома. В домашних заданиях наряду с номерами пунктов учебника и номерами задач указаны номера вопросов для повторения к соответствующей главе. Предполагается, что при подготовке к уроку учащийся должен найти ответы

на эти вопросы в указанных пунктах учебника. Такой подход формирует умение самостоятельно работать с учебником.

Комментарии и рекомендации к каждому параграфу завершаются формулировкой основных требований, которые предъявляются к учащимся после изучения данного параграфа. Требования относятся как к знанию теоретического материала, так и к умению решать задачи и соответствуют принятым стандартам образования.

По каждой теме в книге приведены примерные самостоятельные и контрольные работы, указано назначение самостоятельных работ (обучающая или проверочная).

Представлены карточки для устного опроса учащихся по материалу каждой главы. Их можно использовать как в текущем, так и в итоговом контроле знаний и умений учащихся. Объем вопросов каждой карточки учитель может менять в зависимости от цели опроса и времени, отведенного на опрос.

Книга содержит также рекомендации по проведению уроков вводного и итогового повторения.

В заключение рекомендаций к каждой главе даны решения отдельных задач этой главы, а также комментарии и указания к некоторым задачам. Их назначение — показать либо образцы рассуждений, либо примерное оформление решения.

В соответствии со структурой основного учебника по каждому классу в конце даны решения либо комментарии и указания к решению отдельных задач повышенной трудности.

Как известно, в официальных программах по математике для общеобразовательных учреждений (М.: Просвещение, 1994) тематическое планирование учебного материала для основной школы составлено в двух вариантах, рассчитанных на различное число учебных часов в неделю. В настоящей книге за основу принят второй вариант тематического планирования учебного материала, согласно которому на изучение геометрии отводится:
в VII классе — 2 часа в неделю, всего 68 часов;
в VIII классе — I полугодие — 3 часа в неделю,
II полугодие — 2 часа в неделю, всего 84 часа;
в IX классе — 2 часа в неделю, всего 68 часов.

В соответствии с этим по каждому параграфу указано примерное количество отводимых на него уроков.

В конце книги в виде приложения дано примерное распределение уроков по главам и параграфам учебника как по второму, так и по первому вариантам почасового планирования.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, приведенные в книге, являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

VII КЛАСС

ГЛАВА I

Начальные геометрические сведения (10 ч)

В первой главе рассматриваются простейшие геометрические фигуры — точка, прямая, отрезок, луч, угол, вопрос сравнения и измерения отрезков и углов, вводятся понятия смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых

Введение основных понятий опирается на наглядные представления и на тот опыт, который накоплен учащимися при изучении математики в I—VI классах. Понятие аксиомы в первых двух главах не вводится и сами аксиомы не формулируются в явном виде. Вместе с тем необходимые исходные положения, на основе которых изучаются свойства геометрических фигур, приведены в описательной форме уже в первой главе.

Практические приложения геометрического материала, изложенного в этой главе, раскрываются в пунктах «Провешивание прямой на местности», «Единицы измерения Измерительные инструменты» и «Измерение углов на местности». Соответствующую практическую работу можно выполнить в удобное время учебного года.

При решении задач этой главы следует прежде всего опираться на наглядные представления учащихся.

§ 1. Прямая и отрезок (1 ч)

Назначение параграфа — систематизировать сведения о взаимном расположении точек и прямых; рассмотреть свойство прямой: через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну; ввести понятие отрезка; рассказать о практическом проведении (провешивании) прямых на местности.

Урок полезно начать с беседы о возникновении и развитии геометрии, используя вводный текст учебника, приложение 3, а также дополнительную литературу, в том числе книгу

Г. И. Глейзера «История математики в школе» (М.: Просвещение, 1982, 1983), статьи из Большой Советской энциклопедии и Детской энциклопедии.

В беседе важно подчеркнуть, что геометрия возникла в результате практической деятельности людей: нужно было сооружать жилища, храмы, проводить дороги, оросительные каналы, устанавливать границы земельных участков и определять их размеры. Важную роль играли и эстетические потребности людей: желание украсить свои жилища и одежду, рисовать картины окружающей жизни. Все это способствовало формированию и накоплению геометрических сведений. За несколько столетий до нашей эры в Вавилоне, Китае, Египте и Греции уже существовали начальные геометрические знания, которые добывались в основном опытным путем, но они не были еще систематизированы и передавались от поколения к поколению в виде правил и рецептов, например правил нахождения площадей фигур, объемов тел, построения прямых углов и т. д. Не было еще доказательств этих правил, и их изложение не представляло собой научной теории.

Первым, кто начал получать новые геометрические факты при помощи рассуждений (доказательств), был древнегреческий математик Фалес (VI в. до н. э.), который в своих исследованиях применял перегибание чертежа, поворот части фигуры и т. д., т. е. то, что на современном геометрическом языке называется движением.

Постепенно геометрия становится наукой, в которой большинство фактов устанавливается путем вывода, рассуждений, доказательств. Попытки греческих ученых привести геометрические факты в систему начинаются уже с V в. до н. э. Наибольшее влияние на все последующее развитие геометрии оказали труды греческого ученого Евклида, жившего в Александрии в III в. до н. э. Сочинение Евклида «Начала» почти 2000 лет служило основной книгой, по которой изучали геометрию. В «Началах» были систематизированы известные к тому времени геометрические сведения и геометрия впервые предстала как математическая наука. Эта книга была переведена на языки многих народов мира, а сама геометрия, изложенная в ней, стала называться евклидовой геометрией.

Полезно подчеркнуть также, что в геометрии изучаются формы, размеры, взаимное расположение предметов независимо от их других свойств: массы, цвета и т. д. Отвлекаясь от этих свойств и беря во внимание только форму и размеры предметов, мы приходим к понятию геометрической фигуры. Геометрия не только дает представление о фигурах, их свойствах, взаимном расположении, но и учит рассуждать, ставить вопросы, анализировать, делать выводы, т. е. логически мыслить.

В процессе беседы учитель может показать учащимся модели плоских и пространственных фигур и разъяснить различие меж-

ду ними. Такие фигуры, как отрезок, луч, прямая, угол, окружность, круг, треугольник, прямоугольник, являются плоскими, т. е. целиком укладываются на плоскости. Раздел геометрии, изучающий свойства фигур на плоскости, называется планиметрией (от латинского слова «планум» — плоскость и греческого «метрео» — измеряю).

При изучении п. 1 нужно исходить из того, что учащиеся знакомы с понятиями точки и прямой, умеют их изображать, знают, как они могут быть расположены относительно друг друга. Полезно напомнить, что прямая безгранична, а на рисунке изображается только часть прямой. Следует обратить особое внимание на обозначение прямых малыми буквами латинского алфавита, так как раньше учащиеся обозначали прямую двумя большими буквами, соответствующими двум точкам, лежащим на прямой.

Вопрос о расположении точек относительно прямой отрабатывается при выполнении практического задания 1 учебника. Желательно, чтобы учащиеся усвоили, что на каждой прямой лежит сколько угодно (бесконечно много) точек и также бесконечно много точек не лежит на данной прямой.

Переходя к утверждению «через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну», нужно иметь в виду, что оно известно учащимся из предшествующего курса математики. Перед формулировкой этого утверждения можно предложить задание на проведение прямых через данную точку, поставив при этом вопросы: можно ли через данную точку провести прямую? Сколько прямых можно провести через данную точку? Учащиеся должны сделать вывод, что через данную точку можно провести сколько угодно прямых.

Далее можно предложить провести прямую через две данные точки и ответить на вопрос: сколько таких прямых можно провести? Получив ответ, полезно посоветовать учащимся найти в учебнике (п. 1) формулировку соответствующего утверждения и отметить, что оно выражает неискривленность прямой, т. е. то свойство, которое отличает прямую от других линий (через две данные точки можно провести сколько угодно кривых линий, например окружностей, а прямых — только одну).

Различные случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости желательно рассмотреть с помощью рисунков учебника, плакатов, транспарантов для графопроектора. Очень важно обратить внимание учащихся на рассуждение, приводящее к выводу: две прямые не могут иметь более одной общей точки. Следует подчеркнуть учащимся, что логические рассуждения будут постоянно присутствовать при изучении геометрии. После этого учащиеся могут выполнить задания 2 и 3 и ответить на следующие вопросы:

1. Могут ли прямые OA и AB быть различными, если точка O лежит на прямой AB? (Прямые OA и AB не могут быть различ-

ными, так как обе они проходят через точки A и O, а через две точки проходит только одна прямая.)

2. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке C, и точка D, отличная от точки C и лежащая на прямой a. Может ли точка D лежать на прямой b? (Точка D не может лежать на прямой b, так как две прямые не могут иметь двух общих точек.)

Далее, используя рисунок 7 учебника, можно ввести понятие отрезка и предложить учащимся самостоятельно выполнить задание 5. Материал п. 2 «Провешивание прямой на местности» целесообразно изложить в виде беседы, а на одном из последних уроков учебного года, которые отводятся на повторение, можно провести практическую работу на местности.

Для проверки усвоения изученного материала полезно выполнить самостоятельную работу. Ее следует проводить в форме диктанта.

Самостоятельная работа

1. Начертите прямую и обозначьте ее буквой b.

а) Отметьте точку M, лежащую на прямой b.

б) Отметьте точку N, не лежащую на прямой b.

в) Используя символы $\in$ и $\notin$, запишите предложение «Точка M лежит на прямой b, а точка N не лежит на ней».

2. Начертите прямые a и b, пересекающиеся в точке M. На прямой a отметьте точку N, отличную от точки M.

а) Являются ли прямые MN и a различными прямыми?

б) Может ли прямая b проходить через точку N?

Ответы обоснуйте.

Учащимся, проявляющим интерес к изучению геометрии, можно предложить следующие вопросы для самостоятельной работы:

1. Сколько точек пересечения могут иметь три прямые? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте соответствующие рисунки.

2. На плоскости даны три точки. Сколько прямых можно провести через эти точки так, чтобы на каждой прямой лежали хотя бы две из данных точек? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте рисунки.

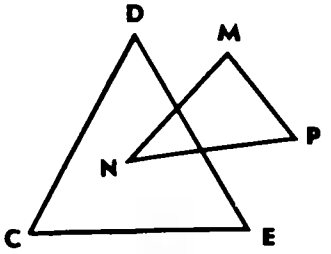


Рис. 1

3. Укажите все отрезки, изображенные на рисунке 1, с концами в обозначенных точках.

Дома: пп. 1, 2; вопросы 1—3 (с. 25); практические задания 4, 6, 7.

На первых уроках, комментируя домашнее задание, следует показать учащимся на примерах вопросов 1—3 повторения, как находить на них ответы в тексте учебника

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, сколько прямых можно провести через две точки, сколько общих точек могут иметь две прямые, какая фигура называется отрезком; **уметь** обозначать точки и прямые на рисунке, изображать возможные случаи взаимного расположения точек и прямых, двух прямых, объяснить, что такое отрезок, изображать и обозначать отрезки на рисунке

§ 2. Луч и угол (1 ч)

Назначение параграфа — напомнить учащимся, что такое луч и угол, ввести на наглядном уровне понятия внутренней и внешней областей неразвернутого угла, познакомить с различными обозначениями лучей и углов.

К уроку полезно подготовить таблицу (кодопозитив) с изображением лучей и углов и шарнирную модель угла, изготовленную из деревянных реек или другого подходящего материала.

Понятие луча можно ввести в процессе выполнения под руководством учителя следующих заданий:

1. Проведите прямую *a*. а) Отметьте на ней точки *A*, *B* и *C* так, чтобы точка *A* лежала между точками *B* и *C*. б) Назовите лучи, исходящие из точки *A*. в) Отметьте на луче *AB* точку *D*.

2. Укажите все лучи, изображенные на рисунке 2: а) исходящие из точек *M* и *D*; б) составляющие вместе с их общим началом одну прямую.

Далее можно предложить учащимся самостоятельно выполнить практическое задание 8 и перейти к изложению п. 4 «Угол», используя при этом заготовленную шарнирную модель угла. На модели показывается, из каких элементов состоит данная фигура, потом дается определение угла, вводятся различные способы его обозначения, понятия развернутого и неразвернутого углов, внутренней и внешней областей неразвернутого угла. Затем можно выполнить практические задания 9, 10, 11 и устно ответить на вопросы 5 и 6. После этого можно предложить учащимся начертить неразвернутый угол *hk*, заштриховать его внутреннюю область, провести луч *l*, исходящий из вершины и проходящий внутри этого угла, т. е. луч, разделяющий угол *hk* на два угла. Полезно отметить, что если угол *hk* развернутый, то любой луч *l*, исходящий из его вершины и не совпадающий с лучами *h* и *k*, также делит этот угол на два угла — *hl* и *lk*. Завершить урок можно выполнением практического задания 14.

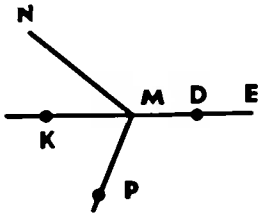


Рис. 2

Дома: пп. 3, 4; вопросы 4—6 (с. 25); практические задания 12, 13.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь объяснить, что такое луч, изображать и обозначать лучи, **знать**, какая геометрическая фигура называется углом, что такое стороны и вершина угла, **уметь** обозначать неразвернутые и развернутые углы, показать на рисунке внутреннюю область неразвернутого угла, проводить луч, разделяющий угол на два угла

§ 3. Сравнение отрезков и углов (1 ч)

Назначение параграфа — ввести одно из важнейших геометрических понятий — понятие равенства фигур, в частности равенства отрезков и углов, научить учащихся сравнивать отрезки и углы, ввести понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Понятие равенства геометрических фигур вводится на основе понятия наложения. Разумеется, учащиеся VII класса должны воспринимать это понятие так, как мы его наглядно представляем, а не как отображение плоскости на себя, свойства которого выражены в аксиомах. Поэтому при введении понятия равенства фигур желательно использовать модели различных плоских фигур (знакомых учащимся из курса математики I VI классов), для которых можно установить равенство непосредственным наложением одной фигуры на другую, а также плакат с фигурами $Ф_1$ и $Ф_2$, аналогичный рисунку 19 учебника, и кальку, с помощью которой учитель может показать процесс наложения одной фигуры на другую, описанный в учебнике.

При изучении п 5 следует обратить внимание учащихся на то, что задача сравнения фигур (их форм и размеров) является одной из основных задач в геометрии. На практике сравнить наложением две небольшие плоские фигуры вполне возможно, а вот два очень больших стекла, а тем более два земельных участка практически невозможно. Это приводит к необходимости иметь какие-то правила сравнения двух фигур, позволяющие сравнить некоторые их размеры и по результатам этого сравнения сделать вывод о равенстве или неравенстве фигур.

Полезно предложить учащимся сравнить несколько отрезков, изображенных на доске, среди которых есть равные (с помощью кальки, бечевки или циркуля). Затем ввести понятие середины отрезка и решить задачи 19, 20.

При сравнении углов полезно использовать транспаранты На двух пленках изображаются углы и с помощью графопроектора показывается, как равные углы можно совместить наложением. Выполнение заданий 21 и 22 позволяет лучше усвоить понятия «больше», «меньше», «равно» для углов, а также понятие биссектрисы угла

Для проверки усвоения нового материала можно провести самостоятельную работу (в форме диктанта).

Самостоятельная работа

1. На луче h с началом в точке O отложите отрезки OA и OB так, чтобы точка A лежала между точками O и B. Сравните отрезки OA и OB и запишите результат сравнения.

2. Начертите неразвернутый угол ABC и проведите какой-нибудь луч BD, делящий этот угол на два угла. Сравните углы ABC и ABD, ABC и DBC и запишите эти результаты сравнения.

При наличии времени проверку работы можно провести на этом же уроке с помощью графопроектора.

Дома: пп. 5, 6; вопросы 7—11 (с. 25); задачи 18, 23.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, какие геометрические фигуры называются равными, какая точка называется серединой отрезка, какой луч называется биссектрисой угла; **уметь** сравнивать отрезки и углы и записывать результат сравнения, отмечать с помощью масштабной линейки середину отрезка, с помощью транспортира проводить биссектрису угла.

§ 4. Измерение отрезков (2 ч)

Назначение параграфа — ознакомить учащихся с процедурой измерения отрезков, ввести понятие длины отрезка и рассмотреть свойства длин отрезков, ознакомить учащихся с различными единицами измерения и инструментами для измерения отрезков

Приступая к изучению параграфа, полезно напомнить учащимся, что в повседневной жизни нам часто приходится сталкиваться с измерением длин высот, расстояний. С точки зрения геометрии мы имеем в таких случаях дело с измерением отрезков. После этого можно рассказать о процедуре измерения отрезков.

Необходимо, чтобы у учащихся сформировалось четкое представление о том, что при выбранной единице измерения каждому отрезку соответствует определенное положительное число, которое и выражает длину отрезка. Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Затем полезно напомнить учащимся известные им единицы измерения отрезков, подчеркнув при этом, что единица измерения, в частности миллиметр, сантиметр или метр, есть некоторый отрезок.

Решив устно задание 26, можно далее выполнить задание 27, записав решение в тетрадь.

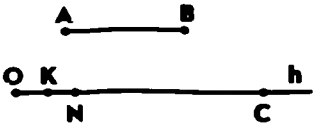


Рис. 3

Возможное оформление решения задачи

$$OC = 2AB,\ ON = \frac{1}{2}AB,$$

$$OK = \frac{1}{4}AB \text{ (рис. 3)}$$

В процессе выполнения задания 27 полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что если за единицу измерения принять отрезок AB, то $OC = 2$, $ON = \frac{1}{2}$, $OK = \frac{1}{4}$.

На свойства длин отрезков можно решить задачи 30 и 31 (б).

Для закрепления изученного материала полезно выполнить следующие задания с необходимыми краткими записями на доске и в тетрадях учащихся:

1. Дан луч h с началом в точке O, $B \in h$, $A \in h$, $O - B - A$ (эта запись означает, что точка B лежит между точками O и A). а) Какой из отрезков OB или OA имеет большую длину? б) Найдите AB, если $OA = 72$ см, $OB = 4{,}2$ дм.

2. Начертите прямую a и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. С помощью масштабной линейки и циркуля отметьте на прямой a точку M, удаленную от точки A на расстояние 3 см. (Следует обратить внимание учащихся на то, что задача может иметь одно или два решения, а может и не иметь решений.)

3. № 29 учебника.

4. Начертите отрезок CD, равный 5 см. С помощью масштабной линейки отметьте на прямой CD точку M, такую, что $CM = 2$ см. а) Сколько таких точек можно отметить на прямой CD? б) Какова длина отрезка MD? Рассмотрите все возможные случаи.

После выполнения этих заданий полезно решить задачу 32.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см.

Найти: AC.

Решение. На прямой a отложим отрезок AB, а затем отрезок BC. Возможны два случая.

а) Точки A и C лежат по разные стороны от точки B (сделать рисунок). В этом случае

$$AC = AB + BC = 12 \text{ см} + 13{,}5 \text{ см} = 25{,}5 \text{ см}.$$

б) Точки A и C лежат по одну сторону от точки B (сделать рисунок). В этом случае

$$AC = BC - AB = 13{,}5 \text{ см} - 12 \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $AC=25{,}5$ см или $AC=1{,}5$ см

Далее можно провести беседу с учащимися о единицах измерения и измерительных инструментах, применяемых на практике, используя при этом п. 8 учебника и те факты, которые известны учащимся из опыта.

Задачу 36 полезно предложить учащимся решить самостоятельно, а тем, у кого она вызовет затруднения, можно воспользоваться решением, приведенным в учебнике. В классе также желательно рассмотреть задачи 34 и 38.

В плане индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению геометрии, можно использовать задачи 39, 40, а всему классу можно предложить практические задания 24, 25, 28 и задачу 35.

Проверку усвоения свойств длин отрезков можно осуществить с помощью следующей самостоятельной работы:

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На прямой b отмечены точки C, D и E так, что $CD=6$ см, $DE=8$ см. Какой может быть длина отрезка CE? ($CE=14$ см или $CE=2$ см.)

2. Точка M — середина отрезка AB, $MB=4{,}3$ дм. Найдите длину отрезка AB в миллиметрах.

Вариант II

1. На прямой m отмечены точки A, B и C так, что $AC=12$ см, $AB=8$ см. Какой может быть длина отрезка BC? ($BC=20$ см или $BC=4$ см.)

2. Точка P — середина отрезка MN. Найдите длину отрезка PN в метрах, если $MN=14$ дм.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Даны отрезок CD и точка M, причем $CD=17$ см, $CM=13$ см, $DM=5$ см. Лежит ли точка M на отрезке CD?

2. На прямой b отмечены последовательно точки C, D, E и F так, что $CD=EF$. Расстояние между серединами отрезков CD и EF равно 12,4 см. Найдите расстояние между точками C и E.

Дома: пп. 7, 8; вопросы 12—13 (с. 25); задачи 31(а), 33, 37.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, что при выбранной единице измерения длина любого данного отрезка выражается определенным положительным числом; **уметь** измерить данный отрезок с помощью масштабной линейки и выразить его длину в сантиметрах, миллиметрах, метрах, находить длину отрезка в тех случаях, когда точка делит данный отрезок на два отрезка, длины которых известны, решать задачи типа 30, 31, 32, 33, 35, 37.

§ 5. Измерение углов (1 ч)

Назначение параграфа — ввести понятие градусной меры угла и рассмотреть свойства градусных мер углов: ввести понятия острого, прямого и тупого углов; ознакомить учащихся с приборами для измерения углов на местности.

На уроке желательно иметь демонстрационный транспортир

Учителю нужно иметь в виду, что учащиеся уже знакомы с измерением углов с помощью транспортира и поэтому желательно опираться на имеющийся у них опыт. Следует подчеркнуть, что измерение углов проводится аналогично измерению отрезков. Эта аналогия должна быть показана учащимся, при этом нужно отметить, что в отличие от длины отрезка, которая может выражаться как угодно большим числом, градусная мера угла не превосходит 180°.

После выполнения практических заданий 41, 42 можно решить задачи 45, 46, 47(а), 48 на свойства градусных мер углов.

Решения задач 47(а) и 48 полезно записать на доске и в тетрадях учащихся

Возможное оформление решения задач

47. а) $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$ (сделать чертеж),
$\angle AOB = 44° + 77° = 121°$.

48. По условию $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 78°$, $\angle AOC = \angle BOC - 18°$ (сделать чертеж). Отсюда следует: $\angle BOC - 18° + \angle BOC = 78°$; $\angle BOC = 96° \cdot \frac{1}{2} = 48°$.

Понятия прямого, острого и тупого углов можно ввести с помощью плакатов или кодопозитивов и закрепить эти понятия при решении задач 51, 52, 53.

Об измерении углов на местности учитель может рассказать, используя п. 10 учебника, а на одном из последних уроков учебного года, которые отводятся на повторение, можно провести практическую работу по измерению углов на местности.

Для усвоения свойств градусных мер углов полезно провести самостоятельную работу обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Луч BD делит развернутый угол ABC на два угла, один из которых на 34° больше другого. Найдите образовавшиеся углы

2. Луч BD делит прямой угол ABC на два угла, один из которых в 4 раза меньше другого. Найдите образовавшиеся углы

Вариант II

1. Луч BD делит развернутый угол ABC на два угла, разность которых равна 46°. Найдите образовавшиеся углы.

2. Луч BD делит прямой угол ABC на два угла, градусные меры которых относятся как 5 : 4. Найдите угол между лучом BD и биссектрисой угла ABC.

Дома: пп. 9—10; вопросы 14—16 (с. 25); практическое задание 44; задачи 47(б), 49, 50.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, что такое градусная мера угла, чему равны минута и секунда; **уметь** находить градусные меры данных углов, используя транспортир, изображать прямой, острый, тупой и развернутый углы, решать задачи типа 47, 48, 49, 50.

§ 6. Перпендикулярные прямые (2 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия смежных и вертикальных углов, рассмотреть их свойства, ввести понятие перпендикулярных прямых и показать, как применяются эти понятия при решении задач.

Понятие смежных углов и их свойство (сумма смежных углов равна 180°) целесообразно рассмотреть с помощью плаката или транспаранта. Затем можно выполнить задание 55 и решить задачи 58, 59, 61 (б, г), 62, 63.

Понятие вертикальных углов можно ввести, выполняя следующее задание: 1) Начертите неразвернутый угол AOB и назовите лучи, являющиеся сторонами этого угла. 2) Проведите луч OC, являющийся продолжением луча OA, и луч OD, являющийся продолжением луча OB. 3) Запишите в тетради: углы AOB и COD называются вертикальными.

Далее на рисунке или плакате можно показать, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов с вершиной в точке пересечения этих прямых.

Обоснование того факта, что вертикальные углы равны, вначале можно провести на конкретном примере, записав его на доске и в тетрадях учащихся.

Задача. На рисунке 4 прямые AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle AOD = 35°$. Найдите углы AOC и BOC.

Решение. 1. Углы AOD и AOC смежные, поэтому $\angle AOC = 180° - 35° = 145°$. 2. Углы AOC и BOC также смежные, поэтому $\angle BOC = 180° - 145° = 35°$.

Итак, $\angle BOC = \angle AOD = 35°$, причем эти углы являются вертикальными. Теперь можно задать вопрос: верно ли утверждение, что любые вертикальные углы равны?

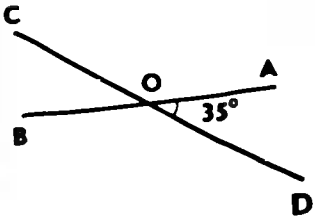


Рис. 4

Можно предложить учащимся самостоятельно доказать свойство вертикальных углов и записать доказательство в тетрадь

На свойство вертикальных углов в классе можно решить задачи 65(а), 66(б, в) Более сильным учащимся целесообразно предложить задачи 67 и 68. Для работы с остальными учащимися можно использовать задачи 54, 64.

Проверку усвоения свойств смежных и вертикальных углов можно провести с помощью самостоятельной работы

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Один из смежных углов на 27° меньше другого. Найдите оба смежных угла.

2. Найдите все неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 226°.

Вариант II

1. Один из смежных углов в девять раз больше другого. Найдите оба смежных угла.

2. Найдите все неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если один из них на 81° больше другого

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 2:7.

2. Найдите все неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 71°.

Понятие перпендикулярных прямых можно ввести с помощью заранее заготовленного плаката по рисунку 42 учебника.

Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно, используя свойства вертикальных и смежных углов, обосновали тот факт, что если при пересечении двух прямых один из образовавшихся углов прямой, то остальные углы также прямые.

Для закрепления понятия перпендикулярных прямых в классе рекомендуется выполнить практическое задание 57.

Целесообразно, чтобы учитель сам провел обоснование (доказательство) утверждения о том, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются В процессе рассуждения полезно использовать рисунок 43(б, в) учебника, выполненный на картоне, а также на прикрепленной поверх картона кальке, которую можно перегнуть по прямой PQ так, что лучи PA и QB наложатся на лучи PA_1 и QB_1 В доказательстве данного утверждения используется метод рассуждения от противного, однако заострять на этом внимание учащихся пока преждевременно. Более сильным учащимся можно предложить вопрос. могут ли прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к данной прямой, пересечься в некоторой точке этой прямой (рис. 5)?

Затем полезно устно решить задачи 69 и 70.

Завершить тему можно беседой о построении прямых углов на местности (п. 13) с демонстрацией изготовленного учащимися экера.

Дома: пп. 11—13; вопросы 17—21 (с. 25); задание 56; задачи 60, 61 (а, в, д), 65 (б), 66 (а).

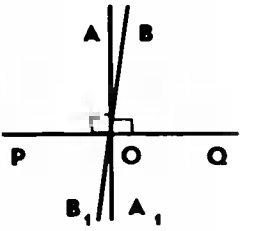


Рис. 5

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, какие углы называются смежными и чему равна сумма смежных углов, какие углы называются вертикальными и каким свойством обладают вертикальные углы, какие прямые называются перпендикулярными; **уметь** строить угол, смежный с данным углом, изображать вертикальные углы, находить на рисунке смежные и вертикальные углы, объяснять, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются, решать задачи типа 57, 58, 61, 64, 65, 69.

Решение задач (1 ч)

Назначение этого урока — повторить и закрепить пройденный материал, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе. При проведении урока можно использовать дополнительные задачи к главе: 74, 76(б), 77, 81, 82(б), 84.

Дома: 75, 76(а), 78, 80, 82(а).

Для индивидуальной работы с сильными учащимися можно использовать задачи 79, 85, 86, остальным полезно выполнить задания 71—73.

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Вариант I

1. Три точки B, C и D лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 17$ см, $DC = 25$ см. Какой может быть длина отрезка BC?

2. Сумма вертикальных углов MOE и DOC, образованных при пересечении прямых MC и DE, равна 204°. Найдите угол MOD.

3. С помощью транспортира начертите угол, равный 78°, и проведите биссектрису смежного с ним угла.

Вариант II

1. Три точки M, N и K лежат на одной прямой. Известно, что $MN = 15$ см, $NK = 18$ см. Каким может быть расстояние MK?

2. Сумма вертикальных углов AOB и COD, образованных при пересечении прямых AD и BC, равна 108°. Найдите угол BOD.

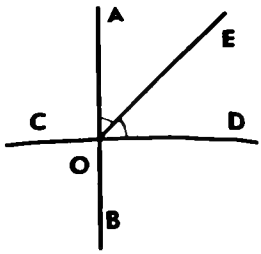


Рис. 6

3. С помощью транспортира начертите угол, равный 132°, и проведите биссектрису одного из смежных с ним углов

Вариант III
(для более подготовленных учащихся)

1. Лежат ли точки M, N и P на одной прямой, если $MP=12$ см, $MN=5$ см, $PN=8$ см?

2. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 37°.

3. На рисунке 6 $AB \perp CD$, луч OE — биссектриса угла AOD Найдите угол COE

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1 Какая точка называется серединой отрезка?

2. Отметьте точку C на прямой AB так, чтобы точка B оказалась серединой отрезка AC.

3. Отрезок длиной 18 см разделен точкой на два неравных отрезка. Чему равно расстояние между серединами этих отрезков?

Вариант II

1. Какой луч называется биссектрисой угла?

2. Начертите угол BAC, а затем с помощью транспортира и линейки проведите луч AD так, чтобы луч AB оказался биссектрисой угла CAD. Всегда ли это выполнимо?

3. Чему равна градусная мера угла, образованного биссектрисами двух смежных углов?

Вариант III

1. Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов? Могут ли быть смежными прямой и острый углы?

2. Начертите угол, смежный с данным углом. Сколько таких углов можно начертить?

3. Градусные меры двух смежных углов относятся как 3:7. Найдите эти углы.

Вариант IV

1. Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы? Сколько пар вертикальных углов образуется при пересечении двух прямых?

2. Начертите три прямые AB, CD и MK, пересекающиеся в точке O. Назовите пары получившихся вертикальных углов

3. При пересечении двух прямых образовались четыре неразвернутых угла. Найдите эти углы, если сумма трех углов равна 290°.

Вариант V

1. Какие прямые называются перпендикулярными? Каким свойством обладают две прямые, перпендикулярные к третьей?

2. Начертите прямую a и отметьте точку M, не лежащую на ней. С помощью чертежного угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную к прямой a

3. Начертите тупой угол ABC и отметьте точку D вне его. С помощью чертежного угольника через точку D проведите прямые, перпендикулярные к прямым AB и BC.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы I

Во многих задачах главы I учащимся достаточно выполнить правильный чертеж и по чертежу кратко записать решение. Ниже приведено возможное оформление решений задач 34, 38, 39, 40.

34. Дано: точка C — середина AB, $AB=64$ см, D — точка луча CA, $CD=15$ см (рис. 7).

Найти: BD и DA.

Решение. $AC=CB=64$ см$:2=32$ см.

$BD=BC+CD=32$ см$+15$ см$=47$ см.

$AD=AC-DC=32$ см-15 см$=17$ см.

38. Дано: точки O, A и B лежат на одной прямой, $OA=12$ см, $OB=9$ см.

Найти: MN, где M — середина OA, N — середина OB.

Решение. $OM=\frac{1}{2}OA=6$ см, $ON=\frac{1}{2}OB=4{,}5$ см.

а) Точка O лежит на отрезке AB (рис. 8, *а*).
Тогда $MN=MO+ON=6$ см$+4{,}5$ см$=10{,}5$ см.

б) Точка O не лежит на отрезке AB (рис. 8, *б*).
Тогда $MN=OM-ON=6$ см$-4{,}5$ см$=1{,}5$ см.

39. Дано: отрезок AB, O — точка на этом отрезке, $AB=a$.

Найти: MN, где M — середина AO, N — середина OB (рис. 9).

Решение. $MO=\frac{1}{2}AO$, $NO=\frac{1}{2}OB$, $MN=MO+ON=$
$=\frac{1}{2}(AO+OB)=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$.

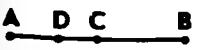
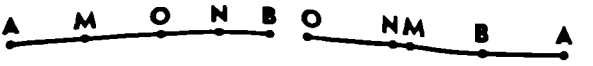


Рис. 7



а) б)

Рис. 8

Рис. 9

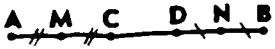


Рис. 10

40. Дано: $AB=28$ см, точки C и D лежат на отрезке AB (рис. 10), M - середина AC, N — середина DB, $MN=16$ см.

Найти: CD.

Решение. $AB=AC+CD+DB=2MC+CD+2DN=$ $=28$ (см). (1)

$MN=MC+CD+DN=16$ (см), поэтому $2MC+2CD+2DN=$ $=32$ (см). (2)

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $CD=$ $=32$ см -28 см $=4$ см

Приведем также краткие решения некоторых других задач этой главы.

65. а) При пересечении двух прямых образуются четыре неразвернутых угла Так как сумма двух из них равна 114°, то эти два угла не могут быть смежными. Следовательно, эти углы вертикальные, и поэтому каждый из них равен 57°. Каждый из оставшихся двух углов является смежным с одним из этих углов и поэтому равен $180°-57°=123°$

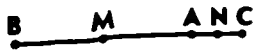
б) При пересечении двух прямых образуются четыре неразвернутых угла. Обозначим их 1, 2, 3, 4 (рис. 41 учебника). Пусть, например, $\angle 1+\angle 2+\angle 3=220°$ Так как $\angle 1+\angle 2=180°$, то $\angle 3=220°-180°=40°$. Таким образом, $\angle 1=\angle 3=40°$, $\angle 2=$ $=\angle 4=140°$

70. Пусть AB, AC и AD - три прямые, пересекающие прямую a соответственно в точках B, C, D Допустим, что две из этих прямых, например AB и AC, перпендикулярны к прямой a. Но тогда получается, что две прямые AB и AC, перпендикулярные к третьей, пересекаются в точке A, что невозможно. Следовательно, из трех прямых AB, AC и AD лишь одна может быть перпендикулярна к прямой a, и, значит, по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

79*. Возможны два случая:

а) Точки B и C лежат по разные стороны от точки A (рис. 11, *а*). Тогда $MN=MA+AN=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC$, т. е $BC=2MN$.

б) Точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Пусть, например, точка B лежит на отрезке AC (рис. 11, *б*) Тогда $MN=AN-AM=$ $=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}BC$, т. е. $BC=2MN$



а)

б)

Рис. 11

84. Пусть AOB и A_1OB — вертикальные углы, луч OM - биссектриса угла AOB, а OM_1 - продолжение луча OM. Докажем, что луч OM_1 — биссектриса угла A_1OB_1, т. е. $\angle 3=\angle 4$

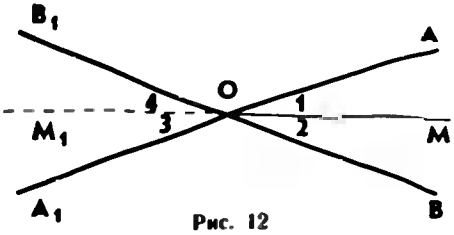


Рис. 12

(рис. 12). Углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 вертикальные, поэтому $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Но $\angle 1 = \angle 2$, так как OM — биссектриса угла AOB, поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

85*. Задача будет решена, если мы докажем, что $\angle ABD$ развернутый. Предположим, что это не так. Пусть BM — биссектриса угла ABC, а BN — биссектриса угла CBD. Возможны два случая:

а) Луч BC проходит внутри угла ABD (рис. 13, *а*). Тогда $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = \angle ABD < 180°$, но $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle MBN = \angle 2 + \angle 3 < 90°$, что противоречит условию задачи.

б) Луч BC лежит во внешней области угла ABD (рис. 13, *б*). В этом случае $\angle ABC + \angle CBD > 180°$, поэтому $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) > 180°$. Но $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle MBN = \angle 2 + \angle 3 > 90°$. Это неравенство также противоречит условию задачи.

Таким образом, угол ABD развернутый, т. е. точки A, B и D лежат на одной прямой.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы I

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала геометрия в VII классе изучается во II, III и IV четвертях по 2 часа в неделю, всего 50 часов в течение учебного года. На изучение темы «Начальные геометрические сведе-

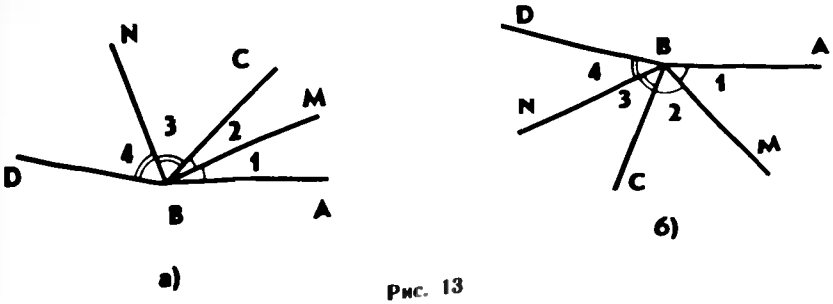


Рис. 13

ния» отводится 7 часов, которые можно распределить следующим образом:

§ 1. Прямая и отрезок. § 2 Луч и угол	1 ч
§ 3. Сравнение отрезков и углов	1 ч
§ 4. Измерение отрезков § 5. Измерение углов	2 ч
§ 6. Перпендикулярные прямые	1 ч
Решение задач	1 ч
Контрольная работа № 1	1 ч

При проведении уроков целесообразно использовать рекомендации, данные выше. Основные понятия следует вводить на наглядно-интуитивной основе с учетом опыта учащихся, накопленного в предыдущие годы обучения Учитывая жесткий лимит учебного времени, объяснение материала и фронтальное решение задач полезно проводить по готовым чертежам (настенным таблицам, транспарантам для графопроектора, диапозитивам).

В связи с сокращением числа часов, отводимых на изучение того или иного параграфа, учителю следует по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных выше для решения в классе и домашних заданий. На уроке, который отводится на решение задач по всей теме, целесообразно повторить изученный материал. Для проведения контрольной работы № 1 можно использовать варианты, предложенные выше.

ГЛАВА II

Треугольники (17 ч)

Во второй главе изучаются признаки равенства треугольников Они являются основным рабочим аппаратом всего курса геометрии. Доказательства большей части теорем курса строятся по схеме: поиск равных треугольников — доказательство их равенства — следствия, вытекающие из равенства треугольников. Признаки равенства треугольников открывают широкие возможности для решения задач и, таким образом, позволяют накапливать опыт доказательных рассуждений. Доказательства первого и второго признаков состоят в том, что один треугольник совмещается с другим путем наложения, а это означает, что треугольники равны по определению равенства фигур. Этот прием нагляден, понятен учащимся, вполне соответствует их представлениям о равенстве фигур.

На начальном этапе изучения признаков равенства треугольников полезно больше внимания уделять решению задач по готовым чертежам, применяя таблицы и ТСО. В дальнейшем при решении задач данной главы нужно нацеливать учащихся на самостоятельное выполнение рисунка по условию задачи, что во

многих случаях помогает быстрее найти и применить подходящий признак равенства треугольников.

Второй важный момент данной главы — введение нового класса задач — на построение с помощью циркуля и линейки.

§ 1. Первый признак равенства треугольников (3 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия треугольника и его элементов, понятия теоремы и доказательства теоремы, доказать первый признак равенства треугольников.

Понятие треугольника знакомо учащимся, поэтому изучение темы можно начать с демонстрации различных многоугольников, изготовленных из проволоки либо изображенных на плакате или классной доске. Среди них учащиеся выделяют треугольники, указывают и называют их стороны, вершины и углы. Учащиеся должны знать, что в треугольнике ABC сторона BC и угол A являются противолежащими друг другу (можно сказать и так: сторона BC является противоположной вершине A), углы B и C прилежат к стороне BC, угол A заключен между сторонами AC и AB и т. д.

В связи с этим полезно выполнить следующее практическое задание:

1. Начертите треугольник ABC и проведите отрезок, соединяющий вершину A с серединой противоположной стороны.

2. Начертите треугольник MNP. На стороне MP отметьте произвольную точку K и соедините ее с вершиной, противолежащей стороне MP.

3. Назовите углы: а) треугольника DEK, прилежащие к стороне EK; б) треугольника MNP, прилежащие к стороне MN.

4. Назовите угол: а) треугольника DEK, заключенный между сторонами DE и DK; б) треугольника MNP, заключенный между сторонами NP и PM.

5. Между какими сторонами: а) треугольника DEK заключен угол K; б) треугольника MNP заключен угол N?

Для лучшего усвоения понятий треугольника и его элементов желательно выполнить задания 87 и 88. Затем можно ввести понятие периметра треугольника и решить задачу 91 с оформлением на доске и в тетрадях учащихся.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $P_{ABC}=48$ см, $AC=18$ см, $BC-AB=4{,}6$ см.

Найти: AB и BC.

Решение. Обозначим длину стороны AB в сантиметрах буквой x, тогда $BC=(x+4{,}6)$ см; 48 см $=AB+AC+BC=(x+$ $+x+4{,}6+18)$ см, откуда $2x=25{,}4$ см, $x=12{,}7$ см.

Итак, $AB=12{,}7$ см, $BC=(12{,}7+4{,}6)$ см $=17{,}3$ см.

Ответ: 12,7 см и 17,3 см.

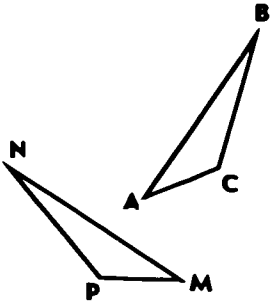


Рис. 14

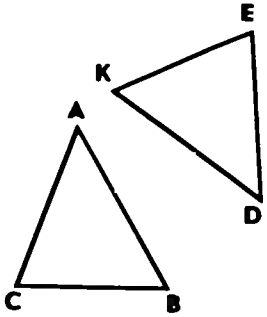


Рис. 15

Далее целесообразно напомнить учащимся, какие фигуры называются равными, и обратить внимание на то, что из равенства треугольников следует равенство соответствующих, т. е. совмещающихся при наложении, сторон и углов этих треугольников и что в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы и обратно, против соответственно равных углов лежат равные стороны. В связи с этим полезно предложить учащимся выполнить следующее задание.

На каждом из рисунков 14 и 15 изображены равные между собой треугольники. Укажите соответственно равные элементы этих треугольников. Далее можно устно решить задачу 92 и следующую задачу.

Треугольники ABC и MNP равны, причем $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$ и $\angle C = \angle P$. Найдите стороны треугольника MNP, если $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $CA = 3$ см.

Решение. $\triangle ABC = \triangle MNP$ по условию, поэтому углы и стороны треугольника ABC соответственно равны углам и сторонам треугольника MNP. Из условия задачи следует, что соответственно равными являются стороны AB и MN, BC и NP, CA и PM. Таким образом, $MN = 7$ см, $NP = 5$ см, $PM = 3$ см.

Изучение первого признака равенства треугольников следует начать с разъяснения смысла слов «теорема» и «доказательство теоремы», поскольку с этими понятиями учащиеся встречаются впервые. Нужно отметить, что в геометрии каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется теоремой, а сами рассуждения называются доказательством теоремы Полезно напомнить примеры рассуждений, проведенных ранее, и сказать, что это были доказательства теорем, хотя мы их еще так не называли. Сюда относятся утверждение (теорема) о равенстве вертикальных углов, утверждение (теорема) о свойстве двух прямых, перпендикулярных к третьей прямой.

Перед тем как сформулировать первый признак равенства треугольников, желательно повторить с учащимися понятие ра-

венства фигур (отрезков, углов, треугольников), используя при этом плакаты, модели, кодопозитивы, и выполнить задание 89 (а). Затем учителю следует сформулировать и доказать теорему, выражающую первый признак равенства треугольников. После доказательства нужно разъяснить смысл слова «признак», отметив, что доказанный признак дает возможность устанавливать равенство двух треугольников, не производя фактического наложения одного из них на другой, а сравнивая только некоторые элементы треугольника.

На начальном этапе применения первого признака равенства треугольников желательно рассмотреть как можно больше задач, решаемых по готовым чертежам. При этом полезно приучать учащихся отмечать на чертеже соответственно равные элементы и делать содержательные ссылки на признаки («треугольники равны по двум сторонам и углу между ними»), а не формальные («треугольники равны по первому признаку»). В классе рекомендуется решить задачи 93 (а), (б), 94, 96, 98. Проверить умение учащихся применять изученный признак при решении задач можно с помощью самостоятельной работы (III и IV варианты предназначены для более подготовленных учащихся).

Самостоятельная работа

Вариант I

Докажите равенство треугольников ADC и ABC, изображенных на рисунке 16, если $AD=AB$ и $\angle 1=\angle 2$. Найдите углы ADC и ACD, если $\angle ACB=38°$, $\angle ABC=102°$.

Вариант II

Докажите равенство треугольников ABC и ADC, изображенных на рисунке 53 учебника, если $BC=AD$ и $\angle 1=\angle 2$. Найдите углы ACD и ADC, если $\angle ABC=108°$, $\angle BAC=32°$.

Вариант III

Известно, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, причем $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $CD=C_1D_1$. Докажите, что $\triangle CBD=\triangle C_1B_1D_1$.

Вариант IV

Известно, что $\triangle MKP=\triangle M_1K_1P_1$, причем $\angle M=\angle M_1$, $\angle K=\angle K_1$. На сторонах MP и M_1P_1 отмечены точки E и E_1 так, что $ME=M_1E_1$. Докажите, что $\triangle MEK=\triangle M_1E_1K_1$.

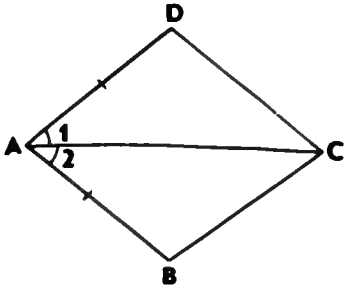


Рис. 16

Дома: пп. 14, 15; вопросы 1—4 (с. 47); практическое задание 89 (б, в); задачи 90, 95, 97, 99.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, какая фигура называется треугольником, и назвать его элементы; **знать**, что такое периметр треугольника, какие треугольники называются равными, формулировку и доказательство первого признака равенства треугольников; уметь решать задачи типа 90, 92, 93, 94, 95, 97.

§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника (3 ч)

Назначение параграфа состоит в том, чтобы ввести понятие перпендикуляра к прямой и доказать теорему о перпендикуляре, ввести понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника и рассмотреть свойства равнобедренного треугольника.

Понятие перпендикуляра к прямой вводится в учебнике конструктивно. Желательно, чтобы учащиеся уяснили, что перпендикуляр AH, проведенный из точки A к прямой a,— это такой отрезок, для которого выполнены следующие два условия. 1) прямая AH перпендикулярна к прямой a ($AH \perp a$); 2) $A \notin a$, $H \in a$. Перед формулировкой и доказательством теоремы о перпендикуляре к прямой полезно выполнить практическое задание 100. Доказательство теоремы о перпендикуляре учителю следует провести самому. При этом нужно иметь в виду, что единственность перпендикуляра (вторая часть теоремы) доказывается фактически методом от противного, однако, как и в главе I, не следует заострять на этом внимание учащихся. Суть метода будет разъяснена позже, в главе III.

После доказательства теоремы можно решить задачу 105, в которой используется понятие перпендикуляра к прямой, а при решении «работает» первый признак равенства треугольников.

С понятиями медианы, биссектрисы и высоты треугольника учащиеся встречаются впервые, поэтому полезно выполнить практические задания 101, 102, 103, в которых предлагается построить указанные отрезки с помощью масштабной линейки, транспортира и чертежного угольника. Следует обратить внимание учащихся на различие между биссектрисой угла (луч, делящий угол на два равных угла) и биссектрисой треугольника (отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны).

У некоторых учащихся вызывает затруднение проведение высоты из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике, поэтому при выполнении задания 103 в классе желательно разобрать случай тупоугольного треугольника, а на дом можно дать ту часть задания, которая связана с остроугольным треугольником.

Понятия равнобедренного и равностороннего треугольников знакомы учащимся. Однако при решении задач и доказательст-

ве теорем требуется достаточно быстро указывать боковые стороны, основание, углы при основании, угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника. С целью отработки этих навыков можно предложить учащимся задания:

1. Дан равнобедренный треугольник CDE с основанием DE Назовите боковые стороны, углы при основании и угол, противолежащий основанию этого треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике MDK $KM=KD$. Назовите боковые стороны, основание, угол, противолежащий основанию, и углы при основании этого треугольника.

После этого можно решить задачи 108, 109 и 110.

Возможное оформление решения задачи 109

Дано: $\triangle ABC$, $AB=AC$, AM — медиана, $P_{ABC}=32$ см, $P_{ABM}=24$ см.

Найти: AM.

Решение. 1. $P_{ABC}=AB+BC+AC=32$ см. Так как $AB=AC$, $BM=MC$, то $BC=2BM$ и $P_{ABC}=2(AB+BM)=32$ см, откуда $AB+BM=16$ см.

2. $P_{ABM}=(AB+BM)+AM=24$ см. Отсюда следует, что $AM=24$ см-16 см$=8$ см.

Доказательство теоремы о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника, как правило, не вызывает затруднений у учащихся, и они могут изучить его самостоятельно по учебнику (п. 18). Это свойство в дальнейшем часто используется при решении задач и доказательстве теорем, поэтому оно должно быть хорошо усвоено. Чертеж, краткую запись условия и заключения теоремы, а также основные этапы доказательства полезно записать на доске и в тетрадях учащихся.

Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный. BC — основание.

Доказать: $\angle B=\angle C$.

Доказательство. Проведем биссектрису AD треугольника (рис. 64 учебника). $\triangle ABD=\triangle ACD$ по двум сторонам и углу между ними ($AB=AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1=\angle 2$, так как AD — биссектриса). Следовательно, $\angle B=\angle C$, что и требовалось доказать.

На применение изученной теоремы на уроке можно решить задачи 113, 118. При наличии времени полезно провести самостоятельную работу обучающего характера.

Вариант I

В равнобедренном треугольнике сумма всех углов равна 180°. Найдите углы этого треугольника, если известно, что: а) один из них равен 105°, б) один из них равен 38°.

Вариант II

В равнобедренном треугольнике сумма всех углов равна 180°. Найдите углы этого треугольника, если известно, что: а) один из углов равен 62°; б) один из углов равен 98°.

Теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, учащиеся также могут изучить самостоятельно.

Затем можно решить задачу 119 с записью решения на доске и в тетрадях учащихся и задачу 120 (а).

Дома: пп. 16—18; вопросы 5—13 (с. 47—48); задачи 104, 106, 107, 111, 112, 115, 116, 117, 120 (б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой, какие отрезки называются медианой, биссектрисой, высотой треугольника, какой треугольник называется равнобедренным, равносторонним, **знать** формулировку теоремы о перпендикуляре к прямой; знать и уметь доказывать теоремы о свойствах равнобедренного треугольника; уметь выполнять практические задания типа 100—104 и решать задачи типа 105, 107, 108, 112, 115, 117, 119

§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников (4 ч)

Назначение параграфа — изучить второй и третий признаки равенства треугольников и выработать навыки использования этих признаков при решении задач.

В начале первого урока по этой теме полезно решить несколько задач по готовым чертежам с целью повторения первого признака равенства треугольников:

1. На рисунке 17 $DE = DK$, $\angle 1 = \angle 2$. Найдите EC, $\angle DCK$ и $\angle DKC$, если $KC = 1{,}8$ дм, $\angle DCE = 45°$, $\angle DEC = 115°$.

2. На рисунке 18 $OB = OC$, $OA = OD$, $\angle ACB = 42°$, $\angle DCF = 68°$. Найдите $\angle ABC$.

Перед изучением второго признака равенства треугольников полезно предложить учащимся следующее практическое задание:

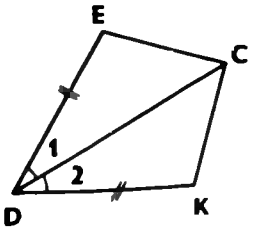


Рис. 17

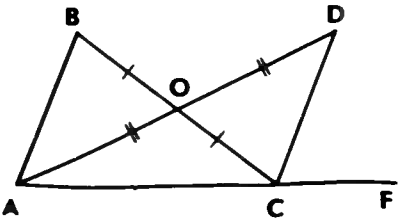


Рис. 18

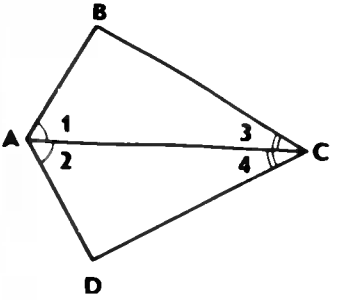


Рис. 19

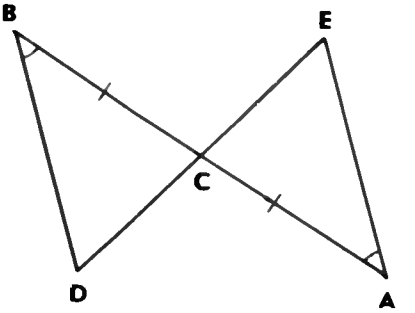


Рис. 20

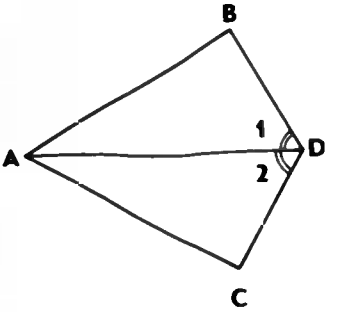


Рис. 21

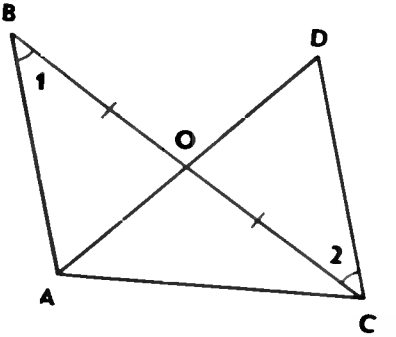


Рис. 22

С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC так, чтобы $\angle A = 46°$, $\angle B = 58°$, $AB = 4{,}8$ см

При доказательстве второго признака желательно отметить аналогию с доказательством первого признака: в том и другом случае равенство треугольников доказывается путем такого наложения одного треугольника на другой, при котором они полностью совмещаются.

Для лучшего усвоения второго признака равенства треугольников полезно после его доказательства решить несколько задач.

1. На рисунке 19 $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

2. На рисунке 20 $AC = CB$, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle ACE$.

3. На рисунке 21 луч AD — биссектриса угла BAC, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ACD$.

4. На рисунке 22 $BO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ Укажите равные треугольники на этом рисунке.

5. На рисунке 23 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle CAB = \angle DBA$. Укажите равные треугольники на этом рисунке.

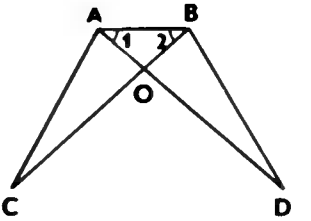


Рис. 23

Затем в классе можно решить задачи 121, 123, 126, 132. В решениях задач 127, 129—131 используются первый и второй признаки равенства треугольников; эти задачи более трудные, возможно, что кому-то из учащихся потребуется помощь учителя. Поэтому часть из них желательно решить в классе, записав решения на доске и в тетрадях.

Возможное оформление решения задачи 127

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $D\in AB$, $D_1\in A_1B_1$, $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$ (рис. 24).

Доказать: $\triangle BCD=\triangle B_1C_1D_1$.

Решение. 1. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $\angle B=\angle B_1$ по условию), следовательно, $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$.

2. $\angle BCD=\angle ACB-\angle ACD$, $\angle B_1C_1D_1=\angle A_1C_1B_1-\angle A_1C_1D_1$. Так как $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$ и $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$ (по условию), то $\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$.

3. $\triangle BCD=\triangle B_1C_1D_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$), что и требовалось доказать.

Задачи 127, 129—131 могут быть использованы также в индивидуальной работе с наиболее подготовленными учащимися

Перед изучением третьего признака равенства треугольников желательно устно по готовым чертежам решить задачи на применение первого и второго признаков равенства треугольников и свойств равнобедренного треугольника:

1. На рисунке 25 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 5=\angle 6$, $AC=12$ см, $BD=5$ см, $\angle 4=27°$. Найдите AD, BC и $\angle 3$.

2. На рисунке 26 $MN=NP$, $\angle NPK=152°$. Найдите $\angle NMP$

3. На рисунке 70, *а* учебника $A_1C=A_1C_1$, $CB_1=C_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle ABC_1$.

Доказательство третьего признака равенства треугольников отличается от доказательств первого и второго признаков тем, что здесь не проводится наложение одного треугольника на другой. В процессе изучения теоремы о третьем признаке весьма полезна работа с рисунком 70, *б*, *в* учебника, по которому можно показать, что в случае, когда луч C_1C совпадает с одной из сто-

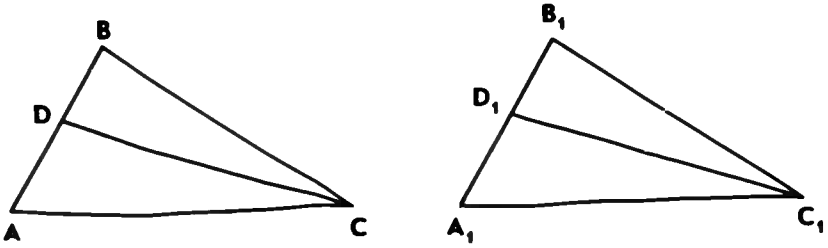


Рис. 24

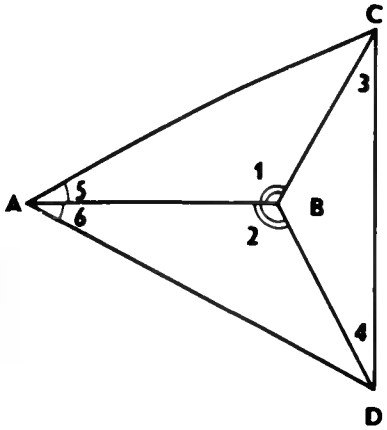


Рис. 25

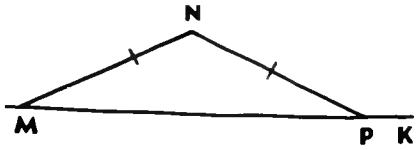


Рис. 26

рон угла $A_1C_1B_1$ или проходит вне этого угла, доказательство проводится аналогично случаю, когда луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *а*). Можно также после того, как доказательство теоремы изложено учителем по рисунку 70, *а*, предложить одному из учащихся доказать третий признак равенства треугольников для случая, изображенного на рисунке 70, *в*.

Затем полезно решить устно задачи по готовым чертежам:

1. На рисунке 27 $KT = DM$, $KM = DT$. Докажите, что $\triangle TKM = \triangle MDT$.

2. На рисунке 28 $BC = AD$, $BE = DF$, $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle ADF = \triangle CBE$; б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

После этого можно перейти к решению задач 135 (устно), 138 (записать решение на доске и в тетрадях), 139 (разобрать план решения для случая (б)). Задачи 140—142 могут быть использованы в индивидуальной работе с наиболее подготовленными учащимися. При решении задачи 142 учащиеся, как правило, рассматривают один из возможных случаев расположения точек A и B относительно прямой CD, поэтому желательно обратить их внимание на то, что точки A и B могут располагаться как по одну сторону от прямой CD, так и по разные стороны от нее, т. е. нужно рассмотреть два случая.

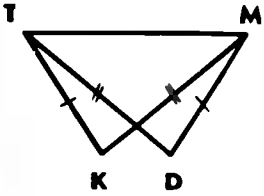


Рис. 27

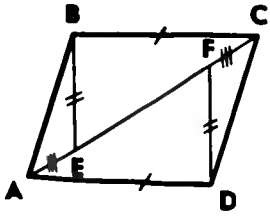


Рис. 28

В заключение можно провести самостоятельную работу проверочного характера (варианты I и II). В более подготовленном классе или отдельным учащимся можно предложить варианты III и IV.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Докажите равенство треугольников ABE и DCE на рисунке 29, если $AE=ED$, $\angle A=\angle D$. Найдите стороны треугольника ABE, если $DE=3$ см, $DC=4$ см, $EC=5$ см.

2. На рисунке 19 $AB=AD$, $BC=CD$. Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

Вариант II

1. Докажите равенство треугольников MON и PON на рисунке 30, если $\angle MON=\angle PON$, а луч NO — биссектриса угла MNP. Найдите углы треугольника NOP, если $\angle MNO=42°$, $\angle NMO=28°$, $\angle NOM=110°$.

2. На рисунке 17 $DE=DK$, $CE=CK$. Докажите, что луч CD — биссектриса угла ECK.

Вариант III

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle CAD=\angle C_1A_1D_1$. Докажите, что: а) $\triangle ADC=\triangle A_1D_1C_1$; б) $\triangle ADB=\triangle A_1D_1B_1$.

2. На рисунке 31 треугольник MNP равнобедренный с основанием MP, точка K — середина отрезка MP, $ME=PF$. Докажите, что луч KN — биссектриса угла EKF.

Вариант IV

1. В треугольниках DEC и $D_1E_1C_1$ $DE=D_1E_1$, $\angle D=\angle D_1$, $\angle E=\angle E_1$. На сторонах DE и D_1E_1 отмечены точки P и P_1 так, что

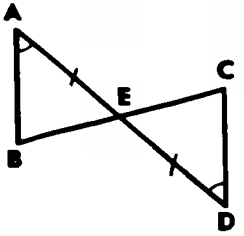


Рис. 29

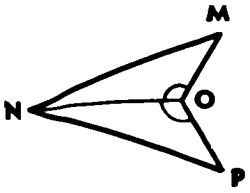


Рис. 30

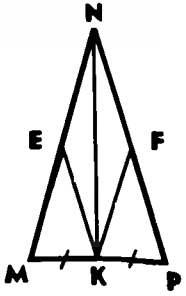


Рис. 31

$\angle DCP = \angle D_1C_1P_1$. Докажите, что: а) $\triangle DCP = \triangle D_1C_1P_1$; б) $\triangle CPE = \triangle C_1P_1E_1$.

2. На рисунке 31 треугольник MNP равнобедренный с основанием MP, точка K — середина отрезка MP, $\angle MKE = \angle PKF$. Докажите, что $\triangle NEK = \triangle NFK$.

Желательно выделить время на проведение анализа решения задач этой самостоятельной работы (может быть, некоторых отдельных фрагментов решения задач). В целях экономии времени можно использовать кодоскоп.

Дома: пп. 19—20; вопросы 14—15 (с. 48); задачи 122, 124, 125, 128, 133, 134, 136, 137.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** формулировки и доказательства второго и третьего признаков равенства треугольников, **уметь** решать задачи типа 121, 122, 123, 125, 129, 132, 136, 137, 138, 139.

§ 4. Задачи на построение (3 ч)

Назначение параграфа состоит в том, чтобы дать представление о новом классе задач — построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки без масштабных делений — и рассмотреть основные (простейшие) задачи этого типа.

Задачам на построение предшествует рассмотрение окружности и ее элементов (п. 21). Здесь впервые вводится понятие определения, поэтому желательно остановиться на этом вопросе и показать учащимся, что они фактически уже встречались с определениями некоторых геометрических фигур, например угла, треугольника, вертикальных углов.

Изучение темы «Окружность» полезно начать с систематизации сведений, известных учащимся из курса математики предыдущих классов. Для этого можно организовать самостоятельную работу по учебнику и заранее заготовленным плакатам или транспарантам, уделив особое внимание отработке определения окружности и ее элементов.

Проверку усвоения изученного материала можно провести при решении задач 143 (устно), 144, 147 (с записью решения на доске и в тетрадях учащихся). При решении задачи 147 полезно рекомендовать учащимся после изображения окружности начертить прямой угол с вершиной в точке O — центре этой окружности, а затем отметить на окружности точки A и B пересечения сторон прямого угла с окружностью. При наличии времени можно провести самостоятельную работу обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

Отрезки KM и EF являются диаметрами окружности с центром O. Докажите, что: а) $\angle FEM = \angle KME$; б) отрезки KE и MF равны.

Вариант II

Отрезки ME и PK являются диаметрами окружности с центром O. Докажите, что: а) $\angle EMP = \angle MPK$; б) отрезки MK и PE равны.

Вариант III

В окружности с центром O проведены диаметр AC и радиус OB так, что хорда BC равна радиусу. Найдите $\angle AOB$, если $\angle BCO = 60°$.

Вариант IV

В окружности с центром O проведены хорды AB и CD (рис. 32). Докажите, что $AB = CD$, если $\angle AOC = \angle BOD$.

Изучение пп. 22 и 23 целесообразно начать с напоминания об известных учащимся способах построения геометрических фигур с помощью различных инструментов. При этом можно отметить, что при построении отрезка заданной длины использовалась линейка с миллиметровыми делениями, а при построении угла заданной градусной меры — транспортир. Но, оказывается, многие построения в геометрии могут быть выполнены с помощью только циркуля и линейки без делений. В дальнейшем, говоря о задачах на построение, мы будем иметь в виду именно такие построения.

