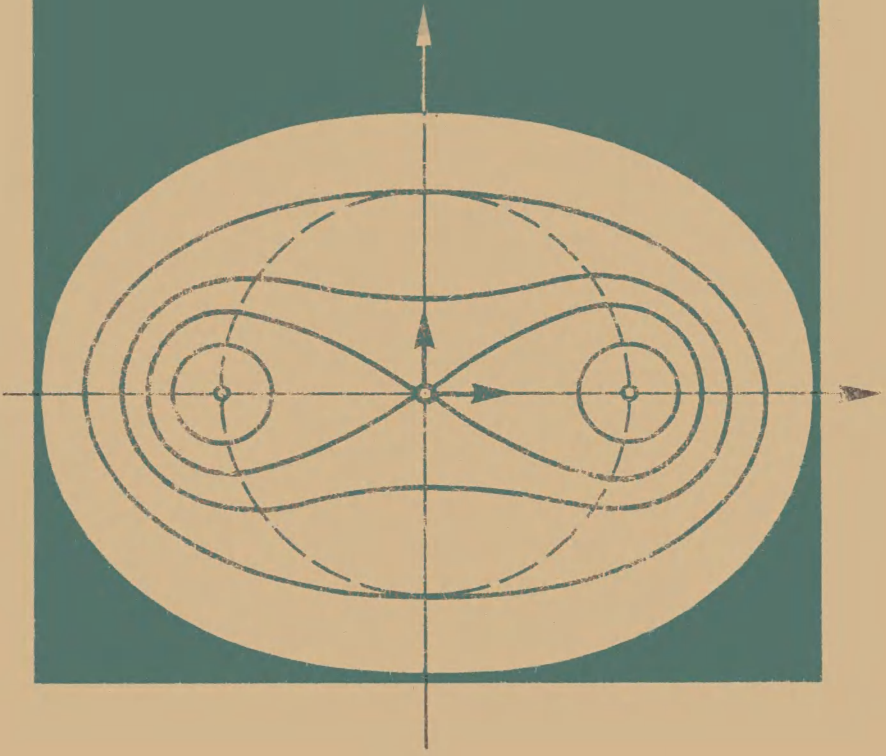
Л. С. АТАНАСЯН, В. А. АТАНАСЯН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ

I



Л. С. АТАНАСЯН, В. А. АТАНАСЯН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ I

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА · «ПРОСВЕЩЕНИЕ» · 1973

513
А 92

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник составлен в соответствии с новой программой курса геометрии для студентов первых курсов физико-математических факультетов педагогических институтов по специальности «математика» и охватывает всю программу курса. Задачник может полностью обеспечить также геометрическую часть курса «Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры» физических отделений физико-математических факультетов. При составлении задачника имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочных и вечерних отделений педагогических институтов, а также лица, изучающие предмет самостоятельно. В связи с этим ответы к большинству задач снабжены указаниями, а иногда и решениями.

В данный сборник включены задачи, помещенные авторами в «Сборник задач по аналитической геометрии», изданный в 1968 году издательством «Просвещение». Однако изменение программы потребовало значительной переработки ранее изданного задачника и включения в него новых разделов, таких, как теория преобразований на плоскости, многоугольники и многогранники, основы многомерной геометрии.

Задачник состоит из двух разделов: раздел I — элементы векторной алгебры; геометрия на плоскости и раздел II — прямые линии, плоскости и квадрики в евклидовых и аффинных пространствах.

В каждом разделе задачи, относящиеся к определенной теме, объединены в параграфы. В задачнике уделено большое внимание подбору задач элементарной геометрии, решаемых методами аналитической геометрии. Эти задачи, как правило, выделены в отдельные параграфы.

Предлагаемый задачник составлен по тому же принципу, что и учебное пособие Л. С. Атанасяна «Геометрия, часть I» (М., «Просвещение», 1973). Эти две книги, дополняя друг друга, представляют единое учебное пособие по программе I — II семестров курса «Геометрии».

При составлении задачника использована учебная литература, список которой помещен на стр. 252.

Атанасян Л. С. и Атанасян В. А.

А 92 Сборник задач по геометрии. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Ч. I. М., «Просвещение», 1973.

256 с.

Предлагаемый сборник задач предназначен для студентов физико-математических факультетов пединститутов. В книге помещены задачи на векторную алгебру, метод координат на плоскости и в пространстве и теорию преобразований на плоскости. Много задач, относящихся к аффинным и евклидовым многомерным пространствам, включая квадратичные формы и квадрики.

$$А\ \frac{0662-405}{М103(03)-73}\ 30-73$$

513

Раздел первый

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава I.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Сложение и вычитание векторов

1. Равенство и коллинеарность векторов

1. Для произвольного треугольника ABC точки M, N и P — соответственно середины сторон AC, AB и BC. Среди указанных ниже пар векторов найти пары равных и пары коллинеарных, но неравных векторов: а) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MC}$; е) $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{CM}$; ж) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{NP}$.

2. Начертите параллелограмм $ABCD$ и обозначьте через O точку пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, а какие коллинеарны, но не равны:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CO}$.

3. Будут ли выполнены свойства рефлексивности, транзитивности и симметричности для понятия «равенства векторов», если его ввести одним из следующих способов:

а) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$;

б) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они образуют угол $\varphi = 120°$;

в) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо перпендикулярны;

г) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{b}|$;

д) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо образуют угол 30°.

4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, O — точка пересечения диагоналей, а M, N, P, Q — середины сторон AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 (рис. 1). Доказать, что:

а) $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON}$; в) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

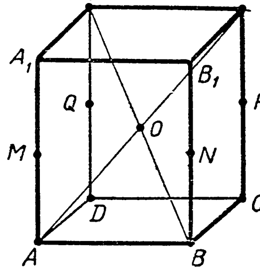


Рис. 1

2. Сложение и вычитание векторов

5. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а E и F — соответственно середины параллельных сторон BC и AD. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FO}$; е) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{CD}$.

6. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а точки M, N, P и Q — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CP}$; в) $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{PD}$;
д) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MQ}$; е) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$; ж) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}$.

7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображенный на рисунке 1. Из точек, указанных на этом рисунке (относительно обозначений см. задачу 4), образовать векторы, равные соответственно следующим векторам:

а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MO}$;
в) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{NC}$; г) $\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AA_1}$.

8. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображенные на рисунках 2, *а*, *б*, *в*.

9. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проверить на чертеже справедливость тождеств:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$;
б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$;
в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$;

где $2\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$ суть $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$.

10. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, O — его центр. Полагая $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, выразить $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

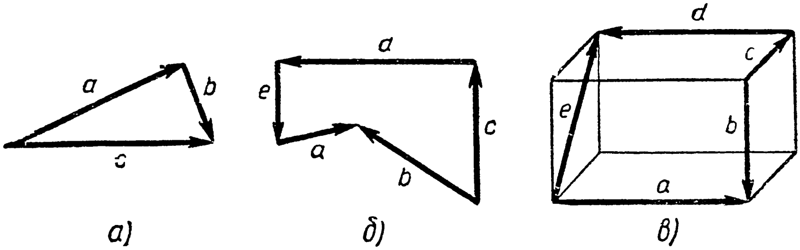


Рис. 2

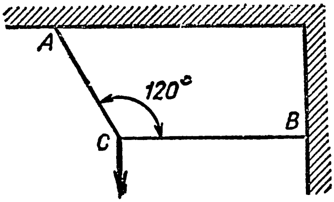


Рис. 3

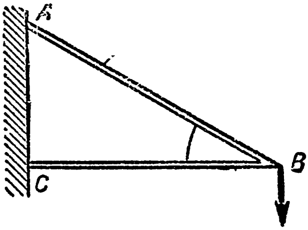


Рис. 4

11. К двум тросам подвешен груз весом 30 *кг* (рис. 3). Определить силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120°$.

12. Груз весом 60 *кг* поддерживается двумя стержнями — AB и CB (рис. 4). Определить силы, возникающие в стержнях, если $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = 30°$.

13. Дан параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O пространства. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Доказать обратное утверждение: если для некоторого пространственного четырехугольника $ABCD$ и некоторой точки O имеет место соотношение $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, то $ABCD$ — параллелограмм.

3. Модуль вектора

14. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Показать, что $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?

15. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Показать, что $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?

16. В каждом из случаев а) и б) выяснить, существуют ли векторы, для которых одновременно имеют место неравенства:

а) $|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1| < |\boldsymbol{a}_1|$ и $|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1| < |\boldsymbol{b}_1|$;

б) $|\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2| > |\boldsymbol{a}_2|$ и $|\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2| > |\boldsymbol{b}_2|$.

17. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, то при каких условиях векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ коллинеарны?

18. Изображая векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ с помощью диагоналей параллелограмма, найти условия, при которых $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

§ 2. Умножение вектора на число. Линейная зависимость

1. Умножение вектора на число.

19. Начертить произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и построить векторы: $2\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{a}$, $\sqrt{2}\boldsymbol{a}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}$, $5\boldsymbol{a}$, $-\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}$.

20. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить каждый из следующих векторов: $4\boldsymbol{a}$, $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$, $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}$.

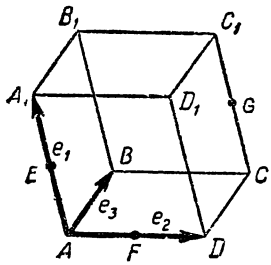


Рис. 5

21. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проверьте на чертеже справедливость тождеств:

а) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

б) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

в) $\left(\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)-\left(\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)=\boldsymbol{b}$.

22. На рисунке 5 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где E, F и G — середины соответственно сторон AA_1, AD и CC_1. Из точек, указанных на этом рисунке, подобрать такие пары, чтобы образовались векторы, равные соответственно следующим векторам: а) $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$; б) $\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$; в) $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$; г) $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+$ $+\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$. Здесь $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AA_1}$, $\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{e}_3=\overrightarrow{AB}$.

23. В треугольнике ABC векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ и $\overrightarrow{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

24. Пусть ABC — производный треугольник, а E и F — середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AE}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AF}$.

25. На прямой дана последовательность следующих друг за другом точек $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, для которых $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_9A_{10}$.

Определить отношения векторов: а) $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_8A_7}$; б) $\overrightarrow{A_1A_5}:\overrightarrow{A_5A_3}$; в) $\overrightarrow{A_3A_{10}}:\overrightarrow{A_5A_7}$; г) $\overrightarrow{A_8A_4}:\overrightarrow{A_9A_3}$; д) $\overrightarrow{A_6A_3}:\overrightarrow{A_{10}A_1}$.

26. Дан произвольный треугольник с медианами AM_1, BM_2 и CM_3 и точкой O пересечения медиан. Какие из указанных ниже выражений имеют смысл: $\overrightarrow{AM_3}:\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AO}:\overrightarrow{OM_2}$; $\overrightarrow{M_3O}:\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{AM_1}:\overrightarrow{M_1O}$; $\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OM_2}$?

2. Линейная зависимость. Подпространства

27. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы. Выясните, коллинеарны ли следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{a}-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{p}_2=\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$;

б) $\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$;

в) $\boldsymbol{p}_1 = 7\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{p}_2 = 3\sqrt{5}\,\boldsymbol{a}$;

г) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a} - 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{b} + \sqrt{6}\,\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{p}_2 = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} + 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{c}$.

28. Доказать, что для двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, исходящих из одной точки, вектор $|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$ коллинеарен биссектрисе угла, определяемого векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а вектор $|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$ коллинеарен биссектрисе смежного с ним угла.

29. Дан треугольник ABC и произвольная точка O пространства. Обозначим через M точку пересечения каких-либо двух медиан треугольника, а через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Доказать, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3).$$

30. Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют произвольное расположение в пространстве. Показать, что $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{M_1M_2}$, где M_1 и M_2 — точки пересечения медиан данных треугольников.

31. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей. Полагая $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \boldsymbol{b}$, выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

32. В тетраэдре $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = 3$. Полагая $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AE}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AD}$, выразить через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{EC}$.

33. Отрезок AB разделен точками $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ на n равных частей. Полагая $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, выразить через них векторы $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}, \ldots, \overrightarrow{OC_{n-1}}$. Здесь O — произвольная точка пространства.

34. Даны треугольник ABC и произвольная точка O. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Доказать, что равнодействующая сил $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равна равнодействующей $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$.

35. Пусть l_1 и l_2 — две пересекающиеся прямые, а $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор. Если через A и B провести прямые, параллельные прямой l_2, и обозначить соответственно через A_1 и B_1 точки пересечения этих прямых с прямой l_1, то получим вектор $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{A_1B_1}$, который называется составляющей вектора $\boldsymbol{x}$ на прямой l_1 по направлению прямой l_2. Доказать: а) если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'$; б) если $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$; в) если $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{x}'$.

36. Множество всех векторов, принадлежащих некоторой прямой, называется *одномерным векторным пространством*. Доказать теорему: для того чтобы система коллинеарных векторов Ω, содержащая хотя бы один нулевой вектор, была одномерным векторным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $\boldsymbol{a}$ системы Ω и любого действительного числа α вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ принадлежал Ω.

37. Пусть h — луч, исходящий из точки O, а Ω — совокупность всех векторов $\overrightarrow{OM}$, где M — произвольная точка луча h. Является ли Ω одномерным векторным подпространством?

38. Множество всех векторов, принадлежащих некоторой плоскости, называется **двумерным векторным подпространством**. Доказать теорему: для того чтобы система компланарных векторов Ω, содержащая хотя бы два неколлинеарных вектора, была двумерным векторным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ системы Ω и любого действительного числа α имели место условия:

1) $\alpha\boldsymbol{a} \in \Omega$; 2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \Omega$.

39. Пусть AOB — угол, а Ω — совокупность всех векторов $\overrightarrow{OM}$, где M — произвольная внутренняя точка угла. Является ли множество векторов Ω двумерным векторным подпространством?

40. Определить векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{b}, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы.

41. Определить векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = 4\boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} = 11\boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} = 11\boldsymbol{b}. \end{cases}$$

3. Радиус-вектор точки

42. Пусть O — полюс пространства, а $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B и C. Доказать предложение: для того чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовали не равные одновременно нулю числа α_1, α_2 и α_3, удовлетворяющие условиям $\alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_3\boldsymbol{r}_3 = 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

43. Пусть вектор $\overrightarrow{OC}$ разложен по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а именно: $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$. Доказать, что точки A, B, C будут лежать на одной прямой в том и только в том случае, когда $\alpha + \beta = 1$.

44. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти линейную зависимость, существующую между векторами $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DB}$ (рис. 5).

45. Пусть $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ — произвольные векторы. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}_1 - 2\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{p}_1 - 4\boldsymbol{p}_2$ линейно зависимы. Найти коэффициенты линейной зависимости.

46. Пусть O — полюс пространства, а $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}_4$ — радиус-векторы точек A, B, C и D. Доказать предложение: для того чтобы точки A, B, C и D лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовали не равные одновременно нулю числа α_1, α_2, α_3 и α_4, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_3\boldsymbol{r}_3 + \alpha_4\boldsymbol{r}_4 = 0 \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

47. На сторонах CA и CB (или на их продолжениях) треугольника ABC взяты соответственно точки B_1 и A_1, которые делят эти стороны в данных отношениях:

$$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \mu.$$

Доказать, что при любом выборе полюса O в пространстве радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ точки пересечения прямых AA_1 и BB_1 имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\lambda\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3}{\lambda + \mu + 1}.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B и C.

48. Дан произвольный треугольник ABC, стороны AB, BC и CA которого соответственно равны c, a и b. Доказать, что при любом выборе полюса O в пространстве радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ точки пересечения любых двух биссектрис имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{R} = \frac{a\boldsymbol{r}_1 + b\boldsymbol{r}_2 + c\boldsymbol{r}_3}{a + b + c}.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B и C. Пользуясь этим утверждением, показать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

49. Доказать, что при любом выборе полюса O в пространстве радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ точки пересечения любых двух высот не прямоугольного треугольника ABC имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \operatorname{tg}\alpha + \boldsymbol{r}_2 \operatorname{tg}\beta + \boldsymbol{r}_3 \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B, C и $\alpha = \measuredangle A$, $\beta = \measuredangle B$, $\gamma = \measuredangle C$. Пользуясь этими утверждениями, показать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

50. Доказать, что при любом выборе полюса O в пространстве радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ центра окружности, описанной около произвольного треугольника ABC, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \sin 2\alpha + \boldsymbol{r}_2 \sin 2\beta + \boldsymbol{r}_3 \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B, C и $\alpha = \measuredangle A$, $\beta = \measuredangle B$, $\gamma = \measuredangle C$.

51. Пусть H — точка пересечения высот, а P — центр описанной окружности треугольника ABC. Доказать, что при любом выборе полюса O в пространстве имеет место соотношение

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OP}.$$

Рассмотреть частный случай, когда полюс O совпадает с точкой P.

4. Центр тяжести системы материальных точек

52. Центром тяжести системы материальных точек $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_k$, в которых сосредоточены соответственно массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$, называется точка P, радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ которой при произвольном выборе полюса O определяется соотношением

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_k\boldsymbol{r}_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k},$$

где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_k$ — радиус-векторы точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$, т. е. $\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, где $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказать предложения:

а) точка P не зависит от выбора полюса O;

б) если $k = 2$, то P есть точка, лежащая на прямой, соединяющей точки M_1 и M_2 и делящая отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$;

в) если P_1 — центр тяжести материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а P_2 — центр тяжести материальных точек $M_{k+1}, \ldots, M_n$, то P есть центр тяжести материальных точек P_1 и P_2, в которых сосредоточены соответственно массы $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ и $m_{k+1} + m_{k+2} + \ldots + m_n$.

53. Центроидом системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ называется центр тяжести системы материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$, в которых сосредоточены равные друг другу массы m. Вывести формулу для вычисления радиус-вектора центроида данной системы точек через радиус-векторы этих точек и, пользуясь полученной формулой, показать, что:

а) центроид системы точек не зависит от величины массы m;

б) центроид системы двух различных точек M_1 и M_2 есть середина отрезка M_1M_2;

в) если P_1 — центроид системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_s$, а P_2 — центроид другой системы точек $N_1, N_2, \ldots, N_r$, то центроид P всех точек $M_1, M_2, \ldots, M_s, N_1, N_2, \ldots, N_r$ лежит на отрезке P_1P_2 и делит этот отрезок в отношении $\frac{r}{s}$.

54. Пусть ABC — произвольный треугольник и $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$, m — произвольное положительное число. Доказать предложения:

а) центроид системы точек A, B, C совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) центр тяжести материальных точек A, B и C, в которых сосредоточены соответственно массы am, bm, cm, совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника;

в) центр тяжести материальных точек A, B, C, в которых сосредоточены соответственно массы $m\operatorname{tg}\alpha$, $m\operatorname{tg}\beta$ и $m\operatorname{tg}\gamma$, совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC, если этот треугольник не прямоугольный;

г) центр тяжести материальных точек A, B, C, в которых сосредоточены соответственно массы $m\sin 2\alpha$, $m\sin 2\beta$, $m\sin 2\gamma$, совпадает с центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

55. Пусть M_1, M_2, ..., M_k — данные точки, а m_1, m_2, ..., m_k, k — данные числа, причем $k \neq 0$. Рассмотрим точку P, радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ которой при некотором выборе полюса O имеет вид:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_k\boldsymbol{r}_k}{k}.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{r}_k$ — радиус-векторы точек M_1, M_2, ..., M_k. Выяснить, при каком условии, накладываемом на числа m_1, m_2, ..., m_k, k, положение точки не зависит от выбора полюса O.

§ 3. Координаты вектора на плоскости

1. Координаты вектора в данном базисе

56. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, E и F — середины противоположных сторон BC и AD, а O — точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_2$ за базисные, определить координаты следующих векторов:

а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{OD}$; в) $\overrightarrow{FC}$; г) $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{EO}$; е) $\overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{EA}$.

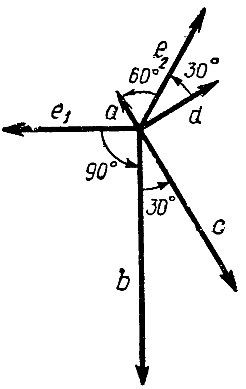


Рис. 6

57. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\boldsymbol{m}_1 = \overrightarrow{AF}$, $\boldsymbol{m}_2 = \overrightarrow{OD}$.

58. Базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, длины которых соответственно равны 2 и 3, образуют угол, равный 120°. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ расположены относительно базисных векторов так, как указано на рисунке 6. Определить координаты этих векторов в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если $|\boldsymbol{a}| = 1$; $|\boldsymbol{b}| = 4$; $|\boldsymbol{c}| = 3$; $|\boldsymbol{d}| = 2$.

59. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{e}_2$ выбраны в качестве базисных. Найти в данном базисе координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{EF}$.

60. В ромбе $ABCD$ векторы $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{e}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

61. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия MN, параллельная AC. Прямые BK и MN пересекаются в точке O. Найти:

а) координаты векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{AN}$, принимая векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$;

б) координаты тех же векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{AN}$, принимая векторы $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KN}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

62. В равнобочной трапеции $ABCD$ угол A равен $\frac{\pi}{3}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_2$, разложить по $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

63. Взяв на плоскости общую декартову систему координат $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, построить следующие векторы: $\boldsymbol{a}_1\{1,\ 2\}$; $\boldsymbol{a}_2\{2,\ -1\}$; $\boldsymbol{a}_3\{0,\ -1\}$; $\boldsymbol{a}_4\{\sqrt{2},\ 3\}$; $\boldsymbol{a}_5\{-1,\ -2\}$; $\boldsymbol{a}_6\{2,\ -1\}$; $\boldsymbol{a}_7\{-2,\ -2\}$; $\boldsymbol{a}_8\left\{-2,\ \frac{1}{2}\right\}$; $\boldsymbol{a}_9\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right\}$; $\boldsymbol{a}_{10}\{2,\ 0\}$.

64. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, построить векторы предыдущего примера.

2. Координаты линейной комбинации векторов. Коллинеарность

65. На плоскости даны два вектора $\boldsymbol{u}\ \{2,\ 1\}$, $\boldsymbol{v}\ \{1,\ 0\}$. Найти коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}\ \{9,\ 1\}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

66. Даны три вектора $\boldsymbol{u}\ \{3,\ -2\}$, $\boldsymbol{v}\ \{-2,\ 1\}$, $\boldsymbol{w}\{7,\ -4\}$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

67. Даны векторы $\boldsymbol{u}\{3,\ -1\}$, $\boldsymbol{v}\{1,\ -2\}$, $\boldsymbol{w}\{-1,\ 7\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

68. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2,\ 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1,\ -3\}$, $\boldsymbol{c}\{-1,\ 3\}$. При каком значении коэффициента α векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}$ коллинеарны?

69. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2,\ -3\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}$. При каких значениях коэффициента α будут коллинеарны следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$;
б) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;
в) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}$?

70. Векторы $\overrightarrow{AB}\,\{1,\ 3\}$ и $\overrightarrow{AC}\,\{2,\ 1\}$ совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$, совпадающих с его медианами.

71. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{1,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2},\ 1\right\}$, $\boldsymbol{c}\{2,\ 0\}$. Определить координаты векторов $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$, $\frac{3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}}{2}$, $\frac{\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}}{3}$.

72. Даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{-1,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}\,\{3,\ -5\}$, $\boldsymbol{c}\,\{4,\ -3\}$. Существует ли треугольник ABC, стороны AB, BC, CA которого соответственно параллельны векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и для которого $AB=|\boldsymbol{a}|$, $BC=|\boldsymbol{b}|$, $AC=|\boldsymbol{c}|$?

73. Даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{1,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}\,\{-1,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}\left\{-\frac{3}{2},\ 3\right\}$, $\boldsymbol{d}\left\{-\frac{3}{2},\ 1\right\}$. Существует ли трапеция $ABCD$, стороны которой соответственно параллельны данным векторам и для которой $AB=|\boldsymbol{a}|$, $BC=|\boldsymbol{b}|$, $CD=|\boldsymbol{c}|$, $AD=|\boldsymbol{d}|$?

3. Вычисление модуля вектора и угла между векторами[1]

74. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{3,\ -4\}$, $\boldsymbol{b}\{0,\ -3\}$, $\boldsymbol{c}\{3,\ \sqrt{7}\}$, $\boldsymbol{d}\{-1,\ 2\}$. Определить их модули.

75. Первая координата вектора $\boldsymbol{a}$ равна 6, а $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{13}$. Определить вторую координату вектора $\boldsymbol{a}$.

76. Определить координаты единичных векторов (ортов), сонаправленных с векторами:

а) $\boldsymbol{m}\{-3,\ -4\}$; б) $\boldsymbol{n}\{-1,\ 7\}$; в) $\boldsymbol{p}\{-\sqrt{7},\ 3\}$; г) $\boldsymbol{q}\{0,\ -2\}$.

77. Определить координаты векторов $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, если:

а) $|\boldsymbol{m}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{m}})=30^\circ$; б) $|\boldsymbol{n}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{n}})=135^\circ$;

в) $|\boldsymbol{p}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{p}})=-60^\circ$.

78. Вычислить угол между следующими парами векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1,\ 0\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{2,\ 2\}$; б) $\boldsymbol{b}_1\{1,\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{-1,\ \sqrt{3}\}$;
в) $\boldsymbol{c}_1\{-\sqrt{3},\ 3\}$ и $\boldsymbol{c}_2\{0,\ 1\}$; г) $\boldsymbol{d}_1\{2,\ 0\}$ и $\boldsymbol{d}_2\{1,\ -\sqrt{3}\}$

79. Определить, какие из следующих пар векторов взаимно перпендикулярны: 1) $\boldsymbol{a}_1\{2,\ 5\}$ и $\boldsymbol{b}_1\{-10,\ 4\}$; 2) $\boldsymbol{a}_2\{1,\ 2\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{1,\ -3\}$; 3) $\boldsymbol{a}_3\{3,\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}_3\{2,\ -6\}$.

80. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{1,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1,\ -2\}$, $\boldsymbol{a}_3\{6,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\{0,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_5(2,\ -\sqrt{5})$. Определить координаты векторов, полученных из данных векторов поворотом на $+90^\circ$.

---

[1] Во всех задачах данного пункта система координат прямоугольная декартова.

81. Чему равны проекции векторов $\boldsymbol{a}\{-1, 5\}$ и $\boldsymbol{b}\left\{\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ на координатные оси $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$?

82. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}\{-7, -3\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{b}\{3, 5\}$.

83. Пусть l — биссектриса угла между векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, приложенными к точке O. Найти проекции вектора $\boldsymbol{a}\{2, 5\}$ на оси, определяемые прямой l и имеющие противоположные направления.

4. Площадь ориентированного параллелограмма

84. Вычислить площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если эти векторы в прямоугольном декартовом базисе имеют следующие координаты:

а) $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 0\}$; б) $\boldsymbol{a}\{-3, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 5\}$;
в) $\boldsymbol{a}\{0, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 7\}$; г) $\boldsymbol{a}\{-1, 7\}$, $\boldsymbol{b}\{0, -2\}$.

85. В общем декартовом базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ даны неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}\{a_1, a_2\}$, $\boldsymbol{b}\{b_1, b_2\}$. Доказать, что площадь S_{ab} ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, вычисляется по формуле

$$S_{ab} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} S_0,$$

где S_0 — площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

86. Пусть S_0 — площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. В каждом из следующих случаев вычислить площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

а) $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 5\}$, $S_0 = 2$;
б) $\boldsymbol{a}\{3, 2\}$, $\boldsymbol{b}\{-2, 0\}$, $S_0 = 3$;
в) $\boldsymbol{a}\{-1, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 2\}$, $S_0 = \frac{1}{2}$;
г) $\boldsymbol{a}\{-6, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 4\}$, $S_0 = \frac{1}{4}$.

87. Базисы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ заданы своими координатами в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Указать, какие пары векторов, приведенные ниже, имеют одну и ту же ориентацию:

а) $\boldsymbol{a}\{-3, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 5\}$; $\boldsymbol{a}'\{-2, -1\}$, $\boldsymbol{b}'\{3, 8\}$;

б) $\boldsymbol{a}\{0, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 1\}$; $\boldsymbol{a}'\{3, 5\}$, $\boldsymbol{b}'\{1, 4\}$;

в) $\boldsymbol{a}\{2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 5\}$; $\boldsymbol{a}'\{-3, 2\}$, $\boldsymbol{b}'(1, 3)$;

г) $\boldsymbol{a}\{-1, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 7\}$; $\boldsymbol{a}'\{-1, 1\}$, $\boldsymbol{b}'\{-3, 7\}$.

§ 4. Координаты вектора в пространстве

1. Координаты вектора в данном базисе

88. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E, F и G — соответственно середины сторон AA_1, AD, CC_1 (см. рис. 5). Принимая векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов:

$$\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{EC_1},\ \overrightarrow{B_1C_1},\ \overrightarrow{FG},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CB_1},\ \overrightarrow{A_1G}.$$

89. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$.

90. В тетраэдре $ABCS$ точки A', B', C' — соответственно середины ребер SA, SB и SC; O и O' — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$. Принимая векторы $\overrightarrow{O'C'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ и $\overrightarrow{O'S}$ за координатные, определить координаты векторов $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{O'A}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BE'}$, $\overrightarrow{AE'}$, где E' — середина отрезка $A'C'$.

91. Решить предыдущую задачу, полагая $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{O'A'}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{O'E'}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{O'O}$.

92. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ выбраны за координатные. Определить координаты вектора $\overrightarrow{AM}$, где M — центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.

93. Среди векторов $\boldsymbol{a}_1\ \{1,\ -6,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\ \{0,\ -4,\ 5\}$, $\boldsymbol{a}_3\ \{3,\ 0,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\ \{0,\ -1,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_5\ \{5,\ 0,\ 6\}$, $\boldsymbol{a}_6\ \{2,\ -3,\ 6\}$, $\boldsymbol{a}_7\ \{0,\ 0,\ -2\}$, $\boldsymbol{a}_8\ \{-3,\ 1,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_9\ \{6,\ 0,\ 1\}$, $\boldsymbol{a}_{10}\ \{0,\ 5,\ 0\}$ укажите векторы: а) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_1$; б) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_2$; в) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_3$; г) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$; д) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$; е) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$.

2. Координаты линейной комбинации векторов. Коллинеарность и компланарность векторов

94. Даны векторы $\boldsymbol{a}\ \{2,\ 3,\ -1\}$, $\boldsymbol{b}\ \{0,\ 1,\ 4\}$, $\boldsymbol{c}\ \{1,\ 0,\ -3\}$. Определить координаты следующих векторов: 1) $\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$; 3) $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$; 4) $\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$; 5) $\boldsymbol{p}_5 = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$; 6) $\boldsymbol{p}_6 = \dfrac{\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}$.

95. Найти линейную зависимость между векторами:

а) $\boldsymbol{a}\ \{1,\ 3,\ 0\}$; $\boldsymbol{b}\ \{5,\ 10,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}\ \{4,\ -2,\ 6\}$ и $\boldsymbol{d}\ \left\{\frac{21}{2},\ 17,\ 3\right\}$;

б) $\boldsymbol{a}\ \{1,\ 3,\ 5\}$, $\boldsymbol{b}\ \{0,\ 4,\ 5\}$, $\boldsymbol{c}\ \{7,\ -8,\ 4\}$ и $\boldsymbol{d}\ \{2,\ -1,\ 3\}$;

в) $\boldsymbol{a}\ \{1,\ 2,\ 5\}$, $\boldsymbol{b}\ \{-1,\ 6,\ 3\}$, $\boldsymbol{c}\ \{0,\ 0,\ 2\}$ и $\boldsymbol{d}\ \{1,\ 0,\ 4\}$.

96. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При обозначениях задачи 88 (см. рис. 5) вычислить координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{DB}$ в базисе $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_3$ и, пользуясь ими, найти линейную зависимость, существующую между этими векторами.

97. Даны пары векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\left\{\frac{3}{2}, 3, -6\right\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{-6, -12, 8\}$;

б) $\boldsymbol{b}_1\left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -2\right\}$ и $\boldsymbol{b}_2\left\{\frac{1}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right\}$;

в) $\boldsymbol{c}_1\left\{3\frac{3}{5}, -3, 4\frac{1}{2}\right\}$ и $\boldsymbol{c}_2\left\{-10, 8\frac{1}{3}, -12\frac{1}{2}\right\}$.

Указать среди них пары коллинеарных векторов.

98. Доказать теорему: пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ даны своими координатами в общей декартовой системе координат:

$$\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\},\ \boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},\ \boldsymbol{c}\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}.$$

Для того чтобы система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ была компланарной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

99. Даны тройки векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{-3, 0, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 1, -4\}$, $\boldsymbol{a}_3\{11, -2, -2\}$;
б) $\boldsymbol{b}_1\{1, 0, 7\}$, $\boldsymbol{b}_2\{-1, 2, 4\}$, $\boldsymbol{b}_3\{3, 2, 1\}$;
в) $\boldsymbol{c}_1\{5, -1, 4\}$, $\boldsymbol{c}_2\{3, -5, 2\}$, $\boldsymbol{c}_3\{-1, -13, -2\}$.

Указать среди них тройки компланарных векторов.

100. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Приняв векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ за базисные, вычислить в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{C_1C}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ и установить, что эта система компланарна (относительно обозначений см. рис. 5).

101. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, а M, N, P, Q, R, S — середины соответственно сторон AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A (см. рис. 7). Доказать, что:

а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RQ}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{SR}$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MS}$;

б) система векторов $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ и $\overrightarrow{SM}$ компланарна.

102. Доказать, что совокупность векторов пространства, координаты $\{p_1, p_2, p_3\}$ которых удовлетворяют условию $\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 = 0$, есть двумерное векторное подпространство. Здесь α_1, α_2, α_3 — фиксированные числа, одновременно не равные нулю.

Выяснить геометрическую картину в каждом из следующих случаев: а) $p_1 + p_2 = 0$; б) $p_3 = 0$; в) $2p_1 - p_2 + 3p_3 = 0$.

103. Доказать, что совокупность векторов пространства, координаты $\{p_1, p_2, p_3\}$ которых удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0,$$
$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 = 0,$$

где матрица $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$ имеет ранг два, образует одномерное векторное подпространство.

Выяснить геометрическую картину в каждом из следующих случаев: а) $p_1 = 0$, $p_3 = 0$; б) $p_1 - p_2 = 0$, $p_3 = 0$; в) $p_1 + p_2 - p_3 = 0$, $p_1 + 2p_2 + p_3 = 0$.

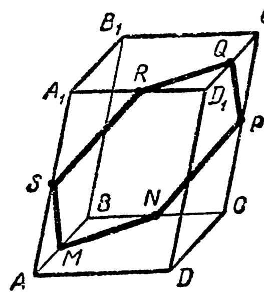


Рис. 7

§ 5. Скалярное произведение векторов

1. Вычисление скалярного произведения[1]

104. На плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}\{-1, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 5\}$, $\boldsymbol{c}\{-2, 8\}$, $\boldsymbol{d}\{3, 1\}$. Вычислить: а) $\boldsymbol{ab}$; б) $\boldsymbol{ac}$; в) $\sqrt{\boldsymbol{d}^2}$; г) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$; д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$.

105. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что вектор $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$, вектор $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$?

106. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные ненулевые векторы, лежащие в ориентированной плоскости, а $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — векторы, полученные из $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ путем поворота на $+90°$. Доказать, что $\boldsymbol{ab}' + \boldsymbol{ba}' = \overrightarrow{O}$.

107. Дан треугольник ABC. Выразить вектор $\boldsymbol{h} = \overrightarrow{AH}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$, где H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

108. Пусть ABC — произвольный треугольник, а C_1 — середина отрезка AB. Доказать, что $4\overrightarrow{CC_1}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

109. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют условию $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = 0$, то эти векторы либо компланарны, либо $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

110. Дан тетраэдр $OABC$, у которого грань ABC является прямоугольным треугольником с вершиной в точке C. Выразить вектор $\overrightarrow{OH}$ через векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины O на плоскость грани ABC.

111. Дан параллелограмм $OABC$. Пусть $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$. Дать геометрическое истолкование формул:

---

[1] В этом параграфе всюду предполагается, что координаты векторов как на плоскости, так и в пространстве даны в прямоугольном декартовом базисе.

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$;
б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{ab}$;
в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

112. Дан прямоугольник $ABCD$ и произвольная точка M пространства. Доказать, что:

а) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$, где A и C, B и D — противоположные вершины прямоугольника;

б) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$.

113. В пространстве даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, -1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{1, \sqrt{2}, -5\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 2, 5\}$, $\boldsymbol{d}\{1, 0, 2\}$. Вычислить скалярные произведения: 1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\boldsymbol{ac}$; 3) $\boldsymbol{ad}$; 4) $\boldsymbol{bc}$; 5) $\boldsymbol{bd}$; 6) $\boldsymbol{cd}$.

114. В пространстве даны векторы $\boldsymbol{a}\{4, -2, -4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 4, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{0, 1, -1\}$. Вычислить: а) $\boldsymbol{ab}$; б) $\boldsymbol{ac}$; в) $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$; г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$; д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

2. Вычисление модуля вектора и угла между векторами

115. В пространстве даны векторы $\boldsymbol{a}\{1, 5, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -5, 2\}$, $\boldsymbol{c}\left\{2, 1, \frac{3}{2}\right\}$, $\boldsymbol{d}\{0, 0, 1\}$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по этим произведениям узнать, образуют ли они острый, прямой или тупой угол.

116. В пространстве дан четырехугольник $ABCD$ и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}\{1, 6, -2\}$, $\overrightarrow{BC}\{5, 3, -1\}$ и $\overrightarrow{CD}\{1, -7, 1\}$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

117. Определить косинус угла между векторами, заданными в пространстве координатами:

а) $\boldsymbol{a}_1\{2, -1, 3\}$ и $\boldsymbol{b}_1\{1, -4, 3\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{2, -2, 1\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{3, 0, -4\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, -1, 5\}$ и $\boldsymbol{b}_3\{7, 5, 1\}$.

118. Дан треугольник ABC и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}\{-1, -1, -\sqrt{2}\}$ и $\overrightarrow{BC}\{\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}\}$. Найти углы треугольника.

119. Найти косинусы углов, образованных вектором $\boldsymbol{a}\{5, -\sqrt{2}, 3\}$ с базисными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

120. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с базисными векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно углы 120 и 135°. Определить угол, который образует вектор $\boldsymbol{a}$ с вектором $\boldsymbol{j}$.

121. Вектор $\boldsymbol{a}$ пространства, модуль которого равен 4, образует с осями $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ соответственно углы 60 и 45°. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

122. К вершине треножника подвешен груз, равный 20 *кгс*. Найти силы, возникающие в ножках треножника, если ножки треножника взаимно перпендикулярны, а веревка, поддерживающая груз, составляет с двумя ножками углы, равные 60° (рис. 8).

123. Груз весом 30 *кгс* подвешен в точке O опоры, состоящей из трех стержней OA, OB и OC (рис. 9). Два горизонтальных стержня OA и OB равны по длине и взаимно перпендикулярны, стержень OC образует равные углы со стержнями OA и OB и угол, равный 60°, с горизонтальной плоскостью AOB. Найти силы, возникающие в стержнях.

124. В пространстве дан четырехугольник $ABCD$ и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}\,\{1, 2, -2\}$, $\overrightarrow{BC}\,\{-2, -1, -2\}$ и $\overrightarrow{CD}\,\{-1, -2, 2\}$. Доказать, что данный четырехугольник является квадратом.

125. В треугольнике ABC, расположенном в пространстве, известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}\,\{4, 2, -1\}$ и $\overrightarrow{AC}\,\{2, -2, 0\}$. Определить координаты и длину вектора $\overrightarrow{BH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на противоположную сторону.

126. В пространстве даны три некомпланарных вектора

$$\overrightarrow{OA}\,\{1, -1, -2\},\ \overrightarrow{OB}\,\{1, 0, -1\} \text{ и } \overrightarrow{OC}\,\{2, 2, -1\}.$$

Найти координаты вектора $\overrightarrow{OH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC.

127. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют координаты $\overrightarrow{AB}\,\{2, 2, 1\}$, $\overrightarrow{AC}\,\{3, 4, 0\}$.

128. Доказать, что в общем декартовом базисе $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{i,\,j=1}^{3} g_{ij}\alpha_i\beta_j,$$

где $g_{ij} = \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j$.

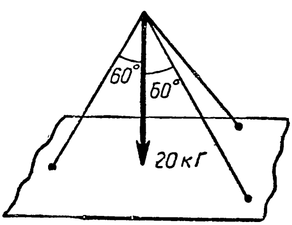


Рис. 8

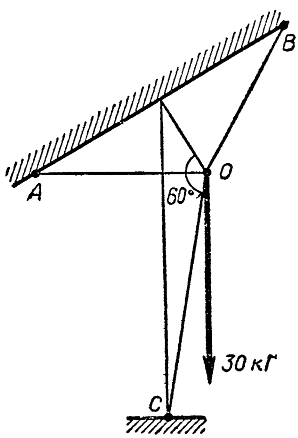


Рис. 9

3. Векторные уравнения

129. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов в общем декартовом базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, если $|\boldsymbol{e}_1| = \sqrt{3}$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$, $|\boldsymbol{e}_3| = 1$, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = 0$, $(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) = \frac{\pi}{3}$.

Пользуясь полученной формулой, вычислить попарные скалярные произведения следующих векторов: $\boldsymbol{p}\,\{1,\ 2,\ 0\}$, $\boldsymbol{q}\,\{3,\ 2,\ -5\}$ и $\boldsymbol{r}\,\{2,\ -1,\ 1\}$.

130. В общем декартовом базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ даны ненулевые векторы $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Вывести формулу для вычисления косинуса угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известны попарные скалярные произведения базисных векторов: $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = g_{ij}$.

131. Пусть $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, а k — произвольное число. Решить и исследовать уравнение $\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + k = 0$.

132. Решить и исследовать уравнения: а) $\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + 30 = 0$; б) $\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + 1 = 0$; в) $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + 15 = 0$, где $\boldsymbol{a}\,\{1,\ 2,\ -5\}$, $\boldsymbol{b}\{0,\ 2,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}\,\{1,\ 1,\ -2\}$.

133. Пусть $\boldsymbol{x}^3 = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}$. Решить уравнения: а) $\boldsymbol{x}^3 = \boldsymbol{a}$; б) $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}^3 = 0$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные ненулевые векторы.

134. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы. При каком условии существует вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \alpha$, $\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = \beta$?

135. Доказать теорему: если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то каковы бы ни были числа α, β, γ, существует один и только один вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий уравнениям $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \alpha$, $\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = \beta$, $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \gamma$.

136. Даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{2,\ -1,\ 3\}$, $\boldsymbol{b}\,\{1,\ -3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c}\,\{3,\ 2,\ -4\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющего условиям $\boldsymbol{x}\boldsymbol{a} = 10$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} = 22$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{c} = -40$.

137. Пусть $\boldsymbol{a}\left\{\frac{3}{2},\ 1,\ -\frac{5}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}\,\{-3,\ -2,\ 5\}$. Существует ли вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 2$, $\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = 3$?

138. Даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{2,\ 1,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}\,\{1,\ 3,\ 1\}$, $\boldsymbol{c}\,\{1,\ 1,\ 5\}$, $\boldsymbol{d}\,\{2,\ 3,\ -3\}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 2$, $\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = 5$, $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = -7$, $\boldsymbol{d}\boldsymbol{x} = 14$.

139. Если a и b — числа, то из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел a и b равно нулю. Будет ли справедливо это свойство для скалярного произведения векторов? Объяснить результат.

140. Если a и b — числа, то уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Будет ли справедливо это положение, если дано уравнение $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, α — данное число, а $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$ — скалярное произведение данного и искомого векторов? Выяснить геометрический смысл решений.

141. Пусть $\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$ при $\boldsymbol{c} \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$? Объяснить результат.

142. Если α, β, γ — произвольные числа, то $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Обладает ли аналогичным свойством скалярное произведение векторов, т. е. справедливо ли соотношение $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$?

§ 6. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии

1. Задачи на треугольники

143. Доказать, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, начиная от вершины.

144. Доказать теорему: если медианы треугольника ABC соответственно параллельны сторонам треугольника $A'B'C'$, то медианы треугольника $A'B'C'$ соответственно параллельны сторонам треугольника ABC.

145. Дан произвольный треугольник ABC. Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно параллельны и конгруэнтны медианам исходного треугольника.

146. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, из его медиан — треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.

147. Дан треугольник ABC. На прямых AB, BC и CA взяты соответственно точки M_1, M_2 и M_3 так, что $\overrightarrow{AM_1} = \alpha_1\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM_2} = \alpha_2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CM_3} = \alpha_3\overrightarrow{CA}$. При каких ограничениях, накладываемых на α_1, α_2, α_3, существует треугольник, стороны которого соответственно конгруэнтны и параллельны отрезкам CM_1, AM_2 и BM_3?

148. Дан треугольник ABC и произвольная точка M пространства. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны с точкой M относительно середин сторон треугольника ABC. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.

149. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Доказать, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и конгруэнтны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

150. Доказать, что биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника делит противоположную сторону внешним образом на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

151. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна трем четвертям суммы квадратов его сторон.

152. Пользуясь скалярным произведением векторов, доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

153. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC. Доказать предложения:

а) если $2CC_1 > AB$, то угол C острый;

б) если $2CC_1 = AB$, то угол C прямой;

в) если $2CC_1 < AB$, то угол C тупой.

154. Доказать, что в любом треугольнике ABC имеет место соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Пользуясь этим соотношением, доказать теорему Пифагора.

155. Доказать предложение: для того чтобы у треугольника ABC угол A был прямым, необходимо и достаточно, чтобы $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 0$, где O — центр описанной окружности.

156. Доказать предложение: для того чтобы треугольник ABC был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы углы этого треугольника были связаны соотношением

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1.$$

157. Вершина A треугольника соединена с точками A_1A_2, делящими сторону BC на три равные части. Показать, что разность квадратов отрезков AA_1 и AA_2 в три раза меньше разности квадратов сторон, выходящих из вершины A.

158. Показать, что если AM — биссектриса треугольника ABC, то $\overrightarrow{AM} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$. Пользуясь этим соотношением:

а) вывести следующую формулу для вычисления длины биссектрисы:

$$AM = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

б) доказать, что

$$\frac{BM}{MC} = \frac{b}{c}.$$

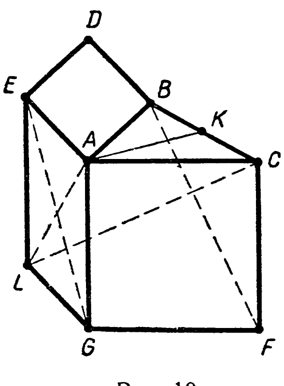


Рис. 10

159. Доказать теорему синусов: для любого треугольника ABC имеет место соотношение

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

160. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные из концов его основания, взаимно перпендикулярны.

161. В плоскости треугольника ABC, на его сторонах AB и AC извне построены квадраты $ABDE$, $ACFG$ (см. рис. 10), а затем параллелограмм $AELG$.

Доказать: а) диагональ EG параллелограмма перпендикулярна медиане AK и вдвое больше ее; б) диагональ LA перпендикулярна BC; в) прямая LC перпендикулярна BF и г) прямая LB перпендикулярна DC (прямые LB и DC на рисунке 10 не изображены).