Задачи на построение циркулем и линейкой являются традиционным материалом, изучаемым в курсе планиметрии. Обычно эти задачи решаются по схеме, состоящей из четырех частей (см. с. 90—91 учебника). Сначала рисуют (чертят) искомую фигуру и устанавливают связи между данными задачи и искомыми элементами. Эта часть решения называется анализом. Она дает возможность составить план решения задачи. Затем по намеченному плану выполняется построение циркулем и линейкой. После этого нужно доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи. И наконец, необходимо исследовать, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

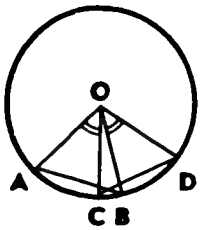


Рис. 32

В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, можно опустить. В VII классе при решении задач на построение реко-

мендуется ограничиваться только выполнением построения. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования должны присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи. Учащимся, проявляющим повышенный интерес к предмету, полезно решать задачи на построение по полной схеме.

На уроках по этой теме нужно прежде всего отработать навыки решения простейших задач на построение циркулем и линейкой, рассмотренных в учебнике:

1. На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.
2. Отложить от данного луча угол, равный данному.
3. Построить биссектрису данного неразвернутого угла.
4. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка.
5. Построить середину данного отрезка.
6. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой (задача 153).

После этого в классе можно решить задачи 148, 150, 151, 152, акцентируя внимание учащихся на том, что, приступая к решению задачи на построение, нужно начертить все фигуры, данные в ее условии.

Дома: пп. 21—23; вопросы 16—21 (с. 48); задачи 145, 146, 149, 154, 155.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определение окружности, **уметь** объяснить, что такое центр, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности, выполнять с помощью циркуля и линейки простейшие построения: отрезка, равного данному; угла, равного данному; биссектрисы данного угла; прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; середины данного отрезка; применять простейшие построения при решении задач типа 148, 149, 150, 151, 154, 155.

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — закрепить навыки в решении задач на применение признаков равенства треугольников, продолжить выработку навыков решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Для решения в классе рекомендуется использовать те из задач 157, 159, 160, 162, 163, 169, 171, 172, 181, 183, которые, по мнению учителя, наиболее подходят для данного класса. Для более продуктивной работы на уроках полезно использовать таблицы с готовыми чертежами, транспаранты для графопроектора.

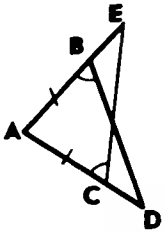


Рис. 33

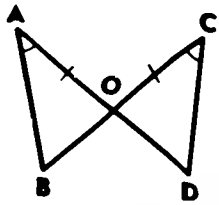


Рис. 34

Сильным учащимся можно предложить задачи 158, 165, 166, 167, 173, 174, 175, 176, 178, 179.

На одном из уроков полезно провести проверочную *самостоятельную работу* на 25—30 минут (лучше это сделать на втором уроке).

Вариант I

1. На рисунке 33 $AB=AC$ и $\angle ACE=\angle ABD$. а) Докажите, что $\triangle ACE=\triangle ABD$. б) Найдите стороны треугольника ABD, если $AE=15$ см, $EC=10$ см, $AC=7$ см.

2. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки K и K_1, такие, что $CK=C_1K_1$. Докажите, что $\triangle ABK=\triangle A_1B_1K_1$.

Вариант II

1. На рисунке 34 $AO=CO$ и $\angle BAO=\angle DCO$. а) Докажите, что $\triangle AOB=\triangle COD$. б) Найдите углы треугольника AOB, если $\angle OCD=37°$, $\angle ODC=63°$, $\angle COD=80°$.

2. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B=\angle B_1$, $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $AD=A_1D_1$. Докажите, что $\triangle BDC=\triangle B_1D_1C_1$.

Варианты III и IV предназначены для наиболее подготовленных учащихся.

Вариант III

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BO перпендикулярна к прямой AC.

Вариант IV

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC медианы BD и CE, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямые AM и BC перпендикулярны.

Для домашней работы можно использовать задачи 156, 161, 164, 168, 170, 177, 180, 182, 184, 185.

Контрольная работа № 2 (1 ч)

Вариант I

1. На рисунке 35 отрезки AB и CD имеют общую середину O. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.

2. Луч AD — биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $AB = AC$.

3. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. С помощью циркуля и линейки проведите медиану BB_1 к боковой стороне AC.

Вариант II

1. На рисунке 36 отрезки ME и PK точкой D делятся пополам. Докажите, что $\angle KMD = \angle PED$.

2. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что $DM = DK$. Точка P лежит внутри угла D и $PK = PM$. Докажите, что луч DP — биссектриса угла MDK.

3. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и острым углом B. С помощью циркуля и линейки проведите высоту из вершины угла A.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 37 прямые AB и CD пересекаются в точке E, $CE = BE$, $\angle C = \angle B$, AA_1 и DD_1 — биссектрисы треугольников ACE и DBE. Докажите, что $AA_1 = DD_1$.

2. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $AB = AC$. Точка M лежит внутри угла A, и $MB = MC$. На прямой AM отмечена точка D так, что точка M лежит между точками A и D. Докажите, что $\angle BMD = \angle CMD$.

3. Начертите равнобедренный тупоугольный треугольник ABC с основанием BC и с тупым углом A, с помощью циркуля и линейки проведите:

а) высоту треугольника ABC из вершины угла B;

б) медиану треугольника ABC к стороне AB;

в) биссектрису треугольника ABC угла A.

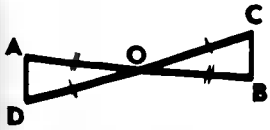


Рис. 35

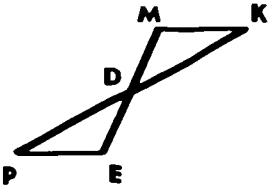


Рис. 36

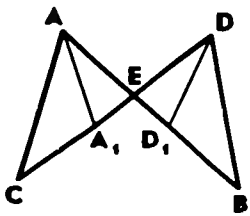


Рис. 37

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

2. На рисунке 38 $AB=DB$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle DBC$.

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $CD=C_1D_1$ Докажите, что $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$.

Вариант II

1. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

2. На рисунке 39 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. Докажите, что $\triangle ABD=\triangle CBD$.

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы AD и A_1D_1. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, если $DC=D_1C_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle ADC=\angle A_1D_1C_1$.

Вариант III

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

2. На рисунке 40 $AB=DC$, $BC=AD$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle CDA$.

3. На рисунке 41 $AB=DC$, $BK=DM$, $AM=CK$. Докажите, что $\triangle ADM=\triangle CBK$.

Вариант IV

1 Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.

2. На рисунке 42 $AB=BC$, $AD=DC$. Докажите, что $\angle BAD=\angle BCD$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взяты точки D и E так, что $AD=CE$. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

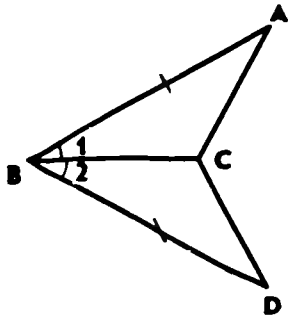


Рис. 38

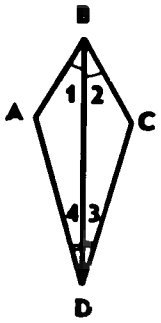


Рис 39

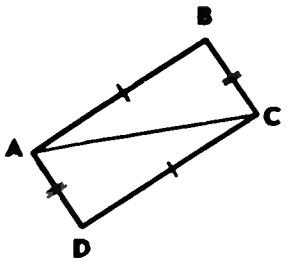


Рис. 40

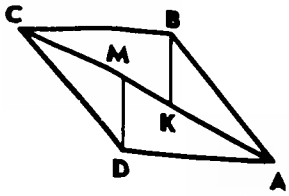


Рис. 41

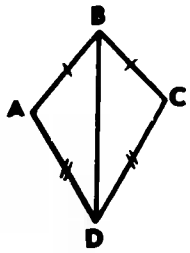


Рис. 42

Вариант V

1. Сформулируйте свойство биссектрисы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD, $\angle ABD = 37°$, $AC = 25$ см. Найдите $\angle B$, $\angle BDC$ и DC.

3. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием DE проведена биссектриса CF. Найдите CF, если периметр треугольника CDE равен 84 см, а треугольника CFE — 56 см.

Вариант VI

1. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой.

2. Сформулируйте теорему о перпендикуляре, проведенном из данной точки к данной прямой.

3. С помощью циркуля и линейки постройте середину данного отрезка.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы II

115. Запись решения задачи значительно упрощается, если ввести цифровые обозначения углов, как показано на рисунке 43.

Решение. 1. $\triangle AMB$ равнобедренный, так как $AM = MB$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. 2. $\triangle AMC$ равнобедренный, так как $AM = CM$, следовательно, $\angle 3 = \angle 4$. 3. $\angle BAC = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$. Таким образом, $\angle BAC = \angle B + \angle C$.

139(а, б). Можно рекомендовать следующую краткую запись решения:

а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по трем сторонам, следовательно, $\angle ABC = \angle CDA$. Так как BE и DF — биссектрисы углов ABC и CDA, то $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle ADF = \frac{1}{2}\angle CDA$, откуда следует, что $\angle ABE = \angle ADF$.

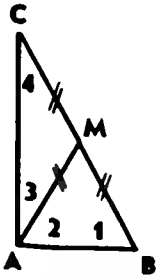


Рис. 43

б) Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $\angle BAE = \angle DCF$. Далее, $\angle ABE = \angle ADF = \angle CDF$. Итак, $\angle ABE = \angle CDF$, $\angle BAE = \angle DCF$ и $AB = CD$ по условию, следовательно, $\triangle ABE = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

149. При решении задач на построение полезно, как уже отмечалось, акцентировать внимание учащихся на том, что вначале необходимо начертить все фигуры, данные в условии задачи. Например, в данной задаче чертим прямую a, отрезок PQ и отмечаем точку B так, что $B \notin a$ (рис. 44, *а*). Далее проводим окружность радиуса PQ с центром в точке B. Пусть M — одна из точек пересечения этой окружности с прямой a. Точка M искомая, так как $M \in a$ и $BM = PQ$

Остается выяснить, всегда ли задача имеет решение. Ответ на этот вопрос учащиеся могут дать с помощью рисунка 44, *б*, *в*, *г*. Мы видим на рисунке 44, *г*, что задача не имеет решений

152. Начертим тупой угол AOB, построим биссектрису OC этого угла и проведем продолжение OX луча OC (рис. 45). Луч OX искомый. Убедимся в этом. По построению OC — биссектриса угла AOB, поэтому $\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOB$ и углы AOC и COB острые. По построению углы AOC и AOX, а также углы COB и BOX смежные. Сумма смежных углов равна 180°, поэтому из равенства $\angle AOC = \angle BOC$ следует, что $\angle AOX = \angle BOX$. Так как углы AOC и COB острые, то смежные с ними углы AOX и BOX тупые.

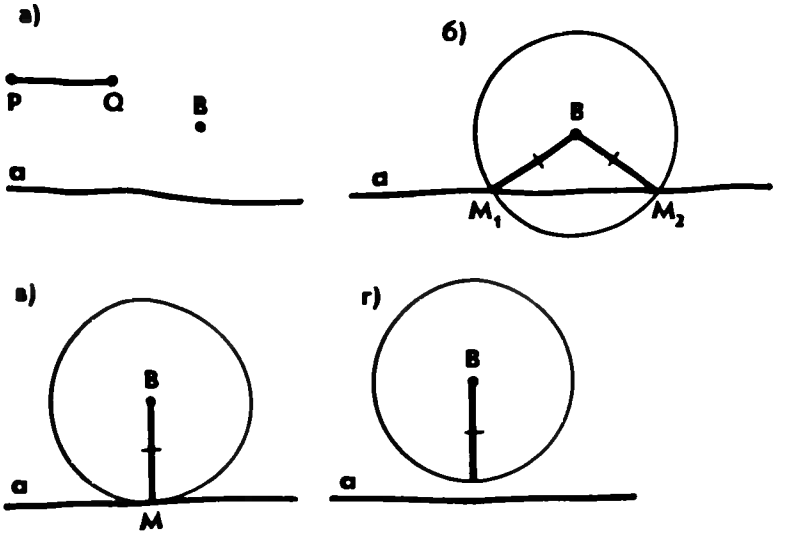


Рис. 44

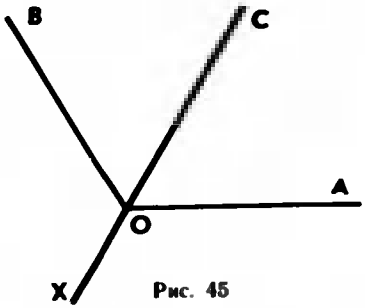


Рис. 45

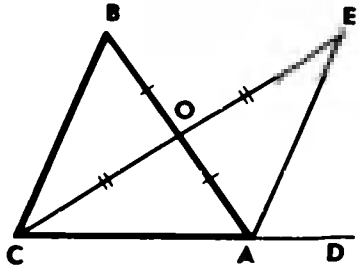


Рис. 46

160. Обозначим буквой O середину отрезка AB, тогда $O \in a$.

а) Возьмем произвольную точку M прямой a. Если M лежит на прямой AB, то она совпадает с точкой O, поэтому $AM = MB$. Пусть точка M не лежит на прямой AB; $\triangle AOM = \triangle BOM$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $MA = MB$.

б) Возьмем теперь точку M плоскости, такую, что $AM = BM$. Если точка M лежит на прямой AB, то ясно, что она совпадает с точкой O и поэтому $M \in a$. Предположим, что точки M, A и B не лежат на одной прямой. Треугольник MAB равнобедренный ($AM = BM$), и отрезок MO — медиана этого треугольника ($AO = OB$). Поэтому MO также высота треугольника (см. п.18), т.е. $MO \perp AB$. Следовательно, прямая MO совпадает с прямой a, и, значит, $M \in a$.

165. Первая часть решения задачи (пункт (а)), как правило, не вызывает затруднений у учащихся. Для доказательства того факта, что точка O лежит на прямой KK_1 (пункт (б)), полезно дать учащимся указание: рассмотрите луч OK_2, являющийся продолжением луча OK, и докажите, что лучи OK_1 и OK_2 совпадают. Тем самым будет доказано, что точки K, O и K_1 лежат на одной прямой.

173*. Решение. Пусть $\angle BAD$ — угол, смежный с углом A данного треугольника ABC (рис. 46). Докажем, например, неравенство $\angle BAD > \angle B$. Для этого отметим середину O отрезка AB и на продолжении луча OC отложим отрезок OE, равный отрезку OC; $\triangle OBC = \triangle OAE$ по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 46), поэтому $\angle B = \angle OAE$. Но $\angle OAE < \angle BAD$, так как луч AE делит угол BAD на два угла, следовательно, $\angle B < \angle BAD$.

174*. При решении этой задачи используется утверждение, сформулированное в задаче 173.

Решение. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона BC совместилась со стороной B_1C_1 ($BC = B_1C_1$ по условию), а сторона BA наложилась на луч B_1A_1 ($\angle B = \angle B_1$ по условию) (рис. 47). При этом точка A совместится либо с точкой A_1, либо с какой-то точкой, лежащей на луче B_1A_1

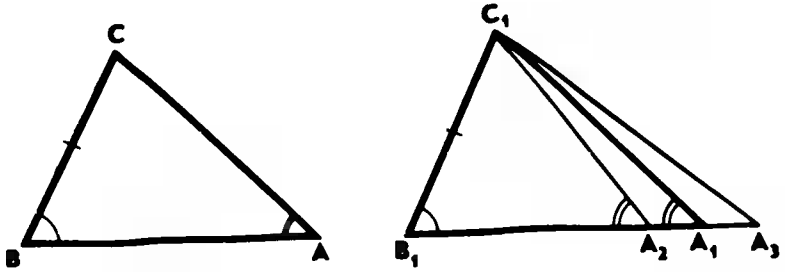


Рис. 47

по одну или по другую сторону от A_1 (с точкой A_2 или точкой A_3). Допустим, что точка A совместится с точкой A_2. Тогда треугольник ABC совместится с треугольником $A_2B_1C_1$, и поэтому $\angle B_1A_2C_1 = \angle A = \angle B_1A_1C_1$. Но угол $B_1A_2C_1$ смежный с углом A_2 треугольника $A_1C_1A_2$, и, следовательно, он должен быть больше угла $B_1A_1C_1$ (задача 173). Значит, точка A не может совместиться с точкой A_2. Аналогично можно доказать, что точка A не может совместиться с точкой A_3. Следовательно, точка A совместится с точкой A_1. В результате треугольник ABC полностью совместится с треугольником $A_1B_1C_1$, и, значит, эти треугольники равны.

175*. Запись решения задачи значительно упрощается, если ввести цифровые обозначения углов, как показано на рисунке 48.

Решение. а) $\triangle OAD = \triangle OBC$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

б) Углы 3 и 5, а также 4 и 6 являются смежными, поэтому из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что $\angle 5 = \angle 6$.

в) $\triangle EBD = \triangle EAC$ по стороне и двум прилежащим углам, поэтому $EB = EA$.

г) $\triangle OAE = \triangle OBE$ по трем сторонам, следовательно, $\angle 7 = \angle 8$, т. е. OE — биссектриса угла XOY.

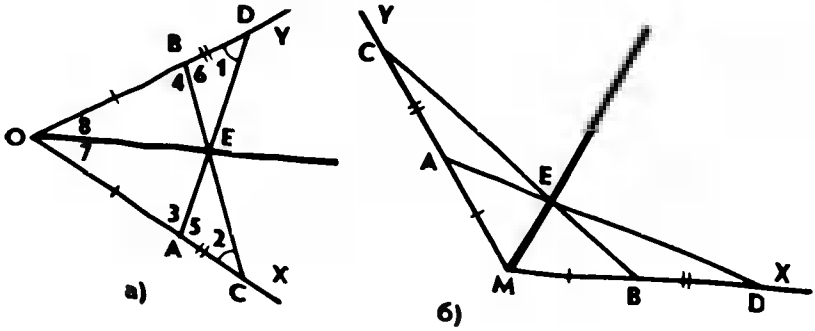


Рис. 48

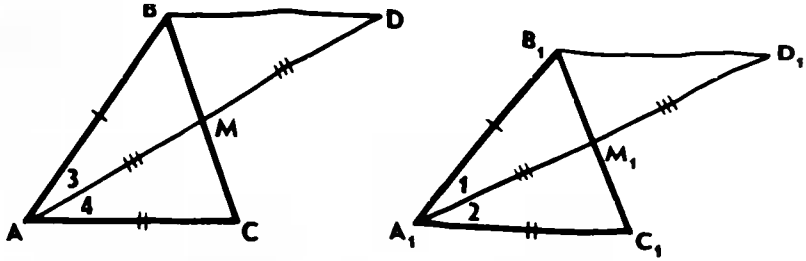


Рис. 49

Для построения биссектрисы произвольного угла M на его сторонах откладываем отрезки $MA=MB$, $AC=BD$, как показано на рисунке 48, *б*, и проводим отрезки AD и BC. Затем проводим искомый луч ME, где E — точка пересечения отрезков AD и BC.

176*. Решение. Проведем отрезки MD, BD, M_1D_1, B_1D_1 (рис. 49).

1. $\triangle BMD=\triangle CMA$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD=AC$, $\angle D=\angle 4$. Аналогично $\triangle B_1M_1D_1=\triangle C_1M_1A_1$, откуда $B_1D_1=A_1C_1$, $\angle D_1=\angle 2$. Отсюда следует, что $BD=B_1D_1$.

2. $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$ по трем сторонам, поэтому $\angle 3=\angle 1$, $\angle D=\angle D_1$, следовательно, $\angle 4=\angle 2$.

3. $\angle A=\angle A_1$, так как $\angle A=\angle 4+\angle 3=\angle 2+\angle 1=A_1$. Таким образом, $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

177*. Решение. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $BC=B_1C_1$ (рис. 50).

а) $\triangle CKL=\triangle C_1K_1L_1$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle C=\angle C_1$, $CK=AC-AK=A_1C_1-A_1K_1=C_1K_1$, $LC=L_1C_1$), поэтому $KL=K_1L_1$.

б) $\triangle ABL=\triangle A_1B_1L_1$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle B=\angle B_1$, $BA=B_1A_1$, $BL=B_1L_1$), поэтому $AL=A_1L_1$.

178*. Решение. Пусть точка B лежит на отрезке AC. Допустим, что $AD=BD=CD$. Тогда треугольники ADC, ADB и

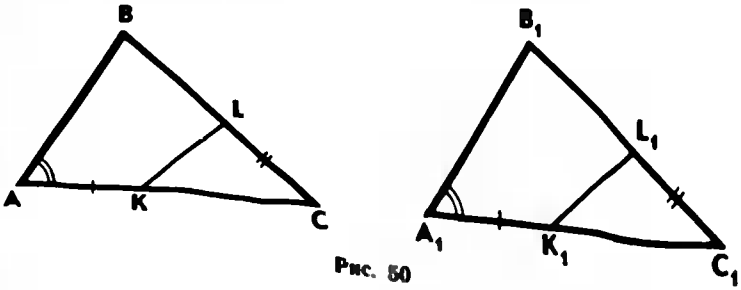


Рис. 50

BDC равнобедренные, поэтому $\angle A = \angle C$, $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$. Следовательно, $\angle ABD = \angle CBD$. Но эти углы смежные, а так как они равны, то каждый из них равен 90°. Итак, $\angle A$ и $\angle ABD$ — прямые углы, т.е. прямые AD и BD перпендикулярны к прямой AC. Но это невозможно, так как они пересекаются в точке D. Значит, наше предположение, что $AD = BD = CD$, неверно, поэтому хотя бы два из этих отрезков не равны друг другу.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы II

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала на изучение темы «Треугольники» отводится 14 часов. Их можно распределить следующим образом:

§ 1.	Первый признак равенства треугольников	3 ч
§ 2.	Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3 ч
§ 3.	Второй и третий признаки равенства треугольников	3 ч
§ 4.	Задачи на построение	2 ч
	Решение задач	2 ч
	Контрольная работа № 2	1 ч

Поскольку приведенный план несущественно отличается от второго варианта планирования данной темы, все рекомендации по проведению уроков, данные выше, могут быть использованы и здесь. Нужно лишь на уроках, отведенных на решение задач по теме в целом, ограничиться задачами, аналогичными тем, которые включены в контрольную работу. Для проведения контрольной работы № 2 можно использовать варианты, предложенные выше.

ГЛАВА III

Параллельные прямые (13 ч)

В этой главе вводится одно из важнейших понятий — понятие параллельных прямых и дается первое представление об аксиомах и аксиоматическом методе в геометрии. Изучаются признаки и свойства параллельных прямых. На основе новых геометрических фактов существенно расширяется круг задач. Теория параллельных прямых дает богатый материал и для внеклассной работы, в частности для ознакомления учащихся с вопросами истории, связанными с пятым постулатом Евклида.

§ 1. Признаки параллельности двух прямых (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятие параллельных прямых, рассмотреть признаки параллельности двух прямых, связанные с накрест лежащими, односторонними и соответственными углами, и показать, как они применяются при решении задач.

Вопрос о возможных случаях взаимного расположения двух прямых на плоскости рассматривался на первых уроках геометрии. Поэтому изучение темы можно начать с повторения, используя при этом готовые чертежи, плакаты или кодопозитивы. Можно предложить учащимся провести обоснование того факта, что две прямые не могут иметь двух или более общих точек, а затем дать определение параллельных прямых и соответствующее обозначение: $a \parallel b$.

По рисунку 99 учебника можно ввести понятие параллельных отрезков, отрезка и прямой, луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей.

При рассмотрении различных пар углов, образованных двумя прямыми и секущей, рекомендуется провести работу, используя заранее заготовленные таблицы или рисунки на доске. Например: 1) По рисунку 51, *а*, *б*, *в* назовите пары накрест лежащих, односторонних, соответственных углов. 2) На рисунке 51, *в* $\angle 4 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 5 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 8$. 3) На рисунке 51, *в* $\angle 1 = \angle 5$. а) Выпишите пары накрест лежащих углов и докажите, что в каждой паре углы равны. б) Выпишите все пары соответственных углов и докажите, что в каждой паре углы равны. в) Выпишите все пары односторонних углов и докажите, что сумма углов в каждой паре равна 180°.

Перед изучением признака параллельности двух прямых, использующего накрест лежащие углы, желательно повторить признаки равенства треугольников и утверждение о том, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (п.12). После этого можно еще раз остановиться на определении параллельных прямых и отметить, что так как прямые бесконечны, то невозможно непосредственно убедиться в том, что они не имеют

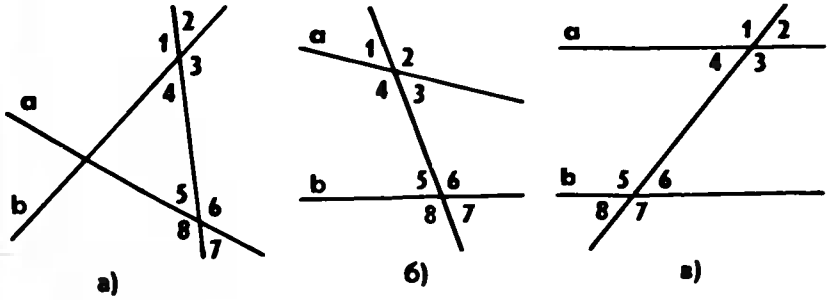


Рис. 51

общей точки. Поэтому желательно иметь какие-то признаки, по которым можно сделать вывод о параллельности прямых.

Уместно напомнить учащимся, что с понятием «признак» они уже встречались, когда изучали признаки равенства треугольников. Теперь же предстоит познакомиться с признаками параллельности двух прямых.

Доказательство теоремы — признака параллельности двух прямых, использующего накрест лежащие углы,— полезно провести по тексту учебника. Оно не является традиционным — во многих учебниках этот признак доказывается методом от противного. В процессе доказательства необходимо акцентировать внимание учащихся на назначении дополнительных построений (рис. 101, *в* учебника). Теорема является важной и сама по себе, и потому, что на нее опираются доказательства других признаков параллельности прямых. После доказательства теоремы можно по рисункам учебника или по ранее заготовленным плакатам решить устно задачи 187 и 189. Решение задачи 191 желательно записать на доске и в тетрадях учащихся.

Два других признака, использующих соответственные и односторонние углы, можно предложить учащимся изучить самостоятельно. В качестве упражнений для усвоения рассмотренных теорем можно решить задачи 186 (а, в), 192.

После этого следует познакомиться с практическими способами построения параллельных прямых (п.26) и выполнить задание 195. В качестве повторения можно решить задачу на построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

При наличии времени полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

1. Параллельны ли прямые d и e, изображенные на рисунке 52?

2. На рисунке 53 точка O — середина отрезков EL и KF. Докажите, что $EF \parallel KL$.

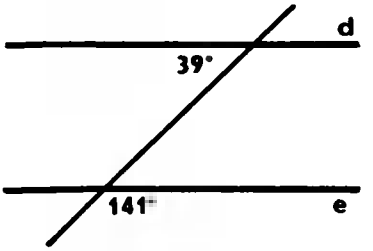


Рис. 52

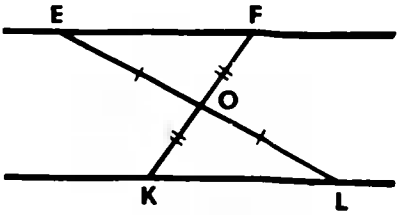


Рис. 53

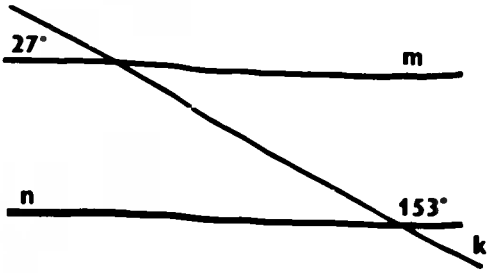


Рис. 54

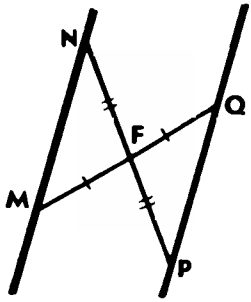


Рис. 55

Вариант II

1. Параллельны ли прямые m и n, изображенные на рисунке 54?

2. На рисунке 55 отрезки MQ и NP пересекаются в их середине F. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

Вариант III

1. Какие из прямых m, n и p, изображенные на рисунке 56, являются параллельными? Ответ обоснуйте.

2. В равнобедренных треугольниках CDE и FPK, изображенных на рисунке 57, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $CD \parallel PF$.

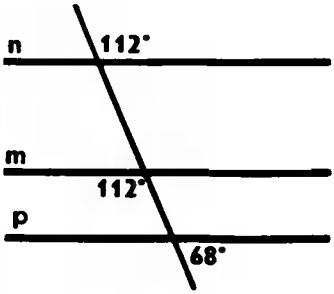


Рис. 56

Вариант IV

1. На рисунке 58 $MQ = NP$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

2. В равнобедренных треугольниках ABC и DEF, изображенных на рисунке 59, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

Дома: пп. 24—26; вопросы 1—6 (с. 63—64); задачи 186 (б), 188, 190, 193, 194.

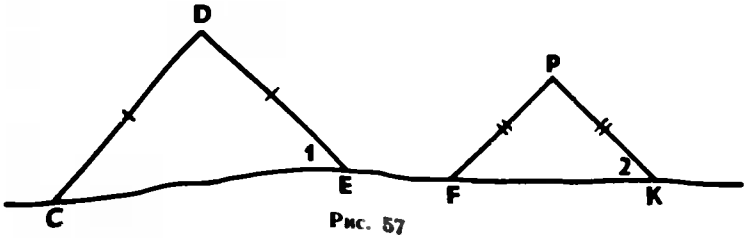


Рис. 57

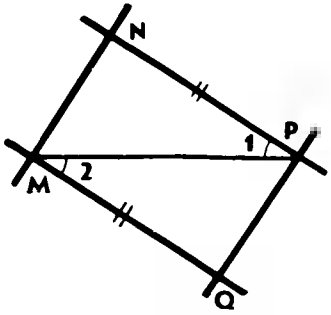


Рис. 58

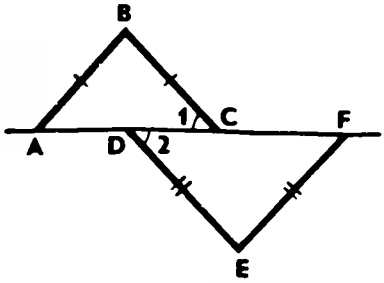


Рис. 59

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определение параллельных прямых, названия углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, формулировки признаков параллельности прямых; понимать, какие отрезки и лучи являются параллельными; **уметь** показать на рисунке пары накрест лежащих, соответственных, односторонних углов, доказывать признаки параллельности двух прямых и использовать их при решении задач типа 186, 187, 188, 189, 191, 194; уметь строить параллельные прямые при помощи чертежного угольника и линейки.

§ 2. Аксиома параллельных прямых (5 ч)

Назначение параграфа — дать представление об аксиомах геометрии, ввести аксиому параллельных прямых, рассмотреть свойства параллельных прямых и показать, как они используются при решении задач.

Распределить материал по урокам можно следующим образом: аксиома параллельных прямых — 1 урок; свойства параллельных прямых — 2 урока; решение задач — 2 урока.

Так как учащиеся впервые встречаются с понятием аксиомы, то учителю следует начать изложение нового материала с беседы об аксиомах геометрии, причем можно использовать п.27 и приложения 1 и 3 из учебника, а также книгу Г. И. Глейзера «История математики в школе», вышедшую в издательстве «Просвещение» в 1982 году.

Затем можно предложить учащимся задачу, решение которой дано в начале п.28: через точку M, не лежащую на прямой a, провести прямую, параллельную прямой a. Решение этой задачи доказывает существование прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

После этого можно поставить вопрос: сколько таких прямых можно провести? Полезно рассказать учащимся о том, что в геометрии Евклида, изложенной им в книге «Начала», ответ на данный вопрос следует из знаменитого пятого постулата и этот ответ таков: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Пятый постулат знаменит тем, что долгие годы его пытались доказать на основе остальных аксиом Евклида. И лишь в прошлом веке, во многом благодаря великому русскому математику Н. И. Лобачевскому, было доказано, что пятый постулат не может быть выведен из остальных аксиом. Поэтому утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, принимается в качестве аксиомы. Следует заострить внимание учащихся на том, что в аксиоме утверждается, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (единственность прямой), а существование такой прямой доказывается.

Далее можно решить задачи 196 (устно) и 197. При решении задачи 197 полезно на рисунке показать учащимся два возможных случая расположения прямых:

а) все четыре прямые пересекают прямую p;

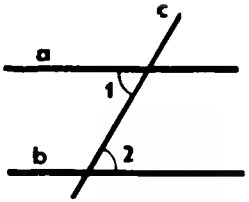
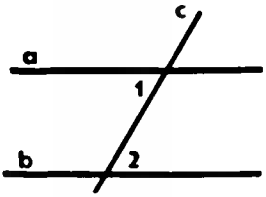
б) одна из четырех прямых параллельна прямой p, а три другие прямые пересекают ее.

Эти два случая иллюстрируют ответ на вопрос задачи: по крайней мере три прямые пересекают прямую p.

В этом параграфе учащиеся впервые встречаются с понятием следствия, поэтому нужно разъяснить смысл этого понятия, после чего рассмотреть следствия 1° и 2° из аксиомы параллельных прямых и решить задачи 198, 200, 213. При наличии времени полезно устно решить задачи 217 и 218. Задачу 219 можно предложить учащимся, проявляющим интерес к геометрии.

Свойства параллельных прямых, рассмотренные в этом параграфе, связаны с парами углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей. Желательно добиться от учащихся понимания того, что накрест лежащие, соответственные и односторонние углы можно рассмотреть для любых двух прямых и секущей, но только в случае параллельных прямых накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, а сумма односторонних углов составляет 180°.

При доказательстве теоремы о накрест лежащих углах нужно отметить, что она является обратной признаку параллельности двух прямых. Полезно сравнить условия и заключения двух теорем: теоремы, выражающей признак параллельности двух прямых, и обратной теоремы о свойстве параллельных прямых, составив следующую таблицу:

Признак параллельности прямых a и b	Свойство параллельных прямых a и b
Дано: прямые a и b, секущая c, $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы, $\angle 1 = \angle 2$ 	Дано: прямые a и b, секущая c, $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы, $a \parallel b$ 
Доказать: $a \parallel b$	Доказать: $\angle 1 = \angle 2$

После рассмотрения теоремы следует акцентировать внимание учащихся на методе доказательства от противного, с помощью которого и была доказана теорема. Кроме того, важно отметить, что если верно некоторое утверждение, то отсюда еще не следует, что и обратное утверждение тоже верно. Можно, например, рассмотреть два утверждения: 1) Если точка C — середина отрезка AB, то $AC = CB$. 2) Если $AC = CB$, то точка C — середина отрезка AB. Второе утверждение является обратным первому. Первое утверждение верно, в то время как второе неверно. В самом деле, в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB отрезки AC и CB равны, но точка C не является серединой отрезка AB.

Можно предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное теореме о смежных углах, и показать, что оно не имеет места. Полезно также предложить учащимся самостоятельно (может быть, в качестве домашнего задания) подобрать один-два примера прямых и обратных утверждений.

Затем рекомендуется решить задачи 202, 203 (б), 220.

Следствие из доказанной на уроке теоремы можно использовать в качестве задачи для самостоятельного решения с последующей проверкой. Теоремы о свойствах соответственных и односторонних углов, образованных двумя параллельными и секущей, учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику. На применение свойств рекомендуется решить задачи 205, 206, 208, 211 (в).

В классе желательно разобрать решение задачи 212, обратив внимание учащихся на то, что свойство углов с соответственно параллельными сторонами, сформулированное в этой задаче, часто используется при решении задач и потому его полезно запомнить.

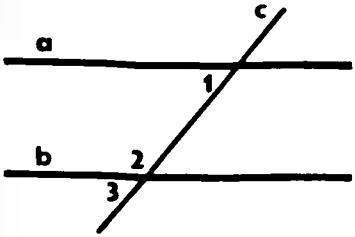


Рис. 60

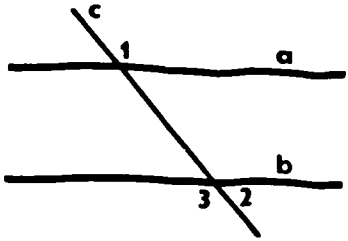


Рис. 61

При наличии времени целесообразно провести *самостоятельную работу* проверочного характера с анализом ее выполнения:

Вариант I

1. На рисунке 60 прямые a и b параллельны, угол 2 на 34° больше угла 1. Найдите угол 3.

2. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая CD, параллельная стороне AB. Найдите углы A и B треугольника, если $\angle DCB = 37°$.

Вариант II

1. На рисунке 61 прямые a и b параллельны, угол 2 в четыре раза меньше угла 1. Найдите угол 3.

2. Через вершину C треугольника CDE с прямым углом D проведена прямая CP, параллельная прямой DE. Найдите углы C и E треугольника, если $\angle PCE = 49°$.

Дома: пп. 27—29; вопросы 7—15 (с. 64); задачи 199, 201, 203 (а), 204, 207, 209, 210, 211 (а, б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** аксиому параллельных прямых и следствия из нее, знать и **уметь** доказывать свойства параллельных прямых и применять их при решении задач типа 196, 198, 199, 201, 203, 204, 205, 209.

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — привести в систему знания учащихся по данной теме, добиться четкого понимания того, когда в задаче нужно применить признак параллельности двух прямых, а когда — свойство параллельных прямых, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

На этих уроках полезно порешать задачи по готовым чертежам.

1. На рисунке 62 $AM = AN$, $\angle MNC = 117°$, $\angle ABC = 63°$. Докажите, что $MN \parallel BC$.

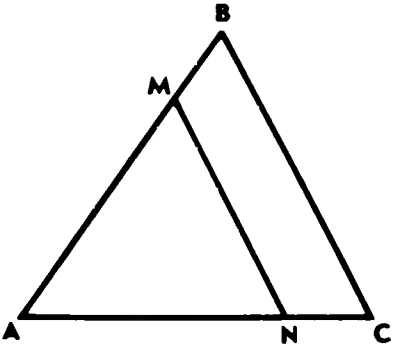


Рис. 62

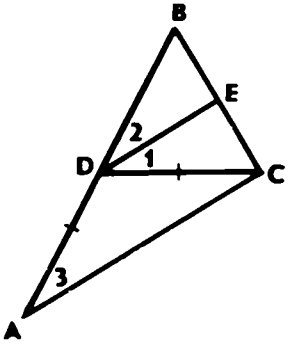


Рис 63

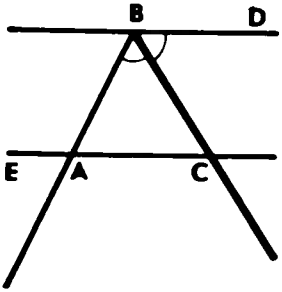


Рис. 64

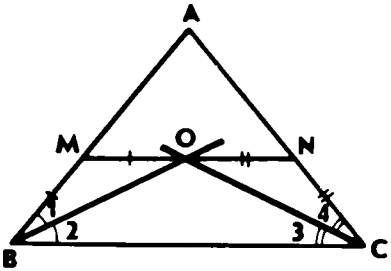


Рис. 65

2. На рисунке 63 $AD = DC$, $DE \parallel AC$, $\angle 1 = 30°$ Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$.

3. На рисунке 64 $BD \parallel AC$, луч BC — биссектриса угла ABD, $\angle EAB = 116°$. Найдите угол BCA.

4. На рисунке 65 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC. На сторонах AB и AC отмечены точки M и N так, что $BM = MO$, $CN = NO$. Докажите, что точки M, O и N лежат на одной прямой.

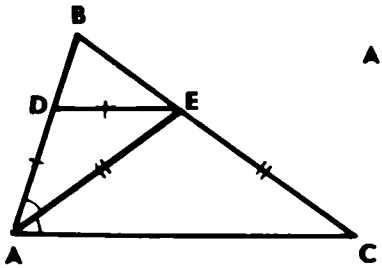


Рис. 66

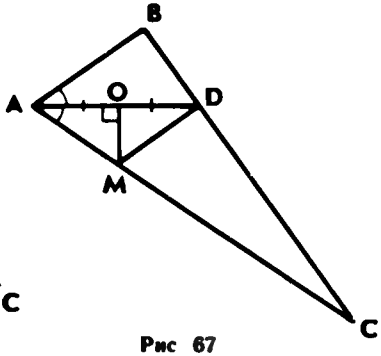


Рис 67

5. На рисунке 66 AE — биссектриса треугольника ABC, $AD=DE$, $AE=CE$, $\angle ACB=37°$. Найдите $\angle BDE$.

6. На рисунке 67 AD — биссектриса треугольника ABC, $AO=OD$, $MO \perp AD$. Докажите, что $MD \parallel AB$.

В классе можно решать также задачи 216, 221. На этих уроках полезно еще раз обсудить решения задач 217, 218, 220.

Дома: 214, 215, 222.

Контрольная работа № 3 (1 ч)

Вариант I

1. Отрезки EF и PQ пересекаются в их середине M. Докажите, что $PE \parallel QF$.

2. Отрезок DM — биссектриса треугольника CDE. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая сторону DE в точке N. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE=68°$.

Вариант II

1. Отрезки MN и EF пересекаются в их середине P. Докажите, что $EN \parallel MF$.

2. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке F. Найдите углы треугольника ADF, если $\angle BAC=72°$.

Варианты III и IV предназначены для наиболее подготовленных учащихся.

Вариант III

1. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E так, что $AE=ED$. Найдите углы треугольника AED, если $\angle BAC=64°$.

2. На рисунке 68 $AC \parallel BD$, точка M — середина отрезка AB. Докажите, что M — середина отрезка CD.

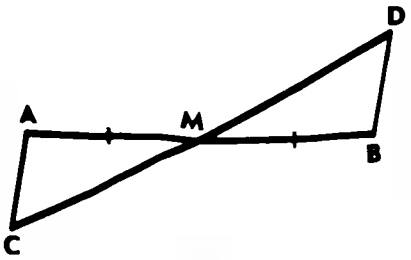


Рис. 68

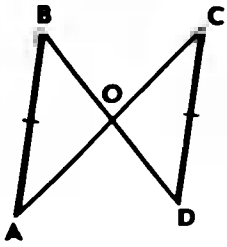


Рис. 69

Вариант IV

1. Отрезок DM — биссектриса треугольника CDE. Через точку M проведена прямая, пересекающая сторону DE в точке N так, что $DN = MN$. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE = 74°$.

2. На рисунке 69 $AB \parallel DC$, $AB = DC$. Докажите, что точка O — середина отрезков AC и BD.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте один из признаков параллельности двух прямых.

2. Докажите, что прямые a и b, изображенные на рисунке 70, параллельны, если $\angle 1 = 36°$, $\angle 8 = 144°$.

3. На рисунке 71 прямые AD и BK параллельны, луч BD — биссектриса угла ABK, $\angle ABK = 80°$. Найдите углы треугольника ABD.

Вариант II

1. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

2. Дан треугольник CDE. Сколько прямых, параллельных стороне CE, можно провести через вершину D?

3. На рисунке 72 отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине M. Через точку B проведена прямая a, параллельная

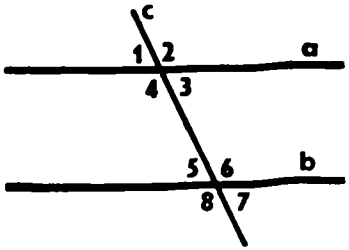


Рис. 70

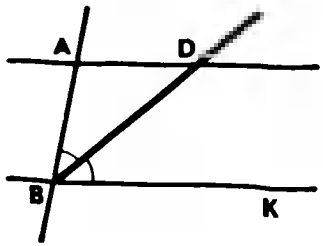


Рис. 71

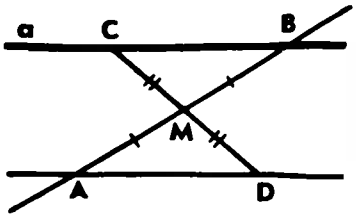


Рис. 72

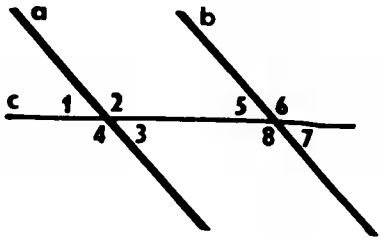


Рис. 73

прямой AD. Докажите, что прямая a проходит через точку C.

Вариант III

1. Сформулируйте одно из свойств параллельных прямых.

2. На рисунке 73 прямые a и b параллельны, $\angle 2 = 132°$. Найдите $\angle 7$.

3. На рисунке 74 $AB = BC$, $BF \parallel AC$. Докажите, что луч BF — биссектриса угла CBD.

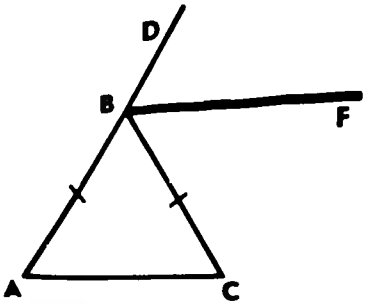


Рис. 74

Комментарии и рекомендации по решению задач главы III

206. Возможны два случая: а) точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 75); б) точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 76). В первом случае углы ABC и BCD односторонние при пересечении прямых AB и CD секущей BC, и так как $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$, то $AB \parallel CD$. Во втором случае углы ABC и BCD накрест лежащие при пересечении прямых AB и CD секущей BC, и так как $\angle ABC \neq \angle BCD$, то прямые AB и CD не параллельны, т.е. пересекаются.

218. Отметим произвольную точку, не лежащую на прямой b, и проведем через нее прямую c, параллельную прямой b. Так как прямая a пересекает прямую b, то она пересекает и прямую c. Таким образом, прямая c пересекает прямую a и параллельна прямой b.

219*. Предположим, что прямые a и b не параллельны, т.е. пересекаются. Тогда можно провести прямую c, которая пересекает прямую a и не пересекает прямую b (задача 218). Но это противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно и $a \parallel b$.

220. Пусть при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы 1 и 2 не равны: $\angle 1 \neq \angle 2$. Предположим,

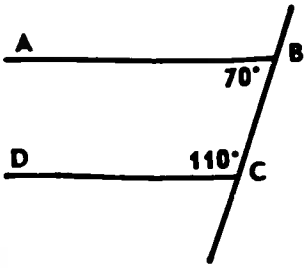


Рис. 75

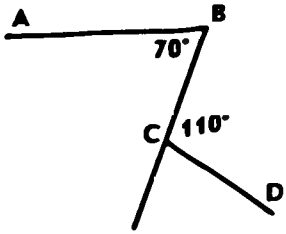


Рис. 76

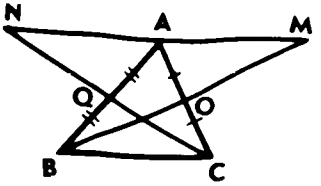


Рис. 77

что прямые a и b параллельны. Тогда согласно свойству параллельных прямых $\angle 1 = \angle 2$, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно и прямые a и b пересекаются.

221. Пусть O и Q — середины сторон AC и AB (рис. 77). Треугольники AOM и COB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AMO = \angle CBO$, и, следовательно, прямые AM и BC параллельны. Аналогично $\triangle ANQ = \triangle BCQ$, и, значит, $AN \parallel BC$. Итак, через точку A проходят прямые AM и AN, параллельные прямой BC. Но через точку A можно провести только одну прямую, параллельную BC. Значит, прямые AM и AN совпадают, т.е. точки M, A и N лежат на одной прямой.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы III

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала на изучение темы «Параллельные прямые» отводится 9 часов. Их можно распределить следующим образом:

§ 1. Признаки параллельности двух прямых	3 ч
§ 2. Аксиома параллельных прямых	3 ч
Решение задач	2 ч
Контрольная работа № 3	1 ч

Несмотря на некоторое сокращение количества часов по сравнению со вторым вариантом, учителю следует выполнить основные рекомендации по изучению теоретического материала данной главы. Вместе с тем необходимо по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных выше для решения в классе и для домашних заданий. Для проведения контрольной работы № 3 можно использовать те же варианты заданий, что и по второму варианту планирования.

ГЛАВА IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника (18 ч)

В этой главе изучаются новые интересные и важные свойства треугольников. Открывается глава одной из важнейших теорем геометрии — теоремой о сумме углов треугольника. Затем рассматриваются соотношения между сторонами и углами треугольников. По ходу изучения нового материала повторяются многие вопросы предшествующих разделов курса: свойства смежных и вертикальных углов, признаки равенства треугольников, свойства параллельных прямых и другие вопросы. Завершается глава задачами на построение треугольника по трем элементам.

§ 1. Сумма углов треугольника (2 ч)

Назначение параграфа — доказать теорему о сумме углов треугольника, следствия из нее; ввести понятия остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников; рассмотреть задачи на применение доказанных утверждений.

Изучение темы «Сумма углов треугольника» полезно начать с решения следующей задачи:

На рисунке 78 $BD \parallel AC$. Найдите сумму углов треугольника ABC.

Вслед за решением этой задачи перед учащимися можно поставить вопрос: случайно ли сумма углов данного треугольника ABC оказалась равной 180° или этим свойством обладает любой треугольник? Поиск ответа естественно приводит к формулированию теоремы о сумме углов треугольника. Доказав ее, целесообразно решить устно задачи 223 (а, б, г), 225, 226. Желательно, чтобы решения задач 227 (б), 228 (а, в), 229 были записаны на доске и в тетрадях учащихся, причем задачу 228 (в) полезно рассмотреть сразу после задачи 226, так как при решении необходимо сослаться на доказанное в задаче 226 утверждение: углы при основании равнобедренного треугольника острые. Далее нужно ввести понятие внешнего угла треугольника и предложить учащимся доказать в

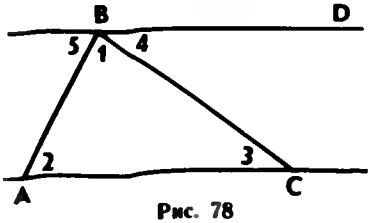


Рис. 78

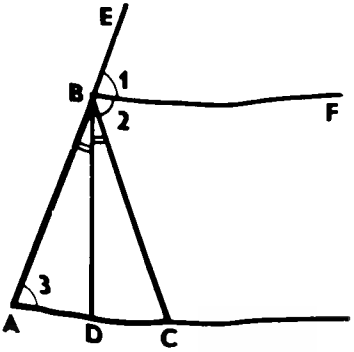


Рис. 79

качестве следствия из теоремы о сумме углов треугольника, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, а потом решить задачи 232 и 233.

Задачу 232 желательно решить под руководством учителя, так как решение этой задачи требует дополнительных построений в связи с тем, что признак равнобедренного треугольника изучается позже.

Возможная запись решения на доске и в тетрадях учащихся может быть следующей:

Дано: $\angle CBE$ — внешний угол треугольника ABC, $\angle CBE = 2\angle A$ (рис. 79).

Доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Решение. Проведем биссектрисы BF и BD смежных углов CBE и ABC, тогда $BF \perp BD$ (см. задачу 83). $BF \parallel AC$, так как $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, а углы 1 и 3 соответственные при пересечении прямых BF и AC секущей AB. $BD \perp AC$, так как $BD \perp BF$, а $BF \parallel AC$. В треугольнике ABC биссектриса BD является высотой, следовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный (см. задачу 133).

Обратное утверждение также верно, а именно: если треугольник равнобедренный, то внешний угол при вершине, противолежащей основанию треугольника, в два раза больше угла при основании. Действительно, этот внешний угол равен сумме двух углов при основании равнобедренного треугольника, а так как углы при основании равны, то данный внешний угол в два раза больше угла при основании треугольника.

Перед введением классификации треугольников по углам (п. 31) полезно задать учащимся такой вопрос: «Может ли треугольник иметь: а) два прямых угла; б) два тупых угла; в) один прямой и один тупой угол?» Ответы должны быть обоснованы с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

Из этих ответов следует вывод (следствие из теоремы о сумме углов треугольника): в любом треугольнике либо все три угла острые, либо два угла острые, а третий — тупой или прямой. Теперь можно ввести понятия остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников и обратить внимание ребят на названиях сторон прямоугольного треугольника — гипотенуза и катет.

На одном из уроков полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера (на 15—20 мин):

Вариант I

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен 96°. Найдите два других угла треугольника.

2. В треугольнике CDE с углом E, равным 32°, проведена биссектриса CF, $\angle CFD = 72°$. Найдите $\angle D$.

Вариант II

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен 108°. Найдите два других угла треугольника.

2. В треугольнике CDE проведена биссектриса CF, $\angle D = 68°$, $\angle E = 32°$. Найдите $\angle CFD$.

Вариант III

1. В равнобедренном треугольнике MNP с основанием MP и углом N, равным 64°, проведена высота MH. Найдите $\angle PMH$.

2. В треугольнике CDE проведены биссектрисы CK и DP, пересекающиеся в точке F, причем $\angle DFK = 78°$. Найдите $\angle CED$.

Вариант IV

1. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE и углом D, равным 102°, проведена высота CH. Найдите $\angle DCH$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN, пересекающиеся в точке K, причем $\angle AKN = 58°$. Найдите $\angle ACB$.

Дома: пп. 30—31; вопросы 1—5 (с. 84); задачи 223 (а), 227 (а), 228 (б), 230, 231, 234, 235.

Наиболее подготовленным учащимся можно предложить решить дома задачи 333, 334, 335.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** доказывать теорему о сумме углов треугольника и ее следствия; **знать**, какой угол называется внешним углом треугольника, какой треугольник называется остроугольным, тупоугольным, прямоугольным; уметь решать задачи типа 223, 224, 225, 226, 228, 229, 234.

§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника (3 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, следствия из этих теорем; показать, как они применяются при доказательстве других теорем и решении задач.

Изучение нового материала можно начать с решения подготовительной задачи:

Дано: $\triangle MOC$, $M - K - C$, $KM = OM$ (рис. 80).

Доказать: а) $\angle 1 > \angle 3$; б) $\angle MOC > \angle 3$.

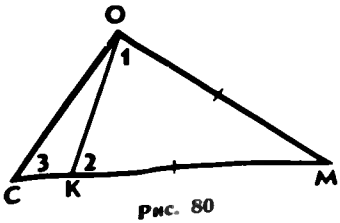


Рис. 80

Доказательство. а) $\triangle OMK$ равнобедренный с основанием OK, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Угол 2 — внешний угол треугольника OKC, поэтому $\angle 2 > \angle 3$. Итак, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 > \angle 3$, следовательно, $\angle 1 > \angle 3$.

б) Так как $M - K - C$, то $\angle MOC > \angle 1$, а так как $\angle 1 > \angle 3$, то $\angle MOC > \angle 3$.

Затем следует сформулировать и доказать первое утверждение теоремы (в треугольнике против большей стороны лежит больший угол) и решить устно задачу 236. Перед доказательством второго утверждения теоремы (в треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона) полезно напоминать учащимся, какая теорема называется обратной данной, и предложить привести примеры обратных теорем, изученных ранее. После этого целесообразно дать им возможность самостоятельно сформулировать утверждение, обратное первому утверждению. На классной доске и в тетрадях учащихся желательно сделать следующую запись:

	Теорема	Обратная теорема
Дано (условие)	$\triangle ABC$, $AB > AC$	$\triangle ABC$, $\angle ACB > \angle ABC$
Доказать (заключение)	$\angle ACB > \angle ABC$	$AB > AC$

Доказательство обратного утверждения проводится методом от противного. В связи с этим, после того как сформулирована обратная теорема, записаны ее условие и заключение, полезно вспомнить, что при сравнении двух отрезков, например CD и EF, возможен один и только один из трех случаев: $CD > EF$, $CD = EF$, $CD < EF$. Поэтому, если мы предполагаем, что CD не больше EF, то возможны два случая: либо $CD = EF$, либо $CD < EF$.

После этих предварительных рассуждений учащимся легче понять, почему при доказательстве теоремы, предположив, что AB не больше AC, мы рассматриваем два возможных случая: либо $AB = AC$, либо $AB < AC$.

Далее можно решить устно задачу 237.

При наличии времени полезно решить также следующие задачи:

1. В треугольнике ABC угол C тупой, K — произвольная точка на стороне AC. Докажите, что $BK < AB$.

2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$ Докажите, что $\angle B > \angle A$.

Следствие 1 учащиеся могут доказать самостоятельно, а затем можно решить задачу 239.

На следствие 2, выражающее признак равнобедренного треугольника, следует обратить особое внимание, так как этот при-

знак часто используется в дальнейшем при доказательстве теорем и решении задач.

На применение признака равнобедренного треугольника рекомендуется решить задачи 240, 241, 242, 243, 247.

Решение задачи 243 полезно записать на доске, с тем чтобы учащиеся перенесли его в свои тетради.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $\triangle ABC$, AA_1 — биссектриса, $CD \parallel AA_1$, $D \in AB$ (рис. 81).

Доказать: $AC = AD$.

Решение. $\angle 1 = \angle 2$, так как AA_1 — биссектриса треугольника ABC.

$\angle 1 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AA_1 и CD и секущей AC.

$\angle 2 = \angle 3$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AA_1 и CD и секущей AD.

Из равенств $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 3 = \angle 4$, а потому $AC = AD$.

При наличии времени можно решить следующую задачу.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см. Найдите CD, если $A - D - B$ и $BD = CD$.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $A - D - B$ (рис. 82), $BD = CD$.

Найти: CD.

Решение. $\angle B = \angle 2$, так как по условию $CD = DB$.

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle B + \angle A = 90°$, но $\angle 2 = \angle B$, поэтому $\angle A = \angle 1$ и $\triangle ADC$ равнобедренный: $AD = CD$. Итак $CD = DB$ по условию, $AD = CD$ по доказанному, следовательно $CD = \frac{1}{2} AB = 5$ см.

На одном из уроков рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера на 15—20 минут:

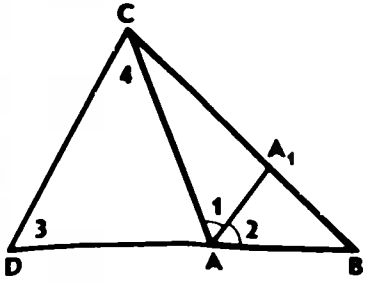


Рис. 81

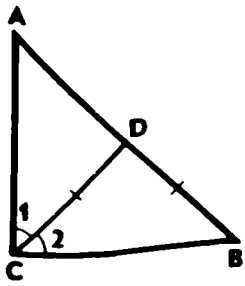


Рис. 82

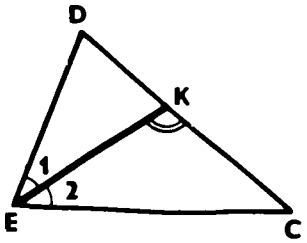


Рис 83

Вариант I

В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, $\angle A=75°$, $\angle C=35°$ а) Докажите, что $\triangle BDC$ равнобедренный. б) Сравните отрезки AD и DC.

Вариант II

В треугольнике CDE проведена биссектриса EF, $\angle C=90°$, $\angle D=30°$. а) Докажите, что $\triangle DEF$ равнобедренный. б) Сравните отрезки CF и DF.

После рассмотрения теоремы о неравенстве треугольника рекомендуется в классе решить задачи 248, 249, 250 (а), 253. Решение задачи 253 можно записать следующим образом.

Решение. 1) Пусть внешний угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC острый, тогда $\angle BAC$ тупой. Следовательно, BC — основание треугольника, а потому $\angle B=\angle C$ и $AB=AC$. 2) $BC>AB$ и $BC>AC$, так как против тупого угла лежит бо́льшая сторона треугольника. Поэтому, учитывая условия задачи, имеем: $BC-AB=4$ см. 3) $AB+AC+BC=25$ см, или $2AB+BC=25$ см. Но $BC=AB+4$ см, следовательно, $3AB+4$ см $=$ $=25$ см, откуда $AB=7$ см, $BC=11$ см, $AC=7$ см.

Перед предстоящей контрольной работой рекомендуется выделить один урок для решения задач, на котором целесообразно рассмотреть задачи 246, 296, 297, 298 учебника, а также следующую задачу:

Отрезок EK — биссектриса треугольника DEC. Докажите, что $KC<EC$.

Возможная запись решения

Угол EKC — внешний угол треугольника DKE (рис. 83), поэтому он больше угла 1 и, следовательно, больше угла 2, так как $\angle 1=\angle 2$. Так как $\angle EKC>\angle 2$, то $EC>KC$ (по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника).

Дома: пп. 32—33; вопросы 6—9 (с. 84); задачи 238, 244, 245, 250 (б, в), 251, 252. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 299, 300.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** доказывать теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника и следствия из нее, теорему о неравенстве треугольника, применять их при решении задач типа 236, 237, 238, 239, 240, 243, 244, 248, 249, 250.

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Вариант I

1. На рисунке 84 $\angle ABE = 104°$, $\angle DCF = 76°$, $AC = 12$ см. Найдите сторону AB треугольника ABC.

2. В треугольнике CDE точка M лежит на стороне CE, причем $\angle CMD$ острый. Докажите, что $DE > DM$.

3. Периметр равнобедренного тупоугольного треугольника равен 45 см, а одна из его сторон больше другой на 9 см. Найдите стороны треугольника.

Вариант II

1. На рисунке 85 $\angle BAE = 112°$, $\angle DBF = 68°$, $BC = 9$ см. Найдите сторону AC треугольника ABC.

2. В треугольнике MNP точка K лежит на стороне MN, причем $\angle NKP$ острый. Докажите, что $KP < MP$.

3. Одна из сторон тупоугольного равнобедренного треугольника на 17 см меньше другой. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 77 см.

Варианты III и IV предназначены для более подготовленных учащихся.

Вариант III

1. На рисунке 84 $\angle CBM = \angle ACF$, $P_{ABC} = 34$ см, $BC = 12$ см. Найдите сторону AC треугольника ABC.

2. В треугольнике MNK $\angle K = 37°$, $\angle M = 69°$, NP — биссектриса треугольника. Докажите, что $MP < PK$.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 45 см, а одна из его сторон больше другой на 12 см. Найдите стороны треугольника.

Вариант IV

1. На рисунке 85 $\angle EAM = \angle DBF$, $BC = 17$ см, $P_{ABC} = 45$ см. Найдите сторону AB треугольника ABC.

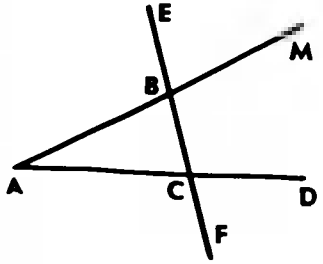


Рис. 84

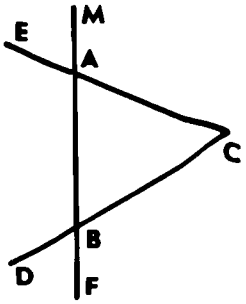


Рис. 85

2. В треугольнике CDE $\angle E=76°$, $\angle D=66°$, EK биссектриса треугольника. Докажите, что $KC>DK$

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см, а одна из его сторон на 13 см меньше другой Найдите стороны треугольника.

§ 3. Прямоугольные треугольники (4 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть некоторые свойства прямоугольных треугольников, признаки их равенства и показать, как они применяются при решении задач.

Изучение п. 34 «Некоторые свойства прямоугольных треугольников» можно начать с решения задач 254 и 255. После этого рассмотреть свойство 1^0 и посоветовать учащимся запомнить его, поскольку оно часто используется при решении задач. Использование этого свойства можно показать на примере задачи 265. Доказательство свойств 2^0 и 3^0 следует провести учителю самому с записью условия и заключения прямого и обратного утверждений на доске в виде таблицы. Эту таблицу учащиеся должны воспроизвести в своих тетрадях.

	Теорема	Обратная теорема
Дано	$\triangle ABC$, $\angle A=90°$, $\angle B=30°$	$\triangle ABC$, $\angle A=90°$, $AC=\frac{1}{2}BC$
Доказать	$AC=\frac{1}{2}BC$	$\angle B=30°$

Затем рекомендуется решить задачи 257, 259, 260.

Перед рассмотрением признаков равенства прямоугольных треугольников полезно повторить признаки равенства треугольников, изложенные в главе II, и решить задачу 132, а также следующую задачу:

Задача. Гипотенузы BD и AC прямоугольных треугольников ABD и ABC с общим катетом AB и с равными катетами AD и BC пересекаются в точке O (рис 86). Докажите, что треугольник AOB равнобедренный.

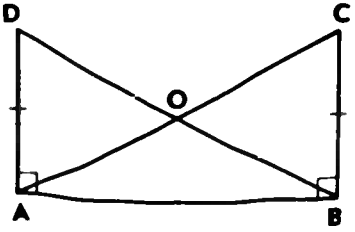


Рис. 86

Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно доказали признаки равенства прямоугольных треугольников по двум катетам, по катету и прилежащему острому углу, по гипотенузе и острому углу.

На применение признака равен-

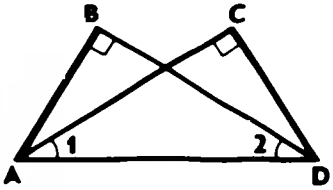


Рис. 87

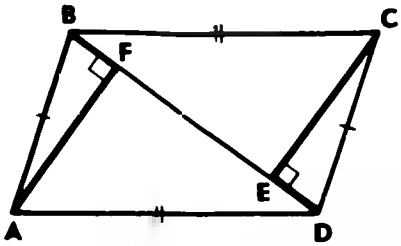


Рис. 88

ства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу можно решить задачи 261, 263.

На доказательство признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету следует обратить особое внимание. Если предыдущие признаки доказываются весьма просто, то доказательство этого признака требует дополнительных построений и непростых логических рассуждений. После того как учитель сам проведет доказательство признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету, можно решить задачу 267 на применение рассмотренного признака. Затем можно предложить учащимся самостоятельно сформулировать и доказать признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу (задача 268) и решить задачу 269 на применение этого признака.

На уроках по решению задач по теме «Прямоугольные треугольники» полезно провести устную работу по чертежам:

1. На рисунке 87 $\angle B = \angle C = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = CD$.

2. На рисунке 88 $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle AFB = \angle CED = 90°$. Докажите, что $BF = ED$, $AF = EC$.

3. На рисунке 89 $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, $AB = DC$. Докажите, что $BC = AD$.

4. На рисунке 90 AH и A_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle 1 = \angle 2$, $AH = A_1H_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

На одном из уроков целесообразно провести *самостоятельную работу* проверочного характера (на 20 мин):

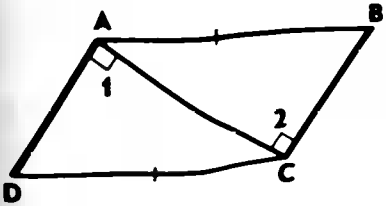


Рис. 89

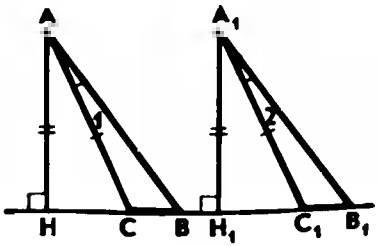


Рис. 90

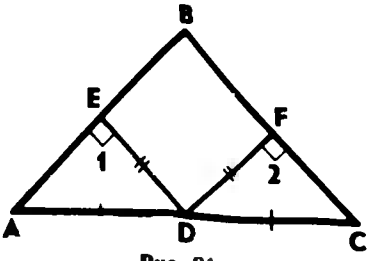


Рис. 91

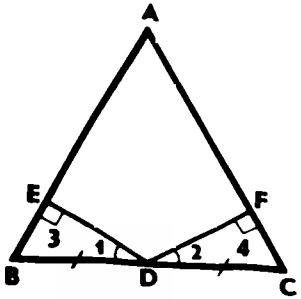


Рис. 92

Вариант I

1. На рисунке 91 $AD=DC$, $ED=DF$, $\angle 1=\angle 2=90°$. Докажите, что $\triangle ABC$ равнобедренный.

2. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 18 см. Найдите гипотенузу и меньший катет.

Вариант II

1. На рисунке 92 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4=90°$, $BD=DC$. Докажите, что $\triangle ABC$ равнобедренный.

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника в два раза меньше другого, а разность гипотенузы и меньшего катета равна 15 см. Найдите гипотенузу и меньший катет.

Варианты III и IV предназначены для более подготовленных учащихся.

Вариант III

1. Через середину отрезка AB проведена прямая a. Из точек A и B к прямой a проведены перпендикуляры AC и BD. Докажите, что $AC=BD$.

2. В прямоугольном треугольнике CDE с прямым углом E проведена высота EF. Найдите CF и FD, если $CD=18$ см, а $\angle DCE=30°$.

Вариант IV

1. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $MA=MB$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB и углом A, равным 60°, проведена высота CH. Найдите BH, если $AH=6$ см.

При наличии времени желательно на одном из уроков под руководством учителя решить задачу 270. На нее следует обратить

особое внимание, так как эта задача является одной из первых задач на построение, в которой анализ дает ключ к решению.

П. 36 «Уголковый отражатель» можно предложить прочитать самостоятельно тем, кто проявляет интерес к геометрии и ее приложениям.

Дома: пп. 34—35; вопросы 10—13 (с. 84); задачи 256, 258, 262, 264, 266.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** доказывать свойства 1^0 — 3^0 прямоугольных треугольников; **знать** формулировки признаков равенства прямоугольных треугольников и **уметь** их доказывать; **уметь** применять свойства и признаки при решении задач типа 254, 255, 256, 258, 260, 263, 265.

§ 4. Построение треугольника по трем элементам (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми, показать, как они применяются при решении задач, рассмотреть задачи на построение треугольника по трем элементам.

На первом уроке рекомендуется рассмотреть понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Перед тем как ввести понятие наклонной, полезно вспомнить, как вводилось понятие перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой. Для усвоения понятия расстояния от точки до прямой рекомендуется решить задачи 271, 275, 276. Затем следует разобрать доказательство теоремы, выражающей одно из важнейших свойств параллельных прямых: все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

После доказательства теоремы нужно ввести понятие расстояния между параллельными прямыми и решить задачи 278, 281, 282. Полезно отметить, что справедливо утверждение, обратное доказанной теореме. Оно лежит в основе конструкции рейсмуса (рис. 139 учебника), применяемого в столярном деле для разметки прямых, параллельных краю бруска.

Следующие уроки нужно посвятить решению трех основных задач на построение треугольника с помощью циркуля и линейки: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам; в) по трем сторонам (п. 38).

Полезно напомнить учащимся, что значит решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки, можно рассказать о том, что обычно задачи на построение решаются по схеме, состоящей из четырех частей: 1) анализ; 2) построение; 3) доказатель-

ство; 4) исследование (описание схемы содержится в п. «Задачи повышенной трудности к главам III и IV»).

Вместе с тем учителю нужно иметь в виду, что в VII классе, как правило, следует ограничиться только выполнением и описанием построения. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования должны присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи.

В классе рекомендуется решить задачи 284, 286, 289, 290, 291 (в), 292, 293.

Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 303, 304, 305, 311, 313, 316, 317.

На одном из уроков полезно провести *самостоятельную работу* проверочного характера (на 20—25 мин):

Вариант I

1. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.

2. Даны отрезки PQ и P_1Q_1 и угол hk. Постройте треугольник CDE так, чтобы $CE=PQ$, $\angle C=\angle hk$, $CF=P_1Q_1$, где CF — высота треугольника.

Вариант II

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к основанию.

2. Даны отрезки PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте треугольник EKF так, чтобы $EF=PQ$, $KF=P_1Q_1$, $FD=P_2Q_2$, где FD — высота треугольника.

Дома: пп. 37—38; вопросы 14—20 (с. 84—85); задачи 273, 274, 277, 280, 283, 285, 287, 288, 290, 291 (а, б, г). Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 294, 295.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, какой отрезок называется наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой, что называется расстоянием от точки до прямой и расстоянием между двумя параллельными прямыми, **уметь** доказывать, что перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой; теорему о том, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой; **уметь** строить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трем сторонам **уметь** решать задачи типа 271, 273, 277, 278(а), 283, 284, 288 290, 291.

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — закрепить в процессе решения задач усвоение изученного материала по теме «Прямоугольные

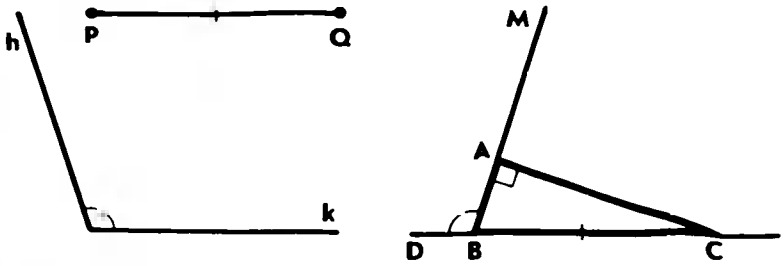


Рис. 93

треугольники», продолжить формирование навыков в решении задач на построение.

На этих уроках в классе желательно решить задачи 301, 302, 308, 310, 314 (б, в), 315 (а, ж, з), 318. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 319, 320, 321.

При наличии времени можно решить также следующую задачу:

Задача. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и внешнему углу при вершине острого угла.

Решение. Начертим данные отрезок PQ и угол hk (рис. 93).

Построение. 1. Проведем прямую, отметим на ней точку B и отложим отрезок BC, равный PQ.

2. Отложим от луча BD, являющегося продолжением луча BC, угол DBM, равный углу hk.

3. Построим прямую, проходящую через точку C и перпендикулярную к прямой BM, и обозначим буквой A точку пересечения этой прямой с лучом BM. Треугольник ABC искомый.

Доказательство (устно). По построению треугольник ABC прямоугольный, гипотенуза BC равна данному отрезку PQ и внешний угол ABD треугольника равен данному углу hk. Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Следует обратить внимание учащихся на то, что задача имеет решение только в том случае, когда данный угол hk тупой. Желательно, чтобы учащиеся сами обосновали справедливость этого утверждения.

Дома: задачи 307, 314 (а), 315 (в, г, д, е, и).

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Вариант I

1. В остроугольном треугольнике MNP биссектриса угла M пересекает высоту NK в точке O, причем $OK = 9$ см. Найдите расстояние от точки O до прямой MN.

2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Дополнительное задание.

С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 150°.

Вариант II

1. В прямоугольном треугольнике DCE с прямым углом C проведена биссектриса EF, причем $FC=13$ см. Найдите расстояние от точки F до прямой DE.

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.

Дополнительное задание.

С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 105°.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.

2. Один из углов при основании равнобедренного треугольника равен 65°. Найдите остальные углы треугольника.

3. В треугольнике ABC $\angle B=110°$, биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол AOC.

Вариант II

1. Сформулируйте свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle B=60°$, $AB=15$ см. Найдите BC.

3. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 42 см. Найдите гипотенузу.

Вариант III

1. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B=\angle B_1=90°$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Найдите углы A_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle A=34°$, $\angle C=54°$.

3. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $AB=AC$. Через точки B и C проведены прямые, перпендикулярные соответственно к сторонам AB и AC данного угла и пересекающиеся в точке M. Докажите, что $MB=MC$.

Вариант IV

1. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы B и B_1 прямые, $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$. Найдите стороны B_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $BC=17$ см, $AB=12$ см.

3. Даны два равных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$, BH и B_1H_1 — высоты. Докажите, что $\triangle BHC = \triangle B_1H_1C_1$.

Вариант V

1. Что называется расстоянием от точки до прямой?

2. Начертите прямую a и отметьте точку M на расстоянии 3,5 см от нее. Постройте наклонные из точки M к прямой a длиной 6 см и 8,5 см. (При построении используйте чертежный угольник, циркуль, масштабную линейку.)

3. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, а углы B и B_1 тупые. Докажите, что расстояния от вершин A и A_1 соответственно до прямых BC и B_1C_1 равны.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы IV

279*. Пусть точка A удалена от прямой a на расстояние h. Проведем через точку A прямую d, параллельную прямой a (рис. 94). По теореме п. 37 все точки прямой d удалены от прямой a на расстояние h. Если же точка M лежит по ту же сторону от прямой a, что и точка A, но не лежит на прямой d, то расстояние от точки M до прямой a не равно h. В самом деле, проведем через точку M прямую, перпендикулярную к прямой a и пересекающую ее в точке M_1 (см. рис. 94). Она пересекает и прямую d (так как $a \parallel d$) в некоторой точке M_2. Точки M и M_2 не совпадают, поэтому $M_1M \neq M_1M_2$, т. е. $M_1M \neq h$. Следовательно, все точки плоскости, расположенные по одну сторону от прямой a и удаленные от нее на данное расстояние h, лежат на прямой d, параллельной a.

294. Даны три отрезка P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Требуется построить треугольник ABC так, чтобы $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $CH = P_3Q_3$, где CH — высота треугольника ABC.

Построим отрезок $AB = P_1Q_1$ и проведем прямую p, параллельную прямой AB, так, чтобы расстояние между прямыми AB и p было равно P_3Q_3 (задача 284). Вершина C треугольника ABC лежит на прямой p. Для построения точки C проведем окруж-

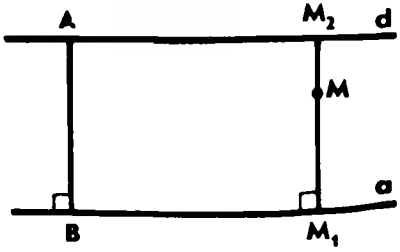


Рис. 94

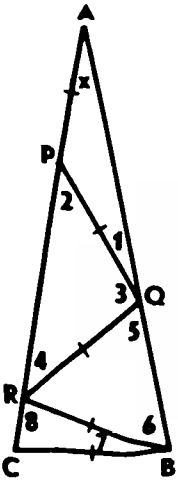


Рис. 95

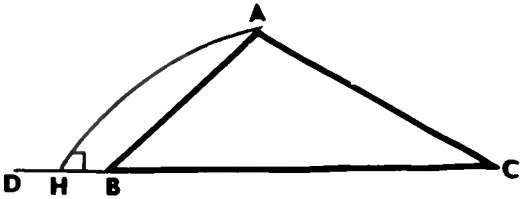


Рис. 96

ность с центром A радиуса P_2Q_2. Точка пересечения этой окружности с прямой p — искомая точка C.

Задача не имеет решения, если $P_2Q_2 > P_3Q_3$.

299. При решении этой задачи удобно обозначить величину угла A буквой x и ввести цифровые обозначения для углов, как показано на рисунке 95. Итак, $\angle A = x$, поэтому $\angle 1 = \angle A = x$, $\angle 2 = 2x$ (как внешний угол треугольника APQ), $\angle 4 = \angle 2 = 2x$, $\angle 3 = 180° - (\angle 2 + \angle 4) = 180° - 4x$, $\angle 5 = 180° - (\angle 1 + \angle 3) = 3x$, $\angle 6 = \angle 5 = 3x$. Далее, $\angle 7 = \angle B - \angle 6$, но $\angle B = \angle C = \frac{180° - x}{2}$, поэтому $\angle 7 = \frac{180° - x}{2} - 3x = \frac{180° - 7x}{2}$. Так как $\angle 8 = \angle C$, то $\angle C + \angle 8 + \angle 7 = 2\angle C + \angle 7 = 180°$, или $180° - x + \frac{180° - 7x}{2} = 180°$. Отсюда получаем, что $x = 20°$. Итак, $\angle A = 20°$.

300. Пусть ABC — тупоугольный треугольник с тупым углом A (рис. 96). Предположим, что основание H высоты AH лежит не на стороне BC, а на продолжении этой стороны, например на луче BD (см. рис. 96). Тогда получим, что внешний угол ABC треугольника ABH острый, а угол AHB этого треугольника прямой, т. е. внешний угол треугольника меньше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом. Но это невозможно. Поэтому точка H не может лежать на продолжении стороны BC. Точка H не может также совпадать с точкой B, так как тогда угол ABC прямой, а он по условию острый. Следовательно, точка H лежит на стороне BC.

Аналогично можно доказать, что основания высот, проведенных из вершин острых углов тупоугольного треугольника, лежат на продолжениях сторон.

303*. Через точку A проведем перпендикуляр AO к прямой a (дороге) и отметим на прямой AO точку A_1 так, чтобы $OA = OA_1$ (рис. 97). Пусть отрезок A_1B пересекает прямую a в точке C. Точка C и есть искомая точка. Действительно, так как $CA = CA_1$, то $AC + CB = A_1C + CB = A_1B$, а для любой другой точки M прямой a имеем: $AM + MB = A_1M + MB > A_1B$ (неравенство треугольника). Таким образом, для точки C сумма $AC + CB$ наименьшая

311. Проведем биссектрисы углов, образованных при пересечении двух прямых OA и OB (рис. 98). Возьмем произвольную точку C на одной из биссектрис и докажем, что она равноудалена от прямых OA и OB, т. е. докажем, что $CD = CE$. В самом деле, прямоугольные треугольники ODC и OEC равны по гипотенузе (OC — общая гипотенуза) и острому углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $CD = CE$. Докажем теперь, что любая точка M, расположенная внутри угла AOB и равноудаленная от сторон OA и OB, лежит на биссектрисе этого угла. Для этого проведем перпендикуляры MN и MP к прямым OA и OB и рассмотрим прямоугольные треугольники ONM и OPM. Они равны по катету и гипотенузе (OM — общая гипотенуза, $MN = MP$, так как по условию точка M равноудалена от сторон OA и OB), поэтому $\angle NOM = \angle POM$, т. е. луч OM — биссектриса угла AOB. Из доказанных утверждений следует, что искомое множество точек состоит из двух прямых, содержащих биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

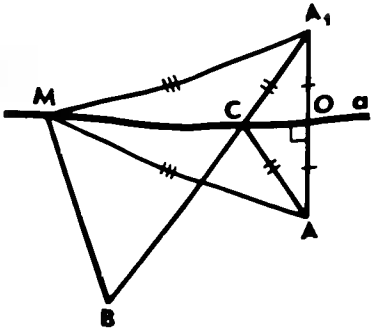


Рис. 97

316. Допустим, что треугольник с данными стороной AB, высотой CH и медианой AM построен (рис. 99). Проведем через точку C прямую a, параллельную прямой AB, и продолжим медиану AM до пересечения с прямой a в точке D. Согласно задаче 282 точка M — середина отрезка AD. Из проведенного анализа вытекает следующий способ построения искомого треугольника ABC. Строим две параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из прямых отмечаем точку A и откладываем отрезок AB, равный данной стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом, вдвое большим данной медианы треугольника. Пусть D — точка пересечения окружности и второй прямой. Далее строим середину M отрезка AD и проводим прямую BM до пересечения со второй из параллельных прямых в точке C. Треугольник ABC искомый.

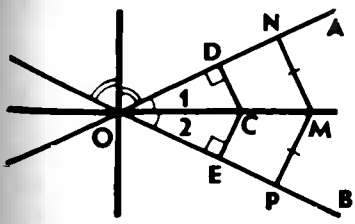


Рис. 98

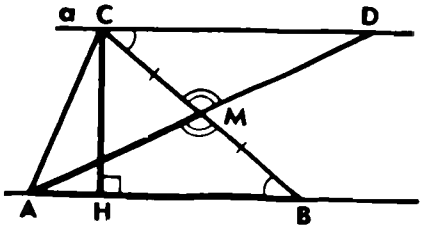


Рис. 99

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы IV

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала на изучение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» отводится 16 часов, т. е. почти столько же, сколько и по второму варианту. Поэтому рекомендации по проведению уроков, данные выше, могут быть полностью использованы и здесь.

Повторение. Решение задач (10 ч)

На 10 уроках, которые отводятся на решение задач и повторение всего учебного материала курса геометрии VII класса, полезно сконцентрировать внимание учащихся на следующих узловых вопросах курса:

Измерение отрезков и углов; перпендикулярные прямые	2 ч
Треугольники: признаки равенства равнобедренных треугольников, равнобедренные треугольники, сумма углов треугольника, соотношения между сторонами и углами треугольника, прямоугольные треугольники	4 ч
Параллельные прямые	2 ч
Задачи на построение: основные построения, построение треугольников по трем элементам	2 ч

На уроках повторения следует систематизировать сведения об основных свойствах геометрических фигур, повторить доказательства отдельных наиболее важных теорем. При этом могут быть использованы заранее подготовленные карточки для устного опроса, составленные по материалу каждой главы.

Целесообразно не менее половины каждого урока отводить на решение задач. Рекомендуется использовать следующие задачи учебника: 33, 36, 61, 65, 70, 82, 83, 156, 162, 170, 172, 193, 204, 208, 244, 259, 269, 286, 291, 294. Отдельным ученикам, которые проявляют особый интерес к изучению геометрии, можно предложить некоторые из задач повышенной трудности (задачи 322—362), в частности те задачи, решения которых даны в этом пособии.

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала на решение задач и заключительное повторение всего курса геометрии VII класса отводится 4 часа.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

322. Пусть отрезок CD принят за единицу измерения, тогда $CD=1$, $AB=a$. Если AB — новая единица измерения, то $AB=1$, $CD=b$. При переходе от единицы измерения CD к единице измерения AB числа, выражающие длины всех отрезков, умножают-

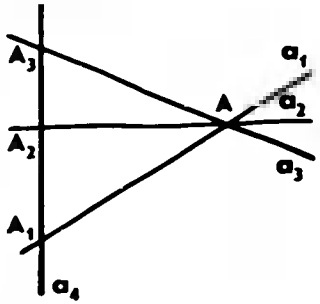


Рис. 100

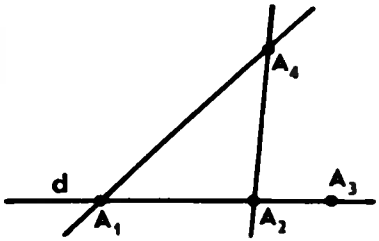


Рис. 101

ся на одно и то же число, которое обозначим через k. Тогда $1 \cdot k = b$, $a \cdot k = 1$. Отсюда следует, что $ab = 1$.

326. Пусть a_1 и a_2 — две из данных шести прямых, которые пересекаются в точке A. Через точку A по условию проходит по крайней мере еще одна из данных прямых, которую обозначим a_3 (рис. 100). Докажем, что оставшиеся три прямые также проходят через точку A. Допустим, что какая-то из них, например прямая a_4, не проходит через точку A. Эта прямая по условию задачи пересекает прямые a_1, a_2, a_3. Обозначим точки пересечения A_1, A_2, A_3.

Точки A, A_1, A_2, A_3 — попарно различные точки. Через каждую из трех точек A_1, A_2, A_3 должна проходить по крайней мере еще одна прямая из данных прямых, отличная от a_1, a_2, a_3, a_4. Но это невозможно, так как дано всего шесть прямых. Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, все прямые проходят через точку A.

327. Пусть A_1 и A_2 — две из данных шести точек, а d — прямая A_1A_2 (рис. 101). На прямой d по условию задачи лежит по крайней мере еще одна из данных точек, которую обозначим A_3. Докажем, что оставшиеся три точки также лежат на прямой d. Допустим, что какая-то из них, например точка A_4, не лежит на прямой d. Тогда прямые d, A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 — попарно различные прямые. На каждой из трех прямых A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 должна лежать по крайней мере еще одна из данных точек, отличная от A_1, A_2, A_3, A_4. Но это невозможно, так как дано всего шесть точек. Мы пришли к противоречию, и, следовательно, все шесть данных точек лежат на прямой d.

328. Пусть точка O — середина отрезка AB (рис. 102). $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle AOC_1 = \angle BOC_2$. Докажем, что точки O, C_1 и C_2 лежат на одной прямой. Для этого рассмотрим луч OC — продолжение луча OC_1; $\angle AOC_1 = \angle BOC$ как вертикальные углы и $\angle AOC_1 = \angle BOC_1$ по доказанному. Отсюда следует, что лучи OC и OC_2 совпадают, поэтому точки C_1, C_2 и O лежат на одной пря-

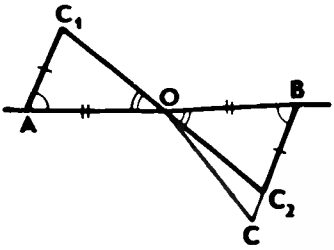


Рис. 102

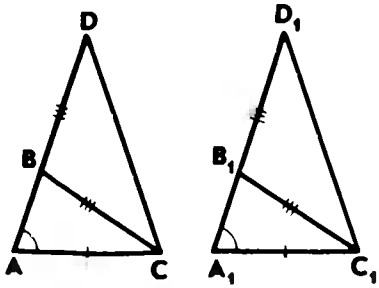


Рис 103

мой, и, значит, прямая C_1C_2 проходит через точку O — середину отрезка AB.

329. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$ и $AB+BC=A_1B_1+B_1C_1$ (рис. 103). Продолжим стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD=BC$ и $B_1D_1=B_1C_1$. Рассмотрим треугольники ADC и $A_1D_1C_1$. Эти треугольники равны по двум сторонам ($AC=A_1C_1$, $AD=A_1D_1$) и углу между ними ($\angle A=\angle A_1$), поэтому $DC=D_1C_1$ и $\angle D=\angle D_1$. Так как $\triangle DBC$ и $\triangle D_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с равными основаниями и равными углами при основании, то они равны, поэтому $BD=B_1D_1$. Из равенств $AD=A_1D_1$ и $BD=B_1D_1$ следует, что $AB=A_1B_1$, и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

337. Пусть O — точка пересечения биссектрисы AA_1 треугольника ABC с прямой BM. Введем цифровые обозначения для углов, как показано на рисунке 104. Согласно условию задачи $\angle 7=\frac{1}{2}\angle A=40°$, $\angle B=\angle C=50°$, $\angle 1=30°$, $\angle 2=10°$, $BC\perp AA_1$, поэтому $\angle 5=\angle 6=60°$.

Докажем сначала, что $\triangle AOC=\triangle MOC$. У этих треугольников OC — общая сторона и прилежащие к ней углы равны. В самом деле, $\angle 8=180°-\angle 6=120°$, $\angle MOC=\angle 5+\angle 6=$

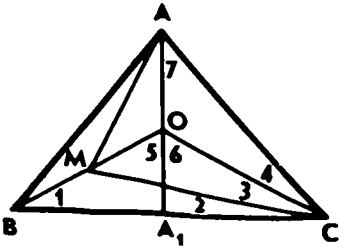


Рис. 104

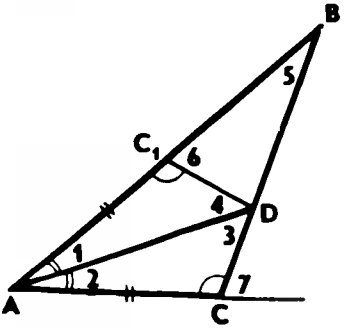


Рис. 105

$=120°$, $\angle 4=\angle C-\angle OCB=\angle C-\angle 1=20°$, $\angle 3=\angle C-$ $-\angle 2-\angle 4=50°-10°-20°=20°$. Отсюда следует, что $OA=OM$ и $\angle OMC=\angle 7=40°$.

Треугольник OAM равнобедренный, и $\angle AOM=\angle 8=120°$, поэтому $\angle OMA=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$. Таким образом, $\angle AMC=$ $=\angle OMA+\angle OMC=70°$.

341. 1) Докажем, что $\angle ADB>\angle ADC$ (рис. 105). Для этого на луче AB отложим отрезок AC_1, равный AC. Так как $AB>AC$, то точка C_1 лежит между точками A и B. $\triangle ADC=\triangle ADC_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $CD=C_1D$ и $\angle 3=\angle 4$, т. е. $\angle ADC=\angle 4$. Но $\angle 4<\angle ADB$, и, следовательно, $\angle ADB>\angle ADC$.

2) Докажем, что $BD>CD$. Для этого заметим, что $\angle 7=\angle 6$, так как смежные с ними углы ACD и AC_1D равны. Но $\angle 7$ — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle 7>\angle 5$, а значит, и $\angle 6>\angle 5$. В треугольнике BC_1D против большего угла лежит большая сторона, т. е. $BD>C_1D=CD$.

346. На рисунке 106 $\angle ADB<\angle ADC$ (задача 341), а так как эти углы смежные, то $\angle ADB$ острый, а $\angle ADC$ тупой. В тупоугольном треугольнике ADC основание H высоты, проведенной из вершины острого угла A, лежит на продолжении стороны DC (задача 300), т. е. точка H лежит на луче DB.

347. Пусть $AC>AB$, AD — биссектриса, AH — высота, AM — медиана треугольника ABC (рис. 107). Точка H лежит на луче DB, так как $AB<AC$ (задача 346), а так как $BD<CD$ (задача 341), то $BD<\frac{1}{2}BC=BM$. Отсюда следует, что точка M лежит на луче DC. Итак, точка H лежит на луче DB, а точка M — на луче DC, следовательно, точка D лежит между точками H и M.

350. Докажем, что $\angle C$ прямой. Для этого достаточно доказать, что хотя бы одна из точек A_1 или B_1 совпадает с точкой C. Предположим, что это не так. Тогда в прямоугольном треугольнике AA_1C $AA_1<AC$, а по условию $AC\leqslant BB_1$, поэтому $AA_1<BB_1$. С другой стороны, рассматривая прямоугольный треугольник BB_1C, аналогично получаем: $BB_1<AA_1$. Мы пришли к противоречию. Итак, точки A_1 и B_1 совпадают с точкой C, поэтому $\angle C$ прямой.

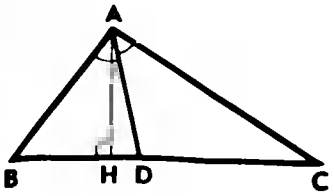


Рис. 106

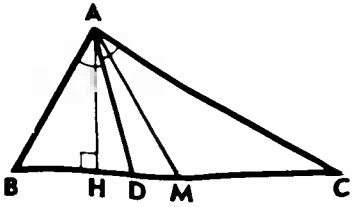


Рис. 107

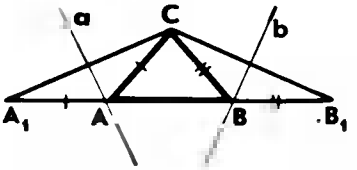


Рис. 108

Далее, $AA_1=AC$, $BB_1=BC$. Но по условию $AA_1 \leqslant BC$, $BB_1 \leqslant AC$, т. е. $AC \leqslant BC$ и $BC \leqslant AC$. Следовательно, $AC=BC$ и $\triangle ABC$ равнобедренный.

361. Уточним, как нужно понимать эту задачу. Даны отрезок PQ и два угла h_1k_1 и h_2k_2. Требуется построить треугольник ABC так, чтобы $\angle A=\angle h_1k_1$, $\angle B=\angle h_2k_2$, $AB+BC+CA=PQ$.

Предположим, что задача решена и треугольник ABC построен. Отложим на продолжении луча BA отрезок $AA_1=AC$, а на продолжении луча AB отрезок $BB_1=BC$ и рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 108). В этом треугольнике сторона A_1B_1 равна $AA_1+AB+BB_1=AC+AB+BC=PQ$, $\angle A_1=\frac{1}{2}\angle A$ (так как $\triangle AA_1C$ равнобедренный) и $\angle B_1=\frac{1}{2}\angle B$. Следовательно, треугольник A_1B_1C легко построить по данной стороне A_1B_1 и двум углам A_1 и B_1.

Для построения точек A и B через середины отрезков CA_1 и CB_1 проведем прямые $a \perp A_1C$ и $b \perp B_1C$ (см. рис. 108). Согласно задаче 160 $A \in a$, $B \in b$, т. е. A — точка пересечения прямой a с отрезком A_1B_1, а B — точка пересечения прямой b с тем же отрезком.

VIII КЛАСС

Уроки вводного повторения (2 ч)

Основная задача уроков повторения — подготовить учащихся к изучению темы «Четырехугольники». С этой целью полезно повторить следующие разделы курса геометрии VII класса: признаки равенства треугольников; соотношения между сторонами и углами треугольника; свойства равнобедренного треугольника; признаки и свойства параллельных прямых. Желательно также напомнить учащимся основные задачи на построение циркулем и линейкой.

Для организации повторения могут быть использованы карточки для устного опроса (VII класс), но в основном повторение целесообразно проводить в процессе решения наиболее типичных задач из курса геометрии VII класса. На этих уроках не рекомендуется предлагать учащимся сложные объемные задания. Устные, полуустные двух-трехшаговые задачи по готовым чертежам позволят охватить большой объем материала. В процессе решения таких задач учащиеся должны вспомнить такие понятия, как «теорема», «свойство», «признак».

ГЛАВА V

Четырехугольники (14 ч)

Глава посвящена изучению наиболее важных видов четырехугольников — параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Изложение материала в целом традиционное, что позволяет учителю широко использовать имеющиеся методические разработки и опыт преподавания.

Завершается глава рассмотрением осевой и центральной симметрий, которые вводятся здесь не как преобразования плоскости, а как свойства геометрических фигур, при этом отмечаются элементы симметрии изученных четырехугольников.

По первому и второму вариантам тематического планирования учебного материала на изучение темы «Четырехугольники» отводится одно и то же число часов.

§ 1. Многоугольники (2 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия многоугольника и выпуклого многоугольника, вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и рассмотреть четырехугольник как частный вид многоугольника. В последующих параграфах подробно изучаются наиболее важные виды четырехугольников.

На первом уроке можно ввести понятия многоугольника и выпуклого многоугольника, а на втором — вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и как следствие из нее тот факт, что сумма углов выпуклого четырехугольника — 360°

С некоторыми частными видами многоугольников учащиеся уже знакомы (прямоугольник — V, VI классы; треугольник — VII класс), поэтому изучение темы можно начать с демонстрации моделей и рисунков этих, а также других (как выпуклых, так и невыпуклых) многоугольников. В результате обсуждения вопроса «Что общего у этих геометрических фигур?» вводится понятие многоугольника как фигуры, составленной из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек. Далее вводятся элементы многоугольника (вершины, стороны, диагонали) и понятие периметра. Необходимо подчеркнуть, что каждый многоугольник разделяет плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю, причем фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником (такое толкование многоугольника понадобится в следующей главе при рассмотрении понятия площади).

Для усвоения понятий многоугольника можно выполнить следующее упражнение по заготовленным чертежам (рис. 109):

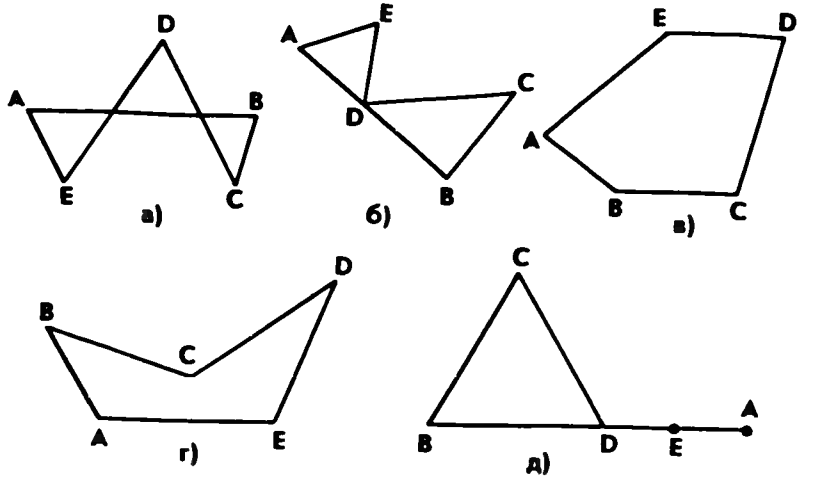


Рис. 109

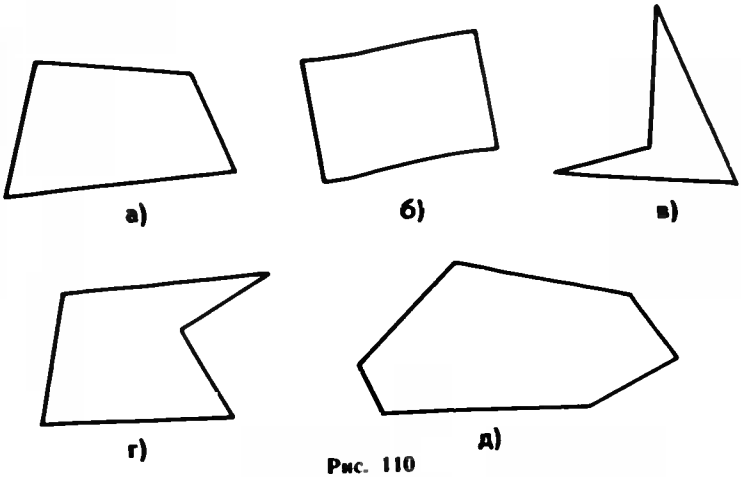


Рис. 110

1. Фигуры на рисунке 109, *а* — *д* составлены из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. Какие из них являются многоугольниками? Отметьте какие-нибудь точки во внутренней (внешней) области одного из многоугольников, изображенных на этом рисунке (на доске и в тетрадях).

С целью лучшего усвоения понятия выпуклого многоугольника можно выполнить следующие упражнения:

2. Какие из многоугольников, изображенных на рисунке 110, *а* — *д*, являются выпуклыми? Обозначьте вершины одного из выпуклых многоугольников буквами и назовите его углы.

3. Начертите выпуклый восьмиугольник и проведите все диагонали из какой-нибудь его вершины. Сколько при этом образовалось треугольников? Найдите сумму углов восьмиугольника.

Задачу 364 (а) можно предложить учащимся решить в классе самостоятельно.

На дом после первого урока: вопросы 1, 2 (с. 111); задачи 363, 364(б), 366.

Перед доказательством утверждения о сумме углов выпуклого многоугольника полезно провести устную работу по заготовленным чертежам.

4. По данным рисунка 111, *а* — *в* найдите *x* и *y*.

5. С помощью разбиения на треугольники найдите суммы углов выпуклых девятиугольника и одиннадцатиугольника.

Затем формулируется утверждение о сумме углов выпуклого многоугольника и обсуждается план доказательства. Само доказательство можно предложить учащимся провести самостоятельно.

В классе можно решить задачи 364(в), 365(в), 368.

Дома: вопросы 3, 4, 5 (с. 111); задачи 365(а), 369, 370.

В конце второго урока полезно провести самостоятельную работу обучающего характера.

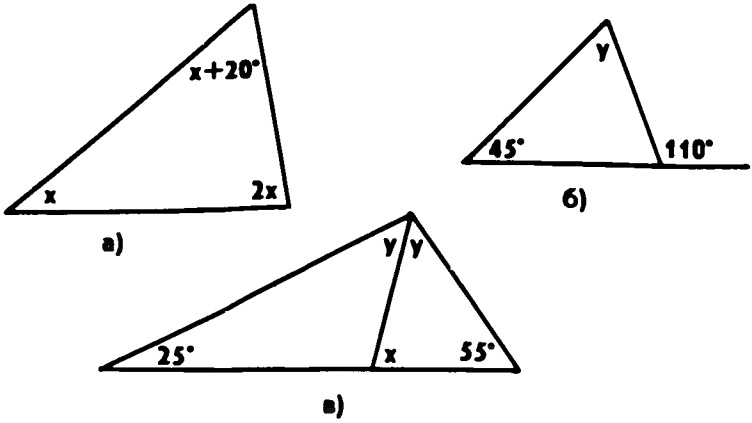


Рис. 111

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Найдите сумму углов выпуклого тринадцатиугольника.
2. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 135°. Найдите число сторон этого многоугольника.

Вариант II

1. Найдите сумму углов выпуклого двенадцатиугольника.
2. Сумма углов выпуклого многоугольника с равными друг другу углами равна 1260°. Найдите число сторон этого многоугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Каждый угол данного выпуклого многоугольника равен 150°. Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, число сторон которого в два раза меньше, чем число сторон данного многоугольника.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, какая фигура называется многоугольником, назвать его элементы; **знать**, что такое периметр многоугольника, какой многоугольник называется выпуклым; **уметь** вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и решать задачи типа 364—370.

§ 2. Параллелограмм и трапеция (6 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия параллелограмма и трапеции, рассмотреть свойства и признаки параллелограмма и закрепить полученные знания в процессе решения задач. Следует иметь в виду, что свойства и признаки параллелограмма широко используются в следующих разделах курса, поэтому выработке соответствующих умений и навыков следует уделить серьезное внимание.

Учебный материал можно распределить по урокам следующим образом: параллелограмм, его свойства и признаки — 3 урока; трапеция — 2 урока; задачи на построение циркулем и линейкой — 1 урок.

Определение параллелограмма можно отработать в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 112, *а* $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. Является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом?

2. На рисунке 112, *б* $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3. На рисунке 112, *в* $MN \parallel PQ$, $\angle M = \angle P$. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

4. Является ли четырехугольник $ABCD$, изображенный на рисунке 112, *г* параллелограммом, если: а) $\angle 1 = 70°$; $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 \neq \angle 4$?

5. Докажите, что в параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Теоретический материал п. 42 достаточно прост, поэтому доказательство утверждений о свойствах параллелограмма можно предложить учащимся провести самостоятельно (без помощи

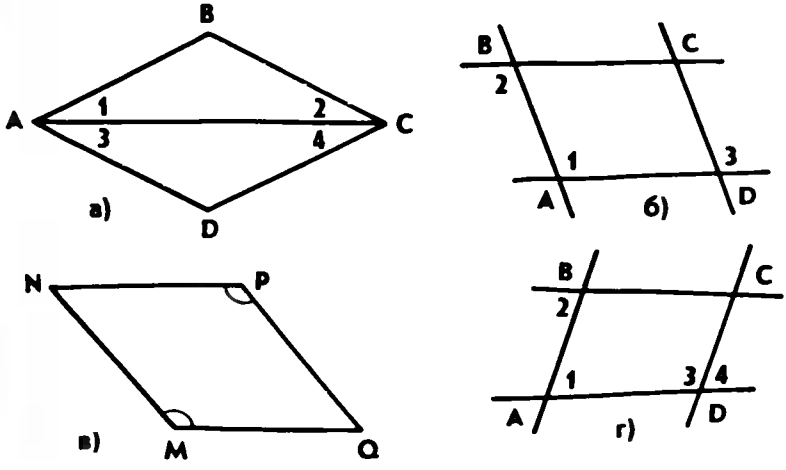


Рис. 112

учебника) на первом же уроке. Для экономии времени можно провести эту работу по вариантам, а затем выслушать учеников, выполнивших разные варианты. Для закрепления полученных сведений целесообразно решить в классе задачи 376(а) — устно, 376(б), 372(а).

Перед тем как приступить к изучению признаков параллелограмма, следует напомнить учащимся, что означает слово «признак» и что такое обратная теорема. Полезно предложить учащимся самим сформулировать теоремы, обратные утверждениям о свойствах параллелограмма. В процессе этой работы нужно подчеркнуть, что если некоторое утверждение верно, то отсюда еще не следует, что верно и обратное ему утверждение. Обратное утверждение требует отдельного рассмотрения в отношении того, верно оно или нет.

Доказательство признаков параллелограмма можно предложить учащимся провести самостоятельно. Для лучшего усвоения доказанных теорем на уроке можно решить задачи 379, 382

На третьем уроке решаются задачи на свойства и признаки параллелограмма: 376(г) — устно, 372(б), 373, 374, 381, 384, 429 — устно.

Дома: вопросы 6, 7, 8, 9 (с. 111); задачи 372(в), 376(в, д), 375, 377, 380, 383, 430.

Замечание. Утверждение задачи 384 (в учебнике приведено решение) рекомендуется запомнить, так как в дальнейшем оно используется при решении других задач.

В конце третьего урока целесообразно провести проверочную самостоятельную работу.

Самостоятельная работа

Вариант I

На рисунке 113, *а* четырехугольник *ABCD* — параллелограмм. Луч *AN* — биссектриса угла *BAD*, луч *BM* — биссектриса угла *ABC*. Докажите, что *ABNM* — параллелограмм

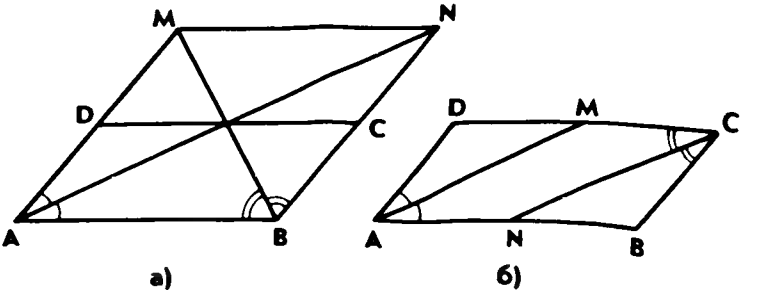


Рис. 113

Вариант II

На рисунке 113, *б* четырехугольник *ABCD* — параллелограмм. Луч *AM* — биссектриса угла *BAD*, луч *CN* — биссектриса угла *BCD*. Докажите, что *ANCM* — параллелограмм.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Докажите, что угол между перпендикулярами, проведенными из вершины тупого угла параллелограмма к прямым, содержащим стороны параллелограмма, равен острому углу параллелограмма, а угол между перпендикулярами, проведенными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

Перед изучением п. 44 «Трапеция» полезно еще раз вспомнить свойства и признаки параллельных прямых в процессе устного выполнения следующего задания:

6. По данным рисунка 114, *а* — *в* найдите *x*, *y*, *z*. Следует иметь в виду, что в самом п. 44 приведены только определения трапеции, ее видов и элементов, а свойства и признаки раскрыты в задачах 386 (свойство средней линии трапеции), 388 (свойства равнобедренной трапеции), 389 (признаки равнобедренной трапеции). Эти задачи необходимо разобрать с учащимися для того, чтобы их результаты использовать в дальнейшем при решении других задач. Это же относится и к задаче 385 (теорема Фалеса), решение которой приведено в учебнике.

В классе на двух уроках, посвященных трапеции, рекомендуется решить задачи 385, 386, 387, 388(а), 389(б), 390 (устно).

Дома: вопросы 10, 11 (с. 111); задачи 389(б), 388(а), 392(а, б), 438.

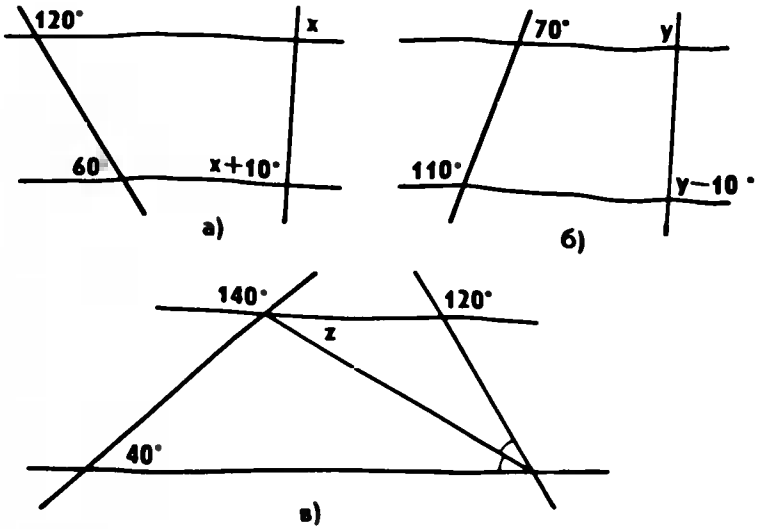


Рис. 114

На втором уроке можно провести самостоятельную работу, проверить которую рекомендуется сразу же, например с помощью графопроектора.

Самостоятельная работа

Вариант I

Найдите боковые стороны равнобедренной трапеции, основания которой равны 14 см и 8 см, а один из углов равен 120°

Вариант II

Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если ее большее основание равно 16 см, боковая сторона — 10 см, а один из углов равен 60°

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ делит пополам угол BAD. Найдите периметр трапеции, если основание AD равно 12 см, а угол ADC равен 60°.

В § 2 значительное место отводится задачам на построение с помощью циркуля и линейки. На странице 102 учебника приведена традиционная схема решения таких задач и в качестве примера по этой схеме решена задача 393(в). Однако учителю следует иметь в виду, что в этой схеме обязательными для всех учащихся являются только непосредственно построение (с соответствующим описанием) и доказательство. Исследование проводится только тогда, когда это оговорено условием задачи.

В начале урока по решению задач на построение полезно вспомнить уже известные основные задачи: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной к данной; середины отрезка; прямой, параллельной данной

В классе рекомендуется решить задачи 393(в), 394, 395, 397(б) (в тетрадях выполняется только построение).

Дома: 393 (а, б), 396, 397(а), 398.

Замечание: задача 396 о делении данного отрезка на n равных частей приведена с решением. Эта задача неоднократно используется в дальнейшем, поэтому необходимо убедиться в том, что все учащиеся достаточно хорошо усвоили способ деления отрезка на n равных частей.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определения параллелограмма и трапеции, формулировки свойств и признаков параллелограмма и равнобедренной трапеции, **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 372—377, 379 — 383, 387, 390, 392, а также делить отрезок на n равных частей с помощью циркуля и линейки и решать задачи на построение типа 393, 395, 397, 398.

§ 3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат (4 ч)

Назначение параграфа — более детально познакомить учащихся с частными видами параллелограмма — прямоугольником, ромбом и квадратом, а также рассмотреть осевую и центральную симметрии как свойства некоторых геометрических фигур.

На первом уроке можно изучить п. 45 «Прямоугольник», на втором — п. 46 «Ромб и квадрат», а третий урок целесообразно посвятить закреплению полученных сведений в процессе решения задач. П. 47 «Осевая и центральная симметрии» изучается на последнем, четвертом уроке.

Перед изучением темы «Прямоугольник» полезно повторить свойства параллелограмма, признаки равенства прямоугольных треугольников и утверждение о сумме углов выпуклого четырехугольника в процессе решения устных задач следующего типа:

1. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если их градусные меры пропорциональны числам 1, 2, 3, 4.

2. Докажите, что расстояния AM и CN от вершин A и C параллелограмма $ABCD$ до прямой BD равны (рис. 115).

3. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A = 3\angle B$.

После того как сформулировано определение прямоугольника, можно предложить учащимся самим перечислить те его свойства, которыми он обладает, как и любой параллелограмм. Желательно, чтобы учащиеся сами доказали утверждение об особом свойстве прямоугольника, а также обратное утверждение (признак прямоугольника). Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи 399 (устно), 400, 402.

Дома: вопросы 12, 13 (с. 111); задачи 401(а), 403, 413(а).

Перед рассмотрением другого частного вида параллелограмма — ромба полезно провести устную работу по заранее заготовленным чертежам к следующим заданиям:

4. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, высота которого равна 6 см, а угол при вершине равен 120°.

5. Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны. Докажите, что все его стороны равны.

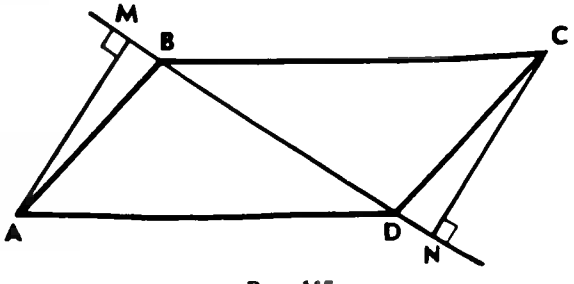


Рис. 115

После введения определения ромба можно предложить учащимся самим сформулировать те его свойства, которые следуют непосредственно из определения, а затем самостоятельно (например, по вариантам) доказать утверждения об особых свойствах ромба. На этом уроке можно решить задачи 405(а), 408(б).

Полезно обратить внимание учащихся на то, что утверждения, сформулированные в задаче 408(а, б), являются признаками ромба.

Определение квадрата и его свойства учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику. Затем полезно решить задачу 410(а, б, в). Сделать это можно устно с помощью заготовленных заранее чертежей.

Дома: вопросы 14—15 (с. 111); задачи 405(б), 408(а), 409.

На следующем уроке усвоение изученного материала закрепляется в процессе решения задач.

В классе рекомендуется решить задачи 404, 407, 412, 414(а).

Дома: 406, 411, 413(в), 415(б).

На этом же уроке целесообразно провести *самостоятельную работу* обучающего характера с проверкой в классе:

Вариант I

1. Найдите углы ромба, если его диагонали составляют с его стороной углы, один из которых на 30° меньше другого
2. Задача 413, б.

Вариант II

1. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.
2. Задача 414, б.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол ANB, если $\angle AMC = 120°$.
2. Постройте прямоугольник $ABCD$ по стороне AB и углу AOB, где O — точка пересечения диагоналей.

Объяснение нового материала по теме «Осевая и центральная симметрии» целесообразно построить в виде лекции, сопровождающейся показом большого иллюстративного материала: чертежей, рисунков, орнаментов и т. п.

В классе рекомендуется решить задачи 416, 417, 418 (устно), 419, 422 (устно).

Дома: вопросы 16—20 (с. 111—112); задачи 420, 421, 423.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определения прямоугольника, ромба, квадрата, формулировки их свойств и признаков; **уметь** доказывать изученные теоремы и применять их при решении задач типа 401—415; **знать** опреде-

ления симметричных точек и фигур относительно прямой и точки; **уметь** строить симметричные точки и распознавать фигуры, обладающие осевой симметрией и центральной симметрией

Решение задач (1 ч)

Назначение этого урока — закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе. На уроке рекомендуется решить задачи 428, 434, 438. В конце урока можно провести *самостоятельную работу* проверочного характера:

Вариант I

1. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AD и BC соответственно в точках E и F. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 28 см, $AE=5$ см, $BF=3$ см.

2. Найдите меньшую боковую сторону прямоугольной трапеции, основания которой равны 10 см и 6 см, а один из углов равен 45°.

Вариант II

1. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см.

2. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой равны 12 см и 6 см, а один из углов равен 60°.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB вписан прямоугольник $KMNP$, как показано на рисунке 116. Периметр этого прямоугольника равен 30 см, а смежные стороны KM и KP пропорциональны числам 2 и 3, т. е. $KM:KP=2:3$. Найдите гипотенузу треугольника.

2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 60°, а диагональ трапеции делит этот угол пополам. Найдите периметр трапеции, если ее большее основание равно 14 см.

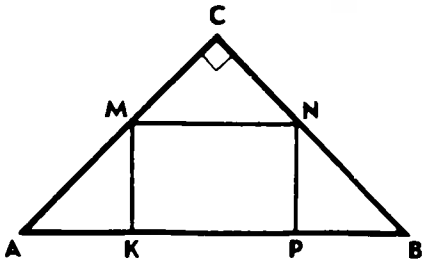


Рис. 116

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Вариант I

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O Найдите угол между диагоналями, если $\angle ABO = 30°$.

2. В параллелограмме $KMNP$ проведена биссектриса угла MKP, которая пересекает сторону MN в точке E. а) Докажите, что треугольник KME равнобедренный. б) Найдите сторону KP, если $ME = 10$ см, а периметр параллелограмма равен 52 см

Вариант II

1. Диагонали ромба $KMNP$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника KOM, если угол MNP равен 80°.

2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AB = BM$. а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAD. б) Найдите периметр параллелограмма, если $CD = 8$ см, $CM = 4$ см.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали BD и пересекающая прямую AB в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая прямую BC в точке N. Найдите периметр четырехугольника $ACMN$, если диагональ BD равна 8 см.

2. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Луч DM пересекает прямую AB в точке N. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AN = 10$ см.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Дайте определение параллелограмма и сформулируйте его свойства

2. Периметр параллелограмма равен 88 см. Найдите стороны параллелограмма, если известно, что одна из них в три раза больше другой.

3. Меньшая сторона параллелограмма равна 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, пересекаются в точке, лежащей на противоположной стороне Найдите периметр параллелограмма.

Вариант II

1. Сформулируйте признаки параллелограмма.

2. Докажите, что если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник — параллелограмм

3. Докажите, что середины сторон параллелограмма являются вершинами ромба.

Вариант III

1. Какой четырехугольник называется прямоугольником? Сформулируйте особое свойство прямоугольника.

2. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

Вариант IV

1. Какой четырехугольник называется ромбом? Сформулируйте особое свойство ромба.

2. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 120°$, $BD = 8$ см.

3. Докажите, что если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Вариант V

1. Какой четырехугольник называется трапецией? Какая трапеция называется равнобедренной, прямоугольной?

2. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная.

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB \perp AD$) диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle D = 30°$. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание равно 24 см.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы V

374. Можно предложить следующую краткую запись решения задачи (рис. 117):

а) $AD \parallel BC$, AK — секущая, углы 2 и 3 — накрест лежащие, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$. Но $\angle 1 = \angle 3$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $AB = BK = 15$ см;

б) $BC = BK + KC = 24$ см;

в) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 78$ см.

375. При решении этой задачи следует учесть, что возможны два случая. В самом деле, пусть AK — биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ (рис. 117). Рассмотрите два случая: $BK = 7$ см, $CK = 14$ см и $BK = 14$ см, $CK = 7$ см.

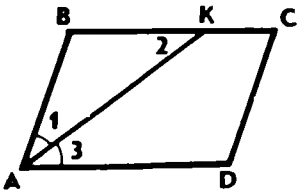


Рис. 117

383. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, поэтому $\angle ABD = \angle CDB$ (рис. 118). Следовательно, $\triangle ABP = \triangle CDQ$ (по двум сторо-

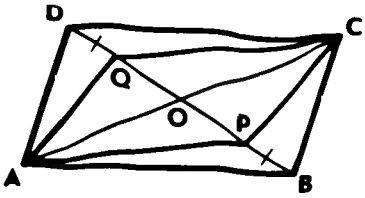


Рис. 118

нам и углу между ними). Отсюда следует, что $AP=CQ$. Аналогично доказывается, что $\triangle ADQ=\triangle CBP$, поэтому $AQ=CP$. По признаку 2^0 п. 43 $APCQ$ — параллелограмм.

388. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD, $BC<AD$ (рис. 119)

а) Проведем прямую BE, параллельную прямой CD, E — точка на отрезке AD. Так как $BCDE$ — параллелограмм, то $CD=BE$ Но $CD=AB$, поэтому $AB=BE$, т. е. треугольник ABE равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle A=\angle BEA$. Так как $BE \parallel CD$, то $\angle BEA=\angle D$, следовательно, $\angle A=\angle D$, т. е. углы при основании AD равны. Далее, $\angle B=180°-\angle A$, $\angle C=180°-\angle D$, поэтому $\angle B=\angle C$.

б) Треугольники ABD и DCA равны (рис 119, *б*) по двум сторонам и углу между ними ($AB=CD$, AD — общая сторона, $\angle A=\angle D$ по доказанному в а)), следовательно, $BD=AC$.

394. Пусть A, B, C — данные точки. Соединим попарно эти точки и через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противолежащей стороне (рис 120). Четырехугольники A_1BAC, C_1ACB, B_1ABC — параллелограммы по определению. Задача, очевидно, имеет только эти три решения, так как не существует других прямых, проходящих через точки A, B, C и параллельных прямым BC, AC, AB соответственно.

397 (а). Дано: угол hk и два отрезка MN и M_1N_1 (рис. 121, *а*). Построить трапецию $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AB=CD$, $AD=MN$, $AB=M_1N_1$, $\angle A=\angle hk$.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена, т. е. искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 121, *б*). Нетрудно заметить, что по данным элементам легко построить треугольник ABD и тем самым будут построены вершины A, B и D трапеции $ABCD$. Для построения вершины C нужно провести через точку B прямую, параллельную прямой AD, и, пользуясь циркулем, на этой прямой построить точку C так, чтобы $DC=M_1N_1$.

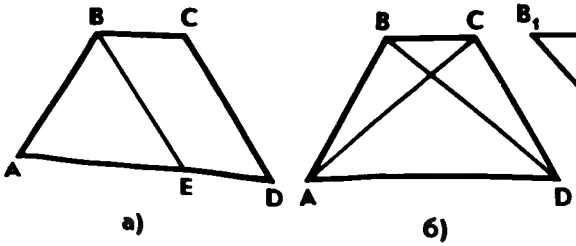


Рис. 119

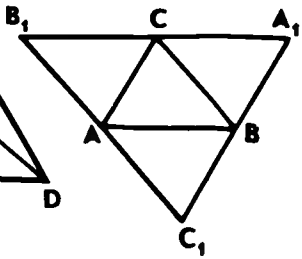


Рис. 120

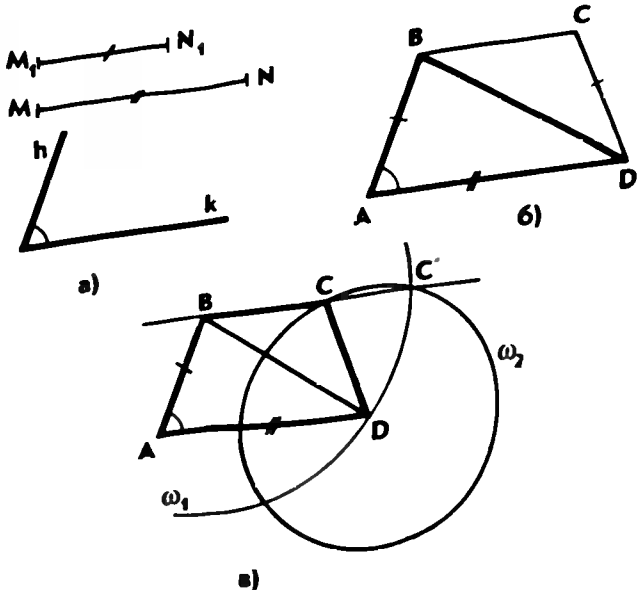


Рис. 121

Построение. 1) Строим $\triangle ABD$ так, чтобы $AD=MN$, $AB=M_1N_1$, $\angle A=\angle hk$ (см. п. 38, задача 1).

2) Через точку B проведем прямую, параллельную прямой AD (задача 222). Для этого проведем две окружности: окружность ω_1 с центром B радиуса BD и окружность ω_2 с центром D радиуса AB. Пусть C' — точка пересечения этих окружностей, лежащая по ту же сторону от прямой AD, что и точка B (рис. 121, *в*). Тогда $BC' \parallel AD$ (так как $ABC'D$ — параллелограмм).

3) Окружность ω_2 пересекает прямую BC' еще в одной точке — точке C. Соединив эту точку с точкой D, получаем искомую трапецию $ABCD$.

Доказательство непосредственно следует из построения. В самом деле, по построению $AD=MN$, $AB=M_1N_1$, $\angle A=\angle hk$, $BC \parallel AD$ и $CD=AB$, так как CD — радиус окружности ω_2.

Исследование. Заметим, что в равнобедренной трапеции ни один из углов не может быть прямым. В самом деле, если, например, предположить, что на рисунке 121, *б* угол A прямой, то в соответствии с задачей 389 (а) угол D также прямой. Но тогда $AB \parallel CD$, что невозможно, так как боковые стороны трапеции не параллельны. Таким образом, если данный угол hk прямой, то задача не имеет решения. Если $\angle hk \neq 90°$, то описанное построение можно выполнить, поэтому при $\angle hk \neq 90°$ задача имеет решение. В этом случае данная задача имеет единственное реше-

ние (см. п. 38, задача 1). В самом деле, хотя и существует бесконечно много трапеций, удовлетворяющих условиям задачи, но можно доказать, что все эти трапеции равны друг другу. Приведем доказательство этого утверждения, но подчеркнем, что оно не является обязательным для учащихся.

Пусть трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют условиям задачи. Тогда $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$. Согласно задаче 389 (а) $\angle D = \angle D_1$. Наложим трапецию $ABCD$ на трапецию $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AD — с равной ей стороной A_1D_1, а вершины B и B_1, C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1D_1. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$, то сторона AB наложится на луч A_1B_1, а сторона DC — на луч D_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $DC = D_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона DC — со стороной D_1C_1, в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны.

420. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC и BD — его биссектриса (рис. 122).

а) По теореме о биссектрисе равнобедренного треугольника (п. 18) $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Следовательно, точки A и C симметричны относительно прямой BD.

б) Возьмем произвольную точку M на основании AC. Пусть, например, точка M лежит между точками A и D (см. рис. 122). Отметим точку M_1 между точками D и C так, что $DM_1 = DM$. Очевидно, точка M_1 симметрична точке M относительно прямой BD. Итак, для каждой точки на основании AC симметричная ей относительно BD точка также лежит на основании AC.

в) Возьмем теперь произвольную точку N на одной из боковых сторон треугольника ABC, например на стороне AB (см. рис. 122). Отложим от вершины B на луче BC отрезок BN_1, равный BN. Так как $BN < AB$, то $BN_1 < BC$ и точка N_1 лежит на стороне BC. Треугольник BNN_1 равнобедренный, BK — его биссектриса, следовательно, $NN_1 \perp BK$, $NK = N_1K$, и поэтому точки N и N_1 симметричны относительно прямой BD.

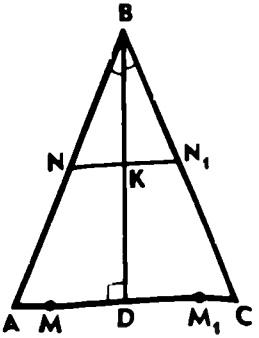


Рис. 122

Мы доказали, что для каждой точки треугольника ABC точка, симметричная ей относительно прямой BD, также принадлежит этому треугольнику. Это и означает, что прямая BD — ось симметрии треугольника ABC.

427. Пусть прямые, проведенные через произвольную точку M основания BC данного равнобедренного треугольника ABC параллельно боковым сторонам, пересекают эти стороны в точках D и

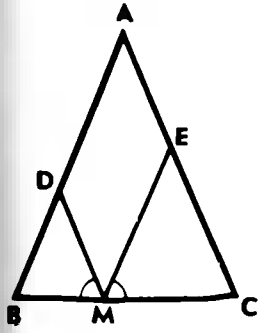


Рис. 123

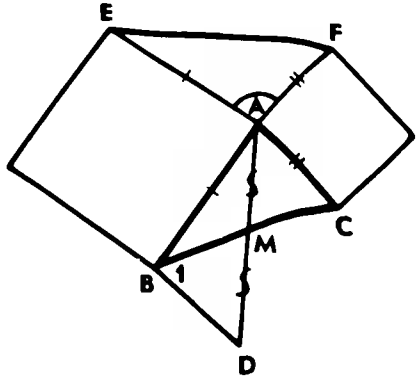


Рис. 124

E (рис. 123). Легко доказать, пользуясь следствием 2^0 п. 32, что треугольники BMD и MCE равнобедренные, т. е. $MD=DB$ и $ME=EC$. Если P — периметр четырехугольника $ADME$, то $P=AD+DM+ME+EA=AD+DB+EC+EA=AB+AC$.

440*. Пусть ABC — данный треугольник, AM — его медиана, точка D симметрична точке A относительно точки M (рис. 124). Докажем, что треугольники ABD и EAF равны. Так как $\triangle BMD=\triangle CMA$, то $BD=AC$ и $\angle 1=\angle C$. Следовательно, $\angle ABD=\angle B+\angle 1=\angle B+\angle C=180°-\angle A$. С другой стороны, $\angle EAF=180°-\angle A$, поэтому $\angle ABD=\angle EAF$. Треугольники ABD и EAF равны по двум сторонам и углу между ними ($AB=AE$, $BD=AC=AF$, $\angle ABD=\angle EAF$). Отсюда следует, что $EF=AD=2AM$.