2. Задачи на четырехугольники

162. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

163. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

164. Доказать, что сумма квадратов диагоналей любого четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон без учетверенного квадрата отрезка, соединяющего середины диагоналей.

165. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M, так что $AM = kAD$. Прямая BM пересекает диагональ AC в точке P. Определить отношение $AP : AC$.

166. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNPQ$ так, что вершины M, N, P и Q лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA. Показать, что стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям данного квадрата $ABCD$, если $MNPQ$ не является квадратом.

167. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата.

168. В пространственном четырехугольнике[1] проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон; 2) середины двух других противоположных сторон; 3) середины диагоналей. Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке P и каждый из них точкой P делится пополам.

169. Пусть $ABCD$ — пространственный четырехугольник, а P, Q, R, S — точки, делящие соответственно отрезки AB, BC, CD и DA в одном и том же отношении. Доказать, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ (см. предыдущую задачу), совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $PQRS$.

170. Доказать, что если в некотором пространственном четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон. Доказать обратную теорему.

171. Доказать, что если $ABCD$ — пространственный четырехугольник, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{EF}$, где AB и DC — противоположные стороны,

---

[1] Здесь и в дальнейшем пространственным многоугольником мы будем называть такой многоугольник, у которого вершины не обязательно лежат в одной плоскости.

а E и F — соответственно середины сторон AD и BC. Пользуясь этой задачей, доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

172. Пусть M и N — соответственно середины сторон AB и CD пространственного четырехугольника $ABCD$.

Доказать, что середины диагоналей двух четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма, или лежат на одной прямой, образуя вырожденный параллелограмм.

173. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка M пространства. Пусть M_1 — точка, симметричная точке M относительно середины AB, точка M_2, симметричная точке M_1 относительно середины BC, точка M_3, симметричная точке M_2 относительно середины CD. Доказать, что исходная точка M и точка M_3 симметричны относительно середины стороны AD.

3. Стереометрические задачи

174. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — произвольный пространственный шестиугольник, а M_{12}, M_{23}, ..., M_{61} — середины его сторон. Доказать, что центры тяжести треугольников $M_{12}M_{34}M_{56}$ и $M_{23}M_{45}M_{61}$ совпадают.

175. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

176. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

177. Пусть $OABC$ — прямой трехгранный угол, OM — луч, исходящий из вершины этого угла, а α, β, γ — углы, которые образует луч OM с лучами OA, OB и OC. Показать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

178. Диагональ AE прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из двух ребер, выходящих из точки A, угол $60°$. Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки A?

179. Пусть для треугольной пирамиды $OABC$ введены обозначения $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Показать, что $\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2$, если плоские углы при вершине O прямые.

180. Показать, что угол θ между двумя противоположными ребрами произвольного тетраэдра вычисляется по формуле

$$\cos\theta = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'},$$

где a и a' — длины рассматриваемых ребер, а b и b', c и c' — длины противоположных ребер двух других пар.

181. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

182. Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то третья пара ребер также взаимно перпендикулярна.

183. Зная длины всех шести ребер тетраэдра, определить длины всех отрезков, соединяющих попарно середины противоположных сторон.

184. Доказать теорему: для того чтобы каждая пара противоположных ребер AB и CD, AC и BD, BC и AD тетраэдра $ABCD$ была взаимно перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Глава II

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

§ 7. Координаты точек плоскости. Решение простейших задач в координатах

1. Прямоугольные и общие декартовы координаты точек

185. В прямоугольной декартовой системе координат построить следующие точки: $A\ (2, 1)$; $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; $C\ (1, -4)$; $D\ (\sqrt{2}, -2)$; $E\ (0, 1)$; $F\ (-3, -2)$; $C\ (-3, 0)$; $Z\ (-3, 3)$.

186. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки, абсциссы которых равны соответственно -3, -1, -2, -5, а ординаты определяются из условия $y = 2x^2 - 10$.

187. В общей декартовой системе координат построить следующие точки: $A\ (-1, 0)$, $B\ (-2, 1)$, $C\ (1, 1)$, $D\ (-3, 2)$, $E\ (0, -2)$, $F\ (-3, 3)$.

188. Катеты прямоугольного треугольника лежат соответственно на осях OX и OY прямоугольной декартовой системы координат. Чему равны координаты вершин треугольника, если длины его катетов равны a и b и если треугольник расположен: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти?

189. В общей декартовой системе координат даны координаты вектора $\boldsymbol{a}_i$ и точки M_i. В каждом из следующих случаев определить координаты конца вектора $\boldsymbol{a}_i$, если он приложен к точке M_i: а) $\boldsymbol{a}_1\ \{3, 4\}$, $M_1\ (-2, 3)$; б) $\boldsymbol{a}_2\ \{3, 0\}$, $M_2\ (0, 0)$; в) $\boldsymbol{a}_3\ \{-5, 4\}$, $M_3\ (1, 0)$; г) $\boldsymbol{a}_4\ \{-1, -5\}$, $M_4\ (3, -2)$; д) $\boldsymbol{a}_5\ \{3, -1\}$, $M_5\ (-1, -2)$.

190. Начало координат помещено в центре квадрата, сторона которого равна $2a$. Найти координаты вершин квадрата, если: а) стороны квадрата параллельны осям координат; б) диагонали квадрата совпадают с осями.

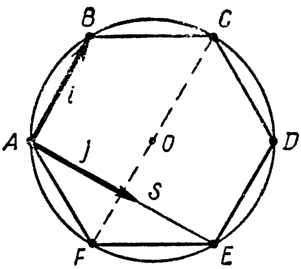


Рис. 11

191. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин и центра O, принимая за начало координат точку A, а за координатные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ соответственно векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AS}$, где S — такая точка отрезка AE, что $AS = AB$ (рис. 11).

192. В равнобочной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 10$, высота равна 2, а угол при основании равен 30°. На плоскости взята прямоугольная декартова система координат, начало которой O совпадает с серединой отрезка AD, а направление осей OX и OY — соответственно с направлениями векторов $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей трапеции. Определить координаты всех вершин трапеции, точки M и точки N пересечения непараллельных сторон.

193. Решить предыдущую задачу в предположении, что начало координат находится в точке A, а координатными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

194. Найти координаты[1] точек, симметричных точкам A (1, —3), B (0, 4), C (—3, 5), D (7, 2), E (—3, —2) относительно оси OX.

195. Найти координаты точек, симметричных точкам A (—5, 2), B (5, 1), C (—3, 6), D (2, 0), E (—3, 5) относительно оси OY.

196. Найти координаты точек, симметричных точкам A (1, 1), B (3, —2), C (3, 0), D (—4, 3), E (—2, —1) относительно начала координат.

197. Найти координаты точек, симметричных точкам A (—3, 5), B (5, —2), C (2, 3), D (2, 7):

а) относительно биссектрисы первого координатного угла;

б) относительно биссектрисы второго координатного угла.

198. Даны координаты вершин треугольника ABC: A (2, 5), B (0, 1), C (3, —1). Определить координаты вершин треугольника $A'B'C'$, симметричного треугольнику ABC: а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy; в) относительно начала координат.

2. Определение координат вектора по координатам его концов

199. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, —3), B (8, 0), C (4, 8) и D (—3, 5). Показать, что $ABCD$ есть параллелограмм.

200. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, 1), B (2, 3), C (5, 0), D (7, —5). Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

201. Даны три вершины параллелограмма A (—1, 3), B (2, —5), C (0, 4). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

[1] В задачах 194—198 система координат прямоугольная декартова.

202. Даны две смежные вершины квадрата[1] $A(-2, 1)$ и $B(3, 3)$. Найти две другие вершины.

203. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(-3, 2)$ и $B(1, 4)$. Найти третью вершину C.

204. Центр O и вершина A правильного шестиугольника $ABCDEF$ имеют координаты $O(-1, 2)$, $A(1, 4)$. Найти координаты остальных вершин.

3. Деление отрезка в данном отношении. Середина отрезка

205. Найти координаты середин отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, если $A_1(-1, 5)$, $B_1(-3, 3)$, $A_2(0, 4)$, $B_2(3, 2)$, $A_3(-2, 6)$, $B_3(1, 4)$.

206. Даны координаты концов $A(-1, 5)$, $B(3, 4)$ однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести.

207. Даны координаты точек $P(-1, 5)$, $Q(3, 2)$.

а) Найти координаты точки M, симметричной точке P относительно точки Q;

б) найти координаты точки N, симметричной точке Q относительно точки P.

208. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4, 4)$, $B(2, 8)$ и точка пересечения $M(2, 2)$ его диагоналей. Определить две другие вершины C и D.

209. Дан четырехугольник $A(-1, 7)$, $B(5, 5)$, $C(7, -5)$, $D(3, -7)$.

а) Доказать, что отрезки, соединяющие середины сторон AD и BC, AB и CD, пересекаются и делятся точкой пересечения пополам;

б) Показать, что четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон данного четырехугольника, есть параллелограмм.

210. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 4)$ и $C(7, -2)$. Найти две другие вершины. Система координат прямоугольная декартова.

211. Определить координаты точек, делящих отрезок $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 3$.

212. Две вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3, 6)$, $B(-3, 5)$. Определить координаты вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на разных осях координат.

213. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_2(2, 5)$ и $A_5(-1, 7)$ в общей декартовой системе координат, определить отношения, в которых точки A_1, A_3, A_4 и A_6 делят отрезок A_2A_5, а также координаты этих точек.

214. В каждом из случаев а), б), в) найти координаты вершин треугольника, если середины его сторон находятся соответственно в точ-

[1] В задачах 202—204 система координат прямоугольная декартова.

ках: а) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, (5, 1), $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$; б) (5, 2), (2, —3), (—2, 1); в) (3, 2), (5, —4), (—1, —2).

215. Доказать, что в общей декартовой системе координат точка пересечения $M(x, y)$ медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пользуясь этой формулой, определить координаты точки пересечения медиан треугольника, если его вершины имеют координаты: а) A (3, 1), B (—1, 4), C (1, 1); б) A (—2, 3), B (5, —2), C (—3, —1); в) A (7, 4), B (3, —6), C (—5, 2).

4. Центр тяжести системы материальных точек

216. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках A (—1, 2), B (3, 3) и C (1, —1). Определить координаты центра тяжести пластинки.

217. В точке A (2, 5) помещен груз в 60 *г*, а в точке B (—3, 0) — груз в 40 *г*. Определить координаты центра тяжести этой системы.

218. В общей декартовой системе координат даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n y_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Доказать, что координаты центра тяжести материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в той же системе координат определяются соотношениями

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

219. В вершинах треугольника A (1, 8), B (3, 4), C (4, 2) сосредоточены соответственно массы 30, 40 и 60 *г*. а) Определить координаты центра тяжести системы материальных точек A, B и C; б) найти центр тяжести системы в предположении, что в точках A, B и C сосредоточены одинаковые массы.

220. Однородный стержень изогнут в виде треугольника, вершины которого находятся в точках A (2, —1), B (5, —1) и C (2, 3). Определить координаты центра тяжести этого треугольника.

5. Вычисление расстояния между точками[1]

221. Определить расстояния между точками A_1 (2, —1) и A_2 (1, 2); B_1 (1, 5) и B_2 (1, 1); C_1 (—3, 1) и C_2 (1, —2); D_1 (—1, 2) и D_2 (3, 0).

222. В каждом из следующих случаев найти координаты точки, равноудаленной от трех данных точек: а) (2, 2), (5, 1), (7, —3); б) (5, 4), (3, 8), (—2, —7); в) (2, 3), (4, —1), (5, 2).

---

[1] В задачах п. 5 системы координат прямоугольные декартовы, если не оговорено противное.

223. Определить радиус окружности, которая проходит через точку $(-2, 1)$ и имеет центр в точке $(2, -3)$.

224. Определить координаты точек, расположенных на окружности радиуса $r = 3$ с центром в начале координат и имеющих ординаты $2, -1, 3, \sqrt{2}$.

225. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A\,(4, 1)$, $B\,(7, 5)$, $C\,(-4, 7)$. Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

226. Определить длину медианы AM треугольника ABC, заданного координатами своих вершин: $A\,(5, -4)$, $B\,(-1, 2)$, $C\,(5, 1)$.

227. Пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, вычислением убедиться в том, что треугольник ABC, заданный координатами своих вершин: $A\,(1, 1)$, $B\,(2, 5)$, $C\,(-6, 7)$, является прямоугольным. Указать вершину прямого угла.

228. Найти координаты центра и радиуса окружности, проходящей через точку $B\,(-10, 4)$ и касающейся оси Ox в точке $A\,(-6, 0)$.

229. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A\,(-8, 4)$ и касающейся осей координат.

6. Площадь треугольника

230. Ориентированный треугольник $A_iB_iC_i$ задан координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе координат. В каждом из следующих случаев доказать, что треугольник $A_iB_iC_i$ равнобедренный, и вычислить его площадь:

а) $A_1\,(0, 9)$, $B_1\,(-4, -1)$, $C_1\,(3, 2)$;
б) $A_2\,(10, 5)$, $B_2\,(3, 2)$, $C_2\,(6, -5)$;
в) $A_3\,(3, -3)$, $B_3\,(-1, -3)$, $C_3\,(1, 1)$.

231. Вычислить площадь ориентированного треугольника ABC, заданного координатами вершин в каждом из следующих случаев:

а) $A\,(2, 1)$, $B\,(3, 4)$, $C\,(1, 6)$;
б) $A\,(-2, 4)$, $B\,(0, -3)$, $C\,(1, 7)$;
в) $A\,(5, 4)$, $B\,(11, 0)$, $C\,(0, 3)$.

232. Вычислить площадь S неориентированного четырехугольника, вершинами которого служат точки $A\,(1, 3)$, $B\,(-2, 0)$, $C\,(4, 3)$, $D\,(-3, 5)$.

233. Две вершины ориентированного треугольника ABC находятся в точках $A\,(1, 2)$ и $B\,(5, -1)$, а третья вершина C — на оси Ox. Найти координаты вершин C, если площадь треугольника $S = 2$.

234. Найти расстояние d от точки $A\,(6, -8)$ до прямой, проходящей через точки $M_1\,(-5, 0)$ и $M_2\,(3, 6)$.

235. Вершины неориентированного треугольника находятся в точках $A\,(-2, 1)$, $B\,(2, -2)$ и $C\,(8, 6)$. Найти для данного треугольника: а) периметр; б) площадь; в) длины высот; г) косинус угла A.

236. Найти центр тяжести однородной четырехугольной пластинки, вершины которой находятся в точках $(2, 5)$, $(3, 8)$, $(8, 11)$, $(10, 5)$.

237. Если на векторах, совпадающих с диагоналями данного параллелограмма, построить новый параллелограмм, то площадь полученного параллелограмма при соответствующей ориентации в два раза больше площади исходного параллелограмма. Доказать.

§ 8. Полярные координаты

238. В полярной системе координат построить точки $M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

239. Построить точки, заданные обобщенными полярными координатами: $A_1\left(-5, \frac{\pi}{2}\right)$, $A_2\left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $A_3(-3, 0)$, $A_4\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$.

240. Дан правильный треугольник ABC, сторона которого равна 5. Приняв вершину A за полюс полярной системы координат, а направленную прямую AB за полярную ось, определить полярные координаты вершин и центра P треугольника. Рассмотреть два возможных случая расположения треугольника относительно полярной оси.

241. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 3. Приняв вершину A за полюс полярной системы координат, а направленную прямую AB за полярную ось, определить координаты его вершин и точки P пересечения диагоналей. Рассмотреть два возможных случая расположения квадрата относительно полярной оси.

242. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, сторона которого равна a. Приняв точку A за полюс, а направленную прямую AB за ось полярной системы координат, определить координаты всех его вершин и точки P пересечения диагоналей. Рассмотреть два возможных случая расположения шестиугольника относительно полярной оси.

243. Найти полярные координаты точек, симметричных с точками $M_1\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$:

а) относительно полюса; б) относительно полярной оси.

244. Пусть Oi — данная полярная система координат, Oij — прямоугольная декартова система, причем вектор j получен из вектора i поворотом на $+90°$. Даны полярные координаты точек $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$. Определить их прямоугольные декартовы координаты.

245. Пусть Oij — данная прямоугольная декартова система, а Oi — полярная система, причем положительное направление обхода выбрано так, что $\measuredangle(ij) = +90°$. Определить полярные координаты следующих точек: M_1 (0, 6), M_2 (—2, 0), M_3 (—1, 1), M_4 ($\sqrt{3}$, 1), M_5 (0, —3), M_6 (1, —$\sqrt{3}$).

246. Вывести формулу для вычисления площади треугольника OA_1A_2, вершина O которого совпадает с полюсом, а две другие даны своими полярными координатами: A_1 (ρ_1, φ_1), A_2 (ρ_2, φ_2).

Пользуясь этой формулой, в каждом из следующих случаев вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты: а) $A_1\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$; б) $A_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$; в) $A_1\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$.

247. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя точками M_1 (ρ_1, φ_1) и M_2 (ρ_2, φ_2), которые заданы полярными координатами.

Пользуясь этой формулой, в каждом из следующих случаев найти расстояние между точками: а) $\left(5, \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\left(4, \frac{11\pi}{18}\right)$ и $\left(3, \frac{\pi}{9}\right)$; в) $\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ и $\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$.

248. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$. Доказать, что данный треугольник равнобедренный.

249. Даны полярные координаты вершин треугольника $A\left(10, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(6, \frac{7\pi}{6}\right)$. Доказать, что треугольник ABC правильный.

250. Вершины треугольника находятся в точках $A\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$, $C\left(4+\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

251. Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, оси которого равны соответственно $2a$ и $2b$, где $a > b$. Приняв фокус F_2 за полюс полярной системы координат, а направленную прямую F_2F_1 за полярную ось, найти полярные координаты фокусов F_1, F_2, центра O и точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, изображенных на рисунке 12. Положительная ориентация плоскости отмечена на рисунке стрелкой.

252. Пусть F_1 и F_2 — фокусы гиперболы, действительная ось которой равна $2a$, а мнимая ось $2b$. Приняв фокус F_2 за полюс полярной системы координат, а направленную прямую F_2F_1 за полярную ось, найти полярные координаты следующих точек, отмеченных на рисунке 13: O, F_1, F_2, A_1, A_2, A_8,

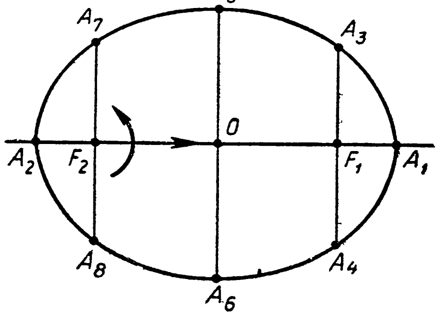


Рис. 12

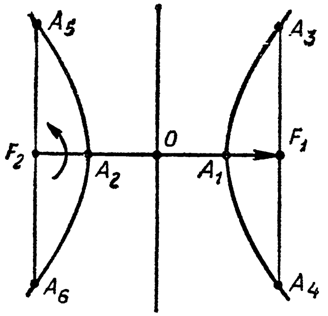


Рис. 13

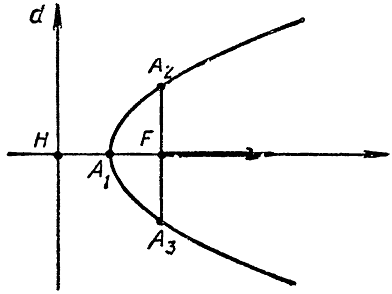


Рис. 14

A_4, A_5, A_6. Положительная ориентация плоскости отмечена на рисунке стрелкой.

253. Пусть F — фокус параболы, d — ее директриса, а p — фокальный параметр. Приняв фокус F за полюс полярной системы координат, а направленную ось симметрии параболы за полярную ось (см. рис. 14), найти полярные координаты точек F, A_1, A_2, A_3, H. Положительная ориентация плоскости отмечена на рисунке стрелкой.

§ 9. Уравнение множества точек на плоскости

1. Изучение свойств множества точек по данному уравнению[1]

254. Какие из точек $A\ (1,\ 3)$, $B\ (-2,\ 5)$, $C\ (2,\ 1)$, $D\ (2,\ 3\sqrt{2})$, $E\ (1,\ 0)$ принадлежат множеству, определенному уравнением $2x^2 - y^2 + 3x + 4 = 0$?

255. Даны уравнения: а) $x^2 + 2y - x + 1 = 0$; б) $x^2 - y^2 = 0$; в) $2x^2 - 3y^2 + x - y = 0$; г) $3x^2 - y^2 + 5 = 0$. Указать, какие множества точек, определяемые данными уравнениями, содержат начало координат.

256. Найти точки пересечения множеств точек, определяемых уравнениями:

а) $x^2 + y^2 = 32$ и $x - y = 0$;
б) $x^2 - 2xy + 4x - 3 = 0$ и $5x - 4y - 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$ и $x^2 + y^2 = 4$;
г) $x^2 + y^2 = a^2$ и $3x + y + a = 0$.

257. Выяснить, какие пары уравнений определяют одно и то же множество точек:

[1] Во всех задачах этого параграфа, где точки даны координатами, а множества — уравнениями и где нет специальных оговорок о системе координат, предполагается, что на плоскости дана общая декартова система координат.

а) $x = |x - y|$ и $2xy - y^2 = 0$;
б) $x = y$ и $x^2 = y^2$;
в) $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 3$ и $(x-a)^2 + y^2 = 9$.

258. Исследовать множества точек, заданные в прямоугольной декартовой системе координат следующими уравнениями:

а) $x - y = 0$;
б) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
в) $y + 3 = 0$;
г) $xy + y^2 = 0$;
д) $x^2 - y^2 = 0$;
е) $x - 5 = 0$;
ж) $y^2 - 2xy = 0$;
з) $(x - y + 5)^2 - (y + x - 3)^2 = 0$;
и) $(x + y + 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$;
к) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$;
л) $(x - 3)^2 + y^2 + 5 = 0$.

259. Исследовать множества точек, заданные следующими уравнениями: а) $|x| = 1$; б) $|x| = |y|$; в) $x = |x - y|$; г) $y = |x - 1|$.

260. Изобразить на чертеже множества точек, заданные следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant 1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 0 < x \leqslant 1, \\ y > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 3; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0; \end{cases}$
д) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2; \end{cases}$
е) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25, \\ |x| < 2. \end{cases}$

261. Найти множество точек, координаты которых в общей декартовой системе удовлетворяют уравнению $|x| + |y| = a$, где $a \neq 0$.

262. Даны параметрические уравнения множеств точек в прямоугольной декартовой системе координат:

а) $x = 3t$, $y = t + 5$;
б) $x = 2t^2 - 1$, $y = t + 6$;
в) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;
г) $x = 3\cos t$, $y = 5\sin t$.

Составить уравнения данных множеств в прямоугольных декартовых координатах и определить эти множества.

2. Составление уравнения множества точек и изучение его свойств[1]

263. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек каждой из заштрихованных фигур, изображенных на рисунке 15. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, относятся к самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на рисунке 15).

264. Найти множество точек, для каждой из которых сумма расстояний от осей координат равна 8.

[1] Во всех задачах этого пункта система координат прямоугольная декартова.

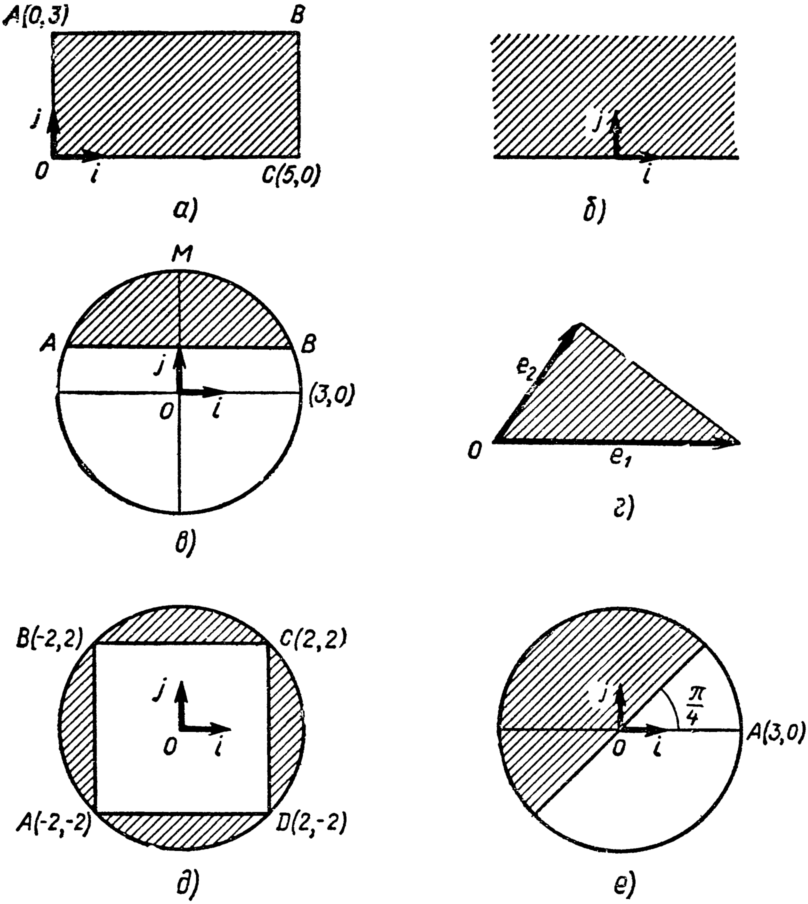


Рис. 15

265. В каждом из следующих случаев найти множество точек, равноудаленных от точек: а) A_1 (—3, 5), B_1 (1, —1); б) A_2 (—3, 1), B_2 (7, 5).

266. Написать уравнение множества точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до осей координат равна 5.

267. Даны две точки A (—a, 0) и B (a, 0). Составить уравнение множества точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Убедиться в том, что это множество точек есть окружность с диаметром AB.

268. Даны точки A (—5, 1) и B (3, 5). Составить уравнение множества точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом.

269. Определить множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному положительному числу.

270. Дан прямоугольник $ABCD$. Определить множество всех точек x плоскости, для которых

$$Ax + Cx = Bx + Dx.$$

271. Найти множество точек M, удовлетворяющих условию $AM^2 - BM^2 = 5$, где A (3, —1), B (1, 2).

272. Найти множество точек M плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная, т. е. $AM^2 - BM^2 = a^2$.

273. Найти множество точек, для каждой из которых модуль разности квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

274. Вершины A и B прямоугольника $OAMB$ скользят соответственно по осям Ox и Oy системы координат Oxy, при этом площадь прямоугольника сохраняет постоянную величину, равную a^2. Найти множество вершин M.

3. Множества точек в полярных координатах

275. В каждом из следующих случаев определить множество точек, координаты которых в необобщенной полярной системе координат удовлетворяют следующим уравнениям: а) $\rho = 3$; б) $\rho = 5$; в) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; д) $\rho\cos\varphi = 5$; е) $\rho\sin\varphi = 3$.

276. В каждом из следующих случаев определить множество точек, координаты которых в обобщенной полярной системе координат удовлетворяют уравнению:

а) $\rho = 4$;
б) $\rho\cos\varphi = 2$;
в) $\rho = 10\sin\varphi$;
г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
д) $\rho\sin\varphi = 1$;
е) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $\sin\varphi = \cos\varphi$;
з) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

277. В прямоугольной декартовой системе координат даны множества точек уравнениями: а) $x - 3y = 0$; б) $y + 5 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 16$; г) $x^2 + y^2 - ax = 0$; д) $xy = 10$; е) $x^2 - y^2 = a^2$; ж) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; з) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

Найти уравнения тех же множеств точек в обобщенной полярной системе координат $O\boldsymbol{i}$, если ориентация плоскости совпадает с ориентацией, определяемой базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

278. В обобщенной полярной системе координат $O\boldsymbol{i}$ даны уравнения множеств точек:

а) $\rho = 5$;
б) $\varphi = \frac{\pi}{6}$;
в) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
г) $\rho\cos\varphi = 2$;

д) $\rho\sin\varphi = 6$; е) $\rho = 3\cos\varphi$;
ж) $(\rho + \cos\varphi)^2 = 1$; з) $\rho = 2\cos\varphi + 3\sin\varphi$;
и) $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$.

Найти уравнения тех же множеств точек в прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$, где вектор $\boldsymbol{j}$ получен из $\boldsymbol{i}$ поворотом на $+90°$.

§ 10. Преобразование координат точек на плоскости

1. Преобразование общей и прямоугольной декартовых систем координат

279. Записать формулы преобразования общих декартовых систем координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

а) $e_1'\{4,\ 3\}$, $e_2'\{0,\ 5\}$, $O'(3,\ -1)$;
б) $e_1'\{1,\ 0\}$, $e_2'\{0,\ 1\}$, $O'(2,\ 5)$;
в) $e_1'\{4,\ -1\}$, $e_2'\{1,\ 1\}$, $O'(0,\ 0)$;
г) $e_1'\{1,\ 0\}$, $e_2'\{1,\ 2\}$, $O'(2,\ 0)$;
д) $e_1'\{-1,\ 0\}$, $e_2'\{0,\ 1\}$, $O'(0,\ -5)$.

280. Пусть OAB — произвольный треугольник. Записать формулы преобразования координат точек при переходе от общей декартовой системы O, $e_1 = \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OB}$ к общей декартовой системе в каждом из следующих случаев:

а) $O' = A$, $e_1' = \overrightarrow{AB}$, $e_2' = \overrightarrow{AO}$;
б) $O' = 0$, $e_1' = \overrightarrow{OB}$, $e_2' = \overrightarrow{OA}$;
в) $O' = C$, $e_1' = \overrightarrow{CA}$, $e_2' = \overrightarrow{CB}$.

281. В треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Написать формулы преобразования координат при переходе от общей декартовой системы координат O, $e_1 = \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OB}$ к общей декартовой системе O', $e_1' = \overrightarrow{O'A}$, $e_2' = \overrightarrow{O'B}$.

282. Написать формулы преобразования при переносе начала координат в точку O' в каждом из следующих случаев: а) $O'(5,\ \sqrt{2})$; б) $O'(-1,\ 0)$; в) $O'(-1,\ -3)$; г) $O'\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$.

283. Написать формулы преобразования координат при аффинном повороте[1] в каждом из следующих случаев:

а) $e_1'\{2,\ 1\}$, $e_2'\{-2,\ 1\}$; б) $e_1'\{1,\ 0\}$, $e_2'\{2,\ -\sqrt{2}\}$;
в) $e_1'\{0,\ 1\}$, $e_2'\{1,\ 0\}$; г) $e_1'\{0,\ -5\}$, $e_2'\{1,\ 1\}$[1].

[1] Аффинным поворотом называется переход от системы Oe_1e_2 к системе $Oe'_1\,e'_2$.

284. В каждом из следующих случаев начертить на плоскости две различные системы координат, в которых точка M имеет одни и те же координаты:

а) $M(2,\ 1)$ — системы координат прямоугольные декартовы;

б) $M(1,\ 1)$ — системы координат общие декартовы.

285. Найти координаты точки, имеющей одни и те же координаты в системах Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, где $O'(2,\ -3)$, $e_1'\{1,\ 3\}$, $e_2'\{-2,\ 1\}$.

286. Существуют ли точки на плоскости, отличные от O, координаты которых не меняются при аффинном повороте?

287. В системе Oe_1e_2 точки A и B имеют координаты $(2,\ 1)$ и $\left(-\frac{3}{2},\ 3\right)$. Существует ли такая новая система координат с началом в точке $(0,\ 1)$, в которой точки A и B имеют соответственно координаты $(1,\ 0)$ и $(0,\ 1)$?

288. В системе Oe_1e_2 точки A и B имеют координаты $(1,\ 1)$ и $(2,\ 2)$. Существует ли такая новая система координат, начало которой совпадает с началом старой системы и в которой точки A и B имеют координаты $(1,\ 1)$ и $(-1,\ -2)$?

289. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $\begin{cases} x = x' - 3y', \\ y = x' + y' + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x' - y' + 1, \\ y = y'; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x + y + 1, \\ y' = x - 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x. \end{cases}$

290. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых систем координат в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{i}' = \frac{\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{j}$, $O'(-3,\ \sqrt{2})$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют одну и ту же ориентацию;

б) $\measuredangle(\boldsymbol{ii}') = 30^\circ$, $O'(0,\ -2)$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют различные ориентации;

в) $\measuredangle(\boldsymbol{ii}') = 45^\circ$, $O'(0,\ 0)$ системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют одну и ту же ориентацию;

г) $\boldsymbol{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}$, $O'(2,\ -12)$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют различные ориентации.

291. Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Пусть направленные прямые AB и AD являются осями координат старой системы (AB — первая ось, AD — вторая).

В каждом из следующих случаев написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если за новые координатные оси приняты направленные прямые:

а) первая ось AC, вторая ось BD;

б) первая ось CD, вторая ось CB;

в) первая ось AD, вторая ось DC.

292. Даны две различные прямоугольные декартовы системы координат, причем вторая система получена из первой переносом начала в точку O' $(5, \sqrt{11})$ без изменения направления осей. Найти расстояние a между точками A и B, если B имеет те же координаты во второй системе, что и A в первой.

293. Даны формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $O\boldsymbol{ij}$ к системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$. Выяснить, в каких из указанных ниже случаев новая система $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$ является прямоугольной декартовой:

а) $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1, \\ y = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\,x' + \frac{1}{2}y' - 1, \\ y = -\frac{1}{2}x' + y' - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = -y' + 1, \\ y = x'; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$

2. Изменение уравнения множества точек при преобразовании системы координат

294. В системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ даны линии уравнениями:

а) $x - 2y + 1 = 0$; б) $x + y = 0$; в) $y - 3 = 0$. Найти уравнения тех же линий в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$, если O' $(1, 0)$, $\boldsymbol{e}_1'$ $\{1, -3\}$, $\boldsymbol{e}_2'\{4, 4\}$.

295. В системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ дано множество точек уравнением $4x^2 - y^2 - 4xy + 4x + 6y - 8 = 0$. Найти уравнение того же множества в системе координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$, если $O'\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\boldsymbol{e}_1'\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$, $\boldsymbol{e}_2'\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

296. В системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ дано множество точек уравнением $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$. Определить уравнение этого же множества в системе координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$, если $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\boldsymbol{e}_1'\{1, 1\}$, $\boldsymbol{e}_2'\{1, 0\}$.

297. В прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$ дано множество точек уравнением $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$. Найти уравнение того же множества в прямоугольной декартовой системе, которая получается из данной поворотом на $+45°$.

298. Прямоугольную декартову систему координат $O\boldsymbol{ij}$ повернем вокруг начала координат на угол $+30°$. Найти уравнения:

а) новых координатных осей в старой системе;

б) старых координатных осей в новой системе.

299. Задано преобразование переноса начала прямоугольной декартовой системы координат $O\boldsymbol{ij}$ в точку O' $(-3, 5)$. Записать уравнения биссектрис координатных углов $O\boldsymbol{ij}$ в новой системе.

300. В прямоугольной декартовой системе координат дана равнобочная гипербола $x^2 - y^2 = a^2$. Определить уравнение этой гиперболы, если начало координат оставлено прежнее, а оси повернуты на 45° в отрицательном направлении.

301. В общей декартовой системе координат дано множество точек уравнением $2x^2 - y^2 + 5xy - 3x + 4y - 5 = 0$. Новую общую декартову систему координат выбрать так, чтобы в уравнении кривой исчезли члены первой степени.

302. Показать, что надлежащим подбором нового начала координат можно добиться того, чтобы при параллельном переносе системы координат в уравнении кривой $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ исчезли члены первой степени.

303. Путем переноса начала координат упростить уравнения кривых, приведенных ниже, и показать, что:

а) кривая $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$ имеет единственную действительную точку;

б) кривая $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 55 = 0$ не имеет ни одной действительной точки.

304. В прямоугольной декартовой системе координат парабола дана каноническим уравнением $y^2 = 2px$. Записать уравнение этой параболы в новой системе координат, которая получена из старой системы переносом начала координат в фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ параболы.

305. В прямоугольной декартовой системе координат равнобочная гипербола дана каноническим уравнением $x^2 - y^2 = a^2$. Записать уравнение этой гиперболы в новой системе координат, которая получена из старой системы переносом начала координат в вершину A_1 $(a, 0)$.

306. В прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$ парабола дана каноническим уравнением $y^2 = 2px$. Можно ли выбрать новую систему координат так, чтобы в этой системе уравнение параболы не содержало членов первой степени?

307. Показать, что существует такая прямоугольная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (где $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$), в которой уравнение эллипса имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$.

308. Показать, что существует такая прямоугольная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (где $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$), в которой уравнение гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = 1$.

309. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в канонической системе координат $O\boldsymbol{ij}$. Записать уравнение этой гиперболы в новой системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, зная, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ параллелен асимптоте $y = \frac{b}{a}x$ гиперболы, а вектор $\boldsymbol{e}_2$ — асимптоте $y = -\frac{b}{a}x$.

310. Доказать, что множество точек, координаты которых в некоторой системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ удовлетворяют уравнению $xy = 1$, есть гипербола.

311. Путем подбора новой системы координат определить множество точек, заданное в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями: а) $2xy - x = 1$; б) $6x^2 + 6y^2 + 8xy + 12 = 0$; в) $x - 5xy = 0$; г) $x^2 + 2y - 5 = 0$; д) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

§ 11. Окружность

1. Уравнение окружности[1]

312. Найти уравнение окружности с центром в точке C и радиуса r в каждом из следующих случаев:

а) $C(0, 1)$, $r = 3$; в) $C(5, 1)$, $r = 3$;
б) $C(-2, 0)$, $r = 2$; г) $C(-3, 5)$, $r = 4$.

313. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения множеств точек:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$;
в) $x^2 + xy - 2x = 0$;
г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
е) $x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0$;
ж) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Выяснить, какие из приведенных уравнений определяют окружность. Найти координаты центра и радиус каждой из них.

314. Выяснить, при каких значениях λ множество точек, определяемое уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y + \lambda = 0$, имеет хотя бы одну действительную точку. При этих значениях λ определить характер данного множества.

315. Выяснить, при каких значениях k множество точек, определяемое уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 2ky + 10 = 0$, имеет хотя бы одну действительную точку. При этих значениях k определить характер данного множества.

316. При каком необходимом и достаточном условии окружность, определяемая уравнением $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$: а) касается оси Ox; б) касается оси Oy; в) касается обеих осей координат.

317. В каждом из следующих случаев найти уравнение окружности, для которой концами диаметра служат точки A и B_1, причем: а) $A(2, -1)$, $B(4, 3)$; б) $A(-3, 5)$, $B(7, -3)$.

318. Найти уравнение окружности, центр которой находится в точке $(-3, 2)$ и которая проходит через точку $(0, 6)$.

319. Написать уравнение окружности, центр которой находится в точке $(2, 1)$ и которая проходит через начало координат.

---

[1] В задачах данного параграфа система координат прямоугольная декартова.

320. Написать уравнение окружности радиуса 3, центр которой лежит на оси Oy и которая касается оси Ox.

321. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат, если известно, что ее радиус равен 5, а центр находится в четвертой четверти.

322. В каждом из следующих случаев найти уравнение окружности, проходящей через три точки: а) $(1, -4)$, $(4, 5)$, $(3, -2)$; б) $(3, -7)$, $(8, -2)$, $(6, 2)$; в) $(-3, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 1)$; г) $(0, 0)$, $(-1, -7)$, $(-4, -3)$.

323. В полярной системе координат написать уравнение окружности радиуса a, если: а) центр окружности совпадает с полюсом системы; б) центр окружности находится в точке $C(\rho_0, \varphi_0)$.

324. Доказать, что множество точек плоскости, координаты которых в обобщенной полярной системе координат удовлетворяют уравнению $\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi = b$, где $b - a^2 > 0$, есть окружность радиуса $r = \sqrt{b - a^2}$ с центром в точке с координатами $(a, 0)$.

325. В обобщенной полярной системе координат написать уравнение окружности, если: а) ее центр имеет координаты $(4, 0)$, а радиус равен 4; б) центр имеет координаты $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, а радиус равен 3; в) центр имеет координаты $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$, а радиус равен 2.

326. Найти центр и радиус окружности, заданной в полярных координатах уравнением $\rho^2 + 4\rho\cos\varphi - 4\sqrt{3}\rho\sin\varphi - 20 = 0$.

2. Задачи на множества точек, определяющие окружность

327. Найти множество точек, отношение расстояний которых от двух данных точек A и B постоянно и равно λ.

328. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

329. Найти уравнение множества точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от двух точек $A(-1, 2)$ и $B(1, 4)$ есть величина постоянная, равная 22.

330. Найти множество точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от двух перпендикулярных прямых есть постоянная величина λ^2.

331. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых от трех данных точек A, B и C есть величина постоянная.

332. Дана окружность и некоторая точка A, лежащая в плоскости окружности. Отрезок AB (где B — любая точка окружности) точкой M разделен в постоянном отношении λ. Найти множество точек M.

333. На окружности радиуса r взята точка O, вокруг которой вращается прямая, пересекающая окружность в переменной точке B. На этой прямой по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$, где A — другой конец диаметра, проходящего через точку O. Определить линии, описываемые точками M_1 и M_2 при вращении прямой OB.

334. Сторона BA треугольника ABC с неподвижным основанием BC вращается вокруг точки B, сохраняя при этом постоянную длину b. Найти множество: а) середин сторон CA; б) центроидов точек A, B и C.

335. Дан квадрат $ABCD$. Найти множество точек плоскости, для каждой из которых: а) сумма квадратов расстояний от четырех прямых AB, BC, CD, DA есть величина постоянная; б) сумма квадратов расстояний от прямых AC и BD есть величина постоянная.

3. Радикальная ось. Угол между двумя окружностями

336. Степенью точки M относительно окружности с центром в точке C и радиуса R называется число $\alpha = MC^2 - R^2$.

Найти множество точек плоскости, имеющих одну и ту же степень относительно данной окружности.

337. Доказать, что множество точек, имеющих равные степени относительно двух данных неконцентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная к линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* данных окружностей.

338. Даны две окружности:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются;

б) уравнение

$$[(x-1)^2 + (y+2)^2 - 10] + \lambda\,[(x-1)^2 + (y-3)^2 - 5] = 0 \quad (1)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, проходящую через точки пересечения Ω_1 и Ω_2, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda = -1$ уравнение (1) определяет радикальную ось окружностей Ω_1 и Ω_2;

г) радикальная ось любых двух различных окружностей, задаваемых уравнением (1), совпадает с радикальной осью окружностей Ω_1 и Ω_2.

339. Даны две окружности:

$$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 20, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 касаются;

б) уравнение

$$[(x+2)^2 + (y-7)^2 - 20] + \lambda\,[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 5] = 0 \quad (2)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, касающуюся данных окружностей Ω_1 и Ω_2 в их точке касания, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda = -1$ уравнение (2) определяет радикальную ось окружностей Ω_1 и Ω_2, т. е. общую касательную в точке касания.

340. Даны две окружности:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x+4)^2+(y-2)^2=4. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 не пересекаются;

б) уравнение

$$[(x-1)^2+(y+2)^2-1]+\lambda[(x+y)^2+(y-2)^2-4]=0 \qquad (3)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, не пересекающую ни Ω_1, ни Ω_2, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda = -1$ уравнение (3) определяет радикальную ось окружностей;

г) радикальная ось любых двух различных окружностей, задаваемых уравнением (3), совпадает с радикальной осью окружностей Ω_1 и Ω_2.

341. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения двух пересекающихся окружностей:

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Доказать, что косинус угла между этими окружностями вычисляется по формуле[1]

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2-2C_1-2C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2-4C_1}\sqrt{A_2^2+B_2^2-4C_2}}.$$

§ 12. Некоторые замечательные кривые

342. Циклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по данной прямой l (рис. 16).

Приняв прямую l за ось абсцисс, точку O этой прямой, которая совпадает с начальным положением движущейся точки, за начало прямоугольной декартовой системы координат и направив оси, как указано на рисунке 16, написать уравнение циклоиды.

343. Эпициклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внеш-

[1] Углом между двумя окружностями называется угол между касательными к окружностям в точке их пересечения. Заметим, что угол между двумя окружностями на неориентированной плоскости определяется неоднозначно.

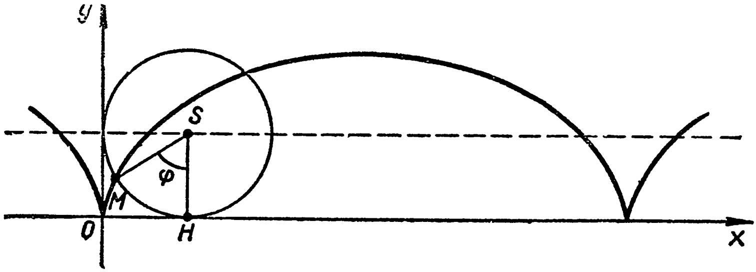


Рис. 16

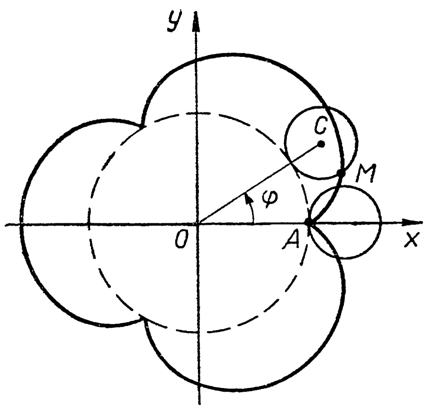


Рис. 17

ней стороне другой окружности с центром в точке O и радиусом R (рис. 17)[1].

Написать параметрическое задание эпициклоиды в прямоугольной декартовой системе Oxy, изображенной на рисунке 17, приняв за параметр угол $\varphi = \angle AOC$. Здесь C—центр катящейся окружности, а A — точка неподвижной окружности, совпадающая с начальным положением движущейся точки M.

344. Кардиоидой называется частный случай эпициклоиды (см. задачу 343), когда радиус r катящейся окружности равен радиусу R неподвижной окружности (на рисунке 18 точка O — центр неподвижной окружности).

Точку A неподвижной окружности, с которой совпадает точка M катящейся окружности, описывающей траекторию, назовем полюсом, направленную прямую OA — осью, а длину диаметров окружностей — параметром кардиоиды.

Дана кардиоида с полюсом в точке A, осью l и параметром $2r$. Написать уравнение данной кардиоиды в полярной системе координат; если: а) полюсом системы координат является точка A, а осью — направленная прямая l; б) полюсом системы координат является точка A, а ось полярной системы имеет направление, противоположное оси l.

345. Гипоциклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности с центром в точке O радиуса R (рис. 19).

Написать параметрическое задание гипоциклоиды в прямоуголь-

---

[1] На рисунке 17 изображена эпициклоида, когда $\frac{R}{r} = 3$. В общем случае, когда $\frac{R}{r}$ не является рациональным числом, число ветвей эпициклоиды бесконечно.