ГЛАВА VI

Площадь (14 ч)

Существенной особенностью данного курса геометрии является сравнительно раннее введение понятия площади многоугольника. Это обеспечивает ряд методических преимуществ в построении курса, о которых будет сказано ниже.

С понятием площади и формулами для вычисления площадей некоторых многоугольников (треугольник, прямоугольник) учащиеся уже встречались в V и VI классах. Назначение данной главы — расширить и углубить представления учащихся об измерении площадей, вывести формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и, наконец, ис-

пользуя понятие площади, доказать одну из главных теорем геометрии — теорему Пифагора.

Учителю следует обратить особое внимание на нетрадиционную для школьного курса теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. На этой теореме основано доказательство признаков подобия треугольников в следующей главе. Кроме того, эта теорема позволяет решить большое число задач без использования теории подобия и тригонометрических формул, связывающих стороны и углы треугольника.

По первому и второму вариантам тематического планирования учебного материала на изучение темы «Площадь» отводится одно и то же число часов.

§ 1. Площадь многоугольника (2 ч)

Назначение параграфа — дать представление об измерении площадей многоугольников, рассмотреть основные свойства площадей и вывести формулы для вычисления площадей квадрата и прямоугольника. Этот материал служит основой для вывода всех остальных формул данной главы.

Перед тем как непосредственно приступить к изучению нового материала, желательно вспомнить понятие многоугольника как части плоскости, а также понятие равенства фигур, в частности многоугольников. Для этого можно использовать следующие устные задачи:

1. Через точку во внутренней области равностороннего треугольника проведены две прямые, параллельные двум сторонам треугольника. На какие фигуры разбивается этими прямыми данный треугольник?

2. На рисунке 125 $ABCD$ — параллелограмм, $AD=2AB$, AM — биссектриса угла BAD. Докажите, что часть отрезка AM лежащая во внутренней области параллелограмма $ABCD$, равна части, лежащей во внешней области

Ввести понятие площади многоугольника и основные свойства площадей можно в форме короткой лекции с привлечением

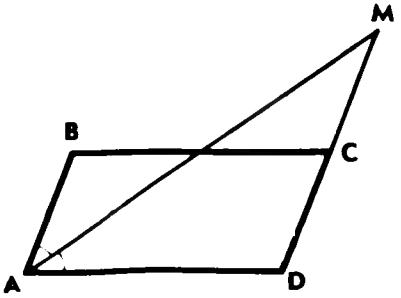


Рис. 125

иллюстративного материала. При этом полезно отметить, что вывод формул для вычисления площадей различных многоугольников будет основан на двух свойствах площадей, аналогичных свойствам длин отрезков:

1°. Равные многоугольники имеют равные площади.

2°. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Эти свойства принимаются на основе наглядных представлений об измерении площадей.

Наряду с двумя основными свойствами важную роль играет в дальнейшем еще одно свойство:

3°. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Доказательство свойства 3° является, пожалуй, самым трудным местом во всем курсе, и потому, как нам кажется, не нужно требовать от каждого ученика, чтобы он умел доказывать это свойство. Именно поэтому п. 49 учебника, содержащий доказательство свойства 3°, отмечен звездочкой. Это означает, что материал данного пункта не является обязательным (всего в учебнике «Геометрия, 7—9» имеется три пункта, отмеченные звездочкой). Учителю следует на конкретных примерах разъяснить свойство 3°, а более подготовленным учащимся можно предложить изучить доказательство самостоятельно по учебнику. Трудность доказательства связана с тем, что наряду со случаем, когда сторона квадрата выражается конечной десятичной дробью, приходится рассматривать более сложный случай, когда сторона квадрата выражается бесконечной десятичной дробью (иррациональным числом). Вместе с тем это единственное место во всем курсе, где возникают трудности, связанные с иррациональными значениями величин. Одно из преимуществ раннего введения понятия площади состоит в том, что такого рода трудности удается легко обойти в главе «Подобные треугольники» при доказательстве признаков подобия.

Закрепить усвоение свойств площадей можно в процессе решения задачи 445, а также задач типа:

3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите площади треугольников ABC и ABD.

4. Площадь прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 126, равна Q. Найдите площадь треугольника AMD.

5. На рисунке 127 $ABCD$ — прямоугольник, точки E и F — середины его сторон AD и BC. Заштрихованный квадрат представляет собой единицу измерения площадей. Найдите площадь трапеции $KMNP$.

Кроме того, на первом уроке рекомендуется решить задачи 449 (а, в), 450 (а, б), 451 (устно).

Дома: вопросы 1, 2 (с. 129); задачи 447, 449 (б), 450 (в), 451 (записать решение).

На втором уроке перед выводом формулы площади прямо-

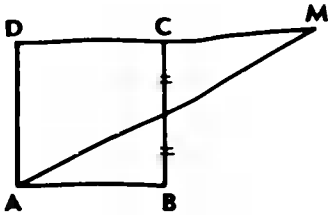


Рис. 126

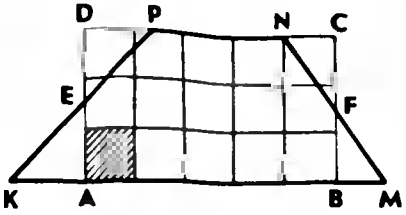


Рис. 127

угольника полезно провести подготовительную работу, выполнив следующие задания:

6. Докажите, что два прямоугольника равны, если равны их смежные стороны.

7. На рисунке 128 $ABCD$ — квадрат, $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$. Найдите площадь четырехугольника $AFKM$, если $AM = CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

При доказательстве теоремы о площади прямоугольника желательно иметь заранее заготовленный чертеж (см. рис. 181 учебника).

В классе рекомендуется решить задачи 452 (а, в), 453 (а, б).

Дома: вопрос 3 (с. 129); задачи 452 (б, г), 453 (в), 448.

В конце второго урока полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

На рисунке 129 $ABCD$ — прямоугольник, точка M — середина стороны BC. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 48 см, а сторона AD вдвое больше стороны AB. Найдите: а) площадь прямоугольника $ABCD$; б) площадь треугольника ADN.

Вариант II

На рисунке 130 $ABCD$ — прямоугольник, точка C — середина отрезка BF. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 46 см, а сто-

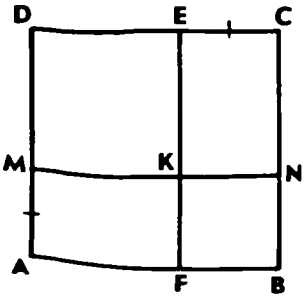


Рис. 128

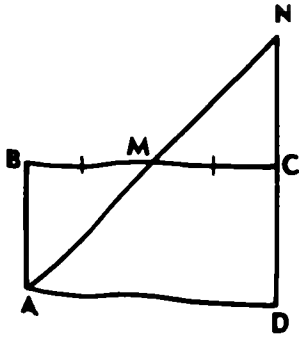


Рис. 129

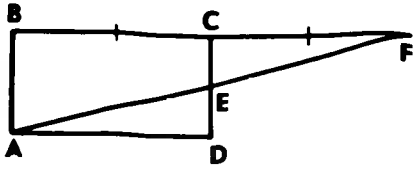


Рис. 130

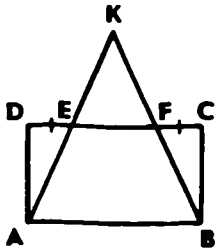


Рис. 131

рона BC на 5 см больше стороны AB. Найдите: а) площадь прямоугольника $ABCD$; б) площадь треугольника ABF.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Периметр прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 131, равен 44 см, а $DC:AD=7:4$. Найдите площадь треугольника ABK, если $DE=FC=\frac{1}{2}EF$.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** основные свойства площадей и формулу для вычисления площади прямоугольника, **уметь** вывести эту формулу и использовать ее и свойства площадей при решении задач типа 447—454, 457.

§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции (6 ч)

Назначение параграфа — опираясь на основные свойства площадей и теорему о площади прямоугольника, вывести формулы для вычисления площадей параллелограмма, треугольника и трапеции. Кроме того, рассмотреть теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, на которой основано доказательство ряда теорем из последующих разделов курса.

Материал этого параграфа можно распределить по урокам следующим образом: площадь параллелограмма — 1 урок, площадь треугольника — 2 урока, площадь трапеции — 1 урок. Оставшиеся два урока рекомендуется посвятить решению задач.

Перед выводом формулы площади параллелограмма полезно провести подготовительную работу, с тем чтобы напомнить основные свойства площадей и признаки равенства прямоугольных треугольников:

1. На рисунке 131 $ABCD$ — прямоугольник, $DE=CF=\frac{1}{2}EF$.

Докажите, что площадь треугольника KEF в два раза больше площади треугольника BCF.

2. На рисунке 182 учебника отрезки BH и CK — высоты параллелограмма $ABCD$ Найдите площадь этого параллелограмма, если $AB=6$ см, $BC=8$ см, $\angle BAH=30°$.

После доказательства теоремы о площади параллелограмма в классе рекомендуется решить задачи 459 (а) (устно), 459 (б, в), 464 (в).

Дома: вопрос 4 (с. 129); задачи 459 (г), 460, 464 (б).

В конце урока или в начале следующего урока желательно провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

Стороны параллелограмма равны 10 см и 6 см, а угол между этими сторонами равен 150°. Найдите площадь этого параллелограмма.

Вариант II

Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 4 см и 3 см. Найдите площадь этого параллелограмма.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 6 см.

Перед изучением теоремы о площади треугольника полезно устно по заготовленному заранее чертежу решить следующую задачу:

3. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$, равные 8 см и 12 см, образуют угол в 30° Найдите площади треугольников ABC и ABD.

В процессе решения этой задачи повторяются основные свойства площадей, формула площади параллелограмма, акцентируется внимание на том, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Доказательство теоремы о площади треугольника и следствий из нее можно предложить учащимся провести самостоятельно (без учебника или с помощью него).

В классе рекомендуется решить задачи 468 (а, г), 471 (а), 475.

Дома: вопрос 5 (с. 129); задачи 467, 468 (б, в), 471 (б), 474 (устно).

В основе доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, лежит следствие 2^0 из теоремы о площади треугольника Поэтому именно на этом следствии желательно акцентировать внимание учащихся в процессе проверки домашнего задания (задача 474) и в процессе устного решения следующих задач:

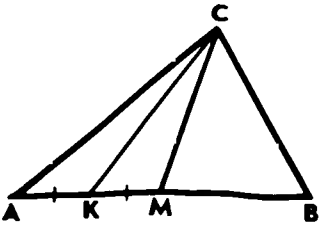


Рис. 132

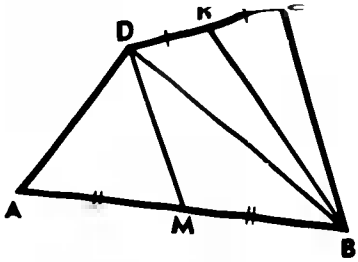


Рис. 133

4. На рисунке 132 CM — медиана треугольника ABC, CK — медиана треугольника ACM. Найдите отношение площадей

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}},\ \frac{S_{ACM}}{S_{BCK}},\ \frac{S_{ACK}}{S_{BCK}}.$$

5. На рисунке 133 точка M — середина стороны AB, K — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{MBKD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Доказательство теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, рекомендуется провести самому учителю.

На применение этой теоремы в классе можно решить задачу 6 (устно). На рисунке 134 $\angle A=\angle K$, $AC=5$ см, $AB=3$ см, $KN=7$ см, $KM=2$ см. Найдите отношение $\frac{S_{ABC}}{S_{KMN}}$.

7. На рисунке 135 $OA=8$ см, $OB=6$ см, $OC=5$ см, $OD=2$ см, $S_{AOB}=20$ см^2. Найдите S_{COD}.

8. Площадь одного равностороннего треугольника в три раза больше, чем площадь другого равностороннего треугольника. Найдите сторону второго треугольника, если сторона первого равна 1.

9. Задача 479 (б).

Дома: вопрос 6 (с. 129); задачи 469, 472, 479 (а).

В конце урока рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

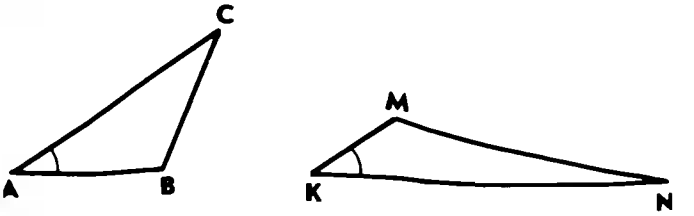


Рис. 134

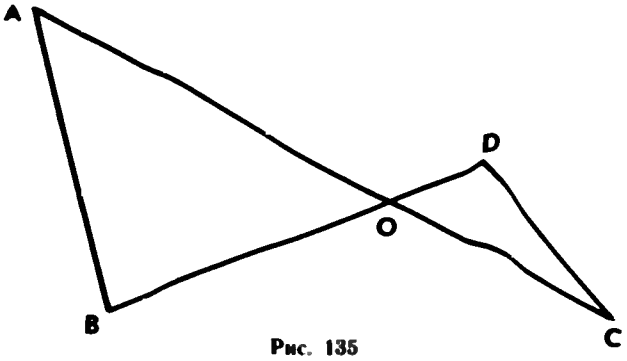


Рис. 135

Вариант I

На рисунке 136, *а* $AO=OB$, $OC=2OD$, $S_{AOC}=12$ см^2. Найдите S_{BOD}.

Вариант II

На рисунке 136, *б* $OB=OC$, $OD=3OA$, $S_{AOC}=16$ см^2. Найдите S_{BOD}.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

На рисунке 136, *в* $OA=AB$, $AC \parallel BD$ Докажите, что $S_{OBC}=S_{OAD}$.

Доказательство теоремы о площади трапеции можно предложить учащимся разобрать дома самостоятельно.

На эту теорему в классе рекомендуется решить задачу 480 (а, в).

Дома: вопрос 7 (с. 129); задачи 480 (б), 518 (а).

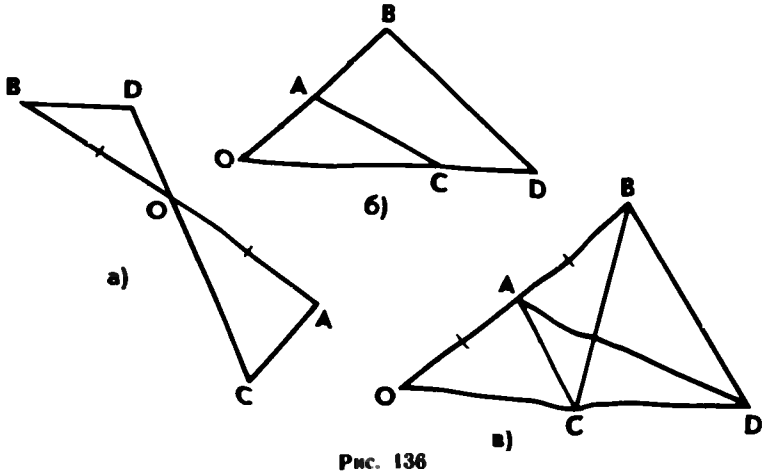


Рис. 136

В конце урока можно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Вариант I

Высота и основания трапеции относятся как 5:6:4. Найдите меньшее основание трапеции, если ее площадь равна 88 см^2.

Вариант II

Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 54 см^2.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Основания равнобедренной трапеции 12 см и 16 см, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Уроки, отведенные на решение задач к § 2, учитель может использовать по своему усмотрению (так, например, один из уроков можно провести до изучения теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). На одном из этих уроков обязательно следует разобрать задачу 476 (теорема о площади ромба) и закрепить усвоение формулы площади ромба в процессе решения задач типа 476, 477, 478.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** формулы для вычисления площадей параллелограмма, треугольника и трапеции; **уметь** их доказывать, а также **знать** теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, и **уметь** применять все изученные формулы при решении задач типа 459—464, 468—472, 474, 476—480.

§ 3. Теорема Пифагора (3 ч)

В этом параграфе изучается одна из важнейших теорем геометрии — теорема Пифагора и обратная ей теорема. Теорема Пифагора позволяет значительно расширить круг задач, решаемых в курсе геометрии. На ней в значительной мере базируется дальнейшее изложение теоретического курса.

Перед доказательством теоремы Пифагора желательно провести подготовительную работу по готовым чертежам:

1. По данным рисунка 137 найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

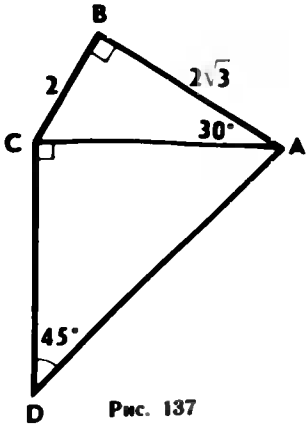


Рис. 137

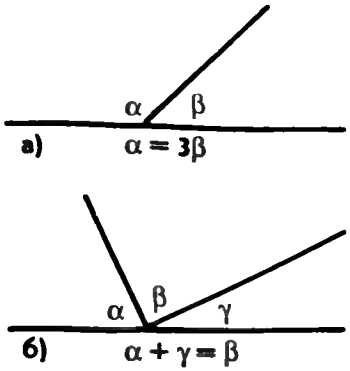


Рис. 138

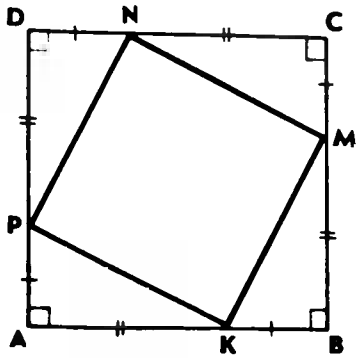


Рис. 139

2. По данным рисунка 138, *а*, *б* найдите угол β.

3. По данным рисунка 139 докажите, что четырехугольник *KMNP* — квадрат. (Эта задача особенно важна, так как такая же фигура, как на рисунке 139, используется в доказательстве теоремы Пифагора.)

Доказательство теоремы Пифагора основано на формулах площадей прямоугольного треугольника и квадрата. Следует отметить, что исторически теорема Пифагора всегда связывалась с понятием площади и формулировалась на языке площадей. Отметим также, что в главе VII дается другое доказательство теоремы Пифагора, основанное на пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике (задача 578 с решением).

Для усвоения теоремы Пифагора после ее доказательства в классе решаются задачи 483 (а, б, г), 484 (а, в, д), 485.

Дома: вопрос 8 (с. 129); задачи 483 (в), 484 (б, г, е), 486 (а).

Перед доказательством теоремы, обратной теореме Пифагора, необходимо напомнить учащимся понятие обратной теоремы и акцентировать их внимание на том, что утверждение, обратное истинному утверждению, не всегда верно. С этой целью можно предложить учащимся сформулировать утверждения, обратные приведенным ниже, и ответить на вопрос: верно ли сформулированное обратное утверждение?

а) Если углы вертикальные, то они равны.

б) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

в) Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

г) Если четырехугольник является трапецией, то две его стороны параллельны.

После этого упражнения можно предложить учащимся самим сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора. Доказательство теоремы рекомендуется провести самому учителю.

В классе задачи 488 (а), 498 (а, д, е), 517.

Дома: вопросы 9, 10 (с. 130); задачи 488 (б), 493, 498 (б, в, г, ж).

Третий урок можно посвятить решению задач на применение теоремы Пифагора и обратной ей теоремы. В конце урока желательно провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

В прямоугольной трапеции основания равны 22 см и 6 см, а большая боковая сторона — 20 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант II

В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 7 см и 25 см, а меньшее основание равно 2 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Диагональ AC прямоугольной трапеции $ABCD$ перпендикуляр на боковой стороне CD и составляет угол в 60° с основанием AD. Найдите площадь трапеции, если $AD=24$ см.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** теорему Пифагора и обратную ей теорему; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 483—499.

Решение задач (2 ч)

Назначение этих уроков — закрепить навыки в решении задач по теме «Площадь» и подготовиться к контрольной работе. Материал к этим урокам подбирается из нерешенных задач к § 1—3, а также из дополнительных задач к главе VI.

Задачу 489 желательно решить на первом из этих уроков (вывод формулы площади равностороннего треугольника). На одном из уроков следует решить задачу 524 (формула Герона).

На втором уроке рекомендуется провести итоговую *самостоятельную работу*:

Вариант I

1. В треугольнике ABC $\angle A=45°$, $BC=13$ см, а высота BD отсекает на стороне AC отрезок DC, равный 12 см. Найдите площадь треугольника ABC и высоту, проведенную к стороне BC.

2. Одна из диагоналей ромба на 4 см больше другой, а площадь ромба равна 96 см^2. Найдите стороны ромба.

Вариант II

1. В треугольнике ABC $\angle B=45°$, высота AN делит сторону BC на отрезки $BN=8$ см и $NC=6$ см. Найдите площадь треугольника ABC и сторону AC.

2. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 20 см, а диагонали относятся как 3:4.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle B=75°$, высота BD равна 6 см. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Высота BK ромба $ABCD$ делит сторону AD на отрезки $AK=6$ см и $KD=4$ см. Найдите площадь ромба и его диагонали

Контрольная работа № 2 (1 ч)

Вариант I

1. Смежные стороны параллелограмма равны 32 см и 26 см, а один из его углов равен 150°. Найдите площадь параллелограмма.

2. Площадь прямоугольной трапеции равна 120 см^2, а ее высота равна 8 см. Найдите все стороны трапеции, если одно из оснований больше другого на 6 см

3. На стороне AC данного треугольника ABC постройте точку D так, чтобы площадь треугольника ABD составила одну треть площади треугольника ABC.

Вариант II

1. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой и равна 9 см. Найдите стороны этого параллелограмма, если его площадь равна 108 см^2.

2. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AB=12$ см, $BC=14$ см, $AD=30$ см, $\angle B=150°$.

3. На продолжении стороны KN данного треугольника KMN постройте точку P так, чтобы площадь треугольника NMP была в два раза меньше площади треугольника KMN.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Стороны параллелограмма равны 12 см и 8 см, а угол между высотами, проведенными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

2. Середина M боковой стороны CD трапеции $ABCD$ соединена отрезками с вершинами A и B. Докажите, что площадь треугольника ABM в два раза меньше площади данной трапеции

3. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC, причем $AB_1=\frac{1}{3}AC$, $CA_1=\frac{1}{3}CB$, $BC_1=\frac{1}{3}BA$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.
2. Площадь прямоугольника равна 75 см^2. Найдите стороны этого прямоугольника, если одна из них в три раза больше другой.
3. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 5 см, а угол между диагоналями равен 60°.

Вариант II

1. Сформулируйте теорему о площади параллелограмма.
2. Площадь параллелограмма равна 90 см^2. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к стороне, равной 12 см.
3. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 14 см, а один из углов равен 60°.

Вариант III

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 8 см и 4,8 см, а высота, проведенная к стороне AB, равна 6 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.
3. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна 12 см.

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD=20$ см, $BC=4$ см, $AB=16$ см и $\angle A=30°$.
3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 8 см и 12 см, а боковая сторона — 10 см.

Вариант V

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 12 см и 16 см.
3. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см.

Вариант VI

1. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 6 см, 8 см и 10 см.
3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD=12$ см, $BC=6$ см, $CD=5$ см, $AC=13$ см.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VI

466. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $BD=AD$ (рис. 140). Тогда $\angle A$ — острый, так как треугольник ABD равнобедренный. По условию $\angle A=45°$.

1. Треугольник ABD равнобедренный, следовательно, $\angle ABD=45°$, и поэтому $\angle ADB=90°$. По условию $AB=15{,}2$ см.

2. Высота DK равнобедренного треугольника ADB является медианой, поэтому $DK=\frac{1}{2}AB=7{,}6$ см (см. задачу 404).

3. $S_{ABCD}=2S_{ABD}=2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot DK=15{,}2\cdot 7{,}6=115{,}52$ (см^2).

478. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $AC\perp BD$, а O — точка пересечения диагоналей (рис. 141).

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}.$$

Отрезки BO и DO — высоты треугольников ABC и ADC, поэтому

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO,\ S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot OD$$

Следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}AC(BO+OD)=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

489. 1. Проведем высоту BD данного равностороннего треугольника ABC, в котором $AB=a$. Высота BD является медианой треугольника ABC, поэтому $AD=\frac{a}{2}$.

2. Применив теорему Пифагора к треугольнику ABD, получим:

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

496. 1. Пусть $AD=BC=x$. Тогда $BD=3-x$ (рис. 142).

2. По теореме Пифагора для треугольника BCD

$$x^2=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2,\ \text{откуда}\ x=2.$$

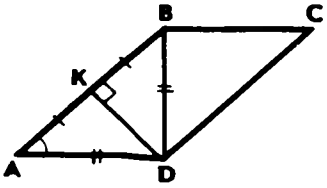


Рис. 140

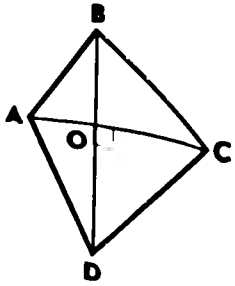


Рис. 141

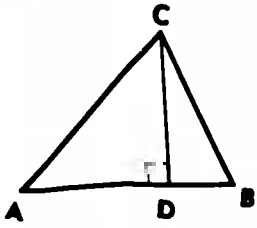


Рис. 142

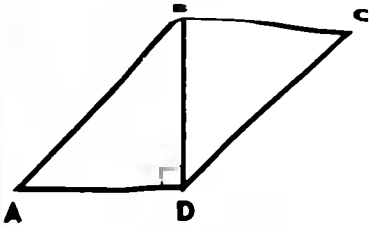


Рис. 143

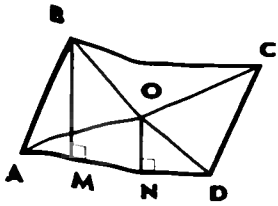


Рис. 144

3. По теореме Пифагора для треугольника ACD

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}\ (\text{см}).$$

497. Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой (рис. 143) По теореме Пифагора для треугольника ABD

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(AB+AD)(AB-AD)}$$

Ясно, что $AB+AD$ есть полупериметр параллелограмма $ABCD$, поэтому $BD=\sqrt{25\cdot 1}=5$ (см).

504. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB=29$ см, ON — перпендикуляр, проведенный из точки O пересечения диагоналей к стороне AD, $AN=33$ см, $ND=12$ см (рис 144).

1. Проведем высоту BM данного параллелограмма. Так как $BO=OD$ и $BM \parallel ON$, то $MN=ND$ (см. задачу 384) и, следовательно,

$$AM=AN-NM=33-12=21\ (\text{см}).$$

2. Применив теорему Пифагора к треугольнику ABM, найдем высоту BM:

$$BM=\sqrt{29^2-21^2}=\sqrt{8\cdot 50}=20\ (\text{см}).$$

3. $S_{ABCD}=AD\cdot BM=45\cdot 20=900$ (см^2).

506. При решении этой задачи следует учесть, что искомые прямые не могут пересечь одну и ту же сторону квадрата, так как в этом случае площадь одной из трех указанных в задаче фигур (четырехугольник $ABCM$ на рисунке 145, *а*) больше $\frac{1}{2}S$,

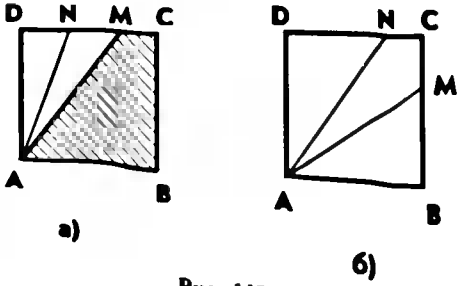


Рис. 145

где S — площадь квадрата. Поэтому искомые прямые, проведенные через вершину A, пересекают стороны квадрата $ABCD$ в точках M и N так, что одна из этих точек, например точка M, лежит на стороне BC, а другая — на стороне DC (рис. 145, *б*) Пусть $AB=a$, $BM=x$. Тогда по условию

$$S_{ABM}=\frac{1}{3}S=\frac{a^2}{3},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{2}ax=\frac{1}{3}a^2,$$

откуда $x=\frac{2}{3}a$.

Итак, $BM=\frac{2}{3}BC$. Аналогично $DN=\frac{2}{3}DC$.

508*. Пусть D — произвольная точка на основании AC равнобедренного треугольника ABC, а DM и DN — перпендикуляры, проведенные из этой точки к прямым AB и CB (рис 146).

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot DM+\frac{1}{2}BC\cdot DN=\frac{1}{2}AB(DM+DN)$$

Отсюда следует, что $DM+DN=\frac{2S_{ABC}}{AB}$, т.е. сумма $DM+DN$ не зависит от выбора точки D

509. Пусть O — произвольная точка, лежащая внутри равностороннего треугольника ABC ($AB=BC=CA=a$), и OK, OM и ON — перпендикуляры к сторонам этого треугольника (рис. 147). Тогда

$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COA}=\frac{1}{2}(OK\cdot AB+OM\cdot BC+ON\cdot AC)=$$
$$=\frac{a}{2}(OK+OM+ON).$$

Отсюда получаем:

$$OK+OM+ON=\frac{2S_{ABC}}{a},$$

т.е. сумма $OK+OM+ON$ не зависит от выбора точки O.

510*. Пусть BM — высота треугольника BDF, CK — высота треугольника CDE (рис. 148). Заметим, что BM и CK равны высотам параллелограмма $AEDF$, поэтому

$$S_{BDF}=\frac{1}{2}S_{AEDF},\ S_{CDE}=\frac{1}{2}S_{AEDF},$$

и, следовательно,

$$S_{BDF}=S_{CDE}.$$

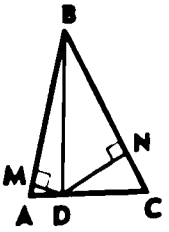


Рис. 146

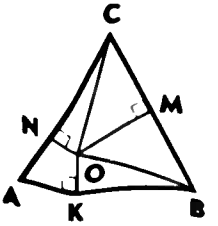


Рис. 147

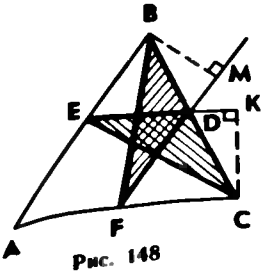


Рис. 148

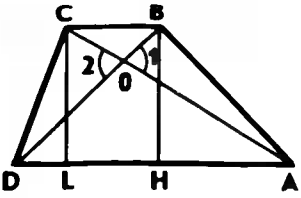


Рис. 149

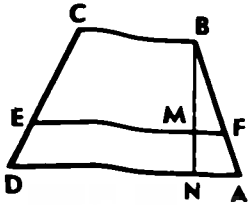


Рис. 150

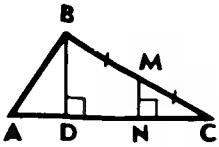


Рис. 151

511. а) Треугольники ABD и ACD имеют равные высоты ($BH=CL$, рис. 149) и общее основание AD, следовательно, $S_{ABD}=S_{ACD}$.

б) $S_{ABD}=S_{ABD}+S_{AOD}$, $S_{ACD}=S_{CDO}+S_{AOD}$.
Но по доказанному в п.а) $S_{ABO}=S_{ACD}$, поэтому $S_{ABO}=S_{CDO}$.

в) Углы 1 и 2 равны, поэтому $\frac{S_{ABO}}{S_{CDO}}=\frac{OA\cdot OB}{OC\cdot OD}$

По доказанному в п.б) $S_{ABO}=S_{CDO}$, следовательно, $OA\cdot OB=$ $=OC\cdot OD$.

512*. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD=a$, $BC=b$, а EF — указанный в условиях задачи отрезок (рис. 150). Высота BN трапеции пересекает этот отрезок в точке M. Пусть $EF=x$, $BM=h_1$, $MN=h_2$. По условию $S_{EBCF}=S_{AEFD}$, и, значит, $S_{ABCD}=2\,S_{EBCF}$. Запишем эти равенства, используя формулу площади трапеции:

$$\frac{b+x}{2}h_1=\frac{a+x}{2}h_2,\quad \frac{a+b}{2}(h_1+h_2)=(b+x)h_1.$$

Разделим оба уравнения на h_1 и положим $\frac{h_2}{h_1}=y$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$b+x=(a+x)y,\quad (a+b)(1+y)=2(b+x).$$

Выразим y из первого уравнения и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$(a+b)\left(1+\frac{b+x}{a+x}\right)=2(b+x).$$

Отсюда находим:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

516. Проведем высоту BD данного треугольника ABC (рис. 151).

1. Точка M — середина стороны BC, $MN\parallel BD$, следовательно, $DN=NC$ (см. задачу 384).

2. В треугольнике BCD $BC=34$ см, $DC=2\,NC=30$ см, следовательно,

$$BD=\sqrt{34^2-30^2}=\sqrt{64\cdot 4}=16\ (\text{см}).$$

3. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}40\cdot 16=320\ (\text{см}^2)$.

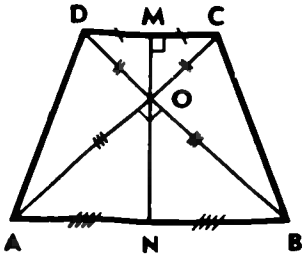


Рис. 152

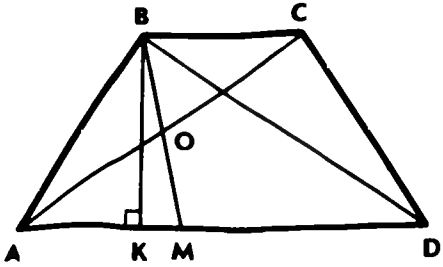


Рис 153

520. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($AB+CD=2a$), а MN — высота, проведенная через точку O пересечения диагоналей (рис. 152).

1. Так как углы трапеции $ABCD$ при основании равны (см. задачу 388), то $\triangle ABC=\triangle BAD$, поэтому $\angle OAB=\angle OBA$ Отсюда следует, что треугольник AOB равнобедренный и, следовательно, в силу равенства $AC=BD$ (см. задачу 388) треугольник COD также равнобедренный.

2. По условию задачи $AC\perp BD$, т.е. треугольники AOB и COD прямоугольные, поэтому $OM=\frac{1}{2}CD$, $ON=\frac{1}{2}AB$ (задача 404).

3. $MN=MO+ON=\frac{1}{2}(CD+AB)=a$.

Отсюда получаем:

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}MN=a^2.$$

521. Используя теорему Пифагора, выразим AB^2, BC^2, CD^2, AD^2 через AO, BO, CO, DO, где O — точка пересечения прямых AC и BD, и убедимся в том, что

$$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2.$$

522. Пусть BK — высота данной трапеции $ABCD$, точка O — середина диагонали AC (рис. 153).

1. $\triangle AOM=\triangle COB$ по стороне и двум прилежащим углам ($AO=CO$ по условию, $\angle AOM=\angle COB$ как вертикальные углы, $\angle MAO=\angle BCO$ как накрест лежащие углы). Следовательно, $AM=BC=5$ (см).

2. $MD=AD-AM=17-5=12$ (см).

3. $AK=\frac{AD-BC}{2}=6$ (см).

4. Найдем высоту BK как катет прямоугольного треугольника ABK:

$$BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8 \text{ (см)}.$$

5. $S_{BMD}=\frac{1}{2}MD\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$ (см)^2.

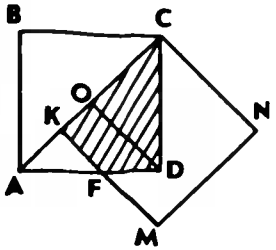


Рис. 154

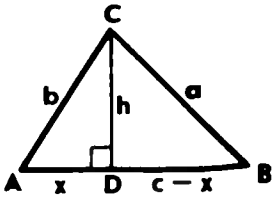


Рис. 155

523. Пусть $ABCD$ и $CKMN$ — данные квадраты, $AB=CK=a$ (рис. 154). Общей частью данных квадратов является четырехугольник $CKFD$.

$$S_{CKFD}=S_{ACD}-S_{AKF}.$$

Далее учесть, что

$$S_{ACD}=\frac{a^2}{2},\ S_{AKF}=\frac{AK^2}{2}=\frac{(AC-KC)^2}{2}.$$

524. Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть $\angle A$ и $\angle B$ — острые углы треугольника ABC. Тогда основание высоты CD (точка D) лежит на стороне AB (рис. 155). Положим $AD=x$, тогда $BD=c-x$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ACD и BCD, получаем систему двух уравнений:

$$b^2=h^2+x^2,\ a^2=h^2+(c-x)^2.$$

Из этой системы можно выразить x и h через a, b c, в частности выражение для h можно привести к виду

$$h=2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

В результате получим:

$$S=\frac{1}{2}ch=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ГЛАВА VII

Подобные треугольники (19 ч)

Понятие подобия является одним из важнейших в курсе планиметрии. Учащиеся знакомы с реальными предметами, дающими наглядное представление о подобных фигурах (географические карты, фотографии, модели автомобилей, кораблей, самолетов и т.д.).

Основное внимание в главе уделено подобным треугольникам. Определение подобных треугольников дается не на основе преобразования подобия, а через равенство углов и пропорциональность сходственных сторон. На основе теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, весьма просто доказываются признаки подобия треугольников. Они широко используются в курсе геометрии. Кроме того, материал, связанный с подобием, позволяет содержательно реализовать межпредметные связи с алгеброй (пропорциональность, уравнения, квадратные корни) и с физикой (например, геометрическая оптика). В конце главы вводятся синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.

По первому и второму вариантам тематического планирования учебного материала на изучение темы «Подобные треугольники» отводится одно и то же число часов.

§ 1. Определение подобных треугольников (2 ч)

Назначение параграфа — ввести понятие пропорциональных отрезков и, опираясь на него, дать определение подобных треугольников.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: пропорциональные отрезки и свойство биссектрисы треугольника (задача 535) — 1 урок; определение подобных треугольников и теорема об отношении площадей подобных треугольников — 1 урок.

На первом уроке, перед тем как приступить к изучению нового материала, полезно повторить свойства пропорций. После введения понятия пропорциональных отрезков можно решить задачи 533 (устно), 534 (а, б), а затем рекомендуется разобрать в классе задачу 535 и показать применение рассмотренного свойства биссектрисы треугольника на примере задач 536 (а), 538, 540.

Дома: вопросы 1 и 2 (с. 153); задачи 534 (в), 535, 536 (б), 537, 539.

На втором уроке после определения подобных треугольников можно решить задачи 541 (устно), 542.

Перед доказательством теоремы об отношении площадей подобных треугольников полезно еще раз вспомнить теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу (п. 52). Это можно сделать в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 156,*а* $AN=BN$, $CM=5$ см, $MB=2$ см. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BMN равна 7 см^2.

2. На рисунке 156,*б* $AO=OB$, $BK:KD=1:3$, $CO:OD=2:3$. Найдите S_{BOK}, если $S_{AOC}=4$ см^2.

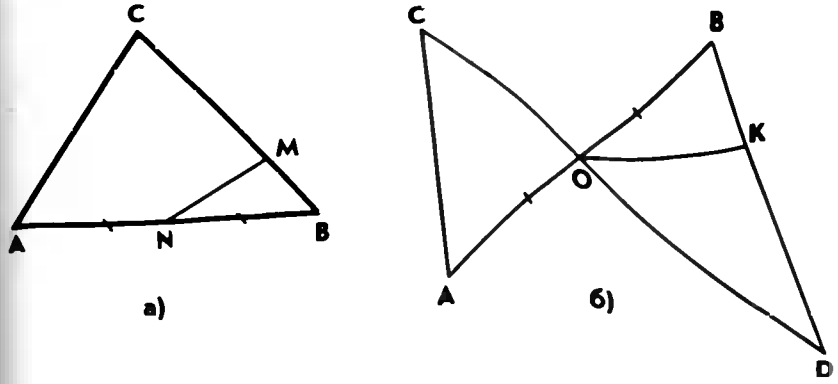


Рис. 156

Далее рекомендуется решить задачи 544, 545, 548.

Дома: вопросы 3, 4 (с. 153); задачи 543, 546, 547, 549.

При наличии времени на втором уроке рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

В подобных треугольниках ABC и KMN равны углы B и M, C и N, $AC=3$ см, $KN=6$ см, $MN=4$ см, $\angle A=30°$. Найдите: а) BC, $\angle K$; б) отношение площадей треугольников ABC и KMN; в) отношение, в котором биссектриса угла C делит сторону AB.

Вариант II

В подобных треугольниках PQR и ABC равны углы Q и B, R и C, $PQ=3$ см, $PR=4$ см, $AB=6$ см, $\angle A=40°$. Найдите: а) AC, $\angle P$; б) отношение площадей треугольников PQR и ABC; в) отношение, в котором биссектриса угла P делит сторону RQ.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle B=30°$, $AB=12$ см, CD — высота. Докажите, что треугольник ACD подобен треугольнику ABC, найдите отношение их площадей и отрезки, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определения пропорциональных отрезков и подобных треугольников, теорему об отношении площадей подобных треугольников и свойство биссектрисы треугольника (задача 535); **уметь** применять их при решении задач типа 534—538, 541, 542, 544—548

§ 2. Признаки подобия треугольников (5 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть три признака подобия треугольников и сформировать у учащихся навыки применения этих признаков при решении задач. Дальнейшее применение признаки подобия треугольников получат в § 3 и 4.

Особое внимание следует обратить на первый признак подобия треугольников, так как именно он лежит в основе доказательства двух других признаков, а кроме того, чаще других применяется при решении задач.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: первый признак подобия треугольников — 2 урока; второй и третий признаки подобия треугольников — 2 урока; решение задач из § 2 — 1 урок. На следующем уроке, после изучения § 2, рекомендуется провести контрольную работу № 3.

Перед тем как приступить к изучению первого признака подобия треугольников, полезно повторить понятие пропорциональных отрезков и теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Это можно сделать в процессе устного решения задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 157 $CA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$, $A_1B_1\parallel A_2B_2\parallel A_3B_3\parallel A_4B_4$, $CB_4=12$ см, $S_{A_4B_4C}=32$ см^2. Найдите: а) B_1B_2, B_2B_4; б) $S_{A_3B_3C}$.

2. На рисунке 158 AD — биссектриса треугольника ABC, $AB=4$ см, $AC=8$ см, $BC=6$ см. Найдите: а) BD и CD; б) $S_{ACD}:S_{ABD}$.

3. На рисунке 159 $S_{ABC}=36$ см^2, $AN:NC=3:1$, $BM:MC=2:1$, $AK=KB$. Найдите: а) S_{CMN}; б) S_{AKN}; в) S_{BMNK}.

Доказательство первого признака подобия треугольников рекомендуется провести самому учителю.

В классе на первом и втором уроках можно решить задачи 550, 551 (а), 553 (а), 561, 556, 557 (а, б).

Дома: вопрос 5 (с. 153); задачи 551 (б), 552 (а), 553 (б), 557 (в), 558 (обратите особое внимание на эту задачу).

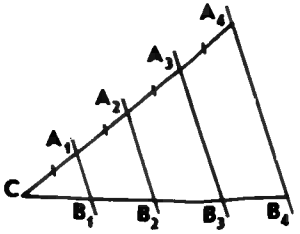


Рис. 157

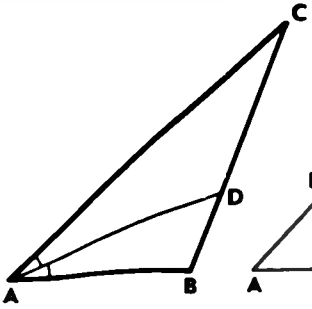


Рис. 158

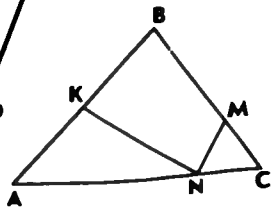


Рис. 159

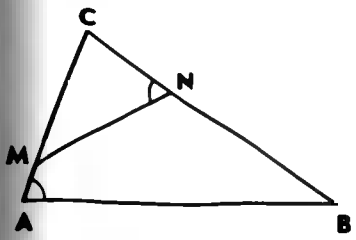


Рис. 160

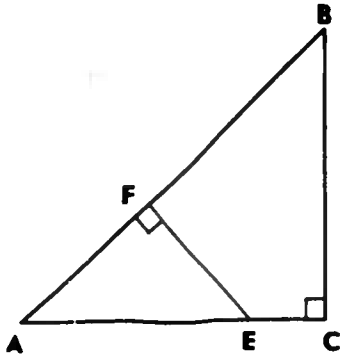


Рис 161

На втором уроке можно провести небольшую (10 мин) *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

На рисунке 160 $\angle N = \angle A$, $BC = 12$ см, $CM = 6$ см, $CN = 4$ см. Найдите AC.

Вариант II

На рисунке 161 $BC \perp AC$, $EF \perp AB$, $BC = 12$ см, $AE = 10$ см, $EF = 6$ см. Найдите AB.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

На рисунке 162 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$ см, $BC = 9$ см. Найдите AC.

Доказательство теорем, выражающих второй и третий признаки подобия треугольников, также желательно провести самому учителю. Учащиеся записывают в тетради план-конспект доказательства каждой теоремы.

На применение второго и третьего признаков подобия треугольников в классе рекомендуется решить задачи:

4. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если: а) катеты одного из них пропорциональны катетам другого; б) гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.

5. На рисунке 163 $OA = 6$ см, $AC = 15$ см, $OB = 9$ см, $BD = 5$ см, $AB = 12$ см. Найдите CD.

6. На рисунке 164 $OA = 15$ см, $OD = 5$ см, $CO : OB = 1 : 3$, $AB + CD = 24$ см. Найдите AB и CD.

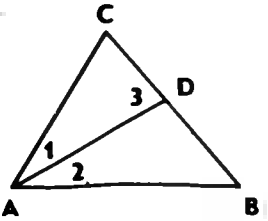


Рис. 162

Кроме того, можно решить задачи 560 (а), 613 (а).

Дома: вопросы 6, 7 (с. 163—164); задачи 559, 560 (б), 613 (б).

На последнем уроке в классе решаются задачи на применение признаков по-

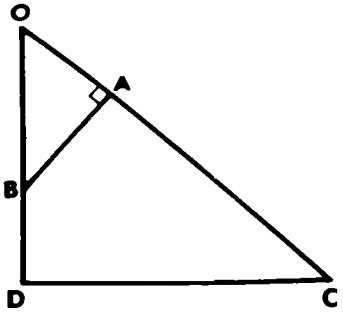


Рис. 163

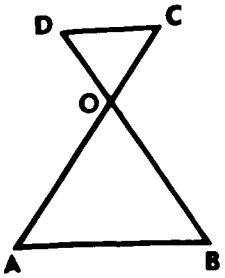


Рис. 164

добия треугольников (по выбору): 552 (б), 554. 555 (а), 562. 563 (а), 611.

Дома: 552 (в), 553 (в), 555 (б), 563 (б), 605.

В конце урока рекомендуется провести *проверочную работу*:

Вариант I

1. Высота CD прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на части $AD=16$ см и $BD=9$ см. Докажите, что $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, и найдите высоту CD.

2. Точки M и N лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, $AC=16$ см, $BC=12$ см, $CM=12$ см, $CN=9$ см. Докажите, что $MN \parallel BC$.

Вариант II

1. Высота CD прямоугольного треугольника ABC отсекает от гипотенузы AB, равной 9 см, отрезок AD, равный 4 см. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, и найдите AC.

2. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $AO=18$ см, $OB=15$ см, $OC=12$ см, $OD=10$ см. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит ее на два подобных треугольника. Найдите S_{ABCD}, если $AB=25$ см, $BC=20$ см, $AC=15$ см.

2. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части $AD=6$ см и $CD=3$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** признаки подобия треугольников; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 550—555, 559—562, а также **знать**

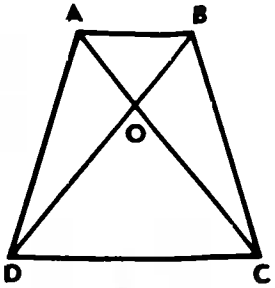


Рис. 165

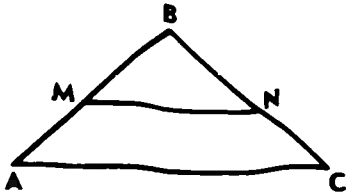


Рис. 166

утверждения, сформулированные в задачах 556, 558, и **уметь** их применять при решении задач типа 557.

Контрольная работа № 3 (1 ч)

Вариант I

1. На рисунке 165 $AB \parallel CD$. а) Докажите, что $AO:OC = BO:OD$. б) Найдите AB, если $OD = 15$ см, $OB = 9$ см, $CD = 25$ см.

2. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KMN, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см, $KM = 10$ см, $MN = 15$ см, $NK = 20$ см.

Вариант II

1. На рисунке 166 $MN \parallel AC$. а) Докажите, что $AB \cdot BN = CB \cdot BM$. б) Найдите MN, если $AM = 6$ см, $BM = 8$ см, $AC = 21$ см.

2. Даны стороны треугольников PQR и ABC: $PQ = 16$ см, $QR = 20$ см, $PR = 28$ см и $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 21$ см. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Докажите, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжения боковых сторон.

2. Даны отрезок AB и параллельная ему прямая a. Воспользовавшись утверждением, доказанным в задаче 1, разделите отрезок AB пополам при помощи одной линейки.

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач (7 ч)

Назначение параграфа — показать применение подобия треугольников при доказательстве теорем, решении задач (в том числе задач на построение циркулем и линейкой), в измеритель-

ных работах на местности; выработать у учащихся навыки использования теории подобных треугольников при решении разнообразных задач.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: теорема о средней линии треугольника и свойство медиан треугольника — 2 урока; теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и деление отрезка в данном отношении — 2 урока; решение задач на построение методом подобия — 2 урока; измерительные работы на местности, понятие о подобии произвольных фигур — 1 урок.

В начале первого урока полезно повторить с учащимися второй признак подобия треугольников и познакомить их с идеей доказательства теоремы о средней линии треугольника, решив устно следующие задачи по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 165 $AO:OC=BO:OD$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

2. На рисунке 166 точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC. Докажите, что $MN \parallel AC$.

После этого нужно дать определение средней линии треугольника и сформулировать теорему о средней линии треугольника. Доказательство теоремы можно предложить учащимся провести самостоятельно. На применение этой теоремы в классе рекомендуется решить задачи 564 (устно), 567. О свойстве медиан треугольника (задача 1 из § 3) целесообразно рассказать учителю самому, а затем учащиеся решают (на доске и в тетрадях) задачу 570.

Дома: вопросы 8, 9 (с. 154); задачи 565, 566, 571.

На следующем уроке усвоение изученного материала закрепляется в процессе решения устных задач типа:

3. На рисунке 167 $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$): $AD=2\ BC$, $BM=MK$, $CN=NK$, $BC=6$ см. Найдите PQ.

4. На рисунке 168 AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что: а) $S_{AOC_1}=S_{BOC_1}$; б) $S_{AOB}=2\,S_{A_1OB}$; в) $S_{AOC_1}=\frac{1}{6}S_{ABC}$.

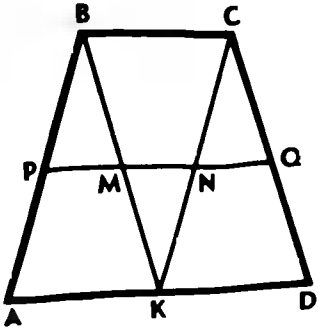


Рис. 167

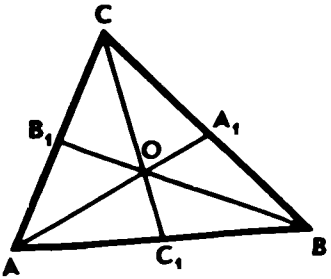


Рис. 168

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи 568 (а), 617.

Дома: задачи 568 (б), 618.

В конце урока можно провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

Площадь ромба равна 48 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного ромба.

Вариант II

Площадь прямоугольника равна 36 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Площадь равнобедренной трапеции равна 40 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции.

Перед рассмотрением задачи 2 (п. 63) о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике полезно ввести понятие среднего геометрического (среднего пропорционального) двух отрезков и далее устно решить задачи типа:

5. Найдите длину среднего геометрического отрезков AB и CD, если $AB=8$ см, $CD=18$ см.

6. Найдите длины отрезков KL и MN, если один из них в четыре раза больше другого, а длина их среднего пропорционального равна 12 см.

Изучение п. 63 можно организовать следующим образом: устно по заготовленному чертежу (рис. 169) доказать подобие треугольников ABC и ACD, ABC и CBD, CBD и ACD, а затем как следствия из доказанного обосновать утверждения 1° и 2° п. 63.

Далее в классе рекомендуется решить задачи 572 (а, в), 573 (устно), 574 (а), 575 и разобрать приведенное в учебнике решение задачи 578.

Дома: вопросы 10, 11 (с. 154); задачи 572 (б), 574 (б), 576.

Замечания. 1. Задачу 574 (а) полезно решить двумя способами: с помощью теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и с помощью формулы площади прямоугольного треугольника. 2. Желательно, чтобы решение задачи 578 (доказательство теоремы Пифагора) учащиеся законспектировали в своих тетрадях.

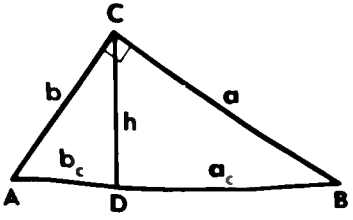


Рис. 169

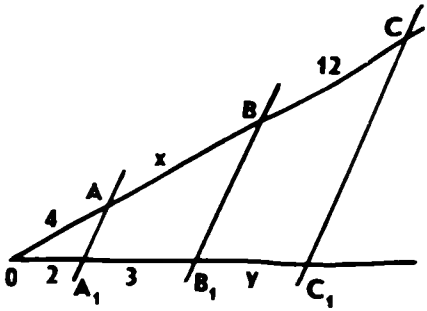


Рис. 170

На следующем уроке в классе можно решить задачи 577, 584, 585 (а, б), 614.

Перед тем как разобрать задачу 584 (деление отрезка в данном отношении), полезно вспомнить задачу 556, выполнив устно следующее задание:

7. На рисунке 170 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. По данным рисунка найдите x и y.

Дома: задачи 585 (в), 607, 623 (с предварительным комментарием учителя).

На следующем уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

1. На рисунке 169 $BD = 16$ см, $CD = 12$ см. Найдите AC, BC, AB, AD.

2. Начертите отрезок и разделите его в отношении $2:7$.

Вариант II

1. На рисунке 169 $AC = 3$ см, $CD = \sqrt{8}$ см. Найдите AB, BC, AD, BD.

2. Начертите отрезок и разделите его в отношении $5:4$.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а высота, проведенная к ней, равна 12 см. Найдите катеты треугольника и отрезки, на которые гипотенуза делится проведенной к ней высотой.

2. Начертите произвольный треугольник ABC и постройте отрезок PQ, удовлетворяющий условию $\frac{PQ}{AB} = \frac{BC}{AC}$.

Перед тем как приступить к решению задач на построение методом подобия, желательно напомнить учащимся основные задачи на построение. С этой целью в начале урока можно выполнить следующее задание:

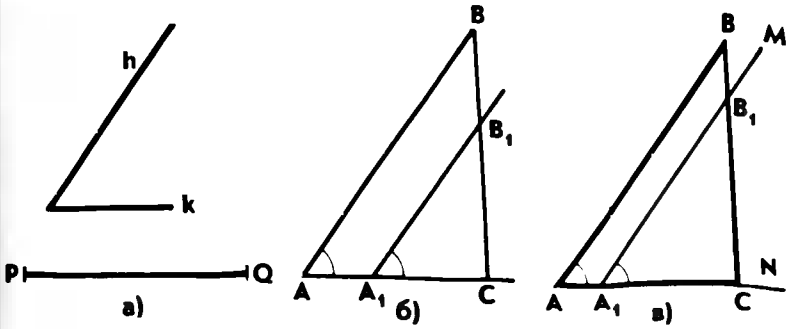


Рис. 171

Начертите остроугольный треугольник ABC. Постройте: а) медиану AM, биссектрису AD и высоту AH треугольника ABC; б) прямую BN, параллельную медиане AM. (Нет необходимости требовать, чтобы учащиеся фактически выполнили все построения циркулем и линейкой, достаточно, если они укажут в каждом случае последовательность выполнения операций.)

Задачу 3 из п. 64 целесообразно разобрать самому учителю, а затем в классе можно решить задачу 589 с оформлением на доске и в тетрадях учащихся. Примерное оформление этой задачи:

Дано: отрезок PQ, $\angle hk$ (рис. 171, *а*).

Построить: $\triangle ABC$: $\angle A = \angle hk$, $BC = PQ$, $AB:AC = 2:1$.

Анализ (устно). Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 171, *б*). Тогда любой треугольник A_1B_1C, в котором $A_1B_1 \parallel AB$ ($A_1 \in AC$, $B_1 \in BC$), подобен треугольнику ABC по первому признаку подобия ($\angle A_1 = \angle A$, $\angle C$ — общий). Следовательно, $A_1B_1:A_1C = 2:1$, $\angle A_1 = \angle hk$. Таким образом, достаточно построить какой-нибудь треугольник A_1B_1C, в котором $A_1B_1:A_1C = 2:1$, $\angle A_1 = \angle hk$, а затем отложить на луче CB_1 отрезок $CB = PQ$ и через точку B провести прямую, параллельную прямой A_1B_1. Точка A пересечения этой прямой с прямой A_1C является вершиной искомого треугольника.

Построение. 1. Строим угол MA_1N, равный данному углу hk (рис. 171, *в*).

2. Отмечаем произвольную точку C на луче A_1N.

3. На луче A_1M откладываем отрезок A_1B_1, равный $2\ A_1C$.

4. На луче CB_1 откладываем отрезок CB, равный данному отрезку PQ.

5. Через точку B проведем прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает прямую A_1C в точке A. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ по двум углам ($\angle A = \angle A_1 = \angle hk$, так как $AB \parallel A_1B_1$, $\angle C$ — общий), поэтому $AB:AC = A_1B_1:A_1C = 2:1$. Треугольник ABC — искомый, так как $\angle A = \angle hk$, $BC = PQ$ по построению, $AB:AC = 2:1$.

Исследование (устно). Указанный способ решения задачи показывает, что задача всегда имеет решение. Все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи, подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle A = \angle hk$, $AB:AC = 2:1$), следовательно, их углы соответственно равны, а так как в любом из этих треугольников $BC = PQ$, то все они равны по второму признаку равенства треугольников. Таким образом, задача имеет единственное решение.

Далее в классе можно решить задачи 590, 622.

Дома: вопрос 12 (с. 154); задачи 586, 587, 588.

При наличии времени в конце второго урока рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и медиане, проведенной из вершины этого угла.

Вариант II

Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе прямого угла.

Вариант III (для наиболее подготовленных учащихся)

Постройте ромб по стороне и данному отношению 3 : 4 его диагоналей

На последнем из уроков, отведенных на изучение § 3, рекомендуется рассмотреть материал раздела «Измерительные работы на местности» и решить в классе задачи 581, 582.

В конце урока желательно провести небольшую беседу (10 мин) о подобии произвольных фигур (п. 65).

Дома: вопросы 13, 14 (с. 154); задачи 579, 580.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** теоремы о средней линии треугольника, точке пересечения медиан треугольника и пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 567, 568, 570, 572—577, а также **уметь** с помощью циркуля и линейки делить отрезок в данном отношении и решать задачи на построение типа 586—590.

Замечание. Практическое занятие (лабораторную работу) по проведению измерительных работ на местности можно провести в удобное время в конце учебного года.

§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (3 ч)

Назначение параграфа — познакомить учащихся с элементами тригонометрии, необходимыми для решения прямоугольных треугольников. Здесь вводятся понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, вычисляются их значения для углов 30°, 45° и 60°. Столь раннее введение элементов тригонометрии связано в первую очередь с тем, что они необходимы учащимся на уроках физики уже в самом начале IX класса.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: п. 66 — 1 урок, п. 67 — 1 урок, решение задач — 1 урок.

Весь теоретический материал п. 66 можно дать в виде небольшой лекции, содержание которой закрепляется в классе в процессе решения задач 591 (а, б), 592 (а, в, д), 593 (а).

Дома: вопросы 15, 16, 17 (с. 154); задачи 591 (в, г), 592 (б, г, е), 593 (б).

Решению прямоугольных треугольников рекомендуется посвятить часть первого и часть второго уроков. Полезно к каждой из задач 594—597 составить план решения, например:

№ 594, а.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $AC=b$, $\angle B=\beta$ (рис. 172).

Найти: BC, AB, $\angle A$.

Решение. 1. $\frac{b}{BC}=\operatorname{tg}\beta$, $BC=\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$.

2. $AB=\frac{b}{\sin\beta}$.

3. $\angle A=90°-\beta$.

В класссе можно решить задачи 594 (б), 597 (б), 598 (а).

Дома: задачи 595 (б), 596 (б), 598 (а).

Перед тем как приступить к вычислению значений тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60°, желательно напомнить учащимся свойство прямоугольного треугольника с острым

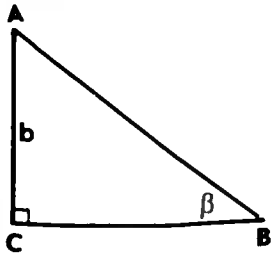


Рис. 172

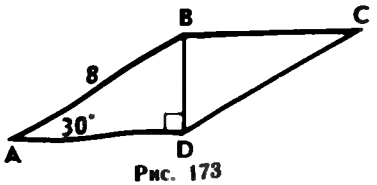


Рис. 173

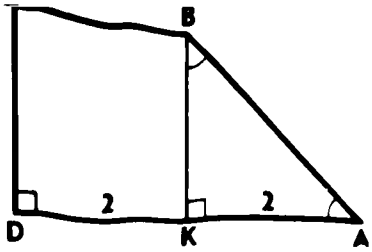


Рис. 174

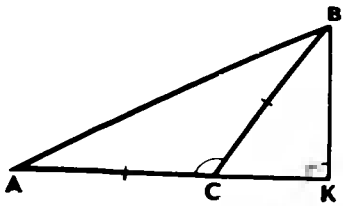


Рис. 175

углом в 30° и признак равнобедренного треугольника. С этой целью можно устно по заготовленным чертежам решить следующие задачи:

1. На рисунке 173 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 30°$, $AB = 8$, $BD \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма.

2. На рисунке 174 $ABCD$ — прямоугольная трапеция, BK — высота, $\angle A = \angle ABK$, $AK = KD = 2$ см. Найдите площадь трапеции.

3. На рисунке 175 $AC = BC$, $\angle ACB = 120°$. Найдите высоту BK треугольника ABC, если $AB = 15$ см.

После заполнения таблицы значений тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60° в классе рекомендуется решить задачи 593 (а) — для значения $\alpha = 30°$, 593 (б) — для значения $\alpha = 45°$ (устно), 601.

Дома: вопрос 18 (с. 154); задачи 600, 602.

Последний урок отводится на решение задач к § 3 и 4 и подготовку к контрольной работе № 4. На этом уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 4 см, боковая сторона равна 6 см, а один из углов трапеции равен 120°. Найдите площадь трапеции.

Вариант II

В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 3 см, большая боковая сторона равна 4 см, а один из углов трапеции равен 150°. Найдите площадь трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

В треугольнике ABC $AC = BC$, $\cos B = \frac{1}{3}$. Найдите отношение высот AM и CN треугольника ABC.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определения синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника; **уметь** доказывать основное тригономет

рическое тождество; **знать** значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30°, 45°, 60°; **уметь** решать задачи типа 591—602.

Контрольная работа 4 (1 ч)

Вариант I

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=90°$, $AB=20$ см, высота AD равна 12 см. Найдите AC и $\cos C$.

2. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна к стороне AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB=12$ см, $\angle A=41°$.

Вариант II

1. Высота BD прямоугольного треугольника ABC равна 24 см и отсекает от гипотенузы AC отрезок DC, равный 18 см. Найдите AB и $\cos A$.

2. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна 3 см и составляет со стороной AD угол в 37°. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна к боковой стороне CD. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 10 см и 8 см.

2. Найдите отношение высот BN и AM равнобедренного треугольника ABC, в котором угол при основании BC равен α.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте признаки подобия треугольников.

2. Найдите отрезки, на которые биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC, если $AB=6$ см, $BC=7$ см, $AC=8$ см.

3. Докажите, что медиана BM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный AC, концы которого лежат на сторонах AB и BC.

Вариант II

1. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.

2. Сходственные стороны двух подобных треугольников соответственно равны 10 см и 24 см, а сумма их периметров равна 119 см. Найдите периметр каждого треугольника.

3. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM:MB=AN:NC=2:3$. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна 75 см^2.

Вариант III

1. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

2. Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC, $S_{BMN}=12$ см^2. Найдите S_{ABC}.

3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, $AC=12$ см, $BD=15$ см. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

Вариант IV

1. Сформулируйте утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

2. Начертите произвольный отрезок и разделите его в отношении 2:3.

3. Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны 6 см и 8 см. Найдите длины отрезков, на которые перпендикуляр, проведенный из вершины D к диагонали AC, делит эту диагональ

Вариант V

1. Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

2. Диагонали ромба равны 12 см и $12\sqrt{3}$ см. Найдите углы ромба.

3. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна большему основанию AD этой трапеции и перпендикулярна к нему. Найдите площадь трапеции, если $AB=3\sqrt{2}$ см, $\angle C=60°$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VII

540. Можно предложить следующую краткую запись решения задачи (рис. 176):

1) $DMFN$ — ромб, следовательно, DF — биссектриса угла CDE, поэтому $\frac{EF}{DE}=\frac{CF}{CD}$ (см. задачу 535).

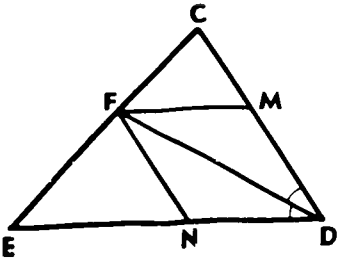


Рис. 176

2) $P_{CDE}=55$ см, $CE=EF+CF=$ $=20$ см, следовательно, $CD+DE=$ $=35$ см.

3) Пусть $CD=x$, тогда

$$DE=35-x,\ \frac{12}{35-x}=\frac{8}{x},$$

откуда $x=14$.

4) $CD=x=14$ см, $DE=35-x=$ $=21$ см.

543. Пусть $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, S и S_1 — площади этих треугольников.

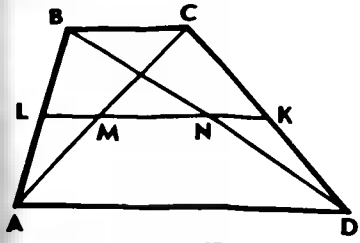


Рис. 177

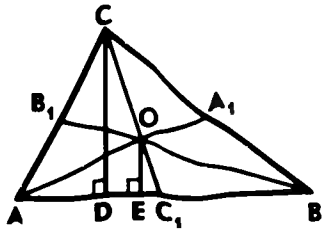


Рис. 178

k — коэффициент подобия, AH и A_1H_1 — высоты, проведенные к соответственным сторонам BC и B_1C_1. Тогда

$$\frac{S}{S_1}=k^2,\ S=\frac{1}{2}BC\cdot AH,\ S_1=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1H_1,\ k=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Из этих равенств получаем:

$$\frac{BC\cdot AH}{B_1C_1\cdot A_1H_1}=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2,\ \text{или}\ \frac{AH}{A_1H_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

569. Возможное оформление решения задачи:

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AD > BC$, M — середина AC, N — середина BD.

Доказать: $MN \parallel AD$, $MN=\frac{1}{2}(AD-BC)$.

Решение. Пусть K — середина стороны CD (рис. 177).

1) MK — средняя линия треугольника ACD, поэтому $MK \parallel AD$, $MK=\frac{1}{2}AD$.

2) NK — средняя линия треугольника BCD, поэтому $NK \parallel BC$, $NK=\frac{1}{2}BC$.

3) Из соотношений $MK \parallel AD$, $NK \parallel BC$ следует, что точки M, N, K лежат на одной прямой, параллельной основаниям трапеции.

4) $MN=MK-NK=\frac{1}{2}(AD-BC)$.

570. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Учесть, что AO и DM — медианы треугольника ABD.

571. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC, CD и OE — высоты треугольников ABC и AOB (рис. 178). Так как $CC_1:OC_1=3:1$, то $CD:OE=3:1$, т. е. $CD=3\cdot OE$. Поэтому $S_{ABC}=3S_{AOB}=3S$.

590. Дано: отрезки PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 179, *а*).

Построить: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $AB=PQ$, $\frac{AC_1}{BC}=\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$.

Решение. Анализ. Задачу будем решать методом подобия (п. 64). Сначала можно построить какой-нибудь прямо-

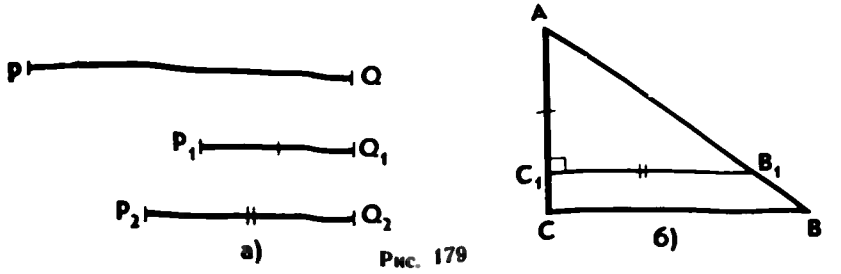


Рис. 179

угольный треугольник AB_1C_1 ($\angle C_1=90°$) так, чтобы $\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$, а затем, используя условие $AB=PQ$, построить искомый треугольник ABC.

Построение. 1. Строим треугольник AB_1C_1 так, чтобы $\angle C_1=90°$, $C_1A=P_1Q_1$, $C_1B_1=P_2Q_2$ (п. 38, задача 1).

2. На луче AB_1 отложим отрезок $AB=PQ$ (рис. 179, *б*).

3. Через точку B проведем прямую, параллельную B_1C_1. Она пересекает луч AC_1 в точке C. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle C=\angle C_1$, так как $BC \parallel B_1C_1$), поэтому

$$\angle C=90°,\ \frac{AC}{BC}=\frac{AC_1}{B_1C_1}=\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}.$$

Сторона AB равна данному отрезку PQ по построению. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Из построения следует, что задача при любых данных отрезках PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 имеет решение. Задача имеет единственное решение. В самом деле, если $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ удовлетворяют условиям задачи, то они подобны, а так как $A_1B_1=PQ$, $A_2B_2=PQ$, то $A_1B_1=A_2B_2$ и, значит, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_2B_2C_2$.

605. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD=a$, $BC=b$ Углы подобных по условию треугольников ABC и ACD обозначим так, как показано на рисунке 180

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 2=\angle 4$. Но AB и CD не параллельны, поэтому $\angle 3 \neq \angle 5$. Из подобия треугольников ABC и ACD следует, что каждый из углов 1, 2 и 3 треугольника ABC равен какому-то из углов 4, 5 и 6 треугольника ACD. Учитывая, что $\angle 2=\angle 4$ и $\angle 3 \neq \angle 5$, получаем, что $\angle 3=\angle 6$, и, следовательно, $\angle 1=\angle 5$. Поэтому $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AC}$, откуда

$$AC^2=AD\cdot BC=ab.$$

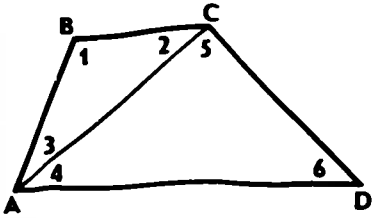


Рис. 180

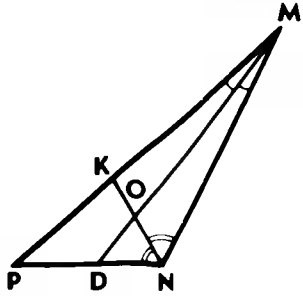


Рис. 181

606. 1) Так как NK — биссектриса треугольника MNP (рис. 181), то $\frac{MK}{KP}=\frac{MN}{NP}$ (задача 535). Пусть $MK=x$, тогда $KP=7-x$, следовательно, $\frac{x}{7-x}=\frac{5}{3}$, откуда

$$x=\frac{35}{8}, \text{ т. е. } MK=\frac{35}{8} \text{ см}.$$

2) Так как MO — биссектриса треугольника KMN, то

$$\frac{KO}{ON}=\frac{MK}{MN}=\frac{35}{8}:5=\frac{7}{8}.$$

609. Провести биссектрису AD_1 треугольника ABC и, сравнив условие задачи с утверждением, доказанным в задаче 535, доказать, что точки D и D_1 совпадают.

614. Пусть $ABCD$ — данная трапеция. $\angle A=90°$, $AC\perp BD$, CK — высота трапеции (рис. 182).

1) Так как AO — высота прямоугольного треугольника ABD, то $\triangle AOD\sim\triangle BAD$ (п. 63, задача 2), поэтому $\angle 1=\angle 2$.

2) $\triangle ADC\sim\triangle BAD$, так как эти треугольники прямоугольные, $\angle 1=\angle 2$. Следовательно,

$$\frac{CD}{DA}=\frac{AD}{AB}, \text{ откуда } CD=\frac{AD^2}{AB}=\frac{16}{6}=2\frac{2}{3} \text{ см}.$$

3) По теореме Пифагора для треугольника ABD

$$DB=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{13} \text{ см}.$$

4) По теореме Пифагора для треугольника BCK

$$BC=\sqrt{CK^2+BK^2}=$$
$$=\sqrt{AD^2+(AB-CD)}=\frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см}.$$

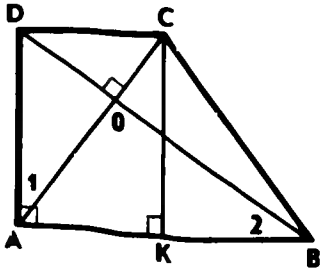


Рис. 182

615*. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AB=a$, $CD=b$, а MN — данный отрезок, проходящий через точку

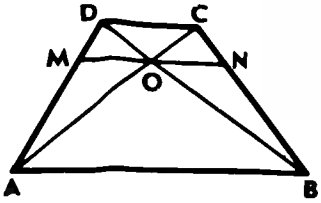


Рис. 183

O пересечения диагоналей AC и BD (рис. 183).

1) $OM \parallel AB$, следовательно, $\triangle DOM \sim \triangle DBA$, откуда $\frac{OM}{AB}=\frac{DM}{AD}$. Аналогично $OM \parallel CD$, следовательно, $\triangle AOM \sim \triangle ACD$, откуда $\frac{OM}{CD}=\frac{AM}{AD}$.

2) Сложив полученные равенства почленно, получим $\frac{OM}{a}+\frac{OM}{b}=1$, откуда $OM=\frac{ab}{a+b}$.

3) Аналогично находим $ON=\frac{ab}{a+b}$, и, следовательно,

$$MN=OM+ON=\frac{2ab}{a+b}.$$

619. Пусть точка B лежит между точками C и D, DM и DN — высоты треугольников ABD и ACD (рис. 184)

1) Так как D — точка биссектрисы угла BAE, то $DM=DN$, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB\cdot DM}{AC\cdot DN}=\frac{AB}{AC}$.

2) $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD\cdot DA}{DC\cdot DA}=\frac{BD}{DC}$. Таким образом,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}, \text{ или } \frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}.$$

620. Пусть M — середина стороны BC, AA_1 — биссектриса данного треугольника ABC (рис. 185).

1) Так как $\triangle ABA_1 \sim \triangle DBM$, то $\frac{AB}{BA_1}=\frac{BD}{BM}$.

2) Аналогично $\triangle CEM \sim \triangle CAA_1$, поэтому $\frac{CE}{CM}=\frac{CA}{CA_1}$.

3) Согласно задаче 535 $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AC}{CA_1}$. Таким образом, $\frac{BD}{BM}=\frac{CE}{CM}$. Но $BM=CM$, поэтому $BD=CE$.

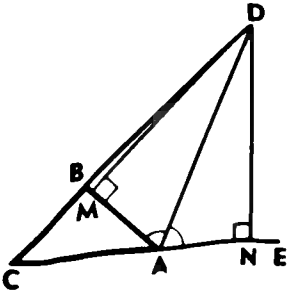


Рис. 184

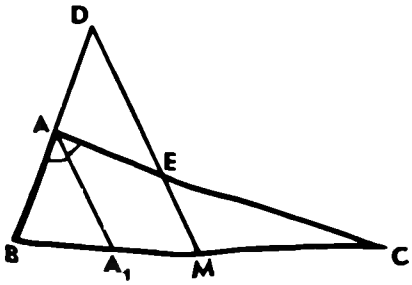


Рис. 185

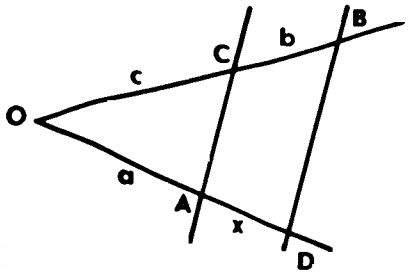


Рис. 186

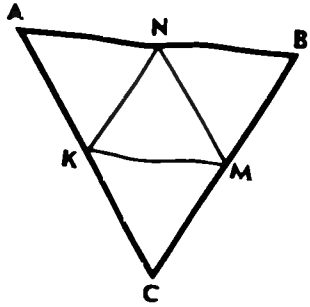


Рис. 187

623. Воспользоваться задачей 556. На рисунке 186 выполнено построение: OA, OC и BC — данные отрезки. $AC \parallel BD$, AD — искомый отрезок.

624. Пусть K, M, N — данные точки (рис. 187). Тогда KM, MN, KN — средние линии искомого треугольника ABC, следовательно,

$$AB \parallel KM,\ BC \parallel KN,\ AC \parallel MN.$$

625. Пусть AB — данная сторона искомого треугольника, O — точка пересечения данных медиан AA_1 и BB_1. Постройте сначала треугольник AOB, учитывая, что $AO:OA_1 = BO:OB_1 = 2:1$.

ГЛАВА VIII

Окружность (17 ч)

Определение окружности и первые сведения об окружностях были даны в VII классе. Назначение данной главы — расширить эти сведения и ввести новые важные понятия, связанные с окружностью. Теоретический материал главы не вызывает обычно затруднений у учащихся, что дает возможность учителю в большей степени, чем раньше, опираться на самостоятельную работу учащихся с учебником.

В то же время рассматриваемая глава содержит большое число важных задач, которые широко используются в дальнейшем. Таковы, например, задачи 659, 664, 670, 704, 716. Им следует уделить особое внимание.

По первому и второму вариантам тематического планирования учебного материала на изучение темы «Окружность» отводится одно и то же число часов.

§ 1. Касательная к окружности (3 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности, ввести понятие касательной, рассмотреть ее свойство и признак, а также свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: взаимное расположение прямой и окружности — 1 урок; касательная к окружности — 1 урок; решение задач — 1 урок.

Перед тем как приступить к изучению п. 68 «Взаимное расположение прямой и окружности», желательно напомнить учащимся понятия расстояния между двумя точками и расстояния от точки до прямой (п. 37). С этой целью можно решить устно следующие задачи по заранее заготовленным чертежам:

1. Радиус окружности равен 5 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей хорду, равную 8 см

2. Найдите расстояние от точки A до ближайшей к ней точки окружности с центром O радиуса r, если: а) $OA=12$ см, $r=8$ см б) $OA=6$ см, $r=8$ см.

3. Докажите, что на рисунке 188, *а, б* $AB<AB_1$.

Весь материал п. 68 рекомендуется изложить компактно, в виде небольшой лекции. При обосновании утверждения о том, что прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек, полезно сделать рисунок

В классе рекомендуется решить задачи 631 (а, г, д) — устно, 632.

Дома: вопросы 1, 2 (с. 178—179); задачи 631 (б, в) — устно, 633.

Перед изучением свойств касательной к окружности и отрезков касательных, проведенных из одной точки, желательно проверить усвоение предыдущего материала в процессе устного решения задач типа:

4. По данным рисунка 189 укажите взаимное расположение а) прямой AB и окружности радиуса 1 с центром C; б) прямой

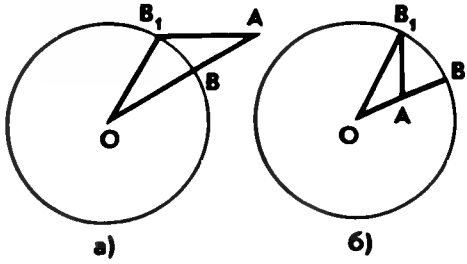


Рис. 188

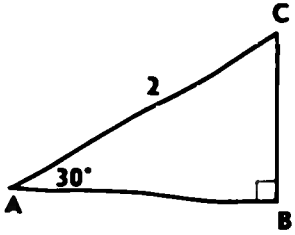


Рис. 189

BC и окружности радиуса 2 с центром A; в) прямой AC и окружности радиуса BC с центром B.

Весь теоретический материал п. 69 рекомендуется дать на одном уроке, причем свойство касательной и свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки, можно предложить учащимся доказать самостоятельно в классе, а признак касательной (вторую теорему п. 69) — дома.

Следующий урок отводится на решение задач к § 1.

В классе рекомендуется решить задачи 635, 639, 646 (д), 636, 645, 648 (а).

Дома: вопросы 3—7 (с. 179); задачи 634, 638, 640, 648 (б).

На последнем уроке, посвященном изучению § 1, рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

1. KM и KN — отрезки касательных, проведенных из точки K к окружности с центром O. Найдите KM и KN, если $OK = 12$ см, $\angle MON = 120°$.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD касается окружности с центром A и радиусом, равным OC.

Вариант II

1. Найдите отрезки касательных AB и AC, проведенных из точки A к окружности радиуса r, если $r = 9$ см, $\angle BAC = 120°$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Докажите, что прямая BD касается окружности с центром C и радиусом, равным AD.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 190 прямые AB, AC, MN — касательные к окружности. Найдите отрезки касательных AB и AC, если периметр треугольника AMN равен 24 см.

2. Отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла C. Найдите радиус окружности с центром A, которая касается прямой CD, если $CD = 4$ см, $AB = 12$ см.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности, определение касательной, свойство и признак касательной; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 631, 633—636, 639—643, 648.

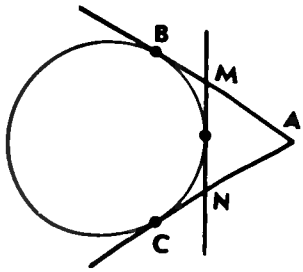


Рис. 190

§ 2. Центральные и вписанные углы (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия градусной меры дуги окружности, центрального и вписанного углов, доказать теоремы об измерении вписанных углов и об отрезках пересекающихся хорд и показать, как они используются при решении задач.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: градусная мера окружности — 1 урок; теоремы о вписанном угле и об отрезках пересекающихся хорд — 2 урока; решение задач — 1 урок.

Материал, связанный с понятием градусной меры дуги, рекомендуется дать в виде короткой лекции (15 мин). Желательно, чтобы в тетрадях учащихся остался конспект этой лекции.

На рисунке 191:

$\angle AOC$, $\angle BOC$, $\angle AOB$ — центральные углы;

$\smile AB$ и $\smile ACB$ — полуокружности;

$\smile AC$ и $\smile BC$ меньше полуокружности;

$\smile BAC$ и $\smile ABC$ больше полуокружности;

$$\smile AC = \angle AOC;\ \smile BC = \angle BOC;\ \smile AB = \smile ACB = \angle AOB;$$

$$\smile BAC = 360° - \angle BOC;\ \smile ABC = 360° - \angle AOC;$$

$$\smile AC + \smile ABC = \angle AOC + (360° - \angle AOC) = 360°.$$

В классе рекомендуется решить задачи 650 (а, в) — устно, 651 (а), 716.

Дома: вопросы 8, 9, 10 (с. 179); задачи 650 (б), 651 (б), 652.

Перед тем как приступить к изучению п. 71 «Теорема о вписанном угле», целесообразно провести подготовительную работу (устно, по заранее заготовленным чертежам):

1. На рисунке 192 изображена окружность с центром O, $\smile BC = 70°$. Найдите углы треугольника ABO.

2. На рисунке 193 изображена окружность с центром O, KM — биссектриса угла AKB. Докажите, что OM — биссектриса угла AOB.

При доказательстве теоремы о вписанном угле учитель может разобрать только первый случай возможного расположения центра окружности относительно сторон угла. Доказательство

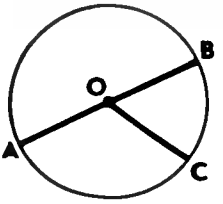


Рис. 191

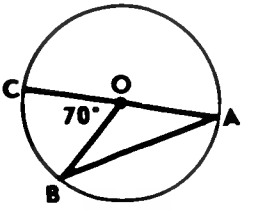


Рис. 192

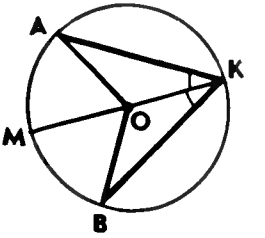


Рис. 193

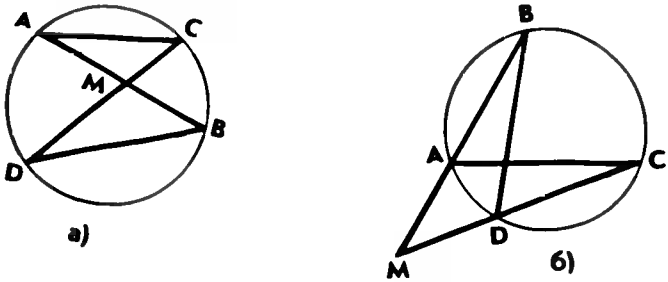


Рис. 194

для двух других случаев после предварительного обсуждения идеи, на которой оно основано, а также обоснование двух следствий можно предложить учащимся провести самостоятельно.

Перед доказательством теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд желательно повторить первый признак подобия треугольников и подготовить учащихся к восприятию теоремы с помощью следующей задачи:

3. По данным рисунка 194, *а, б* докажите, что $\triangle AMC \backsim \backsim \triangle DMB$.

В классе на этих уроках рекомендуется решить задачи 653 (устно), 654 (устно), 655, 656, 658, 659, 661, 662, 664, 666 (а, б), 668, 670, 671 (а).

Дома: вопросы 11, 12, 13, 14 (с. 179); задачи 657, 660, 663, 666 (в), 667, 669, 671 (б), 672.

Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, полезно самостоятельно решить задачи 673, 718, 719.

На последнем уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

1. Точки A, B, C лежат на окружности с центром O (рис. 195), $\angle AOB = 80°$, $\smile AC : \smile BC = 2:3$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Хорды AB и CD пересекаются к точке K, причем хорда AB делится точкой K на отрезки, равные 10 см и 6 см. На какие отрезки точка K делит хорду CD, если CD больше AB на 3 см?

Вариант II

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O (рис. 195), $\angle ABC = 80°$, $\smile BC : \smile AB = 3:2$. Найдите углы треугольника AOB.

2. Хорды MN и KL пересекаются в точке A, причем хорда MN делится точкой A на отрезки, равные 1 см и 15 см. На какие отрезки точка A делит хорду KL, если KL в два раза меньше MN?

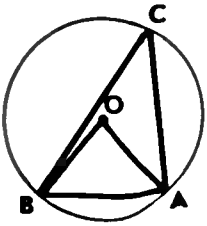


Рис. 195

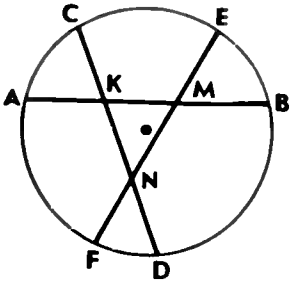


Рис. 196

Вариант III
(для более подготовленных учащихся)

1. Окружность с центром O касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC соответственно в точках K, M, N, $\smile KM : \smile MN : \smile NK = 6:5:7$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Хорды AB, CD, EF окружности с центром O попарно пересекаются в точках K, M и N, как показано на рисунке 196, причем каждая хорда делится этими точками на равные части. Найдите периметр треугольника KMN, если $AB = 12$ см.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, какой угол называется центральным и какой вписанным, как определяется градусная мера дуги окружности, теорему о вписанном угле, следствия из нее и теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд; **уметь** доказывать эти теоремы и применять при решении задач типа 651—657, 659, 666—669

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника (3 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку и на их основе доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Утверждение о пересечении медиан треугольника в одной точке было доказано в предыдущей главе. Таким образом, результаты данного параграфа дают возможность ввести понятие четырех замечательных точек треугольника.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: свойство биссектрисы угла — 1 урок; понятие серединного перпендикуляра к отрезку и теорема о серединном перпендикуляре — 1 урок; теорема о точке пересечения высот треугольника — 1 урок

Перед тем как сформулировать свойство биссектрисы угла, желательно устно провести подготовительную работу по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 197 луч OC — биссектриса угла AOB, $OA = OB$ Докажите, что $S_{AOC} = S_{BOC}$.

2. Прямая m пересекает отрезок AB в его середине. Докажите, что концы отрезка AB равноудалены от прямой m.

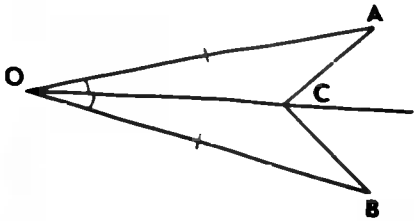


Рис. 197

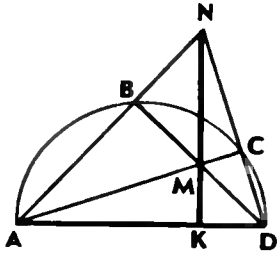


Рис. 198

Доказательство теоремы о биссектрисе угла и следствия из нее (биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке) рекомендуется изложить самому учителю в виде небольшой лекции.

В классе можно решить задачи 674, 675, 676 (а).

Дома: вопросы 15, 16 (с. 179); задачи 676 (б), 678 (а).

Введение понятия серединного перпендикуляра к отрезку можно предварить устной задачей по заранее заготовленному чертежу:

3. Прямая KM перпендикулярна к стороне AB треугольника ABC и делит ее пополам. Точка M лежит на стороне AC. Докажите, что $AC > BC$.

Доказательство теоремы о серединном перпендикуляре к отрезку и следствия из нее также желательно изложить учителю самому. Усвоение материала можно закрепить в процессе решения в классе задач 679 (б), 680, 682.

Дома: вопросы 17—19 (с. 179); задачи 679 (а), 681, 686.

Теорему о точке пересечения высот треугольника учителю рекомендуется прокомментировать по заранее заготовленному чертежу, а детальное доказательство предложить учащимся провести дома самостоятельно или с помощью учебника.

Для лучшего усвоения теоремы о пересечении высот треугольника можно предложить учащимся решить задачу:

4. По данным рисунка 198, где дуга ABD — полуокружность, доказать, что прямая MN перпендикулярна к диаметру AD.

Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, можно предложить для домашней работы следующую задачу:

5. На рисунке 199 изображена полуокружность с концами A и B и отмечена точка K. С помощью одной линейки постройте прямую, проходящую через точку K и перпендикулярную к прямой AB.

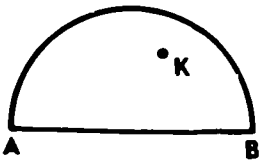


Рис. 199

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи (по всему материалу § 3) 677, 684, 687.

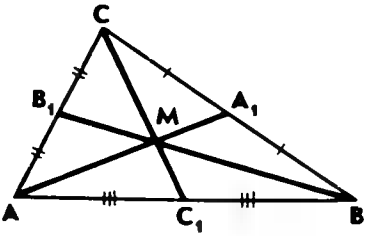


Рис. 200

Дома: вопрос 20 (с. 179); задачи 688, 720.

Желательно, чтобы в тетрадях у учащихся были сделаны рисунки, характеризующие четыре замечательные точки треугольника:

Рис. 200: M — точка пересечения медиан треугольника ABC; $AM:MA_1=BM:MB_1=CM:MC_1=2:1$.

Рис. 201: O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Рис. 202: K — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC; $AK=BK=CK$.

Рис. 203, *а, б, в*: H — точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника ABC.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** теоремы о биссектрисе угла и о серединном перпендикуляре к отрезку, их следствия, а также теорему о пересечении высот треугольника; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 674—679, 682—686.

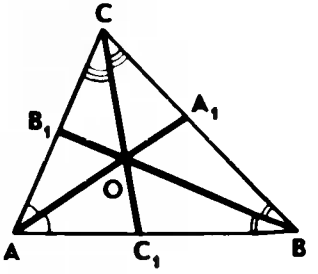


Рис. 201

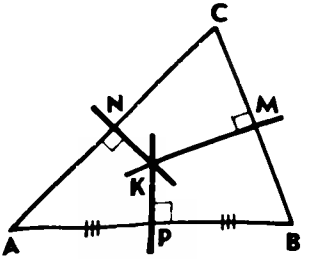


Рис. 202

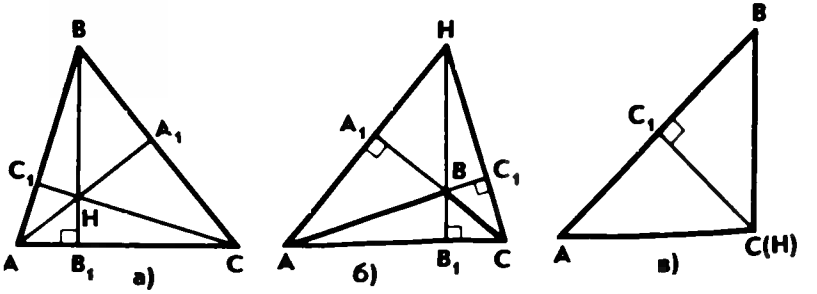


Рис. 203

§ 4. Вписанная и описанная окружности (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника окружностей, доказать теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника, ознакомить учащихся со свойствами вписанного и описанного четырехугольников.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: вписанная окружность — 2 урока; описанная окружность — 2 урока.

Теоретический материал п. 74 до замечания 2 рекомендуется изложить на первом уроке в виде небольшой лекции после устной подготовительной работы по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 204 окружность с центром O касается сторон угла MKN в точках M и N. Найдите $\angle MKN$ и расстояние MN, если $OM=\sqrt{3}$ см, $KM=3$ см.

2. На рисунке 205 три касательные к окружности с центром O пересекаются попарно в точках A, B и C. Найдите углы треугольника ABC, если в треугольнике AOC $\angle A=20°$ и $\angle O=120°$.

3. Стороны угла A касаются окружности радиуса r с центром O. а) Найдите OA, если $r=5$ см, $\angle A=60°$; б) Найдите r, если $OA=14$ дм, $\angle A=90°$.

Для усвоения материала, изложенного в лекции, в классе рекомендуется решить задачи 701 (для остроугольного треугольника), 689, 691.

Дома: вопросы 21, 22 (с. 179—180); задачи 701 (для прямоугольного и тупоугольного треугольников), 637, 690, 693 (а).

Перед доказательством свойства описанного четырехугольника желательно также провести устную подготовительную работу:

4. По данным рисунка 206 найдите периметр треугольника ABC.

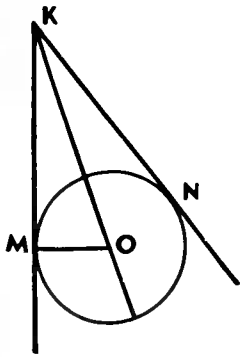


Рис. 204

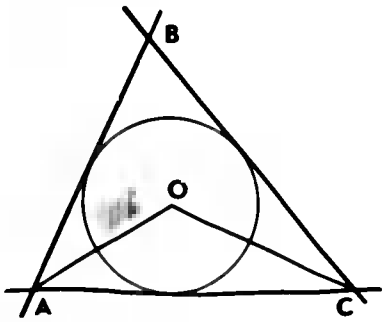


Рис. 205

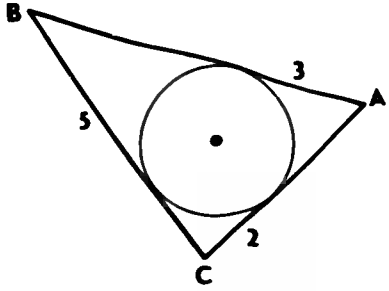


Рис. 206

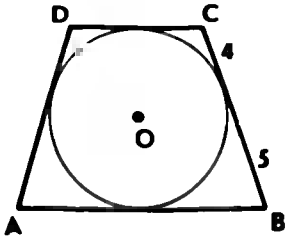


Рис. 207

5. На рисунке 207 $ABCD$ — равнобедренная трапеция. По данным рисунка найдите ее основания AB и CD.

Свойство описанного четырехугольника и решение задачи 697, утверждение которой используется в дальнейшем, учитель должен подробно объяснить учащимся. Затем в классе можно решить задачи 695 (устно), 698.

Дома: вопрос 23 (с. 180); задачи 641, 696, повторить решение задачи 697. Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, полезно разобрать дома решение задачи 724. Отметим, что в учебнике приведено краткое решение задачи 724, в котором не пояснено, почему окружность с центром O касается именно сторон AD, AB и BC четырехугольника $ABCD$. Ясно, что эта окружность касается лучей AB и BA, поэтому точка касания с прямой AB лежит на отрезке AB. Далее, эта окружность касается лучей BC и AD. Учитывая равенство $AB+CD=$ $=BC+AD$, следует, что точки касания с лучами BC и AD лежат на отрезках BC и AD. Это утверждение легко доказать методом от противного.

При наличии времени в конце второго урока можно провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 2 см. Найдите периметр треугольника и его площадь.

Вариант II

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см, а сумма катетов равна 17 см. Найдите периметр треугольника и его площадь.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Докажите, что радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию с основаниями a и b, равен $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

Теоретический материал п. 75 до замечания 2 рекомендуется изложить в форме лекции, а затем в классе решить задачи 711 (для тупоугольного треугольника), 702 (а), 704 (а, б), 706.

Дома: вопросы 24, 25 (с. 180); задачи 711 (для прямоугольного и равностороннего треугольников), 702 (б), 705 (б).

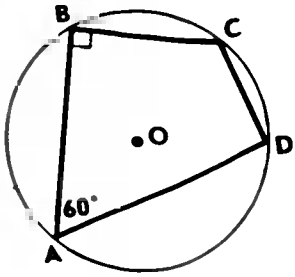


Рис. 208

Перед рассмотрением замечания 2 (свойство вписанного четырехугольника) желательно провести устную работу по заготовленным заранее чертежам:

6. Задача 705 (а).

7. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, причем $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 2:3:4$. Найдите углы треугольника ABC.

8. По данным рисунка 208 найдите все углы вписанного четырехугольника $ABCD$.

Доказательство свойства вписанного четырехугольника можно предложить учащимся разобрать самостоятельно по учебнику (хорошо успевающим — без помощи учебника), а затем решить в классе задачи 708 (а), 710.

Дома: вопрос 26 (с. 180); задачи 708 (б), 709. Учащимся, интересующимся геометрией, предложите решение задачи 729.

На последнем уроке проведите *самостоятельную работу*:

Вариант I

Центр описанной окружности лежит на высоте равнобедренного треугольника и делит высоту на отрезки, равные 5 см и 13 см. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант II

Меньший из отрезков, на которые центр описанной около равнобедренного треугольника окружности делит его высоту, равен 8 см, а основание треугольника равно 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Найдите площадь равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона $4\sqrt{5}$ см, а радиус описанной окружности 5 см.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, какая окружность называется вписанной в многоугольник и какая описанной около многоугольника, теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника, свойства вписанного и описанного четырехугольников; **уметь** их доказывать и применять при решении задач типа 689—696, 701—707, 709—711; **знать** утверждения задач 724, 729 и **уметь** их применять при решении задач типа 698—700, 708.

Решение задач (2 ч)

Основная цель этих уроков — продолжить отработку навыков решения задач по теме «Окружность» и подготовить учащихся к контрольной работе. Задачи к этим урокам подбираются из ранее нерешенных задач к параграфам 1—4, а также из дополнительных задач к главе VIII, например 642, 643, 644. 665, 683, 685, 694, 703, 707, 721, 728, 730.

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Вариант I

1. Через точку A окружности проведены диаметр AC и две хорды AB и AD, равные радиусу этой окружности. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD, AD.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона равна 15 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

Вариант II

1. Отрезок BD — диаметр окружности с центром O. Хорда AC делит пополам радиус OB и перпендикулярна к нему. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD, AB.

2. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 9 см, а само основание равно 24 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 209 MA и MB — секущие, AC и BD — хорды окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB = \angle AKB + \angle AMB$

2. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD, описанной около окружности с центром O и радиусом 3 см, равна 60 см^2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OCD.

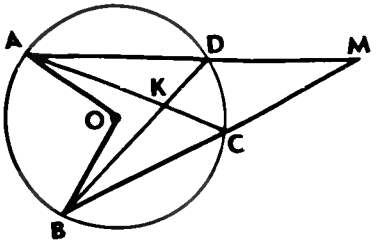


Рис. 209

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность? Сформулируйте свойство и признак касательной.

2. Отрезок BD — высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. На какие части окружность с центром B и радиусом BD делит боковую сторону треугольника, если $AB=13$ см, $BD=5$ см?

3. На рисунке 210 изображен прямоугольный треугольник ABC, стороны которого касаются окружности радиуса 1 см. На какие отрезки точка касания делит гипотенузу треугольника, равную 5 см?

Вариант II

1. Какой угол называется вписанным? Сформулируйте теорему о вписанном угле.

2. Вершины треугольника со сторонами 2 см, 5 см и 6 см лежат на окружности. Докажите, что ни одна из сторон треугольника не является диаметром этой окружности.

3. На рисунке 211 изображена окружность с центром O, AB — касательная, а AC — секущая этой окружности. Найдите углы треугольника ABC, если $\smile BD=62°$.

Вариант III

1. Сформулируйте теорему об отрезках пересекающихся хорд.

2. Хорды KL и MN окружности пересекаются в точке A. Найдите AK и AL, если $AM=2$ дм, $AN=6$ дм, $KL=7$ дм.

3. На рисунке 212 изображена окружность с центром O, AC — диаметр, а BC — касательная к этой окружности. На какие части отрезок AB делится точкой D, если $AC=20$ см, $BC=15$ см?

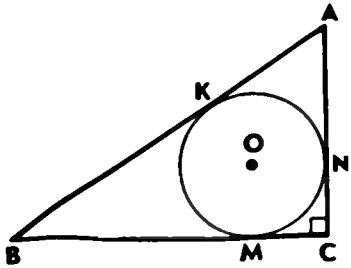


Рис. 210

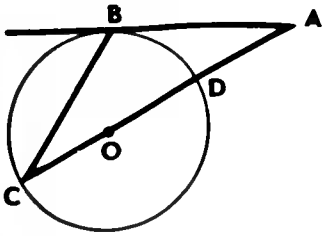


Рис. 211

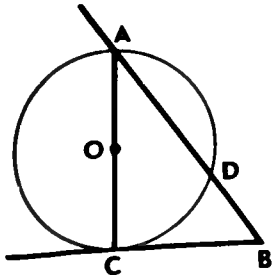


Рис. 212

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему об окружности, вписанной в треугольник.

2. Впишите окружность в данный прямоугольный треугольник.

3. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, боковая сторона равна 17 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Вариант V

1. Сформулируйте утверждение о свойстве описанного четырехугольника Верно ли обратное утверждение?

2. Найдите площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, если боковые стороны этой трапеции равны 10 см и 16 см.

3. Площадь четырехугольника $ABCD$, описанного около окружности радиуса 5 дм, равна 90 дм^2. Найдите стороны CD и AD этого четырехугольника, если $AB=9$ дм, $BC=10$ дм.

Вариант VI

1. Сформулируйте теорему об окружности, описанной около треугольника.

2. Постройте окружность, описанную около данного тупоугольного треугольника.

3. Найдите площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см.

Вариант VII

1. Сформулируйте утверждение о свойстве вписанного четырехугольника Верно ли обратное утверждение?

2. Площадь прямоугольника, вписанного в окружность, равна 48 см^2. Найдите радиус окружности, если одна из сторон прямоугольника на 2 см больше другой.

3 На рисунке 213 AM и CM — биссектрисы углов A и C треугольника ABC, AN и CN — биссектрисы внешних углов при вершинах A и C этого треугольника. Докажите, что около четырехугольника $AMCN$ можно описать окружность.

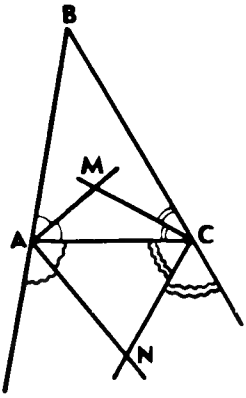


Рис. 213

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VIII

632. Пусть O — центр данной окружности радиуса r, p — произвольная прямая, проходящая через точку A Если $O \in p$, то прямая p пересекает окружность в двух

точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Если $O \notin p$, то проведем перпендикуляр OB к прямой p (рис. 214). Так как OB — расстояние от точки O до прямой p, то $OB \leqslant OA$ (см. п. 37). Но $OA < r$ по условию, следовательно, $OB < r$, и поэтому прямая p — секущая.

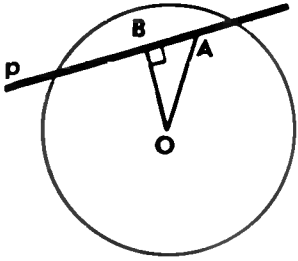


Рис. 214

637. Проведем радиус OC данной окружности (рис. 215).

1. Так как угол COD — внешний угол равнобедренного треугольника AOC ($OA = OC$) и $\angle A = 30°$, то $\angle COD = 60°$.

2. По свойству касательной $OC \perp CD$. В прямоугольном треугольнике OCD $\angle O = 60°$, поэтому $\angle D = 30°$.

3. Треугольник ACD равнобедренный, так как $\angle A = \angle D = 30°$.

645. Провести радиус OK, где K — точка касания, и воспользоваться задачей 385.

659. Пусть AB и CD — параллельные хорды (рис. 216). Провести хорду BC и воспользоваться теоремой о вписанном угле.

660. Пусть M — данная точка, $\smile AB > \smile CD$ (рис. 217). Проведем хорду BC.

1. Так как $\smile AB = 100°$, то $\angle ACB = 50°$.

2. В треугольнике MBC $\angle M = 32°$, а внешний угол ACB при вершине C равен 50°, поэтому $\angle B = 50° - 32° = 18°$.

3. $\smile CD = 2 \cdot 18° = 36°$.

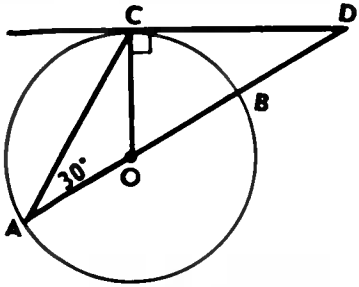


Рис. 215

662. Провести хорду AC и сначала найти $\angle A$ и $\angle C$ в треугольнике ACE.

668. Пусть AB — диаметр окружности. CD — перпендикуляр, прове-

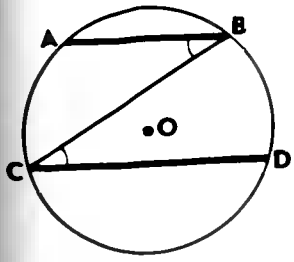


Рис. 216

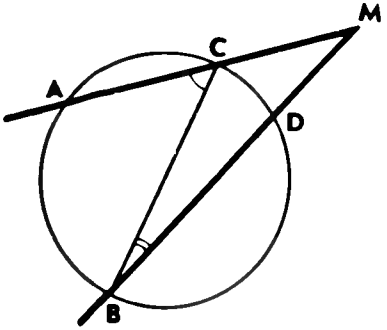


Рис. 217

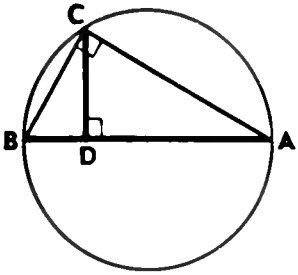


Рис. 218

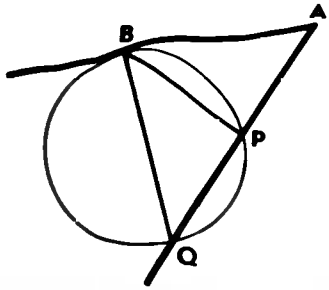


Рис. 219

денный из точки C окружности к прямой AB (рис. 218). Проведем хорды AC и BC.

1. Угол ACB вписанный и опирается на полуокружность, следовательно, $\angle ACB = 90°$.

2. Так как CD — высота прямоугольного треугольника ABC, то $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$ (п. 63, свойство 1°)

670. 1. $\angle ABP = \angle AQB$, так как $\angle ABP = \frac{1}{2} \smile BP$ (задача 664) и $\angle AQB = \frac{1}{2} \smile BP$ (рис. 219).

2. $\triangle ABP \backsim \triangle AQB$ по двум углам (угол A общий и $\angle ABP = \angle AQB$). Следовательно, $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$, откуда $AB^2 = AP \cdot AQ$.

675. Пусть O_1 и O_2 — центры двух данных окружностей, m — их общая касательная в точке A (рис. 220).

1. Точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла O (следствие из первой теоре-

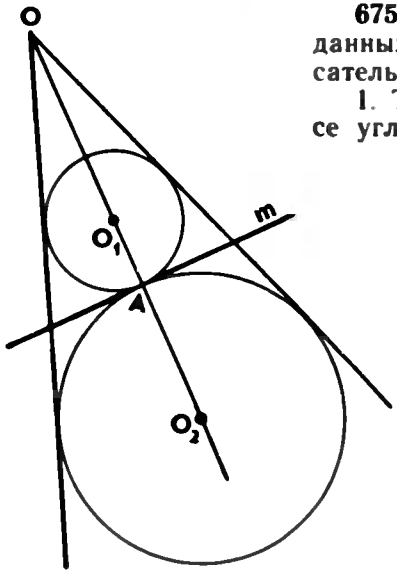


Рис. 220

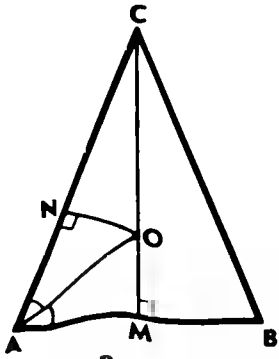


Рис. 221

мы п. 69), и, значит, точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

2. $O_1A \perp m$ и $O_2A \perp m$ (свойство касательной), следовательно, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Таким образом, точки A, O, O_1, O_2 лежат на одной прямой, и, значит, точки O_1 и O_2 лежат на прямой OA.

680. а) Воспользоваться теоремой о серединном перпендикуляре.

б) Сначала доказать, что треугольники ACD и ABD равнобедренные.

687. Искомая точка является точкой пересечения серединного перпендикуляра m к отрезку AB и прямой a. По условию точки A и B лежат по одну сторону от прямой a, поэтому прямые m и a либо пересекаются, либо параллельны, и тогда $AB \perp a$. В первом случае задача имеет единственное решение, а во втором случае она не имеет решений.

689. Пусть $\triangle ABC$ — данный равнобедренный треугольник (рис. 221). $AC = BC = 13$ см, $AB = 10$ см. Центр O вписанной окружности искомого радиуса r лежит на биссектрисе CM треугольника ABC, а так как $CM \perp AB$ (свойство равнобедренного треугольника), то вписанная окружность касается отрезка AB в точке M. Поэтому $OM = r$.

Далее полезно **обсудить** с учащимися различные способы решения этой задачи:

Способ 1. 1. $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

2. M и N — точки касания, следовательно, $AN = AM = 5$ см, откуда $CN = AC - AN = 8$ см.

3. В $\triangle ACM$: $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 12$ см.

4. В $\triangle CON$: $CO^2 = CN^2 + ON^2$, т. е. $(12 - r)^2 = 8^2 + r^2$, откуда $r = 3\frac{1}{3}$ см.

Способ 2. 1. В $\triangle ACM$: $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см,

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 12 \text{ см}.$$

2. Отрезок AO — биссектриса треугольника AMC (так как O — центр вписанной окружности), поэтому $\frac{OM}{OC} = \frac{AM}{AC}$ (задача 535), или $\frac{r}{12 - r} = \frac{5}{13}$, откуда $r = 3\frac{1}{3}$ см.

Замечание. После решения задачи 697 можно вернуться к задаче 689 и показать еще один способ ее решения.

Способ 3. 1. В $\triangle ACM$: $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см,

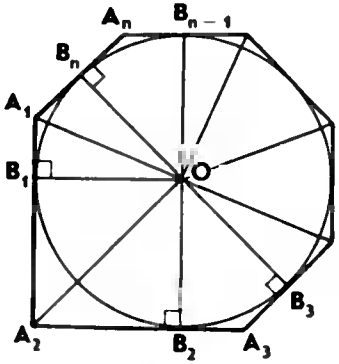


Рис. 222

$CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=12$ см, следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CM=60 \text{ см}^2.$$

2. $S_{ABC}=pr$, где $p=\frac{2AC+AB}{2}=$ $=18$ см, откуда $r=\frac{S}{p}=3\frac{1}{3}$ см.

697. Пусть окружность радиуса r с центром O вписана в многоугольник $A_1A_2...A_n$ и пусть B_1, B_2, ..., B_n — точки касания (рис. 222). Тогда $OB_1=OB_2=...=OB_n=r$ и $OB_1\perp A_1A_2$, $OB_2\perp A_2A_3$, ..., $OB_n\perp A_nA_1$ (по свойству касательной). Очевидно,

$$S_{A_1A_2...A_n}=S_{A_1OA_2}+S_{A_2OA_3}+...+S_{A_nOA_1}=$$
$$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot r+\frac{1}{2}A_2A_3\cdot r+...+\frac{1}{2}A_nA_1\cdot r=$$
$$=\frac{1}{2}r(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=\frac{1}{2}Pr=pr,$$

где P — периметр, p — полупериметр описанного многоугольника.

707. Дано: $\triangle ABC$, $AC=BC=8$ см, $\angle ACB=120°$.

Найти: $2R$, где R — радиус описанной окружности.

Решение: Центр O описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров DD_1 и HH_1 к сторонам AC и AB треугольника ABC (рис. 223). Так как треугольник ABC равнобедренный, то прямая HH_1 проходит через вершину C и CH — биссектриса угла ACB.

В прямоугольном треугольнике CDO $\angle OCD=\frac{1}{2}\angle ACB=60°$, поэтому $\angle COD=30°$, $CO=2CD=AC=8$ см. Итак, $R=CO=8$ см, и, значит, диаметр описанной окружности равен 16 см.

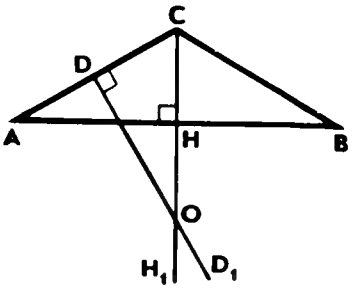


Рис. 223

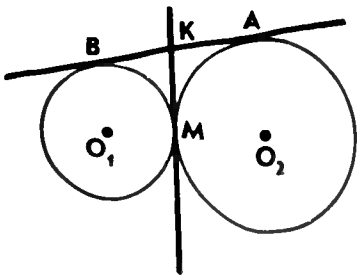


Рис. 224

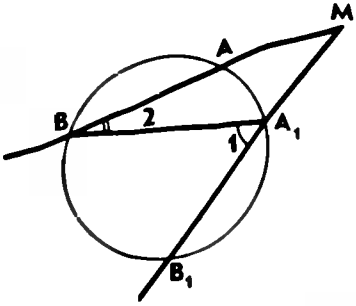


Рис. 225

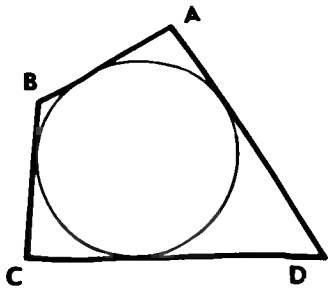


Рис. 226

714*. Пусть K — точка пересечения общей касательной, проходящей через точку M, и прямой AB (рис. 224). Тогда $KA=KM$ и $KB=KM$ (по свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки). Таким образом, точки A, B, M одинаково удалены от точки K и, следовательно, лежат на одной окружности с центром K, для которой AB является диаметром.

719. Пусть MB и MB_1 — секущие, проходящие через точку M, лежащую вне окружности (рис. 225). Проведем хорду A_1B.

1. $\angle 1$ — внешний угол треугольника A_1BM, поэтому $\angle 1=\angle 2+\angle M$, откуда $\angle M=\angle 1-\angle 2$.

2. По теореме о вписанном угле $\angle 1=\frac{1}{2}\smile BB_1$, $\angle 2=\frac{1}{2}\smile AA_1$, следовательно,

$$\angle M=\frac{1}{2}\smile BB_1-\frac{1}{2}\smile AA_1=\frac{1}{2}(\smile BB_1-\smile AA_1).$$

722. Пусть $ABCD$ — данный описанный четырехугольник (рис. 226), p — его полупериметр. Сначала выразим стороны четырехугольника $ABCD$ через p.

1. Пусть $AB=x$, $BC=y$. Тогда $CD=\frac{3}{2}x$, $AD=2y$,

$$x+y+\frac{3}{2}x+2y=2p,$$

или

$$\frac{5}{2}x+3y=2p. \qquad (1)$$

2. Согласно свойству описанного четырехугольника (п. 74) $AB+CD=AD+BC$, т. е.

$$\frac{5}{2}x=3y. \qquad (2)$$

3. Решая систему уравнений (1) и (2), находим $x=\frac{2}{5}p$, $y=\frac{1}{3}p$. Таким образом,

$$AB=\frac{2}{5}p,\ BC=\frac{1}{3}p,\ CD=\frac{3}{5}p,\ AD=\frac{2}{3}p.$$

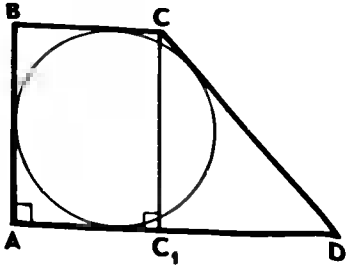


Рис 227

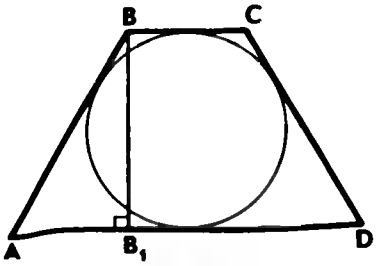


Рис 228

4. Так как $S=pr$ (задача 697), то $p=\frac{S}{r}$. Итак,

$$AB=\frac{2}{5}\cdot\frac{S}{r},\ BC=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{r},\ CD=\frac{3}{5}\cdot\frac{S}{r},\ AD=\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{r}.$$

725. Пусть $ABCD$ — данная прямоугольная трапеция с основаниями $AD=a$ и $BC=b$, $\angle A=90°$, r — радиус вписанной окружности (рис. 227).

1. Согласно свойству описанного четырехугольника (п. 74)

$$AB+CD=AD+BC=a+b.$$

Но $AB=2r$, поэтому $CD=a+b-2r$.

2. Если CC_1 — высота трапеции, то по теореме Пифагора

$$CD^2=CC_1^2+C_1D^2,$$

или

$$(a+b-2r)^2=(2r)^2+(a-b)^2.$$

Отсюда получаем $r=\frac{ab}{a+b}$.

726. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной окружности, AM — медиана треугольника. Если точка O лежит на медиане AM и не совпадает с точкой M, то прямая MA — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому AM также высота треугольника ABC, и, значит, треугольник ABC равнобедренный (задача 110). Если точки O и M совпадают, то BC — диаметр описанной окружности, поэтому $\angle A=90°$ и треугольник ABC — прямоугольный.

731. Учесть, что биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны, и воспользоваться задачей 729

735. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями $AD=a$, $BC=b$, $a>b$ (рис. 228), r — радиус вписанной окружности.

1. Согласно задаче 710 трапеция равнобедренная, т. е. $AB=CD$.

2. Согласно свойству описанного четырехугольника (п. 74) $AB+CD=AD+BC=a+b$, поэтому $AB=\frac{a+b}{2}$.

3. Если BB_1 — высота трапеции, то $BB_1=2r$, $AB_1=\frac{a-b}{2}$.

По теореме Пифагора для треугольника ABB_1 имеем:

$$AB^2=AB_1^2+BB_1^2, \text{ или } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+4r^2,$$

откуда получаем $r=\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

736. Центр искомой окружности есть точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a.

737. Учесть, что если данная точка A расположена в полосе между данными параллельными прямыми, то задача имеет два решения, а если точка A лежит вне этой полосы, то задача не имеет решения. В первом случае воспользоваться указанием, данным в учебнике.

ГЛАВА IX

Векторы (12 ч)

Понятие вектора и действия над векторами вводятся в этой главе так, как это принято в физике. Величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, называются в физике векторными и изображаются отрезками со стрелкой. Поэтому геометрический вектор вводится как направленный отрезок, т. е. отрезок, на котором дано направление от одного конца к другому.

Следует иметь в виду, что изучение векторов в курсе геометрии преследует две цели: подготовить учащихся к восприятию действий над векторными величинами в физике и показать, как можно использовать векторы при решении геометрических задач. Поэтому основное внимание следует уделить не обоснованиям формул и теорем векторной алгебры, а умению выполнять действия над векторами и демонстрации возможностей векторного метода в геометрии. По I варианту тематического планирования учебного материала эта глава изучается в IX классе.

§ 1. Понятие вектора (2 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия вектора, его длины, коллинеарных и равных векторов; научить учащихся изображать и обозначать векторы, откладывать от любой точки плоскости вектор, равный данному.

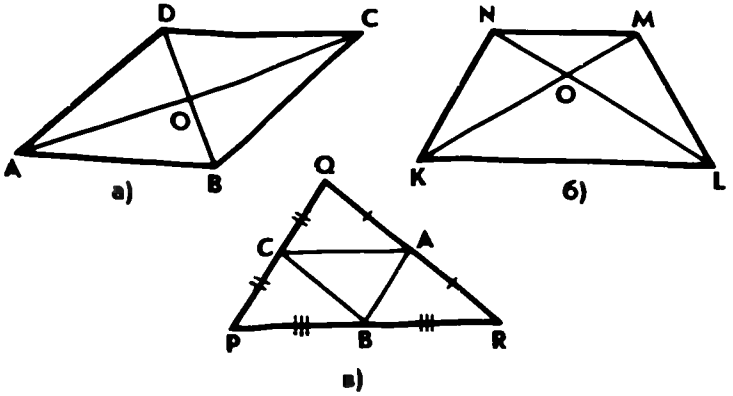


Рис. 229

Материал пп 76, 77 рекомендуется изложить в виде небольшой лекции с применением разнообразных иллюстративных средств (графопроектор, плакаты и т. п.). Особое внимание следует уделить физическим примерам векторных величин, а также примеру, подводящему к определению равенства векторов.

В классе можно выполнить практические задания 738, 739, 740 (а), 742 и решить задачи 744 (устно), 745 (выборочно), 746 (устно по заготовленному чертежу), 750 (прямое утверждение).

Дома: вопросы 1—5 (с. 204); задачи 740 (б), 749, 750 (обратное утверждение).

Перед тем как приступить к изучению п. 78 «Откладывание вектора от данной точки», желательно проверить усвоение предшествующего материала. Это можно сделать в процессе решения устных задач:

1. На рисунке 229, *а, б, в* изображены параллелограмм $ABCD$, трапеция $KLMN$ ($KL \parallel MN$) и треугольник PQR (AB, BC, CA — средние линии этого треугольника).

а) Укажите на этих рисунках сонаправленные, противоположно направленные, равные векторы.

б) Укажите векторы, длины которых равны. Равны ли при этом сами векторы?

2. Задача 752.

После изучения п. 78 (рассказ учителя) рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

1. Перечертите рисунок 230 в тетрадь. Постройте векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{NQ}$, такие, что $\overrightarrow{MP}=\vec{a}$, $\overrightarrow{NQ} \nparallel \vec{a}$.

2. $ABCD$ — параллелограмм Докажите, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

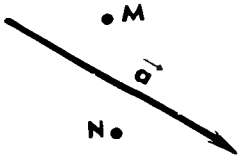


Рис. 230

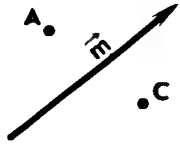


Рис. 231

Вариант II

1. Перечертите рисунок 231 в тетрадь. Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, такие, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{m}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{m}$.

2. Точки M, K, N, P не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN}$. Докажите, что $KMNP$ — параллелограмм.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Точка M лежит на отрезке AB. Постройте векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MN}$, такие, что $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$. Найдите KN, если $AB = a$.

2. Точка O лежит внутри четырехугольника $ABCD$. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Дома: вопрос 6 (с. 204); задачи 743, 747, 748.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определения вектора и равных векторов; **уметь** изображать и обозначать векторы, откладывать от данной точки вектор, равный данному, решать задачи типа 741—743, 745—752.

§ 2. Сложение и вычитание векторов (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия суммы и разности двух векторов, рассмотреть законы сложения векторов и на их основе ввести понятие суммы трех и более векторов; научить строить сумму двух данных векторов, используя правила треугольника и параллелограмма, сумму нескольких векторов, используя правило многоугольника, строить разность двух данных векторов двумя способами.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: сумма двух векторов — 1 урок; сумма нескольких векторов — 1 урок; вычитание векторов — 1 урок; решение задач — 1 урок.

Содержание пп. 79, 80 («Сумма двух векторов» и «Законы сложения векторов. Правило параллелограмма») рекомендуется изложить на первом уроке в виде небольшой лекции с использованием иллюстративных средств (плакаты, графопроектор и т. п.).

Для лучшего усвоения изложенного материала можно выполнить в классе следующие практические задания и упражнения:

1. Задача 753

2. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$. Какие из построенных векторов равны друг другу?

3. Задача 759 (а) (решить без помощи чертежа)

4. Упростите выражения: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK})+\overrightarrow{KM}$;
б) $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{XY})+\overrightarrow{NX}$.

5. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия: а) $\overrightarrow{EF}+(\overrightarrow{FP}+\vec{x})=\overrightarrow{EM}$;
б) $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{MK}+\vec{x}$

6. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, если $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{XB})+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{DC}$, где P и X — произвольные точки плоскости.

Дома: вопросы 7—10 (с. 204); практические задания и задачи 754, 759 (б) (без чертежа), 763 (б, в).

На следующем уроке, перед тем как рассказать о построении суммы трех и более векторов, рекомендуется проверить усвоение предшествующего материала в процессе устного решения задач типа:

7. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия. а) $\overrightarrow{MN}+\vec{x}=\overrightarrow{MK}$;
б) $(\overrightarrow{AB}+\vec{x})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

8. Упростите выражение: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}$;
б) $(\overrightarrow{EF}+(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{FQ})$.

После введения правила многоугольника в классе можно решить задачи 755, 761, 762 (а).

В конце урока желательно провести *самостоятельную работу* обучающего характера:

Вариант I

1. Начертите четыре попарно неколлинеарных вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$. Постройте вектор $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}+\vec{t}$.

2. Упростите выражение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PN}$.

Вариант II

1. Начертите пять попарно неколлинеарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$. Постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

2. Упростите выражение $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{QA}$

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}$.

2. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Дома: вопрос 11 (с. 204); задачи 760, 762 (б, в), 774.

Перед тем как приступить к изучению п. 82 «Вычитание векторов», целесообразно напомнить учащимся определение разности двух чисел, а затем предложить им самим «придумать» определение разности двух векторов.

После этого учителю рекомендуется изложить оставшийся материал п. 82, а затем учащиеся выполняют практическое задание 756 и решают задачи 762 (г), 763 (а), 764 (а). Кроме того, можно выполнить упражнения:

9. Упростите выражение $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{CF}$.

10. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{NR}+\overrightarrow{PQ}-\vec{x}-\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{RQ}$.

Дома: вопросы 12, 13 (с. 204); задачи 757, 762 (д), 763 (г), 764 (б).

Четвертый урок рекомендуется посвятить решению задач к § 2. Для решения в классе и дома можно рекомендовать задачи 765—773.

На уроке желательно провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC. Постройте вектор $\vec{p}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ и найдите $|\vec{p}|$, если $AB=8$ см.

Вариант II

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Постройте вектор $\vec{m}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ и найдите $|\vec{m}|$, если $BC=9$ см.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$ и найдите $|\vec{a}|$, если $AD=12$ см, $BC=5$ см.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, как определяется сумма двух и более векторов; **знать** законы сложения векторов, определение разности двух векторов; **знать**, какой вектор называется противоположным данному; **уметь** строить сумму двух и более данных векторов, пользуясь правилами треугольника, параллелограмма, многоугольника, строить разность двух данных векторов двумя способами, решать задачи типа 759—771.

§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач (4 ч)

Назначение параграфа — ввести еще одно действие. умножение вектора на число, ознакомить учащихся со свойствами этого действия; на конкретных примерах показать применение векторов при доказательстве теорем и решении геометрических задач, в частности, с помощью векторов доказать теорему о средней линии трапеции.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: умножение вектора на число и его свойства — 2 урока; применение векторов при решении задач и доказательстве теорем — 2 урока.

Содержание п. 83 рекомендуется изложить в виде небольшой лекции. Целесообразно в начале лекции привести пример, подводящий к определению произведения вектора на число, например такой:

Автомобиль движется прямолинейно со скоростью $\vec{v}$ (рис. 232, *а*). Его обгоняет второй автомобиль, движущийся со скоростью, вдвое большей. Навстречу им движется третий автомобиль, у которого величина скорости такая же, как у второго автомобиля. Как изобразить с помощью векторов скорости второго и третьего автомобилей и как выразить эти скорости через скорость $\vec{v}$ первого автомобиля?

Ответ дает рисунок 232, *б*. Естественно считать, что скорость второго автомобиля равна $2\vec{v}$ (произведению скорости $\vec{v}$ первого автомобиля на число 2), а скорость третьего автомобиля равна $-2\vec{v}$ (произведению скорости $\vec{v}$ на число -2).

После рассказа учителя можно выполнить практические задания 776 (б, г, д), 777 и решить задачи 779, 781 (а), 780 (б).

Дома: вопросы 14—17 (с. 205); практические задания 775, 776 (а, в, е); задачи 781 (б, в), 780 (а).

Усвоение нового материала можно проверить на следующем уроке в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 233 $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ векторы: а) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DM}$, где M — точка на стороне BC, такая, что $MB:MC=3:2$; в) $\overrightarrow{KM}$, где K — точка на стороне AD, такая, что $AK:KD=1:3$; г) $\overrightarrow{MN}$, где N — точка на диагонали AC, такая, что $ON=NC$.

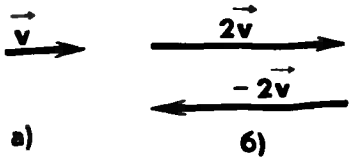


Рис. 232

2. На рисунке 234 $ABCD$ — трапеция, O — точка пересечения

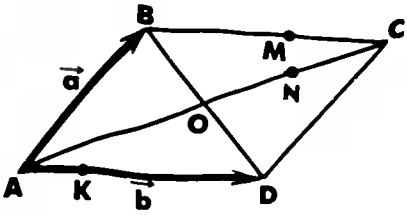


Рис. 233

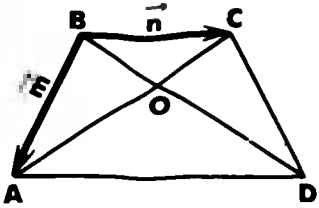


Рис. 234

диагоналей, $BC \parallel AD$, $AD = 2BC$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$ векторы: а) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AO}$.