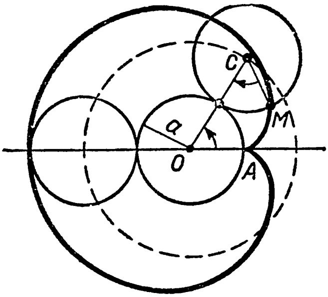


Рис. 18

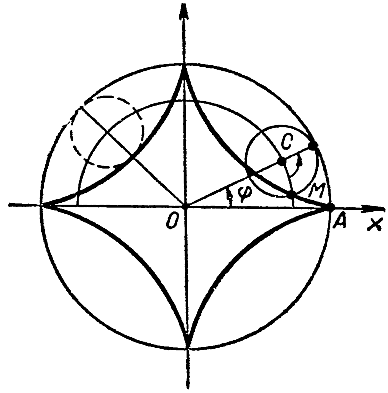


Рис. 19

ной декартовой системе Oxy, изображенной на рисунке 19, приняв $\measuredangle\ \varphi = \measuredangle\ AOC$ за параметр. Здесь C — центр катящейся окружности, а A — точка неподвижной окружности, совпадающая с начальным положением движущейся точки M.

В частности, рассмотреть случай, когда $r = \frac{R}{4}$. Такая гипоциклоида называется *астроидой*. Рисунок 19 является изображением астроиды.

346. На плоскости даны кривая L и точка S. Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки пересечения с кривой L (если такая существует) откладывается в обе стороны отрезок, равный b. Множество концов этих отрезков называется *конхоидой* данной кривой. *Конхоидой Никомеда* называется конхоида прямой линии l, если точка S не лежит на этой прямой (рис. 20).

Приняв точку S за полюс полярной системы и направив полярную ось от точки S перпендикулярно к прямой l, написать уравнение конхоиды Никомеда, если точка S отстоит от прямой l на расстоянии $a \neq 0$. Конхоида Никомеда для случая $a > b$ изображена на рисунке 20, *а*, для случая $a = b$ — на рисунке 20, *б* и для случая $a < b$ — на рисунке 20, *в*.

347. *Улиткой Паскаля* называется конхоида окружности с центром в точке C радиуса r, если за точку S выбрана точка на этой окружности (см. задачу 346). Точку S назовем *полюсом*, направленную прямую CS — *осью*, а числа $2r$ и b — соответственно *первым и вторым параметрами* улитки Паскаля.

Дана улитка Паскаля с полюсом в точке S, осью l и параметрами $2r$ и b. Написать уравнение этой кривой в полярной системе координат, если: а) полюсом системы является точка S, а осью — направленная

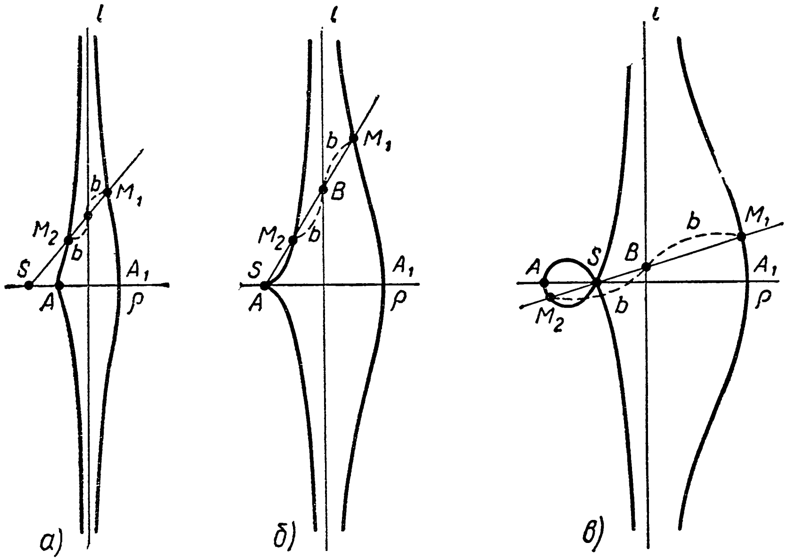


Рис. 20

прямая l; б) полюсом системы является точка S, а ось полярной системы имеет направление, противоположное оси[1] l.

348. Доказать предложение: если параметры улитки Паскаля равны друг другу, то кривая является кардиоидой, при этом центр и ось улитки Паскаля будут соответственно центром и осью кардиоиды, а параметры улитки Паскаля — параметром кардиоиды.

349. Даны две взаимно перпендикулярные прямые l и m, пересекающиеся в точке O, и точка A, отличная от O, лежащая на прямой l и отстоящая от O на расстоянии $b \neq 0$. Через точку A проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки P пересечения с прямой m откладываются в разных направлениях два отрезка PM_1 и PM_2, удовлетворяющие условию $PM_1 = PM_2 = PO$. Строфоидой называется множество всех точек M_1 и M_2 (рис. 21). Точка O называется полюсом строфоиды, направленная прямая AO — осью, а b — параметром.

Написать уравнение строфоиды в прямоугольной декартовой системе координат, осями которой являются прямые l и m, а направление оси Ox определяется направлением оси строфоиды.

350. Пусть $OA = 2a$ — диаметр некоторой окружности, а AB — касательная к окружности, проведенная в конце диаметра (рис. 22). Через точку O проведены всевозможные лучи и на каждом из них откладывается отрезок $OM = PQ$, где P — точка пересечения соот-

[1] Изображение улитки Паскаля дано на рисунках 36, 37 и 38, где, кроме улитки, изображены также эллипс, гипербола и парабола.

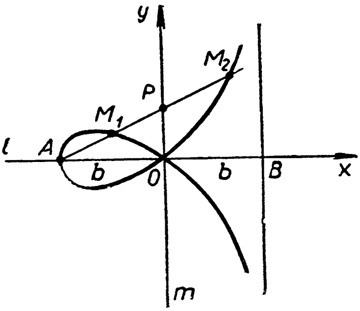


Рис. 21

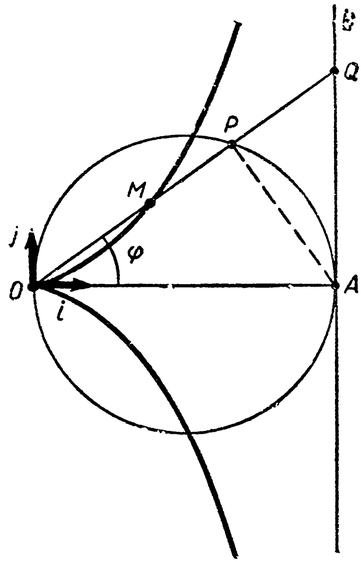


Рис. 22

ветствующего луча с окружностью, а Q — с касательной AB (рис. 22). Множество точек M называется ц и с с о и д о й Д и о к л е с а. Точка O называется п о л ю с о м, направленная прямая OA — о с ь ю, а диаметр окружности $2a$ — п а р а м е т р о м циссоиды.

Дана циссоида Диоклеса с полюсом в точке O, осью l и параметром $2a$. Приняв точку O за полюс, а ось кривой за ось полярной системы, вывести уравнение кривой в полярных координатах. Записать уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рисунке 22.

351. Пусть F_1 и F_2 — две различные фиксированные точки, b — постоянное число и $F_1F_2 = 2c$. О в а л о м К а с с и н и называется множество точек M, для которых

$$F_1M \cdot F_2M = b^2.$$

Лемнискатой Бернулли называется овал Кассини при $c = b$. Середина отрезка F_1F_2 называется ц е н т р о м, число c — п а р а м е т р о м, а прямая F_1F_2 — осью лемнискаты (рис. 23)[1].

Приняв направленную прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 за начало прямоугольной декартовой системы координат, написать уравнения овала Кассини и лемнискаты Бернулли.

352. Отрезок PQ постоянной длины $2a$ перемещается своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины этого угла опущен перпендикуляр на данный отрезок. Множество оснований этих перпендикуляров есть кривая, называемая ч е т ы р е х л е п е с т к о в о й розой (рис. 24).

---

[1] На рисунке 23 изображены овалы Кассини (все кривые, не проходящие через начала координат) и лемниската Бернулли (кривая, проходящая через начало координат). При $b > c$ овал Кассини является замкнутой линией; при $b < c$ — состоит из пары обособленных овалов и при $b = c$ овал Кассини является лемнискатой Бернулли.

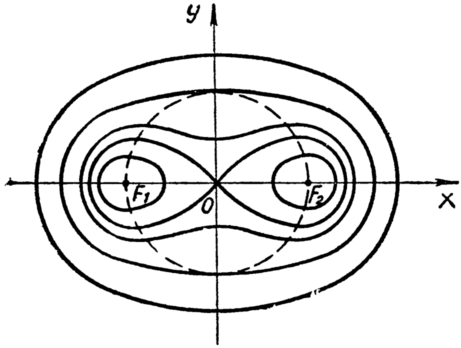


Рис. 23

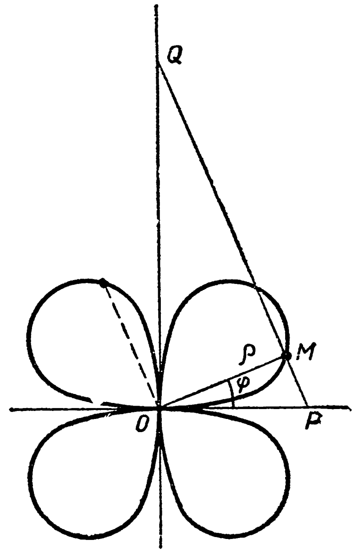


Рис. 24

Взяв за полюс полярной системы координат вершину прямого угла и направив полярную ось по одной из сторон прямого угла, вывести уравнение этой кривой.

353. Луч l, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M, имея начальное положение в точке O, движется по лучу l равномерно со скоростью v. Траектория точки M называется спиралью Архимеда (рис. 25). Приняв точку O за полюс, а прямую, направление которой определяется исходным лучом l, за полярную ось, написать уравнение спирали Архимеда в выбранной полярной системе координат.

354. Даны диаметрально противоположные точки O и C окружности диаметра a и касательная l к окружности в точке C. Пусть S — произвольная точка окружности, E — точка пересечения прямых OS и l, а M — точка пересечения прямых, проведенных через S и E и перпендикулярных соответственно прямым OC и l (рис. 26). При движении точки S по окружности точка M описывает кривую, называемую верзиерой. Вывести уравнение верзиеры в прямоугольной декартовой системе, изображенной на рисунке 26.

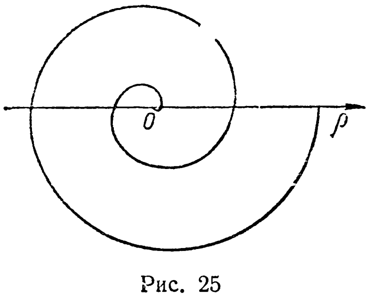


Рис. 25

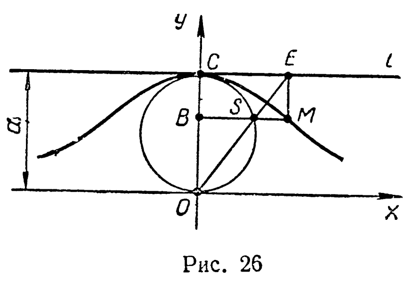


Рис. 26

§ 13. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

355. Доказать, что в прямоугольном треугольнике каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

356. Доказать, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между двумя отрезками, на которые он рассекает гипотенузу.

357. Даны треугольник и в его плоскости произвольная точка M, которая дважды последовательно отражается относительно всех вершин треугольника. Доказать, что после последнего шага отраженная точка совпадает с точкой M.

358. Пусть ABC — произвольный треугольник, а l — некоторая прямая, лежащая в его плоскости и проходящая через точку M_0 пересечения медиан. Если A', B' и C' — проекции точек A, B, C на прямую l, то $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=0$. Доказать.

359. Доказать теорему Менелая: для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях), принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}=1.$$

360. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и B_1, которые делят эти стороны в данных отношениях:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\lambda,\quad \frac{AB_1}{B_1C}=\mu.$$

В каком отношении делят друг друга отрезки BB_1 и CC_1? В частности рассмотреть случай, когда точки C_1 и B_1 являются серединами сторон AB и AC.

361. Доказать теорему: пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA, AB, образующих треугольник ABC. Если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=1.$$

362. Доказать теорему Стюарта: для треугольника ABC и точки D, лежащей между B и C, имеет место равенство

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD.$$

363. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершины последнего делят стороны треугольника ABC в одном и том же отношении:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda.$$

Показать, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

364. Внутри треугольника ABC взята точка O. Доказать, что треугольники OAB, OBC и OCB равновелики тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан.

365. Стороны AB и CD простого четырехугольника $ABCD$, будучи продолженными, пересекаются в точке O. Обозначая через S и P соответственно середины диагоналей BD и AC, показать, что площадь треугольника OSP равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

366. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобочная.

367. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

368. Показать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Глава III

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 14. Прямая в общей декартовой системе координат[1]

369. Дана прямая[2] $2x - y + 5 = 0$. Выяснить, какие из следующих точек принадлежат данной прямой: $(5, 15)$; $(1, 1)$; $(-2, 1)$; $(3, 0)$; $(7, -5)$; $(1, 7)$; $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$; $(0, 3)$.

370. Определить координаты точек, которые принадлежат прямой $3x - 2y + 1 = 0$ и имеют ординаты 1; $\frac{1}{2}$; 2; -1; 3; 5; -4.

371. Определить координаты точек, которые принадлежат прямой $7x + 2y - 8 = 0$ и имеют абсциссы 2; -4; 3; -1; 1; 0; 5.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что на плоскости предварительно выбрана некоторая общая декартова система координат.

[2] Здесь и в дальнейшем выражения: «Дана прямая $Ax + By + C = 0$» или «Дана точка $A(x, y)$» — следует понимать так: «Дана прямая, уравнение которой в выбранной системе координат имеет вид: $Ax + By + C = 0$» или «Дана точка A, которая в выбранной системе координат имеет координаты x, y».

372. Даны прямые:

а) $3x - y - 5 = 0$;
б) $x + 2y + 4 = 0$;
в) $2x - 3y + 6 = 0$;
г) $6x + 5 = 0$;
д) $3y - 8 = 0$;
е) $2x - y = 0$;
ж) $5x + 3y = 0$;
з) $x - 3 = 0$;
и) $y + 7 = 0$.

Для каждой прямой найти координаты точек пересечения с координатными осями. Начертив на плоскости общую декартову систему координат, построить эти прямые при помощи циркуля и линейки.

373. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки A (—1, 1) и B (2, 5);

б) проходящей через начало координат и точку A (2, 5);

в) проходящей через точку A (2, —6) и параллельной вектору p {1, —1};

г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

д) проходящей через точку A (3, 5) и параллельной оси Ox;

е) проходящей через точку B (—1, 2) и параллельной оси Oy;

ж) проходящей через точку A (1, —5) и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$;

з) проходящей через точку A (2, 2) и параллельной прямой $x + y = 0$.

374. Написать уравнения сторон треугольника, вершины которого находятся в точках (—3, 2), (3, —2) и (0, —1).

375. Дан треугольник ABC координатами своих вершин A (—1, 3), B (0, 4), C (—2, —2). Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

376. Написать уравнения средних линий треугольника, вершины которого находятся в точках A (2, 6), B (—4, 0), C (4, 2).

377. Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой: а) (2, 1), (—1, 4), (—7,10); б) (0, 5), (7, 1), (—2, 3); в) (1, 0), (0, 1), (—2, 3); г) (2, 1), (10, 3), (5, 2).

378. Найти длины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми: а) $3x - 2y + 6 = 0$; б) $x + y + 6 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$. Составить уравнения этих прямых в отрезках.

379. Написать параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку P (—2, 3) параллельно вектору p {5, —1};

б) проходящей через две точки M_1 (0, —2), M_2 (3, —4);

в) проходящей через начало координат и параллельной вектору p {1, 1};

г) проходящей через точку M_0 (1, —3) и параллельной оси Ox;

д) проходящей через две точки M_1 (1, 2) и M_2 (1, —5).

380. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$x = -1 + 4t, \quad y = 2 - t.$$

а) Найти направляющий вектор данной прямой;

б) определить координаты точек, имеющих параметры

$$t_1 = 3,\ t_2 = 0,\ t_3 = -2,\ t_4 = -1;$$

в) определить параметры точек пересечения данной прямой с осями координат;

г) среди точек $M_1(-3, 1)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(15, -2)$, $M_4\left(0, \frac{7}{4}\right)$, $M_5(2, 2)$ найти точки, принадлежащие данной прямой.

381. Найти координаты направляющих векторов следующих прямых: а) $3x + 7y + 8 = 0$; б) $x + 5 = 0$; в) $2x - 3y - 1 = 0$; г) $-x + 2y - 8 = 0$; д) $2y + 5 = 0$.

382. Даны прямые: а) $3x - y + 5 = 0$; б) $x + y - 3 = 0$; в) $2x + 5 = 0$; г) $4x + 5y + 6 = 0$; д) $x + 3y = 0$. Написать уравнение каждой из них в параметрическом виде.

383. Доказать предложение: для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta\}$ принадлежал прямой $Ax + By + C = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $A\alpha + B\beta = 0$.

384. Доказать, что если в общей декартовой системе координат дана прямая уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $\boldsymbol{p}\{A, B\}$ не параллелен прямой, и если его приложить к некоторой точке прямой, то координаты x_1, y_1 его конца удовлетворяют условию $Ax_1 + By_1 + C > 0$.

385. Записать общие уравнения следующих прямых, заданных параметрически: а) $x = -2 + 3t$, $y = 4 - t$; б) $x = t$, $y = 2$; в) $x = 5 + t$, $y = 3t$.

386. Взяв на плоскости общую декартову систему координат, построить следующие прямые, заданные параметрически:

а) $x = 1 - 2t$, $y = 5 - 4t$; б) $x = 3$, $y = t$; в) $x = 5t$, $y = -1 + \sqrt{3}t$.

387. Даны три вершины треугольника $A(1, -2)$, $B(0, 3)$, $C(1, 1)$. Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них параллельно противоположной стороне.

388. Показать, что четырехугольник $ABCD$, где $A(-2, -2)$, $B(-3, 1)$, $C\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ и $D(3, 1)$, является трапецией. Составить уравнения средней линии и диагоналей этой трапеции.

389. Даны смежные вершины $A(1, -2)$ и $B(3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $\boldsymbol{P}(1, 1)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон параллелограмма.

390. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $F(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

391. Даны середины сторон треугольника $M(2, -1)$, $N(-3, -3)$ и $\boldsymbol{P}(-1, 0)$. Составить уравнения его сторон.

§ 15. Прямая в прямоугольной декартовой системе координат

392. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (2, 5) и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку (0, 0) и имеющей угловой коэффициент $k = -2$;

в) являющейся биссектрисой координатного угла Oij;

г) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+30°$;

д) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+120°$;

е) отсекающей от оси Oy отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -3$;

ж) отсекающей от оси Oy отрезок $b = -3$ и имеющей угловой коэффициент $k = 1$.

393. Найти угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые на оси Oy каждой из следующих прямых:

а) $2x + y + 5 = 0$;
б) $x - 3y + 6 = 0$;
в) $x + y = 0$;
г) $2y + 5 = 0$;
д) $3x + 1 = 0$.

394. Найти углы наклона к оси Ox прямых: а) $x + y - 7 = 0$; б) $x - y + 2 = 0$; в) $x + \sqrt{3}\, y - 4 = 0$.

395. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (—1, 3) и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$ $\{2, 1\}$;

б) проходящей через точку B (5, 10) и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

396. Написать уравнение прямой, проходящей через точку P (1, 2) и отсекающей равные отрезки на осях координат.

397. Начертить на плоскости прямоугольную декартову систему координат и, пользуясь циркулем и линейкой, построить следующие прямые: а) $3x - 5y + 10 = 0$; б) $y = 2x - 3$; в) $y - 3 = 0$; г) $y = 6x$; д) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$; е) $3x - 1 = 0$.

Найти координаты нормальных векторов каждой из этих прямых.

398. Дана прямая $2x - 5y + 3 = 0$. Определить координаты направляющего вектора $\boldsymbol{p}$, нормального вектора $\boldsymbol{n}$, угловой коэффициент k и отрезки a и b, отсекаемые на осях координат данной прямой. Пользуясь циркулем и линейкой, построить прямую и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$.

399. Даны пары прямых: а) $x - y = 0$ и $x = 3$; б) $y = 0$ и $2x - 5 = 0$; в) $2x + 3y - 6 = 0$ и $x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$; г) $x + y - 1 = 0$ и $x - y = 0$; д) $2x + 2y - 1 = 0$ и $x - y = 0$.

Выяснить, какие из данных пар прямых взаимно перпендикулярны.

400. Даны уравнения движения точки M:

$$x = 3 + 4t, \quad y = -1 - 3t.$$

Определить:

а) скорость точки M;

б) точку, с которой совпадает точка M в момент времени $t = 3$;

в) в какой момент времени точка M достигнет прямой $x + 2y + 7 = 0$.

401. Составить уравнения движения точки M, которая из начального положения M_0 (2, —3) движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\boldsymbol{p}\,\{-4, +3\}$ со скоростью $v = 15$ *см/сек*. Предполагается, что система координат прямоугольная декартова и что $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1$ *см*.

Определить, за какой промежуток времени t_0 точка пройдет отрезок своей траектории, заключенной между осью Ox и прямой $2x + y + 25 = 0$.

402. Точка H (—2, 5) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l. Написать уравнение прямой l.

403. Точка M (3, 2) является основанием перпендикуляра, опущенного из точки M (1, —1) на прямую l. Написать уравнение прямой l.

404. Даны точки A (2, —3) и B (3, —5). Через середину отрезка AB провести прямую, перпендикулярную к AB.

405. На прямой $x + 2y - 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек (—2, 5) и (0, 1).

406. На осях координат Ox и Oy найти точки, равноудаленные от точек (7, 1) и (—3, 3).

407. Даны вершины треугольника A (1, 5), B (—1, 2), C (3, 2). Составить уравнения: а) высот треугольника; б) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

408. Даны две вершины треугольника A (—1, 5), B (3, 2) и точка H (5, —3) пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

409. Написать уравнения сторон квадрата, если длина стороны равна a, а за оси прямоугольной декартовой системы координат приняты его диагонали.

410. Найти проекцию точки M, заданной своими координатами, на прямую l, заданную своим уравнением, в каждом из следующих случаев: а) M (5, —2), (l) $2x - 3y - 3 = 0$; б) M (3, 3), (l) $x + y - 6 = 0$; в) M (0, 8), (l) $3x - y - 2 = 0$.

411. Определить координаты точки, симметричной началу координат относительно прямой $x - 4y + 17 = 0$.

412. Определить координаты точки, симметричной точке M (2, —5) относительно прямой $2x + 8y - 15 = 0$.

413. На прямой $2x - y - 10 = 0$ найти точку Q, сумма расстояний которой до точек M (—5, 0) и N (—3, 4) была бы наименьшей.

414. Написать уравнения всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, если сторона шестиугольника равна a, а система прямоугольных декартовых координат выбрана так, что начало совпадает с точкой A, точка B лежит на положительном луче оси Ox, а точка E — на положительном луче оси Oy.

415. Вершины треугольника находятся в точках A (—4, —5), B (4, 1) и $C\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$. Написать уравнения: а) биссектрисы внутреннего угла A; б) медианы, проходящей через вершину A; в) высоты, опущенной из вершины C.

416. Даны вершины треугольника A (1, 2), B (—1, 6) и C (5, 10). Составить уравнения сторон ромба $AMNP$, вписанного в треугольник так, что вершина M принадлежит стороне AB, вершина N—стороне BC и вершина P — стороне AC.

417. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 3y + 12 = 0$ и $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $2x + y + 4 = 0$.

§ 16. Взаимное расположение прямых. Пучок прямых

1. Взаимное расположение прямых[1]

418. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

а) $2x - 3y = 0$;
б) $3x - y + 1 = 0$;
в) $5x - 1 = 0$;
г) $3y + 1 = 0$;
д) $x + 2y = 0$;
е) $6x = 0$.

419. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и в случае пересечения определить координаты общей точки:

а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$;
б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;
в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$;
г) $y = 3$ и $x + y = 0$;
д) $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$;
е) $x = 0$ и $x + 3 = 0$;
ж) $\sqrt{5}x - 3y + 1 = 0$ и $\frac{5}{3}x - \sqrt{5}y + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что на плоскости предварительно выбрана общая декартова система координат.

420. При каком значении периметра t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1 + t)x - 2ty = 0$, параллельны?

421. Можно ли подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $\lambda x + \mu y - 3 = 0$ совпадали?

422. Выяснить взаимное расположение следующих троек прямых:

а) $y = 3$, $x - y + 5 = 0$, $2y - 5 = 0$;
б) $2x - y + 5 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - y = 0$;
в) $x - y + 6 = 0$, $2x + y + 9 = 0$, $3x - 2y + 17 = 0$.

423. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты λ и μ, для того чтобы три прямые $\lambda x + \mu y + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ и $x - 1 = 0$ имели общую точку?

2. Пучок прямых

424. Охарактеризовать семейство прямых $y = kx + b$ в каждом из следующих случаев: а) k — фиксированное число, а b — любой действительный параметр; б) b — фиксированное число, а k — любой действительный параметр.

425. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 6)$ так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между двумя параллельными прямыми $x - 5y + 23 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$, лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$.

426. На плоскости проведена прямая так, что точка $A\ (1, 2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. Написать уравнение этой прямой.

427. В пучке $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ найти прямую, проходящую через точку $M\ (4, 1)$.

428. В пучке $2x - y + 1 + \lambda(3x - 2y + 5) = 0$ найти прямую, параллельную прямой $5x - 3y + 1 = 0$.

429. В пучке $\lambda(3x - 4y + 1) + x - y = 0$ найти прямую, проходящую через начало координат.

430. В пучке $\lambda(x - 2y + 1) + \mu(x - 3y) = 0$ найти прямую, параллельную оси Ox.

431. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная к прямой $x + y = 0$. Написать уравнение этой прямой.

432. Даны уравнения сторон треугольника $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Составить:

а) уравнения высот треугольника;

б) уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

433. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $6x - 2y + 5 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ и: а) параллельной оси Ox; б) параллельной оси Oy; в) проходящей через начало координат.

434. Показать, что при любых действительных параметрах k и b, удовлетворяющих условию $k = b$, прямые $y = kx + b$ проходят через одну и ту же точку плоскости. Найти координаты этой точки.

435. Показать, что при любых действительных параметрах a и b, удовлетворяющих условиям $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, прямые $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ проходят через одну и ту же точку плоскости. Определить координаты этой точки.

436. Показать, что при любых действительных параметрах A, B и C, удовлетворяющих условиям: а) A и B одновременно не равны нулю; б) $A + B + C = 0$, прямые $Ax + Bx + C = 0$ проходят через одну и ту же точку плоскости. Определить координаты этой точки.

437. В каждом из следующих случаев охарактеризовать семейство прямых $Ax + By + C = 0$, для которых:

а) A и B — фиксированные числа, не равные одновременно нулю, а C — произвольный действительный параметр;

б) A и C — фиксированные числа и $A \neq 0$, а B — произвольный действительный параметр;

в) B и C — фиксированные числа и $B \neq 0$, тогда как A — произвольный действительный параметр.

438. Даны уравнение стороны AB треугольника $2x - 3y + 6 = 0$ и уравнения двух его высот (AH) $2x + y - 2 = 0$ и (BK) $x + 3y - 12 = 0$. Составить уравнение двух других сторон.

439. Определить общую прямую следующих двух пучков:

$$(2 + 3\lambda)\, x - (4 - 7\lambda)\, y + \lambda = 0;$$
$$(3 - 2\mu)\, x + (4 - 7\mu)\, y + 5 = 0.$$

440. Даны стороны четырехугольника $x - 4y + 3 = 0$ (AB), $2x + y - 12 = 0$ (BC), $x - y + 6 = 0$ (CD), $x + 2y - 3 = 0$ (AD). Написать уравнения его диагоналей.

441. На плоскости даны три попарно непараллельные прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Доказать, что эти прямые образуют треугольник тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пользуясь этим условием, выяснить, какие из следующих троек прямых образуют треугольник:

а) $3x - y = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 2y - 3 = 0$;
б) $2x - y + 1 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$, $x + 4y = 0$;
в) $x + 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $x + y = 0$.

442. Три данные прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2=0$, $A_3x+B_3y + C_3 = 0$, пересекаясь, образуют треугольник.

Доказать, что уравнение любой прямой плоскости можно представить в виде

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2) + \gamma (A_3x+B_3y+C_3)=0,$$

где α, β, γ — параметры, одновременно не равные нулю.

§ 17. Геометрический смысл линейных неравенств с двумя неизвестными

1. Расположение точек относительно прямой

443. В каждом из нижеследующих случаев найти отношение, в котором прямая $x - 2y + 4 = 0$ делит отрезок AB:

а) A (—1,5), B (3,0); б) A (7,1), B (5,2);
в) A (0,2), B (1,4); г) A (—3,7), B (—6,0).

444. Даны точки M_1 (—1, 2), M_2 (3, 1), M_3 (1, 0), M_4 (7, 2), M_5 (—3, 6), M_6 (1, 1) и прямые: а) $2x - y + 5 = 0$; б) $4x + y - 8 = 0$; в) $3x - 2y + 1 = 0$; г) $2x - 5 = 0$; д) $x - 3y - 2 = 0$. Для каждой из данных прямых среди указанных точек выбрать те точки, которые лежат по ту сторону от этих прямых, что и начало координат.

445. Дана прямая $3x - 2y + 12 = 0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по разные стороны от данной прямой: а) A_1 (1, 0) и A_2 (—5, 6); б) B_1 (0, 11) и B_2 (—5, 0); в) O (0, 0) и P (1, 1); г) C_1 (1, 4) и C_2 (—4, 2); д) D_1 (2, 6) и D_2 (0, 8); е) E_1 (—1, 0) и E_2 (1, 0).

446. Даны вершины треугольника A (—6, 3), B (8, 10), C (2, —6) и прямые: а) $2x - 3y + 6 = 0$; б) $x + y = 0$; в) $3x - y - 3 = 0$. Определить, какие стороны треугольника пересекаются каждой из данных прямых. Сделать чертеж и на чертеже проверить полученные выводы.

447. Выяснить, какие стороны треугольника с вершинами в точках A (—6, 3), B (8, 10) и C (2, —6) пересекаются каждой из осей координат. Найти отношения, в которых оси координат делят стороны треугольника.

448. Доказать теорему: для того чтобы точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2) не лежали по разные стороны от прямой $Ax + By + C = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) \geqslant 0$.

449. Дан $\measuredangle$ ACB, где A (4, 6), C (—2, 2), B (0, —5). Выяснить, какие из указанных ниже точек лежат внутри данного угла: M_1 (2, 0), M_2 (—2, 5), M_3 (6, 4), M_4(7, 0), M_5(—6, 5).

2. Неравенства, характеризующие полуплоскости, углы и многоугольники

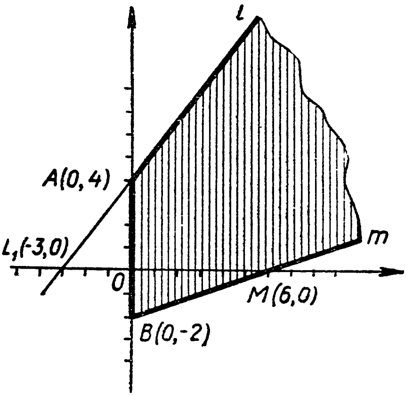


Рис. 27

450. Прямая $3x - y - 2 = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости.

а) Составить неравенство, характеризующее все точки полуплоскости, в которой находится начало координат;

б) составить неравенство, характеризующее все точки полуплоскости, в которой лежит точка $(1, -3)$.

451. На рисунке 27 выделена заштрихованная область, ограниченная отрезком AB и лучами l и m, исходящими соответственно из точек A и B. Составить систему линейных неравенств, определяющих эту область, если точки A, B, M и L_1, изображенные на этом рисунке, имеют координаты A $(0; 4)$, B $(0; -2)$, M $(6; 0)$, L_1 $(-3; 0)$.

452. Две пересекающиеся прямые $x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$ делят множество всех точек плоскости, не лежащих на них, на четыре угла (области). Составить систему неравенств, определяющих внутреннюю область угла, которому принадлежит точка M $(-4; 15)$.

453. Пусть прямые l_1 и l_2, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Доказать, что внутренние области двух вертикальных острых углов, образованных этими прямыми, характеризуются неравенством

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0,$$

а внутренние области двух вертикальных тупых углов — неравенством

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) > 0.$$

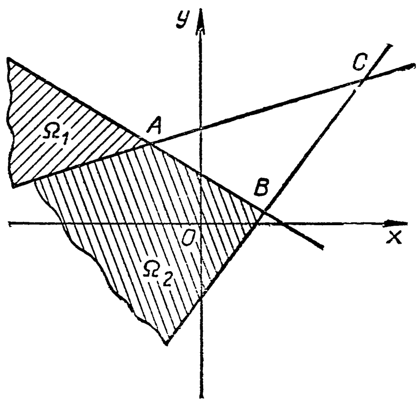


Рис. 28

454. Даны две пересекающиеся прямые в прямоугольной декартовой системе $3x + 5y - 15 = 0$ и $-x + 2y - 4 = 0$.

Выяснить, какие из точек, указанных ниже, принадлежат внутренним областям острых углов, образованных данными прямыми:

$M_1 (3; 2)$, $M_2 (0; 0)$, $M_3 (8; 0)$, $M_4 (10; 6)$, $M_5 (0; -5)$, $M_6 (-4; 3)$.

455. Треугольник задан уравнениями своих сторон: (AB) $3x + 8y - 9 = 0$, (AC) $3x - y - 9 = 0$, (BC) $3x - 10y + 45 = 0$. Составить систему неравенств, определяющую: а) внутреннюю область треугольника; б) область Ω_1; в) область Ω_2 (рис. 28).

456. Две параллельные прямые $2x - y + 1 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$ делят все точки плоскости, не принадлежащие им, на три области: полосу Ω_0, заключенную между ними, полуплоскости Ω_1 и Ω_2 вне этой полосы, определяемые первой и второй прямыми. Установить, каким областям принадлежат точки $M_1 (-2; 1)$, $M_2 (4; 5)$, $M_3 (-4; -4)$, $M_4 (-3; 7)$, $M_5 (-6; 2)$, $M_6 (1; 5)$, $M_7 (3; 0)$.

Выбрав на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить область, определяемую следующей системой неравенств:

457. $$\begin{cases} x - y + 5 > 0, \\ x - 5y + 33 > 0, \\ x - 7 < 0, \\ x - 2y - 1 < 0, \\ x + y - 1 > 0. \end{cases}$$

458. $$\begin{cases} 2x + y + 6 > 0, \\ 3x - y + 14 > 0, \\ x - y + 8 > 0, \\ y + 2 > 0, \\ x - 4y - 10 < 0. \end{cases}$$

459. $$\begin{cases} x - y + 1 > 0, \\ x - 3y - 6 < 0, \\ 2x + y - 6 > 0, \\ x + y + 4 < 0. \end{cases}$$

§ 18. Простые многоугольники

1. Условие принадлежности точки многоугольнику

460. Даны многоугольники $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $A_3B_3C_3D_3E_3$ координатами своих вершин:

а) $A_1 (1, 1)$, $B_1 (2, 8)$, $C_1 (7, 2)$, $D_1 (4, 3)$;

б) $A_2 (3, 3)$, $B_2 (3, 1)$, $C_2 (4, -7)$, $D_2 (0, 4)$, $E_2 (-5, -3)$;

в) $A_3 (-2, -7)$, $B_3 (-3, -3)$, $C_3 (2, 1)$, $D_3 (1, -4)$, $E_3 (7, -5)$.

Выделить среди них простые многоугольники[1].

461. Доказать следующую теорему. Пусть вершинами треугольника являются точки $A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$, $A_3 (x_3, y_3)$. Для того чтобы точка $M (x, y)$ принадлежала треугольнику, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \delta_{12} (x, y) \cdot \delta_{12} (x_3, y_3) \geqslant 0, \\ \delta_{13} (x, y) \cdot \delta_{13} (x_2, y_2) \geqslant 0, \\ \delta_{23} (x, y) \cdot \delta_{23} (x_1, y_1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

---

[1] Многоугольник называется простым, если все вершины различны, ни одна из вершин не является внутренней точкой стороны и никакая пара сторон не имеет общей внутренней точки.

Здесь

$$\delta_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i \end{vmatrix}.$$

462. В каждом из следующих ниже случаев записать необходимые и достаточные условия того, что точка $M(x, y)$ принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$:

а) $A_1(-4, -2)$, $A_2(0, 0)$, $A_3(0, -2)$;
б) $A_1(1, 1)$, $A_2(2, 2)$, $A_3(3, 0)$;
в) $A_1(5, 1)$, $A_2(0, 3)$, $A_3(2, 5)$.

463. Даны вершины треугольника $A_1(-5, 0)$, $A_2(2, 8)$, $A_3(7, -3)$ и точки $M_1(0, 2)$, $M_2(15, -3)$, $M_3(2, 5)$, $M_4(-2, -5)$, $M_5(1, 1)$, $M_6(0, 0)$, $M_7(-5, 4)$. Выяснить, какие из данных точек принадлежат внутренней области треугольника[1].

464. Треугольник $A_1A_2A_3$ задан уравнениями своих сторон: (A_1A_2) — $5x + 6y - 30 = 0$; (A_2A_3) $5x + y - 20 = 0$; (A_3A_1) $y + 2 = 0$. Выяснить, какие из точек $M_1(0, 4)$, $M_2(15, 3)$, $M_3(-7, 2)$, $M_4(2, 4)$, $M_5(1, -1)$, $M_6(-6, 3)$ принадлежат треугольнику.

2. Выпуклые многоугольники

465. Доказать теорему: для того чтобы четырехугольник с вершинами в точках $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$ был выпуклым, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \delta_{12}(x_3, y_3) \cdot \delta_{12}(x_4, y_4) &> 0, \\ \delta_{23}(x_4, y_4) \cdot \delta_{23}(x_1, y_1) &> 0, \\ \delta_{34}(x_1, y_1) \cdot \delta_{34}(x_2, y_2) &> 0, \\ \delta_{41}(x_2, y_2) \cdot \delta_{41}(x_3, y_3) &> 0, \end{aligned}$$

где

$$\delta_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i \end{vmatrix}.$$

466. Доказать, что четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, вершины которого имеют координаты $A_1(-4, 0)$, $A_2(-2, 8)$, $A_3(15, 13)$ и $A_4(0, -3)$, является выпуклым.

467. Доказать, что четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, вершины которого имеют координаты $A_1(0, 0)$, $A_2(7, -6)$, $A_3(5,0)$, $A_4(8, 7)$, не является выпуклым.

468. Вершины четырехугольника находятся в точках

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ A_3(x_3, y_3) \text{ и } A_4(x_4, y_4).$$

Доказать следующее предложение: для того чтобы этот четырехуголь-

---

[1] Точка M принадлежит внутренней области треугольника ABC, если $M \in ABC$ и M не лежит на контуре треугольника.

ник был выпуклым и чтобы точка $M(x, y)$ была внутренней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{array}{ll} \delta_{12}(x, y)\cdot\delta_{12}(x_3, y_3) > 0, & \delta_{12}(x, y)\cdot\delta_{12}(x_4, y_4) > 0, \\ \delta_{23}(x, y)\cdot\delta_{23}(x_4, y_4) > 0, & \delta_{23}(x, y)\cdot\delta_{23}(x_1, y_1) > 0, \\ \delta_{34}(x, y)\cdot\delta_{34}(x_1, y_1) > 0, & \delta_{34}(x, y)\cdot\delta_{34}(x_2, y_2) > 0, \\ \delta_{41}(x, y)\cdot\delta_{41}(x_1, y_2) > 0, & \delta_{41}(x_2, y)\cdot\delta_{41}(x_3, y_3) > 0. \end{array}$$

Здесь

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i \end{vmatrix}; \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

469. Дан четырехугольник с вершинами в точках $A(-4, 0)$, $B(-2, 8)$, $C(12, 0)$ и $D(3, -6)$. Доказать, что:

а) четырехугольник $ABCD$ выпуклый;

б) точки $M_1(1, 3)$ и $M_2(0, 0)$ принадлежат данному четырехугольнику;

в) точки $M_3(15, 1)$ и $M_4(-6, \sqrt{2})$ лежат вне его.

470. Записать аналитическую характеристику внутренней области четырехугольника, заданного координатами своих вершин: $A_1(-3, 1)$, $A_2(5, -5)$, $A_3(4, 5)$, $A_4(-3, 3)$.

471. Точки $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ являются вершинами n-угольника. Сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ был выпуклым.

472. Доказать, что в каждом из следующих случаев многоугольники, заданные координатами своих вершин, являются выпуклыми:

а) $A_1(-4, -6)$, $A_2(4, -5)$, $A_3(7, 2)$, $A_4(2, 8)$, $A_5(-5, 4)$;

б) $A_1(2, -4)$, $A_2(-3, -12)$, $A_3(3, -16)$, $A_4(10, -13)$, $A_5(10, -7)$, $A_6(8, -3)$.

473. В каждом из следующих случаев записать аналитическую характеристику внутренней области многоугольника, заданного координатами своих вершин:

а) $A_1(4, -8)$, $A_2(9, -2)$, $A_3(2, 9)$, $A_4(-5, 4)$, $A_5(-4, -6)$;

б) $A_1(-3, -5)$, $A_2(7, 2)$, $A_3(10, -6)$, $A_4(5, -14)$, $A_5(-3, -12)$.

474. Дан правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вершины A_1 и A_2 которого в данной прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, а ординаты остальных вершин положительны. Записать линейные неравенства, характеризующие внутреннюю область шестиугольника.

475. Если M_1 и M_2 — две точки выпуклого многоугольника, то любая внутренняя точка отрезка M_1M_2 является точкой многоугольника. Доказать.

476. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A_1(-5, -2)$, $A_2(-2, 5)$, $A_3(2, 7)$, $A_4(5, 1)$ и $A_5(2, -4)$. Доказать, что пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ выпуклый, имеет ориентацию, противоположную ориентации, которая определяется системой координат, и найти его площадь.

§ 19. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми[1]

1. Расстояние от точки до прямой

477. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых: а) $4x + 3y + 6 = 0$; б) $x - y - 3 = 0$; в) $2x + 3 = 0$; г) $y + 1 = 0$; д) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 3 = 0$; е) $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 2 = 0$.

478. Найти расстояние от точки до прямой в каждом из следующих случаев: а) $M_1(-1, 5)$, $4x + 3y - 5 = 0$; б) $M_2\left(\frac{3}{5}, 3\right)$, $5x - 12y - 6 = 0$; в) $M_3(-3, 4)$, $x + 2y + 3 = 0$; г) $M_4(3, 7)$, $2x + 5 = 0$.

479. Найти расстояния от точек $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ и $C(1, 6)$ до прямой $3x - 4y + 1 = 0$.

480. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $y - 2 = 0$, $2x - y - 12 = 0$, $4x - 11y + 30 = 0$.

481. Написать уравнение окружности с центром в точке $P(6, -3)$ и касающейся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.

482. Найти уравнение окружности, концентрической с окружностью $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ и касающейся прямой $3x - 4y + 7 = 0$.

483. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(2, 3)$ и $(3, 6)$ и касающейся прямой $2x + y - 2 = 0$.

484. Найти расстояние между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$;

б) $3x - y + 6 = 0$, $6x - 2y - 1 = 0$;

в) $-3x + 4y + 2 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$;

г) $x + y - 5 = 0$, $2x + 2y + 9 = 0$.

485. Вывести формулу для вычисления расстояния между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.

Пользуясь полученной формулой, определить расстояние между прямыми:

а) $3x + 4y - 18 = 0$ и $3x + 4y - 43 = 0$;
б) $x + y - 6 = 0$ и $2x + 2y - 3 = 0$;
в) $2x - y + 7 = 0$ и $2x - y - 1 = 0$.

486. Через точку $M(-1, 4)$ проведена прямая, расстояние которой до точки $Q(-2, -1)$ равно 5. Составить ее уравнение.

487. Через точку $P(1, 1)$ провести касательные к окружности, имеющей центр в точке $C(1, -3)$ и радиус, равный $2\sqrt{2}$.

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что на плоскости дана прямоугольная декартова система координат.

488. К окружности, имеющей центр в точке (1, —2) и радиус, равный 5, провести касательные, параллельные прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

489. В точке A (2, 6), лежащей на окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, провести касательную к данной окружности.

490. Составить уравнения касательных к окружности $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 40$, перпендикулярных прямой $3x + y - 4 = 0$.

491. Составить уравнения окружностей, касающихся прямой $2x - y - 5 = 0$, проходящих через точку M (2, 3) и имеющих радиус $r = 2\sqrt{5}$.

492. Составить уравнения прямых, отстоящих от прямой $4x - 3y - 7 = 0$ на расстоянии, равном 3.

493. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух параллельных прямых:

а) $2x - 5y + 6 = 0$, $2x - 5y - 8 = 0$;
б) $3x + 5y + 8 = 0$, $3x + 5y + 2 = 0$.

494. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

495. В каждом из следующих случаев найти уравнения биссектрис углов, образованных прямыми:

а) $x - 3y + 2 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$;
б) $x + 2y + 5 = 0$ и $4x - 2y - 3 = 0$;
в) $\sqrt{3}\,y - x = 12$ и $3x + 4y - 15 = 0$.

496. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x + 2y - 5 = 0$ и $3x - 6y + 2 = 0$, в котором лежит начало координат.

497. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x - y + 7 = 0$ и $3x - 6y - 8 = 0$, в котором лежит точка M (1, 2).

498. Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми $3x + 4y - 3 = 0$ и $5x + 12y + 6 = 0$.

499. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми $x + 2y - 7 = 0$ и $4x + 2y + 3 = 0$.

500. Составить уравнения окружностей, касающихся двух данных прямых $3x + 4y - 10 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$ и имеющих радиус, равный 5.

501. Составить уравнения окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых $x - 2y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$ и проходящих через точку M (1, 0).

502. Составить уравнение окружности, проходящей через точку (4, —1) и касающейся прямых $x - 2y + 4 = 0$ и $2x - y - 8 = 0$.

503. Составить уравнения окружностей, касающихся параллельных прямых $x - 2y + 13 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$ и проходящих через точку (—1, 2).

504. Треугольник ABC задан уравнениями своих сторон:

$$4x - 3y - 65 = 0,\ 7x - 24y + 55 = 0 \text{ и } 3x + 4y - 5 = 0.$$

Составить уравнения биссектрис данного треугольника и найти координаты точки их пересечения.

505. Найти уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, образованного прямыми $y = 0$, $3x - 4y = 0$, $4x + 3y - 50 = 0$.

506. Даны уравнения сторон треугольника $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$. Составить уравнения вписанной и вневписанной окружностей.

2. Угол между прямыми

507. В каждом из следующих случаев найти угол, образованный двумя прямыми, заданными в определенном порядке своими уравнениями (предполагается, что плоскость ориентирована при помощи системы координат):

а) $3x + y - 6 = 0$, $2x - y + 5 = 0$;
б) $\sqrt{3}\,x - 3y + 6 = 0$, $\sqrt{3}\,x - y - 5 = 0$;
в) $x - 2y + 1 = 0$, $6x + 3y - 2 = 0$.

508. Через точку $(-1, 5)$ провести прямые, наклоненные к прямой $x - y + 3 = 0$ под углом, тангенс которого равен: а) $\frac{3}{5}$ и б) $-\frac{3}{5}$.

509. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла $C\ (4, -1)$.

510. Даны уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $(-2, 0)$. Составить уравнения его диагоналей и остальных сторон. Определить координаты вершин квадрата.

511. В каждом из следующих случаев показать, что треугольник, заданный уравнениями своих сторон, является равнобедренным:

а) $x + 5y + 8 = 0$, $8x + y - 14 = 0$, $7x - 4y + 17 = 0$;
б) $x - 2y + 6 = 0$, $x + y = 0$, $2x - y - 6 = 0$;
в) $x + y - 6 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$, $4x - y - 19 = 0$;
г) $x + y + 9 = 0$, $4x - 7y + 25 = 0$, $7x - 4y - 14 = 0$.

512. Из точки $M\ (1, -2)$ к прямой l, заданной уравнением $x + y - 1 = 0$, направлен луч света, который достигает ее в точке N, а затем отражается. Написать уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$, где α — угол между прямыми l и MN (предполагается, что плоскость ориентирована при помощи системы координат).

513. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, он отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

514. Даны две вершины треугольника $A\ (1, 3)$ и $B\ (1, 5)$ и косинусы внутренних углов $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Составить уравнения сторон треугольника.

515. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $3x - y + 5 = 0$ и его боковой стороны $x + 2y - 1 = 0$. Составить уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку M (1, —3).

516. Даны уравнения сторон треугольника (AB) $4x - y + 5 = 0$, (BC) $2x + 3y - 1 = 0$, (AC) $x + y - 3 = 0$. Определить тангенсы его внутренних углов.

517. Даны уравнения сторон треугольника (AB) $7x - 5y + 11 = 0$, (BC) $3x + 2y - 16 = 0$, (CA) $4x - 7y - 2 = 0$. Определить тангенсы его внутренних углов и доказать, что ориентация треугольника ABC противоположна ориентации, определяемой системой координат Oxy.

§ 20. Смешанные задачи на прямую[1]

518. Вычислить площадь ромба, если известна его вершина A(—1, 3), точка M (0, 2), лежащая на стороне AB, и точка Q (2, 1) пересечения его диагоналей[2].

519. Даны четыре точки A (4, —1), B (0, —3), C (—2, 0) и D (8, 1). На прямой $5x - 2y - 102 = 0$ найти точку M такую, чтобы треугольники MAB и MCD были равновелики (без учета ориентации треугольника).

520. Даны вершины A (—1, 4) и B (0, 5) ориентированного треугольника ABC, площадь которого $S = -4$, и прямая $2x + y - 3 = 0$, на которой лежит третья вершина C. Составить уравнения сторон треугольника.

521. Даны две прямые $x - 3 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$ и точка P (5, 12). Через точку P провести прямую, отсекающую от данных прямых треугольник, площадь которого равна 4 (без учета ориентации треугольника).

522. Даны три прямые $x - 1 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$ и $2x + 3y - 10 = 0$. Составить уравнение прямой, параллельной третьей и отсекающей от первых двух треугольник, площадь которого равна 6 (без учета ориентации треугольника).

523. Прямая $Ax + By + C = 0$, заданная в прямоугольной декартовой системе, не проходит через начало координат O и пересекает оси Ox и Oy соответственно в точках M_1 и M_2. Вычислить площадь ориентированного треугольника M_1M_2O.

524. Вычислить площадь ориентированного треугольника, стороны которого имеют уравнения (AB) $4x - 3y + 1 = 0$, (BC) $3x - 8y + 41 = 0$, (CA) $x + 5y - 17 = 0$.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа, где нет указания о системе координат, предполагается, что она является общей декартовой.

[2] В данной задаче предлагается вычислить площадь без учета ориентации ромба.

525. Через точку пересечения прямых $x - y - \frac{4}{5} = 0$ и $5x - y - \frac{32}{5} = 0$ проведена прямая, касающаяся окружности $10x^2 + 10y^2 + 140x + 321 = 0$. Составить ее уравнение.

526. Через точку M (2, —5) проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между прямыми $x - y - 1 = 0$ и $2x - y - 18 = 0$, делится в точке M пополам. Составить ее уравнение.

527. Через точку M (7, 5) проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между прямыми (l_1) $x + 2y - 11 = 0$ и (l_2) $x - 7y + 34 = 0$, делится точкой M в отношении 2 : 1, считая от прямой l_1. Составить ее уравнение.

528. Даны уравнения $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x + 6y - 15 = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

529. Даны уравнения двух сторон треугольника $9x + 2y + 37 = 0$ (AB), $9x + 10y + 5 = 0$ (AC) и точка M (—1, —2) пересечения его медиан. Составить уравнение третьей стороны и найти координаты вершин треугольника.

530. Даны уравнения $x + y - 5 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ двух медиан треугольника и уравнение одной из его сторон $2x + y - 5 = 0$. Составить уравнение двух других сторон треугольника и найти координаты его вершин.

531. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин A (3, 0) и уравнения двух медиан $7x - 5y + 15 = 0$, $4x + y + 6 = 0$.

532. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны уравнения двух его биссектрис $x + 2y - 13 = 0$, $x - y - 5 = 0$ и координаты вершины M (7, 8).

533. Составить уравнения двух прямых, одна из которых проходит через точку M (—1, 5), а вторая — через точку N (4, 1), зная, что прямая $2x - 2y + 5 = 0$ является биссектрисой одного из углов между искомыми прямыми.

534. Даны уравнения двух сторон треугольника $3x + y - 8 = 0$, $\frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0$ и уравнение одной из его биссектрис $x - y + 2 = 0$, Найти уравнение третьей стороны.

535. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят соответственно через точки (—1, 2) и (0, 6), а две другие — через точки (—3, 2) и (—6, 0).

536. Найти множество точек, координаты которых в общей декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$|A_1x + B_1y - C_1| + |A_2x + B_2y + C_2| = a,$$

где $a \neq 0$ и $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

537. Найти множество точек, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$| x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi + C_1 | + | -x \sin\varphi + y \cos\varphi + C_2 | = a,$$

где φ — некоторый угол и $a \neq 0$.

538. Вывести уравнения высот треугольника, стороны l_1, l_2 и l_3 которого в прямоугольной декартовой системе координат заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$.

539. Вывести уравнения медиан треугольника, стороны l_1, l_2 и l_3 которого в общей декартовой системе координат заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$.

§ 21. Приложение теории прямой к решению задач элементарной геометрии

540. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

541. Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести G произвольного треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера)[1].

542. Пусть a и b — две произвольные прямые на плоскости, A, B, C — точки на прямой a и D, E, F — точки на прямой b. Доказать, что точки пересечения прямых AD и CE; BD и CF; BE и AF лежат на одной прямой (теорема Паппа)[2].

543. В плоскости треугольника ABC дана произвольная точка M. Построены точки A_1, B_1, C_1, симметричные с точкой M относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

544. (Теорема Чевы.) Пусть C_1, A_1 и B_1 — три точки соответственно на прямых AB, BC и CA, образующих треугольник ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 принадлежали одному пучку (т. е. пересекались в одной точке или были параллельны друг другу), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

545. Вычислить расстояние между противоположными сторонами ромба, если длины его диагоналей равны $2a$ и $2b$.

546. Стороны остроугольного треугольника ABC равны: $AB = 5$, $AC = 7$ и высота $BB_1 = 4$. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

---

[1] Ортоцентром треугольника называется точка пересечения высот; центром тяжести является точка пересечения медиан.

[2] Здесь предполагается, что все три пары прямых AD и CE; BD и CF; BE и AF соответственно пересекаются в трех различных точках. Предлагаем самостоятельно сформулировать и доказать теорему Паппа для того случая, когда одна или две из данных пар прямых не пересекаются.

547. Найти множество центров тяжести треугольников, две вершины которых зафиксированы, а третьи вершины лежат на данной прямой l.

548. Дан треугольник ABC. Найти множество всех точек, принадлежащих треугольнику, для каждой из которых сумма расстояний до сторон AB и AC равна расстоянию до стороны BC.

549. Даны две перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке C, и две точки A и B на прямой a. На прямой b берутся переменные точки P и Q так, что $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CQ}$, где k — некоторое постоянное число. Доказать, что множество точек пересечений прямых AP и BQ есть прямая.

550. Даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 и вектор $\boldsymbol{a}$, не коллинеарный прямым l_1 и l_2. Найти множество точек плоскости, делящих все хорды направления $\boldsymbol{a}$, заключенные между прямыми l_1 и l_2, в отношении λ.

551. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Найти множество четвертых вершин квадратов, первые две вершины которых лежат на прямой a, а третья — на прямой b.

552. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2. Найти множество точек, делящих в одном и том же отношении λ все отрезки M_1M_2, концы которых соответственно лежат на прямых l_1 и l_2.

553. Даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2. Найти множество точек, для каждой из которых отношение расстояния до прямой l_1 к расстоянию до прямой l_2 равно данному числу λ.

554. Две пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2 пересечены пучком параллельных прямых. Через концы M_1 и M_2 отрезка, отсекаемого каждой прямой пучка на прямых l_1 и l_2 ($M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$), проведены прямые m_1 и m_2, перпендикулярные соответственно l_1 и l_2. Найти множество точек $M(x, y)$ пересечения прямых m_1 и m_2.

555. Две пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2 пересечены пучком параллельных прямых $\{m\}$. Пусть m_i и m_k — две произвольные прямые пучка, которые пересекают l_1 в точках A_i и A_k, а l_2 — в точках B_i и B_k. Определить множество всех точек пересечения прямых A_iB_k и B_iA_k.

Глава IV

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ ПЛОСКОСТИ

§ 22. Линейные преобразования. Собственные векторы и характеристические числа

1. Линейные преобразования векторов

556. Среди указанных ниже функций векторного аргумента выделите те, которые являются преобразованиями векторов[1]:

[1] Преобразованием векторов называется всякая векторная функция от векторного аргумента.

а) $f_1(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})$;
б) $f_2(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})$;
в) $f_3(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}$;
г) $f_4(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}$;
д) $f_5(\boldsymbol{x}) = 3(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$;
е) $f_6(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$;
ж) $f_7(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}$.

Здесь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы.

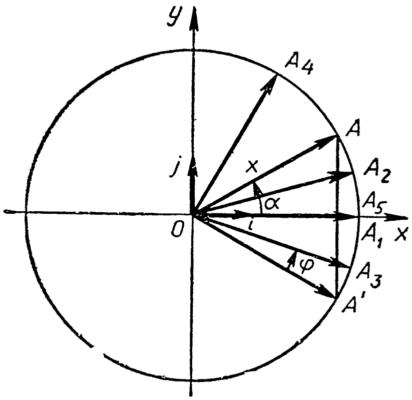


Рис. 29

557. Какие из преобразований, записанных ниже, являются линейными:

а) $f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$;
б) $f_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$;
в) $f_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$;
г) $f_4(\boldsymbol{x}) = (\alpha + \beta)\boldsymbol{x}$;
д) $f_5(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}$;
е) $f_6(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}$;
ж) $f_7(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$;
з) $f_8(\boldsymbol{x}) = [(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}](\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})$;
и) $f_9(\boldsymbol{x}) = 2(x_1 - x_2)\boldsymbol{e}_1 + 3(x_1 + x_2)\boldsymbol{e}_2$;
к) $f_{10}(\boldsymbol{x}) = x_1^2\boldsymbol{e}_1 + 3x_2\boldsymbol{e}_2$?

Здесь α, β — данные числа, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — данные векторы, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — базис, а x_1, x_2 — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

558. Пусть l_1 и l_2 — пересекающиеся прямые, $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор, а $\boldsymbol{x}'$ — составляющая этого вектора на прямой l_1 по направлению прямой l_2 (см. задачу 35). Доказать, что функция $\boldsymbol{x}' = F(\boldsymbol{x})$ есть линейное преобразование. Найти ранг ρ этого преобразования.

559. Прямые l_1 и l_2 расположены на ориентированной плоскости и взаимно перпендикулярны. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор, $\boldsymbol{x}_1$ — его составляющая на прямой l_1 по направлению l_2 (см. задачу 35), а $\boldsymbol{x}'$ получен из $\boldsymbol{x}_1$ поворотом на 90°. Доказать, что векторная функция $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$ есть линейное преобразование. Найти матрицу этого преобразования в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, если векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ принадлежат l_1 и l_2; $\measuredangle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = +90°$.

560. Пусть $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ — прямоугольная декартова система координат плоскости. Построим несколько векторных функций следующим образом. Произвольному вектору $\boldsymbol{x}$ (см. рис. 29) поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{x}'$ так, что если $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OA}$, то:

а) $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OA_1}$, где A_1 есть проекция A на ось $O\boldsymbol{i}$;

б) $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OA_2}$, где $OA_2 = OA_1$ и вектор $\overrightarrow{OA_2}$ направлен по биссектрисе угла $(\widehat{\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OA}})$;

в) $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OA_3}$, где $\overrightarrow{OA_3}$ получен из $\overrightarrow{OA}$ путем отражения от оси $O\boldsymbol{i}$ с последующим поворотом на угол φ в положительном направлении[1];

г) $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OA_4}$, где $\overrightarrow{OA_4}$ получен из $\overrightarrow{OA}$ поворотом на угол $(\widehat{\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OA}})$ в положительном направлении;

[1] Предполагается, что плоскость ориентирована при помощи системы координат.

д) $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OA_5}$, где $\overrightarrow{OA_5}$ получен из $\overrightarrow{OA}$ путем поворота этого вектора в положительном направлении до совпадения с направлением оси $O\boldsymbol{i}$.

Выяснить, какие из этих функций являются линейными преобразованиями. Написать матрицы этих преобразований в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

561. Дана векторная функция $A(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{p}$ — постоянный вектор, а $\varphi(\boldsymbol{x})$ — скалярная линейная функция от векторного аргумента, причем если $\boldsymbol{p} \neq \vec{0}$, то $\varphi(\boldsymbol{p}) \neq 1$. Доказать, что $A(\boldsymbol{x})$ — невырожденное линейное преобразование.

562. Доказать следующие предложения:

а) при всяком линейном преобразовании векторов их линейная зависимость сохраняется;

б) при всяком невырожденном линейном преобразовании линейно независимые векторы переходят в линейно независимые векторы.

2. Координатное задание линейного преобразования

563. Линейное преобразование в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ задано формулами $x' = 2x - y$, $y' = x + 3y$. Найти:

а) образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

б) прообразы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

в) образы векторов $\boldsymbol{a}\{3, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{4, -2\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 1\}$;

г) прообразы векторов $\boldsymbol{a}'\{1, 4\}$, $\boldsymbol{b}'\{2, 1\}$, $\boldsymbol{c}'\{3, -2\}$.

564. Линейное преобразование в данном базисе задано матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образы векторов $\boldsymbol{a}_1\{1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{3, 5\}$, $\boldsymbol{a}_3\{-4, 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\{3, -6\}$, $\boldsymbol{a}_5\{1, 3\}$ при этом преобразовании.

565. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ заданы своими координатами в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. В каждом из следующих случаев записать координатное задание линейного преобразования, которое векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ переводит соответственно в векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$:

а) $\boldsymbol{a}\{1, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1\}$, $\boldsymbol{a}'\{-3, 4\}$, $\boldsymbol{b}'\{-5, 3\}$;

б) $\boldsymbol{a}\{-2, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 4\}$, $\boldsymbol{a}'\{-8, -11\}$, $\boldsymbol{b}'\{-7, 11\}$;

в) $\boldsymbol{a}\{2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 3\}$ b $\boldsymbol{a}'\{-4, 1\}$, $\boldsymbol{b}'\{-2, 4\}$;

г) $\boldsymbol{a}\{5, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, -2\}$ b $\boldsymbol{a}'\{12, -10\}$, $\boldsymbol{b}'\{-1, 2\}$;

д) $\boldsymbol{a}\{1, 2\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1\}$ b $\boldsymbol{a}'\{0, 1\}$, $\boldsymbol{b}'\{1, 1\}$.

Записать матрицы этих преобразований.

566. Записать координатное задание линейного преобразования, которое векторы $\boldsymbol{a}\{2, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{5, 3\}$ переводит в один и тот же вектор $\boldsymbol{c}\{1, 3\}$.

567. Записать матрицу линейного преобразования, которое векторы $\boldsymbol{a}\{2, 1\}$ и $\boldsymbol{b}\{1, 1\}$ переводит в один и тот же вектор $\boldsymbol{c}\{3, 3\}$.

568. Выяснить, какие из следующих линейных преобразований, заданных в прямоугольном декартовом базисе, являются симметрическими[1]:

а) $x' = 2x + 3y,\ y' = -7x + y$; б) $x' = -3x + 5y,\ y' = 5x - y$; в) $x' = y,\ y' = x$; г) $x' = y,\ y' = -x$; д) $x' = 3x,\ y' = 5y$.

569. Базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ общего декартового базиса удовлетворяют условиям $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -2$, $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = 4$. Выяснить, какие из преобразований, заданных в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ следующими матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\ \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

являются симметрическими.

570. Линейное преобразование в данном базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что при этом преобразовании множество образов всех векторов плоскости образует одномерное векторное подпространство.

571. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ задано вырожденное линейное преобразование $x' = \frac{3}{2}x - 4y$, $y' = -3x + 8y$. Найти множество Ω всех векторов плоскости, которые переходят в один и тот же вектор $\boldsymbol{a}\{-1, 2\}$.

572. Пусть A — линейное преобразование ранга один. Доказать, что множество всех векторов, удовлетворяющих условию $A(\boldsymbol{x}) = 0$, образует одномерное векторное подпространство.

573. Пусть $A(\boldsymbol{x})$ — линейное преобразование ранга один, а $\boldsymbol{a}$ — данный ненулевой вектор. Найти множество Ω всех векторов $\boldsymbol{x}$ плоскости, удовлетворяющих условию $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$.

3. Собственные векторы и характеристические числа

574. Найти собственные векторы и характеристические числа линейных преобразований, заданных матрицами в данном базисе:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};\ \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};\ \text{г) } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

575. Найти собственные векторы линейного преобразования в каждом из следующих случаев:

а) $x' = 2x - 3y,\ y' = 3x + 2y$; б) $x' = 2x,\ y' = 2y$; в) $x' = x - 3y,\ y' = 5x - 2y$.

576. Найти собственные векторы и характеристические числа линейного преобразования

$$\boldsymbol{x}' = \varphi(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x},$$

[1] Линейное преобразование A называется симметрическим, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}A(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{y}A(\boldsymbol{x})$ — скалярные произведения.

где $\boldsymbol{p}$ — постоянный вектор, а $\varphi(\boldsymbol{x})$ — скалярная линейная функция от векторного аргумента, причем если $\boldsymbol{p} \neq 0$, то $\varphi(\boldsymbol{p}) \neq 1$ (см. задачу 561).

577. Доказать, что линейное преобразование имеет бесчисленное множество собственных направлений тогда и только тогда, когда его матрица в любом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

578. Показать, что если линейное преобразование имеет единственное собственное направление с характеристическим числом λ, то надлежащим выбором базиса его матрицу можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

579. Доказать, что если линейное преобразование не имеет ни одного собственного направления, то надлежащим выбором системы координат матрицу можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\beta \neq 0$.

580. Показать, что если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — собственные векторы линейного преобразования, соответствующие характеристическим числам λ_1 и λ_2, то в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ преобразование имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

4. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса

581. Как изменяется матрица линейного преобразования, если поменять местами базисные векторы, т. е. за новые базисные векторы принять $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1$.

582. Пусть невырожденное линейное преобразование в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет координатное задание:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказать, что если S — площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, а S' — площадь ориентированного параллелограмма, построенного на образах $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ этих векторов, то $S' = \Delta \cdot S$.

583. Пусть невырожденное линейное преобразование в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет координатное задание:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказать, что если $\Delta > 0$, то любой базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ переходит в базис $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, имеющий ту же ориентацию, что и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, а если $\Delta < 0$ — противоположную ориентацию.

584. Пусть линейное преобразование A в базисах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ имеет соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}.$$

Показать, что если

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = c_{11}\boldsymbol{e}_1 + c_{21}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = c_{12}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = d_{11}\boldsymbol{e}'_1 + d_{21}\boldsymbol{e}'_2, \\ \boldsymbol{e}_2 = d_{12}\boldsymbol{e}'_1 + d_{22}\boldsymbol{e}'_2, \end{cases}$$

то

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь этой формулой, проверить результат задачи 581.

585. Векторы нового базиса $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ выражаются через векторы старого базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ при помощи соотношений $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = -2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$. В каждом из следующих случаев найти матрицу линейного преобразования в базисе $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, если матрица того же преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет вид:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

586. Показать, что линейные преобразования A и B, заданные соответственно в базисах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ матрицами

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{pmatrix},$$

совпадают, если $\boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$.

587. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ линейные преобразования заданы матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы тех же преобразований в базисе $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$.

§ 23. Сумма и произведение линейных преобразований. Обратное преобразование

588. Пусть A и B — линейные преобразования, а λ — некоторое число. Показать, что векторные функции $\varphi(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x}) = \lambda A(\boldsymbol{x})$ являются линейными преобразованиями. Зная матрицы линейных преобразований A и B в некотором базисе, определить матрицы преобразований $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ в том же базисе.

589. Пусть линейные преобразования A и B в некотором базисе имеют матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти в том же базисе матрицы следующих линейных преобразований:

а) $A + B$; б) $3A$; в) $2A - 3B$.

590. Пусть преобразования A, B и C имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить матрицы преобразований: а) AB; б) BA; в) BC; г) ABC.

591. Пусть в некотором базисе преобразования A и B имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить в том же базисе матрицы преобразований AB и BA.

592. Доказать, что линейное преобразование H, рассмотренное в задаче 559, удовлетворяет условию $H^2 = 0$. Здесь 0 — нулевое преобразование.

593. Пусть линейные преобразования A и B в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Показать, что преобразование AB имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

594. Пусть линейные преобразования в данном базисе имеют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} k & a \\ a & k \end{pmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли преобразования, обратные данным. В тех случаях, когда они существуют, найти их матрицы.

595. Пусть A и B — линейные преобразования. В предположении, что $AB = BA$, доказать следующие соотношения:

а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
б) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$.

Записать аналогичные формулы в предположении, что $AB \neq BA$.

596. Показать, что на плоскости не существует линейных преобразований A и B, удовлетворяющих условию $AB - BA = E$.

597. Пусть линейные преобразования A и B в некотором базисе имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Найти в том же базисе матрицы преобразований $A^n = AA \ldots A$, $B^n = BB \ldots B$. Здесь произведения имеют n сомножителей.

598. Пусть ρ_A, ρ_B, ρ_{A+B}, $\rho_{\lambda A}$ — соответственно ранги линейных преобразований A, B, $A+B$, λA, где $\lambda \neq 0$. Доказать, что

$$\rho_{A+B} \leqslant \rho_A + \rho_B \text{ и } \rho_{\lambda A} = \rho_A.$$

599. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ — три произвольных базиса. Рассмотрим преобразование A, при котором $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ переходят соответственно в $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$; преобразование B, при котором $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ переходят в $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, и преобразование C, при котором $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ переходят в $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Доказать, что $C = BA^{-1}$.

600. Пусть A, B и C — линейные преобразования. Показать, что:

а) если $B^{-1} = A^{-1}$, то $B = A$;

б) если $C^{-1} = A$, $A^{-1} = B$, то $B = C$.

601. Пусть A — линейное преобразование. Доказать, что $A^2 = 0$ тогда и только тогда, когда его матрица в данном базисе имеет вид: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Здесь a, b и c — числа, удовлетворяющие условию $a^2 + bc = 0$.

602. Пусть линейное преобразование A в некотором базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Найти преобразование X, удовлетворяющее условию $XA = 0$, где 0 — нулевое преобразование. Исследовать это уравнение.

§ 24. Ортогональные преобразования и преобразования подобия

В настоящем параграфе приняты следующие терминология и обозначения[1]. Линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = D(\boldsymbol{x})$ называется ортогональным, если для любого вектора $\boldsymbol{x}$ имеем: $|\boldsymbol{x}| = |D(\boldsymbol{x})|$.

Имеются следующие четыре вида ортогональных преобразований:

1°. Тождественное преобразование $\boldsymbol{x}' = E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

2°. Преобразование отражения $\boldsymbol{x}' = \Gamma_{-1}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$.

3°. Преобразование вращения $\boldsymbol{x}' = V_\varphi(\boldsymbol{x})$, где V_φ означает поворот вектора $\boldsymbol{x}$ вокруг любой точки ориентированной плоскости на угол φ ($\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$).

---

[1] В этом параграфе всюду предполагается, что данный базис является прямоугольным декартовым.

4°. Преобразование симметрии относительно ненулевого вектора e_1, именно $x' = S_e(x)$. Это преобразование определяется так. Пусть x — произвольный вектор. Возьмем произвольную точку M_0 плоскости и обозначим через E и M точки, удовлетворяющие условиям $\overrightarrow{M_0E} = e$, $\overrightarrow{M_0M} = x$. Тогда $X' = \overrightarrow{M_0M'}$, где M' — точка, симметричная M относительно прямой M_0E. Важно отметить, что *преобразованиями* 1°, 2°, 3° *и* 4° *исчерпываются все виды ортогональных преобразований плоскости.*

При решении задач на преобразования часто используется следующая теорема.

Теорема 1. Нетождественное ортогональное преобразование является:

а) преобразованием вращения V_φ, если оно не имеет действительных характеристических чисел;

б) преобразованием отражения Γ_{-1}, если оно имеет единственное характеристическое число $\lambda_0 = -1$;

в) преобразованием симметрии S_e, если оно имеет характеристические числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

Линейное преобразование $\Pi(x)$ называется преобразованием подобия, если оно может быть представлено в виде: $\Pi(x) = k\,D(x)$, где $D(x)$ — ортогональное преобразование, а k — положительное число. Число k называется коэффициентом подобия, а $D(x)$ — ортогональным преобразованием данного преобразования подобия. При $k = 1$ преобразование подобия будет ортогональным.

В дополнение к ортогональным преобразованиям рассмотрим следующие преобразования подобия:

5°. Преобразование гомотетии $x' = \Gamma_k(x) = kx$, где $k \neq 0$ и $k \neq 1$. При $k = -1$ получаем преобразование отражения Γ_{-1}.

6°. Преобразование центрально-подобного вращения $x' = kV_\varphi(x)$, где $k > 0$. При $k = 1$ получаем преобразование вращения V_φ.

7°. Преобразование центрально-подобной симметрии $x' = kS_e(x)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$.

Важно отметить, что *преобразованиями* 1°, 4°, 5°, 6° *и* 7° *исчерпываются все виды преобразования подобия.*

Имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. Нетождественное преобразование подобия является:

а) преобразованием центрально-подобного вращения, если оно не имеет действительных характеристических чисел;

б) преобразованием гомотетии Γ_k, если оно имеет единственное характеристическое число $k \neq 0$;

в) преобразованием симметрии, если оно имеет характеристические числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$;

г) преобразованием центрально-подобной симметрии, если оно имеет характеристические числа $\lambda_1 = k$ и $\lambda_2 = -k$, причем $k > 0$ и $k \neq 1$.

1. Координатное задание преобразования подобия

603. Выяснить, какие из преобразований, заданных следующими матрицами, являются: 1) ортогональными; 2) преобразованиями подобия:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};\quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{в)} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix};\quad \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{е)} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{з)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix};\quad \text{и)} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

604. Записать координатное задание следующих преобразований векторов: а) вращение на угол $\frac{\pi}{4}$; б) вращение на угол $-\frac{\pi}{3}$; в) вращение на угол $\frac{\pi}{6}$; г) отражение Γ_{-1}.

605. В каждом из следующих случаев записать координатное задание преобразования симметрии S_e относительно вектора $\boldsymbol{e}$, если этот вектор в данном базисе имеет координаты: а) $\boldsymbol{e}_1\{1, 0\}$; б) $\boldsymbol{e}_2\{0, 1\}$; в) $\boldsymbol{e}_3\{1, 1\}$; г) $\boldsymbol{e}_4\{1, -1\}$; д) $\boldsymbol{e}_5\{\sqrt{3}, 1\}$.

606. В базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ дан вектор $\boldsymbol{a}$ $\{\alpha, \beta\}$. Составить координатное задание преобразования симметрии S_a. Пользуясь полученными формулами, проверить результаты задачи 605.

607. Доказать, что преобразование, заданное в данном базисе формулами

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y,$$

является преобразованием симметрии S_e. Определить направление вектора $\boldsymbol{e}$.

608. Записать координатное задание центрально-подобной симметрии kS_e в каждом из следующих случаев: а) $k_1 = 3$, $\boldsymbol{e}_1\{1, 0\}$; б) $k_2 = 4$, $\boldsymbol{e}_2\{1, 1\}$; в) $k_3 = 25$, $\boldsymbol{e}_3\{7, 1\}$.

609. Записать координатное задание центрально-подобного вращения kV_φ в каждом из следующих случаев: а) $k = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $k = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; в) $k = \frac{1}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$; г) $k = \sqrt{8}$, $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$.

610. В каждом из следующих случаев выяснить вид преобразования, заданного координатным способом: а) $x' = 3x - 4y$, $y' = -4x - 3y$; б) $x' = -y$, $y' = -x$.

611. Показать, что преобразования, заданные следующими матрицами, являются преобразованиями подобия, и найти вид каждого из этих преобразований: а) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

612. В каждом из следующих случаев записать координатное задание преобразования подобия, которое базисные векторы переводит соответственно в векторы: а) $\boldsymbol{a}_1\{0, 5\}$, $\boldsymbol{b}_1\{-5, 0\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{3, -\sqrt{3}\}$, $\boldsymbol{b}_2\{-\sqrt{3}, -3\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{2, 2\}$, $\boldsymbol{b}_3\{-2, 2\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\left\{-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$, $\boldsymbol{b}_4\left\{-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right\}$.
Выяснить характер этих преобразований.

613. В каждом из следующих случаев записать координатное задание и установить вид ортогонального преобразования, которое базисные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ переводит соответственно в векторы: а) $\boldsymbol{a}_1\{-1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_1\{0, -1\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}_2\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, 1\}$, $\boldsymbol{b}_3\{-1, 0\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}_4\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

614. Найти линейное преобразование векторов, которое базисный вектор $\boldsymbol{i}$ переводит в вектор $\boldsymbol{a}\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, а вектор $\boldsymbol{p}\{1, 1\}$ — в вектор $\boldsymbol{q}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$.

615. Доказать, что если нетождественное линейное преобразование имеет три попарно неколлинеарных собственных вектора, то оно является преобразованием гомотетии.

616. Пользуясь координатным заданием преобразования движения, вывести тригонометрические соотношения

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \pm \cos\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

2. Произведение преобразований

617. В каждом из следующих случаев определить вид преобразования[1]: а) $S_e V_\varphi$; б) $\Gamma_{-1}\Gamma_{-1}$. Здесь S_e, V_φ, Γ_{-1} являются соответственно преобразованиями симметрии относительно вектора $\boldsymbol{e}$, вращения на угол φ и отражения.

---

[1] Запись $S_e V_\varphi$ означает, что сначала выполняется преобразование V_φ, а потом S_e. Во всех последующих задачах для обозначения произведения преобразований мы пользуемся аналогичной записью.

618. Даны преобразования гомотетии Γ_k и симметрии S_e относительно вектора $\boldsymbol{e}$. Найти произведение $\Gamma_k S_e$ и доказать, что оно не зависит от порядка сомножителей.

619. Даны два преобразования симметрии S_m и S_e относительно векторов $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{e}$. Найти преобразования $S_m S_e$ и $S_e S_m$ и показать, что они, вообще говоря, не совпадают. При каком условии $S_m S_e = S_e S_m$?

620. Пусть $A = V_{\varphi_1}$, $B = V_{\varphi_2}$. Доказать, что:

а) $AB = E$, если $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$;

б) $AB = \Gamma_{-1}$, если $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ или $\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi$;

в) $AB = V_{\varphi_1+\varphi_2}$ в остальных случаях.

621. Пусть $A = k\Gamma_k$, $B = lV_\varphi$, $C = mS_e$, где k, l, m — положительные числа, отличные от 1. Выяснить, к какому из типов преобразований подобия принадлежат произведения AB, AC, BC.

622. Пусть Ω — множество всех невырожденных линейных преобразований векторов плоскости. Показать, что:

а) множество Ω является группой относительно операции произведения преобразований;

б) подмножество всех ортогональных преобразований векторов плоскости образует подгруппу группы Ω;

в) подмножество всех преобразований подобия образует подгруппу группы Ω и содержит подгруппу ортогональных преобразований.

623. Показать, что:

а) множество, состоящее из всех преобразований гомотетии Γ_k и тождественного преобразования, образует группу;

б) множество, состоящее из двух элементов — тождественного преобразования и преобразования S_e, при фиксированном векторе $\boldsymbol{e}$ образует группу.

Глава V

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

§ 25. Отображения точек плоскости. Аффинные преобразования

Взаимно однозначное отображение точек плоскости называется а ф ф и н н ы м   п р е о б р а з о в а н и е м, если оно сохраняет коллинеарность точек. Пусть $M' = \Pi(M)$ — данное аффинное преобразование. Векторное преобразование $x' = \overline{\Pi}(x)$ называется а с с о ц и и р о в а н н ы м с ним, если для любых двух точек M_1 и M_2 и их образов M_1' и M_2' выполняется условие $\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overline{\Pi}\,(\overrightarrow{M_1 M_2})$. *Векторное преобразование, ассоциированное с данным аффинным* *преобразованием, является невырожденным линейным преобразованием векторов.* Аффинное преобразование вместе с ассоциированным векторным преобразованием называется аффинным преобразованием плоскости. Собственные векторы и характеристические числа ассоциированного преобразования называются собственными векторами и характеристическими числами аффинного преобразования.

При решении задач часто используется следующая теорема:

Теорема. Если M_1 и M_2 — произвольные точки плоскости, а $\overline{\Pi}$ — произвольное невырожденное линейное векторное преобразование, то существует одно и только одно аффинное преобразование, которое индуцирует $\overline{\Pi}$ и точку M_1 переводит в точку M_2.

Из этой теоремы следует, что, каковы бы ни были две общие декартовы системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$, существует одно и только одно аффинное преобразование, которое систему $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ переводит в систему $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$.

1. Координатное задание отображений точек

624. В прямоугольной декартовой системе координат дана прямая $x - 2y = 0$. Записать координатное задание отображения, при котором каждая точка плоскости переходит в свою ортогональную проекцию на данную прямую. Является ли это соответствие аффинным преобразованием?

625. На плоскости дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{ij}$. Каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M' так, что $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{i}\,|\overrightarrow{OM}|$. Написать координатное задание этого соответствия и выяснить, является ли данное соответствие аффинным преобразованием.

626. Дано отображение инверсии с центром в точке C и степенью r^2. Найти область определения и область значений этого отображения и написать его координатное задание в прямоугольной декартовой системе координат, относительно которой точка C имеет координаты (x_0, y_0). Пользуясь координатным заданием инверсии, показать, что данное отображение является инверсным[1].

627. Пусть l_0 — некоторая прямая, а k — данное положительное число. Каждой точке M, не лежащей на прямой l_0, поставим в соответствие точку M' так, чтобы M и M' лежали по одну сторону от прямой l_0 на одном перпендикуляре к ней и $CM \cdot CM' = k$, где C — точка пересечения прямых MM' и l_0. Это отображение называется гиперболической инверсией с осью l_0 и степенью k.

Найти области определения и значений гиперболической инверсии. Написать его координатное задание, если прямоугольная декартова

[1] Отображение точек $M' = \pi(M)$ называется инверсным, если для произвольной точки M удовлетворяется условие $M = \pi(\pi(M))$.

система координат Oxy выбрана так, что ось Ox совпадает с прямой l_0. Пользуясь полученными формулами, показать, что данное соответствие является инверсным[1].

628. Пусть l_0 — прямая, а $\boldsymbol{p}$ — нулевой вектор, не принадлежащий этой прямой. Каждой точке M плоскости, не лежащей на l_0, поставим в соответствие точку M' так, чтобы вектор $\boldsymbol{p}$ принадлежал прямой MM', а середина отрезка MM' лежала на прямой l_0. Каждой точке прямой l_0 поставим в соответствие ту же точку. Это отображение называется косой симметрией с осью l_0 и направлением $\boldsymbol{p}$. Показать, что косая симметрия является аффинным инверсным преобразованием[1].

629. Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — фиксированные точки плоскости, а k, $m_1, \ldots, m_k$ — данные числа, причем $k \neq 0$. Каждой точке M ставится в соответствие точка M' так, что

$$k\,\overrightarrow{MM'} = m_1\overrightarrow{MM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{MM_k}.$$

Доказать, что при $k \neq m_1 + \ldots + m_k$ данное отображение является аффинным преобразованием. Выяснить характер этого отображения при $k = m_1 + \ldots + m_k$.

630. Выяснить, какие из нижеприведенных отображений, заданных координатно в системе Oe_1e_2, являются аффинными преобразованиями:

а) $x' = x,\ y' = 2y$;
б) $x' = \frac{3}{2}x - y,\ y' = -3x + 2y$;
в) $x' = y,\ y' = x$;
г) $x' = x,\ y' = x + y^2$;
д) $x' = 2x + y,\ y' = 2x - y + 2$.

2. Координатное задание аффинных преобразований

631. В общей декартовой системе координат дана координатная запись аффинного преобразования:

$$x' = 2x - y + 1,\ y' = x + 3y.$$

Найти:

а) образы следующих точек и векторов: $O(0, 0)$, $M_1(-1, 2)$, $M_2(3, -7)$, $M_3(1, -5)$, $\boldsymbol{a}_1\{-3, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 2\}$, $\boldsymbol{a}_3\{5, 3\}$, $\boldsymbol{a}_4\{-1, 0\}$;

б) прообразы следующих точек и векторов: $M_1'(0, 10)$, $M_2'(2, 4)$, $M_3'(-6, 7)$, $M_4'(2, -3)$; $\boldsymbol{a}_1'\{2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2'\{-1, 3\}$, $\boldsymbol{a}_3'\{4, -5\}$, $\boldsymbol{a}_4'\{-8, 3\}$.

632. В общей декартовой системе координат аффинное преобразование задано формулами

---

[1] См. сноску на стр. 81.

$$x' = x - 3y + 2, \quad y' = 2x + y - 3.$$

Найти:

а) образы прямых: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) $7x + 7y + 2 = 0$; 4) $2x + y - 2 = 0$;

б) прообразы прямых: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) $4x + 9y - 14 = 0$; 4) $3x - 2y + 1 = 0$.

633. В системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ записать координатное задание параллельного переноса, определяемого вектором $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$. При этом преобразовании определить: а) образ начала координат; б) образы координатных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$; в) образы осей координат.

634. В системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ записать координатное задание гомотетии с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и коэффициентом k. При этом преобразовании:

а) найти образы начала координат и координатных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$;

б) написать уравнения образов координатных осей.

635. В каждом из следующих случаев в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ записать координатное задание аффинного преобразования, заданного матрицей ассоциированного линейного преобразования и парой соответственных точек[1] M_0 и M_0':

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $M_0(1, 0)$, $M_0'(3, 8)$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $M_0(0, 0)$, $M_0'(-5, 0)$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $M_0(5, 1)$, $M_0'(19, 9)$.

636. Написать аналитическое задание аффинного преобразования, которое три данные точки $A(1, 0)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, -1)$ переводит соответственно в точки:

а) $A'(3, 1)$, $B'(-4, -5)$, $C'(0, 2)$;

б) $A'(0, 2)$, $B'(1, -4)$, $C'(-1, -2)$.

637. В системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ записать координатное задание аффинного преобразования, при котором:

а) точка $M_0(0, 1)$ переходит в точку $M_0'(-3, 3)$, а векторы $\boldsymbol{a}_1\{1, 2\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{1, 0\}$ — соответственно в векторы $\boldsymbol{a}_1'\{-7, -2\}$ и $\boldsymbol{a}_2'\{1, -2\}$;

б) точка $M_0(1, 1)$ переходит в точку $M_0'(7, 2)$, а векторы $\boldsymbol{a}_1\{2, 0\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{0, 3\}$ — в векторы $\boldsymbol{a}_1'\{6, 2\}$ и $\boldsymbol{a}_2'\{12, 3\}$.

638. Пусть $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ — общая декартова система координат, а E_1 и E_2 — точки, удовлетворяющие условиям $\overrightarrow{OE_1} = \boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \boldsymbol{e}_2$.

Написать координатное задание аффинного преобразования, которое точки O, E_1, E_2 переводит соответственно в точки E_1, E_2, O.

---

[1] См. теорему на стр. 81.

639. Прямая в общей декартовой системе координат задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Показать, что ее образ в той же системе координат при аффинном преобразовании $x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0$ имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_0 - x \\ a_{21} & a_{22} & y_0 - y \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Пользуясь этой формулой, проверить результат задачи 632.

3. Неподвижные точки и инвариантные направления

640. Найти собственные направления следующих преобразований, заданных в общей декартовой системе Oe_1e_2:

а) $\begin{cases} x' = x + y + 3, \\ y' = y - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 1, \\ y' = -x + 4y + 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 3x - 1, \\ y' = 3y + 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 3, \\ y' = x + 3y + 3. \end{cases}$

641. Определить неподвижные точки следующих аффинных преобразований:

а) $\begin{cases} x' = 4x + y - 4, \\ y' = x + 2y - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 3x - 3y + 1, \\ y' = 4x - 5y + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 1, \\ y' = 2x - 5y. \end{cases}$

642. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые следующих аффинных преобразований[1]:

а) $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = -3x + 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x + 3, \\ y' = 2x - y + 1. \end{cases}$

643. В данной системе координат записать координатное задание аффинного преобразования, которое начало координат переводит в точку (3, 2) и все точки прямой $3x + 4y + 1 = 0$ оставляет неподвижными.

644. Пусть ABC — произвольный треугольник. Определить характер и найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки B, A, C.

645. Пусть ABC — произвольный треугольник, а $П$ — аффинное преобразование, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки B, C, A. а) Доказать, что $П$ имеет одну неподвижную точку, и выяснить, как она расположена по отношению к треугольнику

[1] Прямая l называется инвариантной, если ее образ l' совпадает с l, но не все ее точки являются неподвижными.

ABC; б) показать, что преобразование Π не имеет инвариантных направлений и инвариантных прямых.

646. Доказать, что любое аффинное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку или одно инвариантное направление.

647. Написать общий вид координатного задания аффинного преобразования, для которого все прямые направления оси Ox являются инвариантными или целиком состоят из неподвижных точек.

648. Написать общий вид координатного задания аффинного преобразования, для которого оси координат являются инвариантными прямыми и которое не имеет других инвариантных прямых или прямых, состоящих из неподвижных точек. Найти неподвижные точки преобразования.

4. Изменение площадей при аффинных преобразованиях

649. Пусть аффинное преобразование в некоторой системе координат задано уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + y_0; \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доказать, что если S — площадь данного ориентированного треугольника, а S' — площадь его образа, то $S' = \Delta \cdot S$.

650. Доказать, что при любом аффинном преобразовании отношение площадей двух ориентированных треугольников сохраняется.

651. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат стороны ориентированного треугольника $M_1M_2M_3$ заданы уравнениями: 1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (M_2M_3); 2) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (M_3M_1); 3) $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ (M_1M_2).

Пользуясь теорией аффинных преобразований, доказать, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & A_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}}.$$

§ 26. Преобразования подобия и движения

Наиболее важными частными случаями аффинных преобразований являются преобразования подобия и движения. Отображение точек плоскости называется п р е о б р а з о в а н и е м п о д о б и я, если для любых различных точек M_1 и M_2 и их образов M_1' и M_2' выполняется условие $M_1'M_2' = kM_1M_2$, где $k > 0$. Число k называется коэффициентом подобия. Если $k = 1$, то преобразование подобия называется движением. *Векторное преобразование, ассоциированное с данным преобразованием подобия, является преобразованием подобия. Векторное преобразование, ассоциированное с данным движением, является ортогональным преобразованием.* При решении задач часто используется следующая теорема.

Теорема 1. Если M_1 и M_2—произвольные точки плоскости, а $\overline{\Pi}$ — произвольное векторное преобразование подобия (ортогональное преобразование), то существует одно и только одно точечное преобразование подобия (движение), которое индуцирует $\overline{\Pi}$ и точку M_1 переводит в точку M_2.

Основными видами преобразований подобия являются следующие преобразования.

1°. Тождественное преобразование, т. е. преобразование, при котором каждая точка переходит сама в себя.

2°. Параллельный перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{a}_0$, где $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$. При этом преобразовании точка M переходит в точку M', определяемую условием $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}_0$.

3°. Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом λ, где $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$. При этом преобразовании точка M переходит в точку M', определяемую условием $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. При $\lambda = -1$ преобразование называется центральной симметрией.

4°. Центрально-подобное вращение с центром O, углом поворота φ и коэффициентом k, где $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ и $k > 0$. При этом преобразовании каждая точка M плоскости переходит в точку M' так, что $\sphericalangle\ MOM' = \varphi$ и $OM' = kOM$. При $k = 1$ преобразование называется вращением.

5°. Осевая симметрия с осью l. При этом преобразовании каждая точка M переходит в точку M', симметричную M относительно прямой l. Осевая симметрия является движением.

6°. Скользящая симметрия с осью l и вектором параллельного переноса $\boldsymbol{a}_0$, где $\boldsymbol{a}_0$ принадлежит l. Это преобразование является произведением осевой симметрии с осью l на параллельный перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{a}_0$. Скользящая симметрия является движением.

7°. Центрально-подобная симметрия с осью l, центром O и коэффициентом k, где O принадлежит l и $k > 0$, $k \neq 1$. При этом преобразовании точка M переходит в точку M' так, чтобы $OM' = kOM$ и лучи OM и OM' были симметричны относительно прямой l.

Важно отметить, что *этими семью преобразованиями исчерпываются все преобразования подобия; преобразованиями* 1°, 2°, 3° (при $\lambda = -1$), 4° (при $k = 1$), 5° *и* 6° *исчерпываются все виды движений плоскости.*

Следующая теорема часто используется при решении задач.

Теорема 2. Всякое точечное преобразование, ассоциированное с векторным преобразованием:

а) $\overline{E}$ является тождественным преобразованием или параллельным переносом[1];

б) $\overline{\Gamma}_\lambda$ является гомотетией с коэффициентом λ; при $\lambda = -1$ оно является центральной симметрией;

в) $k\overline{V}_\varphi$ является центрально-подобным вращением с углом поворота φ и коэффициентом k; при $k = 1$ оно является вращением;

г) $\overline{S}_e$ является осевой симметрией или скользящей симметрией с осью, содержащей вектор $\boldsymbol{e}$;

д) $k\overline{S}_e$ является центрально-подобной симметрией с коэффициентом k и с осью, содержащей вектор $\boldsymbol{e}$ ($k \neq 1$).

1. Координатное задание преобразований подобия и движений

652. В данной прямоугольной декартовой системе координат записать аналитическое задание преобразования параллельного переноса, определяемого векторами: а) $\boldsymbol{a}_1\{-3, 5\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\ \{1, 7\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{-1, 4\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\ \{0, -6\}$.