Кроме того, в классе можно решить задачи 782, 802.

В конце урока рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что $|\vec{a}| = 3$ см, $|\vec{b}| = 2$ см. Постройте вектор $\vec{p} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Четырехугольник $KMNP$ — параллелограмм. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{KM}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{KP}$ векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{AB}$, где A — точка на стороне PN, такая, что $PA : AN = 2 : 1$, B — середина отрезка MN.

Вариант II

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ так, что $|\vec{m}| = 2$ см, $|\vec{n}| = 3$ см. Постройте вектор $\vec{a} = 2\vec{m} - \frac{1}{3}\vec{n}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CD, N — точка на стороне AD, такая, что $AN : ND = 1 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Постройте вектор $\vec{q} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} - 0{,}2\overrightarrow{AB}$.

2. В трапеции $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{DC}$ векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MN}$, где M — середина стороны BC, а N — точка на стороне AB, такая, что $AN : NB = 2 : 3$.

Дома: задачи 783, 804.

Перед тем как приступить к рассмотрению примеров решения геометрических задач с помощью векторов, желательно вспомнить основные правила действий с векторами, выполнив упражнения типа:

3. Упростите выражение $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{EP}$.

4. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\vec{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DF}$

На этом и последующих уроках рекомендуется записывать то или иное условие как в векторной, так и в обычной (геометрической) форме (перевод с «векторного» языка на «геометрический» и обратно). Желательно, чтобы этот материал заносился в таблицу и таким образом накапливался. Приведем пример.

C — точка на прямой AB	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$
$MN \parallel PQ$	$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{PQ}$
M — точка на отрезке AB, такая, что $AM:MB=\lambda$	$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$
$ABCD$ — параллелограмм	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}$
$ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$)	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$, $k>0$, $k\neq 1$, $\overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{AC}$

Разобрав с учащимися решение задачи 1 из п. 84, можно решить далее следующие две задачи:

Задача 1. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$

Решение Пусть O — произвольная точка. Согласно задаче 1 из п. 84 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, поэтому $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$, что и требовалось доказать.

Замечание. Результат задачи 1 можно использовать при доказательстве теоремы о средней линии трапеции на следующем уроке.

Задача 2. Точка C лежит на отрезке AB, причем $AC:CB=2:3$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Решение. По условию $AC:CB=2:3$, поэтому $3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$ Но $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Следовательно, $3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$, откуда получаем $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Замечание. Задача 2 является частным случаем более общей задачи 806.

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачу 784 и разобрать решение задачи 2 из п. 84.

Дома: вопрос 18 (с. 205); задачи 785, 786, 805. Более подготовленным учащимся можно задать на дом следующую задачу, аналогичную задаче 2 из п. 84:

Задача 3. Докажите, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей.

Последний урок по теме § 3 можно начать с решения следующей задачи:

Задача 4. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AM:MD=BN:NC=3:4$. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

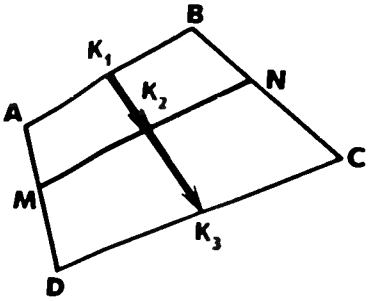


Рис. 235

Решение. Пусть K_1 — середина AB, K_2 — середина MN, K_3 — середина CD (рис. 235). Согласно задаче 2 из п. 84

$$\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}),\ \overrightarrow{K_1K_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

Из условия следует, что

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC},$$

поэтому

$$\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Таким образом, векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Доказательство теоремы о средней линии трапеции рекомендуется провести самому учителю. При этом целесообразно использовать результат задачи 1, решенной на предыдущем уроке. Доказательство можно оформить на доске и в тетрадях в виде следующей краткой записи:

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, M — середина стороны AB, N — середина стороны CD (рис. 266 учебника).

Доказать: $MN \parallel AD$, $MN=\frac{AD+BC}{2}$.

Доказательство. 1. Согласно рассмотренной в классе задаче 1

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

2. Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и, значит, $MN \parallel AD$.

3. Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|=AD+BC$, поэтому $MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

Замечание. Если задача 1 не была рассмотрена на предыдущем уроке, то сначала нужно доказать, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

Для усвоения теоремы о средней линии трапеции в классе можно решить задачи 793 и 795.

В конце урока желательно провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I

Точка K делит отрезок MN в отношении $MK:KN=3:2$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AK}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$, где A — произвольная точка.

Вариант II

Точка A делит отрезок EF в отношении $EA:AF=2:5$. Выразите вектор $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{m}=\overrightarrow{KA}$ и $\vec{n}=\overrightarrow{KF}$, где K — произвольная точка.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Докажите, что если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то для произвольной точки X плоскости выполняется условие $\overrightarrow{XA}=\alpha\overrightarrow{XB}+\beta\overrightarrow{XC}$, где $\alpha+\beta=1$.

(Можно предложить сформулировать и доказать обратное утверждение.)

Дома: вопросы 19. 20 (с. 205); задачи 787, 794. 796. 808

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** какой вектор называется произведением вектора на число; **уметь** формулировать свойства умножения вектора на число; **знать**, какой отрезок называется средней линией трапеции; **уметь** формулировать и доказывать теорему о средней линии трапеции; **уметь** решать задачи типа 782—787, 793—798.

Решение задач (1 ч)

В начале этого урока желательно провести небольшую *самостоятельную работу* с целью проверки усвоения теоремы о средней линии трапеции:

Вариант I

Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен 2 см. Найдите большее основание трапеции, если ее средняя линия равна 8 см.

Вариант II

Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит среднюю линию на отрезки, равные 2 см и 6 см. Найдите основания трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 13 см, описана около окружности, радиус которой равен 6 см. Найдите среднюю линию и площадь этой трапеции.

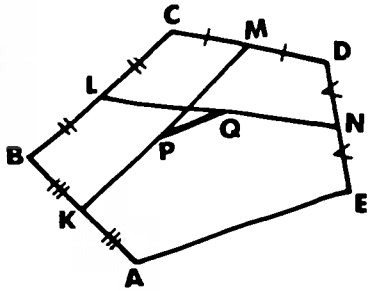


Рис. 236

Затем можно решить в классе задачи 799, 806, 809, а также следующую задачу (при наличии времени):

Задача 5. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q — середины отрезков KM и LN (рис. 236). Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4} AE$.

Решение. Пусть O — произвольная точка. Согласно задаче 1 из п. 84 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Аналогично $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$

Из этих равенств получаем $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

Отсюда следует, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4} AE$.

Дома: задачи 797, 803, 810.

Контрольная работа № 6 (1 ч)

Вариант I

1. Точки E и F лежат соответственно на сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$, причем $AE = ED$, $BF : FC = 4 : 3$. а) Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$. б) Может ли при каком-нибудь значении x выполняться равенство $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{CD}$?

2. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 15 см и 17 см, средняя линия равна 6 см. Найдите основания трапеции.

Вариант II

1. Точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне CD параллелограмма $ABCD$, причем $AK = KB$, $CM : MD = 2 : 5$. а) Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$. б) Может ли при каком-нибудь значении x выполняться равенство $\overrightarrow{KM} = x\overrightarrow{CB}$?

2. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°, большая боковая сторона равна 20 см, а средняя линия равна 7 см Найдите основания трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Точки M и N — середины стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{m}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{n}=\overrightarrow{AN}$.

2. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Боковая сторона разделена на три равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, заключенные между боковыми сторонами трапеции.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Какие векторы называются коллинеарными? Дайте определение равных векторов.

2. Начертите ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ и отметьте точки M и N по разные стороны от прямой AB и точку K на прямой AB. Отложите от точек M, N и K соответственно векторы: $\overrightarrow{MM_1}$, сонаправленный с $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NN_1}$, равный $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{KK_1}$, противоположно направленный по отношению к $\overrightarrow{AB}$.

3. Дано. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажите, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Вариант II

1. Объясните, какой вектор называется суммой двух данных векторов. Какие правила сложения двух и нескольких векторов вы знаете?

2. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и постройте вектор $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

3. Найдите длину вектора $\vec{m}$, если $\vec{m}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{RK}$.

Вариант III

1. Какой вектор называется разностью двух данных векторов?

2. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$

3. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{OD}+\vec{x}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{OA}$.

Вариант IV

1. Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?

2. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и отметьте точку O. Отложите от точки O вектор $\overrightarrow{OA}=1{,}5\,\vec{p}-2\,\vec{q}$.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка M делит сторону AD в отношении $AM:MD=1:2$. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы IX

772. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Но $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XD}$, поэтому

$$\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XD},$$

откуда

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}.$$

785. Пусть X — произвольная точка плоскости. Тогда

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{XN}-\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}).$$

786. Так как точка A_1 — середина стороны BC, то

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Далее

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}.$$

789. Следует уточнить условие задачи: предполагается, что хотя бы два из отрезков $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ не лежат на одной прямой и не параллельны.

По правилу сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_2},\ \overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_2},\ \overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}.$$

Сложив эти равенства и учитывая, что

$$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{CC_2}=\vec{0},\ \overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{AA_2}=\vec{0},\ \overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{BB_2}=\vec{0},$$

получим:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}.$$

Пусть, например, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ не коллинеарны. Отложим от произвольной точки M вектор $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A_1A_2}$, а затем от точки N — вектор $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{B_1B_2}$. Тогда

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=-\overrightarrow{B_1B_2}-\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{C_1C_2}.$$

Точки M, N и P не лежат на одной прямой, т.е. MNP — треугольник Этот треугольник искомый, так как $MN=|\overrightarrow{MN}|=A_1A_2$ $NP=|\overrightarrow{NP}|=B_1B_2$, $PM=|\overrightarrow{PM}|=C_1C_2$ и, кроме того, $MN\parallel A_1A_2$ $NP\parallel B_1B_2$, $PM\parallel C_1C_2$.

790. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC и пусть $AD>BC$. Согласно задаче 785 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, поэтому вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен этим векторам, и, значит, $MN\parallel AD$ и $MN\parallel BC$.

Далее, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})$. Так как $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, то из этого равенства следует, что $MN=\frac{1}{2}(AD-BC)$

791. Пусть точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD DA четырехугольника $ABCD$ и пусть точка O_1 — середина отрезка KM, точка O_2 — середина отрезка LN. Докажем, что точки O и O_2 совпадают.

Для произвольной точки X имеем:

$$\overrightarrow{XK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}),\ \overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}),\ \text{поэтому}$$

$$\overrightarrow{XO_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XK}+\overrightarrow{XM})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}).$$

Аналогично получаем:

$$\overrightarrow{XO_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD})$$

Таким образом, $\overrightarrow{XO_1}=\overrightarrow{XO_2}$, т.е. точки O_1 и O_2 совпадают.

792. Пусть ABC — данный треугольник, точки M и N — середины сторон AB и AC. Докажем, что $MN\parallel BC$ и $MN=\frac{1}{2}BC$ Имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Из равенства $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ следует, что $MN\parallel BC$ и $MN=\frac{1}{2}BC$

799. Пусть BK — перпендикуляр, проведенный к основанию AD данной трапеции (рис. 237). Тогда $KD=AD-AK$. Но $AK=\frac{AD-BC}{2}$, поэтому

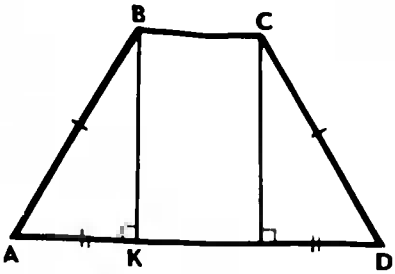


Рис. 237

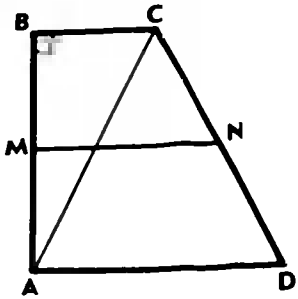


Рис. 238

$$KD = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}, \text{ т.е.}$$

отрезок KD равен средней линии трапеции. Следовательно, средняя линия равна 7 см.

804. 1. $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$. Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$, и, значит $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$,

откуда

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

3. $\overrightarrow{KD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$.

806. По условию $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, следовательно, $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$.

Но

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

поэтому

$$n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Отсюда следует:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

807. Так как A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков BC, AC и AB, то согласно задаче 1 п. 84 имеем:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

809. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 238) с основаниями AD и BC, $\angle B = 90°$, $\angle BCD = 120°$, $AC = CD = a$, MN — средняя линия.

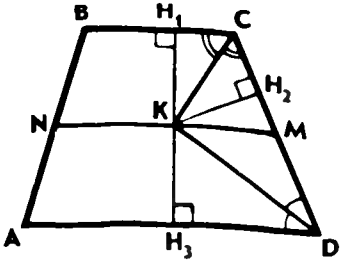


Рис. 239

1. $\angle BCD + \angle D = 180°$, следовательно, $\angle D = 60°$.

2. В треугольнике ACD $AC = CD$, поэтому $\angle CAD = \angle D = 60°$, т. е. треугольник равносторонний $AD = AC = CD = a$.

3. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90° - \angle CAD = 30°$, следовательно, $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}$.

4. $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{4}$.

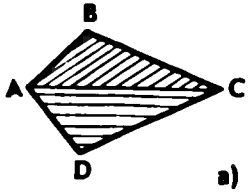
810. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями BC и AD, MN — средняя линия, CK — биссектриса угла BCD, DK — биссектриса угла ADC (рис. 239). Требуется доказать, что точка K лежит на прямой MN.

Проведем перпендикуляры KH_1, KH_2 и KH_3 к прямым BC, CD и DA. Согласно первой теореме п. 72 $KH_1 = KH_2 = KH_3$, т.е. точка K равноудалена от параллельных прямых AD и BC. Отсюда следует, что она лежит на прямой m, параллельной прямым BC и AD и равноудаленной от них (задача 281). Но $M \in m$ и $N \in m$ (задача 282), следовательно, прямая m совпадает с прямой MN, и, значит, точка K лежит на прямой MN.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

813. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 240, *а*) Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC

1. Возьмем треугольник ABC и будем приставлять друг к другу равные ему треугольники BCE, CEF, EFG, ... справа, как показано на рисунке 240, *б*, а затем также слева от точки B. Ясно, что такими равными треугольниками можно покрыть часть плоскости, заключенную между параллельными прямыми AC и BE (такая часть плоскости называется полосой).



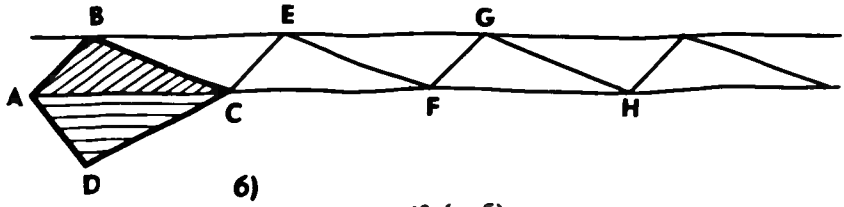


Рис. 240 (а, б)

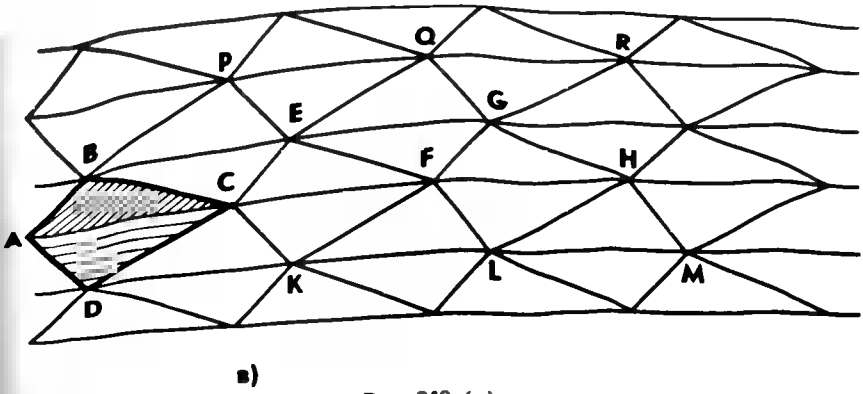


Рис. 240 (в)

2. Далее будем приставлять друг к другу треугольники DCK, CKF, KFL, ..., равные треугольнику ACD, как показано на рисунке 240, *в*. Такие треугольники покроют полосу между параллельными прямыми AC и DK. Точно так же полосу сверху от прямой BE (между параллельными прямыми BE и PQ) заполним треугольниками BPE, PEQ, EQG, ..., равными треугольнику ACD.

3. Следующие две полосы (снизу от прямой DK и сверху от прямой PQ) заполним треугольниками, равными треугольнику ABC (см. рис. 240, *в*), и т.д.

4. Наглядно видно, что в результате описанного процесса любая часть плоскости будет покрыта четырехугольниками, равными четырехугольнику $ABCD$.

Замечание. Четырехугольник $ABCD$ может быть и невыпуклым. Описанная процедура пригодна и в этом случае, нужно только взять ту диагональ четырехугольника, которая разделяет его на два треугольника.

816. Пусть P — точка пересечения прямых DE и AB. Через точку D проведем прямую DO, параллельную прямой AC, $O \in AB$ (рис. 241).

1. В треугольнике AEP отрезок AD — биссектриса и высота, поэтому $DE = DP$.

2. Так как $DO \parallel AE$ и $DP = DE$, то DO — средняя линия треугольника AEP. Таким образом, $DO = \frac{1}{2}a$.

3. Треугольник BDO — равнобедренный, $BN \perp DO$, следовательно,

$$DN = \frac{1}{2}DO, \text{ т.е. } DN = \frac{1}{4}a.$$

4. Так как $DN \parallel KM$ и $NM \parallel DK$, то $KM = DN = \frac{1}{4}a$. Заметим, что ес-

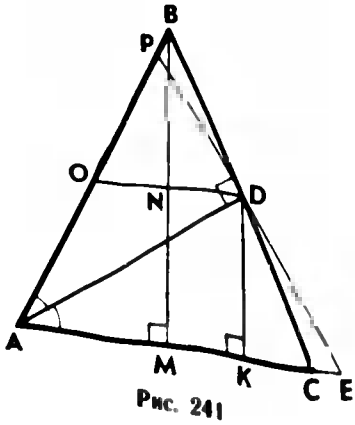


Рис. 241

ли треугольник ABC равносторонний, то отрезки EP и BC совпадают и, очевидно,

$$KM=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{4}a.$$

818. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей.

1. Докажем, что точка O является серединой хотя бы одной из диагоналей AC или BD. Предположим, что это не так. Пусть, например, $DO<BO$, $AO<CO$. Отметим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно точки O (рис. 242). Так как $\triangle BOC=\triangle B_1OC_1$, то их периметры равны: $P_{BOC}=P_{B_1OC_1}$.

По условию $P_{BOC}=P_{AOD}$, следовательно, $P_{B_1OC_1}=P_{AOD}$. Отсюда приходим к равенству $DA=DB_1+B_1C_1+C_1A$, которое, очевидно, не выполняется. Значит, наше предположение неверно и точка O является серединой хотя бы одной диагонали.

2. Пусть, например, $AO=CO$. Так как $P_{AOB}=P_{BOC}$, т.е $AB+AO+BO=BC+CO+BO$, то $AB=BC$. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный и поэтому медиана BO является высотой: $BO\perp AC$.

3. Докажем теперь, что $BO=DO$. Допустим, что $BO\neq DO$ Пусть, например, $BO<DO$ Тогда, сравнивая гипотенузы прямоугольных треугольников AOB и AOD, приходим к выводу, что $AB<AD$. Следовательно, $P_{AOB}<P_{AOD}$, что противоречит условию задачи Поэтому $BO=DO$.

4. Итак, диагонали четырехугольника $ABCD$ в точке O пересечения делятся пополам, значит, этот четырехугольник — параллелограмм, а так как $AB=BC$, то $ABCD$ — ромб

825. На луче AM отложим отрезок AK, равный AB, и рассмотрим треугольник ABK (рис. 243).

1. Треугольник ABK равносторонний, так как $AK=AB$ и $\angle A=60°$.

2. Так как $BK=AB$, то $BK=BC$ и, значит, треугольник BCK равнобедренный. Поскольку $\angle KBC=90°-60°=30°$, то

$$\angle KCB=\frac{180°-30°}{2}=75°.$$

Поэтому $\angle KCD=15°$.

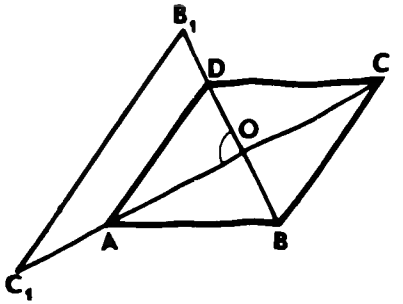


Рис. 242

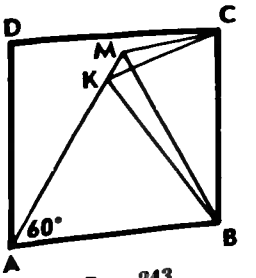


Рис. 243

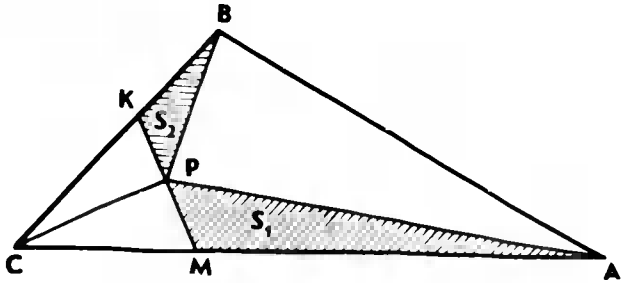


Рис. 244

3. По условию $\angle MCD = 15°$, поэтому лучи CM и CK совпадают, и, следовательно, совпадают точки M и K.

4. Итак, $\angle MBC = \angle KBC = 30°$.

831. Введем обозначение: $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK} = x$ (рис. 244).

1. Сравнивая площади треугольников AMP и CMP, получаем:

$$\frac{S_{AMP}}{S_{CMP}} = \frac{AM}{MC} = x, \text{ откуда } S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1.$$

2. Аналогично, сравнивая площади треугольников BKP и CKP, находим:

$$S_{CKP} = x \cdot S_2.$$

3. Так как $\frac{S_{CMP}}{S_{CKP}} = \frac{MP}{PK} = x$, то

$$\frac{\frac{1}{x} \cdot S_1}{x \cdot S_2} = x, \text{ откуда } x = \sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2}}, \text{ и,}$$

следовательно,

$$S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1 = \sqrt[3]{S_1^2 S_2}, \; S_{CKP} = x \cdot S_2 = \sqrt[3]{S_1 S_2^2},$$

$$S_{CKM} = S_{CKP} + S_{CMP} = \sqrt[3]{S_1 S_2^2} + \sqrt[3]{S_1^2 S_2}.$$

4. Воспользуемся теоремой об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CKM}} = \frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM}.$$

Но

$$\frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM} = \frac{CK + KB}{CK} \cdot \frac{CM + MA}{CM} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + x).$$

Поэтому

$$S_{ABC} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + x) S_{CKM}.$$

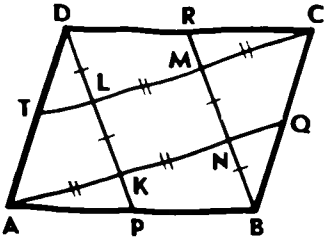


Рис. 245

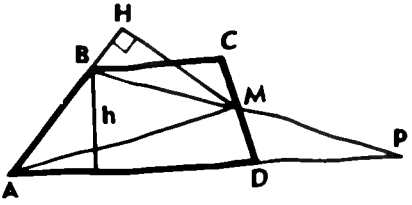


Рис. 246

Подставляя в правую часть равенства выражения для x и S_{CKM}, после некоторых преобразований приходим к равенству

$$S_{ABC}=(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2})^3.$$

832. Сначала доказать, что $TC \parallel AQ$ и $PD \parallel BR$ (рис. 245). Затем доказать, что площадь каждого из треугольников ABN, BCM, CDL и DAK равна площади параллелограмма $KLMN$.

833. Пусть AB — боковая сторона, точка M — середина другой боковой стороны CD, h — высота, S — площадь трапеции $ABCD$, MH — перпендикуляр, проведенный к прямой AB (рис. 246). Докажем, что $S=AB\cdot MH$. Обозначим буквой P точку пересечения прямых BM и AD.

1. Так как $\triangle BCM=\triangle PDM$, то $BC=DP$ и $S_{BCM}=S_{PDM}$. Следовательно,

$$S=S_{ABP}=S_{ABM}+S_{AMP}.$$

2. $S_{AMP}=\frac{1}{2}AP\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}AP\cdot h=\frac{1}{4}(AD+BC)h=\frac{1}{2}S.$

Таким образом, $S=S_{ABM}+\frac{1}{2}S$, откуда $S=2S_{ABM}$.

3. $S_{ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot MH$, следовательно, $S=AB\cdot MH$.

835. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и CD, $DM \parallel CN$ (рис. 247). Обозначим площади пятиугольника и треугольников, как показано на рисунке: $S=S_{MNFKE}$, $S_1=S_{ABE}$, $S_2=S_{BFC}$, $S_3=S_{CDK}$, $x=S_{EDK}$, $y=S_{FCK}$. Треугольники ACD, BCD и параллелограмм $MNCD$ имеют общее основание CD, а их высоты равны высоте данной трапеции, поэтому

$$S_{ACD}=S_{BCD}=\frac{1}{2}S_{MNCD},$$

откуда $S_{MNCD}=S_{ACD}+S_{BCD}$.

Запишем это равенство в виде

$$S+x+S_3+y=(S_1+x+S_3)+(S_2+y+S_3).$$

Отсюда следует:

$$S=S_1+S_2+S_3,$$

что и требовалось доказать.

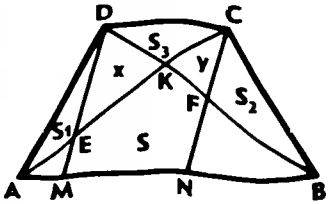


Рис. 247

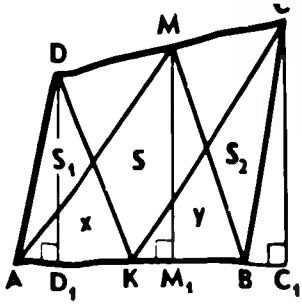


Рис. 248

839. 1. Докажем сначала, что $S_{AMB}=S_{ADK}+S_{BCK}$. Для этого проведем высоты MM_1, DD_1 и CC_1 соответствующих треугольников (рис. 248). Тогда $DD_1 \parallel MM_1 \parallel CC_1$, и так как $DM=MC$, то $MM_1=\frac{1}{2}(CC_1+DD_1)$. Далее,

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot MM_1,\ S_{ADK}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\right)DD_1,\ S_{BCK}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\right)CC_1.$$

Отсюда получаем:

$$S_{AMB}=S_{ADK}+S_{BCK}.$$

2. $S_{AMB}=S+x+y$, $S_{ADK}=S_1+x$, $S_{BCK}=S_2+y$ (обозначения площадей представлены на рисунке 248). Подставляя эти выражения в равенство $S_{AMB}=S_{ADK}+S_{BCK}$, приходим к равенству $S=S_1+S_2$, что и требовалось доказать.

843. 1. Точки M и K лежат по одну сторону от прямой CD, так как в противном случае $S_{BDM}\neq S_{BCK}$.

2. Докажем сначала, что $S_{CDK}=S_{CDM}$ (рис. 249). В самом деле, $S_{CDK}=S_{BCK}-S_{BCD}$, $S_{CDM}=S_{BDM}-S_{BCD}$, если точки M, K и точка B лежат по разные стороны от прямой CD, как показано на рисунке 249, и $S_{CDK}=S_{BCD}-S_{BCK}$, $S_{CDM}=S_{BDM}-S_{BCD}$, если точки M, K и B лежат по одну сторону от прямой CD. В любом случае из этих равенств следует, что $S_{CDK}=S_{CDM}$.

3. Треугольники CDK и CDM имеют общее основание CD, поэтому их высоты равны, и, следовательно, $CD \parallel MK$.

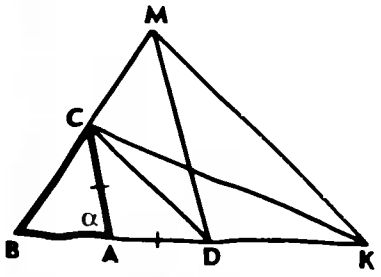


Рис. 249

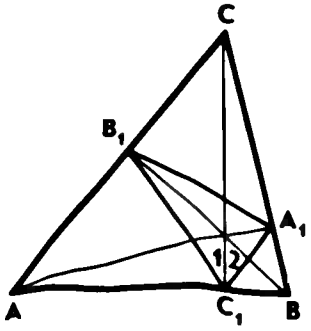


Рис. 250

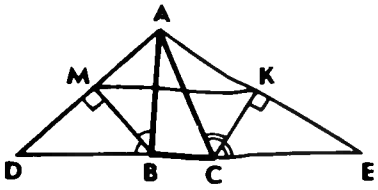


Рис. 251

4. Так как треугольник ACD равнобедренный, то $\angle ADC=\frac{a}{2}$. Но $\angle ADC=\angle BKM$, поэтому $\angle BKM=\frac{a}{2}$.

849. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты данного остроугольного треугольника ABC (рис. 250). Так как треугольник ABC остроугольный, то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB.

1. $\triangle ABA_1 \infty \triangle CBC_1$ по двум углам ($\angle A_1=\angle C_1=90°$, $\angle B$ — общий), следовательно, $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B}{BC_1}$, откуда $\frac{AB}{A_1B}=\frac{BC}{BC_1}$. Отсюда следует, что $\triangle A_1BC_1 \infty \triangle ABC$ (по второму признаку). Аналогично доказывается, что $\triangle AB_1C_1 \infty \triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C \infty \triangle ABC$.

2. $\angle 1=90°-\angle AC_1B_1$, $\angle 2=90°-\angle A_1C_1B$. Но из доказанного выше подобия треугольников следует, что $\angle AC_1B_1=\angle A_1C_1B=\angle ACB$, поэтому $\angle 1=\angle 2$, т. е. C_1C — биссектриса угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что A_1A и B_1B — биссектрисы двух других углов.

852. Пусть D и E — точки пересечения прямых AM и AK с прямой BC (рис. 251).

1. В треугольнике ABD отрезок BM — высота и биссектриса, следовательно, $BA=BD$ и $AM=MD$ (задача 133).

2. Аналогично в треугольнике ACE $CA=CE$ и $AK=KE$.

3. Отрезок MK — средняя линия треугольника ADE, поэтому

$$MK=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}(DB+BC+CE)=\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

866. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC и пусть $BC=a$.

1. Проведем отрезки AP и AQ, параллельные медианам BB_1 и CC_1 (рис. 252). Тогда BB_1 — средняя линия треугольника ACP, поэтому $AP=2\ BB_1$. Аналогично $AQ=2\ CC_1$. Кроме того,

$$PB=BC=CQ=a,\ PA_1=A_1Q=\frac{3}{2}a.$$

2. Проведем средние линии A_1M и A_1K треугольника APQ. Тогда

$$A_1M=\frac{1}{2}AP=BB_1,\ AM=\frac{1}{2}AQ=CC_1.$$

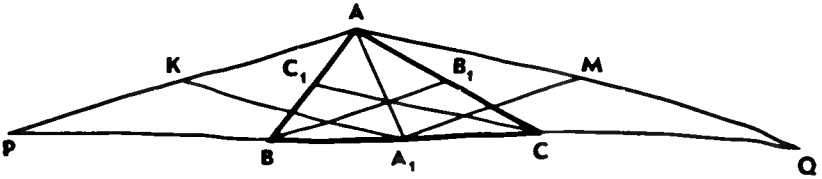


Рис. 252

Таким образом, стороны треугольника AA_1M равны соответственно медианам треугольника ABC, т.е. треугольник AA_1M равен треугольнику EGF, указанному в условии задачи.

3. Пусть высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, равна h. Тогда высота треугольника A_1MQ, проведенная из вершины M, равна $\frac{1}{2}h$. Поэтому

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ah,\ S_{AA_1Q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}ah=\frac{3}{4}ah,\ S_{A_1MQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}h=\frac{3}{8}ah.$$

Следовательно,

$$S_{EFG}=S_{AA_1M}=S_{AA_1Q}-S_{A_1MQ}=\frac{3}{8}ah,\ \frac{S_{EFG}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{3}{8}ah}{\frac{1}{2}ah}=\frac{3}{4}.$$

871. Пусть даны угол hk и отрезок PQ (рис. 253, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $\angle A=\angle hk$, $AB=AC$, $BC+AH=PQ$, где AH — высота треугольника ABC.

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 253, *б*). Проведем какой-нибудь отрезок B_1C_1, параллельный отрезку BC.

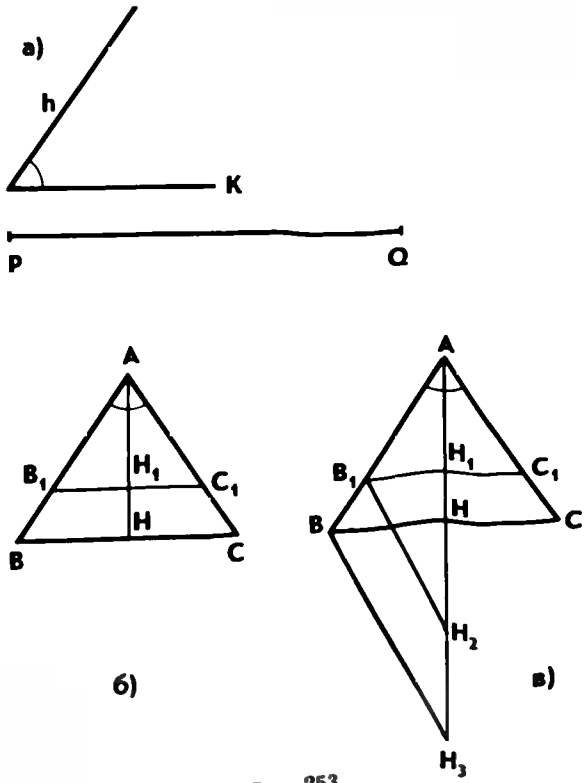


Рис. 253

Получим треугольник AB_1C_1, подобный треугольнику ABC. Ясно, что равнобедренный треугольник AB_1C_1 с заданным углом A построить нетрудно. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AH_1}{AB_1}=\frac{AH}{AB},\ \frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{BC}{AB}.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\frac{AH_1+B_1C_1}{AB_1}=\frac{AH+BC}{AB},\ \text{или}\ \frac{AH_1+B_1C_1}{AB_1}=\frac{PQ}{AB}.$$

Если треугольник AB_1C_1 построен, то отрезки с длинами $(AH_1+B_1C_1)$ и AB_1 нам известны. Отрезок PQ задан условием задачи. Таким образом, из последнего равенства можно определить сторону AB искомого треугольника: $AB=\frac{AB_1\cdot PQ}{AH_1+B_1C_1}$. Это соотношение указывает способ построения треугольника ABC.

Построение. Строим какой-нибудь равнобедренный треугольник AB_1C_1, в котором $\angle A=\angle hk$, $AB_1=AC_1$ (рис. 253, *в*). Проводим высоту AH_1 этого треугольника и на луче AH_1 откладываем отрезки

$$AH_2=AH_1+B_1C_1\ \text{и}\ AH_3=PQ.$$

Через точку H_3 проводим прямую, параллельную B_1H_2. Она пересекает луч AB_1 в точке B. На луче AC_1 откладываем отрезок $AC=AB$. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. По построению $\angle A=\angle hk$, $AB=AC$. Докажем, что $BC+AH=PQ$. По построению $H_1H_2=AH_2-AH_1=B_1C_1$. Треугольники $B_1H_1H_2$ и BHH_3 подобны, поэтому

$$\frac{B_1H_1}{H_1H_2}=\frac{BH}{HH_3},\ \text{или}\ \frac{\frac{1}{2}B_1C_1}{B_1C_1}=\frac{\frac{1}{2}BC}{HH_3}.$$

Отсюда следует, что $HH_3=BC$ и, значит,

$$AH+BC=AH+HH_3=AH_3=PQ.$$

Исследование. Из построения видно, что задача всегда имеет решение. Нетрудно доказать, что решение единственное.

872. Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Для краткости записи обозначим их длины буквами b, c, a соответственно.

Требуется построить треугольник ABC, у которого $AB=b$, $AC=c$, $AD=a$, где AD — биссектриса треугольника.

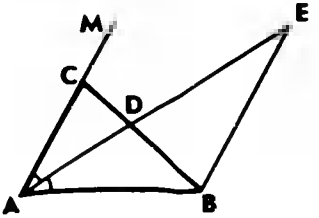


Рис. 254

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 254). Проведем $BE\parallel AC$. Получим равнобедренный треугольник ABE $(AB=BE=b)$. Выразим DE через a, b, c. Из подобия треугольников ADC и EDB имеем $\frac{DE}{AD}=\frac{BE}{AC}$, откуда $DE=\frac{ab}{c}$. По данным отрезкам с длинами a, b, c можно построить от-

резок DE. После этого можно построить треугольник ABE, а затем искомый треугольник ABC.

Построение. Строим отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$. Далее строим треугольник ABE по трем сторонам: $AB=BE=b$, $AE=a+\frac{ab}{c}$. Наконец, через точку A проводим луч AM так, что $\angle MAE=\angle EAB$, и на этом луче откладываем отрезок $AC=c$. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. По построению $AB=b$, $AC=c$, луч AE — биссектриса угла CAB. Пусть D — точка пересечения AE и BC. Из подобия треугольников ADC и EDB получаем

$$AD=DE\cdot\frac{AC}{BE}=\frac{ab}{c}\cdot c=a,$$

т.е. биссектриса AD треугольника ABC равна a. Итак, треугольник ABC искомый.

Исследование. Ясно, что треугольник ABC можно построить в том и только в том случае, когда можно построить треугольник ABE, а для этого его стороны должны удовлетворять соотношению $AE<AB+BE$. Но $AB+BE=2AB$, поэтому должно выполняться неравенство $a+\frac{ab}{c}<2b$, или $a<\frac{2bc}{b+c}$. Если данные отрезки с длинами a, b, c удовлетворяют этому условию, то задача имеет решение. В противном случае решения нет.

Нетрудно доказать, что если решение есть, то оно единственное. В самом деле, допустим, что имеются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющие условиям задачи. Для каждого из них выполним такое же построение, как на рисунке 254. Тогда получим $\triangle ABE=\triangle A_1B_1E_1$ (по трем сторонам), поэтому $\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$, следовательно, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны. Значит, равны и сами треугольники (по двум сторонам и углу между ними). Это и доказывает единственность решения.

875. Задачу нужно понимать так: даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, M_1N_1, M_2N_2 и угол hk. Требуется построить трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD так, чтобы $AB=P_1Q_1$,

$$AD=P_2Q_2,\ BC<AD,\ \angle A=\angle hk,$$
$$BC:CD=M_1N_1:M_2N_2.$$

Построение. Сначала построим треугольник ABD по двум сторонам и углу между ними: $AB=P_1Q_1$, $AD=P_2Q_2$, $\angle A=\angle hk$ (рис. 255). Затем через точку B проведем прямую p, параллельную AD, и на этой прямой по ту же сторону от прямой AB, что и точка D, отложим отрезок $BC_1=M_1N_1$. Далее построим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке C_1. Пусть D_1 — общая точка этой окружности и луча BD. Проведем через точку D прямую DC, параллель-

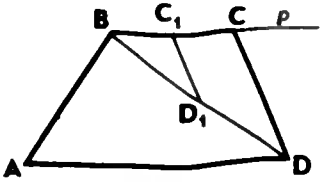
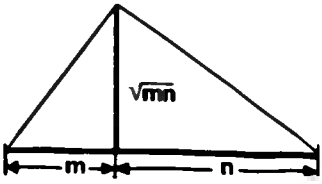
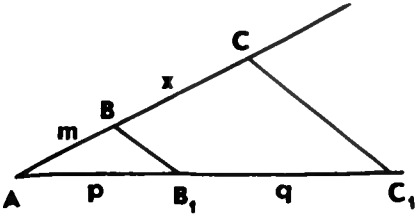


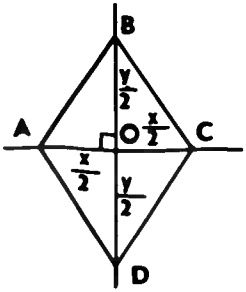
Рис 255



а)



б)



в)

Рис. 256

ную D_1C_1 ($C \in p$). Если при этом окажется, что $BC < AD$, то трапеция $ABCD$ — искомая.

Доказательство. По построению $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, $\frac{BC}{CD} = \frac{BC_1}{C_1D_1} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2}$, $BC < AD$, т. е. трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке C_1 либо не имеет общих точек с лучом BD, либо имеет одну, либо две общие точки. В первом случае задача не имеет решений, во втором случае задача может иметь решение, но может и не иметь его, в третьем случае решение может не существовать, может существовать единственное решение и, наконец, могут существовать два решения. Все эти случаи можно предложить рассмотреть более сильным учащимся.

876. Пусть даны два отрезка (обозначим их длины буквами m и n) и дан квадрат (обозначим его сторону буквой a). Требуется построить ромб $ABCD$, у которого $AC:BD = m:n$, $S_{ABCD} = a^2$.

Анализ. Положим $AC = x$, $BD = y$. Тогда по условию

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \quad \frac{1}{2}xy = a^2.$$

Отсюда находим x и y:

$$x = \frac{\sqrt{2}\,am}{\sqrt{mn}}, \quad y = \frac{\sqrt{2}\,an}{\sqrt{mn}}.$$

Мы получили формулы, которые позволяют построить отрезки, равные диагоналям искомого ромба, а затем построить и сам ромб.

Построение. Сначала построим отрезок длиной $p = \sqrt{mn}$ (рис. 256, *а*). Отрезок длиной $q = \sqrt{2}\,a$ — это диагональ данного квадрата. Далее построим отрезки длинами $x = \frac{qm}{p}$ и $y = \frac{qn}{p}$ (рис. 256, *б*). После этого построим взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (рис. 256, *в*), и на лучах этих

прямых отложим отрезки $OA=\frac{x}{2}$, $OC=\frac{x}{2}$ (на одной прямой) и $OB=\frac{y}{2}$, $OD=\frac{y}{2}$ (на другой прямой). Очевидно, $ABCD$ — искомый ромб, причем при любых данных m, n, a задача имеет единственное решение.

877. По условию данные окружности (обозначим их центры O и O_1, а радиусы r_1 и r_2) имеют единственную общую точку M. Отсюда следует, что точка M лежит на прямой O_1O. В самом деле, если предположить, что точки M, O_1 и O не лежат на одной прямой (рис. 257, *а*), то точка M_1, симметричная точке M относительно прямой O_1O, также является общей точкой данных окружностей (так как $OM=OM_1=r_1$, $O_1M=O_1M_1=r_2$). Но это противоречит условию задачи. Итак, $M\in O_1O$. Поэтому прямая CC_1, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой O_1O, является общей касательной данных окружностей.

На рисунке 257, *б*, *в* изображены два возможных случая в зависимости от положения точки M относительно отрезка OO_1. Из теоремы о вписанном угле и результата задачи 664 следует, что $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 1=\angle 3$. Поэтому $\angle 2=\angle 3$, и, значит, $AA_1\parallel BB_1$.

881. Проведем диаметр BM данной окружности (рис. 258). Так как $BM\parallel AD$, то $\angle 1=\angle 2$ и поэтому прямоугольные треугольники ABM и DAB подобны. Из их подобия следует:

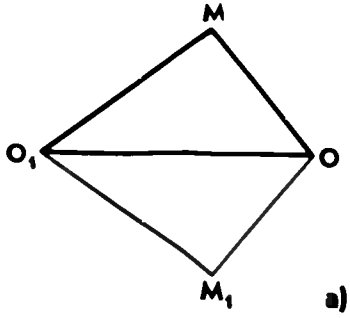
$$\frac{AB}{AD}=\frac{BM}{AB},$$

откуда

$$\frac{AB^2}{AD}=BM,$$

т. е. для всех хорд AB отношение $\frac{AB^2}{AD}$ имеет одно и то же значение, равное диаметру данной окружности.

893. На диагонали AC данного вписанного четырехугольника $ABCD$ возьмем точку K так, чтобы $\angle ABK=\angle CBD$ (рис. 259).



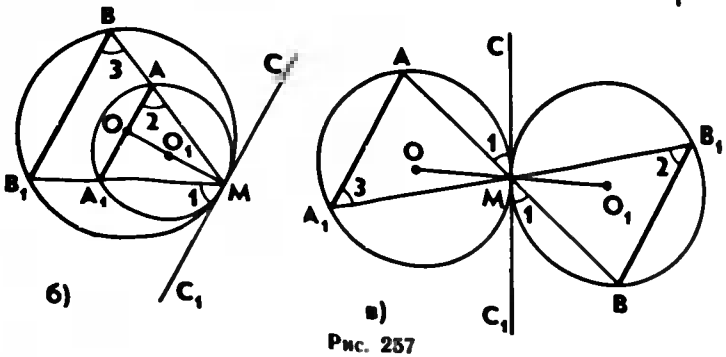


Рис. 257

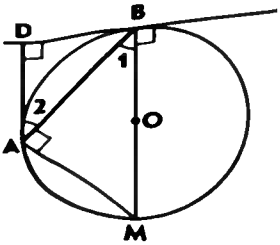


Рис. 258

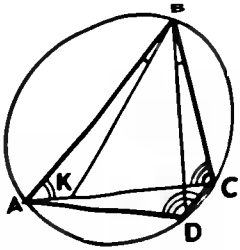


Рис. 259

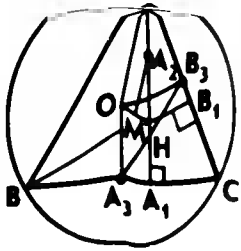


Рис. 260

1. $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ по двум углам, поэтому $\frac{AK}{CD}=\frac{AB}{BD}$, откуда $AK=\frac{AB\cdot CD}{BD}$.

2. $\triangle BCK \sim \triangle BDA$ (по двум углам: $\angle CBK=\angle DBA$, $\angle C=\angle D$), поэтому $\frac{KC}{AD}=\frac{BC}{BD}$, откуда $KC=\frac{BC\cdot AD}{BD}$.

3. Сложив выражения для AK и KC, получим $AC=AK+KC=\frac{AB\cdot CD}{BD}+\frac{BC\cdot AD}{BD}$, откуда $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$, что и требовалось доказать.

895. Докажем, что середина M отрезка OH является центром окружности Эйлера, проходящей через девять указанных точек (рис. 260; на рисунке отмечены только четыре из девяти точек A_1, A_2, A_3, B_3).

1. Отрезок A_2M — средняя линия треугольника AHO, поэтому

$$A_2M=\frac{1}{2}OA=\frac{R}{2},$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Стороны треугольников AHB и A_3OB_3 соответственно параллельны, поэтому эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{AB}{A_3B_3}=2$. Отсюда следует, что

$$OA_3=\frac{1}{2}AH=A_2H.$$

Так как, кроме того, $OA_3 \parallel A_2H$, то четырехугольник OA_3HA_2 — параллелограмм, а M — точка пересечения его диагоналей. Следовательно,

$$MA_3=MA_2=\frac{R}{2}.$$

3. Точка M равноудалена от параллельных прямых AA_1 и OA_3, и так как $A_1A_3 \perp AA_1$ и $A_1A_3 \perp OA_3$, то $MA_1=MA_3=\frac{R}{2}$.

4. Итак, мы доказали, что точки A_1, A_2 и A_3 лежат на окружности с центром M радиуса $\frac{R}{2}$. Точно так же доказывается, что точки B_1, B_2, B_3, а также точки C_1, C_2, C_3 лежат на этой окружности.

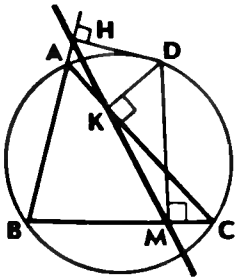


Рис. 261

896. Пусть ABC — данный треугольник, а H, K и M — основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки D описанной окружности к прямым AB, AC и BC (рис. 261). Допустим, что луч DK лежит внутри угла HDM. Так как $\angle HDM = \angle ADC$ (каждый из этих углов равен $180° - \angle B$), то либо эти углы совпадают, либо один из лучей DM или DH лежит внутри угла ADC, а другой вне его. В первом случае точка H совпадает с точкой A, а точка M — с точкой C и утверждение задачи очевидно. Во втором случае точки H и M лежат по разные стороны от прямой AC, поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $\angle AKH = \angle MKC$: это будет означать, что точки H, K и M лежат на одной прямой.

1. В четырехугольнике $AHDK$ $\angle H + \angle K = 180°$, поэтому около него можно описать окружность, и, следовательно, вписанные в эту окружность углы AKH и ADH опираются на одну и ту же дугу AH и потому $\angle AKH = \angle ADH$.

2. Так как $\angle HDM = \angle ADC$, то $\angle ADH = \angle MDC$.

3. Так как углы DMC и DKC прямые, то точки M и K лежат на окружности с диаметром CD. Поэтому $\angle MDC = \angle MKC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу MC).

Таким образом, из полученных равенств следует, что

$$\angle AKH = \angle MKC.$$

907. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, то

$$\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{AC},$$

а если $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$, то

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

В любом случае $\overrightarrow{AB} = n \cdot \overrightarrow{AC}$, где n равно либо $\frac{AB}{AC}$, либо $-\frac{AB}{AC}$. Отсюда для любой точки O получаем:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}),$$

т.е.

$$(n-1)\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} + (-n)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Таким образом, в качестве k, l и m можно взять числа $k=n-1$, $l=1$, $m=-n$, и тогда будут выполнены равенства

$$0=k+l+m,\ k\cdot\overrightarrow{OA}+l\cdot\overrightarrow{OB}+m\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

Обратно, пусть существуют числа k, l, m, одновременно не равные нулю и такие, что $k+l+m=0$ и $k\cdot\overrightarrow{OA}+l\cdot\overrightarrow{OB}+m\times\times\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ при любом выборе точки O. Тогда это равенство выполняется и в том случае, когда точка O совпадает с точкой A, т. е. $l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Числа l и m одновременно не равны нулю, так как в противном случае из равенства $k+l+m=0$ следует, что и $k=0$. Пусть, например, $l\neq 0$. Тогда $\overrightarrow{AB}=-\frac{m}{l}\overrightarrow{AC}$, т. е. векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, значит, точки A, B и C лежат на одной прямой.

908. Пусть точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$, а точки E и F — середины его диагоналей AC и BD. Обозначим буквой G точку пересечения отрезков KM и LN. Согласно задаче 791 точка G — общая середина этих отрезков.

Возьмем произвольную точку O плоскости. На основании задачи 1 п. 84 имеем:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD});\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC});$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}).$$

Отсюда следует:

$$2\ \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF},\ \text{т.е.}\ 2\ \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}=\vec{0},$$

и, следовательно, согласно задаче 907 точки G, E и F лежат на одной прямой.

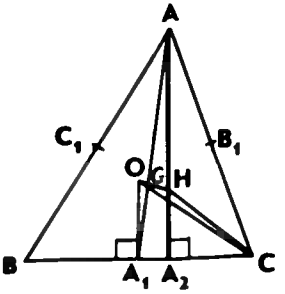


Рис. 262

910. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 262). Согласно теореме о пересечении медиан треугольника имеем:

$$\overrightarrow{GA}=-2\cdot\overrightarrow{GA_1},\ \overrightarrow{GB}=-2\cdot\overrightarrow{GB_1}.\quad (1)$$

По правилу треугольника сложения векторов получаем:

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1O},\quad (2)$$

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{B_1O}. \qquad (3)$$

Так как векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{AH}$ коллинеарны, то существует такое число n, что $\overrightarrow{A_1O}=n\cdot\overrightarrow{AH}$ (см. решение задачи 907). Аналогично $\overrightarrow{B_1O}=m\cdot\overrightarrow{BH}$, где m — некоторое число. Из равенств (1) и (2) имеем:

$$\overrightarrow{GH}+2\ \overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GA}+2\ \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{AH}+2\ \overrightarrow{A_1O}=(1+2n)\overrightarrow{AH}.$$

Таким же образом, используя равенства (1) и (3), получаем:

$$\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=(1+2m)\cdot\overrightarrow{BH}.$$

Следовательно, $(1+2n)\overrightarrow{AH}=(1+2m)\overrightarrow{BH}$.

Так как векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BH}$ не коллинеарны, то

$$1+2n=1+2m=0,$$

и поэтому $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$. Отсюда следует, что точка G лежит на отрезке HO, причем $\frac{HG}{GO}=2$.

Повторение. Решение задач (6 ч)

На уроках итогового повторения можно использовать вопросы, содержащиеся в конце каждой главы учебника, а также карточки для устного опроса учащихся по каждой главе, приведенные в данном методическом пособии. На этих уроках обобщаются и систематизируются знания по курсу геометрии. Полезно сконцентрировать внимание учащихся на этих узловых вопросах:

Четырехугольники. Площадь многоугольника	2 ч
Подобные треугольники	2 ч
Окружность	2 ч

Основное внимание при повторении тем «Четырехугольники» и «Площадь многоугольника» нужно уделить задачам на вычисление площадей параллелограмма, треугольника, трапеции и задачам на применение теоремы Пифагора. При повторении темы «Подобные треугольники» особое внимание следует уделить применению признаков подобия треугольников при решении задач. При повторении темы «Окружность» желательно порешать задачи, связанные с вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностями, в частности, рассмотреть вопрос о положении центров вписанной и описанной окружностей для различных видов треугольников (равнобедренный, прямоугольный, тупоугольный). При этом могут быть использованы следующие задачи: 425, 426, 428, 431, 434, 438, 469, 472, 476, 481, 482, 489, 490, 496, 499, 519, 522, 537, 545, 556, 559, 563, 570, 576, 610, 618, 657, 662, 678, 681, 691, 693, 697, 703, 705, 725, 733, 735.

IX КЛАСС

Курс IX класса является завершающим звеном в изучении планиметрии. В течение двух предыдущих лет учащиеся накапливали геометрические знания и умения, изучали свойства отрезков, углов, треугольников, четырехугольников, окружностей, для них стали привычными понятия определения, теоремы, доказательства Все это, а также совершенствование навыков самостоятельной работы позволяют интенсифицировать учебный процесс, вводить в него элементы лекционно-семинарских занятий, увеличивать долю самостоятельной работы учащихся. Такое изменение структуры учебного процесса призвано помочь учащимся сформировать навыки самообразования: чтения и конспектирования общей и специальной литературы, слушания и конспектирования лекций.

Уроки вводного повторения (2 ч)

Цель занятий — напомнить учащимся сведения, необходимые при изучении геометрии в IX классе. Следует повторить понятия вектора, суммы и разности векторов, произведения вектора на число, их свойства. Полезно также повторить некоторые свойства треугольников и четырехугольников: теорему Пифагора, свойство средней линии треугольника, формулы вычисления площади треугольника, понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника, понятия параллелограмма и трапеции, свойства и признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника.

Повторение можно организовать в ходе решения следующих задач:

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах BC и B_1C_1, $AD=A_1D_1$. Докажите, что данные треугольники равны, если AD и A_1D_1: а) высоты; б) медианы.

2. Докажите, что центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на высоте, проведенной к основанию

3. Докажите, что центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на медиане, проведенной к его основанию, или на ее продолжении.

4. Докажите, что треугольник является равнобедренным, если две его медианы равны.

5. Докажите, что если в треугольнике две высоты равны, то центр вписанной в него окружности лежит на одной из медиан этого треугольника, а центр описанной окружности — на той же медиане или ее продолжении.

6. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

7. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равнобедренной трапеции, взаимно перпендикулярны.

8. Найдите длины отрезков, соединяющих середины сторон трапеции с равными диагоналями, если ее основания равны 7 см и 9 см, а высота равна 8 см.

9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MD}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$; д) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

10. Точка M — середина отрезка AB, а O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

11. Точки M и P — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$.

12. Даны попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы: а) $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$; б) $\vec{e}=2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

13. Вычислите площадь треугольника ABC, если $AB=8{,}5$ м, $AC=5$ м, высота $AH=4$ м и точка H лежит на отрезке BC.

14. Вершины четырехугольника $ABCD$ являются серединами сторон четырехугольника, диагонали которого равны 6 дм и пересекаются под углом 60°. Вычислите площадь четырехугольника $ABCD$.

Из предложенного набора задач в классе можно решить задачи 1, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13. Остальные задачи на дом.

При решении задачи 1 (б) полезно обратить внимание учащихся на прием «удвоения медианы» — откладывание на продолжении медианы AD за точку D отрезка, равного медиане.

ГЛАВА X

Метод координат (12 ч)

Метод координат служит основой аналитической геометрии, в которой геометрические фигуры изучаются с помощью методов алгебры.

Некоторое представление о методе координат учащиеся имеют по курсу алгебры, где было введено понятие прямоугольной системы координат и рассматривались задачи на построение линий (графиков функций) по заданному уравнению.

В данной главе отражены следующие вопросы: координаты вектора, действия над векторами с заданными координатами, вычисление длины вектора по его координатам, вычисление длины отрезка и координат его середины по координатам концов отрезка, уравнения окружности и прямой, применение метода координат при решении геометрических задач.

Назначение главы — расширить и углубить представления учащихся о методе координат, развить умение применять алгебраический аппарат при решении геометрических задач. Учащиеся должны усвоить, что практическое применение метода координат состоит в том, что вводится подходящим образом прямоугольная система координат, условие задачи записывается в координатах и далее решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений. В учебнике приведены примеры решения геометрических задач методом координат — задачи 952, 953, 981, 984.

§ 1. Координаты вектора (3 ч)

Назначение параграфа — ввести понятие координат вектора и рассмотреть правила действий над векторами с заданными координатами.

Понятия вектора, суммы, разности векторов и произведения вектора на число были введены в предыдущей главе — в конце VIII класса. В частности, учащимся известно, что при умножении данного вектора на число получается вектор, коллинеарный данному. Однако вопрос о возможности представления одного из двух данных коллинеарных векторов в виде произведения другого вектора на число еще не ставился. Ответ на этот вопрос дает лемма, доказанная в начале параграфа Она используется далее при доказательстве теоремы о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам.

Изучение параграфа можно начать с устного решения задач по рисунку, на котором изображены параллелограмм $ABCD$ с диагоналями AC и BD, пересекающимися в точке O, а также отрезки MP и NQ, соединяющие соответственно середины сторон AB и CD, BC и AD. Требуется выразить: а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AO}$; б) вектор $\overrightarrow{NC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$; в) вектор $\overrightarrow{NB}$ через вектор $\overrightarrow{AD}$; г) вектор $\overrightarrow{MP}$ через вектор $\overrightarrow{PO}$.

После этого естественно поставить вопрос о возможности для любой пары коллинеарных векторов подобрать такое число, что один из векторов будет равен произведению второго вектора на это число, т.е. перейти к рассмотрению леммы. Для понимания учащимися формулировки леммы полезно обсудить, во первых, почему важно условие $\vec{a} \neq \vec{0}$, и, во-вторых, будет ли верно утверждение, если рассматривать произвольные (в том числе и неколлинеарные) ненулевые векторы.

После доказательства леммы можно с помощью простых задач, связанных с тем же рисунком параллелограмма $ABCD$, подвести учащихся к мысли о возможности выражения вектора через два данных неколлинеарных вектора.

Задача. Точки M и Q — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AQ}$; в) вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BM}$.

Затем нужно рассмотреть теорему о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам, в ходе ее доказательства полезно обратить внимание на роль леммы в доказательстве.

При введении координат вектора и правил, позволяющих по данным координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число, рекомендуется использовать настенную таблицу (рис. 263). В дальнейшем она может служить справочной таблицей.

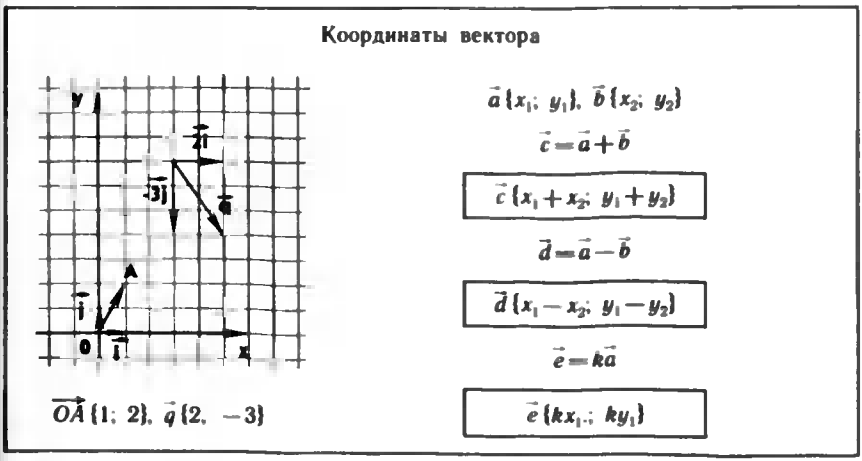


Рис. 263

Доказательства указанных правил учащиеся могут рассмотреть самостоятельно. Для лучшего усвоения изученного материала в классе целесообразно решить следующие задачи: 911 (а, б), 912 (б, в), 915, 916 (а, б), 918 (рис. 276, *а*, *б* из учебника), 919 (для векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$), 920 (а, в), 922 (а), 924 (для вектора $2\vec{a}$), 926 (а). Многие задачи можно решить устно при фронтальной работе.

Для обучающей самостоятельной работы можно использовать задачи 918 (рис. 276, *в* из учебника), 917 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), 921 (а, г), 925 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), 926 (в). При наличии времени учащимся можно предложить выполнить задания 914 (а), 927.

В самостоятельную работу контролирующего характера можно включить следующие задачи:

Вариант I. 912 (а, г), 920 (г), 926 (б), 990 (а) (для векторов $\vec{q}$ и $\vec{r}$), 988 (а, б).

Вариант II. 912 (в, д), 920 (д), 926 (г), 990 (а) (для векторов $\vec{p}$ и $\vec{s}$), 988 (в, г).

Дома: пп. 86, 87; вопросы 1—8 (с. 236); задачи 911 (в, г), 916 (в, г), 919 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$), 920 (б), 921 (б, в), 922 (в, г), 923 (б — г), 925 (для векторов $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** формулировки и доказательства леммы о коллинеарных векторах и теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, правила действий над векторами с заданными координатами; **уметь** решать задачи типа 917, 918, 926.

§ 2. Простейшие задачи в координатах (3 ч)

Назначение параграфа — рассмотреть простейшие задачи в координатах и показать, как они используются при решении более сложных задач методом координат.

Объяснение нового материала полезно предварить следующим диктантом по теме § 1:

Вариант I

1. Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{a}\{2;\ -1\}$.

2. Выпишите координаты вектора $\vec{c}$, если его разложение по координатным векторам имеет вид $\vec{c}=-\vec{i}+2\ \vec{j}$.

3. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, равного разности векторов $\vec{m}$ и $\vec{t}$, если $\vec{m}\{-5;\ 0\}$, $\vec{t}\{0;\ -4\}$.

4. Найдите координаты вектора $3\ \vec{d}$, если $\vec{d}\{4;\ -2\}$.

5. Дано: $\vec{a}\{3;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}=\vec{a}-4\ \vec{b}$.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

7. Диагонали ромба равны 6 см и 8 см. Найдите его сторону.

8. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте вектор $\vec{a}\{-3;\ 1\}$ с началом в точке O.

Вариант II

1. Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{b}\{-3;\ 0\}$.

2. Выпишите координаты вектора $\vec{a}$, если его разложение по координатным векторам имеет вид $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

3. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{m}$ и $\vec{t}$, если $\vec{m}\{-5;\ 0\}$, $\vec{t}\{0;\ -4\}$.

4. Найдите координаты вектора $-2\vec{p}$, если $\vec{p}\{-2;\ 5\}$.

5. Дано: $\vec{a}\{3;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{l}=3\vec{b}-\vec{a}$.

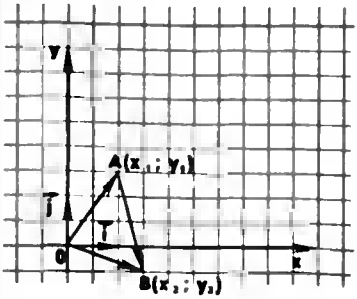
6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{BO}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

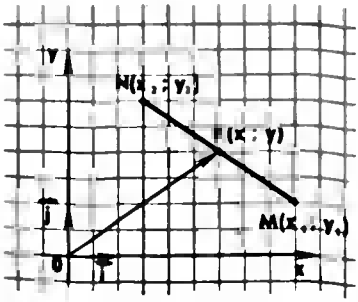
7. Сторона ромба равна 13 дм, а одна из его диагоналей — 24 дм. Найдите вторую диагональ.

8. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте вектор $\vec{b}\{4;\ -1\}$ с началом в точке O.

При изложении нового материала полезно использовать настенную таблицу (рис. 264). Затем можно решить задачи 929, 932, 934 (а, б), 937, 938 (б, в), 940.

Простейшие задачи в координатах





$\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1\}$; $\overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2\}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$

$P(x;\ y)$ — середина MN:

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\overrightarrow{NM}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Рис. 264

Обучение применению метода координат полезно разделить на два этапа. На первом — решать задачи, в которых требуется найти те или иные элементы фигуры, если даны координаты некоторых ее точек. Например, можно решить задачи 942, 944, 947 (а), 950 (а). На втором этапе следует рассмотреть обычные геометрические задачи, условия которых задаются без координат. Целесообразно разобрать с учащимися решения задач 952 и 953 по учебнику.