653. В данной прямоугольной декартовой системе координат записать аналитическое задание центральной симметрии с центром в следующих точках: а) $C_1\ (1, 3)$; б) $C_2\ (-2, 5)$; в) $C_3\ (-2, 0)$; г) $C_4(0, 3)$.

654. В каждом из следующих случаев записать в прямоугольной декартовой системе координат координатное задание вращения с центром в точке C на угол φ: а) $C_1\ (0, 0)$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$; б) $C_2\ (-1, 3)$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; в) $C_3\ (2, -1)$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

655. В каждом из следующих случаев записать координатное задание осевой симметрии, ось которой в прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение: а) $x - y = 0$; б) $x - y + 4 = 0$; в) $3x + 4y - 10 = 0$; г) $5x - 12y - 27 = 0$.

656. В прямоугольной декартовой системе координат записать координатное задание скользящей симметрии с осью l и вектором параллельного переноса $\boldsymbol{p}$ в каждом из следующих случаев:

а) $(l_1)\quad 2x - y + 1 = 0, \quad \boldsymbol{p}_1\ \{2, 4\}$;
б) $(l_2)\quad x - 3y - 6 = 0, \quad \boldsymbol{p}_2\ \{3, 1\}$;
в) $(l_3)\quad 2x + 7 = 0, \quad \boldsymbol{p}_3\ \{0, 3\}$.

657. В данной прямоугольной декартовой системе координат записать координатные задания следующих преобразований:

а) гомотетии с центром в точке $C\ (-2, 1)$ и коэффициентом $k = 3$;

б) центрально-подобного вращения с центром в начале координат, углом поворота $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и коэффициентом $k = 5$;

[1] Относительно обозначений см. введение к § 24.

в) центрально-подобной симметрии относительно оси $x = 2$ с центром в точке $(2, 1)$ и коэффициентом $k = 2$.

658. В общей декартовой системе координат записать координатное задание центральной симметрии с центром в точке (x_0, y_0).

659. В прямоугольной декартовой системе координат записать координатное задание осевой симметрии, ось которой имеет уравнение $Ax + By + C = 0$.

660. В прямоугольной декартовой системе координат записать координатное задание скользящей симметрии, ось которой имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, а вектор параллельного переноса задан своими координатами: $\{-B\lambda, A\lambda\}$.

2. Задачи на определение вида преобразований подобия и движений

661. Выяснить, какие из преобразований являются: 1) движениями; 2) преобразованиями подобия, если они заданы в прямоугольной декартовой системе координат следующими соотношениями:

а) $x' = 2x,\ y' = 2y$;
б) $x' = 3x,\ y' = y$;
в) $x' = 3x + 4y,\ y' = 5x - 6y$;
г) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 15$;
д) $x' = 8x - y + 1,\ y' = x + 8y$;
е) $x' = x,\ y' = -y$.

662. В каждом из следующих случаев выяснить характер преобразования, если в прямоугольной декартовой системе координат оно дано уравнениями:

а) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$;
б) $x' = -x - 6,\ y' = y$;
в) $x' = -x + 1,\ y' = -y$;
г) $x' = x + 3,\ y' = -y$.

663. В прямоугольной декартовой системе координат даны координатные задания точечных преобразований плоскости. В каждом из следующих случаев выяснить характер преобразования:

а) $x' = -5y,\ y' = 5x$;
б) $x' = 3x,\ y' = 3y$;
в) $x' = \frac{3}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y,\ y' = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}\sqrt{3}x$;
г) $x' = 2x,\ y' = -2y$;
д) $x' = 5x - 4,\ y' = -5y + 3$;
е) $x' = -3y - 7,\ y' = 3x + 1$.

664. На плоскости дана прямоугольная декартова система координат Oxy. Точка M плоскости первоначально переводится в точку M_1, симметричную точке M относительно оси Ox; затем вектор $\overrightarrow{OM_1}$ поворотом вокруг точки O на угол φ преобразуется в вектор $\overrightarrow{OM'}$. Записать аналитическое задание отображения, при котором точка M переходит в точку M'. Выяснить, будет ли это отображение преобразованием подобия.

665. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — фиксированные точки плоскости, а $k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ — данные числа, причем $k \neq 0$ и $k \neq m_1 + m_2 + \ldots + m_k$. Доказать, что соответствие, при котором точке M ставится в соответствие M', так что $k\overrightarrow{MM'} = m_1\overrightarrow{MM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{MM_k}$, является:

а) гомотетией при $m_1 + m_2 + \ldots + m_k \neq 0$;

б) тождественным преобразованием при $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 0$ и $m_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{OM_k} = \mathbf{0}$;

в) параллельным переносом при $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 0$ и $m_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{OM_k} \neq \mathbf{0}$.

В случаях б) и в) O — произвольная точка плоскости.

666. Пусть M_0 — произвольная точка плоскости треугольника ABC и A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные точке M_0 относительно середин сторон BC, CA и AB. Доказать, что аффинное преобразование, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, является центральной симметрией. Найти центр симметрии.

667. Пусть ABC — произвольный треугольник, а A_1, B_1 и C_1 — середины соответственно сторон BC, CA и AB. Доказать, что аффинное преобразование, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1, является гомотетией с коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Найти центр гомотетии и показать, что он совпадает с точкой пересечения медиан[1]. Эту гомотетию будем называть *центральной гомотетией треугольника*.

668. На плоскости дан пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Выяснить характер преобразования П, переводящего каждую точку M плоскости в точку M', которая получается последовательным отражением точки M относительно вершин A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5.

669. Доказать, что если аффинное преобразование имеет три попарно пересекающиеся инвариантные прямые, то оно является гомотетией.

670. Даны две произвольные точки E_1 и E_2 и число k (где $k \neq 0$ и $k \neq 1$). Найти центр гомотетии с коэффициентом k, при которой точка E_1 переходит в точку E_2.

671. В ориентированной плоскости дан угол φ, коэффициент k и две произвольные точки M_0 и M_0'. Предполагается, что $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ и k — положительное число, отличное от единицы. Доказать следующие предложения:

---

[1] Тем самым дается другое доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника (см. задачу 143).

а) существует одно и только одно вращение на угол φ, при котором точка M_0 переходит в точку M_0';

б) существует одно и только одно центрально-подобное вращение с углом поворота φ и коэффициентом k, при котором точка M_0 переходит в точку M_0'.

Пользуясь циркулем и линейкой, построить центры преобразований.

672. На плоскости дан ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$, две произвольные точки M_0 и M_0' и положительное число k, отличное от единицы. Доказать, что существует одна и только одна центрально-подобная симметрия с коэффициентом k, ось которой содержит вектор $\boldsymbol{p}$. Пользуясь циркулем и линейкой, построить ось и центр данного преобразования.

3. Произведение преобразований подобия и движений[1]

673. Пусть Π_1 и Π_2 — две осевые симметрии, оси l_1 и l_2 которых пересекаются в точке O и $\measuredangle(l_1, l_2) = \varphi$. Доказать, что преобразование $\Pi = \Pi_2\Pi_1$ есть вращение с центром в точке O на угол 2φ, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, и центральная симметрия относительно точки O, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

674. Доказать, что произведение двух симметрий Π_1 и Π_2 относительно параллельных осей l_1 и l_2 есть параллельный перенос. Найти вектор параллельного переноса.

675. На ориентированной плоскости дан положительно ориентированный треугольник $A_1A_2A_3$, стороны которого произвольны. Точки B_1, B_2, B_3 являются центрами трех равносторонних треугольников, построенных извне на сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 30). Показать, что если Π_1, Π_2 и Π_3 — три вращения соответственно с центрами в точках B_1, B_2, B_3 на один и тот же угол φ, то $\Pi_3\Pi_2\Pi_1$ является:

а) тождественным преобразованием, если $\varphi = -120°$;

б) параллельным переносом, если $\varphi = 120°$.

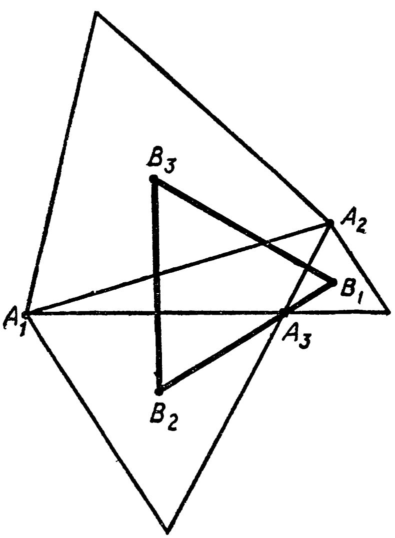


Рис. 30

676. Пусть Π_1 — гомотетия с центром в точке O и коэффициентом λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), а Π_2 — параллельный перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{a}_0$. Доказать, что как преобразование $\Pi_2\Pi_1$, так и преобразование

[1] Во всех задачах, связанных с произведением преобразований, запись $\Pi_2\Pi_1$ означает, что сначала выполняется преобразование Π_1, а затем Π_2.

$\Pi_1\Pi_2$ являются гомотетией с коэффициентом λ. Найти центры этих преобразований. Могут ли эти преобразования совпасть?

677. Пусть Π_1 — центрально-подобное вращение с центром в точке O_1, углом поворота φ и коэффициентом k_1, а Π_2 — гомотетия с центром в точке O_2 и коэффициентом k_2. Предполагается, что $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, а k_1 и k_2 — положительные числа, отличные от единицы. Определить преобразование $\Pi_2\Pi_1$, если: а) $k_1k_2 = 1$; б) $k_1k_2 \neq 1$.

678. Пусть Π_1 — центрально-подобная симметрия с осью l, центром O_1 и коэффициентом k_1, а Π_2 — гомотетия с центром в точке O_2 и коэффициентом k_2. Предполагается, что k_1 и k_2 — положительные числа, отличные от единицы. Определить преобразование $\Pi_2\Pi_1$, если: а) $k_1k_2 = 1$; б) $k_1k_2 \neq 1$.

679. Пусть Π_1 центрально-подобная симметрия с осью l, центром O_1 и коэффициентом k_1, а Π_2— центрально-подобное вращение с центром в точке O_2, углом поворота φ и коэффициентом k_2. Предполагается, что $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, а k_1 и k_2 — положительные числа, отличные от единицы. Определить преобразование $\Pi_2\Pi_1$, если: а) $k_1k_2 = 1$; б) $k_1k_2 \neq 1$.

§ 27. Некоторые специальные аффинные преобразования

Нетождественное аффинное преобразование, имеющее прямую l неподвижных точек, называется перспективно-аффинным преобразованием с осью l. При этом преобразовании прямые, соединяющие соответственные точки, не лежащие на оси, параллельны между собой. Если направление этих прямых не совпадает с направлением оси, то преобразование называется перспективно-аффинным преобразованием первого рода, в противном случае — перспективно-аффинным преобразованием второго рода. Частным случаем перспективно-аффинного преобразования первого рода является косая симметрия (см. задачу 628).

1. Перспективно-аффинное преобразование

680. В каждом из следующих случаев записать координатное задание перспективно-аффинного преобразования, если ось преобразования l задана уравнением в общей декартовой системе и известно, что точка M_0 переходит в точку M_0':

а) $3x - y + 1 = 0$; $M_0(1, 3)$, $M_0'(3, 4)$;
б) $4x + y + 3 = 0$; $M_0(1, 1)$, $M_0'(-7, 33)$;
в) $x + 5 = 0$; $M_0(1, 0)$, $M_0'(7, 12)$;
г) $y - 1 = 0$; $M_0(-1, 3)$, $M_0'(-3, 3)$.

В каждом из указанных случаев определить род перспективно-аффинного преобразования.

681. Доказать, что преобразования, заданные в общей декартовой системе координат следующими соотношениями, являются перспективно-аффинными: а) $x' = 5x - 2y + 6$, $y' = 8x - 3y + 12$; б) $x' = 2x - 3y + 2$, $y' = 2x - 5y + 4$; в) $x' = 4x + y + 1$, $y' = 3x + 2y + 1$; г) $x' = 6x - 25y + 30$, $y' = x - 4y + 6$.

В каждом из этих случаев выяснить род перспективно-аффинного преобразования.

682. Написать общий вид координатного задания перспективно-аффинного преобразования, ось которого определяется уравнением $Ax + By + C = 0$. Система координат общая декартова.

683. Записать общий вид координатного задания перспективно-аффинного преобразования, ось которого совпадает с координатной осью Ox. Выяснить, при каком условии преобразование является:

а) перспективно-аффинным преобразованием первого рода;

б) перспективно-аффинным преобразованием второго рода;

в) косой симметрией (см. задачу 628).

684. На прямой l, не проходящей через точку O, даны четыре точки A_1, B_1, A_2 и B_2, при этом как A_1, B_1, так и A_2, B_2 не совпадают. Доказать, что аффинное преобразование, при котором точки O, A_1, B_1 переходят соответственно в точки O, A_2, B_2, является перспективно-аффинным. При каком условии ось преобразования параллельна прямой l?

685. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на плоскости расположены так, что прямые AA', BB' и CC' принадлежат одному пучку параллельных прямых и точки A и A' не совпадают[1]. Определить тип аффинного преобразования, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C'.

2. Инверсные преобразования. Косая симметрия

686. Показать, что аффинные преобразования, заданные следующими соотношениями в общей декартовой системе, являются инверсными[2]:

а) $x' = 3x + 2y + 1$, $y' = -4x - 3y - 2$;

б) $x' = x$, $y' = 5x - y + 4$;

в) $x' = -x + 1$, $y' = -y + 15$.

687. В общей декартовой системе координат заданы следующие преобразования:

а) $x' = -x + a_{12}y + x_0$, $y' = y$;

б) $x' = x + a_{12}y$, $y' = -y$.

Показать, что каждое из этих преобразований является косой симметрией, и найти уравнения осей.

688. Доказать, что аффинное преобразование, заданное в общей декартовой системе координат соотношениями $x' = \alpha y - \alpha\beta$, $y' =$

---

[1] Мы не исключаем из рассмотрения случаи, когда отдельные вершины или стороны данных треугольников совпадают.

[2] См. сноску на стр. 81.

$= \frac{1}{\alpha} x + \beta$, где $\alpha \neq 0$, а β — произвольное число, является косой симметрией.

689. На прямой l, не проходящей через точку O, даны четыре точки A_1, B_1, A_2, B_2, удовлетворяющие условию $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_2A_2} \neq \vec{0}$. Доказать, что аффинное преобразование, при котором точки O, A_1, B_1 переходят соответственно в точки O, A_2, B_2, есть косая симметрия с осью, проходящей через точку O.

690. Доказать, что всякое инверсное перспективно-аффинное преобразование является косой симметрией.

691. В данной общей декартовой системе координат записать координатное задание инверсного аффинного преобразования в общем виде.

692. Аффинное преобразование в общей декартовой системе координат дано соотношениями $x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0$. При каких необходимых и достаточных условиях, накладываемых на коэффициенты этих соотношений, данное преобразование является косой симметрией?

693. Доказать, что всякое инверсное аффинное преобразование принадлежит одному из следующих видов:

а) тождественное преобразование;

б) центральная симметрия;

в) косая симметрия.

694. Доказать, что если инверсное аффинное преобразование меняет ориентацию плоскости, т. е. любой базис переходит в новый базис, имеющий противоположную ориентацию, то оно является косой симметрией.

3. Смешанные задачи

695. Доказать, что преобразование, заданное в общей декартовой системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ соотношениями $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$, где $\lambda_1 \neq 1$ и $\lambda_2 \neq 1$, можно представить как произведение двух перспективно-аффинных преобразований, оси которых совпадают с осями координат.

696. Доказать, что если перспективно-аффинное преобразование является одновременно преобразованием подобия, то оно является осевой симметрией.

697. Доказать, что всякое аффинное преобразование $П$ можно представить в виде $П_2 П_1$, где $П_1$ — преобразование подобия, а $П_2$ — перспективно-аффинное преобразование.

698. Если взаимно перпендикулярные ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при данном аффинном преобразовании переходят во взаимно перпендикулярные векторы $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$, то их направления называются главными направлениями данного аффинного преобразования.

Доказать, что всякое перспективно-аффинное преобразование, отличное от осевой симметрии, имеет одну и только одну пару главных направлений.

Сколько пар главных направлений имеет осевая симметрия?

699. Доказать, что всякое аффинное преобразование, отличное от преобразований подобия, имеет одну и только одну пару главных направлений (см. предыдущую задачу).

Сколько главных направлений имеет преобразование подобия?

§ 28. Инверсия на плоскости. Гиперболическая инверсия

1. Инверсия на плоскости

700. Дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$. Записать координатное задание инверсии с центром в точке O и степенью r^2.

При $r = 1$ найти координаты следующих точек: $M_1\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $M_2\,(1, 0)$, $M_3\,(3, 1)$, $M_4\,(-2, 1)$, $M_5\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $M_6\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $M_7\,(-1, 5)$.

701. Дана прямоугольная декартова система координат. Записать координатное задание инверсии со степенью $k = 4$ и с центром в точке $C\,(-1, 3)$. Найти координаты следующих точек при данной инверсии: $M_1\,(0, 0)$, $M_2\,(-1, -1)$, $M_3\,(2, 3)$, $M_4\,(-2, 5)$, $M_5\,(-2, 4)$, $M_6\,(-1, 5)$.

702. Дана инверсия с центром в точке O, степень которой равна r^2. Пользуясь координатным заданием инверсии (см. задачу 700), доказать, что:

а) прямая, проходящая через точку O, преобразуется в себя;

б) окружность с центром в точке O и радиусом r (окружность инверсии) целиком состоит из неподвижных точек;

в) окружность с центром в точке O и радиусом R, где $R \neq r$, преобразуется в концентрическую окружность.

703. Дана инверсия с центром в точке O со степенью r^2 и прямая l, не проходящая через центр инверсии O. Используя координатное задание инверсии (см. задачу 700), доказать, что образом прямой l является окружность Ω, проходящая через центр инверсии O и расположенная так, что прямая, соединяющая центр инверсии с центром окружности Ω, перпендикулярна прямой l.

Показать, что образом проекции H центра инверсии на прямую l является точка H' окружности Ω, диаметрально противоположная точке O. Сделать чертеж.

704. Инверсия задана центром O и окружностью ω. Указать способ построения с помощью циркуля и линейки:

а) образа точки M, не лежащей на окружности ω;

б) образа прямой l, не проходящей через центр инверсии.

Выбрав на плоскости несколько точек и прямых (пересекающих, не пересекающих и касающихся окружности ω), построить их образы.

705. Пусть центр инверсии совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а степень r^2 инверсии равна 4. Найти образы следующих прямых при данной инверсии: а) $2x - 5y = 0$; б) $x + 2y - 6 = 0$; в) $3x + 2 = 0$; г) $2x - 3y - 2 = 0$.

706. Дана инверсия с центром в точке O и степенью k. Выяснить, во что преобразуются при данной инверсии следующие геометрические образы:

а) пара параллельных прямых, ни одна из которых не проходит через O;

б) пучок параллельных прямых;

в) пучок пересекающихся прямых с центром в точке O;

г) пучок пересекающихся прямых с центром в точке M, отличной от O.

Пользуясь циркулем и линейкой, проиллюстрировать геометрическую картину.

707. Что будет образом угла $(\widehat{h, k})$ при инверсии, если вершина P угла принадлежит окружности инверсии, одна сторона проходит через центр инверсии, а вторая пересекает окружность инверсии? Осуществить построение образа данного угла циркулем и линейкой.

708. Инверсия задана центром O и окружностью ω. Что будет образом треугольника при инверсии, если его стороны не проходят через центр инверсии? Рассмотреть четыре случая: а) окружность инверсии расположена внутри треугольника; б) треугольник расположен внутри окружности инверсии; в) вершины треугольника лежат на окружности инверсии; г) стороны треугольника пересекают окружность инверсии.

В каждом из этих случаев осуществить построение образа данного треугольника циркулем и линейкой.

709. Даны инверсия с центром в точке O и радиусом r и окружность Ω, не проходящая через центр инверсии. Используя метод координат, доказать, что образом окружности Ω является окружность Ω', не проходящая через центр инверсии и расположенная так, что центр инверсии O и центры P и Q окружностей Ω и Ω' лежат на одной прямой (рис. 31).

710. Инверсия задана центром O и окружностью ω. Сформулировать геометрический способ построения циркулем и линейкой: а) образа окружности, проходящей через центр инверсии; б) образа окружности, не проходящей через центр инверсии. Взяв на плоскости несколько окружностей (не пересекающих, пересекающих или касающихся окружности ω), построить их образы с помощью циркуля и линейки.

711. Пусть центр инверсии совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а степень инверсии равна 4. Записать в той же системе координат уравнения обра-

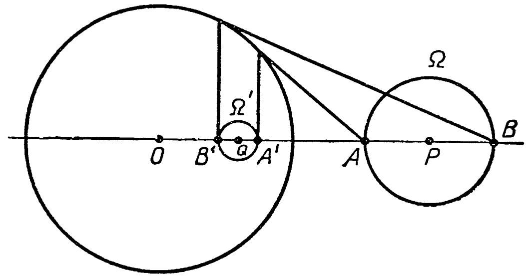


Рис. 31

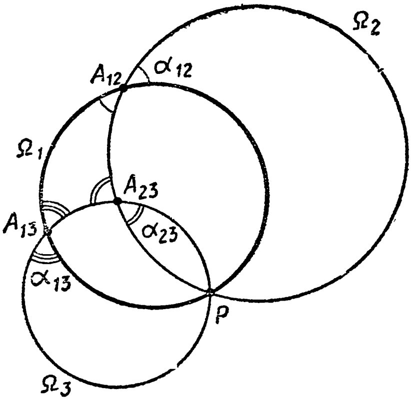


Рис. 32

зов следующих окружностей: а) $x^2 + y^2 = 12$; б) $(x-3)^2 + y^2 = 9$; в) $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 8$.

712. Пусть центр инверсии совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а степень равна единице. Записать в той же системе координат уравнения образов следующих кривых: а) $y^2 - 2px = 0$; б) $x^2 - y^2 - a^2 = 0$; в) $y^2 - 2px - p^2 = 0$; г) $x^2 - y^2 + 2ax = 0$.

713. Доказать, что при инверсии сохраняется угол, под которым пересекаются две окружности, не проходящие через центр инверсии.

714. Три окружности Ω_1, Ω_2 и Ω_3 проходят через одну точку P и попарно пересекаются еще в трех точках A_{12}, A_{23} и A_{13} (рис. 32). Доказать, что сумма трех углов α_{12}, α_{23}, α_{31} между соответствующими окружностями, отмеченных на рисунке 32, равна $2d$.

715. Написать аналитическое задание инверсии в полярной системе координат, если полюс совпадает с центром инверсии, а степень инверсии равна r^2. Пользуясь полученными формулами при $r^2 = 1$, найти координаты образов следующих точек: $M_1\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

716. В полярной системе координат даны множества точек уравнениями: а) $\rho\cos\varphi = a$; б) $\rho\sin\varphi = b$; в) $\rho^2 = k^2$, где $a > 0$, $b > 0$ и $k > 0$. Найти полярные уравнения образов данных линий в той же системе координат при инверсии, центр которой совпадает с полюсом системы, а степень равна r^2.

Пользуясь циркулем и линейкой, построить эти линии и их образы в предположении, что на чертеже даны отрезки a, b, k и r.

2. Преобразование кривой второго порядка при инверсии

717. В полярной системе координат кривая второго порядка дана уравнением

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Написать уравнение образа этой кривой при инверсии с центром в полюсе системы координат и степенью, равной r^2.

718. Доказать, что образом параболы при инверсии с центром в вершине параболы является циссоида Диоклеса (см. задачу 350),

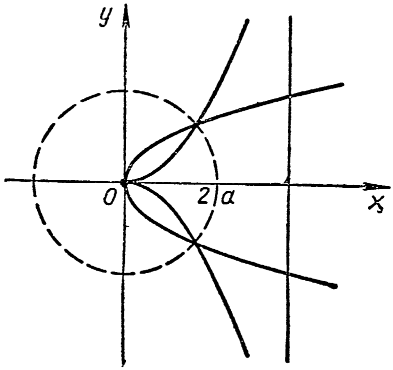


Рис. 33

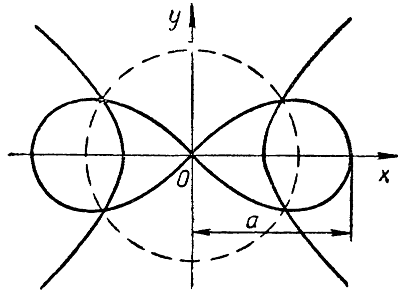


Рис. 34

полюс которой совпадает с вершиной параболы, а ось — с ее осью симметрии, направленной от вершины к фокусу (см. рис. 33).

Показать, что если степень инверсии равна единице, то параметром циссоиды является число $\frac{1}{2p}$, где p — параметр параболы.

719. Доказать, что образом равнобочной гиперболы при инверсии с центром в центре симметрии гиперболы является лемниската Бернулли (см. задачу 351), центр которой совпадает с центром гиперболы, а ось — с ее действительной осью (см. рис. 34).

Показать, что если степень инверсии равна единице, то параметром лемнискаты является число $\frac{\sqrt{2}}{2a}$, где a — полуось равнобочной гиперболы.

720. Доказать, что образом равнобочной гиперболы при инверсии с центром в одной из ее вершин является строфида (см. задачу 349), полюс которой совпадает с этой вершиной гиперболы, а ось — с осью гиперболы, направленной от выбранной вершины к ближайшему фокусу (рис. 35).

Показать, что если степень r^2 инверсии равна единице, то параметр строфоиды равен $\frac{1}{2a}$, где a — полуось гиперболы.

721. Доказать, что образом эллипса при инверсии с центром в одном из его фокусов является улитка Паскаля (см. задачу 347), полюс которой совпадает с этим фокусом, а ось — с осью эллипса, направленной от ближайшей вершины к выбранному фокусу (рис. 36).

Показать, что если степень инверсии равна единице, то первый и второй параметры улитки Паскаля равны соответственно

$$\frac{c}{a^2-c^2} \text{ и } \frac{a}{a^2-c^2},$$

где $2a$ — большая ось эллипса, а $2c$ — расстояние между его фокусами.

722. Доказать, что образом гиперболы при инверсии с центром в одном из ее фокусов является улитка Паскаля (см. задачу 347), полюс

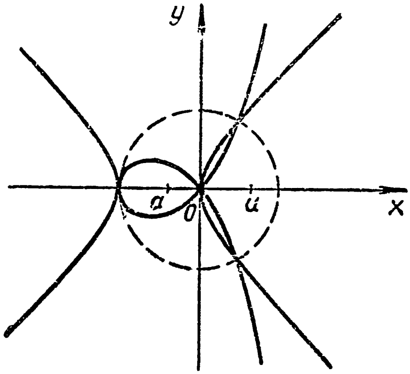


Рис. 35

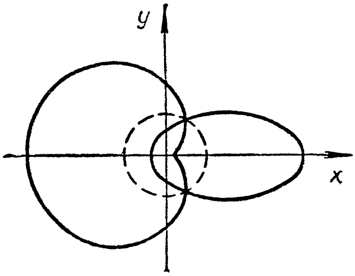


Рис. 36

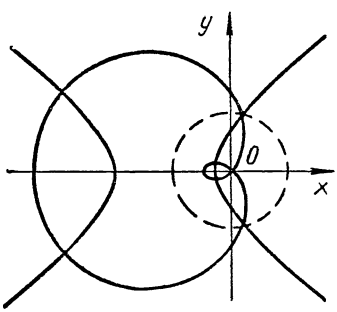
которой совпадает с фокусом, а ось — с действительной осью гиперболы, направленной от ближайшей вершины к выбранному фокусу (рис. 37).

Показать, что если степень инверсии равна единице, то первый и второй параметры улитки Паскаля равны соответственно

$$\frac{c}{c^2-a^2} \text{ и } \frac{a}{c^2-a^2},$$

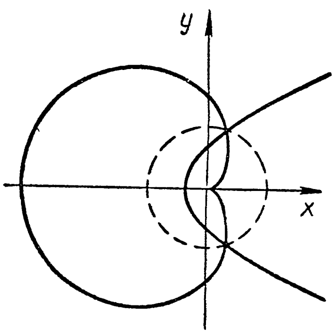
где $2a$ — действительная ось гиперболы, а $2c$ — расстояние между ее фокусами.

723. Доказать, что образом параболы при инверсии с центром в ее фокусе является кардиоида (см. задачи 344 и 348)[1], полюс которой



$a > b$

Рис. 37



$a = b$

Рис. 38

[1] Согласно задаче 348 кардиоида является частным случаем улитки Паскаля. Из задач 721, 722 и 723 следует, что если полюс инверсии совпадает с фокусом конического сечения, то образом этого конического сечения является улитка Паскаля. При этом если $2r$ и b — соответственно первый и второй параметры улитки Паскаля, то в случае эллипса $2r < b$ (рис. 36), для гиперболы $2r > b$ (рис. 37) и для параболы $2r = b$ (рис. 38).

совпадает с фокусом параболы, а ось — с осью параболы, направленной от вершины к фокусу (рис. 38).

Показать, что если степень инверсии равна единице, то параметром кардиоиды является число $\frac{1}{p}$, где p — параметр параболы.

3. Гиперболическая инверсия[1]

724. Дана гиперболическая инверсия с осью l_0 и степенью 4. Прямоугольная декартова система координат выбрана так, что ось Ox совпадает с прямой l_0. Пользуясь формулами, выведенными при решении задачи 627, найти образы следующих точек: M_1 (1, —2), M_2 (3, 5), M_3 (—2, 4), M_4 (3, —7), M_5 (—1, —6).

725. Дана гиперболическая инверсия с осью l_0 и степенью 3 и прямоугольная декартова система координат, ось Ox которой совпадает с осью l_0. Написать уравнения образов следующих линий: а) $y = 6x$; б) $2y - 3x + 5 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 9$; г) $y^2 - 2x = 0$.

726. Дана гиперболическая инверсия с осью l_0 и степенью k. Найти:

а) образ прямой, перпендикулярной оси инверсии;

б) образ прямой, параллельной оси инверсии и отстоящей от нее на расстоянии a.

727. При гиперболической инверсии с осью l_0 и степенью k найти образ прямой, пересекающей ось инверсии под углом, тангенс которого равен a.

§ 29. Приложение теории преобразований к решению задач элементарной геометрии

1. Применение преобразований подобия и движений к решению задач

728. Стороны угла с вершиной в точке O пересечены двумя параллельными прямыми, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1 и B_1, а вторая — в точках A_2, B_2. Доказать, что точки пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам угла в точках A_1 и B_1, и перпендикуляров, восставленных в точках A_2 и B_2, лежат на одной прямой, проходящей через точку O.

729. Даны прямая l и две точки A, B, лежащие по одну и ту же сторону от этой прямой. Доказать, что на прямой существует единственная точка M_0, такая, что $AM_0 + BM_0 < AM + BM$, где M — произвольная точка прямой l, отличная от M_0.

730. Даны прямая l и две точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой l. Существует ли на прямой l такая точка M_0, что $| AM_0 -$

---

[1] Определение гиперболической инверсии дано в тексте задачи 627.

$-BM_0| > |AM-BM|$, где M — любая точка прямой l, отличная от M_0?

731. Даны острый угол Ohk и точка M внутри этого угла. Рассмотрим всевозможные треугольники HKM, вершины H которых принадлежат лучу h, а вершина K — лучу k. Доказать, что среди этих треугольников существует единственный треугольник H_0K_0M, периметр которого меньше периметра всех остальных треугольников.

732. Даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 и точка M_0, не лежащая на них. Доказать, что существует одна и только одна прямая, проходящая через M_0, отрезок которой, отсекаемый прямыми l_1, l_2, делится точкой M_0 пополам.

733. Даны две окружности Ω_1 и Ω_2, пересекающиеся в двух точках P и Q. Доказать, что существует единственный отрезок, середина которого совпадает с точкой P, а концы лежат соответственно на окружностях Ω_1 и Ω_2.

734. На плоскости даны окружность Ω, прямая l и точка A. Выяснить, при каком условии существуют такие точки M_1 и M_2, принадлежащие соответственно окружности Ω и прямой l, что точка A является серединой отрезка M_1M_2. Сколько существует таких точек.

735. В плоскости четырехугольника дана точка M, которая соединена с серединами сторон четырехугольника. Через середину каждой стороны проведена прямая, параллельная отрезку, соединяющему точку M с серединой противоположной стороны. Доказать, что:

1) эти прямые пересекаются в одной точке P;

2) точка P лежит с точкой M и точкой пересечения O средних линий четырехугольника на одной прямой;

3) точка O делит отрезок MP пополам.

736. Доказать, что любая ограниченная фигура[1] (в частности, любой многоугольник) имеет не более чем один центр симметрии.

737. В плоскости пятиугольника дана произвольная точка M, которая отражается последовательно относительно всех вершин пятиугольника один раз и затем второй раз. Доказать, что после последнего отражения отражаемая точка M' совпадает с точкой M.

738. Вершины A_1, B_1, C_1 и D_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA второго параллелограмма $ABCD$. Доказать, что оба параллелограмма имеют общий центр симметрии.

739. В окружность вписаны два равносторонних треугольника одной ориентации. Доказать, что прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаясь, образуют также равносторонний треугольник, если ни одна из них не проходит через центр окружности.

740. На окружности даны три точки A, B, C. Точка C отражена относительно середины отрезка AB. Полученная точка C_1 соединена с точкой D, диаметрально противоположной точке C. Доказать, что прямые AB и C_1D перпендикулярны.

---

[1] Фигуру будем называть ограниченной, если на плоскости существует такая окружность, что все точки фигуры расположены внутри этой окружности.

741. На ориентированной плоскости даны два одинаково ориентированных равных треугольника ABC и $A'B'C'$, которые не совпадают. Доказать, что существует одно и только одно из следующих трех видов движений — вращение, центральная симметрия или параллельный перенос, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. Построить неподвижную точку преобразования, если имеет место первый или второй случай.

742. Пользуясь центральной гомотетией треугольника (см. задачу 667), доказать предложения:

а) высоты треугольника пересекаются в одной точке;

б) точка пересечения медиан лежит между центром описанной окружности и точкой пересечения высот и делит этот отрезок в отношении $\frac{1}{2}$ (см. задачу 541).

743. В плоскости четырехугольника дана точка M. Доказать, что точки, симметричные с точкой M относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

744. Пусть ABC — произвольный треугольник, высоты которого пересекаются в точке H. Доказать, что девять точек — середины трех сторон, основания трех высот и середины отрезков HA, HB и HC — лежат на одной окружности (окружности Эйлера)[1].

745. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — основание высоты, проведенной через вершину A, а Q — точка пересечения описанной вокруг треугольника окружности Ω с прямой l, проведенной через A параллельно BC. Доказать, что точка M лежит между точками P и Q и делит отрезок PQ в отношении

$$\frac{QM}{MP} = 2.$$

746. Точки B_1, B_2, B_3 являются центроидами трех равносторонних треугольников, построенных извне на сторонах данного произвольного треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 30). Показать, что независимо от вида треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $B_1B_2B_3$ является равносторонним.

747. На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой l построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Доказать, что середина P отрезка MC, середина Q отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

2. Применение аффинных преобразований к решению задач

748. Пусть M_0 — произвольная точка плоскости треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные точке M_0 относительно се-

[1] Эта окружность называется также окружностью девяти точек, так как на ней лежат девять «замечательных» точек треугольника.

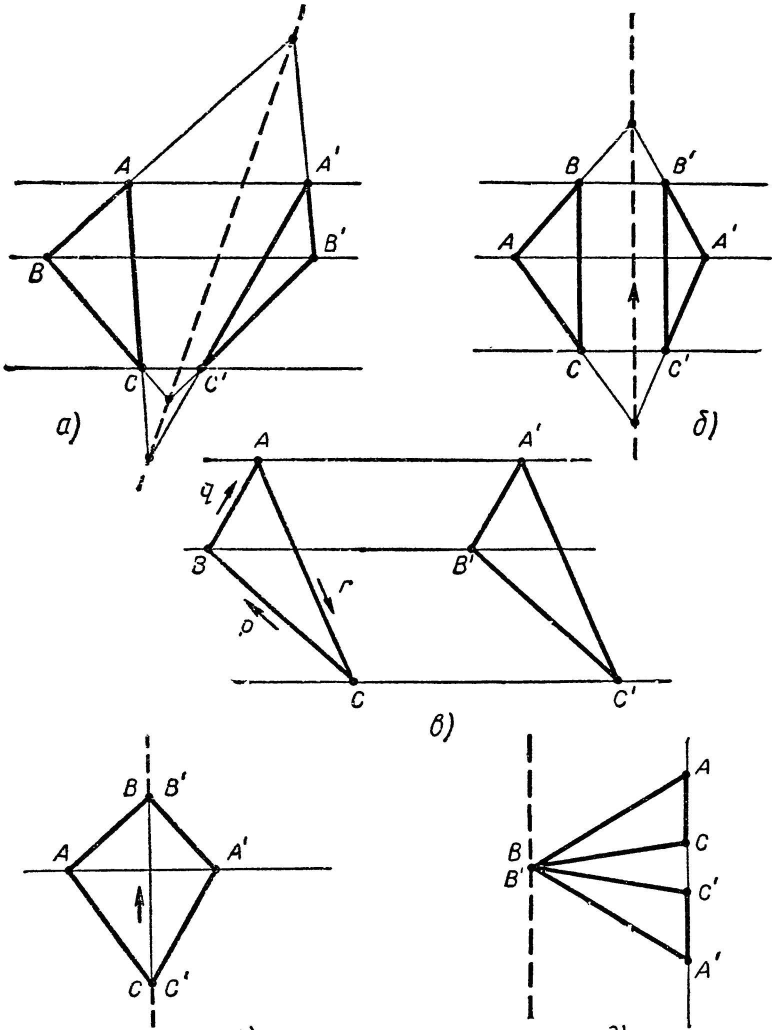


Рис. 39

редин сторон BC, CA и AB. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и одинаково ориентированы, а отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и каждый из них делится этой точкой пополам.

749. Медианы треугольника ABC разделены в равных отношениях, считая от вершин. Доказать, что точки деления либо совпадают с центроидом треугольника, либо не лежат на одной прямой.

750. Пусть точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA, AB треугольника ABC в отношении λ. Доказать, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам AA_1, BB_1, CC_1.

751. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на плоскости расположены так, что их соответствующие медианы параллельны. Доказать, что их соответствующие стороны также параллельны.

752. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на плоскости расположены так, что прямые AA', BB' и CC' принадлежат одному пучку параллельных прямых. Доказать, что стороны этих треугольников имеют дезаргово расположение[1], т. е. имеет место один из следующих случаев:

а) в плоскости треугольников существует прямая, которая содержит хотя бы одну общую точку или общий ненулевой вектор каждой пары соответствующих сторон;

б) каждая пара соответствующих сторон треугольников имеет ненулевой вектор.

753. Доказать, что если в четырехугольнике $ABCD$ средняя линия проходит через точку пересечения P диагоналей и делится ею пополам, то четырехугольник — параллелограмм.

754. Отрезок, соединяющий середины M_1 и M_2 двух противоположных сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекает его диагонали BD и AC в точках P и Q. Доказать, что если $M_1P = M_2Q$, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Глава VI

ИЗУЧЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ[2]

§ 30. Эллипс

1. Определение эллипса и его простейшие свойства

755. Найти уравнение множества точек, для каждой из которых сумма расстояний от двух точек F_1 (4, 0) и F_2 (—4, 0) равна 10.

756. Длина большой полуоси эллипса равна 6, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а расстояние точки M эллипса до фокуса F_1 равно 7. Вычис-

---

[1] Существуют различные случаи дезаргова расположения сторон треугольника. На рисунке 39 изображены некоторые из этих случаев.

[2] Во всех задачах этой главы для кривых, заданных уравнениями, и точек — координатами, предполагается, что на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат.

лить расстояние точки M до фокуса F_2 и координаты точки M. Написать каноническое уравнение эллипса.

757. В каждом из следующих случаев составить каноническое уравнение эллипса: а) $a = 10$, $b = 6$; б) $a + b = 9$, $c = 3$; в) $a = 6$, $c = 4$. Здесь a — большая полуось эллипса, b — малая, а $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

758. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих эллипсов:

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; в) $x^2 + 9y^2 = 9$;
б) $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$; г) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

759. Найти точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, абсциссы которых равны: а) 2; б) 3; в) 1.

760. На эллипсе $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ дана точка (3, 1). Найти координаты точек, симметричных с данной относительно: 1) начала координат и 2) координатных осей, и убедиться в том, что эти точки принадлежат эллипсу.

761. Через фокус F_1 проведена хорда эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, параллельная канонической оси Oy. Определить длину этой хорды.

762. Хорда, проведенная через фокус F_1 параллельно оси Oy, пересекает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках M_1 и M_2. Определить расстояние от точек M_1 и M_2 до фокуса F_2.

763. а) Найти координаты точек M, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и равноудаленных от фокусов.

б) Найти координаты точек M, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и удовлетворяющих условию $2MF_1 = MF_2$.

764. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) вершина эллипса имеет координаты A_1 (6, 0), A_2 (—6, 0), B_1 (0, 3), B_2 (0, —3);

б) фокальное расстояние $2c = 10$, а малая полуось $b = 5$;

в) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, большая полуось $a = 3$;

г) эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{5}}$, а малая полуось $b = 2$;

д) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

765. Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если:

а) эллипс проходит через точки $M_1\left(2, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ и $M_2(-3, 0)$;

б) эллипс проходит через точки $M_1(1, 3)$, $M_2(4, 1)$;

в) эллипс проходит через точку $M\left(-3, \frac{7}{4}\right)$ и расстояние между фокусами $2c = 6$;

г) эллипс проходит через точку $M\left(-2, \frac{11}{\sqrt{15}}\right)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

766. Написать уравнение директрис эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ и найти расстояние между ними.

767. Составить уравнение эллипса, если:

а) расстояние между директрисами равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$;

б) расстояние между директрисами равно $\frac{72}{\sqrt{11}}$, а между фокусами $2\sqrt{11}$;

в) расстояние между директрисами равно $4\sqrt{15}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) прямые $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ служат директрисами эллипса, а малая полуось равна 2.

768. Доказать, что для координат x, y всех точек плоскости, лежащих внутри эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеет место неравенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, а для координат всех точек, лежащих вне эллипса, — неравенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$.

769. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ в канонической системе координат. Определить, какие из точек $M_1(3, 5)$, $M_2(-1, 2)$, $M_3(0, 3)$, $M_4(2, 2)$, $M_5(-3, 1)$, $M_6(1, 3)$, $M_7(\sqrt{5}, 4)$, $M_8\left(1, \sqrt{\frac{42}{5}}\right)$, $M_9(5, 2)$, $M_{10}(1, 1)$: а) принадлежат эллипсу; б) лежат внутри эллипса; в) лежат вне эллипса.

770. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 225 < 0, \\ 3x + 5y - 15 < 0, \\ y + 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0, \\ y + 3 > 0, \\ x + y - 2 < 0. \end{cases}$

771. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{1}{3}$, а расстояние от точки M до директрисы равно 12. Вычислить расстояние от точки M до соответствующего фокуса.

772. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Найти фокальные радиусы точек $M_1\,(3,\ -\sqrt{15})$ и $M_2\left(-2,\ \frac{4}{3}\sqrt{10}\right)$, принадлежащих данному эллипсу[1].

773. Пусть ε — эксцентриситет эллипса, а m — расстояние от фокуса до одноименной директрисы. Выразить a, b и c через ε и m.

774. Даны точка F, прямая l, не проходящая через эту точку, и число $\varepsilon < 1$. Доказать, что существует один и только один эллипс, для которого F и l являются односторонними фокусами и директрисой, а ε — эксцентриситетом.

775. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Вычислить расстояния от концов большой оси до одной из директрис.

776. Составить уравнение прямой, касающейся эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$$

в точке $(\sqrt{5},\ 2)$.

777. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C\,(10,\ -8)$ и касающейся эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

778. Найти уравнения тех касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1,$$

которые параллельны прямой $x+y-4=0$.

779. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P\,(1,\ -1)$, на которой эллипс

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

отсекает хорду, делящуюся точкой P пополам.

780. Вычислить длины полуосей и расстояние между фокусами эллипса, заданного в полярной системе координат уравнением

$$\rho=\frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}.$$

Предполагается, что за полюс принят один из фокусов F_1 эллипса, а за полярную ось — направленная прямая F_1F_2, где F_2 — другой фокус эллипса.

---

[1] Фокальными радиусами точки M эллипса называются длины отрезков F_1M и F_2M, где F_1 и F_2 — фокусы.

781. Написать канонические уравнения эллипсов, которые заданы полярными уравнениями:

$$а)\ \rho = \frac{3}{4 - \sqrt{13}\cos\varphi}; \qquad б)\ \rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}.$$

Полярная система выбрана так, как и в предыдущей задаче.

782. Даны эллипсы:

$$а)\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1; \qquad б)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Написать уравнения этих эллипсов в полярной системе координат, полюс которой находится в одном из фокусов эллипса, а полярная ось направлена в сторону второго фокуса.

2. Некоторые геометрические свойства эллипса

783. Найти множество точек, из которых эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

виден под прямым углом.

784. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу равно квадрату малой полуоси.

785. Доказать, что отрезок касательной к эллипсу в любой точке, заключенный между касательными, проведенными в вершинах, лежащих на большой оси, виден из фокусов под прямым углом.

786. Доказать оптическое свойство эллипса: всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки прикосновения.

787. Доказать, что окружность, диаметром которой является фокальный радиус любой точки эллипса, касается окружности, построенной на большой оси эллипса, как на диаметре.

788. Прямоугольный треугольник OMM' с переменными вершинами M и M' расположен так, что две его вершины M и M' принадлежат данному эллипсу, а вершина прямого угла O совпадает с его центром. Доказать следующие предложения:

а) $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2}$ есть величина постоянная, равная $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$;

б) хорды MM' касаются окружности радиуса $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ с центром в точке O.

789. Произвольная прямая l пучка с центром в фокусе F_1 эллипса пересекает его в двух точках M и M'. Доказать, что $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ не зависит от выбора прямой l и равна $\frac{2a}{b^2}$. Для какой прямой пучка отрезок MM' имеет минимальную длину?

790. Произвольная прямая m пучка с центром в фокусе эллипса пересекает его в двух точках M и M', а перпендикулярная ей прямая n пучка — в точках N и N'. Доказать, что соотношение $\frac{1}{MM'} + \frac{1}{NN'}$ не зависит от выбора прямой m и равно $\frac{a^2+b^2}{2ab^2}$.

§ 31. Гипербола

1. Определение гиперболы и ее простейшие свойства

791. Написать уравнение множества точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек F_1 (4, 0) и F_2 (—4, 0) равен 6.

792. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол:

а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; в) $x^2 - y^2 - 5 = 0$;
б) $25x^2 - 16y^2 - 1 = 0$; г) $10x^2 - 2y^2 - 10 = 0$.

793. Найти площадь S прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а две стороны проходят через фокусы параллельно оси Oy. Вычислить S для случая, когда $a^2 = 20$ и $b^2 = 10$.

794. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку $(6, 2\sqrt{3})$;

в) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

795. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис следующих гипербол: а) $4x^2 - 9y^2 = 36$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

796. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) гипербола проходит через точки (4, 0) и $(4\sqrt{17}, 4)$;

б) гипербола проходит через точку (—5, 3) и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) гипербола имеет асимптоты $4y \pm 3x = 0$ и директрисы $5x \pm \pm 16 = 0$;

г) гипербола является равнобочной и проходит через точку $(\sqrt{2}, 1)$.

797. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) угол между асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку M_1 $(4\sqrt{3}, 2)$;

б) угол между асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку M_2 (6, 3).

798. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку $M\ (4\sqrt{2},\ 3)$.

799. Для равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через точку $M\ (4,\ \sqrt{2})$.

800. Дана гипербола $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы; найти эксцентриситеты, директрисы и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

801. По данному эксцентриситету в каждом из следующих случаев определить угол между асимптотами гиперболы: а) $\varepsilon=\sqrt{2}$; б) $\varepsilon=2$; в) $\varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

802. Точка M называется внутренней точкой гиперболы, если любая секущая, проходящая через эту точку и не параллельная асимптотам, пересекает гиперболу в двух различных точках; внешней точкой гиперболы называется точка, не лежащая на гиперболе и не являющаяся внутренней. Доказать, что точка $M\ (x,\ y)$ является внутренней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1>0$; точка $N\ (x,\ y)$ является внешней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1<0$.

803. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0, \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0. \end{cases}$

804. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке $(5,\ 1)$.

805. Найти необходимое и достаточное условие касания данной прямой $y=kx+x_0$ и гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если прямая не параллельна асимптотам гиперболы.

806. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax+By+C=0$ и гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если данная прямая не параллельна асимптотам гиперболы.

807. Написать уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{12}-y^2=1$, составляющих с осью Ox углы, равные $\pm 30°$. Для каждой из касательных найти точку касания.

808. Доказать, что касательные в вершинах гиперболы, заданной каноническим уравнением, параллельны оси Oy.

809. Дана гипербола своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Доказать, что если угловой коэффициент прямой удовлетворяет неравенствам $-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}$, то прямая не может касаться гиперболы.

810. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(4, \sqrt{2}, 2)$ и касающейся прямой $\sqrt{2}x-2y-4=0$.

2. Некоторые геометрические свойства гиперболы

811. Найти множество точек, из которых гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ видна под прямым углом.

812. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к гиперболе есть величина постоянная, равная b^2, где b — мнимая полуось.

813. Доказать, что отрезок асимптоты, заключенный между центром гиперболы и директрисой, равен действительной полуоси. Используя это свойство, построить директрисы следующих гипербол:

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$.

814. Доказать, что директрисы гиперболы проходят через основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих фокусов на асимптоты. Выразить расстояние d от фокусов гиперболы до асимптот через полуоси гиперболы.

815. Пусть N — переменная точка данной гиперболы, O — ее центр, а F — один из фокусов. Найти множество всех точек, каждая из которых является пересечением прямой ON с перпендикуляром, опущенным из фокуса F на касательную к гиперболе в точке N.

816. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке соприкосновения пополам.

817. Доказать оптическое свойство гиперболы: касательная к гиперболе в произвольной точке M есть биссектриса угла F_1MF_2, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы.

818. Доказать, что площадь неориентированного треугольника, образованного асимптотами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и произвольной касательной к гиперболе, есть величина постоянная, равная ab.

819. Доказать, что касательные, проведенные из фокусов гиперболы к окружности, построенной на действительной оси, как на диаметре, пересекают асимптоты в точках касания.

820. Найти множество всех точек, каждая из которых симметрична фокусу F_1 гиперболы относительно некоторой касательной.

821. Доказать, что окружность, диаметром которой служит фокальный радиус любой точки гиперболы, касается окружности, построенной на действительной оси гиперболы, как на диаметре.

§ 32. Парабола

1. Определение и основные свойства параболы

822. Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = -4y$; в) $y^2 = -2x$;
г) $x^2 = 3y$; д) $2x^2 - 3y = 0$; е) $3y^2 + 16x = 0$.

823. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев: а) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ox, до вершины равно 4; б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку M (1, 2); в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку M (5, 1).

824. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

а) фокус имеет координаты (3, 0);
б) фокус имеет координаты (0, 5);
в) директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$;
г) директриса имеет уравнение $y + 12 = 0$.

825. Вычислить фокальный радиус[1] FM точки M параболы $y^2 = 8x$, если ее абсцисса равна 8. Здесь F — фокус параболы.

826. На параболе $x^2 = -12y$ найти точку, фокальный радиус которой равен 9 (см. задачу 825).

827. Под острым углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, упал на расстоянии 24 *м* от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 *м*.

828. Определить площадь неориентированного треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2 = 2px$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси Ox.

829. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром p, в предположении, что точка A совпадает с вершиной параболы.

830. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p, если одна вершина совпадает с вершиной параболы, а ортоцентр — с фокусом.

831. В каждом из следующих случаев составить каноническое уравнение параболы, заданной в полярной системе координат:

$$\text{а) } \rho = \frac{8}{2 - 2\cos\varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{7}{1 - \cos\varphi}.$$

---

[1] Фокальным радиусом точки M параболы называется длина отрезка FM, где F — фокус.

Предполагается, что за полюс принят фокус параболы, а за полярную ось — ось симметрии, направленная от директрисы к фокусу.

832. Написать уравнения парабол: а) $y^2 = 2x$; б) $y^2 = 10x$ в полярной системе координат, если полюс совпадает с фокусом параболы, а полярная ось — с осью Ox.

833. Написать уравнение прямой, проходящей через точку P (3, 1), на которой парабола $y^2 = 4x$ отсекает хорду, серединой которой служит точка P.

834. Найти множество середин всех хорд параболы $y^2 = 2px$, имеющих угловой коэффициент $k \neq 0$.

835. Доказать предложение: если прямая $y = kx + x_0$ не параллельна оси Ox, то, для того чтобы она была касательной к параболе $y^2 = 2px$, необходимо и достаточно, чтобы $p - 2kx_0 = 0$.

836. Доказать предложение: если прямая $Ax + By + C = 0$ не параллельна оси Ox, то, для того чтобы она была касательной к параболе $y^2 = 2px$, необходимо и достаточно, чтобы $B^2p - 2AC = 0$.

837. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$ в точке (2, —4).

838. Написать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k \neq 0$ и касающейся параболы $y^2 = 2px$.

839. Написать уравнения прямых, имеющих угловые коэффициенты: а) $k_1 = \frac{1}{2}$; б) $k_2 = -3$; в) $k_3 = 1$ и касающихся параболы $y^2 = 5x^2$.

840. Точка M называется внутренней точкой параболы, если любая прямая, проходящая через точку M, не параллельная оси параболы, пересекает параболу в двух точках. Доказать, что точка M (x, y) является внутренней точкой параболы $y^2 = 2px$ тогда и только тогда, когда $y^2 - 2px < 0$.

841. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} y^2 - 10x < 0, \\ 5x - 3y - 15 < 0, \\ y - 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 8y < 0, \\ 2x + 3y + 6 < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$

842. Найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.

2. Некоторые геометрические свойства параболы

843. Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на все ее касательные.

844. Найти множество всех точек, каждая из которых симметрична фокусу F параболы относительно некоторой касательной.

845. Найти множество точек, из которых парабола $y^2 = 2px$ видна под прямым углом.

846. Если из любой точки директрисы проведены к параболе две касательные, то прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус параболы. Доказать.

847. Доказать оптическое свойство параболы: всякая касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом точки и с лучом, проходящим через точку касания и сонаправленным с осью.

848. Если три прямые: l_1, l_2 и l_3 — попарно пересекающиеся в точках A_1, A_2 и A_3, касаются параболы, то ортоцентр треугольника $A_1A_2A_3$ лежит на директрисе данной параболы. Доказать.

849. Если AB — хорда конического сечения, проходящая через фокус F, то число $\frac{FA \cdot FB}{AB}$ не зависит от выбора хорды. Доказать.

850. Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из концов любой фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус) на ось параболы, имеет постоянную величину.

851. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

852. Из точки P, принадлежащей внешней области параболы с фокусом в точке F, проведены две прямые, касающиеся ее в точках M и M'. Доказать, что:

а) луч FP является биссектрисой угла MFM';

б) биссектрисой угла MPM' является также биссектриса угла, образованного прямой PF и прямой, проведенной через точку P параллельно оси параболы.

853. Пусть в точке M, не совпадающей с вершиной параболы, проведены касательная t и нормаль n, пересекающие ось Ox соответственно в точках T и N. Пусть, далее, H — проекция точки M на ось Ox. Доказать, что: а) вершина параболы является серединой отрезка HT; б) длина отрезка HN не зависит от положения точки M на параболе и равна параметру параболы.

§ 33. Некоторые множества точек, определяющие эллипс, гиперболу и параболу

854. Отрезок постоянной длины r скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M, которая делит отрезок в отношении λ. Найти траекторию, которую описывает точка M.

855. Дана окружность Ω с центром в точке O и радиусом r и прямая l, проходящая через точку O. Отрезок постоянной длины r, равный радиусу окружности, скользит своими концами A и B соответственно по прямой l и окружности Ω так, что при любом положении отрезка AB, не перпендикулярного l, направления векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$ не совпадают. Найти траекторию, которую описывает точка M, делящая отрезок AB в постоянном отношении λ.

856. Через центр O двух концентрических окружностей проведены две взаимно перпендикулярные прямые l и m. Луч p, исходящий из точки O, пересекает окружности в точках A и B. Через точку A проведена прямая l', параллельная прямой l, а через точку B — прямая m', параллельная прямой m. Найти множество точек пересечения прямых l' и m'.

857. Прямая a перемещается так, что треугольник, образованный ею с двумя взаимно перпендикулярными прямыми l и m, сохраняет постоянную площадь δ. Найти множество точек, делящих в данном отношении λ отрезок, отсекаемый на прямой a прямыми l и m.

858. Найти множество точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух пересекающихся прямых есть величина постоянная.

859. Найти множество центров окружностей, отсекающих от двух взаимно перпендикулярных прямых отрезки, длины которых равны $2a$ и $2b$.

860. Два луча, исходящие соответственно из неподвижных точек A и B и пересекающиеся в точке M, вращаются так, что абсолютная величина разности углов при вершинах A и B в треугольнике AMB равна $\frac{\pi}{2}$. Найти множество точек M.

861. Найти множество центров всех окружностей, проходящих через данную точку A и касающихся данной прямой l.

862. Найти множество центров всех окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, лежащую внутри данной окружности.

863. Определить множество центров всех окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, лежащую вне данной окружности.

864. Найти множество точек M, для каждой из которых разность расстояний до данной точки A и до данной прямой l равна a, где a — постоянное положительное число.

865. Составить уравнение множества точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний до фиксированной точки A и фиксированной прямой l есть величина постоянная, равная k^2.

866. Даны прямая l, точка A, не лежащая на ней, и положительное число a. Найти множество центров всех окружностей, описанных вокруг треугольников APQ, где P и Q — две любые точки прямой l, удовлетворяющие условию $PQ = a$.

867. Найти множество точек M, для каждой из которых сумма расстояний до данной точки A и до данной прямой l равна a. Здесь a — постоянное положительное число.

868. Дана прямая l и окружность Ω, которая касается прямой l в точке A. Найти множество центров окружностей, касающихся прямой l и окружности Ω.

869. Дана прямая l и окружность Ω, которая не касается прямой l. Найти множество центров окружностей, касающихся прямой l и окружности Ω.

870. Найти множество центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, из которых одна расположена внутри другой.

871. Составить уравнения множества центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, из которых каждая расположена вне другой.

872. На прямой l даны три точки A, B и C, где B лежит между A и C. Найти множество точек пересечения касательных, проведенных из точек A и C к окружностям, касающимся прямой l в точке B.

873. Даны прямая l, на ней точка A и числа a и b, причем $a > b > 0$. Рассмотрим всевозможные точки P и Q, для которых $AP = a$, $AQ = b$ и прямая l является биссектрисой $\angle PAQ$. Найти множество точек M, удовлетворяющих условию $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.

Глава VII

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ОБЩИМ УРАВНЕНИЯМ

§ 34. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

1. Упрощение уравнения кривой путем поворота системы координат

С помощью преобразования поворота прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка. Написать формулы преобразования и изобразить данные кривые на чертеже.

874. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

875. $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0$.

876. $23x^2 + 72xy + 2y^2 + 25 = 0$.

877. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$.

878. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0$.

879. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16 = 0$.

880. $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 25 = 0$.

881. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.

882. $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0$.

883. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

884. $-17x^2 + 2\sqrt{35}xy + 17y^2 = 0$.

885. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4 = 0$.

2. Упрощение уравнения кривой путем переноса начала координат

С помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка. Написать формулы преобразования координат и изобразить данные кривые на чертеже.

886. $2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0.$

887. $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0.$

888. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0.$

889. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0.$

890. $x^2 - \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y - 1 = 0.$

891. $y^2 - 2x - 10 = 0.$

892. $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0.$

893. $x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 23 = 0.$

894. $x^2 - 10x + 26 = 0.$

895. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0.$

896. $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0.$

897. $x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{3}x + 20y - 47 = 0.$

898. $x^2 - y^2 - 20y - 105 = 0.$

3. Приведение уравнения кривой к каноническому виду

С помощью преобразования поворота прямоугольной декартовой системы координат и переноса начала привести к каноническому виду следующие ниже уравнения кривых и написать формулы преобразования координат.

899. $29x^2 + 144xy + 71y^2 - 40x + 30y - 50 = 0.$

900. $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0.$

901. $xy + 2x + y + \frac{5}{2} = 0.$

902. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

903. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0.$

904. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 + 2xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$

905. $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0.$

906. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0.$

907. $25x^2 + 40y^2 + 36xy - 34x - 116y + 89 = 0.$

908. $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 66y - 88x + 121 = 0.$

909. $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 39 = 0.$

§ 35. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Асимптотические направления и асимптоты

Если кривая в общей декартовой системе координат задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 20_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

то ненулевой вектор $\{p_1, p_2\}$, координаты которого удовлетворяют уравнению

$$a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0, \qquad (2)$$

называется вектором асимптотического направления. Если $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 < 0$, то кривая имеет два асимптотических направления; при $I_2 = 0$ — одно асимптотическое направление, а при $I_2 > 0$ действительных асимптотических направлений нет.

Прямая, содержащая вектор асимптотического направления, называется прямой асимптотического направления. Прямая асимптотического направления называется асимптотой, если она либо вовсе не пересекается с кривой, либо всеми точками принадлежит ей. Если вектор $\boldsymbol{p}$ $\{p_1, p_2\}$ имеет асимптотическое направление, то точки асимптот, параллельных $\boldsymbol{p}$, определяются уравнением

$$p_1 (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2 (a_{21} + a_{22}y + a_{23}) = 0. \qquad (3)$$

1. Пересечение кривой с прямой. Касательная

910. Найти точки пересечения кривой[1] $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ с прямыми:

а) $x = t$, $y = 5t - 5$; б) $x = 3t + 6$, $y = t + 2$.

911. Найти точки пересечения кривой второго порядка $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0$ в случаях: а) с прямой $x + y - 2 = 0$; б) с осью Ox; в) с осью Oy.

912. Через точку (1, 0) провести касательные к кривой

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0.$$

913. Через начало координат провести касательные к кривой

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 6y + 16 = 0.$$

914. К кривой $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$ провести касательные, параллельные прямой $x - 2y + 7 = 0$.

2. Асимптотические направления. Асимптоты

915. Найти векторы асимптотического направления для следующих кривых второго порядка:

а) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$;
д) $y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$;

---

[1] Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается общей декартовой.

е) $4x^2 - 3xy - y^2 - x - 2y + 1 = 0$.

916. Написать уравнения асимптот следующих кривых второго порядка:

а) $2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0$;
б) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;
в) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
г) $2x^2 + xy + y^2 + 11x - 4y + 5 = 0$;
д) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.

917. Пусть кривая в общей декартовой системе координат дана уравнением (1), стр. 116, коэффициенты которого удовлетворяют условиям $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, где

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказать, что если координаты вектора $p\,\{p_1, p_2\}$ удовлетворяют условиям $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$, то прямая, содержащая этот вектор, является асимптотой кривой.

918. Назвать кривые второго порядка, имеющие:

а) два асимптотических направления и две асимптоты;

б) одно асимптотическое направление и бесчисленное множество асимптот;

в) одно асимптотическое направление и ни одной асимптоты.

919. Кривая задана общим уравнением (1), стр. 116. При каком условии: а) ось Ox имеет асимптотическое направление относительно данной кривой; б) ось Ox является асимптотой данной кривой; в) оси координат являются асимптотами кривой?

920. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(0, -5)$ и имеющей асимптоты $x - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

921. Написать уравнение кривой второго порядка, для которой оси координат являются асимптотами и которая: а) проходит через начало координат; б) проходит через точку $(1, 2)$.

§ 36. Диаметр и центр кривой второго порядка

1. Диаметр кривой второго порядка

922. Для кривой $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ определить диаметры, сопряженные вектором: а) $\boldsymbol{p}_1\,\{1, 2\}$; б) $\boldsymbol{p}_2\,\{4, -2\}$; в) $\boldsymbol{p}_3\,\{2, -3\}$.

923. Для кривой $4x^2 - 6xy + y^2 - 8y + 1 = 0$ определить диаметр, проходящий через точку $(0, 1)$.

924. Найти диаметр кривой $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x + 2y - 7 = 0$: а) сопряженный оси Ox; б) сопряженный оси Oy.

925. Дана кривая второго порядка $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0$. Доказать, что прямая $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ является одним из диаметров кривой.

926. Ответить на следующие вопросы:

а) Для каких кривых все диаметры параллельны?

б) Для каких кривых все диаметры совпадают?

в) При каком условии ось Ox является одним из диаметров данной кривой, если кривая задана общим уравнением (1), стр. 116?

2. Центр кривой второго порядка

927. Найти центр для каждой из следующих кривых:

а) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;

в) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;

г) $3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$;

д) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;

е) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$.

928. Кривая задана уравнением (1), стр. 116. При каком условии она имеет хотя бы один центр, совпадающий с началом координат?

929. Доказать, что если кривая второго порядка имеет две непараллельные асимптоты, то их точка пересечения есть центр кривой.

930. Найти общий диаметр двух кривых второго порядка $4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y = 0$ и $x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 7 = 0$.

931. Найти уравнение диаметра кривой $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 5 = 0$, проходящего через точку $(2, 1)$.

932. При каком условии ось Ox является линией центров кривой второго порядка, заданной уравнением (1), стр. 116?

933. Доказать, что если кривая имеет линию центров, то она распадается на пару параллельных или слившихся прямых.

934. Доказать, что если центр M_0 кривой принадлежит этой кривой, то кривая является распадающейся.

935. Доказать, что если вершины параллелограмма лежат на кривой второго порядка, то центр параллелограмма является центром этой кривой.

936. Доказать, что не существует параллелограмма, вершины которого принадлежат некоторой параболе.

§ 37. Сопряженные направления. Главные направления и главные диаметры

1. Сопряженные направления и сопряженные диаметры

937. Направления двух ненулевых векторов $\boldsymbol{p}\ \{p_1, p_2\}$ и $\boldsymbol{q}\ \{q_1, q_2\}$ называются сопряженными относительно кривой второго порядка (1), стр. 116, если координаты векторов удовлетворяют условию

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Дана кривая второго порядка $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$ и векторы $\boldsymbol{a}_1\ \{1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\ \{2, 3\}$, $\boldsymbol{a}_3\ \{-1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_4\ \{2, 0\}$. Определить векторы $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$, $\boldsymbol{a}_3'$ и $\boldsymbol{a}_4'$, сопряженные соответственно векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$.

938. Найти направление хорд, сопряженных диаметру $2x + y - 3 = 0$ относительно кривой $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.

939. Написать уравнения двух сопряженных диаметров кривой $xy - y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$, один из которых параллелен оси Oy.

940. Составить уравнения двух сопряженных диаметров кривой $x^2 - 6xy + 2y^2 - 6x - 7 = 0$, один из которых параллелен прямой $x - 4y + 5 = 0$.

941. Найти два сопряженных диаметра кривой $x^2 - 8xy - 6x - 2y + 5 = 0$, один из которых проходит через точку $(-1, -2)$.

942. Определить зависимость между угловыми коэффициентами сопряженных направлений (см. задачу 937):

а) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

943. Найти уравнения и длины двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, один из которых проходит через точку $(3, 1)$.

944. Составить уравнения двух сопряженных диаметров гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1$, угол между которыми равен $45°$.

945. Написать уравнение диаметра параболы $y^2 = 4x$, проходящего через середину хорды, отсекаемой параболой на прямой $4x + 3y - 12 = 0$.

2. Главные направления и главные диаметры

946. Найти главные направления следующих кривых второго порядка, заданных в прямоугольной декартовой системе координат:

а) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$;
б) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
в) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;
г) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$;
д) $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y = 0$.

947. Определить оси линий второго порядка, заданных в предыдущей задаче.

948. При каком условии все направления являются главными относительно данной кривой второго порядка, заданной уравнением (1), стр. 116, в прямоугольной декартовой системе?

949. Кривая дана в прямоугольной декартовой системе уравнением (1), стр. 116. Сформулировать условия, при которых: а) ось Ox является главным диаметром; б) начало координат лежит на главном диаметре.

950. Найти главные диаметры: а) пары пересекающихся прямых; б) пары параллельных прямых.

951. Доказать теорему: для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\ \{p_1,\ p_2\}$ был вектором и главного и асимптотического направлений относительно кривой (1), стр. 116, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения: $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$.

952. Найти все кривые второго порядка, имеющие векторы одновременно главного и асимптотического направлений.

953. Найти оси следующих парабол:

а) $4x^2 + 8xy + 4y^2 + 10x + 2y - 11 = 0$;

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$;

в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$;

г) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 2y - 7 = 0$.

954. Для каких кривых асимптота одновременно является главным диаметром?

955. Доказать теорему: для того чтобы кривая (1), стр. 116, была параболой с вершиной в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения удовлетворяли условиям:

а) $a_{23}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, $a_{33} = 0$;

б) ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{13} \end{pmatrix}$ равен единице.

§ 38. Определение вида кривой в общей декартовой системе координат

956. Используя понятие асимптотических направлений, показать, что кривая $x^2 - x + y = 0$ не эллипс и не гипербола, а кривая $xy + x + 1 = 0$ не парабола и не эллипс.

957. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная уравнением (1), стр. 116, была распадающейся, необходимо и достаточно, чтобы $I_3 = 0$ (см. задачу 917).

958. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная уравнением (1), стр. 116, была гиперболой, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$ (см. задачу 917).

959. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная уравнением (1), стр. 116, была параболой, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$ (см. задачу 917).

960. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная уравнением (1), стр. 116, распадалась на две параллельные или слившиеся прямые, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 = I_3 = 0$ (см. задачу 917).

961. Кривая, заданная в общей декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 = 1$, является эллипсом. Доказать.

962. Доказать, что кривая, заданная в общей декартовой системе координат уравнением $x^2 - y^2 = 1$, является гиперболой.

963. Доказать, что кривая, заданная в общей декартовой системе координат уравнением $y^2 = 2px$, является параболой.

964. Показать, что каждая из следующих кривых распадается на пару прямых. Написать уравнения этих прямых:

а) $2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2 = 0$;

б) $2x^2 + 2xy + 3x - 2y - 5 = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$;

г) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x - 18y = 0$;

д) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y - 10 = 0$.

965. Используя критерии, сформулированные в задачах 957—960, определить вид следующих кривых, заданных в общей декартовой системе координат:

а) $9x^2 - 14xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;

б) $y^2 - 6y + 4x + 5 = 0$;

в) $12xy + 5y^2 - 12x - 22y + 19 = 0$;

г) $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$.

§ 39. Аффинные преобразования кривых второго порядка

966. Доказать, что при любом аффинном преобразовании: а) эллипс переходит в эллипс; б) гипербола переходит в гиперболу; в) парабола переходит в параболу.

967. Убедиться в том, что любые два эллипса аффинно эквивалентны.

968. Доказать, что любые две гиперболы аффинно эквивалентны.

969. Доказать, что не существует аффинного преобразования, которое: а) эллипс переводит в гиперболу; б) эллипс переводит в параболу; в) гиперболу переводит в параболу.

970. Пусть кривая второго порядка Γ при данном аффинном преобразовании переходит в кривую Γ'. Доказать, что:

а) если C — центр кривой Γ, то образ C' точки C является центром кривой Γ';

б) если d — диаметр кривой Γ, то образ d' прямой d является диаметром кривой Γ';

в) если l — асимптота кривой Γ, то образ l' прямой l является асимптотой кривой Γ'.

971. Доказать, что если у двух эллипсов (гипербол) полуоси пропорциональны, то эти эллипсы (гиперболы) подобны.

972. Доказать следующие предложения: а) если у двух эллипсов эксцентриситеты равны, то эти эллипсы подобны; б) если у двух гипербол эксцентриситеты равны, то эти гиперболы подобны.

973. Доказать, что любые две параболы подобны.

974. Эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Записать общий вид аффинного преобразования, которое данный эллипс преобразует в тот же эллипс. Показать, что множество всех преобразований, переводящих данный эллипс в себя, образует подгруппу группы аффинных преобразований.

975. Гипербола задана каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Записать общий вид аффинного преобразования, которое данную гиперболу переводит в ту же гиперболу. Показать, что множество всех этих преобразований образует подгруппу группы аффинных преобразований.

976. Парабола задана каноническим уравнением. Записать общий вид аффинного преобразования, которое данную параболу переводит в себя. Показать, что множество всех этих преобразований, образует подгруппу группы аффинных преобразований.

977. Найти все преобразования подобия, которые данный эллипс (гиперболу) с неравными осями переводят в себя. Образуют ли эти преобразования группу?

978. Парабола задана уравнением $y^2=2px$. Записать общий вид аффинного преобразования, которое данную параболу переводит в себя, вершину O оставляет неподвижной, а ось параболы переводит в ту же прямую. Показать, что множество этих преобразований образует подгруппу группы аффинных преобразований.

979. На эллипсе дана точка M_0. Найти множество середин всех хорд эллипса, один из концов которых совпадает с точкой M_0.

980. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти множество их середин.

981. Пусть d — прямая, содержащая бо́льшую ось эллипса. Доказать, что при сжатии к прямой d с коэффициентом $k<1$ данный эллипс преобразуется в новый эллипс. Выразить эксцентриситет ε' образа данного эллипса через ε исходного эллипса и коэффициент сжатия k; доказать, что $\varepsilon'>\varepsilon$.

982. Даны оси A_1A_2 и B_1B_2 эллипса $(A_1A_2>B_1B_2)$. Циркулем и линейкой построить касательные, проведенные из данной точки P к эллипсу.

983. Даны прямая l и оси эллипса A_1A_2 и B_1B_2 с центром в точке O пересечения отрезков A_1A_2 и B_1B_2. Пользуясь циркулем и линейкой, построить точки пересечения эллипса с прямой l.

Раздел второй

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ, ПЛОСКОСТИ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВЫХ И АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Глава VIII

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 40. Координаты точек. Решение простейших задач в координатах

1. Метод координат в пространстве[1]. Простейшие задачи

984. Вершины четырехугольника находятся в точках A (1, —3, —2), B (8, 0, —4), C (4, 8, —3), D (—3, 5, —1). Показать, что $ABCD$ — параллелограмм.

985. Даны три вершины параллелограмма A (2, 5, 4), B (0, 1, 0) и C (4, 1, 3). Найти координаты четвертой вершины D.

986. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин A (2, —1, 1), B (1, 3, 4), A_1 (4, 2, 0), D (6, 0, 1). Найти координаты остальных вершин.

987. Дана точка M (2, —1, 1). Определить координаты точек, симметричных с точкой M: а) относительно начала координат; б) относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz; в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

988. Даны координаты вершин треугольника ABC, а именно A (2, 3, —1), B (3, 0, —1), C (1, 1, 1). Определить координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC:

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz и Oyz;

в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

989. Даны тройки точек:

а) A_1 (3, 2, 1), B_1 (5, 3, —2), C_1 (1, 1, 4);

б) A_2 (1, —3, 5), B_2 (3, —1, 7), C_2 (0, 4, 3);

в) A_3 (—1, 0, 4), B_3 (2, 3, 1), C_3 (8, 9, —5);

г) A_4 (3, 0, —8), B_4 (1, 3, 4), C_4 (0, —2, 1).

---

[1] Во всех задачах данного параграфа, где нет специальных оговорок, предполагается, что выбрана общая декартова система координат.

Указать среди них тройки точек, лежащих на одной прямой.

990. Выяснить, какие из данных четверок точек лежат в одной плоскости:

а) $A_1\ (0,\ 0,\ -1)$, $B_1\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$, $C_1(0,\ 1,\ 2)$, $D_1(1,\ 1,\ 1)$;

б) $A_2\ (1,\ 7,\ 8)$, $B_2\ (3,\ 5,\ 6)$, $C_2\ (-1,\ 4,\ 4)$, $D_2\ (0,\ 7,\ 6)$;

в) $A_3\ (1,\ 1,\ 0)$, $B_3\ (-1,\ 2,\ -1)$, $C_3\ (0,\ -1,\ 0)$, $D_3\ (-3,\ -3,\ 2)$;

г) $A_4\ (1,\ 2,\ 2)$, $B_4\ (0,\ 3,\ 3)$, $C_4\ (2,\ -5,\ -1)$, $D_4\ (-1,\ -2,\ 2)$.

991. Даны четыре точки $A\ (2,\ 4,\ 3)$, $B\ (0,\ 0,\ 5)$, $C\ (4,\ 1,\ 6)$ и $D\ (-2,\ 3,\ 2)$. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

992. Найти:

а) расстояние между точками $A_1\ (1,\ 2,\ 3)$ и $A_2\ (1,\ -2,\ 0)$, $B_1\ (2,\ -3,\ 1)$ и $B_2\ (1,\ -3,\ 8)$, $C_1\ (-1,\ -1,\ 0)$ и $C_2\ (2,\ 3,\ \sqrt{5})$;

б) расстояние от начала координат до точек $M\ (1,\ -3,\ \sqrt{15})$, $N\ (0,\ 2,\ 3)$, $P\ (3,\ \sqrt{7},\ -3)$, $Q\ (1,\ -5,\ 6)$.

993. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A\ (3,\ 5,\ -4)$, $B\ (-1,\ 1,\ 2)$, $C\ (-5,\ -5,\ -2)$ является равнобедренным.

994. Доказать, что четырехугольник, вершины которого находятся в точках $A\ (7,\ 2,\ 4)$, $B\ (4,\ -4,\ 2)$, $C\ (6,\ -7,\ 8)$, $D\ (9,\ -1,\ 10)$, является квадратом.

995. Определить радиус сферы, проходящей через точку $(-2,\ 0,\ 2)$ и имеющей центр в точке $(1,\ 1,\ 6)$.

996. Даны вершины треугольника $A\ (2,\ -1,\ 4)$, $B\ (3,\ 2,\ -6)$, $C\ (-5,\ 0,\ 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

997. Даны четыре точки своими координатами: $M_1\ (0,\ 1,\ -1)$, $M_2\ (1,\ 0,\ 1)$, $M_3\ (-1,\ 1,\ 0)$, $M_4\ (1,\ -1,\ 1)$. Найти точку, одинаково удаленную от данных точек.

998. Найти координаты центра и радиус сферы, которая проходит через точки $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 2,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 3)$.

999. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_3\ (1,\ -1,\ 2)$ и $A_5\ (2,\ 1,\ -4)$, определить координаты остальных точек.

1000. На прямой, проходящей через точки $A\ (1,\ 0,\ 4)$ и $B\ (3,\ -1,\ 2)$, найти точку C такую, чтобы $AC = 3AB$ и точка B лежала между точками A и C.

1001. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB: $A\ (2,\ -1{,}7)$ и $B\ (4{,}5,\ -2)$.

2. Центр тяжести системы материальных точек

1002. Показать, что в общей декартовой системе координат координаты центра тяжести треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат вершин. Найти координаты центра тяжести следующих треугольников: а) A_1 (1, —3, 4), B_1 (2, —2, —1), C_1 (0, —1, 3); б) A_2 (7, 1, 4), B_2 (3, 0, 2), C_2 (2, 2, 1).

1003. Доказать, что координаты центра тяжести n материальных точек A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2), ..., A_n (x_n, y_n, z_n), в которых сосредоточены массы m_1, m_2, ..., m_n, определяются соотношениями[1]

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_ny_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + ... + m_nz_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Пользуясь полученной формулой, найти координаты центра тяжести системы материальных точек в каждом из следующих случаев:

а) A_1 (3, 0, 3), A_2 (—1, 2, 1), A_3 (2, 1, 4), A_4 (1, —2, —1); $m_1 = 10$ *г*, $m_2 = 15$ *г*, $m_3 = 30$ *г*, $m_4 = 25$ *г*;

б) A_1 (1, —1, 3), A_2 (0, 1, 4), A_3 (—3, 5, 2), A_4 (1, 0, 6), A_5 (0, 0, 0); $m_1 = 1$ *г*, $m_2 = 5$ *г*, $m_3 = 2$ *г*, $m_4 = 2$ *г*, $m_5 = 3$ *г*.

1004. Даны n точек своими координатами A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2),..., A_n (x_n, y_n, z_n). Определить координаты центроида этих точек (см. задачу 53).

1005. Доказать, что центр тяжести стрежневого правильного тетраэдра совпадает с центроидом вершин тетраэдра.

3. Формулы преобразования координат

1006. Написать формулы преобразования общей декартовой системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

а) e'_1 {1, 0, 0}, e'_2 {2, 4, 0}, $e'_3 \left\{-3, 1, \frac{1}{2}\right\}$, O' (0, 0, 0);

б) e'_1 {—1, 1, 0}, e'_2 {2, —1, 0}, e'_3 {0, 0, 5}, O' (5, 0, —2);

в) e'_1 {—1, 0, 0}, e'_2 {0, 1, 0}, e'_3 {0, 0, —1}, O' (1, 1, 2);

г) e'_1 {1, 0, 0}, e'_2 {0, 1, 0}, e'_3 {0, 0, 1}, O' (2, 5, —1);

д) e'_1 {1, 3, 0}, e'_2 {0, —3, 1}, e'_3 {1, 1, —2}, O' (0, 3, —1).

1007. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — некоторый куб, O — точка пересечения диагоналей. Написать формулы преобразования координат точек, если $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ — старая система, а $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ — новая система, где $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AA'}$, $\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}'_2 = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{e}'_3 = \overrightarrow{OC}$ (рис. 40).

1008. Дан тетраэдр $OABC$. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от общей декартовой системы O, $\mathbf{e}_1 =$

---
[1] Ср. с задачей 218.

$= \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OB}$, $e_3 = \overrightarrow{OC}$ к общей декартовой системе $O' = A$, $e'_1 = \overrightarrow{AO}$, $e'_2 = \overrightarrow{AB}$, $e'_3 = \overrightarrow{AC}$.

1009. Определить координаты новых векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x = x' - 3y' + z'$, $y = x' + y'$, $z = x' + 1$;

б) $x' = x + 1$, $y' = y - 3$, $z' = z$;

в) $x = x' - y' + z' + 1$, $y = -x' - y' + 2z' + 2$, $z = z' - 3$;

г) $x = y'$, $y = x'$, $z = x' + y' + z' + 1$;

д) $x = -x' + 1$, $y = -y' + 1$, $z = z' + 1$.

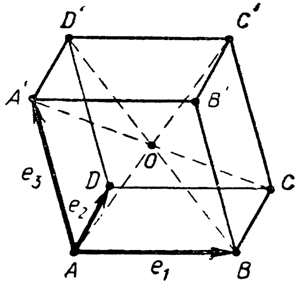


Рис. 40

1010. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной, равной a (рис. 40). Написать формулы преобразования при переходе от системы $A\boldsymbol{ijk}$ к системе $C'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$, если векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ направлены вдоль лучей AB, AD, AA', а векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — вдоль лучей $C'B'$, $C'C$, $C'D'$.

1011. Найти формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$, если начало новой системы совпадает с началом O старой системы, ось Oz' совпадает с осью Oz, лучи Ox' и Oy' являются соответственно биссектрисами углов xOz и yOz и новые координатные векторы являются единичными.

§ 41. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Векторное произведение[1]

1012. Преобразовать выражения: а) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})]$; б) $[(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})]$; в) $[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})]$.

1013. Определить координаты и модули векторов: а) $[\boldsymbol{ab}]$; б) $[\boldsymbol{ac}]$; в) $[\boldsymbol{bd}]$; г) $[\boldsymbol{da}]$; д) $[\boldsymbol{ad}]$; е) $[\boldsymbol{bc}]$, если $\boldsymbol{a}\,\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\,\{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{c}\,\{0, 5, -2\}$, $\boldsymbol{d}\,\{1, 2, -3\}$.

1014. Определить координаты векторов: а) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$; б) $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$, если $\boldsymbol{a}\,\{1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\,\{0, 3, 1\}$, $\boldsymbol{c}\,\{2, 0, 1\}$.

1015. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев: а) $A\,(2, 1, 0)$, $B\,(-3, -6, 4)$, $C\,(-2, 4, 1)$; б) $A\,(4, 2, 3)$, $B\,(5, 7, 0)$, $C\,(2, 8, -1)$; в) $A\,(6, 5, -1)$, $B\,(12, 1, 0)$, $C\,(1, 4, -5)$.

---

[1] Во всех задачах данного параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

1016. Найти расстояние от точки C (3, 2, —2) до прямой, проходящей через точки A (1, 2, —3) и B (5, 2, 0).

1017. Моментом приложенной к точке A силы $\boldsymbol{f}$ относительно точки B называется вектор $\boldsymbol{p} = [\overrightarrow{BA}\boldsymbol{f}]$. Определить момент силы $\boldsymbol{f}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{f}$ 2, —4, 3, A (1, 5, 0), B (0, 0, 0);

б) $\boldsymbol{f}$ 2, —4, 3, A (1, 5, 0), B (5, —3, 6);

в) $\boldsymbol{f}$ 3, 0, 1, A (5, 2, 6), B (4, 5, 2).

1018. Показать, что:

а) момент силы относительно точки не меняется, если точку приложения силы переместить по прямой, вдоль которой сила действует;

б) момент равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

1019. К каждой грани треугольной призмы восставлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону призмы и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю.

1020. К каждой грани произвольного тетраэдра восставлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону тетраэдра и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю.

2. Смешанное и векторное произведения

1021. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 5, стр. 8) репер $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеет левую ориентацию. Определить ориентацию реперов: а) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{C_1C}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$; в) $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$; г) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FA_1}$, где F — середина ребра AD.

1022. Вычислить произведения $\alpha = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\beta = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})$, $\gamma = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$, если $\boldsymbol{abc} = 5$.

1023. Найти смешанное произведение и определить ориентацию тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a}$ {2, —3, 1}, $\boldsymbol{b}$ {1, 1, 2}, $\boldsymbol{c}$ {3, 1, —1};

б) $\boldsymbol{a}$ {—2, 1, 5}, $\boldsymbol{b}$ {3, 0, 2}, $\boldsymbol{c}$ {—1, 4, 2};

в) $\boldsymbol{a}$ {1, —1, 1}, $\boldsymbol{b}$ {5, 2, —3}, $\boldsymbol{c}$ {1, 4, —2}.

1024. Вычислить $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}]$, если $\boldsymbol{a}$ {2, —3, 1}, $\boldsymbol{b}$ {1, 1, 2}, $\boldsymbol{c}$ {3, 1, —1}.

1025. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, а α, β, γ — произвольные числа. Доказать, что векторы $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{c}$, $\beta\boldsymbol{c} - \gamma\boldsymbol{a}$ компланарны.

1026. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — произвольные векторы. Проверить тождества:

а) $[\boldsymbol{ab}]^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$;
б) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] = 2[\boldsymbol{ab}]$;
в) $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$;
г) $[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$;
д) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] + [\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]] + [\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] = 0$.

1027. Доказать, что если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, то для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо соотношение $[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{abi})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{abj})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{abk})\,\boldsymbol{k}$.

1028. Если $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ — репер, состоящий из единичных векторов, и $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 > 0$, то репер $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3$, где

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]}{|[\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]|}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{[\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1]}{|[\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1]|}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]}{|[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]|},$$

называется полярным по отношению к исходному реперу. Доказать, что: а) $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3 > 0$; б) репер $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ является полярным по отношению к реперу $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3$.

1029. В обозначениях предыдущей задачи выразить скалярные произведения $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_1$ через скалярные произведения $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1$.

1030. Из вершин A_0 и A_1 тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ проведены прямые, параллельные вектору $\boldsymbol{p}$, которые пересекают противоположные грани соответственно в точках B_0 и B_1. Показать, что:

а) $\overrightarrow{A_0B_1} = \boldsymbol{a}_1 - \dfrac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}\,\boldsymbol{p}$;

б) $\overrightarrow{A_0B_0} = \dfrac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{p}$.

Здесь $\boldsymbol{a}_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 1, 2, 3$.

3. Геометрические приложения

1031. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках:

а) A (2, —1, —1), B (5, —1, 2), C (3, 0, —3), D (6, 0, —1);
б) A (0, 0, 0), B (3, 4, —1), C (2, 3, 5), D (6, 0, —3).

1032. Найти длину высоты AH тетраэдра $ABCD$, вершины которого находятся в точках A (2, —4, 5), B (—1, —3, 4), C (5, 5, —1), D (1, —2, 2).

1033. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ {4, 3, 0}, $\overrightarrow{AD}$ {2, 1, 2} и $\overrightarrow{AA'}$ {—3, —2, 5}. Найти: а) объем параллелепипеда; б) площади граней; в) длину высоты, проведенной из вершины A' на грань $ABCD$; г) косинус угла φ_1 между ребром AB и диагональю $B'D$; д) косинус угла φ_2 между гранями $ABCD$ и $ADD'A'$.

1034. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overrightarrow{AB}$ {0, 1, —1} и $\overrightarrow{AC}$ $\{2, -1, 4\}$ определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA'}$ $\{-3, 2, 2\}$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) площади граней; в) высоту; г) угол φ между ребрами $B'C'$ и AA'.

1035. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ $\{2, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AC}$ $\{3, 4, 0\}$ и $\overrightarrow{AD}$ $\{3, 4, 2\}$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h, проведенной из вершины D; г) косинус угла φ_1 между ребрами AB и BC; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC.

1036. Дан треугольник координатами своих вершин: A $(-1, 1, 2)$, B $(1, 1, 0)$, C $(2, 6, -2)$. Найти: а) площадь треугольника; б) косинусы внутренних углов; в) длину высоты BH и координаты вектора $\overrightarrow{BH}$; г) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; д) координаты центра тяжести треугольника.

1037. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: A $(2, -3, 1)$, B $(-1, 1, 1)$, C $(-4, 5, 6)$, D $(2, -3, 6)$. Доказать, что $ABCD$ — плоский выпуклый четырехугольник. Найти: а) площадь четырехугольника; б) косинусы его углов; в) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; г) вектор $\overrightarrow{BH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC; д) координаты центра тяжести четырехугольника.

4. Векторные уравнения

1038. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Всегда ли имеет решение уравнение $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$? В случае, когда уравнение имеет решение, выяснить его геометрический смысл.

1039. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений: а) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{a} = \alpha$, $[\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ при $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$; б) $\boldsymbol{x}\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} = 0$ при $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Написать условия разрешимости этой системы.

1040. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, а α — данное число. Всегда ли уравнение имеет решение? Выяснить геометрический смысл.

1041. Пусть $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$ при некотором $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. а) Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$, т. е. следует ли из предыдущего соотношения, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$? б) Ответить на тот же вопрос в предположении, что соотношение $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$ имеет место для любого вектора $\boldsymbol{c}$.

§ 42. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

1042. Доказать, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

1043. Если в неплоском шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны попарно параллельны, то диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать.

1044. В неплоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: а) середины двух противоположных сторон; б) середины двух других противоположных сторон; в) середины диагоналей. Доказать, что эти отрезки пересекаются в одной точке и каждый из них делится этой точкой пополам.

1045. Доказать, что во всяком неплоском четырехугольнике прямые, соединяющие середины смежных сторон, образуют параллелограмм.

1046. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB, AC, DB и DC разделены соответственно точками M, N, P и Q в одном и том же отношении λ. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм.

1047. Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через центры тяжестей треугольников A_1BD и B_1D_1C.

1048. Доказать, что две плоскости, проведенные через вершины A_1BD и CB_1D_1, делят диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на три равные части.

1049. Пусть ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, лежит на прямой, соединяющей вершину A с центром тяжести треугольника BCD.

1050. На сторонах AB, BC, CD, DA пространственного четырехугольника $ABCD$ выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что

$$\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{DC_1}{C_1C}=\lambda \quad \text{и} \quad \frac{AD_1}{D_1D}=\frac{BB_1}{B_1C}=\mu.$$

Доказать, что четырехугольник, образованный точками A_1, B_1, C_1, D_1, плоский.

1051. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка S на ребре AB. Доказать, что середины отрезков AD, BC, SD и SC лежат в одной плоскости.

1052. Вершина параллелепипеда и центры трех противоположных для данной вершины граней служат вершинами пирамиды. Используя свойства смешанного произведения векторов, выяснить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем этой пирамиды.

1053. Из вершины произвольного параллелепипеда проведены три диагонали прилежащих граней. Пользуясь свойствами смешанного произведения, установить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем пирамиды, боковыми ребрами которой служат эти диагонали.

1054 Дан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с медианами A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, где B_i — центроид грани, противоположной вершине A_i (см. задачу 175). Доказать, что существует пространственный четырехугольник $C_1C_2C_3C_4$, удовлетворяющий условиям

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{C_2C_3}=\overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{C_3C_4}=\overrightarrow{A_3B_3},\ \overrightarrow{C_4C_1}=\overrightarrow{A_4B_4}.$$

Вычислить отношение объема тетраэдра $C_1C_2C_3C_4$ к объему тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

1055. Дан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ и вектор $\boldsymbol{p}$, не параллельный ни одному из его ребер. Через каждую вершину A_i параллельно вектору $\boldsymbol{p}$ проводится прямая, которая пересекает плоскость противоположной грани в точке B_i. Доказать, что отношение объемов тетраэдров $B_1B_2B_3B_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ не зависит от выбора вектора $\boldsymbol{p}$.

Глава IX

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 43. Составление уравнения плоскости по различным заданиям

1. Задание плоскости в общей декартовой системе координат

1056. Определить координаты нескольких точек, лежащих в плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

1057. Определить координаты точки, имеющей абсциссу, равную единице, и расположенной в плоскостях Oxz и $2x - y + z - 6 = 0$.

1058. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A\ (2,\ 0,\ 3)$ и параллельной векторам $\boldsymbol{p}_1\ \{1,\ 0,\ 1\}$ и $\boldsymbol{p}_2\ \{2,\ 1,\ 3\}$;

б) проходящей через точку $A\ (0,\ 0,\ 1)$ и параллельной векторам $\boldsymbol{p}_1\ \{2,\ 1,\ 5\}$ и $\boldsymbol{p}_2\ \{1,\ 0,\ 1\}$.