Полезно подчеркнуть, что систему координат нужно выбирать так, чтобы координаты точек фигуры, которые используются при решении задач, находились по заданным ее элементам наиболее простым образом. Сопоставить различные способы выбора системы координат можно на примере задачи 954. Затем полезно рассмотреть задачу 956, а при наличии времени — задачи 1007 и 1008.

Поскольку развитие умения применять метод координат для решения геометрических задач является весьма трудной задачей, то на данном этапе эта цель не может ставиться в отношении всех учащихся. Но решать несложные задачи, в которых многоугольники заданы координатами их вершин, должны уметь все ученики.

Контролирующая самостоятельная работа

Вариант I

1. Задача 948 (а) из учебника.
2. Задача 950 (а) из учебника.
3. Основания прямоугольной трапеции равны 6 см и 8 см, а высота равна 5 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Вариант II

1. Задача 949 (а) из учебника.
2. Задача 950 (б) из учебника.
3. Основания равнобедренной трапеции равны 8 м и 12 м, а высота равна 7 м. Найдите длины отрезков, соединяющих концы одной боковой стороны с серединой другой боковой стороны.

Дома: пп. 88, 89; вопросы 9—14 (с. 236); задачи 931, 935, 936, 938 (а, г), 941, 957.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** и **уметь** выводить формулы координат вектора через координаты его конца и начала, координат середины отрезка, длины вектора и расстояния между двумя точками; **уметь** решать задачи типа 945, 951.

§ 3. Уравнения окружности и прямой (3 ч)

Назначение параграфа — вывести уравнения окружности и прямой и показать, как можно использовать эти уравнения при решении геометрических задач.

Первый урок целесообразно начать с диктанта, затрагивающего как тему предыдущего параграфа, так и новую тему.

Вариант I

1. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(-2; 3)$, $B(6; -3)$.

2. Найдите длину отрезка EH, если $E(-3; 8)$, $H(2; -4)$.

3. Найдите длину вектора $\vec{c}$, равного $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}\{6; 0\}$, $\vec{b}\{0; -8\}$.

4. Какая фигура состоит из множества всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных точек?

5. Принадлежит ли точка $A(-6; 2)$ графику функции $y=-0{,}5x$?

6. Функция задана уравнением $y=2x-3$. Какая линия служит графиком этой функции?

7. На окружности радиуса 7 см даны точки A и B, расстояние между которыми равно 13 см. Лежит ли центр окружности на прямой AB?

8. Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты: $A(8; -3)$, $B(5; 1)$, $C(12; 0)$. Докажите, что $\angle B=\angle C$.

Вариант II

1. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(3; -4)$, $D(-3; 6)$.

2. Найдите длину отрезка KB, если $K(-6; -3)$, $B(2; 3)$.

3. Найдите длину вектора $\vec{d}$, равного $\vec{e}+\vec{f}$, если $\vec{e}\{-12; 0\}$, $\vec{f}\{0; 5\}$.

4. Прямая l является серединным перпендикуляром к основанию AB треугольника ABC и проходит через вершину C. Определите вид треугольника ABC.

5. Принадлежит ли точка $B(2; -8)$ графику функции $y=-4x$?

6. Функция задана уравнением $y=5-x$. Какая линия служит графиком этой функции?

7. Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от данной точки?

8. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(-3; -1)$, $B(1; 2)$, $C(5; -1)$, $D(1; -4)$. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

Объяснение нового материала можно начать с разбора шестого задания диктанта, обратив внимание учащихся на то, что

им уже известны графики некоторых функций. В частности, графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая линия, а уравнение $y=kx+b$ называется уравнением этой прямой. Учащиеся должны знать также уравнения параболы и гиперболы

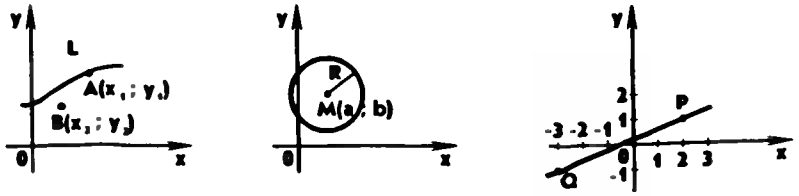
Понятие уравнения произвольной линии дается в ознакомительном плане. При этом важно добиться понимания учащимися следующего: чтобы установить, что данное уравнение является уравнением данной линии, нужно доказать, что: 1) координаты любой точки линии удовлетворяют данному уравнению и 2) координаты любой точки, не лежащей на данной линии, не удовлетворяют этому уравнению.

При рассмотрении уравнения окружности полезно показать, что не любое уравнение второй степени с двумя переменными задает окружность. Например, уравнение $4x^2+y^2=4$ задает в прямоугольной системе координат не окружность, а эллипс (с этой фигурой учащиеся знакомились в курсе черчения), уравнение $x^2+y^2=0$ задает единственную точку — начало координат, а уравнению $x^2+y^2=-4$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, поэтому это уравнение не задает никакой фигуры.

В отношении прямой дело обстоит иначе: уравнением любой прямой в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени с двумя переменными (уравнение прямых, параллельных осям координат, также можно считать уравнением с двумя переменными, например, уравнение $x=x_0$ можно записать в виде $x+Oy=x_0$) и, обратно, любое уравнение первой степени с двумя переменными задает прямую.

В ходе объяснения нужно использовать настенную таблицу (рис. 265).

Уравнение окружности и прямой



$f(x;\ y)=0$ — уравнение линии L
$A\in L: f(x_1;\ y_1)=0$
$B\notin L: f(x_2;\ y_2)\neq 0$

$(x-a)^2+$
$+(y-b)^2=R^2$

$PQ:\ ax+by+c=0$
$P(2,\ 1)$
$Q(-3;\ -1)$
$$\begin{cases} a\cdot 2+b\cdot 1+c=0 \\ a(-3)+b(-1)+c=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=2c \\ b=-5c \end{cases}$$
$2cx-5cy+c=0$
$PQ:\ 2x-5y+1=0$

Рис. 265

Далее можно разобрать с учащимися или предложить им самим решить следующие задачи: 959 (а, д), 961, 963, 966 (а), 972, 976, 977, 978 (а, б), 981, 984.

Для обучающей самостоятельной работы можно использовать задачи 969, 1003 (а), 983. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 987 и 1004.

В контролирующей *самостоятельной работе* можно использовать следующие задания:

Вариант I. 959 (г), 968, 973, 982 (б).

Вариант II. 959 (в), 967, 974 (б), 982 (а).

Дома: пп. 90—92; вопросы 15—21 (с. 236—237); задачи 959 (б), 962, 970, 974 (а), 979, 980, 986.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** и **уметь** выводить уравнения окружности и прямой; **уметь** строить окружности и прямые, заданные уравнениями, решать задачи типа 966, 972.

Решение задач (2 ч)

Назначение этих уроков — закрепление знаний и умений учащихся по материалу главы.

Первый урок можно начать со следующего *диктанта*:

Вариант I

1. Лежит ли точка $A(2; -1)$ на окружности, заданной уравнением $(x-2)^2+(y-3)^2=25$?

2. Напишите уравнение окружности, если ее центр — точка (4; 5), а радиус равен 3.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -2)$ и параллельной оси ординат.

4. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, если она проходит через точку $C(-2; 3)$.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки $M(-2; -1)$ и $N(3; 1)$.

6. Найдите длину вектора $\vec{a}\{-12; 5\}$.

7. Найдите координаты середины отрезка PQ, если $P(5; -3)$; $Q(3; -7)$.

8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; -5)$, $B(-3; 4)$.

Вариант II

1. Лежит ли точка $A(2; -1)$ на прямой, заданной уравнением $2x-3y-7=0$?

2. Напишите уравнение окружности, если ее центр — точка (4; 5), а радиус равен 2.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 3)$ и параллельной оси абсцисс.

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $D(3; -2)$.

5. Напишите уравнение окружности с центром в точке $P(-2; -1)$, если она проходит через точку $Q(1; 3)$.

6. Найдите расстояние между точками $A(-1; 3)$ и $B(2; -1)$

7. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-12; 5\}$, $\vec{b}\{7; -3\}$.

8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(-1; 6)$, $D(3; -2)$

Поскольку цель уроков — закрепление знаний и умений, то основной формой работы можно избрать работу учащихся в парах. На этих уроках полезно не только решать задачи, но и провести опрос учащихся по теоретическому материалу. Для этого удобно использовать карточки, включив в каждую по одному вопросу из каждого параграфа главы X.

Для решения в классе можно использовать следующие задачи: 913, 943, 951, 991, 996, 997, 999, 1000, 1001, 1005. Задачи 995, 1004, 1009 полезно разобрать в ходе фронтальной работы.

Самостоятельная работа контролирующего характера может включать следующие задания:

Вариант I. 968, 989 (а, г), 993, 1010 (б).

Вариант II. 971, 989 (б, в), 992, 1010 (а).

Учащимся, успешно справившимся с предложенными заданиями, можно рекомендовать решить задачу 1002 (а).

Дома: вопросы 1—21 (с. 236—237); задачи 990, 995, 914, 945, 998, 958.

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Вариант I

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{b}\{3; -2\}$, $\vec{c}\{-6; 2\}$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-6; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите высоту треугольника, проведенную из вершины A.

3. Окружность задана уравнением $(x-1)^2+y^2=9$. Напишите уравнение прямой, проходящей через ее центр и параллельной оси ординат.

Вариант II

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{b}$, если $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{c}\{-3; 6\}$, $\vec{d}\{2; -2\}$.

2. Даны координаты вершин четырехугольника $ABCD$: $A(-6; 1)$, $B(0; 5)$, $C(6; -4)$, $D(0; -8)$. Докажите, что $ABCD$ —

прямоугольник, и найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

3. Окружность задана уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=16$. Напишите уравнение прямой, проходящей через ее центр и параллельной оси абсцисс.

Вариант III

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}\{6;\ -2\}$, $\vec{n}\{1;\ -2\}$.

2. Даны координаты вершин треугольника MPT: $M(-4;\ 3)$, $P(2;\ 7)$, $T(8;\ -2)$. Докажите, что данный треугольник прямоугольный, и найдите радиус описанной около него окружности.

3. Окружность задана уравнением $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. Напишите уравнение прямой, проходящей через ее центр и параллельной оси ординат.

Вариант IV

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{d}$, если $\vec{d}=\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$, $\vec{p}\{2;\ 3\}$, $\vec{q}\{9;\ -9\}$.

2. Даны координаты трех вершин параллелограмма $KLMN$: $K(-4;\ 2)$, $L(0;\ 5)$, $M(12;\ 0)$. Найдите координаты четвертой вершины и периметр данного параллелограмма.

3. Окружность задана уравнением $x^2+(y-1)^2=4$. Напишите уравнение прямой, проходящей через ее центр и параллельной оси абсцисс.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам.

2. Выведите формулы координат середины отрезка по координатам его концов.

3. Напишите уравнение окружности с центром в точке $B(4;\ 0)$, если она проходит через точку $A(7;\ 4)$.

Вариант II

1. Сформулируйте правило нахождения координат разности двух векторов.

2. Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-3;\ -3)$ и $B(3;\ 5)$.

Вариант III

1. Сформулируйте правило нахождения координат произведения вектора на число по заданным координатам вектора

2. Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке, заданной координатами.

3. Найдите координаты середины отрезка AB, если даны координаты его концов: $A(-3;\ 4)$, $B(3;\ -6)$.

Вариант IV

1. Сформулируйте утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.

2. Выведите уравнение прямой l в прямоугольной системе координат, если l является серединным перпендикуляром к отрезку с концами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

3. Найдите расстояние между точками $M(2;\ -1)$ и $N(5;\ -3)$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы X

914 (а). Доказательство проведем методом от противного, т. е. предположим, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Тогда по лемме о коллинеарных векторах существует число k, такое, что $\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ (заметим, что $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$). Отсюда следует, что $(1+k)\vec{b}=(k-1)\vec{a}$. Хотя бы одно из чисел $k+1$, $k-1$ не равно нулю; пусть, например, $k+1\neq 0$ Тогда $\vec{b}=\frac{k-1}{k+1}\vec{a}$, и, значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию задачи

927. Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то утверждение задачи очевидно, поэтому предположим, что $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то по лемме о коллинеарных векторах существует число k, такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$. По свойству 3° п. 87 $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, т. е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

Докажем обратное утверждение: если координаты одного вектора пропорциональны координатам другого, то векторы коллинеарны. Пусть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, т. е. существует число k, такое, что $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$. Умножив первое равенство на $\vec{i}$, а второе на $\vec{j}$ и сложив, получаем:

$$x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=kx_1\vec{i}+ky_1\vec{j},\ \text{или}\ \vec{b}=k\vec{a}.$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

945. Для решения задачи достаточно определить координаты точек O, A и C. Тогда по формуле расстояния между двумя точками найдем длины отрезков AC и OC.

По условию задачи имеем: $O\{0;\ 0\}$, $A\{a;\ 0\}$. Пусть $C\{x;\ y\}$. Так как $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $BC:OA=d:a$, то $\overrightarrow{BC}=\frac{d}{a}\overrightarrow{OA}$. Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OA}$ имеют координаты $\{x-b,\ y-c\}$ и $\{a,\ 0\}$, поэтому

$$x-b=\frac{d}{a}a,\ y-c=\frac{d}{b}\cdot 0.$$

Отсюда получаем: $x=b+d$, $y=c$.

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$AC=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2},\ OC=\sqrt{(b+d)^2+c^2}.$$

956. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основанием $AD=2a$ и высотой h. Введем прямоугольную систему координат Oxy с началом O в середине отрезка AD так, чтобы точка D лежала на положительной полуоси Ox, а прямая BC пересекала положительную полуось Oy. В этой системе координат вершины трапеции будут иметь координаты $A(-a;\ 0)$, $D(a;\ 0)$, $B(x_1;\ h)$, $C(x_2;\ h)$, где $x_2-x_1=BC$. Поэтому

$$AB^2=(x_1+a)^2+h^2,\ CD^2=(a-x_2)^2+h^2, \qquad (1)$$
$$AC^2=(x_2+a)^2+h^2,\ BD^2=(x_1-a)^2+h^2. \qquad (2)$$

а) Докажем, что если трапеция $ABCD$ равнобедренная, т. е. $AB=CD$, то ее диагонали равны: $AC=BD$. Из равенств (1) получаем:

$$(x_1+a)^2=(a-x_2)^2,\ \text{или}\ (x_1+x_2)(x_1-x_2+2a)=0.$$

Так как $AD\neq BC$, то

$$x_1-x_2+2a\neq 0,$$

поэтому $x_1+x_2=0$, или $x_1=-x_2$. Из равенств (2) теперь следует: $AC^2=BD^2$, т. е. $AC=BD$.

б) Докажем обратное утверждение: если диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны, то трапеция равнобедренная: $AB=CD$. Из равенств (2) аналогично предыдущему получаем $x_1=-x_2$, а тогда из равенств (1) следует: $AB^2=CD^2$, т. е. $AB=CD$.

987. Для решения задачи удобно ввести систему координат так, чтобы диагонали ромба лежали на осях координат. Тогда вершины ромба будут иметь координаты $A(-a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ 0)$, $D(0;\ -b)$, где $2a$ и $2b$ — длины диагоналей.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка. Условие $AM^2+DM^2=BM^2+CM^2$, записанное в координатах, дает уравнение искомого множества точек. Записав это равенство в координатах, после несложных преобразований получаем уравнение вида $ax+by=0$. Этим уравнением задается прямая, проходящая через начало координат $O(0;\ 0)$, т. е. через точку пересечения диагоналей ромба, и перпендикулярная к стороне AB. В самом де-

ле, полученное уравнение совпадает с уравнением серединного перпендикуляра l к отрезку M_1M_2, где $M_1(a;\ b)$, $M_2(-a;\ -b)$: $2(2a)x+2(2b)y=0$, или $ax+by=0$ (см. § 3, формулу (3)). Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{-2a;\ -2b\}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}\{a;\ b\}$, следовательно, прямая l перпендикулярна к прямой AB.

1000. В случаях в) — д) необходимо преобразовать данное уравнение, записав его в виде уравнения (1) из § 3.

в) Уравнение можно записать так: $(x+4)^2+(y-2)^2=-20$. Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки, поэтому данное уравнение не является уравнением окружности.

г) Уравнение можно записать так:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром в точке (1; —2) и радиусом, равным 5.

1002. а) Координаты точек A, B и C должны удовлетворять уравнению окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Подставив в это уравнение координаты данных точек, получим систему трех уравнений относительно неизвестных a, b и r:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(-4-b)^2=r^2, & (1)\\ (4-a)^2+(5-b)^2=r^2, & (2)\\ (3-a)^2+(-2-b)^2=r^2. & (3)\end{cases}$$

Решение этой системы может вызвать затруднения у учащихся, в таком случае нужно подсказать им способ решения: вычесть из уравнения (1) сначала уравнение (2), а затем уравнение (3). Получится система двух линейных уравнений с неизвестными a и b, которую учащиеся могут решить самостоятельно $\left(a=-\frac{7}{2},\ b=\frac{5}{2}\right)$. Подставив эти значения в любое из уравнений, например в уравнение (1), находим значение r^2 и записываем искомое уравнение:

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}.$$

1004. Достаточно доказать, что данные прямые не имеют ни одной общей точки. Для этого запишем уравнения данных прямых так: $y=2x+\frac{2}{3}$ и $y=2x-3$. Ясно, что эта система несовместна, т. е. нет чисел x, y, удовлетворяющих этим двум уравнениям. Геометрически это означает, что данные прямые не имеют ни одной общей точки и, следовательно, они параллельны.

1007. Пусть $OABC$ — данная трапеция с основаниями $OA=a$ и $BC=b$ (пусть $a>b$) и высотой h. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы точка A лежала на положитель-

ной полуоси Ox, а прямая BC пересекала положительную полуось Oy. В этой системе координат вершины трапеции будут иметь координаты $O(0;\ 0)$, $A(a;\ 0)$, $B(c+b;\ h)$, $C(c;\ h)$, где c — некоторое число. Далее нетрудно найти координаты середин M и N диагоналей трапеции и вычислить расстояние между ними: $MN=\frac{a-b}{2}$. Таким образом,

$$MN=\frac{1}{2}(OA-BC).$$

1010. а) Введем систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, где $a=AB$. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка. Условие $2AM^2-BM^2=2AB^2$, записанное в координатах, дает уравнение искомого множества. Оно приводится к виду

$$(x+a)^2+y^2=(2a)^2.$$

Этим уравнением задается окружность радиуса $2a$ с центром в точке $(-a;\ 0)$, т. е. в точке, симметричной точке B относительно точки A.

О первом варианте тематического планирования учебного материала глав IX и X

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала в IX классе геометрия изучается в течение всего учебного года по 2 часа в неделю, всего 68 часов. На изучение темы «Векторы. Метод координат» рекомендуется отвести 20 часов. Предлагается следующее распределение часов по этой теме:

Гл. IX, § 1.	Понятие вектора	2 ч
Гл. IX, § 2.	Сложение и вычитание векторов	3 ч
Гл. IX, § 3.	Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	4 ч
Гл. X, § 1.	Координаты вектора	2 ч
	Решение задач по теме «Векторы»	1 ч
	Контрольная работа № 1	1 ч
Гл. X, § 2.	Простейшие задачи в координатах	2 ч
Гл. X. § 3.	Уравнения окружности и прямой	3 ч
	Решение задач по теме «Метод координат»	2 ч

При проведении уроков по этой теме целесообразно использовать рекомендации по проведению соответствующих уроков в VIII и IX классах, которые даны выше. В связи с небольшим сокращением числа часов, отводимых на изучение отдельных параграфов, учителю следует по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных для решения в классе и дома.

По данной теме нужно провести одну контрольную работу.

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Вариант I

1. Точки E и F лежат соответственно на сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$, $AE=ED$, $BF:FC=4:3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}=\overrightarrow{AD}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{b}\{3;\ -2\}$, $\vec{c}\{-6;\ 2\}$.

3. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 15 см и 17 см, средняя линия равна 6 см. Найдите основания трапеции

Вариант II

1. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$, $AK=KB$, $CM:MD=2:5$. Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{q}=\overrightarrow{AD}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{c}\{-3;\ 6\}$, $\vec{d}\{2;\ -2\}$.

3. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°, бóльшая боковая сторона равна 20 см, средняя линия равна 7 см. Найдите основания трапеции

Вариант III

1. Точки P и O лежат соответственно на сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$, $BP=PC$, $AO:OD=3:2$. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}\{6;\ -2\}$, $\vec{n}\{1;\ -2\}$.

3. Основание и средняя линия прямоугольной трапеции равны соответственно 15 см и 12 см, а меньшая боковая сторона равна 8 см Найдите вторую боковую сторону трапеции.

Вариант IV

1. Точки H и T лежат соответственно на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$, $CT=TD$, $AH:HB=5:3$. Выразите вектор $\overrightarrow{HT}$ через векторы $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{d}$, если $\vec{d}=\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$, $\vec{p}\{2;\ 3\}$, $\vec{q}\{9;\ -9\}$.

3. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9 см, а бóльшая боковая сторона равна 24 см. Один из углов, прилежащих к боковой стороне, в два раза больше другого. Найдите основания трапеции.

ГЛАВА XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов (17 ч)

В этой главе введены понятия синуса, косинуса и тангенса для углов от 0° до 180°, доказаны теоремы синусов и косинусов, введено скалярное произведение векторов и рассмотрены его свойства. Основное назначение главы — развить тригонометрический аппарат как средство решения геометрических задач, а также показать, как применяется скалярное произведение векторов при решении задач.

§ 1. Синус, косинус и тангенс угла (3 ч)

Назначение данного параграфа — ввести понятия синуса, косинуса и тангенса для углов от 0° до 180° и вывести формулы для вычисления координат точки, которые будут использоваться в следующем параграфе при доказательстве теоремы о площади треугольника и теоремы косинусов.

На первом уроке полезно проверить, насколько усвоены учащимися понятия синуса, косинуса и тангенса для острого угла прямоугольного треугольника, введенные в VIII классе (глава VII, § 4). Это можно сделать с помощью *математического диктанта:*

Вариант I

1. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите синус меньшего острого угла этого треугольника.

2. Стороны прямоугольного треугольника равны 26 м, 24 м и 10 м. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.

3. Катет прямоугольного треугольника равен 6 дм, а противолежащий угол равен 30°. Найдите гипотенузу этого треугольника.

4. Вычисляя синус острого угла прямоугольного треугольника, ученик получил число 1,05. Верны ли его вычисления?

5. Найдите косинус острого угла, если его синус равен $\frac{12}{13}$.

6. Найдите тангенс острого угла, если его синус равен $\frac{12}{13}$

7. Синус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{9}{41}$. Чему равен косинус второго острого угла этого треугольника?

Вариант II

1 Стороны прямоугольного треугольника равны 5 м, 12 м и 13 м. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.

2. Стороны прямоугольного треугольника равны 10 дм, 8 дм и 6 дм. Найдите косинус меньшего острого угла этого треугольника.

3. Катет прямоугольного треугольника равен 8 см, а противолежащий угол равен 45°. Найдите гипотенузу этого треугольника.

4. Вычисляя косинус острого угла прямоугольного треугольника, ученик получил число равное 1,05. Верны ли его вычисления?

5. Найдите синус острого угла, если его косинус равен $\frac{24}{25}$

6. Найдите тангенс острого угла, если его косинус равен $\frac{24}{25}$

7. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{12}{37}$. Чему равен синус второго острого угла этого треугольника?

Затем можно приступить к изучению параграфа. Если материал уже знаком учащимся по урокам алгебры, то текст пп. 93 и 94 они могут изучить самостоятельно. В этом случае на доске записывается задание:

1) Прочитайте пп. 93, 94 и ответьте на вопросы 1—5 (с. 253)

2) Составьте конспект прочитанного материала.

3) Решите задачи 1012 (для точек A, B, M_1, M_2), 1013 (б), 1014 (а).

Если же в курсе алгебры этот материал еще не изучался, то его можно изложить в ходе беседы, опираясь на то, что учащимся уже известны понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и на основе теоремы Пифагора было доказано основное тригонометрическое тождество. Для лучшего усвоения нового материала полезно рассмотреть указанные выше задачи.

На втором уроке целесообразно обсудить с учащимися задачу 1011, а затем решить следующую задачу:

Используя единичную полуокружность, постройте угол: а) косинус которого равен $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0, —1; б) синус которого равен $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 1.

Для ее решения полезно заготовить на доске несколько полуокружностей.

Далее можно предложить учащимся доказать, что синусы смежных углов равны, а косинусы смежных углов выражаются взаимно противоположными числами.

После этого рекомендуется объяснить учащимся содержание п. 95. Закончить урок можно решением задач 1016, 1018 (в), 1019 (в.)

Следующий урок полезно начать с фронтального повторения теоретического материала по настенной таблице (рис. 266). Затем рассмотреть задачи 1015 (б), 1017 (в) и 1018 (г), а в оставшееся время можно провести *самостоятельную работу* контролирующего характера:

Вариант I. 1015 (а), 1017 (б), 1018 (а), 1019 (а).

Вариант II. 1015 (г), 1017 (а), 1018 (д), 1019 (г).

Дома: пп. 93—95; вопросы 1—6 (с. 253); задачи 1012 (для точек M_2 и M_3), 1013 (б, в), 1014 (а, б), 1015 (в), 1017 (а, б), 1018 (б), 1019 (б).

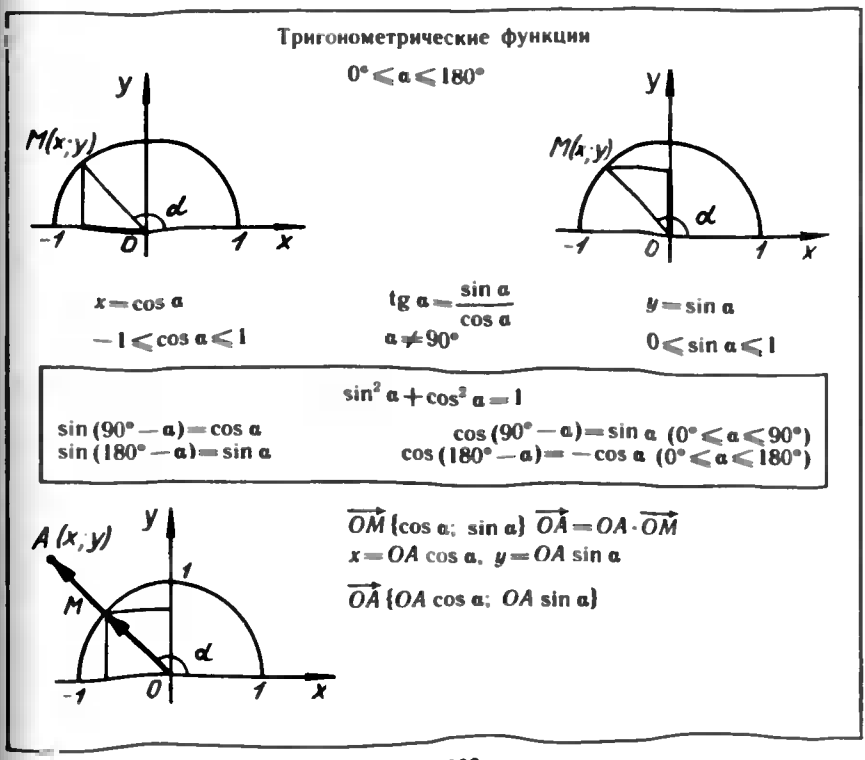


Рис. 266

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать**, как вводятся синус, косинус и тангенс для углов от 0° до 180°; **уметь** доказывать основное тригонометрическое тождество; **знать** формулы для вычисления координат точки (формулы (7) на с. 240 учебника); **уметь** решать задачи типа 1013—1019.

§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника (6 ч)

Назначение параграфа — доказать теорему о площади треугольника, теоремы синусов, косинусов и познакомить учащихся с методами решения треугольников и измерительными работами, основанными на использовании этих теорем.

Изучение параграфа можно спланировать следующим образом на первых двух уроках рассмотреть все три теоремы (пп. 96—98); третий и четвертый уроки посвятить решению треугольников (п. 99); пятый урок — решению задач, связанных с измерениями на местности (п. 100); шестой урок — решению задач по всему параграфу, итоговой самостоятельной работе.

Проверка опорных знаний учащихся может быть осуществлена с помощью *математического диктанта:*

Вариант I

1. Найдите площадь треугольника, если его основание равно 7 см, а высота равна 4 см.

2. Найдите синус угла, если его косинус равен $\frac{1}{3}$.

3. Найдите синус угла, если синус смежного с ним угла равен 0,3.

4. Начертите треугольник ABC с тупым углом C. Проведите высоту треугольника из вершины B.

5. Луч OC образует с положительной полуосью абсцисс угол 60°. Найдите координаты точки C, если $OC=6$ дм.

6. Найдите расстояние между точками $A(5;\ -5)$ и $B(-7;\ 0)$

7. Определите, каким — остроугольным, прямоугольным или тупоугольным — является треугольник, два угла которого равны 43° и 48°.

8. Точка C единичной полуокружности имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найдите угол, который образует луч OC с положительной полуосью Ox.

Вариант II

1. Найдите площадь треугольника, если его основание равно 10 дм, а высота равна 5 дм.

2. Найдите косинус угла, если его синус равен $\frac{1}{4}$.

3. Найдите синус угла, если синус смежного с ним угла равен 0,7.

4. Начертите треугольник CDE с тупым углом E. Проведите высоту треугольника из вершины C.

5. Луч OB образует с положительной полуосью абсцисс угол 30°. Найдите координаты точки B, если $OB=8$ дм.

6. Найдите расстояние между двумя точками $C(-7;\ 15)$ и $D(8;\ 0)$.

7. Определите, каким — остроугольным, прямоугольным или тупоугольным — является треугольник, два угла которого равны 35° и 56°.

8. Точка A единичной полуокружности имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Найдите угол, который образует луч OA с положительной полуосью Ox.

Изучение теорем параграфа можно организовать в форме беседы. Доказательства теоремы о площади треугольника и теоремы косинусов нетрадиционны — они основаны на формулах для вычисления координат точки, которые были выведены в п. 95 учебника. Целесообразно провести рассуждения, используя один и тот же чертеж (рис. 292 из учебника). После доказательства теоремы полезно обсудить с учащимися, какие три элемента треугольника нужно знать, чтобы вычислить четвертый элемент (сторону или угол), используя: а) теорему синусов; б) теорему косинусов.

Далее можно рассмотреть задачи 1020 (а), 1022, а также следующие две задачи:

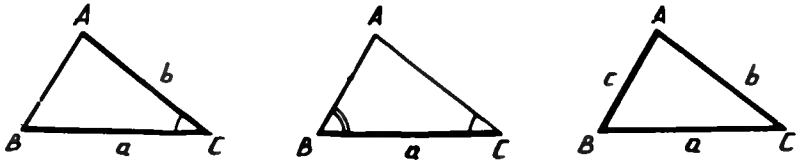
1. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $BC=3$ см, $AC=5$ см, $\angle C=60°$.

2. Найдите угол A треугольника ABC, если $AB=AC=1$ м, $BC=\sqrt{3}$ м.

При рассмотрении задач на решение треугольников полезно обратить внимание учащихся на то, что при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов. Например, зная три стороны треугольника, для вычисления первого угла применяем теорему косинусов, а для вычисления второго угла можно использовать как ту, так и другую теорему. Но поскольку синус угла равен синусу смежного с ним угла, то нахождение синуса угла еще не позволяет определить сам угол — он может быть острым или тупым. Если же вычислить косинус угла, то по его знаку и величине угол определяется однозначно.

Учащимся полезно оформить в тетради таблицу-памятку (рис. 267). Такую же настенную таблицу желательно иметь в классе.

Решение треугольников



$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$ $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$ $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$

Рис. 267

Полезно совместно с учащимися разобрать и зафиксировать в тетрадях решения задач 1021, 1024 (а), 1026, 1033.

Для проведения обучающей самостоятельной работы можно использовать задачи 1023, 1027, 1028.

Практические измерительные работы на местности учащиеся уже выполняли в предыдущих классах Желательно напомнить им, что в VIII классе высота предмета и расстояние до недоступ ной точки определялись на основе подобия треугольников В IX классе эти же задачи решаются с применением тригономет рических функций. Можно предложить учащимся самостоятельно прочитать материал п 100, а затем обсудить прочитанное и решить задачи 1036—1038. На следующем уроке в классе можно прорешать задачи 1030, 1031, 1035.

В *самостоятельной работе* контролирующего характера мож но предложить следующие задачи:

Вариант I. 1060 (а), 1058 (б), 1061 (а).

Вариант II 1060 (б), 1058 (а), 1061 (в).

Наиболее подготовленным учащимся можно дополнительно предложить задачи 1025 (в), 1034

Дома: пп. 96—100; вопросы 7—12 (с. 253); задачи 1020 (б, в), 1025 (г, ж, и), 1024 (б), 1032, 1057, 1062, 1061 (б), 1064.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** и **уметь** доказывать теорему о площади треугольника, теоремы синусов и косинусов; **уметь** решать задачи типа 1025 (а, е, з).

§ 3. Скалярное произведение векторов (4 ч)

Назначение параграфа — познакомить учащихся со скалярным произведением векторов, его свойствами и показать, как применяется скалярное произведение векторов при решении геометрических задач.

Изучение параграфа можно построить следующим образом: сначала рассмотреть понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов (2 ч), затем скалярное произведение в координатах и его свойства, применение к решению задач (2 ч).

Готовность к восприятию нового материала можно проверить с помощью *диктанта:*

Вариант I

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы коллинеарны вектору $\overrightarrow{AO}$?

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы сонаправлены с вектором $\overrightarrow{OB}$?

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы равны вектору $\overrightarrow{OC}$?

4. При каком условии $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$?

5. Известно, что $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=4$. Найдите $|\overrightarrow{OD}|$, если $AOBD$ — прямоугольник.

6. В $\triangle CDE$ $DE=5$, $CE=4$, $\angle C=45°$. Найдите сторону DE.

7. В $\triangle KLM$ $KL=LM=5$, $KM=6$. Найдите косинус угла L.

8. В $\triangle OPQ$ $\angle O=60°$, $\angle P=75°$, $OP=8$. Найдите сторону PQ.

Вариант II

1. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы коллинеарны вектору $\overrightarrow{MT}$?

2. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы сонаправлены с вектором $\overrightarrow{KM}$?

3. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы равны вектору $\overrightarrow{TL}$?

4. При каком условии $|\vec{c}-\vec{d}|=|\vec{c}|-|\vec{d}|$?

5. Известно, что точки C и D лежат соответственно на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат. Найдите $|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|$, если $|\overrightarrow{OC}|=5$, $|\overrightarrow{OD}|=12$.

6. В $\triangle ABC$ $AB=BC=8$, $AC=4$. Найдите косинус угла A.

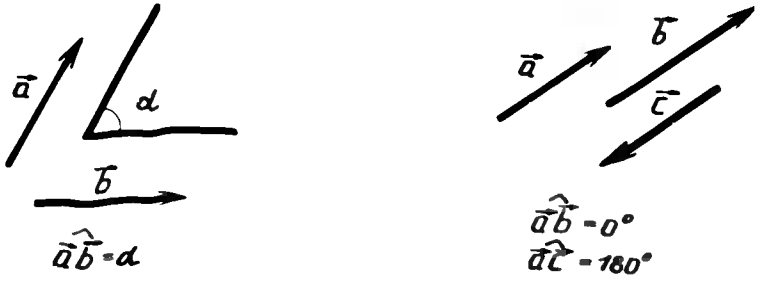
7. В $\triangle BCD$ $BC=6$, $\angle B=75°$, $\angle C=45°$. Найдите сторону BD.

8. В $\triangle DEF$ $DE=6$, $EF=7$, $\angle E=30°$. Найдите сторону DF.

При объяснении нового материала полезно обратить внимание учащихся на то, что угол между сонаправленными векторами считается равным нулю. При введении понятия скалярного произведения векторов необходимо подчеркнуть, что в отличие от суммы и разности векторов скалярное произведение есть число (скаляр) — именно это и обусловило название операции.

При объяснении материала удобно использовать таблицу

Скалярное произведение векторов



$(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90°)\Leftrightarrow(\vec{a}\perp\vec{b})$

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})}$$

Если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то:

а) $(0\leqslant\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}<90°)\Leftrightarrow(\vec{a}\,\vec{b}>0)$; б) $(90°<\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\leqslant180°)\Leftrightarrow(\vec{a}\,\vec{b}<0)$;

в) $(\vec{a}\perp\vec{b})\Leftrightarrow(\vec{a}\,\vec{b}=0)$; г) $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=0°)\Leftrightarrow(\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|)$.

$$\boxed{\vec{a}^2=\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|^2}$$

Рис. 268

Для работы в классе рекомендуются задачи 1039 (а, б, ж, з), 1040 (а, д, е), 1041 (б), 1042 (а). В контролирующую *самостоятельную работу* можно включить следующие задания:

Вариант I. 1039 (в), 1040 (в), 1041 (в), 1042 (в).

Вариант II. 1039 (г), 1040 (б), 1041 (а), 1042 (г).

Рассмотрение формулы скалярного произведения в координатах и свойств скалярного произведения векторов полезно предварить *диктантом*:

Вариант I

1. Известно, что $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы. Выпишите координаты вектора $\vec{c}$.

2. Дан вектор $\vec{m}\{0;\ 5\}$. Запишите разложение вектора $\vec{m}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

3. Даны векторы $\vec{c}\{-1;\ 2\}$ и $\vec{m}\{2;\ 1\}$. Найдите координаты суммы векторов $\vec{c}$ и $\vec{m}$.

4. Найдите координаты вектора $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{-3;\ 0\}$.

5. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ 6\}$ и $\vec{b}\{-2;\ 3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

6. Две стороны треугольника равны 7 см и 3 см, а угол между ними равен 120°. Найдите третью сторону треугольника.

7. В треугольнике ABC $\angle A=45°$, $AB=2$, $AC=3$. Вычислите $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

8. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Вариант II

1. Дан вектор $\vec{p}\{3;\ 0\}$. Запишите разложение вектора по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2. Известно, что $\vec{d}=-\vec{i}+2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы. Выпишите координаты вектора $\vec{d}$.

3. Найдите координаты вектора $-\vec{b}$, если $\vec{b}\{0;\ -2\}$.

4. Даны векторы $\vec{d}\{2;\ -1\}$ и $\vec{e}\{3;\ -1\}$. Найдите координаты разности векторов $\vec{d}$ и $\vec{e}$.

5. Даны векторы $\vec{c}\{-1;\ 9\}$ и $\vec{n}\{3;\ -2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p}=3\vec{c}+\vec{n}$.

6. В треугольнике MPQ $\angle M=135°$, $MP=5$, $MQ=2\sqrt{2}$. Вычислите $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$.

7. Две стороны треугольника равны 3 м и 9 м, а угол между ними равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.

8. Чему равно скалярное произведение координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$?

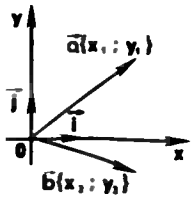
Изучение теоремы о скалярном произведении векторов в координатах и свойств скалярного произведения полезно построить так, чтобы учащиеся сами проводили алгебраические преобразования. Полученные результаты можно вынести на настенную таблицу (рис. 269).

В классе можно решить задачи 1044 (а), 1047 (а), 1048 (для угла A), 1051, 1053, а также разобрать решение задач 1054 и 1055.

При обсуждении задачи 1055 следует обратить внимание учащихся на то, что введение скалярного произведения векторов позволяет применять векторный аппарат для решения задач, в которых требуется найти углы многоугольника.

Для обучающей самостоятельной работы можно использовать задачи 1044 (б), 1045, 1047 (б).

Скалярное произведение в координатах



$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$

$\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}^2\geqslant 0$ ($\vec{a}^2>0$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$); 2) $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$; 4) $(k\vec{a})\,\vec{b}=k(\vec{a}\,\vec{b})$

Рис. 269

В заключение можно провести контролирующую *самостоятельную работу:*

Вариант I. 1049 и 1068.

Вариант II. 1065 и 1052.

Дома: пп. 103, 104; вопросы 13—21 (с. 253); задачи 1044 (в), 1047 (в), 1048 (для углов B и C), 1066.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, что такое угол между векторами; **знать** определение скалярного произведения векторов, условие перпендикулярности ненулевых векторов, выражение скалярного произведения в координатах и его свойства; **уметь** решать задачи типа 1044, 1045, 1047, 1048, 1050, 1051

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — закрепление и проверка знаний и умений учащихся, сформированных при изучении главы XI.

Первый урок полезно начать с *диктанта,* проверяющего знания по теме «Скалярное произведение векторов»:

Вариант I

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между ними равен 120°.

2. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{c}$ и $\vec{e}$ равно 0. Определите угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{c}$

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m}\{3;\ -2\}$, $\vec{n}\{-2;\ 3\}$.

4. Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x;\ y\}$ и $\vec{b}\{-y;\ x\}$.

5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p}\{3;\ -4\}$, $\vec{q}\{15;\ 8\}$.

6. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3\}$ и $\vec{b}\{x;\ -4\}$. При каком значении x эти векторы перпендикулярны?

Вариант II

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=4$, а угол между ними равен 135°.

2. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равно нулю. Определите угол между этими векторами.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-4;\ 5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 4\}$.

4. Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{c}\{x;\ -y\}$ и $\vec{d}\{y;\ x\}$.

5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-12;\ 5\}$, $\vec{b}\{3;\ 4\}$.

6. Даны векторы $\vec{m}\{3;\ y\}$ и $\vec{n}\{2;\ -6\}$. При каком значении y эти векторы перпендикулярны?

Далее можно рассмотреть задачи 1025 (б), 1059, 1056 с записью решений в тетрадях, а затем решить задачи 1063, 1042 (б), 1040 (г), 1050, 1060 (в).

Учащимся, выполнившим все задания, можно предложить задачу 1029.

Контрольная работа № 2 (1 ч)

Вариант I

1. Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если $A(-1;\ 3)$.

2. Решите треугольник ABC, если $\angle B=30°$, $\angle C=105°$, $BC=3\sqrt{2}$ см.

3. Найдите косинус угла M треугольника KLM, если $K(1;\ 7)$, $L(-2;\ 4)$, $M(2;\ 0)$.

Вариант II

1. Найдите угол между лучом OB и положительной полуосью Ox, если $B(3;\ 3)$.

2. Решите треугольник BCD, если $\angle B=45°$, $\angle D=60°$, $BC=\sqrt{3}$ см.

3. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если $A(3;\ 9)$, $B(0;\ 6)$, $C(4;\ 2)$.

Вариант III

1. Найдите угол между лучом OC и положительной полуосью Ox, если $C(\sqrt{3};\ 1)$.

2. Решите треугольник CDE, если $\angle C=60°$, $CD=8$ дм, $CE=5$ дм.

3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60°$.

Вариант IV

1. Найдите угол между лучом OD и положительной полуосью Ox, если $D(-2;\ 2)$.

2. Решите треугольник DEF, если $DE=5$ м, $DF=8$ м, $EF=4$ м.

3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60°$.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Что называется тангенсом угла α? Для какого значения α тангенс не существует и почему?

2. Сформулируйте и докажите теорему синусов.

3. Даны векторы $\vec{p}\{x;\ -4\}$ и $\vec{q}\{2;\ 3\}$. Найдите значение x, если $\vec{p}\perp\vec{q}$.

Вариант II

1. Напишите формулы приведения.

2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\{-5;\ 7\}$ и $\vec{b}\{2;\ 1\}$.

Вариант III

1. Что такое скалярное произведение векторов?

2. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

3. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если $AB=8$ м, $AC=6$ м, $BC=12$ м.

Вариант IV

1. Какие два вектора называются перпендикулярными?

2. Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

3. Найдите синус угла B треугольника ABC, если $AB=5$ см, $AC=8$ см, $\angle C=30°$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XI

1019. Эту задачу целесообразно решить сначала в общем виде. Если известны координаты x и y точки A и $x\neq 0$, то из равенств $y=OA\cdot\sin\alpha$, $x=OA\cdot\cos\alpha$, разделив первое из них почленно на второе, получаем $\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, а из этого равенства можно с помощью таблиц или микрокалькулятора найти значение α. В частных случаях решение может проводиться иначе:

а) $2=OA\cdot\sin\alpha$, $2=OA\cdot\cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha=\sin\alpha$, и, следовательно, $\alpha=45°$.

б) $0=OA\cdot\cos\alpha$, следовательно, $\cos\alpha=0$ и $\alpha=90°$.

1029. Пусть ABC — данный треугольник, $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника (рис. 270).

1. Рассмотрим треугольник BB_1C:

$$\frac{BB_1}{\sin C}=\frac{BC}{\sin B_1},\quad \angle B_1=180°-\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right),$$

поэтому

$$\sin B_1=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\quad \text{и}\quad BB_1=\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}.$$

2. Рассмотрим треугольник BC_1C:

$$\frac{CC_1}{\sin B}=\frac{BC}{\sin C_1},\quad \sin C_1=\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right),$$

следовательно,

$$CC_1=\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}.$$

3. Рассмотрим треугольник ABC:

$$\angle A=180°-(\alpha+\beta),\quad \frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},$$

откуда

$$AB=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

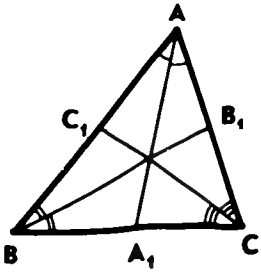


Рис. 270

В треугольнике AA_1B:

$$\angle AA_1B = 180° - \alpha - \left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Если $\alpha \geqslant \beta$, то $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \geqslant 0$, и тогда

$$\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right).$$

Если $\alpha < \beta$, то $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} < 0$, и тогда

$$\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Далее, в треугольнике AA_1B:

$$\frac{AB}{\sin AA_1B} = \frac{AA_1}{\sin B}, \text{ откуда}$$

$$AA_1 = \frac{a \sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma}.$$

где $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\alpha \geqslant \beta$; $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$, если $\alpha < \beta$.

1056. Пусть $ABCD$ — данный ромб. Выразим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Используя эти выражения, получаем:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 0$, так как $AD = AB$ Следовательно, $AC \perp BD$.

1059. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $\angle AOB = \alpha$. Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$. Найдем площадь каждого из четырех треугольников, пользуясь теоремой о площади треугольника. Учитывая, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ и $AC = AO + OC$, $BD = BO + OD$, получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

1063. $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$ или воспользуемся формулой площади треугольника:

$$\frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} xc \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} xb \sin\frac{\alpha}{2},$$

где $x = AD$. Отсюда, учитывая, что $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, находим x:

$$x = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

1069. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с прямым углом C, AM и BN — медианы треугольника. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы катет CA лежал на положительной полуоси абсцисс, а катет CB — на положительной полуоси ординат. В качестве единицы измерения отрезков возьмем отрезок CA. В этой системе координат точки A, B, M и N имеют координаты $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $M\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, поэтому

$$\overrightarrow{AM}\left\{-1;\ \frac{1}{2}\right\},\ \overrightarrow{NB}\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}.$$

По формуле (5) п. 103 находим $\cos\alpha$, где α — угол между этими векторами: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

По тригонометрическим таблицам находим $\alpha=36°51'$.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы XI

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала на изучение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» рекомендуется отвести 12 часов. Предлагается следующее распределение часов по этой теме:

§ 1. Синус, косинус и тангенс	3 ч
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	6 ч
Решение задач	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч

Тема «Скалярное произведение векторов» не входит в первый вариант программы курса геометрии IX класса, поэтому в приведенном распределении часов исключен § 3 главы XI учебника.

По первому варианту на изучение § 1 и 2 главы XI учебника отводится столько же часов, сколько и по второму варианту программы, поэтому все рекомендации по проведению уроков, данные ранее, могут быть полностью использованы и здесь. Нужно лишь на двух уроках, которые отведены на решение задач по теме в целом, исключить решение задач на скалярное произведение векторов.

Для проведения контрольной работы № 2 рекомендуется использовать варианты, предложенные выше. Однако учителю следует скорректировать эти варианты, заменив отдельные задачи, которые решаются с помощью скалярного произведения векторов, другими задачами.

ГЛАВА XII

Длина окружности и площадь круга (12 ч)

В этой главе рассматриваются традиционные вопросы, связанные с длиной окружности и площадью круга, в частности, доказываются теоремы об описанной и вписанной в правильный многоугольник окружностях.

Вывод формул длины окружности и площади круга основан на интуитивном представлении о пределе: при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, его периметр стремится к длине этой окружности, а площадь — к площади круга, ограниченного окружностью.

На изучение темы «Длина окружности и площадь круга» как по второму, так и по первому варианту тематического планирования учебного материала отводится 12 часов. Поэтому все рекомендации по проведению уроков, которые даны в этой главе, могут быть полностью использованы учителями, работающими как по второму, так и по первому варианту программы.

§ 1. Правильные многоугольники (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятие правильного многоугольника, доказать теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, вывести формулы, связывающие площадь и сторону правильного многоугольника с радиусами вписанной и описанной окружностей (они будут использованы при выводе формул длины окружности и площади круга), рассмотреть задачи на построение правильных многоугольников.

Изучение темы рекомендуется разделить на два этапа: первые два урока посвятить повторению материала, который понадобится в данном параграфе, и изучению пп. 106—107; третий и четвертый уроки — изучению пп. 108 и 109.

Повторение формулы суммы углов выпуклого многоугольника, свойств биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку, теорем об окружностях, вписанной и описанной около треугольника, признака равнобедренного треугольника, свойства касательной к окружности полезно провести в ходе решения следующих задач:

1. Все углы выпуклого пятиугольника равны друг другу Найдите величину каждого угла.

2. Докажите, что треугольник, две высоты которого равны, является равнобедренным.

3. Окружность радиуса 5 см касается сторон угла A в точках B и C. Найдите длины отрезков AB и AC, если центр окружности удален от вершины угла на 13 см.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, проходящая через их центры, перпендикулярна к отрезку AB.

5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности лежит на одной из медиан, а центр описанной окружности — на той же медиане или ее продолжении.

6. Докажите, что радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, вдвое меньше радиуса описанной около него окружности.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

8. Докажите, что для площади S любого многоугольника, описанного около окружности радиуса r, справедлива формула $S = p \cdot r$, где p — полупериметр многоугольника.

Далее можно ввести понятие правильного многоугольника, предложить учащимся вывести формулу для вычисления его угла и решить задачи 1078, 1079, 1081 (в), 1083 (в).

Затем формулируются теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него. Доказательство первой теоремы можно рассмотреть в классе, а доказательство второй и формулировки следствий учащиеся могут изучить дома. Применение первой теоремы целесообразно показать на задачах 1086 и 1084. Затем можно обсудить решения задач 1080 и 1082 и решить следующие задачи:

1. Докажите, что все диагонали правильного многоугольника равны.

2. На каждой из сторон квадрата отмечены две точки, делящие каждую сторону в отношении $1:\sqrt{2}:1$. Докажите, что эти точки служат вершинами правильного восьмиугольника.

3. Постройте с помощью транспортира и циркуля правильный пятиугольник.

В конце второго урока проведите *самостоятельную работу:*

Вариант I

1. Задачи 1081 (б), 1083 (г), 1084 (г).

2. Докажите, что три вершины правильного шестиугольника, взятые через одну, служат вершинами правильного треугольника.

Вариант II

1. Задачи 1081 (г), 1083 (а), 1084 (е).

2. Докажите, что четыре вершины правильного восьмиугольника, взятые через одну, служат вершинами квадрата.

Сильным учащимся можно предложить задачу 1207 (а).

Дома: пп. 105—107 вопросы 1—4 (с. 270); задачи 1081 (а, д), 1083 (б), 1084 (д), 1085.

Вывод формул (1) — (6) из п. 108 учебника учащиеся могут провести самостоятельно под руководством учителя. Для этого полезно заготовить на доске необходимые чертежи. Первоначальное закрепление формул можно провести в ходе фронтального решения следующей задачи: «Правильный многоугольник вписан в окружность радиуса 1 м. Вычислите сторону, периметр, площадь многоугольника и радиус вписанной окружности, если число сторон равно 3, 4, 5». Полезно на доске заготовить таблицу. Ее учащиеся будут заполнять в ходе решения задачи

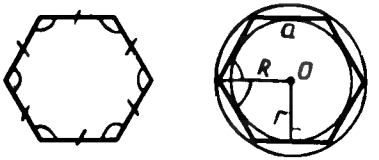
n	a_n	P	S	r
3				
4				
5				

Далее можно предложить учащимся прочитать текст п. 109, построить в тетради правильный шестиугольник, а затем на том же чертеже — правильные треугольник и двенадцатиугольник

Полезно решить в классе задачу 1098 (а).

На втором уроке вначале можно организовать фронтальное решение задач 1089, 1095, 1096, используя при этом справочную настенную таблицу (рис. 271).

Правильные многоугольники



$n=6$

$r=R\cos\frac{180°}{n}$

$a=2R\sin\frac{180°}{n}$

$S=\frac{1}{2}Pr$

n	a	r	S
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
4	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
6	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Рис. 271

Затем целесообразно провести *самостоятельную работу:*

Вариант I. 1090, 1094 (г).

Вариант II. 1091, 1094 (в).

Учащимся, интересующимся математикой, можно предложить задачи 1207 (б) и 1208.

Дома: пп. 108, 109; вопросы 5—7 (с. 270); задачи 1087, 1088, 1092, 1093, 1097, 1098 (б), 1100 (в, г).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** определение правильного многоугольника; **знать** и **уметь** доказывать теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и окружности, вписанной в правильный многоугольник, **знать** формулы для вычисления угла, площади и стороны правильного многоугольника и радиуса вписанной в него окружности; **уметь** их вывести и применять при решении задач типа 1081, 1083, 1087, 1094, 1098, 1100.

§ 2. Длина окружности и площадь круга (4 ч)

Назначение параграфа — дать представление о выводе формул длины окружности и площади круга, получить на их основе формулы длины дуги окружности и площади кругового сектора.

В VI классе учащиеся получили наглядное представление о длине окружности и площади круга, познакомились с соответствующими формулами. После изучения правильных многоугольников появляется возможность в какой-то мере обосновать эти формулы. Однако следует учесть, что это обоснование нестрогое, оно основано на интуитивном представлении о пределе: при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, его периметр стремится к длине этой окружности, а площадь — к площади круга, ограниченного окружностью. Изучение темы начните с *диктанта:*

Вариант I

1. Найдите угол правильного десятиугольника.
2. Найдите сторону правильного треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 2 м.
3. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, если радиус описанной около него окружности 2 м.
4. Найдите площадь правильного треугольника, если расстояние от его центра до вершины равно 2 м.
5. Закончите предложение: «Угол с вершиной в центре окружности называется...»
6. Угол с вершиной в центре правильного многоугольника и сторонами, проходящими через две его соседние вершины, равен 36°. Сколько сторон имеет этот многоугольник?
7. Чему равен $\cos 0°$?

8. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник.

Вариант II

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его сторона стягивает дугу описанной окружности, равную 18°?
2. Найдите площадь квадрата, если радиус описанной около него окружности равен 2 дм.
3. Закончите предложение: «Кругом называется часть плоскости...»
4. Найдите сторону квадрата, если расстояние от его центра до вершины равно 2 дм.
5. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат, если радиус описанной около него окружности равен 2 дм.
6. Чему равен cos 0°?
7. Найдите угол правильного девятиугольника.
8. С помощью циркуля и линейки постройте правильный треугольник.

Поскольку материал параграфа нетрадиционен и опирается на понятие предела, его изложение целесообразно дать в форме лекции Пункт 112 о площади кругового сектора учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику.

Для лучшего усвоения формул длины окружности и площади круга можно решить задачи 1101 и 1114 (не вычерчивая таблицы, выполнить вычисления для трех первых столбцов). Затем можно рассмотреть задачи 1109 (а, б), 1126, 1102 (а, б), 1124 и организовать фронтальное решение следующих задач: 1104 (а, в), 1105 (г), 1113, 1116 (в), 1117 (г), 1127

В конце урока рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I. 1102 (в), 1115 (б), 1109 (в), 1104 (б).

Вариант II. 1102 (г), 1115 (а), 1109 (г), 1116 (а).

Учащимся, быстро выполняющим задание, можно предложить задачи 1215 и 1216

Дома: пп. 110—112; вопросы 8—12 (с. 270); задачи 1108, 1118, 1101, 1114, 1103, 1105 (а), 1111, 1117 (а), 1120.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать** формулы длины окружности и дуги окружности, площади круга и кругового сектора; **уметь** применять их при решении задач типа 1111, 1113, 1119, 1120, 1126, 1127.

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — закрепить знания и умения учащихся по материалу главы, подготовить их к контрольной работе.

Первый урок полезно начать с *диктанта*, позволяющего проверить знание формул длины окружности и дуги окружности, площади круга и кругового сектора:

Вариант I

1. Площадь круга равна S. Найдите длину ограничивающей его окружности.

2. Найдите длину дуги окружности радиуса 9 м, если градусная мера дуги равна 120°.

3. Длина дуги окружности равна 3π, а ее радиус равен 8. Найдите градусную меру этой дуги.

4. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 13 см и 12 см.

5. Найдите площадь кругового сектора радиуса 4 см, если его центральный угол равен 45°.

6. Площадь кругового сектора равна 18π м^2, а его центральный угол равен 40°. Найдите радиус сектора.

Вариант II

1. Длина окружности равна C. Найдите площадь ограниченного ею круга.

2. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 25 см и 24 см.

3. Найдите площадь кругового сектора радиуса 3 см, если его центральный угол равен 20°.

4. Площадь кругового сектора равна 10π м^2, а его радиус равен 6 м. Найдите центральный угол сектора.

5. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 дм, если ее градусная мера равна 60°.

6. Длина дуги окружности равна 6π, а ее градусная мера равна 120°. Найдите радиус окружности.

После диктанта полезно решить следующую задачу, которая будет использована при решении задач 1105, 1117 и др.

Задача. Докажите, что площадь S треугольника вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}Pr$, где P — периметр треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, которая касается сторон в точках M, N и P (рис. 272). Очевидно,

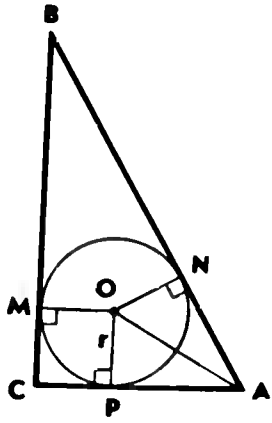


Рис. 272

$$S=S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}. \qquad (1)$$

Так как OM, ON и OP — высоты треугольников AOC, BOC и AOB, то $S_{AOC}=\frac{1}{2}AC\cdot OP$, $S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot ON$ и $S_{AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OM$. Подставив эти значения в формулу (1), получим

$$S=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r=\frac{1}{2}P\cdot r.$$

Далее рекомендуется решить задачи 1099, 1104 (д), 1105 (в), 1116 (б), 1117 (в), 1110, 1112, 1123, 1144 (б), 1138. Решения некоторых из них полезно предварительно обсудить, а затем записать в тетрадях, остальные задачи учащиеся могут решить самостоятельно с последующей проверкой ответов или решений.

Учащимся, интересующимся математикой, можно предложить задачи 1133 и 1134.

На последнем уроке целесообразно провести проверочную *самостоятельную работу*:

Вариант I. 1125, 1129 (в), 1132 (а), 1144 (а), 1197.

Вариант II 1128, 1129 (г), 1132 (б), 1143 (б), 1139.

Дома: задачи 1104 (г), 1105 (б), 1106, 1107, 1117 (в), 1121, 1122.

Контрольная работа № 3 (1 ч)

Вариант I

1. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 45 см. Найдите сторону правильного восьмиугольника, вписанного в ту же окружность.

2. Найдите площадь круга, если площадь вписанного в ограничивающую его окружность квадрата равна 72 дм^2.

3. Найдите длину дуги окружности радиуса 3 см, если ее градусная мера равна 150°.

Вариант II

1. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равен 48 м. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

2. Найдите длину окружности, если площадь вписанного в нее правильного шестиугольника равна $72\sqrt{3}$ см^2.

3. Найдите площадь кругового сектора, если градусная мера его дуги равна 120°, а радиус круга равен 12 см.

Вариант III

1. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 48 см. Найдите сторону правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность.

2. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 3 см и 7 см.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей ее хордой, если длина хорды равна 4 м, а градусная мера дуги равна 60°.

Вариант IV

1. Периметр правильного пятиугольника, вписанного в окружность, равен 6 дм. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.

2. Площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром, равна 45π м^2, а радиус меньшей окружности равен 3 м. Найдите радиус большей окружности.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей ее хордой, если длина хорды равна 2 см, а диаметр окружности равен 4 см.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте определение правильного многоугольника.

2. Докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

3. Найдите площади секторов, на которые разбивают круг два радиуса, если угол между ними равен 36°, а радиус окружности равен 4 м.

Вариант II

1. Какая точка называется центром правильного многоугольника?

2. Докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

3. Найдите длины дуг, на которые разбивают окружность два радиуса, если угол между ними равен 72°, а радиус окружности равен 6 дм.

Вариант III

1. Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближенное значение.

2. Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.

3. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 3 см.

Вариант IV

1. Как выражается сторона правильного треугольника через радиус описанной окружности?

2. Выведите формулу для вычисления радиуса окружности, вписанной в правильный n-угольник, через радиус окружности, описанной около него.

3. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром, если их радиусы равны 5 м и 10 м.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XII

1099. Диагонали A_3A_7 и A_4A_8 четырехугольника $A_3A_4A_7A_8$ являются диаметрами окружности, в которую вписан данный восьмиугольник, поэтому они равны и точкой O пересечения делятся пополам Следовательно, четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник. Так как $\angle A_3OA_4=45°$, то согласно задаче 1059 площадь прямоугольника равна $\sqrt{2}\,R^2$.

1105. в) Пусть ABC — данный треугольник, $\angle C=90°$, $\angle B=\alpha$, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $P=a+b+c$, r — радиус вписанной окружности. Тогда $a=c\cos\alpha$, $b=c\sin\alpha$.

Воспользуемся двумя формулами для вычисления площади S треугольника ABC:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\alpha=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha.$$

$S=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{c}{r}(\cos\alpha+\sin\alpha+1)$. Отсюда получаем, $r=\frac{c\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha+\sin\alpha+1)}$, поэтому $C=2\pi r=\frac{\pi c\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}$.

Умножив числитель и знаменатель на $\cos\alpha+\sin\alpha-1$, после несложных преобразований получаем: $C=\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$.

1117. в) Воспользуемся двумя формулами для вычисления площади треугольника: $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$ и $S=\frac{1}{2}P\cdot r$, где a и b — длины сторон треугольника, α — угол между ними, P — периметр, r — радиус вписанной окружности. Получим:

$$S=\frac{1}{2}a^2\cdot\sin\alpha \text{ и } S=r\cdot a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

Отсюда находим r, а затем площадь круга:

$$S_{\text{круга}}=\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

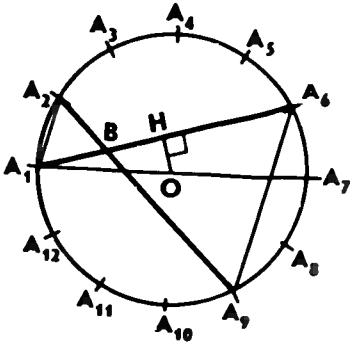


Рис 273

1133. а) Угол $A_1A_2A_9$ вписанный поэтому $\angle A_1A_2A_9=\frac{1}{2}\smile A_1A_9=\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{12}\cdot 4=60°$ (рис. 273). Аналогично $\angle A_2A_1A_6=60°$. Следовательно, $\angle A_1BA_2=60°$, и поэтому треугольник A_1A_2B равносторонний. Аналогично доказывается, что треугольник A_6A_9B равносторонний

б) Так как A_1A_7 — диаметр окружности с центром O, описанной около

данного двенадцатиугольника, то $OA_1=OA_7$. Пусть $OH\perp A_1A_6$. Угол $A_6A_1A_7$ опирается на дугу A_6A_7, поэтому $\angle HA_1O=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$. В прямоугольном треугольнике A_1HO: $A_1H=R\cdot\cos 15^\circ$, где R — радиус описанной окружности. Значит, $A_1A_6=2R\cos 15^\circ$. Но $r=R\cdot\cos 15^\circ$ (формула (3) п. 108). Следовательно, $A_1A_6=2r$.

1134. а) $\angle A_2OA_7$ центральный, поэтому $\angle A_2OA_7=\smile A_2A_7=\frac{360^\circ}{10}\cdot 5=180^\circ$, и, следовательно, A_2A_7 — диаметр, т. е. $A_2A_7=2R$ (рис. 319 учебника).

б) $\angle A_1A_2B=\angle A_1A_2A_7=\frac{1}{2}\smile A_1A_7=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{10}\cdot 4=72^\circ$, $\angle A_4OB=\angle A_4OA_2=\smile A_2A_4=72^\circ$. Следовательно, $\triangle A_1A_2B\backsim\triangle A_4OB$ по двум углам. Далее, согласно задаче 718 $\angle A_1BA_2=\frac{1}{2}(\smile A_1A_2+\smile A_4A_7)=72^\circ$, поэтому $\angle A_1BA_2=\angle A_1A_2B$, и, значит, треугольник A_1A_2B равнобедренный ($A_1A_2=A_1B$). Из подобия треугольников A_1A_2B и A_4OB следует, что треугольник A_4OB также равнобедренный ($A_4B=A_4O$).

в) Так как $A_4B=A_4O=R$, $A_1A_2=A_1B$, то $A_1A_4-A_1A_2=A_1A_4-A_1B=A_4B=R$.