1059. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1\ (1,\ 2,\ 3)$, $M_2\ (2,\ -1,\ 3)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\ \{1,\ 2,\ 2\}$;

б) проходящей через точки $M_1\ (-1,\ 0,\ 0)$, $M_2\ (0,\ 0,\ 1)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\ \{2,\ 1,\ 2\}$;

в) проходящей через ось Ox и точку $A\ (1,\ 1,\ 1)$.

1060. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1\ (1,\ 2,\ 3)$, $M_2\ (2,\ 1,\ 3)$ и $M_3\ (0,\ -1,\ 2)$;

б) проходящей через точки $M_1\ (0,\ 0,\ 0)$, $M_2\ (1,\ 2,\ 3)$ и $M_3\ (0,\ 3,\ 6)$.

1061. Дан тетраэдр $ABCD$. Приняв точку A за начало координат и полагая $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{AD}$, написать уравнения всех граней тетраэдра и плоскости ECD, где E — середина ребра AB.

1062. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четверки точек: а) $(3,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 2)$, $(-1,\ 0,\ -5)$, $(4,\ 1,\ 5)$; б) $(2,\ 1,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 2)$, $(0,\ 4,\ -2)$, $(3,\ 1,\ -2)$; в) $(0,\ 0,\ -1)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(5,\ 0,\ -3)$, $(4,\ 4,\ 1)$; г) $(0,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 0,\ 5)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(4,\ 1,\ 2)$.

1063. Даны вершины тетраэдра $A\ (4,\ 0,\ 2)$, $B\ (0,\ 5,\ 1)$, $C\ (4,\ -1,\ 3)$ и $D\ (3,\ -1,\ 5)$. Написать:

а) уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD;

б) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD.

1064. Найти точки пересечения каждой из следующих плоскостей с осями координат:

а) $2x - y + 3z - 6 = 0$; б) $5x + 2y + 5z - 10 = 0$;
в) $x - 2y + 4z + 4 = 0$; г) $x + y + z + 2 = 0$.

Построив на плоскости изображение некоторой общей декартовой пространственной системы координат, построить изображения точек пересечения указанных плоскостей с осями координат, построить изображения следов каждой из плоскостей.

1065. Указать особенности расположения следующих плоскостей по отношению к системе координат:

а) $x - z + 1 = 0$; г) $x + 2z = 0$; ж) $3y + 5 = 0$;
б) $x + 2y + 3z = 0$; д) $x - 3 = 0$; з) $2y - z = 0$;
в) $x - y + 2 = 0$; е) $y + z + 1 = 0$; и) $z = 0$.

Построив на плоскости изображение некоторой общей декартовой пространственной системы координат, построить изображения следов каждой из указанных выше плоскостей.

1066. Написать уравнения плоскостей:

а) проходящих через точку $M_0(1, 2, -1)$ и параллельных каждой из координатных плоскостей;

б) проходящих через две точки $M_1(1, 2, -4)$, $M_2(2, 0, -3)$ и параллельных каждой из координатных осей;

в) проходящих через точку $M(2, 1, -5)$ и через каждую из координатных осей.

1067. Составить уравнения плоскостей, каждая из которых проходит через одну из осей координат и параллельна вектору $\boldsymbol{p}\{1, -2, 3\}$.

1068. Написать «в отрезках» уравнения следующих плоскостей: а) $2x - y + 3z + 2 = 0$; б) $\frac{1}{2}x - 3y + z + 1 = 0$; в) плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(3, 1, 5)$ и $M_3(1, 2, 3)$.

1069. Плоскость проходит через точку $M(1, -2, 5)$ и отсекает на оси абсцисс направленный отрезок с длиной $a = |-3|$, а на оси аппликат отрезок $c = 1$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

1070. Написать уравнение плоскости:

а) параллельной оси Oz и отсекающей на оси Ox направленный отрезок длиной $a = 3$, а на оси Oy направленный отрезок длиной $b = |-4|$;

б) параллельной оси Ox и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки длиной $a = b = 4$.

1071. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3, 2, 4)$ и отсекает на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

1072. Пусть в некоторой общей декартовой системе координат дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Доказать теорему: для того чтобы данная плоскость была параллельна вектору $\boldsymbol{p}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

1073. Пользуясь предыдущей задачей, выяснить, какие из векторов $\boldsymbol{p}_1\{1, -3, 4\}$, $\boldsymbol{p}_2\{0, 6, 4\}$, $\boldsymbol{p}_3\{-1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{p}_4\{3, 0, 1\}$ параллельны плоскости $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

1074. В общей декартовой системе координат дана плоскость $2x - y + 3z + 5 = 0$. Определить:

а) координаты нескольких векторов, параллельных данной плоскости;

б) координаты нескольких векторов, параллельных одновременно данной плоскости и одной из координатных плоскостей.

2. Задание плоскости в прямоугольной декартовой системе координат

1075. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $M_0(2, 3 -1)$ и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}\ \{1, 2, -4\}$;

б) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}\ \{0, -3, 4\}$.

1076. Дан тетраэдр: $A(-1, 2, 5)$, $B(0, -4, 5)$, $C(-3, 2, 1)$ и $D(1, 2, 4)$. Написать уравнения трех плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных соответственно сторонам AB, BC и CA.

1077. Найти множество точек, равноудаленных от точек $A(2, -1, 3)$ и $B(4, 5, -3)$.

1078. Найти координаты нормальных векторов плоскостей:

а) $x + 2y - z + 1 = 0$;   в) $y + 1 = 0$;

б) $x - 3z + 5 = 0$;   г) $x - 3y + z + 4 = 0$.

1079. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, -1, 3)$, $B(1, 2, 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$.

1080. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$;

б) проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x + 3z = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.

1081. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2, -3, 6)$.

1082. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точке $M_0(0, 1, 3)$.

§ 44. Взаимное расположение плоскостей. Пучок плоскостей

1. Взаимное расположение плоскостей

1083. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

а) $x-3y+z+1=0$, $2x+y-4z+2=0$;
б) $3x+y-z+2=0$, $6x+2y-2z+3=0$;
в) $\sqrt{2}x-y+3z+\sqrt{2}=0$, $2x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}z+2=0$;
г) $x+y+z-1=0$, $x+y+z=0$.

1084. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной плоскости: а) $2x-4y+5z-3=0$; б) $2y-7z+6=0$; в) $3x+5=0$.

1085. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, —3,5) и параллельной плоскости: а) $3x-y+z+4=0$; б) $x-3y+7=0$; в) $3z-4=0$.

1086. Пусть в общей декартовой системе координат даны две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Доказать, что вектор

$$\boldsymbol{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$$

параллелен данным плоскостям и поэтому направлен вдоль их линии пересечения.

1087. Даны две пересекающиеся плоскости $x-3y+2z+1=0$, $2x-y+z=0$. Определить:

а) координаты некоторой точки, лежащей на линии пересечения данных плоскостей;

б) координаты вектора $\boldsymbol{p}$, параллельного этим плоскостям.

1088. Показать, что плоскости $2x-y+z-4=0$, $x+y-z-2=0$ и $2x-y+3z-6=0$ пересекаются в одной точке; найти ее координаты.

1089. Показать, что плоскости $x-y+z+1=0$, $2x-y-3z-2=0$ и $4x-3y-z=0$ пересекаются по одной прямой.

1090. Показать, что плоскости $x-y-z+4=0$, $3x-z+5=0$, $5x+y-z+1=0$ пересекаются по трем параллельным между собой прямым.

1091. Указать особенности в расположении плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $3x-y+\frac{1}{2}z-1=0$, $6x-2y+z+2=0$, $x+y-5z+3=0$;

б) $x+y-z+1=0$, $x+y-z=0$, $-x-y+z-1=0$;

в) $2x-y+3z-\frac{1}{2}=0$, $4x-2y+3z+1=0$, $-2x+y-3z+2=0$.

1092. Показать, что четыре плоскости $5x-z+3=0$, $3y+2z-1=0$, $22x+11y-44z+65=0$, $3x+4y+5z-3=0$ пересекаются в одной точке. Найти координаты этой точки.

1093. В общей декартовой системе координат даны три плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

При каких условиях, накладываемых на коэффициенты, эти плоскости пересекаются в одной и только в одной точке, лежащей в плоскости Oxy?

1094. В общей декартовой системе координат даны две пересекающиеся плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей пересекается с осью Oz?

1095. В общей декартовой системе координат даны две пересекающиеся плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей лежит в плоскости Oxy?

2. Пучок плоскостей.

1096. Плоскость π в прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением $x+y-z+1=0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения данной плоскости и плоскости Oxz и которая была бы перпендикулярна плоскости $x-3y+z=0$.

1097. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения граней трехгранного угла

$$4x+3y-5z+16=0,$$
$$3x-2y-4z+7=0,$$
$$x+4y-2z+5=0.$$

Написать уравнения трех плоскостей, каждая из которых проходит через некоторое ребро и перпендикулярна противолежащей грани.

1098. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ провести плоскость:

а) проходящую через начало координат;
б) проходящую через точку (1, 1, 1);
в) параллельную оси Oy.

1099. Написать уравнение плоскости[1], перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oyz.

1100. В пучке, определяемом плоскостями $2x - y + 5z - 3 = 0$ и $x + y + 2z + 1 = 0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку M (1, 0, 1).

1101. На плоскости Oxy дана прямая l, имеющая в этой плоскости уравнение $Ax + By + C = 0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку M_0 $(0, 0, z_0)$, где $z_0 \neq 0$.

§ 45. Геометрический смысл линейных неравенств с тремя неизвестными

1102. Даны точки M_1 (2, 5, 12), M_2 (1, 0, 0), M_3 (—1, —5, 4), M_4 (—14, 22, 0), M_5 (1, —5, 12), M_6 (0, 0, 5) и плоскости: а) $2x - y + z + 1 = 0$; б) $x - 2z + 12 = 0$; в) $x - 5y - 13z + 1 = 0$; г) $x + y + 4z - 1 = 0$; д) $x + 5y + z + 25 = 0$. Для каждой из данных плоскостей среди указанных точек выбрать те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

1103. Дана плоскость $3x - y + 4z + 1 = 0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по одну и ту же сторону от данной плоскости: а) 0 (0, 0, 0) и A (2, 1, 0); б) A_1 (1, 2, 1) и A_2 (5, 15, —1); в) B_1 (—1, 2, —5) и B_2 (—15, 1, 0); г) C_1 $(1, \sqrt{2}, 5)$ и C_2 (1, 15, —15).

1104. Даны вершины треугольника A (2, 5, —1), B (1, —5, —15), C (—2, 1, 3). Выяснить, какие из сторон треугольника пересекаются каждой из координатных плоскостей.

1105. Даны точки A (5, —1, 0), B (0, 1, 0) и C (2, 1, —2). Составить линейные неравенства, характеризующие то из полупространств, определяемых плоскостью ABC, которому принадлежит: а) начало координат; б) точка E (1, 1, 1).

1106. Даны параллельные плоскости $x - y + z + 1 = 0$ и $2x - 2y + 2z - 5 = 0$. Составить линейные неравенства, характеризующие область, точки которой расположены между ними.

1107. Две пересекающиеся плоскости $5x - y + z + 1 = 0$ и $x + y - 5z + 1 = 0$ делят множество всех точек пространства, не лежащих на них, на четыре двугранных угла (области). Составить систему неравенств, определяющих внутреннюю область двугранного угла, которому принадлежит точка (3, 1, 2).

1108. Доказать, что если в общей декартовой системе координат дана плоскость уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\boldsymbol{p}$ $\{A,$

[1] В задачах 1099—1100 система координат прямоугольная декартова.

B, $C\}$ не параллелен плоскости, и если его приложить к некоторой точке плоскости, то координаты x_1, y_1, z_1 его конца удовлетворяют условию $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 > 0$.

1109. Даны две параллельные плоскости $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $D_1 \neq D_2$. Записать линейные неравенства, характеризующие область Ω, расположенную между ними, и внешние области Ω_1 и Ω_2.

1110. Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные в прямоугольной декартовой системе уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Доказать, что внутренние области двух вертикальных двугранных острых углов, образованных этими плоскостями, характеризуются неравенством

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0,$$

а внутренние области двух вертикальных двугранных углов — неравенством

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) > 0.$$

1111. В прямоугольной декартовой системе даны две пересекающиеся плоскости $x - 5y + 4z + 1 = 0$ и $2x - y + z + 5 = 0$ и точки $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -10)$, $C(1, 0, -2)$, $D(2, 1, 0)$, $E(1, 1, 1)$. Выяснить, какие из точек принадлежат внутренним областям тупых двугранных углов, образованных данными плоскостями.

1112. Найти область, определяемую системой неравенств в каждом из следующих случаев:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 > 0, \\ 2x - y + z + 5 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 3z + 6 > 0, \\ 2x + y + z + 4 > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - z + 5 > 0, \\ 2x - 3y + z - 1 < 0, \\ 3x + y - z - 6 < 0. \end{cases}$

§ 46. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями

1113. Привести к нормальному виду уравнения плоскостей[1]:

а) $x - 2y + 2z - 12 = 0$; б) $2x - 3y + 5z - 5 = 0$;

в) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 3 = 0$; г) $12y - 5z + 39 = 0$;

д) $y + 2 = 0$; е) $2z - 5 = 0$.

---

[1] В задачах этого параграфа системы координат предполагаются прямоугольными декартовыми.

1114. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости: а) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$; б) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

1115. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1116. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(1, -2, 2)$, $2x + y + 2z - 7 = 0$;
б) $M_2(3, 0, 4)$, $2x + 3y + 8 = 0$;
в) $M_3(-1, 2, \sqrt{2})$, $5x - 3y + \sqrt{2}z = 0$.

1117. Установить расположение плоскости $2x - 2y - z + 9 = 0$ относительно сферы в каждом из следующих случаев:

а) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$;
б) $(x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$;
в) $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 4$;
г) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2 = 5$.

1118. У треугольной пирамиды $SABC$ вершина S совпадает с началом координат, а боковые грани — координатными плоскостями. Написать уравнение плоскости основания ABC, если $SA : SB : SC = 1 : 3 : 2$, высота $SH = 6$ и вершины A, B и C имеют неотрицательные координаты.

1119. Через линию пересечения плоскостей $x - y + z - 1 = 0$ и $2x + 5y - 2z - 13 = 0$ провести плоскость, касающуюся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

1120. Вычислить расстояние между следующими параллельными плоскостями: $x - 3y + 2z + 1 = 0$, $2x - 6y + 4z + 3 = 0$.

1121. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя параллельными плоскостями

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

1122. Вычислить расстояния между следующими парами параллельных плоскостей:

а) $x - 2y + 2z - 6 = 0$,
$x - 2y + 2z + 18 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$,
$4x - 6y + 12z - 21 = 0$;

в) $x - y + 5z + 27 = 0$,
$x - y + 5z - 54 = 0$;

г) $x - y + 5z + 27 = 0$,
$x - y + 5z + 1 = 0$.

1123. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1, 1, 4)$ и от плоскости $2x - 2y + z - 12 = 0$.

1124. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $x + 2y - 2z - 1 = 0$ и $3x + 5 = 0$.

1125. Составить уравнение множества точек, отстоящих от плоскости $6x - 3y + 2z - 14 = 0$ на расстоянии, равном 3.

1126. Найти уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$ и параллельной плоскости $6x + 3y + 2z = 0$.

1127. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $2x - y + 3z - 4 = 0$ и $2x - y + 3z - 5 = 0$,
б) $x + y - 2z - 3 = 0$ и $x + y - 2z + 7 = 0$,
в) $3x - y + z + 5 = 0$ и $3x - y + z + 15 = 0$.

1128. Написать уравнение сферы, центр которой лежит на оси Ox и которая касается двух плоскостей $2x - 4y - 3z + 21 = 0$ и $5x - 2z = 0$.

1129. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями: а) $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$; б) $x - 7y + 6 = 0$ и $3x - 4y + 5z - 6 = 0$.

1130. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей: а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$; б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0$, $6x - 3z + 2 = 0$.

§ 47. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Уравнения прямой, заданной различными способами

1131. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$; б) $x = 3 + 2t$, $y = 3t$, $z = 5$;

в) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

1132. Определить координаты точки, лежащей на прямой $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{5}$ и имеющей: а) абсциссу, равную 3; б) ординату, равную -1.

1133. Составить уравнения прямой:

а) проходящей через две точки $M_1\left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$;

б) проходящей через точку $M_0(2, 1, -3)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\,\{1, -3, 1\}$;

в) образованной пересечением плоскости $x + 3y - z + 1 = 0$ с координатной плоскостью Oxy;

г) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2, 0, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 4, -3)$.

1134. Написать параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$

1135. Через точку M (1, —3, 4) провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Взаимное расположение прямой и плоскости

1136. По отношению к системе координат указать особенности в расположении следующих прямых:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y + 5z = 0, \\ 2y - z + 6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 6 = 0, \\ 2y - z = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 4 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

1137. Доказать, что:

а) прямая $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy;

б) прямая $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$ пересекает координатные плоскости.

Определить координаты точек пересечения.

1138. Найти точки пересечения прямых:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y + 5z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

с координатными плоскостями.

1139. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

чтобы она: а) была параллельна оси Ox; б) совпадала с осью Oy; в) лежала в плоскости Oxy и проходила через начало координат.

1140. Установить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$

1141. Доказать, что прямые $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$ лежат в одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

1142. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0, \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

пересекаются. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

1143. Доказать, что следующие пары прямых параллельны:

а) $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 1 + t$ и $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$

б) $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

Составить уравнения плоскостей, проходящих через каждую пару прямых.

1144. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

1145. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\,(1,\ 1,\ -3)$ и параллельной прямым

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y - 4z + 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y - z = 0; \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

1146. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,\ 3,\ 7)$ и прямую $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-1}$.

1147. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей каждую из прямых: $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + t$ и $x = 2 + 2t$, $y = 3 - t$, $z = 4 + 3t$.

1148. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (0, 0, 1) и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 2z - 3 = 0; \end{cases} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

1149. Доказать, что прямая $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = -2 + t$ пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$. Найти координаты точки пересечения.

1150. Показать, что прямая $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x - 2y + 5z - 6 = 0$, а прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

1151. Через точку пересечения плоскости $x - 2y + 3z + 5 = 0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была параллельна плоскости Oyz.

§ 48. Метрические задачи на сочетание прямых и плоскостей

1152. Написать[1] уравнение прямой, проходящей через точку M (2, —3, 3) и перпендикулярной к плоскости $x - 3y + 4z - 1 = 0$.

1153. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, —3, 4) и перпендикулярной к прямой:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{5}$; б) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$

1154. Написать уравнения прямой, проходящей через точку A (2, 3, —1), пересекающей прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$ и перпендикулярной к ней.

1155. Через точку M (1, 5, —1) провести прямую, перпендикулярную к прямым

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}; \qquad \begin{aligned} x &= 2 - 3t, \\ y &= -1 + t, \\ z &= -2t. \end{aligned}$$

1156. Через точку M (1, 5, —1) провести прямую, перпендикулярную к прямым

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ -x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

1157. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $x - 2y + 4z - 21 = 0$.

1158. Найти точку, симметричную точке M (1, 5, 2) относительно плоскости $2x - y - z + 11 = 0$.

1159. Составить уравнения плоскостей, проецирующих на координатные плоскости следующие прямые:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}$; б) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$

1160. Составить уравнения проекций прямых, указанных в предыдущем примере, на три координатные плоскости.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

1161. В каждом из следующих случаев составить уравнения проекции данной прямой на данную плоскость:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ $\qquad 3x - y + z - 4 = 0;$

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1};$ $\qquad 3x - y + z - 1 = 0.$

1162. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельной прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ и перпендикулярной к плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

1163. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 1, 3)$, параллельной прямой $x = y = z$ и перпендикулярной к плоскости $3x - 2y = 0$.

1164. Через точку пересечения плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$ с осью Oy провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была перпендикулярна к прямой

$$\begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

1165. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

1166. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-3}.$$

1167. Даны две прямые

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}.$$

а) Доказать, что они скрещиваются; б) написать уравнения плоскостей, проходящих через каждую из них параллельно второй прямой; в) найти расстояние между скрещивающимися прямыми и между плоскостями; убедиться в том, что эти расстояния равны.

1168. Найти угол между прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+12}{3} = \dfrac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z = 0$.

1169. Найти угол между следующими прямыми:

$$\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

1170. Определить угол между прямой

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

и плоскостью $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

§ 49. Приложение теории прямой и плоскости к доказательству теорем и решению задач стереометрии

1171. Доказать, что если прямая l и плоскость α перпендикулярны к одной и той же прямой l' плоскости β, то они параллельны[1] между собой.

1172. Доказать, что если прямая l параллельна двум пересекающимся плоскостям α и α', то она параллельна их линии пересечения.

1173. Доказать, что две параллельные плоскости пересекают третью плоскость по параллельным прямым.

1174. Доказать, что если две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой l и если другая прямая l' проведена в плоскости α перпендикулярно к l, то l' перпендикулярна к β.

1175. В пространстве даны две прямые l_1 и l_2. При каком условии через l_1 можно провести плоскость, перпендикулярную к l_2?

1176. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну и только одну плоскость, параллельную другой прямой.

1177. Доказать, что внутренние равноделящие плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

1178. Найти множество точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

1179. Найти множество точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

1180. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую диагональ, равны по длине.

1181. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти угол φ между плоскостями AKC и SAB, если K — середина ребра SB.

1182. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота SH равна h, сторона основания равна a. Найти угол φ между плоскостями AKC и HBC, где K — середина ребра SB.

1183. Доказать, что для высоты h треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами, равными a, b и c, справедливо соотношение

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

1184. В усеченной (параллельно основанию) треугольной пирамиде $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ середина каждого из боковых ребер A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' соединена с точкой пересечения диагоналей противоположной боковой грани. Доказать, что полученные три прямые пересекаются в одной точке.

---

[1] В этом параграфе термин «параллельность» понимается в широком смысле слова. Например, предложение «Прямая l параллельна плоскости α» следует понимать так: либо $l \parallel \alpha$ в обычном смысле, либо l принадлежит α.

1185. Дан куб, ребро которого равно a. Вычислить расстояние между вершиной A куба и его диагональю, не проходящей через точку A и лежащей в том диагональном сечении куба, которое содержит эту точку.

Глава X

МНОГОГРАННИКИ И ПРОСТЕЙШИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 50. Многогранники

1. Задание многогранника системами неравенств

1186. Найти область, определяемую системами неравенств в каждом из следующих случаев:

а) $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z - 1 < 0$;
б) $x < 0,\ x + 2 > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z - 3 < 0$;
в) $z \geqslant 0, \quad z - 10 \leqslant 0, \quad x - 5 \geqslant 0, \quad x - 7 \leqslant 0, \quad y - 3 \geqslant 0, \quad y - 5 \leqslant 0$.

1187. Записать при помощи линейных неравенств аналитическое задание треугольной призмы $ABOA_1B_1O_1$, изображенной на рисунке 41, если $A\ (0, 2, 0)$, $B\ (0, 0, 2)$, $A_1\ (5, 2, 0)$, $O_1\ (5, 0, 0)$, $B_1\ (5, 0, 2)$.

1188. Записать при помощи линейных неравенств аналитическое задание тетраэдра $OABC$, изображенного на рисунке 42, если $A\ (5, 0, 0)$, $B\ (0, 3, 0)$, $C\ (0, 0, 6)$.

1189. В каждом из следующих случаев записать линейные неравенства, характеризующие множество точек тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$, заданного координатами своих вершин: а) $M_1\ (1, 1, 0)$, $M_2\ (0, 2, 0)$, $M_3\ (0, 0, 0)$, $M_4\ (1, 5, 7)$; б) $M_1\ (1, 1, 1)$, $M_2\ (2, 1, 1,)$, $M_3\ (1, 2, 1)$, $M_4(1, 1, 3)$.

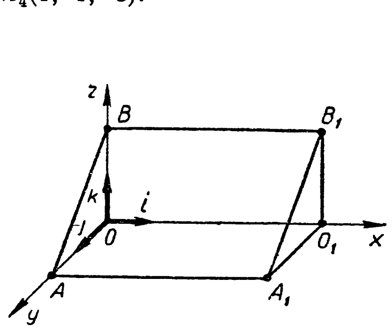


Рис. 41

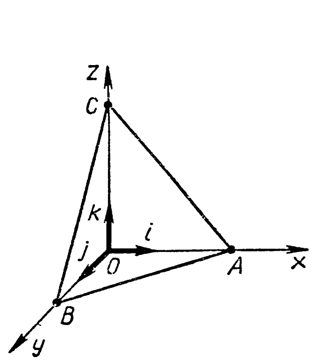


Рис. 42

1190. Даны вершины тетраэдра $A(-1, 1, 0)$, $B(-2, 2, 0)$, $C(-2, 0, 0)$, $D(-1, 5, 7)$. Выяснить, какие из указанных ниже точек расположены во внутренней его области $M_1(2, 3, -1)$, $M_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{6}\right)$, $M_3(0, 0, 1)$, $M_4\left(-\frac{14}{9}, \frac{19}{9}, \frac{35}{18}\right)$.

1191. В каждом из следующих случаев выяснить, является ли призма с основаниями $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ выпуклым многогранником: а) $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(3, 1, 0)$, $E(5, 3, 0)$, $F(5, 0, 0)$, $A'(0, 0, -5)$, $B'(0, 2, -5)$, $C'(2, 2, -5)$, $D'(3, 1, -5)$, $E'(5, 3, -5)$, $F'(5, 0, -5)$; б) $A(-3, -1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(3, 0, 0)$, $D(4, -4, 0)$, $E(-1, -5, 0)$, $F(-3, -4, 0)$, $A'(-3, -1, 6)$, $B'(-1, 1, 6)$, $C'(3, 0, 6)$, $D'(4, -4, 6)$, $E'(-1, -5, 6)$, $F'(-3, -4, 6)$.

1192. Доказать, что если основания призмы — выпуклые многоугольники, то призма является выпуклым многогранником.

1193. Доказать, что если основание пирамиды — выпуклый многоугольник, то пирамида является выпуклым многогранником.

1194. В каждом из следующих случаев доказать, что тетраэдр $ABCD$ является правильным: а) $A(3, 3, 3)$, $B(3, -3, -3)$, $C(-3, 3, -3)$, $D(-3, -3, 3)$; б) $A(4, 2, 6)$, $B(4, -4, 0)$, $C(-2, 2, 0)$, $D(-2, -4, 6)$. Система координат прямоугольная декартова.

1195. В каждом из следующих случаев доказать, что октаэдр $ABCDKK'$, гранями которого служат треугольники ABK, BCK, CDK, DAK, ABK', BCK', CDK', DAK', является правильным многогранником: а) $A(3, 2, 2)$, $B(2, 3, 2)$, $C(1, 2, 2)$, $D(2, 1, 2)$, $K(2, 2, 3)$, $K'(2, 2, 1)$; б) $A(2, -3, -3)$, $B(-3, 2, -3)$, $C(-8, -3, -3)$, $D(-3, -8, -3)$, $K(-3, -3, 2)$, $K'(-3, -3, -8)$. Система координат прямоугольная декартова.

2. Тетраэдры, параллелепипеды и правильные многогранники

1196. Доказать, что отрезки, соединяющие противоположные ребра тетраэдра, пересекаются в одной точке O и делятся в ней пополам.

1197. Доказать, что в тетраэдре все шесть плоскостей, проходящих через каждое ребро и через середину не пересекающегося с ним ребра, проходят через одну точку.

1198. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам тетраэдра и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

1199. Через каждую пару противоположных ребер произвольного тетраэдра проведены параллельные плоскости. Параллелепипед, образованный этими плоскостями, называется описанным параллелепипедом данного тетраэдра (рис. 43).

Доказать, что центр описанного параллелепипеда данного тетраэдра совпадает с центроидом вершин тетраэдра.

1200. Доказать, что ребра параллелепипеда, описанного вокруг тетраэдра (см. предыдущую задачу), соответственно конгруэнтны отрезкам, попарно соединяющим середины противоположных ребер последнего.

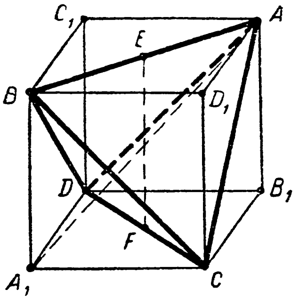


Рис. 43

1201. Доказать, что центр правильного многогранника является центром сферы: а) проходящей через все его вершины (описанная сфера); б) касающейся всех его граней (вписанная сфера); в) касающейся всех его ребер (полувписанная сфера).

1202. Проведем через середину каждого ребра правильного многогранника касательную прямую к полувписанной сфере, перпендикулярную к этому ребру. Доказать, что касательные, соответствующие:

а) сторонам одной грани многогранника,

б) ребрам, исходящим из одной вершины многогранника, соответственно: 1) пересекаются в одной точке, 2) лежат в одной плоскости.

1203. Доказать, что во всяком правильном многограннике центры граней одного многогранного угла лежат в одной плоскости. Пользуясь этим, показать, что многогранник, вершинами которого служат центры граней многогранника, ребрами — отрезки, соединяющие центры смежных граней, а гранями — плоскости, проходящие через центры граней, примыкающих к одной вершине, является правильным многогранником.

3. Трехгранный угол

1204. Трехгранный угол $SA'B'C'$ называется полярным по отношению к трехгранному углу $SABC$, если ребро SA' перпендикулярно грани SBC и лежит от плоскости этой грани по ту же сторону, что и ребро SA, и аналогичное имеет место для ребер SB' и SC'.

Доказать, что если $SA'B'C'$ полярен по отношению к $SABC$, то $SABC$ полярен по отношению к $SA'B'C'$.

1205. Пусть $SABC$ и $SA'B'C'$ — полярные трехгранные углы (см. задачу 1204). Доказать, что сумма плоского угла одного трехгранного угла и соответствующего двугранного угла другого трехгранного угла равна π.

1206. Два трехгранных угла называются конгруэнтными, если плоские и двугранные углы обоих трехгранных углов соответственно конгруэнтны. Доказать, что если два трехгранных угла конгруэнтны, то и полярные по отношению к ним двугранные углы конгруэнтны.

1207. Обозначим через α_{12}, α_{23}, α_{31} плоские углы, а β_1, β_2, β_3 — двугранные углы трехгранного угла $OA_1A_2A_3$ ($\alpha_{12} = \measuredangle A_1OA_2$, $\alpha_{23} = \measuredangle A_2OA_3$, $\beta_1 = \measuredangle A_2 \cdot OA_1 \cdot A_3$ и т. д.). Аналогичные обозначения введем для трехгранного угла $O'A_1'B_1'C_1'$.

Доказать, что трехгранный угол $OA_1A_2A_3$ конгруэнтен трехгранному углу $O'A_1'A_2'A_3'$ (см. задачу 1206), если выполняется хотя бы одно из условий:

а) $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$, $\alpha_{23} = \alpha'_{23}$, $\alpha_{31} = \alpha'_{31}$;
б) $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$, $\alpha_{23} = \alpha'_{23}$, $\beta_2 = \beta'_2$;
в) $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$, $\beta_1 = \beta'_1$, $\beta_2 = \beta'_2$;
г) $\beta_1 = \beta'_1$, $\beta_2 = \beta'_2$, $\gamma_1 = \gamma'_1$.

Эти условия называются признаками конгруэнтности трехгранных углов.

1208. Если один из двугранных углов одного тетраэдра конгруэнтен одному из двугранных углов другого и грани обоих тетраэдров, образующих двугранные углы, соответственно конгруэнтны и одинаковым образом расположены, то тетраэдры конгруэнтны.

4. Теорема Эйлера

1209. Доказать следующие предложения:

а) не существует многогранника, число ребер которого меньше шести;

б) не существует многогранника с числом ребер, равным 7.

1210. Доказать, что во всяком многограннике с числом вершин e, числом граней f и ребер k имеют место соотношения

$$3e \leqslant 2k, \quad 3f \leqslant 2k.$$

1211. Пусть у многогранника нулевого рода все многогранные углы содержат не более четырех граней и ни одна грань не имеет более четырех вершин. Доказать, что сумма чисел трехгранных углов и треугольных граней равна 8.

1212. Доказать, что во всяком многограннике нулевого рода числа вершин e, граней f и ребер k удовлетворяют условиям:

$$k + 6 \leqslant 3e \leqslant 2k;$$
$$k + 6 \leqslant 3f \leqslant 2k;$$
$$e + 4 \leqslant 2f \leqslant 4e - 8;$$
$$f + k \leqslant 2e \leqslant 4f - 8.$$

§ 51. Сферическая поверхность. Поверхность вращения

1. Сферическая поверхность

1213. Написать уравнение сферической поверхности:

а) с центром в точке (0, 1, 0) и радиусом $R = 5$;

б) с центром в начале координат и радиусом $R = 6$;

в) с центром в точке (5, 1, —3) и проходящей через точку (2, —3, —3).

1214. В каждом из следующих случаев составить уравнение сферической поверхности, проходящей через точки A, B, C, D:

а) $A(1, 7, 3)$, $B(7, 1, 3)$, $C(1, 1, -3)$, $D(\sqrt{11}+1,\ 1{,}8)$;
б) $A(7, 9, 1)$, $B(-2, -3, 2)$, $C(1, 5, 5)$, $D(-6, 2, 5)$.

1215. В прямоугольной декартовой системе координат даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$.

Доказать, что сфера, проходящая через эти точки, имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1216. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку $(1, 5, 1)$ и через окружность $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, расположенную на плоскости Oxy.

1217. Определить координаты центра и длину радиуса для каждой из следующих сферических поверхностей:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10z + 22 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 37 = 0$.

2. Поверхность вращения

1218. В плоскости Oyz дана окружность с центром в точке $(0, 4, 0)$ радиуса $r = 1$. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси Oz.

1219. Окружность радиуса r расположена на плоскости Oyz так, что касается оси Oz в начале координат. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси Oz.

1220. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 = 10y$, $x = 0$ вокруг оси Oz.

1221. Парабола с параметром $p = 5$ расположена на плоскости Oyz так, что директриса совпадает с осью Oz. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной параболы вокруг оси Oz.

1222. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy каждой из следующих кривых, расположенных на плоскости Oxy:

а) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

в) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$;

г) параболы $x^2 = 2py$.

1223. Написать уравнение поверхности, образованной вращением синусоиды $z = \sin y$ вокруг оси Oz.

1224. Доказать, что поверхности, заданные каждым из следующих уравнений, являются поверхностями вращения:

а) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2 + z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

Найти образующие кривые и оси вращения.

1225. Доказать, что поверхность, определяемая уравнением $(x^2 + y^2 + z^2 + 21)^2 = 100(x^2 + y^2)$, является поверхностью вращения. Определить ее сечение плоскостью Oxy.

1226. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана линия L уравнениями $x = f_1(z)$, $y = f_2(z)$. Доказать, что поверхность, образованная вращением L вокруг оси Oz, имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = f_1^2(z) + f_2^2(z).$$

1227. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2.

Определить поверхность, образованную вращением прямой l_2 вокруг прямой l_1.

§ 52. Эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды[1]

1228. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$;

б) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x - 8 = 0$;

в) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$.

1229. Найти сечение эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ координатными плоскостями канонической системы координат.

1230. Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который:

а) проходит через точку $M(2, 0, 1)$ и пересекает плоскость Oxy по эллипсу $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$;

---

[1] Во всех задачах этого параграфа, где нет специальных оговорок, предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

б) проходит через точку $N\ (1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$ и пересекает плоскость Oyz по эллипсу $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$;

в) пересекает плоскость Oyz по эллипсу $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$, а плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2=25$.

1231. Написать уравнение эллипсоида, проходящего через точки $(2,\ 2,\ 4)$, $(0,\ 0,\ 6)$, $(2,\ 4,\ 2)$, для которого координатные плоскости данной прямоугольной декартовой системы координат являются плоскостями симметрии.

1232. Дана поверхность второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Доказать, что плоскость $\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}\pm\frac{z_0z}{c^2}=1$ является касательной к этой поверхности в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1233. Доказать, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если $A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=D^2$.

1234. Доказать, что расстояние p от начала координат до плоскости, касающейся эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$, удовлетворяет условию $\frac{1}{p^2}=\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}$.

1235. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

а) $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;

б) $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$;

в) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$.

1236. Определить сечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$ с плоскостью, проведенной через точку $(0,\ 0,\ 1)$ параллельно плоскости Oxy.

1237. Найти проекцию на плоскость Oxy линии пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ с плоскостью $x=2z$.

1238. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

а) проходит через точку $(\sqrt{5},\ 3,\ 2)$ и пересекает плоскость Oxz по гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$;

б) пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2=9$, а плоскость Oxz по гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$.

1239. Написать уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат, если точки M_1 (3, 1, 2), M_2 $(2, \sqrt{11}, 3)$ и M_3 $(6, 2, \sqrt{15})$ лежат на данной поверхности.

1240. Найти множество точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от двух данных точек (0, 0, 3), (0, 0, —3) есть величина постоянная, равная 4.

1241. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями: а) $4x^2+y^2-16z=0$; б) $2x^2+2y^2-4z+5=0$.

1242. То же задание, что и в задаче 1241 относительно поверхности: $x^2-2y^2-4x-z+1=0$.

1243. Найти уравнение параболоида с центром в начале координат, ось которого совпадает с осью Oz и который проходит через точки (1, —2, 1) и (—3, —3, 2).

1244. Дана плоскость α и перпендикулярная к ней прямая l. Найти множество точек M пространства, для каждой из которых квадрат расстояния до прямой l в три раза больше расстояния до плоскости α.

1245. Дана поверхность второго порядка $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$. Доказать, что плоскость $\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=c(z+z_0)$ является касательной к этой поверхности в точке M_0 (x_0, y_0, z_0).

1246. Показать, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается параболоида $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$, если $A^2a^2c\pm B^2b^2c=2CD$.

1247. Написать уравнения двух систем прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2+9y^2-z^2=9$ и определить те из них, которые проходят через точку $\left(3, \frac{1}{3}, -1\right)$.

1248. На гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=2z$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $6x+4y-8z+1=0$.

1249. Доказать, что плоскость, проходящая через центр и одну из прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, пересекает его по второй прямолинейной образующей, параллельной первой.

1250. Найти уравнение множества точек, лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих две прямые

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+3t, \\ z=t. \end{cases}$$

1251. Найти уравнение множества точек, лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих прямые

$$\begin{cases} x=0, \\ y=z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=0. \end{cases}$$

§ 53. Цилиндрические и конические поверхности

1252. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси $x = 7 + 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 + 2t$ и координаты одной из ее точек M_1 (2, —1, 0).

1253. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$ и координаты одной из ее точек M_0 (1, —2, 1).

1254. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев:

а) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а образующие параллельны вектору $\{1, 0, 1\}$;

б) направляющая лежит в плоскости Oyz и имеет уравнение $y^2 - yz + 5 = 0$, а образующие параллельны оси Ox;

в) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а образующие параллельны вектору $\{1, 2, -1\}$;

г) направляющая лежит в плоскости Oxz и является окружностью $(x - 1)^2 + z^2 = 4$, а образующие параллельны оси Oy.

1255. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения совпадает с осью Oz, а радиус $r = 5$.

1256. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору $\{0, -1, 1\}$, а $r = 3$.

1257. Написать уравнение конической поверхности, если:

а) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина имеет координаты (1, 0, 1);

б) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 = 16$, а вершина имеет координаты (0, 0, 1).

1258. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке S (1, 2, 4), образующие которой составляют с плоскостью $2x + 2y + z = 0$ угол $\varphi = 45°$.

1259. Составить уравнение круговой конической поверхности, вершина которой находится в точке S (1, 2, 3), ось перпендикулярна к плоскости $2x + 2y - z + 1 = 0$, а образующие составляют с осью угол, равный 30°.

1260. Найти уравнение конической поверхности с центром в начале координат, которая проходит через линию пересечения:

а) гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$;

б) эллипсоида $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ и плоскости $2x - y + 4z - 2 = 0$.

1261. Найти уравнение конической поверхности, вершина которой находится в начале координат и которая проходит через линию пересечения параболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$.

1262. Доказать, что уравнением

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0$$

определяется коническая поверхность с вершиной в начале координат, которая проходит через линию пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1$ и сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$.

1263. Доказать, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=(Ax+By+Cz)^2$ есть уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и проходящей через линию пересечения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и плоскости $Ax+By+Cz=1$.

1264. Даны две пересекающиеся под прямым углом прямые l_1 и l_2. Найти множество точек пространства, для каждой из которых расстояние до прямой l_1 в три раза больше расстояния до прямой l_2.

Глава XI

АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВО МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В настоящей и следующей главах представлены задачи, относящиеся по существу к следующим четырем различным типам n-мерных пространств:

1) линейное векторное пространство R_n;
2) евклидово векторное пространство E_n;
3) аффинное точечно-векторное пространство $\widetilde{R}_n$;
4) евклидово точечно-векторное пространство $\widetilde{E}_n$.

Определение и основные свойства этих пространств можно найти в учебном пособии [4]. В каждой задаче учащийся найдет указание на то, к какому пространству относится данная задача.

§ 54. Линейное векторное пространство и его подпространства. Координаты векторов

1. Векторное пространство

1265. Вектором назовем совокупность n чисел, взятых в определенном порядке: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Суммой векторов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ назовем вектор $\{\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n\}$, а произведением вектора $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ на число λ — вектор $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots$ $\ldots, \lambda\alpha_n\}$. Доказать, что это множество является линейным векторным пространством. Оно называется а р и ф м е т и ч е с к и м   п р о с т р а н с т в о м.

Найти размерность r арифметического пространства и определить какой-либо базис.

1266. Вектором назовем любую квадратную матрицу третьего порядка, элементами которой являются действительные числа. Суммой векторов a и b назовем сумму соответствующих матриц, а произведением вектора a на число λ — матрицу, равную произведению матрицы a на число λ. Доказать, что это множество является линейным векторным пространством.

Найти размерность r и какой-либо базис этого пространства.

1267. Вектором назовем любую квадратную матрицу n-го порядка, элементами которой являются действительные числа. Сумма векторов и произведение вектора на число определяются как сумма матриц и произведение матрицы на число (см. задачу 1266).

Доказать, что это множество векторов образует линейное векторное пространство размерности n^2. Оно называется *пространством квадратных матриц n-го порядка*. Найти какой-либо базис этого пространства.

1268. Вектором назовем любое положительное число. Суммой векторов a и b назовем число ab, а произведением вектора a на произвольное число γ назовем число a^{γ}. Доказать, что это множество образует линейное векторное пространство. Найти размерность r и определить какой-либо базис. Что будет нулевым вектором этого пространства?

1269. Рассмотрим множество Ω всех обычных векторов трехмерного пространства, не принадлежащих данной фиксированной плоскости. Образует ли множество Ω линейное векторное пространство?

1270. Вектором назовем любую непрерывную функцию на отрезке $[0, 1]$. Сложение векторов и умножение вектора на число введем как обычные операции сложения функций и умножения функции на число. Доказать, что множество всех этих векторов образует линейное векторное пространство, для которого не выполняется аксиома размерности.

2. Базис. Координаты вектора

1271. В пространстве R_4 в некотором базисе даны векторы своими координатами: $\boldsymbol{a}_1\,\{-3, 4, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2\,\{-1, 2, -3, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3\,\{1, 1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{a}_4\,\{2, -6, 0, 2\}$.

Определить координаты следующих векторов:

1) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$; 2) $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_4$;

3) $\boldsymbol{p}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 + 3\boldsymbol{a}_4$; 4) $\boldsymbol{p}_4 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_4$.

1272. Доказать, что следующие системы векторов, заданные своими координатами в пространстве R_5, линейно независимы:

а) $a_1\ \{-2, 5, 0, -1, 3\}$, $a_2\ \{0, -3, -1, 2, 3\}$, $a_3\ \{1, 0, 3, 7, -2\}$, $a_4 \left\{1, 3, -2, \frac{1}{2}, 1\right\}$;

б) $b_1\ \{3, 6, 5, 6, 4\}$, $b_2 \left\{2, 3, 3, \frac{5}{2}, 2\right\}$, $b_3\ \{6, 12, 13, 9, 7\}$;

в) $c_1 \left\{\frac{2}{7}, -1, 1, 1, \frac{2}{7}\right\}$, $c_2\ \{2, 3, 7, 10, 13\}$, $c_3\ \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $c_4\ \{1, 4, 5, 3, 10\}$.

1273. Доказать, что следующие системы векторов, заданные своими координатами в пространстве R_4, образуют базисы этого пространства:

а) $\{2, -3, 5, 4\}$, $\{-5, 7, -9, -6\}$, $\{1, -1, 2, 1\}$, $\{2, 4, 7, 2\}$;

б) $\{0, 1, 1, 1\}$, $\{1, 0, 1, 1\}$, $\{1, 1, 0, 1\}$, $\{1, 1, 1, 0\}$;

в) $\{2, 3, 4, -3\}$, $\{-5, -4, -9, 2\}$, $\{4, 7, 8, -5\}$, $\{3, 5, 5, 3\}$;

г) $\{2, 10, 8, 7\}$, $\{2, 5, 5, 4\}$, $\{2, -8, -8, 5\}$, $\{3, 9, 5, 6\}$.

1274. В пространстве R_4 даны векторы своими координатами: $a_1\ \{3, 6, -3, -6\}$, $a_2\ \{6, 9, 0, -3\}$, $a_3\ \{1, 4, -5, 0\}$, $a_4\ \{0, 7, 5, 1\}$ и $x\ \{3, 22, -16, -8\}$.

Доказать, что векторы a_1, a_2, a_3, a_4 образуют базис пространства R_4, и найти координаты вектора x в этом базисе.

1275. Доказать, что следующие векторы пространства квадратных матриц второго порядка (см. задачу 1267) образуют базис:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты векторов $x = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -1 & -29 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

1276. В пространстве R_5 заданы векторы своими координатами. В каждом из следующих случаев найти размерность r и базис подпространства, натянутого на данные векторы:

а) $a_1\ \{1, -4, 3, 7, 0\}$, $b_1\ \{-2, -1, 5, 10, 9\}$, $c_1\ \{-2, 1, 0, 2, 5\}$, $d_1\ \{-1, 2, 2, 1, 4\}$, $e_1\ \{3, -5, 3, 5, -5\}$, $f_1\ \{1, -6, 8, 15, 4\}$;

б) $a_2\ \{0, -2, 3, -1, 4\}$, $b_2\ \{0, 4, -6, 2, -8\}$, $c_2 \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}\right\}$, $d_2\ \{1, -5, 3, 1, 5\}$, $e_2\ \{2, -6, 0, 4, 2\}$;

в) $a_3\ \{1, 1, 1, 1, 0\}$, $b_3\ \{1, 1, -1, -1, -1\}$, $c_3\ \{2, 2, 0, 0, -1\}$, $d_3\ \{1, 1, 5, 5, 2\}$, $e_3\ \{1, -1, -1, 0, 0\}$;

г) $a_4\ \{0, -2, 3, -1, 4\}$, $b_4\ \{0, 4, -6, 2, -8\}$, $c_4 \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}\right\}$, $d_4\ \{1, -5, 3, 1, 5\}$, $e_4\ \{2, -6, 0, 4, 2\}$.

3. Подпространства; сумма и пересечение подпространств

1277. Доказать, что множество всех симметричных матриц n-го порядка с обычными операциями сложения и умножения на число является подпространством пространства квадратных матриц n-го порядка (см. задачу 1267). Найти размерность r этого подпространства и какой-либо базис.