1136. Положим $A_1A_4=a_4$. Тогда: 1) $B_1A_2=A_1A_2-A_1B_1=a_4-R$ (рис. 320 учебника), $C_2B_1=A_2C_2-B_1A_2=R-(a_4-R)=2R-a_4=2R-R\sqrt{2}=R(2-\sqrt{2})$, так как $a_4=R\sqrt{2}$. Аналогично находим C_3B_2, C_4B_3, C_1B_4 и получаем равенства: $C_2B_1=C_3B_2=C_4B_3=C_1B_4$.

2) В треугольнике $B_1A_2C_3$

$$B_1C_3=\sqrt{A_2B_1^2+A_2C_3^2}=\sqrt{(a_4-R)^2+(a_4-R)^2}=R(2-\sqrt{2}).$$

Аналогично находим $B_2C_4=B_3C_1=B_4C_2=R(2-\sqrt{2})$. Итак, все стороны восьмиугольника равны.

3) $\angle A_2B_1C_3=45^\circ$, поэтому $\angle C_2B_1C_3=135^\circ$. Аналогично каждый из остальных углов восьмиугольника равен 135°. Следовательно, $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ — правильный восьмиугольник.

Площадь восьмиугольника можно вычислить по формуле $S=a_4^2-4\cdot\frac{1}{2}B_1A_2^2$ или по формуле $S=\frac{1}{2}Pr$, где $P=8R(2-\sqrt{2})$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Ответ: $S=4R^2(\sqrt{2}-1)$.

1142. Обозначим радиусы данных кругов через r и R, а радиус искомого круга через x. По условию задачи $\pi r^2+\pi R^2=\pi x^2$, откуда $x^2=r^2+R^2$. Значит, радиус x равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами, равными r и R. Построив этот прямоугольный треугольник, получим отрезок, равный радиусу искомого круга, после чего можно построить сам искомый круг.

ГЛАВА XIII

Движения (12 ч)

В этой главе вводятся понятия отображения плоскости на себя, движения и рассматриваются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот. Кроме того, исследуется важный вопрос о связи понятий наложения и движения.

Понятие наложения, на основе которого определилось равенство фигур, относится в данном курсе к числу основных (неопределяемых) понятий. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (аксиомы 7—13 с. 291 учебника). В отличие от наложения движение — определяемое понятие: движения определяются как отображения плоскости на себя, сохраняющие расстояния между точками. В п. 115 (этот пункт не является обязательным для учащихся) доказано, что любое наложение является движением и, обратно, любое движение является наложением. Таким образом, доказана эквивалентность понятий наложения и движения.

На изучение темы «Движения» и по второму, и по первому вариантам тематического планирования учебного материала отводится 12 часов. Поэтому все рекомендации по проведению уроков, которые даны в этой главе, могут быть полностью использованы учителями, работающими по этим вариантам программы.

§ 1. Понятие движения (4 ч)

Назначение параграфа — ввести понятия отображения плоскости на себя и движения, рассмотреть два вида движений — осевую и центральную симметрии — и некоторые свойства движений.

В VIII классе учащиеся познакомились с осевой и центральной симметриями как свойствами геометрических фигур В данном параграфе осевая и центральная симметрии рассматриваются как примеры движений, т. е. отображений плоскости на себя, сохраняющих расстояния между точками.

Изучение темы полезно начать с повторения понятий точек, симметричных относительно данной прямой (оси симметрии), и точек, симметричных относительно данной точки (центра симметрии). В ходе повторения нужно подвести учащихся к понятию сохранения расстояния между точками. Этой цели служат следующие задачи:

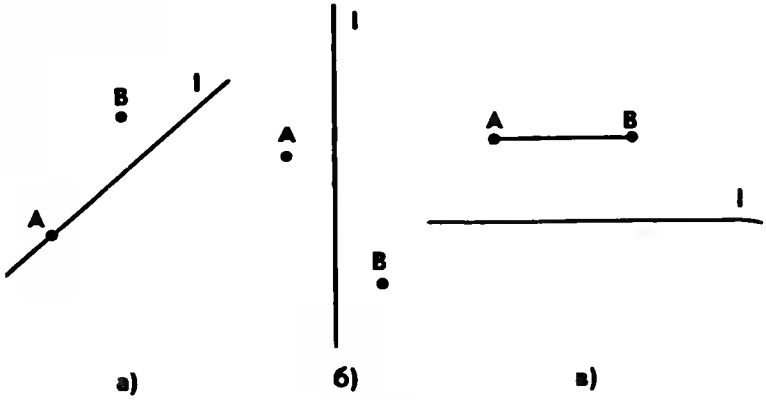


Рис. 274

1. Для каждого из случаев, представленных на рисунке 274, *а, б, в,* постройте точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой l.

2. Существует ли на плоскости такая точка, для которой нет симметричной точки относительно данной прямой?

3. Докажите, что в каждом из рассмотренных в задаче 1 случаев $A_1B_1 = AB$.

4. Постройте точки A_1 и B_1, симметричные A и B относительно точки O, если:

а) точка O лежит на отрезке AB;

б) точка O не лежит на прямой AB.

5. Существует ли такая точка плоскости, для которой нет точки, симметричной относительно данной точки?

6. Докажите, что в каждом из рассмотренных в задаче 4 случаев $A_1B_1 = AB$.

Далее нужно ввести понятие отображения плоскости на себя и проиллюстрировать его примерами осевой и центральной симметрий.

Важно подчеркнуть, что при отображении плоскости на себя выполняются два условия: 1) каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то одна точка плоскости и 2) каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то точке плоскости. Нужно показать, что в случаях осевой и центральной симметрий выполняются оба условия.

В качестве контрпримера можно привести соответствие между точками плоскости, при котором каждой точке плоскости ставится в соответствие ее ортогональная проекция на данную прямую. В этом случае нарушено второе условие отображения плоскости на себя: не каждая точка плоскости оказывается сопоставленной какой-то точке, а именно любая точка, не лежащая на данной прямой, не будет сопоставлена никакой точке плоскости

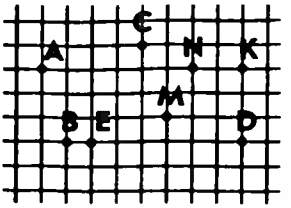


Рис. 275

(плоскость отображается не на себя, а на данную прямую).

Затем рекомендуется решить задачи 1148 (а) и 1149 (а).

Далее, опираясь на задачи 3 и 6, рассмотренные в начале урока, можно ввести понятие движения. В качестве примера отображения плоскости на себя, не являющегося движением, т. е. не сохраняющего расстояния между точками, можно рассмотреть центральное подобие (гомотетию) с коэффициентом 2; учащиеся могут сами доказать, что при таком отображении расстояния между точками увеличиваются в два раза

Для усвоения понятия движения можно решить задачу 1153, а затем по заранее подготовленному чертежу (рис. 275) — следующую задачу: «При движении плоскости точка A переходит в точку M. В какую из обозначенных на рисунке 275 точек может отобразиться при этом движении точка B?»

Далее можно доказать, что осевая и центральная симметрии являются движениями. После этого рассматривается теорема о том, что при движении отрезок отображается на отрезок, и следствие из нее. В ходе доказательства теоремы полезно акцентировать внимание учащихся на том, что доказательство состоит из двух частей: во-первых, доказывается, что каждая точка P данного отрезка MN отображается в некоторую точку P_1 отрезка M_1N_1 и, во-вторых, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 переходит какая-то точка P данного отрезка MN. После доказательства теоремы и ее следствия желательно разобрать решение задачи 1150 и решить задачи 1151, 1152 (а, б), 1158.

Хотя пункт 115* не является обязательным, учащиеся должны знать, что понятия наложения и движения эквивалентны, а значит, при движении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Для лучшего усвоения материала этого пункта полезно обсудить решение задачи 1156 и решить задачи 1154, 1157, 1155.

Дома: пп. 113—114; вопросы 1 — 13 (с. 281); задачи 1149 (б), 1148 (б), 1159, 1160, 1161, 1174.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, что такое отображение плоскости на себя; **знать** определение движения плоскости; **уметь** доказывать, что осевая и центральная симметрии являются движениями и что при движении отрезок отображается на отрезок, а треугольник — на равный ему треугольник; **уметь** решать задачи типа 1152, 1159, 1161.

§ 2. Параллельный перенос и поворот (4 ч)

Назначение параграфа — познакомить учащихся еще с двумя видами движений: параллельным переносом и поворотом.

Теоретический материал параграфа можно изложить в форме лекции. В хорошо подготовленном классе доказательство утверждения о том, что поворот является движением, учащиеся могут прочитать самостоятельно по учебнику, а затем следует его обсудить.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что при параллельном переносе прямая отображается на параллельную ей прямую или сама на себя. Отсюда следует простой способ построения образов прямых и отрезков при параллельном переносе.

Далее можно решить задачи 1162, 1164, 1166, 1167. В ходе решения задачи 1166 полезно подчеркнуть, что поворот вокруг точки на 180° по часовой стрелке совпадает с поворотом вокруг этой же точки на 180° против часовой стрелки и является центральной симметрией.

Задания 1163 и 1169 могут быть выполнены учащимися самостоятельно (с последующим обсуждением). Полезно предложить учащимся самостоятельно изучить решение задачи 1171 (а), приведенное в учебнике, выполнить необходимые построения, а затем можно обсудить это решение. Важно подчеркнуть, что решение рассмотренной задачи дает еще один способ построения прямой, на которую отображается данная прямая при повороте вокруг данной точки.

Рекомендуется рассмотреть с учащимися также следующие задачи:

1. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата являются вершинами другого квадрата.

2. Докажите, что при повороте правильного треугольника ABC вокруг вершины A на 60° либо вершина B переходит в вершину C, либо вершина C переходит в вершину B.

Самостоятельная работа (обучающего характера)

Вариант I

1. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны.

а) Постройте отрезок CA_1, на который отображается сторона AB при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$. б) Найдите площадь треугольника A_1CD, если $AD=10$ см, $BC=4$ см, $AB=6$ см.

2. Докажите, что правильный шестиугольник при повороте на 60° вокруг своего центра отображается на себя.

Вариант II

1. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC.

а) Постройте отрезок MB_1, на который отображается сторона AB при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$. б) Найдите периметр треугольника MDC, где D — точка пересечения отрезков BC и MB_1, если периметр треугольника ABC равен 12 м.

2. Докажите, что правильный пятиугольник при повороте на 72° вокруг своего центра отображается на себя.

Дома: пп. 116—117; вопросы 14—17 (с. 281); задачи 1165, 1167, 1168, 1170, 1171 (б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** объяснить, что такое параллельный перенос и поворот; доказывать, что параллельный перенос и поворот являются движениями плоскости; решать задачи типа 1164, 1165, 1167, 1168.

Решение задач (3 ч)

Назначение уроков — закрепление знаний учащихся по теме «Движения», развитие умений решать задачи с применением движений.

На этих уроках рекомендуется рассмотреть простые задачи, причем большинство из них целесообразно решать в ходе обсуждения с учащимися. Это относится к задачам 1172, 1173, 1177, 1180. Полезно обсудить и решения задач 1176, 1178, 1183. Задачи 1174, 1175, 1181, 1182 можно предложить учащимся решить самостоятельно, а затем обсудить полученные решения.

В ходе этих уроков можно провести устный опрос по материалу главы.

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Вариант I

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при симметрии относительно прямой, содержащей боковую сторону AB.

2. Две окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых равны, пересекаются в точках M и N. Через точку M проведена прямая, параллельная O_1O_2 и пересекающая окружность с центром O_2 в точке D. Используя параллельный перенос, докажите, что четырехугольник O_1MDO_2 является параллелограммом.

Вариант II

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при симметрии относительно точки, являющейся серединой боковой стороны CD.

2. Дан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Его стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 попарно равны и параллельны. Используя центральную симметрию, докажите, что диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 данного шестиугольника пересекаются в одной точке.

Вариант III

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при повороте вокруг точки A на угол, равный углу DAB, по часовой стрелке.

2. На одной стороне угла XOY отложены отрезки OA и OB, а на другой стороне — отрезки OM и ON так, что $OM=OA$, $ON=OB$. Используя осевую симметрию, докажите, что точка пересечения отрезков MB и AN лежит на биссектрисе угла XOY.

Вариант IV

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AD}$.

2. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Используя осевую симметрию, докажите, что $AC+CB<AM+MB$.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Объясните, что такое отображение плоскости на себя.

2. Докажите, что параллельный перенос является движением.

3. Точка M — середина стороны BC правильного треугольника ABC, точки N и K симметричны точке M относительно прямых AB и AC. Докажите, что $NK \perp AM$.

Вариант II

1. Что такое движение плоскости?

2. Докажите, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

3. На окружности с центром O и радиусом r отмечена точка A. Постройте окружность, на которую отображается данная окружность при повороте вокруг точки A на 60° по часовой стрелке. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения данной и построенной окружностей.

Вариант III

1. На какую фигуру отображается при движении отрезок?

2. Докажите, что центральная симметрия является движением.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Постройте точки D и E, на которые отображаются точки A и C при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, и докажите, что $AE=DB$.

Вариант IV

1. На какую фигуру отображается при движении треугольник?

2. Докажите, что поворот плоскости вокруг точки является движением.

3. Точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ является его центром симметрии. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XIII

1148. Обозначим буквой l ось симметрии, буквой a данную прямую. Осевая симметрия — движение, поэтому образом прямой a является некоторая прямая a'.

а) Пусть $a \parallel l$. Предположим, что прямые l и a' не параллельны. Тогда они имеют общую точку, обозначим ее M. Так как $M \in l$, то точка M отображается сама на себя, и, следовательно, $M \in a$. Отсюда следует, что прямые a и l имеют общую точку M, что противоречит условию $a \parallel l$. Следовательно, $a' \parallel l$.

б) Пусть $a \perp l$, M — точка пересечения прямых a и l, а N — точка прямой a, отличная от M. Так как $a \perp l$, то образ N' точки N лежит на прямой a. Очевидно, образ точки M, т. е. сама точка M, также лежит на прямой a. Таким образом, прямые a и a' имеют две общие точки: M и N', следовательно, они совпадают.

1151. Пусть $a \parallel b$, а a' и b' — образы прямых a и b при данном движении. Предположим, что прямые a' и b' не параллельны. Тогда они имеют общую точку. Обозначим ее M', а через M обозначим точку, которая при данном движении переходит в точку M'. Ясно, что $M \in a$ и $M \in b$, что невозможно, так как $a \parallel b$. Следовательно, $a' \parallel b'$.

1152. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, а A', B', C' и D' — точки, в которые отображаются вершины данного четырехугольника. Пользуясь теоремой п. 114, сначала надо доказать, что при данном движении четырехугольник $ABCD$ отображается на четырехугольник $A'B'C'D'$.

а) Так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$, то согласно задаче 1151 $A'B' \parallel C'D'$ и $B'C' \parallel D'A'$, поэтому $A'B'C'D'$ — параллелограмм.

б) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD. Тогда $AB \parallel CD$, $AB \neq CD$. Согласно задаче 1151 $A'B' \parallel C'D'$ и, кроме того, $A'B' \neq C'D'$. Следовательно, $A'B'C'D'$ — трапеция.

1154. Пусть при данном отображении каждая точка плоскости отображается на себя. Очевидно, что это отображение сохра-

няет расстояния, поэтому оно является движением. По теореме п. 115 данное отображение является наложением.

1155. Предположим, что существуют различные движения g_1 и g_2, при которых точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1. Тогда найдется такая точка M, что точки M_1 и M_2 — образы точки M при отображениях g_1 и g_2 — будут различными точками. Точно так же, как и при доказательстве теоремы п. 115, доказывается, что $A_1M_1 = A_2M_2$, $B_1M_1 = B_2M_2$, $C_1M_1 = C_2M_2$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как $A_1B_1C_1$ — треугольник.

1157. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, причем $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$. Тогда треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD = B_1D_1$. Согласно задаче 1156 существует движение, при котором точки A, B и D отображаются в точки A_1, B_1 и D_1. Далее, используя результат задачи 1151, следует доказать, что при этом движении точка пересечения прямых BC и DC отображается в точку пересечения прямых B_1C_1 и D_1C_1.

1172. Поскольку точки A и B отображаются на себя, то и прямая AB отображается на себя. Пусть M — произвольная точка прямой AB. Она отображается в некоторую точку M_1, также лежащую на прямой AB. По определению движения $AM = AM_1$, $BM = BM_1$. Допустим, что точка M_1 не совпадает с точкой M. Тогда из первого равенства следует, что точка A — середина отрезка MM_1, а из второго равенства, что точка B также середина отрезка MM_1. Значит, точки A и B совпадают, что противоречит условию задачи. Следовательно, наше предположение неверно, т. е. точки M и M_1 совпадают. Итак, любая точка прямой AB отображается на себя.

1173. Пусть g — данное движение, а e — тождественное отображение плоскости на себя, т. е. отображение, при котором каждая точка плоскости и, в частности, каждая вершина треугольника ABC отображается на себя. Ясно, что e — движение, поэтому согласно задаче 1155 движения g и e совпадают, и, значит, движение g является тождественным отображением плоскости на себя.

1178. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$ (рис. 276). Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, поэтому при этом параллельном переносе точка B отображается в точку C. Отрезки AA_1 и DA_2 равны и параллельны, поэто-

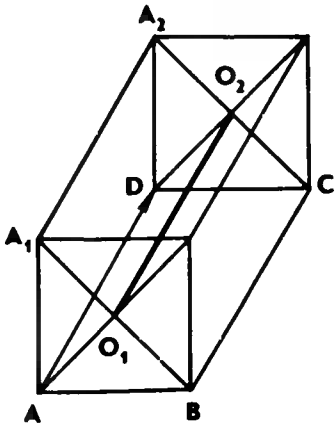


Рис. 276

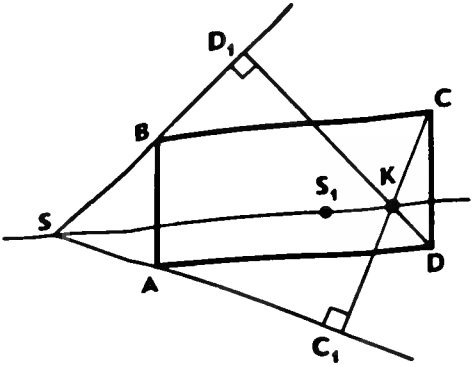


Рис. 277

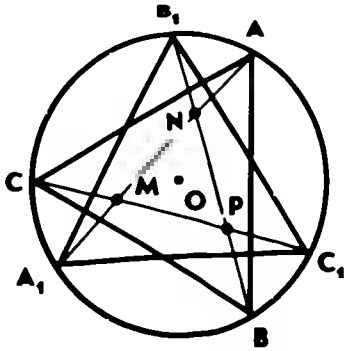


Рис. 278

му ADA_2A_1 — параллелограмм, и, следовательно, $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{AD}$. Таким образом, при рассматриваемом параллельном переносе точка A_1 отображается в точку A_2, точка B — в точку C, и, значит, отрезок A_1B отображается на отрезок A_2C. Отсюда следует, что середина O_1 отрезка A_1B отображается в середину O_2 отрезка A_2C, т. е. $\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{AD}$. Поэтому $O_1O_2=AD$, $O_1O_2 \parallel AD$.

1179. Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ точка S отображается в точку S_1 (рис. 277). Тогда треугольник ABS отображается на треугольник DCS_1. Так как $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SS_1}$, то $SS_1 \parallel BC$ Но $BC \perp CD$, поэтому $SS_1 \perp CD$. Значит, высота треугольника DCS, проведенная из вершины S, лежит на прямой SS_1. Заметим, что $CC_1 \perp S_1D$ (так как $S_1D \parallel SA$) и $DD_1 \perp S_1C$ (так как $S_1S \parallel CB$), следовательно, K — точка пересечения высот треугольника DCS_1. Отсюда следует, что прямая SS_1 проходит через точку K. Таким образом, прямые SS_1 и SK совпадают, т. е. $SK \parallel BC$, и поэтому $SK \perp AB$.

1180. Рассмотрим поворот вокруг точки O на 120° в направлении обхода по дуге ABC от точки A к точке C (рис. 278)

Так как $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$ и $OA=OB=OC$, то при этом повороте точка A отображается в точку B, точка B — в точку C, точка C — в точку A. Аналогично при этом же повороте точки A_1, B_1, C_1 отображаются соответственно в точки B_1, C_1 и A_1. Следовательно, прямая AA_1 отображается на прямую BB_1, прямая BB_1 — на прямую CC_1, прямая CC_1 — на прямую AA_1.

Отсюда следует, что если прямая AA_1 проходит через точку O, то прямые BB_1 и CC_1 также проходят через эту точку. Если же прямая AA_1 не проходит через точку O, то и прямые BB_1 и CC_1 не проходят через эту точку и, попарно пересекаясь, образуют некоторый треугольник MNP (см. рис. 278). Ясно, что при рассматриваемом повороте точка M пересечения отрезков AA_1 и BB_1 ото-

бражается в точку N пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Аналогично точка N отображается в точку P пересечения отрезков CC_1 и AA_1, а точка P — в точку M. Следовательно, $MN=NP=PM$, т. е. треугольник MNP равносторонний.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

1185. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AC}\{x-x_1;y-y_1\}$ и $\overrightarrow{CB}\{x_2-x;y_2-y\}$. По условию задачи $AC=\lambda CB$ и $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$, поэтому $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. Отсюда получаем:

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\ y-y_1=\lambda(y_2-y),$$

и, следовательно, так как $1+\lambda\neq 0$,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

1186. Пусть A_1B_1 — медиана треугольника $A_1A_2A_3$, а $M(x;y)$ — точка пересечения его медиан. Так как B_1 — середина отрезка A_2A_3, то $B_1\left(\frac{x_2+x_3}{2};\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. Используя задачу 1185 и учитывая, что $\lambda=\frac{A_1M}{MB_1}=2$, получаем:

$$x=\frac{x_1+2\,\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

1189. Пусть $B(x_4;\ y_4)$ — центр масс системы двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2. Тогда согласно определению центра масс точка B лежит на отрезке A_1A_2 и справедливо равенство $A_1B\cdot m_1=BA_2\cdot m_2$, откуда $\frac{A_1B}{BA_2}=\frac{m_2}{m_1}$. По формулам задачи 1185 получаем:

$$x_4=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\ y_4=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

Пусть $C(x;\ y)$ — центр масс системы трех точек A_1, A_2 и A_3 с массами m_1, m_2 и m_3. Тогда $A_3C\cdot m_3=CB(m_1+m_2)$, откуда

$$\frac{A_3C}{CB}=\frac{m_1+m_2}{m_3},$$

и снова по формулам задачи 1185 находим:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

1191. а) Воспользуемся указанием к решению задачи, данным в учебнике. Пусть L — линия, заданная уравнением

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

а $M_0(x_0;\ y_0)$ — некоторая ее точка. Возьмем точки $M_1(x_0-A;\ y_0-B)$ и $M_2(x_0+A;\ y_0+B)$ и, пользуясь формулой (2) п. 92, напишем уравнение серединного перпендикуляра l к отрезку M_1M_2 (рис. 279):

$$(x-x_0+A)^2+(y-y_0+B)^2=(x-x_0-A)^2+(y-y_0-B)^2.$$

Упростив это уравнение, получаем:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \text{ или } Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0.$$

Так как $M_0 \in L$, то $-Ax_0-By_0=C$. Таким образом, полученное уравнение принимает вид (1), поэтому линии L и l совпадают, т. е. L — прямая линия.

1193. Введем обозначения для координат точек A, B, C и M: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $M(x;\ y)$. Тогда уравнение искомого множества точек можно записать в виде

$$\alpha((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)+\beta((x-x_2)^2+(y-y_2)^2)+ \\ +\gamma((x-x_3)^2+(y-y_3)^2)=\sigma, \qquad (1)$$

где σ — заданное число, или

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta+\gamma)y^2-2(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)x- \\ -2(\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3)y+\alpha x_1^2+\alpha y_1^2+\beta x_2^2+\beta y_2^2+\gamma x_3^2+\gamma y_3^2=\sigma.$$

а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Разделим почленно уравнение (1) на $\alpha+\beta+\gamma$ и приведем его к виду

$$\left(x-\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2= \\ =\frac{\sigma-\alpha x_1^2-\alpha y_1^2-\beta x_2^2-\beta y_2^2-\gamma x_3^2-\gamma y_3^2}{\alpha+\beta+\gamma}+\left(\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2$$

Обозначим число, стоящее в правой части полученного уравнения, буквой k. Возможны три случая:

1°. $k>0$. Искомое множество точек есть окружность.

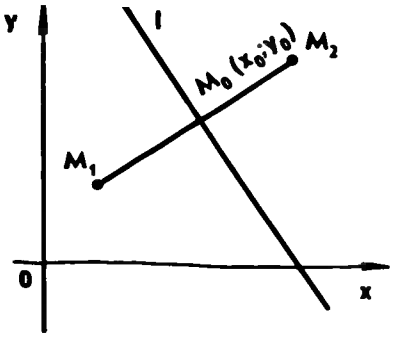


Рис. 279

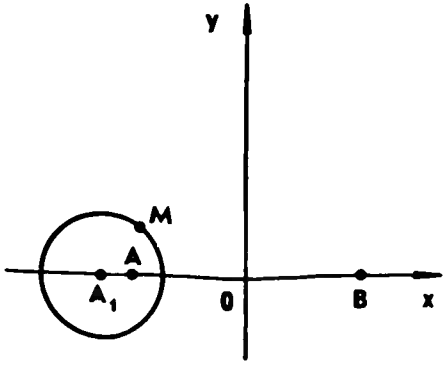


Рис. 280

2°. $k=0$. Искомое множество состоит из одной точки.

3°. $k<0$. Искомое множество точек — пустое множество.

б) $\alpha+\beta+\gamma=0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид: $Ax+By+C=0$, где A и B — коэффициенты при x и y, а C — свободный член. Возможны три случая.

1°. Хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля. Искомое множество есть прямая (см. задачу 1191,а).

2°. $A=B$, $C=0$. Искомое множество есть вся плоскость.

3°. $A=B=0$, $C\neq 0$. Искомое множество есть пустое множество.

1196. а) Введем систему координат так, как показано на рисунке 280: точки A и B имеют координаты $(-a;\ 0)$ и $(a;\ 0)$, где $a=\frac{1}{2}AB$. Точка $M(x,\ y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $AM=kBM$, т. е. $AM^2=k^2BM^2$, или $(x+a)^2+y^2=k^2(x-a)^2+k^2y^2$. Это уравнение приводится к виду

$$\left(x+a\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2.$$

Итак, искомое множество точек при любом $k\neq 1$ представляет собой окружность с центром $A_1\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2},\ 0\right)$ радиуса $\frac{2ak}{|1-k^2|}$. Одна из окружностей при $k<1$ изображена на рисунке 280.

б) Для доказательства второго утверждения, используя теорему, обратную теореме Пифагора, достаточно доказать, что $A_1C^2=r^2+R^2$, где C — центр произвольной окружности, проходящей через точки A и B, R — ее радиус, $r=\frac{2ak}{|1-k^2|}$ — радиус окружности Аполлония с центром A_1. Центр любой окружности, проходящей через точки A и B, лежит на оси Oy, поэтому точка C имеет координаты $(0;\ c)$, и, следовательно,

$$R^2=CA^2=a^2+c^2,\ A_1C^2=a^2\frac{(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2}+c^2.$$

Используя эти выражения, получаем:

$$A_1C^2=r^2+R^2.$$

1198. Пусть $\angle AOB=\varphi$ (рис. 281).
Тогда

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\varphi,$$

$$S_{OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin(180^\circ-\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin\varphi,$$

$$S_{ODC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\varphi,$$

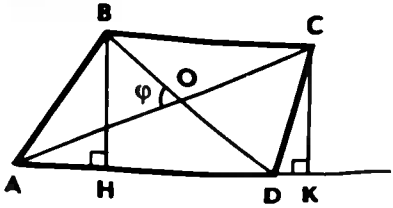


Рис. 281

$$S_{OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot OD\cdot\sin(180^\circ-\varphi)=\frac{1}{2}OA\cdot OD\cdot\sin\varphi$$

Поэтому $S_{OAB}\cdot S_{ODC}=\frac{1}{4}OA\cdot OD\cdot OC\cdot OB\cdot\sin^2\varphi=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$.

По условию $S^2_{ODC}=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$, следовательно,

$$S^2_{ODC}=S_{OAB}\cdot S_{ODC},$$

откуда $S_{ODC}=S_{OAB}$.

Значит,

$$S_{ABD}=S_{OAB}+S_{OAD}=S_{ODC}+S_{OAD}=S_{ACD}.$$

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD. Поэтому из равенства их площадей следует равенство их высот BH и CK. А это означает, что $BC\parallel AD$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

1199. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ (рис. 282, *а*). Докажем сначала, что $S\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd)$. Пусть точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Тогда

$$S=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd).$$

Это неравенство верно и в том случае, когда вершины B и D лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 282, *б*), так как в этом случае $S_{ABCD}<S_{AB_1CD}\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd)$, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой AC. Для решения исходной задачи разрежем четырехугольник $ABCD$ по диагонали AC, «перевернем» треугольник ABC и «приложим» его к треугольнику ACD «другой стороной» (рис. 282, *в*). Записав доказанное неравенство для полученного четырехугольника, получим:

$$S\leqslant\frac{1}{2}(BC\cdot CD+AB\cdot AD)=\frac{1}{2}(ac+bd).$$

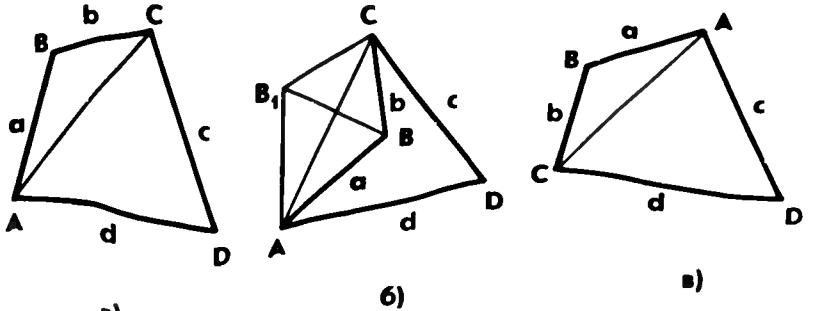


Рис. 282

1200. Первый способ. Так как $BA_1:A_1C=c:b$ (см. задачу 535), то согласно задаче 806 $\overrightarrow{AA_1}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$. Отсюда:

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{b^2\overrightarrow{AB}^2+c^2\overrightarrow{AC}^2+2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{(b+c)^2}=$$

$$=\frac{b^2c^2+c^2b^2+2b^2c^2\cos A}{(b+c)^2},\text{ или } AA_1=\frac{\sqrt{2b^2c^2(1+\cos A)}}{b+c}=$$

$$=\frac{2bc}{b+c}\frac{\sqrt{1+\cos A}}{2}=\frac{2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Второй способ. См. решение задачи 1063.

1202. Пусть S — площадь данного четырехугольника. Тогда $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha$ (рис. 283). Квадрат диагонали, противолежащей углам α и $180^\circ-\alpha$, вычисляется по формулам

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha \text{ и } x^2=c^2+d^2+2cd\cdot\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Далее,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd},$$

где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$. Итак,

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

1205. Согласно задаче 1033 $AC=2R\sin\beta$, где R — радиус описанной окружности. Выразим R через S и β. Треугольники OBC и OBM имеют общую высоту (рис. 284), поэ-

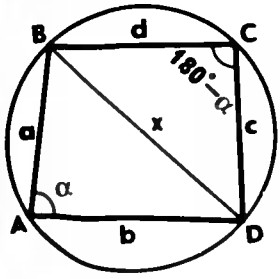


Рис. 283

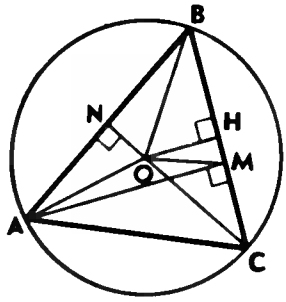


Рис. 284

тому $\frac{S_{OBM}}{S_{OBC}}=\frac{BM}{BC}$, откуда

$$S_{OBM}=\frac{BM}{BC}\cdot S_{OBC}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$S_{OBN}=\frac{BN}{AB}\cdot S_{OAB}. \qquad (2)$$

Из прямоугольного треугольника ABM находим $BM=AB\cdot\cos\beta$, а из треугольника BCN $BN=BC\cdot\cos\beta$. Согласно задаче 1033 $AB=2R\sin C$, $BC=2R\sin A$. Наконец, $\angle COB=2\angle A$ и $\angle AOB=2\angle C$, так как центральные углы AOB и COB опираются на те же дуги, что и вписанные углы C и A. Следовательно, $S_{OBC}=\frac{R^2}{2}\sin 2A=R^2\sin A\cos A$ и $S_{OAB}=\frac{R^2}{2}\sin 2C=R^2\sin C\cos C$.

Подставив все найденные выражения в равенства (1) и (2) и сложив их, получим:

$$S=S_{OBM}+S_{OBN}=R^2\cos\beta(\sin C\cos A+\sin A\cos C)=$$
$$=R^2\cos\beta\sin(A+C)=R^2\cos\beta\cdot\sin\beta.$$

Отсюда

$$R=\sqrt{\frac{S}{\cos\beta\cdot\sin\beta}},$$

и, следовательно,

$$AC=2\sqrt{\frac{S\sin^2\beta}{\cos\beta\sin\beta}}=2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}.$$

1206. Обозначим буквой P точку пересечения высот треугольника ABC, буквой O центр описанной около него окружности (рис. 285, *а*) и докажем сначала, что $AP=2OM$.

Пусть M_1 — середина стороны AB, тогда $\triangle OMM_1\sim\triangle PAC$ (их стороны соответственно параллельны). Так как $AC=2MM_1$ (MM_1 — средняя линия треугольника ABC), то $AP=2OM$. Найдем OM. Пусть прямая AN пересекает описанную около треугольника окружность в точке E (рис. 285, *б*). Тогда $OE\perp BC$ и $M\in OE$.

Прямоугольные треугольники AHN и EMN равны ($MN=NH$ по условию, углы при вершине N равны как вертикальные), поэтому $AN=NE$, а значит, ON — медиана равнобедренного треугольника AOE и тем самым его высота. Следовательно, $\angle ONM+\angle ANH=90°$. Но $\angle HAN+\angle ANH=90°$, поэтому $\angle ONM=\angle HAN$, откуда следует, что $\triangle OMN\sim\triangle NHA$. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{OM}{NH}=\frac{MN}{h}$, и, следовательно,

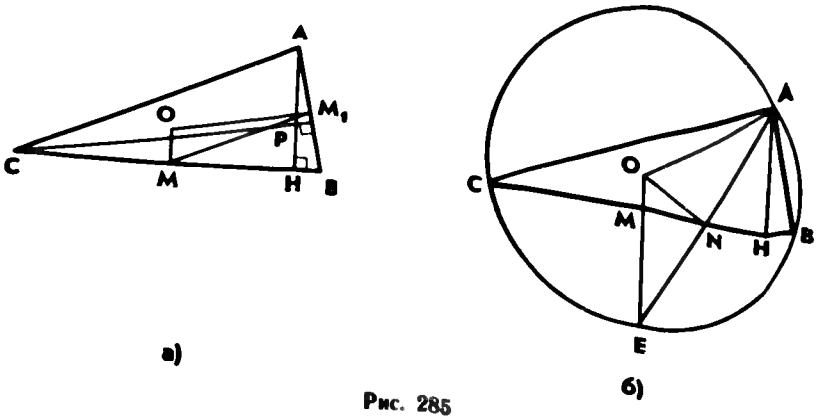


Рис. 285

$$OM=\frac{MN^2}{h}=\frac{MH^2}{4h}.$$

Из прямоугольного треугольника AMH находим $MH^2=l^2-h^2$ Итак, $OM=\frac{l^2-h^2}{4h}$, а значит, $AP=\frac{l^2-h^2}{2h}$.

1218. а) Пусть R и r — радиусы данных концентрических окружностей ($R>r$), а S — площадь ограниченного ими кольца. Тогда $S=\pi(R^2-r^2)$. Если x — радиус искомой окружности, то $S=\pi x^2$, поэтому $x^2=R^2-r^2$. Следовательно, для построения отрезка x достаточно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой R и катетом r.

1219. Пусть точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и не лежит на прямой AB, M_1 — та точка, в которую отображается точка M при данном движении g. Из равенств $M_1A=MB$, $M_1B=MA$, $MB=MA$ следует, что $M_1A=M_1B$, т. е. точка M_1 лежит на том же серединном перпендикуляре. Кроме того, $AM=AM_1$, $BM=BM_1$, а значит, либо точки M и M_1 совпадают, либо точки A и B лежат на серединном перпендикуляре и отрезке MM_1 и тогда середина отрезка MM_1 совпадает с серединой O отрезка AB. В первом случае треугольник ABM при движении g отображается на треугольник BAM. Но такое отображение можно осуществить при помощи осевой симметрии с осью OM, а согласно задаче 1156 движение, совмещающее указанные треугольники, единственно. Следовательно, g — осевая симметрия. Во втором случае точка O — середина отрезка MM_1, а движение g, совмещающее равные треугольники ABM и BAM_1, является центральной симметрией с центром O

1221. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, O и O_1 — точки пересечения их диагоналей (рис. 286), $AC=A_1C_1$, $BD=B_1D_1$, $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$. Из равенства диагоналей сле-

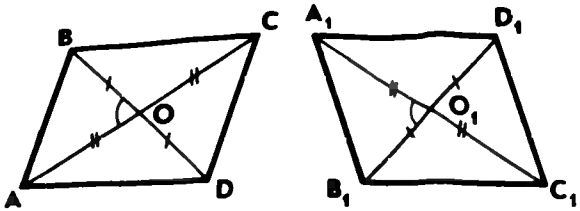


Рис. 286

дует, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle A_1O_1B_1$, поэтому существует движение, при котором точка A переходит в A_1, точка O — в O_1 и точка B — в B_1 (задача 1156) Так как при движении прямая отображается на прямую, то при указанном движении прямая AO отображается на прямую A_1O_1, прямая BO — на прямую B_1O_1, а так как при движении сохраняются расстояния между точками, то точка C переходит в точку C_1, а точка D — в точку D_1 Итак, при указанном движении вершины параллелограмма $ABCD$ совмещаются с вершинами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, поэтому совмещаются и соответствующие стороны этих параллелограммов. Следовательно, данные параллелограммы равны.

1222. Рассмотрим две трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с основаниями AB, DC и A_1B_1, D_1C_1 (рис. 287), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Пусть $AB > CD$. На сторонах AB и A_1B_1 возьмем такие точки E и E_1, что $AE = CD$ и $A_1E_1 = C_1D_1$. Тогда $BE = B_1E_1$, а четырехугольники $AECD$ и $A_1E_1C_1D_1$ — параллелограммы (их противоположные стороны равны и параллельны), поэтому $CE = C_1E_1$. Согласно задаче 1156 существует движение, при котором точки B, C, E отображаются в точки B_1, C_1, E_1. При этом движении точка A отображается в точку A_1 (так как луч EA отображается в луч E_1A_1 и $EA = E_1A_1$), а прямая CD — в прямую C_1D_1 (так как $CD \parallel BE$, $C_1D_1 \parallel B_1E_1$, см. задачу 1151). Аналогично, прямая AD отображается в прямую A_1D_1, поэтому точка D отображается в точку D_1. Итак, все вершины трапеции $ABCD$ отображаются в вершины трапеции $A_1B_1C_1D_1$, поэтому эти трапеции равны.

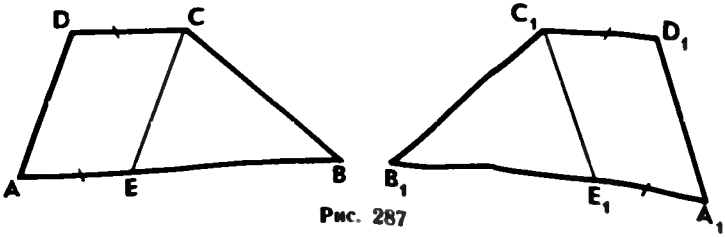


Рис. 287

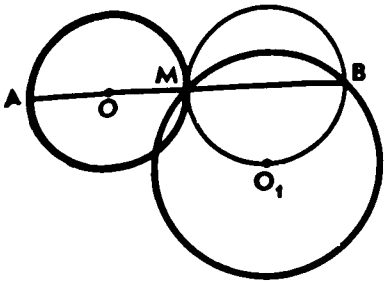


Рис. 288

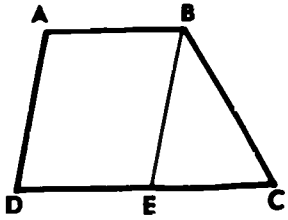


Рис. 289

1227. Пусть данные окружности пересекаются в двух точках, M — одна из этих точек, O и O_1 — центры окружностей и AB — искомый отрезок (рис. 288). При симметрии относительно точки M точка A окружности с центром O отображается в точку B, а сама окружность — на окружность, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B. Следовательно, для решения задачи нужно построить окружность, симметричную окружности с центром O относительно точки M, через точку B ее пересечения с окружностью с центром O_1 провести прямую MB и отметить точку A пересечения прямой с первой окружностью. Отрезок AB искомый.

1229. Анализ. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD (причем $CD > AB$) (рис. 289), E — точка, в которую отображается вершина D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. В треугольнике BCE стороны BC и $BE = AD$ даны, а сторону $CE = CD - AB$ легко построить по данным сторонам AB и CD. Значит, треугольник BCE можно построить.

Построение. Строим сначала треугольник BCE по трем сторонам, а затем достраиваем его до трапеции $ABCD$.

Об аксиомах планиметрии (2 ч)

При завершении курса планиметрии в конце IX класса два урока отводятся на ознакомление учащихся с аксиоматическим методом, в частности с системой аксиом, которые положены в основу изученного курса геометрии.

На первом уроке желательно провести с учащимися беседу об аксиоматическом методе в геометрии. В связи с этим необходимо напомнить им некоторые факты о возникновении и развитии геометрии. Для этой беседы рекомендуется использовать приложения 1 и 3 учебника: «Об аксиомах планиметрии» и «Некоторые сведения о развитии геометрии», а также дополнительную литературу.

В зависимости от уровня подготовки класса на втором уроке можно разобрать один или два примера теорем, которые в курсе

были доказаны на основе наглядных представлений, и доказать их с использованием принятых в учебнике аксиом. Один из таких примеров (теорема, выражающая первый признак равенства треугольников) разобран в приложении 1 учебника.

Повторение. Решение задач (11 ч)

При повторении курса геометрии необходимо сконцентрировать внимание учащихся на узловых вопросах программы. Основные факты планиметрии и применяемые в ней методы можно сгруппировать по следующим темам: «Треугольник» (3 ч), «Окружность» (2 ч), «Четырехугольники, многоугольники» (3 ч), «Векторы, метод координат, движения» (3 ч).

Рассмотрение этих вопросов может включать обобщение и систематизацию сведений об основных свойствах геометрических фигур, доказательство отдельных теорем, решение комплексных задач. При повторении полезно обращать внимание учащихся на различные методы геометрических доказательств. В зависимости от подготовки класса повторение можно проводить по всем или отдельным вопросам рассматриваемой темы.

Ниже дается подбор задач для организации итогового повторения по указанным выше темам

Треугольник

Основные вопросы программы: равенство и подобие треугольников, сумма углов треугольника, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, площадь треугольника.

Задачи

1. В треугольниках ABC и DEK $AB=DE$, $AC=DK$, $BP=EM$, где P и M — середины сторон AC и DK. а) Докажите, что $\triangle ABC=\triangle DEK$. б) Найдите S_{ABC}, если $EM=3$ см, $DK=4\sqrt{2}$ см, $\angle EMK=135°$.

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $BD=B_1D_1$, где BD и B_1D_1 — высоты треугольников, причем точки D и D_1 лежат на отрезках AC и A_1C_1. а) Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $B_1D_1C_1$, если известно, что $BD=6$ см, $DC=8$ см. в) Найдите угол $A_1C_1B_1$, если $BD=6$ см, $DC=8$ см.

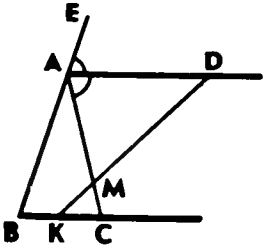


Рис. 290

3. На рисунке 290 $AB=AC$, AD — биссектриса угла EAC. а) Докажите, что $AD \parallel BC$. б) Найдите отношение площадей треугольников ADM и KMC, если $AM=5$ см, $MC=3$ см. в) Найдите S_{MKC}, если $S_{AMD}=Q$.

4. На рисунке 291 ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, $DE \perp AB$. а) Докажите, что треугольники ABC и DAE подобны б) Найдите катеты треугольника ABC, если $AB = 13$ см, $AE = 5{,}2$ см, $DE = 2$ см. в) Докажите, что около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность.

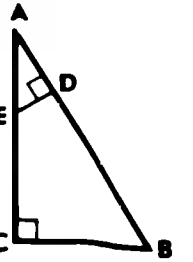


Рис. 291

5. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB, $CD = a$, $AD = b$. Найдите: а) BC; б) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC; в) отношение площадей треугольников ADC и ACB.

6. В треугольнике ABC $AB = 14$ см, $AC = 15$ см, $BC = 13$ см. Найдите: а) длину меньшей высоты треугольника; б) площадь треугольника ADC, если AD — биссектриса треугольника ABC; в) медиану AE треугольника ABC.

7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC и высоте, проведенной к AC.

8. Площадь треугольника ABC равна Q. Найдите площадь треугольника AOB_1, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC, а B_1 — середина стороны AC.

9. С помощью циркуля и линейки постройте равнобедренный треугольник ABC по основанию AC и углу B и биссектрису BD внешнего угла этого треугольника при вершине B.

Окружность

Основные вопросы программы: окружность и круг, касательная к окружности и ее свойства, окружность, описанная около треугольника, окружность, вписанная в треугольник

Задачи

1. Хорда AB окружности радиуса 4 см видна из центра под углом 90°. Найдите: а) хорду AB и расстояние от центра окружности до этой хорды; б) углы треугольника ABC, где C — точка, расположенная на большей дуге AB окружности так, что $\smile AC : \smile CB = 5:4$; г) хорду BC.

2. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K, причем $AK = 6$ см, $BK = 32$ см, $KD = 24$ см. Найдите: а) хорды BD и CD; б) расстояние от точки A до прямой BD; в) радиус данной окружности.

3. Треугольник ABC с углом B, равным 135°, вписан в окружность с центром O и радиусом $R = 10\sqrt{2}$ см. Найдите: а) сторону AB; б) сторону AB и S_{ABC}, если известно, что $\angle ACB = 30°$.

4. Точки M, D и K лежат на окружности, угол DMK равен 45°, хорда DK равна 12 см. Найдите: а) радиус данной окружности; б) угол MKD, если известно, что $DM = 6\sqrt{6}$ см.

5. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, равен 3 см, $KB+4$ см, где K — точка касания окружности с боковой стороной Найдите: а) сторону AC; б) угол BAC; в) радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

6. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, касающаяся сторон AB и BC в точках M и H. а) Докажите, что $\triangle MBH \sim \triangle ABC$. б) Найдите $\angle BAC$ и радиус окружности, если $AB=2$ м, $MH=1$ м.

Четырехугольники. Многоугольники

Основные вопросы программы: параллелограмм и его свойства, признаки параллелограмма, прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства, трапеция, многоугольник, правильные многоугольники.

Задачи

1. На рисунке 292 $AEFC$ — прямоугольник, $AC=10$ см, $AE=3$ см, $BM=AM$. а) Докажите, что MN — средняя линия треугольника ABC. б) Найдите S_{AMNC}. в) Найдите S_{ABC}.

2. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, $AB=a$, $AD=b$. Найдите: а) отрезки BE и EC; б) отрезки BK и KD и S_{ABE}, если K — точка пересечения AE и BD, а $\angle A=60°$.

3. На рисунке 293 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle 1=\angle 2$ а) Докажите, что четырехугольник $BFDK$ — параллелограмм, и найдите его площадь и периметр, если $KF=10$ см, $BD=6$ см, $\angle KOD=150°$. б) Каким условиям должны удовлетворять отрезки KF и BD, чтобы параллелограмм $BFDK$ был прямоугольником (ромбом, квадратом)?

4. Меньшая диагональ параллелограмма перпендикулярна к его стороне, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большую сторону на отрезки, равные 9 см и 16 см. Найдите: а) стороны и высоту параллелограмма, проведенную из вершины тупого угла; б) диагонали параллелограмма; в) площадь параллелограмма.

5. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AK угла A, точка K делит сторону BC на отрезки $BK=4$ см и $KC=$

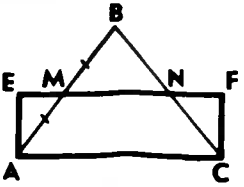


Рис 292

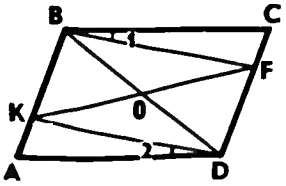


Рис 293

$=2\sqrt{2}$ см. Расстояние между параллельными прямыми AD и BC равно $2\sqrt{2}$ см. Найдите: а) углы параллелограмма; б) площадь треугольника ABC; в) радиус окружности, описанной около треугольника DKC.

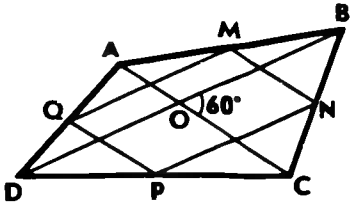


Рис. 294

6. На рисунке 294 точки M, N, P и Q — середины сторон четырехугольника $ABCD$, $AC=10$ см, $BD=18$ см. а) Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм, и найдите его периметр. б) Найдите площади четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$, если $\angle BOC=60°$.

7. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 2 см и 8 см, вписана окружность. Найдите: а) боковую сторону трапеции; б) радиус вписанной окружности; в) площадь трапеции.

8. В равнобедренной трапеции с основаниями AD и BC $\angle D=60°$, $BC=12$ см, а $\angle BCA=30°$. а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD. в) Найдите площадь трапеции $ABCD$.

9. В ромб, сторона которого равна диагонали и равна a, вписана окружность, а в эту окружность вписан правильный треугольник. Найдите: а) радиус окружности; б) сторону треугольника; в) площади ромба, круга и правильного треугольника.

10. Каждый угол правильного n-угольника $A_2A_2 \ldots A_n$ равен 150°. а) Найдите число сторон этого многоугольника. б) Найдите $\angle A_2A_3A_{10}$. в) Докажите, что треугольник A_1A_3B подобен треугольнику $A_6A_{10}B$, где B — точка пересечения диагоналей A_1A_6 и A_3A_{10} этого многоугольника.

11. Внешний угол правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ в три раза меньше угла этого многоугольника. а) Найдите число сторон этого многоугольника. б) Найдите $\angle A_3A_1A_6$. в) Докажите, что четырехугольник $A_1A_3A_4A_8$ — равнобедренная трапеция.

Векторы, метод координат, движения

Основные вопросы программы: вектор, длина вектора, сложение векторов и его свойства, умножение вектора на число и его свойства, коллинеарные векторы, прямоугольные координаты точек на плоскости, формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами, координаты середины отрезка, уравнения окружности и прямой, применение векторов и метода координат к доказательству теорем и решению задач. Движения.

Задачи

1. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(-3; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(2; 2)$, $D(4; -2)$. а) Найдите координаты середин сторон этого четырехугольника. б) Докажите, что середины сторон четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба, и найдите площадь этого ромба

2. а) Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, и выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и AD в) Определите вид четырехугольника $MNPQ$.

3. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$, б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$; в) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

4. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A(1; 3)$, $B(8; 2)$, $C(5; -1)$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна стороне BC, точка M — середина стороны BC, отрезок DM перпендикулярен к диагонали AC. Найдите углы параллелограмма.

6. Две окружности радиуса r с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга в точке M. На первой окружности отмечена точка A, а на второй — точка B так, что хорды AM и BM взаимно перпендикулярны (рис. 295). Докажите, что: а) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ отрезок AC отображается на отрезок BM, б) $AB=2r$.

7. На сторонах правильного треугольника построены квадраты (рис. 296). Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами правильного треугольника.

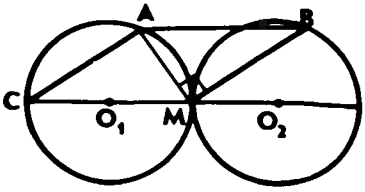


Рис. 295

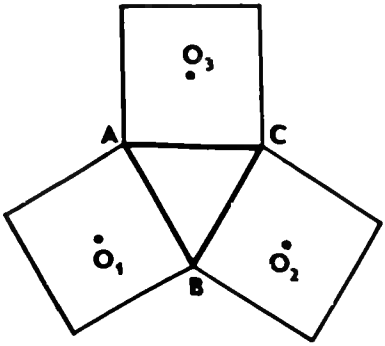


Рис. 296

ПОЧАСОВОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА (ВТОРОЙ ВАРИАНТ ПРОГРАММЫ)

VII класс

Глава I. Начальные геометрические сведения	**10**
§ 1. Прямая и отрезок	1
§ 2. Луч и угол	1
§ 3. Сравнение отрезков и углов	1
§ 4. Измерение отрезков	2
§ 5. Измерение углов	1
§ 6. Перпендикулярные прямые	2
Решение задач	1
Контрольная работа № 1	1
Глава II. Треугольники	**17**
§ 1. Первый признак равенства треугольников	3
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	4
§ 4. Задачи на построение	3
Решение задач	3
Контрольная работа № 2	1
Глава III. Параллельные прямые	**13**
§ 1. Признаки параллельности двух прямых	4
§ 2. Аксиома параллельных прямых	5
Решение задач	3
Контрольная работа № 3	1
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника	**18**
§ 1. Сумма углов треугольника	2
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	3
Контрольная работа № 4	1
§ 3. Прямоугольные треугольники	4
§ 4. Построение треугольника по трем элементам	4
Решение задач	3
Контрольная работа № 5	1
Повторение. Решение задач	**10**
Всего	**68**

VIII класс

Вводное повторение	**2**
Глава V. Четырехугольники	**14**
§ 1. Многоугольники	2
§ 2. Параллелограмм и трапеция	6
§ 3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат	4
Решение задач	1
Контрольная работа № 1	1
Глава VI. Площадь	**14**
§ 1 Площадь многоугольника	2
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	6
§ 3. Теорема Пифагора	3
Решение задач	2
Контрольная работа № 2	1

Глава VII. Подобные треугольники 19
§ 1. Определение подобных треугольников 2
§ 2. Признаки подобия треугольников 5
Контрольная работа № 3 1
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач 7
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника 3
Контрольная работа № 4 1

Глава VIII. Окружность 17
§ 1 Касательная к окружности 3
§ 2. Центральные и вписанные углы 4
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника 3
§ 4. Вписанная и описанная окружности 4
Решение задач 2
Контрольная работа № 5 1

Глава IX. Векторы 12
§ 1 Понятие вектора 2
§ 2. Сложение и вычитание векторов 4
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач 4
Решение задач 1
Контрольная работа № 6 1
Повторение. Решение задач 6
Всего 84

IX класс

Вводное повторение 2

Глава X. Метод координат 12
§ 1. Координаты вектора 3
§ 2. Простейшие задачи в координатах 3
§ 3. Уравнения окружности и прямой 3
Решение задач 2
Контрольная работа № 1 1

Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов 17
§ 1. Синус, косинус и тангенс угла 3
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 6
§ 3. Скалярное произведение векторов 4
Решение задач 3
Контрольная работа № 2 1

Глава XII. Длина окружности и площадь круга 12
§ 1. Правильные многоугольники 4
§ 2. Длина окружности и площадь круга 4
Решение задач 3
Контрольная работа № 3 1

Глава XIII. Движения 12
§ 1. Понятие движения 4
§ 2. Параллельный перенос и поворот 4
Решение задач 3
Контрольная работа № 4 1
Об аксиомах планиметрии 2
Повторение. Решение задач 11
Всего 68

ПОЧАСОВОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА (ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ ПРОГРАММЫ)

VII класс

Глава I. Начальные геометрические сведения	**7**
§ 1, § 2. Прямая и отрезок. Луч и угол	1
§ 3. Сравнение отрезков и углов	1
§ 4, § 5. Измерение отрезков. Измерение углов	2
§ 6. Перпендикулярные прямые	1
Решение задач	1
Контрольная работа № 1	1
Глава II. Треугольники	**14**
§ 1. Первый признак равенства треугольника	3
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	3
§ 4. Задачи на построение	2
Решение задач	2
Контрольная работа № 2	1
Глава III. Параллельные прямые	**9**
§ 1. Признаки параллельности двух прямых	3
§ 2. Аксиома параллельных прямых	3
Решение задач	2
Контрольная работа № 3	1
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника	**16**
§ 1. Сумма углов треугольника	2
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	3
Контрольная работа № 4	1
§ 3. Прямоугольные треугольники	4
§ 4. Построение треугольника по трем элементам	2
Решение задач	3
Контрольная работа № 5	1
Повторение. Решение задач	**4**
Всего	**50**

VIII класс

Глава V. Четырехугольники	**14**
§ 1. Многоугольники	2
§ 2. Параллелограмм и трапеция	6
§ 3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат	4
Решение задач	1
Контрольная работа № 1	1
Глава VI. Площадь	**14**
§ 1. Площадь многоугольника	2
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	6
§ 3. Теорема Пифагора	3
Решение задач	2
Контрольная работа № 2	1
Глава VII. Подобные треугольники	**19**
§ 1. Определение подобных треугольников	2
§ 2. Признаки подобия треугольников	5
Контрольная работа № 3	1
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	7

§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника 3
Контрольная работа № 4 1

Глава VIII. Окружность 17
§ 1. Касательная к окружности 3
§ 2. Центральные и вписанные углы 4
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника 3
§ 4. Вписанная и описанная окружности 4
Решение задач 2
Контрольная работа № 5 1
Повторение. Решение задач 4
Всего 68

IX класс

Вводное повторение 2

Глава IX. Векторы 9
§ 1. Понятие вектора 2
§ 2. Сложение и вычитание векторов 3
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач 4

Глава X. Метод координат 11
§ 1. Координаты вектора 2
Решение задач 1
Контрольная работа № 1 1
§ 2. Простейшие задачи в координатах 2
§ 3. Уравнения окружности и прямой 3
Решение задач 2

Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника 12
§ 1. Синус, косинус и тангенс угла 3
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 6
Решение задач 2
Контрольная работа № 2 1

Глава XII. Длина окружности и площадь круга 12
§ 1. Правильные многоугольники 4
§ 2. Длина окружности и площадь круга 4
Решение задач 3
Контрольная работа № 3 1

Глава XIII. Движения 12
§ 1. Понятие движения 4
§ 2. Параллельный перенос и поворот 4
Решение задач 3
Контрольная работа № 4 1
Об аксиомах планиметрии 2
Повторение. Решение задач 8
Всего 68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

VII класс

Глава I. Начальные геометрические сведения 5
§ 1. Прямая и отрезок —
§ 2. Луч и угол 9
§ 3. Сравнение отрезков и углов 10
§ 4. Измерение отрезков 11
§ 5. Измерение углов 14
§ 6. Перпендикулярные прямые 15
Решение задач 17
Контрольная работа № 1 —
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 18
Комментарии и рекомендации по решению задач главы I 19
О первом варианте тематического планирования учебного материала главы I 21

Глава II. Треугольники 22
§ 1. Первый признак равенства треугольников 23
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника 26
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников 28
§ 4. Задачи на построение 33
Решение задач 35
Контрольная работа № 2 37
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 38
Комментарии и рекомендации по решению задач главы II 39
О первом варианте тематического планирования учебного материала главы II 44

Глава III. Параллельные прямые —
§ 1. Признаки параллельности двух прямых 45
§ 2. Аксиома параллельных прямых 48
Решение задач 51
Контрольная работа № 3 53
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 54
Комментарии и рекомендации по решению задач главы III 55
О первом варианте тематического планирования учебного материала главы III 56

Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника 57
§ 1. Сумма углов треугольника —
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 59
Контрольная работа № 4 63
§ 3. Прямоугольные треугольники 64
§ 4. Построение треугольника по трем элементам 67
Решение задач 68
Контрольная работа № 5 69
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 70
Комментарии и рекомендации по решению задач главы IV 71
О первом варианте тематического планирования учебного материала главы IV 74
Повторение. Решение задач —
Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности —

VIII класс

Уроки вводного повторения 79
Глава V. Четырехугольники —
§ 1. Многоугольники 80
§ 2. Параллелограмм и трапеция 83
§ 3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат 87
Решение задач 89
Контрольная работа № 1 90
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся —
Комментарии и рекомендации по решению задач главы V 91

Глава VI. Площадь 95
§ 1. Площадь многоугольника 96
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции 99
§ 3. Теорема Пифагора 103
Решение задач 105
Контрольная работа № 2 106
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 107
Комментарии и рекомендации по решению задач главы VI 108

Глава VII. Подобные треугольники 113
§ 1. Определение подобных треугольников 114
§ 2. Признаки подобия треугольников 116
Контрольная работа № 3 119
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач —
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника 125
Контрольная работа № 4 127
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся —
Комментарии и рекомендации по решению задач главы VII 128

Глава VIII. Окружность 133
§ 1. Касательная к окружности 134
§ 2. Центральные и вписанные углы 136
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника 138
§ 4. Вписанная и описанная окружности 141
Решение задач 144
Контрольная работа № 5 —
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 145
Комментарии и рекомендации по решению задач главы VIII —

Глава IX. Векторы 153
§ 1. Понятие вектора —
§ 2. Сложение и вычитание векторов 155
§ 3. Умножение вектора на число Применение векторов к решению задач 158
Решение задач 162
Контрольная работа № 6 163
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 164
Комментарии и рекомендации по решению задач главы IX 165
Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности 168
Повторение. Решение задач 183

IX класс

Уроки вводного повторения 184
Глава X. Метод координат 185
§ 1. Координаты вектора 186

§ 2. Простейшие задачи в координатах 188
§ 3. Уравнения окружности и прямой 191
Решение задач 193
Контрольная работа № 1 194
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 195
Комментарии и рекомендации по решению задач главы X 196
О первом варианте тематического планирования учебного материала глав IX и X 199

Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника 201
Скалярное произведение векторов —
§ 1. Синус, косинус и тангенс угла —
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 204
§ 3. Скалярное произведение векторов 207
Решение задач 210
Контрольная работа № 2 211
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 212
Комментарии и рекомендации по решению задач главы XI 213
О первом варианте тематического планирования учебного материала главы XI 215

Глава XII. Длина окружности и площадь круга 216
§ 1. Правильные многоугольники —
§ 2. Длина окружности и площадь круга 219
Решение задач 220
Контрольная работа № 3 222
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 223
Комментарии и рекомендации по решению задач главы XII 224

Глава XIII. Движения 226
§ 1. Понятие движения —
§ 2. Параллельный перенос и поворот 229
Решение задач 230
Контрольная работа № 4 —
Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся 231
Комментарии и рекомендации по решению задач главы XIII 232
Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности 235
Об аксиомах планиметрии 243
Повторение. Решение задач 244
Приложение. Почасовое тематическое планирование учебного материала (второй вариант программы) 249
Почасовое тематическое планирование учебного материала (первый вариант программы) 251

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Некрасов Владимир Борисович
Юдина Ирина Игоревна

Изучение геометрии в 7—9 классах

Пособие для учителей

Зав. редакцией *Г. А. Бурмистрова*
Редакторы *Л. В. Туркестанская, Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художники *О. М. Шмелев, В. А. Андрианов, Е. В. Соганова, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технические редакторы *Л. В. Марухно, Л. М. Абрамова, Н. Н. Бажанова*
Корректор *И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 17.03.09. Формат 60×90 1/16. Бумага газетная. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 14,90. Тираж 3 000 экз. Заказ № 28081.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ПРОСВЕЩЕНИЕ

Выпускаем

- Учебники
- Методическую литературу
- Научно-познавательную литературу
- Словари и справочную литературу
- Наглядные пособия и карты
- Учебные мультимедийные пособия

Обучаем

Интернет-школа «Просвещение.ru»
125315, Москва, ул. Балтийская, 14
Тел. (495) 155 4403, 729-3522, 729-3533
E-mail:office@internet-school.ru

Представляем

На сайте издательства для наших партнеров, учителей и родителей

- Каталог выпускаемой продукции
- Методические пособия, презентации, программы повышения квалификации, поурочные разработки, аудиокурсы mp3
- Информационно-публицистический бюллетень «Просвещение»
- Форумы «Просвещение», «Спрашивайте – Отвечаем!»
- Ссылки на образовательные Интернет ресурсы
- Адреса региональных книготорговых структур

Приглашаем к сотрудничеству

- Учреждения дополнительного педагогического образования и библиотеки с целью проведения авторских и методических семинаров
- Книготорговые структуры для сотрудничества по продвижению литературы издательства

Издательство «Просвещение»
127521, Москва,
3-й проезд Марьиной рощи, 41
Тел. (495) [illegible]
Факс (495) [illegible]
[illegible]
www.prosv.ru

Интернет-магазин Umlit.ru
Доставка почтой по России, курьером по Москве
129075, Москва, ул. Калибровская, 31А
[illegible] «Абрис Д» (ПР 5)
Тел. (495) 281 [illegible]
[illegible]
www.umlit.ru

Учебно-методический комплект по геометрии для 7 – 9 классов включает:

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина
УЧЕБНИК ДЛЯ 7 – 9 КЛАССОВ

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, В.Б. Некрасов, И.И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7 – 9 классах

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7 – 11 классов

ISBN 978-5-09-021736-1
9 785090 217361

ПРОСВЕЩЕНИЕ