1278. Доказать, что множество всех кососимметрических квадратных матриц n-го порядка (т. е. матриц, для элементов которых $a_{ij} = -a_{ji}$) с обычными операциями сложения и умножения на число является подпространством пространства квадратных матриц n-го порядка.

Найти размерность r этого подпространства и какой-либо базис.

1279. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства R_n вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В каждом из следующих случаев выяснить, образует ли множество векторов $\boldsymbol{x}$ векторное подпространство пространства R_n:

а) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 2x_n = 0$;

б) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3$;

в) $x_2 = 0$, $x_n = 0$, остальные произвольны;

г) координаты с нечетными номерами равны нулю;

д) координаты с четными номерами равны α, а с нечетными — β, где α и β — любые числа;

е) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые числа.

В случае положительного ответа найти разность r и какой-либо базис подпространства.

1280. Пусть $\varphi(\boldsymbol{x})$ — ненулевая линейная скалярная функция, заданная в пространстве R_n. Доказать, что множество векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих условию $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$, образует $(n-1)$-мерное подпространство пространства R_n.

1281. Доказать, что совокупность Ω всех векторов $\boldsymbol{p}\,\{p_1, \ldots, p_n\}$ пространства R_n, координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum a_{1i}p_i = 0, \quad \sum a_{2i}p_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum a_{ki}p_i = 0,$$

образуют $(n-k)$-мерное подпространство[1]. Предполагается, что $n > k$ и ранг матрицы, образованной из коэффициентов при $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n$, равен[2] k.

1282. В трехмерном пространстве $\widetilde{R}_3$ даны две пересекающиеся плоскости π_1, π_2 и три попарно непересекающиеся прямые l_3, l_4, l_5, причем l_3 принадлежит π_1, а l_4 и l_5 — скрещивающиеся прямые, пересекающие данные плоскости. Пусть Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 и Ω_5 — множества всех векторов, принадлежащих соответственно π_1, π_2, l_3, l_4 и l_5.

---

[1] Здесь $\sum a_{1i}p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}p_i$ и т. д.

[2] Эта задача является обобщением задач 102 и 103 на n-мерное пространство.

Найти следующие суммы и пересечения пространств:

а) $\Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_1\Omega_2$; в) $\Omega_4 + \Omega_5$, $\Omega_4\Omega_5$;
б) $\Omega_1 + \Omega_3$, $\Omega_1\Omega_3$; г) $\Omega_1 + \Omega_4$, $\Omega_1\Omega_4$.

1283. Доказать следующую теорему: если V_l и V_k — два векторных подпространства пространства R_n, а V_σ и V_π — соответственно сумма и пересечение этих подпространств, то $l + k = \sigma + \pi$[1].

1284. Доказать предложение: если $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — базис подпространства V_m, а $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_e$ — базис подпространства V_e, то суммой V_σ этих подпространств будет подпространство, натянутое на векторы[2] $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_e$.

1285. Пусть V_m и V_e — два векторных подпространства R_n, V_σ и V_π — соответственно сумма и пересечение этих подпространств, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_e$ — соответственно базисы подпространств V_m и V_e. Доказать следующие предложения:

а) если система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ линейно независима, то эта система является базисом подпространства V_σ. В этом случае V_π содержит единственный вектор 0;

б) если система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$, где $s < l$, линейно независима, а остальные векторы $\boldsymbol{b}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_e$ линейно выражаются через эту систему, то эта система является базисом подпространства V_σ. Если, далее, $\boldsymbol{b}_\pi = \alpha_\pi^1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_\pi^m \boldsymbol{a}_m + \beta_\pi^1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \beta_\pi^3 \boldsymbol{b}_s$, где $\pi = s + 1, s + 2, \ldots, l$, то векторы $\boldsymbol{p}_\pi = \alpha_\pi^1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_\pi^m \boldsymbol{a}_m$ образуют базис подпространства[3] V_π.

1286. Векторы заданы своими координатами в пространстве R_4. В каждом из следующих случаев найти сумму и пересечение соответствующих подпространств:

а) подпространства V_2, натянутого на векторы $\{-1, 0, -2, 3\}$, $\{1, 2, -5, 3\}$, и подпространства V_2', натянутого на векторы $\{0, 2, -7, 6\}$, $\{3, 1, 0, 1\}$;

б) подпространства V_3, натянутого на векторы $\{-1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 1, 2, -1\}$, $\{0, -1, 5, -3\}$, и подпространства V_2, натянутого на векторы $\{2, 6, 24, -1\}$ и $\{1, 3, 12, 0\}$.

1287. Пусть в пространстве R_n векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ образуют базис подпространства V_m, а векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_e$ — базис подпространства V_e. В каждом из следующих случаев определить базис суммы V_σ и произведения V_π данных подпространств:

а) R_3; $m = 2$, $l = 2$, $\boldsymbol{a}_1\ \{1, 1, -1\}$, $\boldsymbol{a}_2\ \{1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b}_1\ \{2, 3, -1\}$, $\boldsymbol{b}_2\ \{1, 2, 2\}$;

---

[1] При решении задач это предложение часто используется для определения размерностей суммы и пересечения подпространств.

[2] При решении задач утверждение, сформулированное здесь, часто используется для определения суммы данных подпространств.

[3] При решении задач это предложение часто используется для определения пересечения данных подпространств.

б) R_4; $m = 3$, $l = 2$, $\boldsymbol{a}_1$ $\{1, 2, 1, -2\}$, $\boldsymbol{a}_2$ $\{2, 3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3$ $\{1, 2, 2, -3\}$, $\boldsymbol{b}_1$ $\{1, 0, 1, -1\}$, $\boldsymbol{b}_2$ $\{1, 1, 1, 1\}$;

в) R_4; $m = 3$, $l = 3$, $\boldsymbol{a}_1$ $\{0, 0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2$ $\{0, 1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3$ $\{1, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}_1$ $\{0, 2, 1, 1\}$, $\boldsymbol{b}_2$ $\{1, 2, 1, 2\}$, $\boldsymbol{b}_3$ $\{1, 0, 1, 0\}$.

1288. В пространстве R_5 дано подпространство V, натянутое на систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, и подпространство W, натянутое на систему $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_e$. В каждом из следующих случаев определить размерности и базисы суммы V_σ и произведения W_π данных подпространств:

а) $\boldsymbol{a}_1$ $\{1, -1, 0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2$ $\{0, -2, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3$ $\{-1, 0, 0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_4$ $\{1, -1, 2, 3, 0\}$, $\boldsymbol{b}_1$ $\{2, -4, 1, 2, 0\}$, $\boldsymbol{b}_2$ $\{1, -2, 1, -1, -1\}$;

б) $\boldsymbol{a}_1$ $\{5, 2, -7, 14, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2$ $\{5, -1{,}8, -13, 3\}$, $\boldsymbol{b}_1$ $\{10, 1, -2{,}7, -1\}$, $\boldsymbol{b}_2$ $\{15{,}3, 15, 9, 7\}$, $\boldsymbol{b}_3$ $\{2, -1, -5, -7\}$.

1289. Доказать, что если размерность суммы двух линейных подпространств пространства R_n на единицу больше размерности их пересечения, то сумма этих подпространств совпадает с одним из них, а пересечение — с другим.

1290. Пусть V_m и V_l — не совпадающие подпространства пространства R_n. Доказать следующие предложения:

а) если $m + l > n$, то пересечение этих подпространств имеет по крайней мере один ненулевой вектор;

б) если $m = l = n - 1$, то суммой данных подпространств является все пространство R_n, а пересечение имеет размерность $n - 2$.

§ 55. Евклидово векторное пространство и его подпространства; координаты векторов[1]

1. Евклидово пространство E_n

1291. В арифметическом пространстве n-измерений (см. задачу 1265) скалярным произведением векторов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots, \beta_n\}$ назовем число $\varepsilon = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$. Показать, что при этом определении векторы удовлетворяют всем аксиомам пространства E_n.

1292. Будет ли обычное трехмерное пространство евклидовым, если скалярное произведение двух векторов определить как произведение их длин? Объяснить результат.

1293. В пространстве матриц n-го порядка (см. задачу 1267) скалярным произведением двух векторов (α_{ij}) назовем число $\varepsilon = \sum_{ij}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ij}$. Показать, что при этом определении пространство будет евклидовым.

[1] В этом параграфе во всех задачах, где даны векторы координатами, если нет специальных оговорок, то предполагается, что базис ортонормированный.

1294. В пространстве E_4 даны векторы своими координатами: $\boldsymbol{a}\{1, 4, 3, 5\}$, $\boldsymbol{b}\ \{4, -2, -4, 0\}$, $\boldsymbol{c}\ \{-2, -4, -3, 0\}$ и $\boldsymbol{d}\ \{0, 0, 1, -1\}$. Вычислить: а) $\boldsymbol{ab}$; б) $\boldsymbol{bc}$; в) $|\boldsymbol{b}|$; г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$; д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

1295. В пространстве E_n даны векторы $\boldsymbol{a}\ \{1, 1, 3, 1\}$, $\boldsymbol{b}\ \{-1, 2, 0, -1\}$, $\boldsymbol{c}\ \{-3, 4, -1, 1\}$ и $\boldsymbol{d}\ \{0, -1, -4, 0\}$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по их значениям узнать, образуют ли векторы острый, прямой или тупой угол.

1296. Доказать предложение: каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства E_n, имеет место соотношение $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$, причем равенство возможно в том и только в том случае, если: а) один из векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ нулевой или б) векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ сонаправлены (т. е. $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{y}$, причем $\lambda > 0$).

1297. Матрицей Грама системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_m \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_m \\ - & - & - & - \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}.$$

Здесь $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j$ — скалярные произведения соответствующих векторов. Доказать, что система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависима и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.

1298. В пространстве E_4 даны попарные скалярные произведения систем векторов:

а) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a}^2 = 30$, $\boldsymbol{ab} = 4$, $\boldsymbol{ac} = 64$, $\boldsymbol{b}^2 = 50$, $\boldsymbol{bc} = 58$, $\boldsymbol{c}^2 = 186$;

б) $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$; $\boldsymbol{d}^2 = 1$, $\boldsymbol{de} = 0$, $\boldsymbol{df} = 0$, $\boldsymbol{dg} = 1$, $\boldsymbol{e}^2 = 13$, $\boldsymbol{ef} = 0$, $\boldsymbol{eg} = 26$, $\boldsymbol{f}^2 = 16$, $\boldsymbol{fg} = 16$, $\boldsymbol{g}^2 = 69$.

Доказать, что каждая из этих систем линейно зависима.

1299. Доказать, что в общем декартовом базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства E_n скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\boldsymbol{b}\ \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{ij} g_{ij}\, a_i\, b_j,$$

где g_{ij} — элементы матрицы Грама для базисных векторов (см. задачу 1297).

2. Ортогональность

1300. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — базис подпространства V_k, вложенного в пространство E_n. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - c_{21}\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - c_{31}\boldsymbol{b}_1 - c_{32}\boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - c_{k1}\boldsymbol{b}_1 - \ldots c_{kk-1}\boldsymbol{b}_{k-1}$ образует ортогональный базис подпространства V_k, где

$$c_{ij} = \frac{\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{b}_j}{\boldsymbol{b}_j\,\boldsymbol{b}_j}.$$

1301. В пространстве E_4 даны векторы координатами: а) $\{1, 2, -3, 4\}$ и $\{6, 2, -2, -4\}$; б) $\{0, 1, 0, 0\}$ и $\{1, 0, 3, 5\}$; показать, что эти векторы ортогональны, и дополнить их до полного ортогонального базиса.

1302. В пространстве E_n ортогональными дополнениями подпространства V_k называется совокупность V^* всех векторов, каждый из которых ортогонален V_k. Показать, что V^* — подпространство размерности $n-k$, не имеющее ни одного общего ненулевого вектора с V_k.

1303. Пусть в ортонормированном базисе пространства E_n подпространство V_{n-k} задано соотношениями

$$\sum a_{1i}p_i = 0, \quad \sum a_{2i}p_i = 0, \ \ldots\ , \quad \sum a_{ki}p_i = 0$$

(см. задачу 1281). Показать, что векторы $\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}$, $\{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}$, ..., $\{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}\}$ образуют базис ортогонального дополнения подпространства V_{n-k}.

1304. В пространстве E_n найти ортогональные дополнения подпространства, натянутые на векторы, заданные координатами: а) $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 0, 0\}$; б) $\{2, 4, 0, 3\}$, $\{1, 3, -1, 0\}$.

1305. Пусть V_k и V_m — подпространства E_n. Доказать, что если $k < m$, то в V_m найдется хотя бы один ненулевой вектор, ортогональный подпространству V_k.

§ 56. Координаты точек в аффинном и евклидовом пространствах

1. Координаты точек пространства[1] $\widetilde{R}_n$

1306. В каждом из следующих случаев доказать, что система точек, заданная в $\widetilde{R}_5$ координатами, линейно независима.

а) $M_1(2, -4, -1, 3, 0)$, $M_2(26, 7, 12, 20, 19)$, $M_3(53, 9, 31, 43, 46)$, $M_4(63, 7, 13, 53, 56)$;

б) $M_1(1, 0, 0, 0, 0)$, $M_2(62, 11, 14, 50, 56)$, $M_3(80, 24, 45, 57, 70)$;

в) $M_1(1, 0, 0, 0, 0)$, $M_2(0, 2, 0, 0, 0)$, $M_3(0, 0, 1, 0, 0)$, $M_4(0, 0, 0, -3, 1)$, $M_5(0, 0, 0, 0, 1)$, $M_6(0, 0, 0, 0, 0)$.

1307. Пусть $Oe_1e_2e_3e_4$ — система координат пространства $\widetilde{R}_4$, а точки E_1, E_2, E_3 и E_4 определяются из соотношений $e_i = \overrightarrow{OE_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Определить в данном базисе координаты: а) точек O, E_1, E_2, E_3, E_4; б) середин отрезков OE_1, OE_2, OE_3, OE_4, E_1E_2, E_3E_4, E_4E_1, E_1E_3.

1308. Даны две точки в пространстве $\widetilde{R}_4$: $M(2, 3, -1, 0)$ и $N(0, 0, 3, -4)$. Определить координаты точек, которые делят отрезок MN в следующих отношениях: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$.

---

[1] См. введение к настоящей главе.

1309. Пусть $Oe_1e_2 \dots e_n$ — система координат пространства R_n, а точки $E_1, E_2, \dots, E_n$ определяются из соотношений $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Показать, что система точек $E_1, E_2, \dots, E_n$ линейно независима.

1310. В пространстве $\widetilde{R}_n$ центром тяжести системы материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_k$, в которых сосредоточены соответственно массы $m_1, m_2, \dots, m_k$, называется точка P, определяемая из соотношения

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OM} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_k\overrightarrow{OM_k}}{m_1 + m_2 + \dots + m_k},$$

где O — некоторая точка пространства.

Показать, что это определение не зависит от выбора точки O. Определить координаты точки P, если точки $M_1, M_2, \dots, M_k$ заданы координатами в системе координат $Oe_1 \dots e_n$: M_1 $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, M_2 $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$, $\dots$, M_k (x_{k1}, x_{k2}, x_{kn}).

1311. Найти координаты центра тяжести материальных точек $M_1(2, -1, 3, 4)$, $M_2(1, 0, 4, 0)$, $M_3\left(1, \frac{1}{2}, 3, 4\right)$ пространства $\widetilde{R}_4$, в которых сосредоточены соответственно массы 3, 5, 4 (см. предыдущую задачу).

1312. В пространстве $\widetilde{R}_n$ центроидом точек $M_1, M_2, \dots, M_k$ называется центр тяжести материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_k$, в которых сосредоточены одинаковые массы m (см. задачу 1310). Показать, что это определение не зависит от величины массы m. Вывести формулу для определения координат центроида точек, заданных координатами[1].

1313. Доказать, что в пространстве $\widetilde{R}_n$ множество центроидов системы точек M_1 $(\lambda, 0, \dots, 0)$, M_2 $(0, \lambda, \dots, 0)$, M_n $(0, 0, \dots, 0, \lambda)$ при изменении λ есть прямая, проходящая через точки $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$.

2. Свойства k-симплексов и m-параллелепипедов

1314. В пространстве $\widetilde{R}_n$ k-симплексом называется система $k+1$ линейно независимых точек: $A_0, A_1, \dots, A_k$, и обозначается он так: $[A_0A_1 \dots A_k]$. Точки $A_0, A_1, \dots, A_k$ называются вершинами. Найти координаты всех вершин и центроида M_0 «координатного» симплекса $[OE_1E_2 \dots E_n]$, где O — начало координат, а $E_1, E_2, \dots, E_n$ определяются из соотношений $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

1315. Доказать, что отрезки, соединяющие любую вершину k-симплекса $[A_0A_1 \dots A_n]$ с центроидом остальных точек, пересекаются в

---

[1] Ср. с задачей 53.

одной точке и в этой точке делятся в отношении k, считая от вершины (см. задачу 1314).

1316. В пространстве $\widetilde{R}_n$ даны точка A_0 и m линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, взятых в определенном порядке. Совокупность $A_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется ориентированным m-параллелепипедом и обозначается через $[A_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_m]$. Вершинами этого m-параллелепипеда называется точка A_0 и любая точка $A_{i_1 i_2 i_k}$, удовлетворяющая условию $A_0A_{i_1i_2 \ldots k} = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m$, а k—произвольное целое число.

В пространстве $\widetilde{R}_n$ дан 4-параллелепипед[1] $[A_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4]$. Определить число вершин и найти координаты всех вершин в системе $A_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4$.

1317. Диагоналями m-параллелепипеда $[A_0\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_m]$ называются отрезок $A_0A_{12 \ldots m}$ и все отрезки вида $A_{i_1i_2 \ldots i_k}A_{i_{k+1} \ldots i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k < m$, $1 \leqslant i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots < i_m < m$ и, кроме того, $i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, m$ (см. задачу 1316).

Доказать, что все диагонали m-параллелепипеда проходят через одну и ту же точку пространства $\widetilde{R}_n$ и эта точка является серединой каждой диагонали.

1318. Сторонами m-параллелепипеда $[A_0\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_m]$ называются отрезки $A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_m$ и любой отрезок вида $A_{i_1i_2 \ldots i_k}\, A_{j_1j_2 \ldots j_{k+1}}$, где $1 \leqslant k < m$ и, кроме того, все числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ входят в последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}$. Любые две вершины, образующие некоторую сторону m-параллелепипеда, называются смежными. Показать, что: а) для каждой вершины параллелепипеда существует m вершин, каждая из которых является смежной с данной вершиной. Другими словами, из каждой вершины выходят m сторон; б) векторы, соединяющие произвольную фиксированную вершину со всеми смежными с ней вершинами, соответственно равны: $E_1\boldsymbol{a}_1, E_2\boldsymbol{a}_2, \ldots, E_m\boldsymbol{a}_m$, где $E_1, E_2, \ldots, E_m$ для данной вершины фиксированы и равны 1 или —1.

1319. В пространстве $\widetilde{R}_5$ дан 5-параллелепипед $[A_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \ldots \boldsymbol{e}_5]$. Указать все вершины этого параллелепипеда, смежные с вершиной A_{135}, и найти векторы, соединяющие эту вершину со всеми смежными вершинами. Определить координаты вершины A_{135} и всех смежных с ней вершин в системе $A_0O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_5$, если A_0 (2, —1, 3, 4, 0).

1320. Пусть $[A_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_m]$ является m-параллелепипедом пространства $\widetilde{R}_n$, а M_0 — серединой стороны A_0A_i. Доказать, что вершины $(m — 1)$-параллелепипеда $[M_0\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_m]$ являются серединами сторон исходного параллелепипеда.

---

[1] Здесь и в дальнейшем в выражении «ориентированный параллелепипед» слово «ориентированный» будем опускать.

3. Координаты точек в пространстве $\widetilde{E}_n$

1321. В прямоугольной декартовой системе координат пространства $\widetilde{E}_4$ даны пары точек: а) A_1 (5, —3, —2, 3), A_2 (—4, —3, 3, 7); б) B_1 (0, —5, 3, 0), B_2 (6, —5, 0, 2); в) C_1 (2, 2, 5, 3), C_2 ($\sqrt{2}$, —3, 2, 1). Найти расстояния между каждой парой точек.

1322. В пространстве $\widetilde{E}_5$ даны точки в прямоугольной декартовой системе координат: A_1 (2, 0, 2, 3, 0), A_2 (4, 0, —1, 3, 2), A_3 (5, 0, 0, 0, 0), A_4 (0, 3, 0, 0, 4), A_5 (3, 4, 1, 0, 0). Найти расстояние от каждой из этих точек до начала координат.

1323. Показать, что треугольник ABC, заданный в $\widetilde{E}_5$ координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе координат, является прямоугольным: A (—11, 5, 8, 1, 4), B (—1, 5, —7, 1, —1), C (9, 5, —2, 1, 4).

1324. В прямоугольной декартовой системе пространства дана точка M_0 (2, 0, —3, 6). Найти косинусы углов, которые составляют радиус-вектор этой точки с координатными векторами.

1325. В прямоугольной декартовой системе пространства $\widetilde{E}_4$ дана точка M_0, отличная от начала координат, радиус-вектор которой с координатными векторами $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ образует соответственно углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Доказать, что $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

1326. В пространстве $\widetilde{E}_n$ гиперсферой с радиусом ρ и центром в точке C называется множество всех точек M, удовлетворяющих условию $CM = \rho$. Показать, что если $O\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 \ldots \boldsymbol{g}_n$ — прямоугольная декартова система координат, то через вершины координатного симплекса[1] $[G_1G_2 \ldots G_n]$ проходит одна и только одна гиперсфера. (Здесь точки G_i определяются из условий $\overrightarrow{OG_i} = \boldsymbol{g}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$.) Найти координаты центра и радиус этой гиперсферы.

4. Прямоугольный параллелепипед пространства $\widetilde{E}_n$

1327. k-параллелепипед $[A_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_k]$ называется прямоугольным, если система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ ортогональная. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде:

а) любые две стороны, исходящие из одной вершины, ортогональны;

б) квадрат диагонали, исходящей из вершины A_0, равен сумме квадратов всех сторон, исходящих из той же вершины[2].

1328. В пространстве $\widetilde{E}_n$ k-параллелепипед $[A_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_k]$ называется k-кубом, если все векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ образуют ортогональную систему и, кроме того, их длины равны друг другу. Показать, что

---

[1] См. задачу 1314.

[2] Относительно терминологии см. задачи 1316 и 1317.

а) любые две стороны k-куба равны;

б) любые две диагонали k-куба равны.

Что представляет собой 2-куб и 3-куб в пространстве $\widetilde{E}_3$?

1329. Вычислить длину диагонали k-куба, если его стороны равны a. Доказать, что диагональ k-куба образует равные углы со всеми сторонами, и вычислить косинус этого угла.

1330. Доказать, что в пространстве $\widetilde{E}_n$ для любого n-куба существует гиперсфера, проходящая через все его вершины. Определить центр и радиус ρ этой гиперсферы, если сторона n-куба равна a.

§ 57. Преобразование координат векторов и точек

1. Преобразование координат в пространстве $\widetilde{R}_n$

1331. Написать формулу преобразования координат векторов пространства R_5, если даны координаты новых базисных векторов в старом базисе:

а) e_1' $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, e_2' $\{2, 3, 7, 10, 13\}$, e_3' $\{3, 5, 11, 16, 21\}$, e_4' $\{2, -7, 7, 7, 2\}$, e_5' $\left\{\frac{1}{5}, 1, 4, 5, 3, 10\right\}$;

б) e_1' $\{3, 6, 5, 6, 4\}$, e_2' $\{5, 9, 7, 8, 6\}$, e_3' $\{6, 12, 13, 9, 7\}$, e_4' $\{4, 6, 6, 5, 4\}$, e_5' $\{2, 5, 4, 5, 3\}$;

в) e_1' $\{1, 0, 0, 0, 0,\}$, e_2' $\{0, 0, 1, 1, 1\}$, e_3' $\{0, 1, 0, 1, 1\}$, e_4' $\{0, 1, 1, 0,1\}$, e_5' $\{0, 1, 1, 1, 0\}$.

1332. Векторы $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_i$ заданы координатами в некотором базисе пространства $\widetilde{R}_4$: $\boldsymbol{a}_1$ $\{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2$ $\{1, 2, 1, 2\}$, $\boldsymbol{a}_3$ $\{4, 1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_4$ $\{1, 3, 2, 0\}$, $\boldsymbol{b}_1$ $\{4, 0, 3, -3\}$, $\boldsymbol{b}_2$ $\{-8, -3, -5, 0\}$, $\boldsymbol{b}_3$ $\{8, 2, 5, -1\}$, $\boldsymbol{b}_4$ $\{-5, -3, -4, 0\}$. Доказать, что каждая из систем $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ образует базис пространства, и записать формулы преобразования при переходе от базиса $\boldsymbol{a}_i$ к базису $\boldsymbol{b}_i$.

1333. В пространстве $\widetilde{R}_n$ записать формулы преобразования при переносе начала координат в точку O' в каждом из следующих случаев: а) $\widetilde{R}_4$; O' $(5, 3, 4, 0)$; б) $\widetilde{R}_5$; O' $(-3, 4, 1, 2, -12)$; в) $\widetilde{R}_n$; O' $(1, 1, \ldots, 1)$.

1334. В каждом из следующих случаев в пространстве $\widetilde{R}_n$ в общей декартовой системе координат $O\boldsymbol{e}_i$ даны координаты нового начала O' и новых координатных векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$. Записать формулы преобразования при переходе от одной системы координат к другой:

а) $\widetilde{R}_3$; e'_1 $\{2, 3, 5\}$, e'_2 $\{0, 1, 4\}$, e'_3 $\{5, 7, -1\}$, O' $(0, 3, -1)$;

б) $\widetilde{R}_4$; e'_1 $\{9, -8{,}5, 10\}$, e'_2 $\{3, 2, 2, 2\}$, e'_3 $\{5, -8, 5, 8\}$, e'_4 $\{11, -13, 9, 15\}$, O' $(-3, 1, 2, 5)$;

в) $\widetilde{R}_5$; e'_1 $\{1, 0, 0, 0, -1\}$ e'_2 $\{0, -3, 2, 0, 0\}$, e'_3 $\{0, 0, 4, 1, 5\}$, e'_4 $\{0, 0, 0, -5, 1\}$, e'_5 $\{0, 0, 0, 0, 1\}$, O' $(0, 0, 0, 0, 0)$.

1335. В каждом из следующих случаев в пространстве определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если известны формулы преобразования:

а) $\widetilde{R}_3$; $x_1 = y_1 - 3y_2 + y_3$; $x_2 = y_1 + y_2$; $x_3 = y_1 + 1$;

б) $\widetilde{R}_4$; $y_1 = x_1 - 1$; $y_2 = x_2 + 1$; $y_3 = x_3 - 5$; $y_4 = -x_4$;

в) $\widetilde{R}_n$; $x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + 1$; $x_2 = y_2 + y_3 + \ldots + y_n + 2$; $x_3 = y_3 + \ldots + y_n + 3$; ... ; $x_n = y_n + n$.

Здесь $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты точки в старой системе, а $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — в новой.

1336. Пусть $[OE_1E_2E_3E_4]$ — координатный симплекс пространства $\widetilde{R}_4$ (см. задачу 1314). Записать формулы преобразования при переходе к системе E_2, e'_0, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, где $e'_0 = \overrightarrow{E_2O}$, $e'_1 = \overrightarrow{E_2E_1}$, $e'_3 = \overrightarrow{E_2E_3}$, $e'_4 = \overrightarrow{E_2E_4}$.

1337. Даны соотношения:

$$x_1 = y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 1,\ x_2 = y_1 - 3y_3 + y_4 + 2,$$
$$x_3 = 5y_1 + 7y_2 - 8y_3 + 6y_4 - 5,\ x_4 = 3y_1 + 4y_2 - y_3 + 5y_4.$$

Могут ли эти соотношения быть формулами преобразования координат в пространстве $\widetilde{R}_4$? Объяснить результат.

2. Преобразование координат в пространстве $\widetilde{E}_n$

1338. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц являются ортогональными:

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1339. В пространстве E_4 в ортонормированном базисе даны векторы $e_1'\left\{1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right\}$, $e_2'\{3, 2, 2, 4\}$, $e_3'\left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 0\right\}$, $e_4'\{2, 5, -6, -1\}$.

Выяснить: а) является ли базис e_1', e_2', e_3', e_4' ортогональным; б) является ли этот базис ортонормированным.

Записать формулы преобразования векторов при переходе от старого базиса к новому.

1340. Даны формулы преобразования координат точек в пространстве $\widetilde{E}_3$:

$$x_1 = 2 + \frac{2}{7} y_1 + \frac{3}{7} y_2 + \frac{6}{7} y_3,$$

$$x_2 = 1 + \frac{6}{7} y_1 + \frac{2}{7} y_2 - \frac{3}{7} y_3,$$

$$x_3 = 3 + \frac{3}{7} y_1 - \frac{6}{7} y_2 + \frac{2}{7} y_3.$$

Является ли новая система координат прямоугольной декартовой, если исходная система прямоугольная декартова?

1341. В пространстве $\widetilde{E}_5$ дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{g}_5$. Новая система координат выбрана так, что вершина A_{135} 5-параллелепипеда $[O\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{g}_5]$ является началом координат, а векторы $\boldsymbol{g}_1' = \overrightarrow{A_{135}A_{1235}}$, $\boldsymbol{g}_2' = \overrightarrow{A_{135}A_{1345}}$, $\boldsymbol{g}_3' = \overrightarrow{A_{135}A_{35}}$, $\boldsymbol{g}_4' = \overrightarrow{A_{135}A_{15}}$, $\boldsymbol{g}_5' = \overrightarrow{A_{135}A_{13}}$ — базисными векторами (см. задачу 1316). Показать, что новая система координат является прямоугольной декартовой, и записать формулы преобразования при переходе от одной системы координат к другой.

§ 58. Плоскости в многомерном аффинном пространстве

Пусть A — некоторая точка пространства $\widetilde{R}_n$, а V_k — k-мерное векторное подпространство. Множество всех точек M, удовлетворяющих условию $\overrightarrow{AM} \subset V_k$, а также всех векторов подпространства V_k называется k-плоскостью и обозначается так: $\{A, V_k\}$. Подпространство V_k называется подпространством k-плоскости. При $k = 1$ или $k = n - 1$ k-плоскость называется соответственно п р я м о й или г и п е р п л о с к о с т ь ю.

Пусть Π_k и Π_m — две плоскости, где $m \geqslant k$, а V_s — пересечение подпространств V_k и V_m этих плоскостей. V_s называется подпространством параллельности, число s — индексом параллельности, а число $l = \frac{s}{k}$ — степенью параллельности плоскостей Π_k и Π_m. Пусть плоскости Π_k и Π_m не имеют общих точек. Если $l = 0$, то данные плоскости называются скрещивающимися, если $0 < l < 1$ — частично параллельными, а если $l = 1$ — полностью параллельными.

Подробное изложение теории k-плоскостей в многомерном аффинном и евклидовом пространствах читатель найдет в учебном пособии [4], гл. XI.

1. Уравнение k-плоскости

1342. В пространстве $\widetilde{R}_n$ дана k-плоскость. В каждом из следующих случаев найти координаты нескольких точек и векторов, принадлежащих плоскости:

а) $\widetilde{R}_5$; $k = 4$; $x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 + 1 = 0$;

б) $\widetilde{R}_5$; $k = 2$; $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 + x_5 - 15 = 0; \end{cases}$

в) $\widetilde{R}_4$; $k = 2$; $x_1 = 2 + t + u$, $x_2 = 2t - u$, $x_3 = t$, $x_4 = 3 - t + 5u$.

1343. В пространстве $\widetilde{R}_4$ даны системы точек:

а) (3, 4, 0, 0), (4, 3, 1, 2), (5, 3, 3, 7);

б) (2, 5, —1, —2), (1, 6, —2, —4), (6, 1, 3, 6);

в) (1, 1, 0, 0), (2, 0, 5, 2), (0, 2, —5, —2), (4, —2, 15, 6).

Выяснить, какие из данных точек в каждой системе лежат на одной прямой.

В каждой из задач **1344—1346** в системе координат $Oe_1e_2 \dots e_n$ пространства $\widetilde{R}_n$ даны плоскость Π своими уравнениями и несколько точек и векторов своими координатами. Выяснить, какие из данных точек и векторов принадлежат плоскости Π.

1344. $\widetilde{R}_4$; $\qquad \Pi_2 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_4 + 1 = 0; \end{cases}$

$M_1\left(3,\ 0,\ -3,\ \frac{4}{3}\right)$, $M_2\,(0, -1, 1, 0)$, $M_3\,(1, 1, 0, 4)$, $M_4\,(8, 7, -1, 3)$; $\boldsymbol{p}_1\,\{0, 1, 0, 0,\}$, $\boldsymbol{p}_2\,\{3, 3, 0, 1\}$.

1345. $\widetilde{R}_5$; $\Pi_4 : x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 - 2 = 0$; $M_1\,(0, 0, 1, 0, 0)$, $M_2\,(2, 1, 2, 1, 0)$, $M_3\,(2, 0, 0, 0, 0)$; $\boldsymbol{p}_1\,\{2, 0, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{p}_2\{1, 0, 1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{p}_3\,\{2, 0, 1, 0, 0\}$.

1346. $\widetilde{R}_n$; $\Pi_{n-m}: x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n = 1$; $E_1\,(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2\,(0, 1, \ldots, 0), \ldots,$ $E_n\,(0, 0, \ldots, 1)$; $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_n, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n$.

1347. Написать уравнения всех координатных осей и координатных гиперплоскостей системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4$ в пространстве $\widetilde{R}_4$.

В каждой из задач **1348 — 1353** написать уравнения плоскости наименьшей размерности, содержащей данные точки и векторы.

1348. $\widetilde{R}_4$; $M_0\,(-1, 0, 2, 2)$; $\boldsymbol{p}_1\,\{2, 1, 4, 4\}$, $\boldsymbol{p}_2\,\{0, 0, 7, 7\}$.

1349. $\widetilde{R}_4$; $M_1\,(1, 1, -3, -2)$, $M_2\,(-2, 0, 0, 0)$, $M_3\,(1, 2, 0, -1)$; $\boldsymbol{p}_1\,\{3, 3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{p}_2\,\{4, 4, 4, 0\}$.

1350. $\widetilde{R}_5$; $M_0\,(1, 3, -1, 4, 5)$, $M_1\,(2, 3, -1, 4, 5)$; $\boldsymbol{a}_1\{0, 3, 0, 0, 0\}$.

1351. $\widetilde{R}_5$; $M_1\,(3, -2, 0, 1, 1)$, $M_2\,(0, 0, 3, 4, 1)$.

1352. $\widetilde{R}_n$; $E_1\,(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2\,(0, 1, \ldots, 0)$, $E_n\,(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

1353. $\widetilde{R}_n$; O, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, где $k < n$.

1354. Доказать предложение: для того чтобы точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, M_{k+1}, M_{k+2} лежали в одной плоскости Π_s, где $s \leqslant k$, необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе полюса O существовали не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2}$, удовлетворяющие условиям $\alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_{k+2}\boldsymbol{r}_{k+2} = 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+2} = 0$. Здесь $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{k+2}$ — радиус-векторы точек $M_1, M_2, \ldots, M_{k+2}$, т. е. $\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$.

1355. Будем говорить, что гиперплоскость Π_{n-1} делит отрезок AB в отношении λ, если точка M пересечения гиперплоскости Π_{n-1} и прямой AB делит этот отрезок в отношении λ. Показать, что если гиперплоскость Π_{n-1} дана уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$, а точки A и B — координатами $A\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $B\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, то

$$\lambda = -\frac{a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + a_0}{a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a_0}.$$

1356. Пусть вершины треугольника ABC не лежат в гиперплоскости Π_{n-1}. Доказать, что если гиперплоскость Π_{n-1} пересекает отрезок AB, то она пересекает один и не пересекает другой из отрезков BC и AC.

2. Взаимное расположение плоскостей

В каждой из задач 1357—1362 даны две плоскости Π_k и Π_e своими уравнениями в пространстве $\widetilde{R}_n$. Найти степень l параллельности данных плоскостей. Выяснить, пересекаются ли плоскости. В случае пересечения найти уравнения плоскости пересечения или координаты точки пересечения.

1357. $\widetilde{R}_4$; $(\Pi_2)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 7 = 0, \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10 = 0, \end{cases}$

$(\Pi_2')\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 14 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10 = 0. \end{cases}$

1358. $\widetilde{R}_5$; $(\Pi_3)\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 + x_5 - 1 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 = 0, \end{cases}$

$(\Pi_4)\ 14x_1 - 22x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 1 = 0.$

1359. $\widetilde{R}_5$; (Π_2); $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,
(Π_2'); $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

1360. $\widetilde{R}_4$; $(\Pi_3)\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0,$
$(\Pi_3')\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.$

1361. $\widetilde{R}_4$; $(\Pi_3)\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 - \frac{3}{4}x_4 - 1 = 0,$
$(\Pi_3')\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2 = 0.$

1362. $\widetilde{R}_4$; $(\Pi_2) x_3 = 0,\ x_4 = 0,$
$(\Pi_2') x_1 = 0,\ x_1 + x_4 = 1.$

1363. Показать, что если плоскости Π_m и Π_{n-m} пространства $\widetilde{R}_n$ имеют единственную общую точку, то базисы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{e}_{m+1}, \boldsymbol{e}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ этих плоскостей вместе образуют базис пространства $\widetilde{R}_n$. Обратно, если базисы плоскостей Π_m и Π_{n-m} вместе образуют базис пространства $\widetilde{R}_n$, то плоскости пересекаются в единственной точке.

1364. В пространстве $\widetilde{R}_n$ дана плоскость Π_m и подпространство V_{n-m}, ненулевые векторы которого не принадлежат данной плоскости. Проекцией точки M на плоскость Π_m по направлению подпространства V_{n-m} называется точка пересечения плоскостей Π_m и $\{M, V_{n-m}\}$ (см. задачу 1363). Доказать, что центроид проекций точек $M_1, M_2, \ldots, M_s$ на плоскость Π_k по направлению подпространства V_{n-m} есть проекция центроида данных точек на ту же плоскость.

1365. Доказать, что если степень параллельности плоскостей Π_m и Π_{n-m} в пространстве $\widetilde{R}_n$ равна нулю, то любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен как сумма двух векторов, соответственно принадлежащих данным плоскостям.

1366. Объединением двух плоскостей в пространстве $\widetilde{R}_n$ называется плоскость наименьшей размерности, содержащая эти плоскости. Доказать, что две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда размерность их объединения равна размерности векторного подпространства, являющегося суммой подпространств данных плоскостей.

§ 59. Плоскости и гиперсферы в многомерном евклидовом пространстве

1. Расстояние от точки до гиперплоскости[1]

1367. В пространстве $\widetilde{E}_n$ даны гиперплоскость уравнением и точка M_0 координатами. В каждом из следующих случаев найти расстояние от данной точки до данной гиперплоскости:

а) $\widetilde{E}_4$; $\sqrt{7}x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 + 12 = 0$; $M_0\,(0,\ 0,\ 0,\ 0)$;

б) $\widetilde{E}_4$; $8x_1 - 4x_3 - x_4 - 8 = 0$; $M_0\,(-2,\ 5,\ 2,\ 3)$;

в) $\widetilde{E}_4$; $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_5 = 0$; $M_0\,(5,\ 1,\ 2,\ 4,\ -3)$;

г) $\widetilde{E}_5$; $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + \sqrt{10}x_5 = 0$; $M_0\,(0,\ 1,\ 2,\ -3,\ 0)$.

1368. В пространстве $\widetilde{E}_n$ даны две гиперплоскости уравнениями $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b_1 = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b_2 = 0$, $b_1 \neq b_2$. Доказать, что эти гиперплоскости полностью параллельны и что расстояние d от любой точки M одной из гиперплоскостей до другой гиперплоскости не зависит от выбора точки M на гиперплоскостях. Число d называется расстоянием между двумя гиперплоскостями. Вывести формулу для вычисления расстояния между данными плоскостями[2].

1369. В пространстве $\widetilde{E}_n$ вычислить расстояния между полностью параллельными гиперплоскостями (см. задачу 1368), которые заданы уравнениями:

а) $2x_1 - 3x_2 + 6x_4 - 21 = 0$, $4x_1 - 6x_2 + 12x_4 + 14 = 0$;

б) $x_1 = 3$, $x_1 = 15$.

1370. В пространстве $\widetilde{E}_n$ дана прямоугольная декартова система координат $O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \ldots, \overrightarrow{OE_n}$. Найти высоту симплекса $[OE_1E_2 \ldots E_n]$, опущенную из точки O на противоположную грань.

2. Ортогональные плоскости

Плоскости Π_k и Π_e называются *ортогональными*, если их подпространства ортогональны, т. е. любой вектор одной плоскости ортогонален любому вектору второй плоскости.

В каждой из задач 1371—1373 показать, что плоскости Π_k и Π_e, заданные своими уравнениями в пространстве $\widetilde{E}_n$, ортогональны.

1371. $\widetilde{E}_4$; (Π_3): $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0$, (Π_1): $x_1 + x_2 = 3$, $4x_1 + x_2 - x_3 = 3$, $2x_1 + x_2 - x_4 = 5$.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

[2] Настоящая задача является обобщением задачи 1121 на случай пространства $\widetilde{E}_n$.

1372. $\widetilde{E}_4$; (Π_2): $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 1 + 4t + 3u$, $x_3 = 3t + u$, $x_4 = 5 + 11t + 3u$; $(\Pi_1): x_1 = 2t$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1 + 3t$, $x_4 = 2 - t$.

1373. $\widetilde{E}_n$; $(\Pi_k): x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$; $(\Pi_{n-k}): x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$.

В каждой из задач 1374—1375 в пространстве $\widetilde{E}_4$ даны плоскость Π_k уравнением и точка M_0 координатами.

а) Написать уравнение плоскости максимальной размерности, проходящей через M_0, и ортогональной Π_k.

б) Найти координаты проекции точки M_0 на плоскость.

в) Найти расстояние от точки M_0 до плоскости Π_k.

1374. $\widetilde{E}_4$; $(\Pi_1): 4x_1 - 2x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 9$, $x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6$; M_0 $(2, 2, 5, 3)$.

1375. $\widetilde{E}_4$; $(\Pi_2): 2x_1 - x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 1$; M_0 $(2, -1, 2, 3)$.

1376. Доказать, что в $\widetilde{E}_n$ множество точек, равноудаленных: а) от двух данных точек A и B, есть гиперплоскость, проходящая через середину отрезка AB и ортогональная прямой AB; б) от трех данных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, есть $(n-2)$-мерная плоскость, ортогональная плоскости точек ABC.

1377. В пространстве $\widetilde{E}_n$ даны пересекающиеся плоскости Π_k и Π_l. Доказать, что если хотя бы одна из этих плоскостей ортогональна некоторой плоскости Π_m, то их пересечение ортогонально Π_m.

1378. Пусть в $\widetilde{E}_n$ даны две полностью параллельные плоскости Π_k и Π_l, причем $k \leqslant l$. Показать, что если Π_l ортогональна некоторой плоскости Π_m, то Π_k также ортогональна Π_m.

1379. Доказать, что если в пространстве $\widetilde{E}_n$ дана гиперплоскость уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$, то вектор с координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ортогонален данной гиперплоскости.

1380. Показать, что если Π_k и Π_l — ортогональные плоскости пространства $\widetilde{E}_n$ и $k + l = n - 1$, то через Π_k проходит одна и только одна $(k+1)$-плоскость, ортогональная Π_l.

3. Гиперсферы

1381. Записать уравнение гиперсферы с центром в точке $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ и радиусом ρ:

а) в прямоугольной декартовой системе координат $Oq_1q_2 \ldots q_n$;

б) в общей декартовой системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \ldots \boldsymbol{e}_n$, если даны скалярные произведения $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = c_{ij}$.

1382. В пространстве $\widetilde{E}_4$ дана гиперсфера радиуса ρ с центром в точке M_0. Записать уравнение этой поверхности, если: а) $\rho = 5$, $M_0(2, 0, 3, -1)$; б) $\rho = 2$, $M_0(0, 0, 0, 0)$; в) $\rho = 1$, $M_0(1, 0, 0, 3)$.

1383. В пространстве $\widetilde{E}_n$ дана гиперсфера своим уравнением. В каждом из следующих случаев найти координаты центра и длину радиуса гиперсферы:

а) $\widetilde{E}_4$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 14x_3 = 0$;

б) $\widetilde{E}_4$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1 + 2x_2 + 6x_4 - 11 = 0$;

в) $\widetilde{E}_5$; $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 3x_5^2 - 30x_1 + 6x_3 - 6x_5 + 78 = 0$;

г) $\widetilde{E}_5$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 + 11 = 0$;

д) $\widetilde{E}_n$; $6x_1^2 + 6x_2^2 + \ldots + 6x_n^2 - 12x_1 - 24x_2 - \ldots - 12nx_n + n(n+1)(2n+1)) - 96 = 0$.

1384. Найти множество точек пространства E_n, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных фиксированных точек A и B есть величина постоянная, отличная от единицы и нуля.

1385. Пусть $[OG_1G_2 \ldots G_n]$ — координатный симплекс прямоугольной декартовой системы $O\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 \ldots \boldsymbol{g}_n$ пространства $\widetilde{E}_n$ (см. задачу 1314)). Написать уравнение гиперсферы, проходящей через вершины этого симплекса. Пользуясь этим уравнением, доказать предложение, сформулированное в задаче 1326.

1386. Доказать, что в пространстве $\widetilde{E}_n$ через любые $n + 1$ линейно независимые точки проходит одна и только одна гиперсфера.

Глава XII

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ В МНОГОМЕРНЫХ АФФИННЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей главе представлены задачи на теорию квадратичных форм в пространствах R_n и E_n и их применение к изучению квадрик пространств $\widetilde{R}_n$ и $\widetilde{E}_n$[1].

§ 60. Квадратичные формы

Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — скалярная билинейная симметрическая функция от двух векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Функция $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ называется **квадратичной функцией**; исходная функция $\varphi(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$ называется полярной по отношению к $f(\boldsymbol{x})$. Матрица полярной функции называется матрицей квадратичной функции, а ее ранг—рангом квадратичной функции. Если в базисе $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \ldots \boldsymbol{e}_n$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

[1] Относительно обозначений пространств см. введение к главе XI.

Правая часть этого выражения называется квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Понятие квадратичной формы

1387. В пространстве R_n квадратичные функции заданы квадратичными формами в некотором базисе. Найти матрицы функций в данном базисе и определить ранги этих функций:

а) R_3; $3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1x_2$;
б) R_4; $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1$;
в) R_4; $3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2$;
г) R_4; $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4$;
д) R_2; $x_1^2+4x_2^2 + 4x_1x_2$.

1388. Найти билинейные формы, полярные по отношению к каждой квадратичной форме предыдущего примера.

1389. Ненулевые векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ называются сопряженными относительно квадратичной функции $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, если $\varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0$. Самосопряженный вектор называется вектором асимптоматического направления. Для каждого из примеров, приведенных в задаче 1387, определить:

а) векторы, сопряженные координатному вектору $\boldsymbol{e}_1$;
б) несколько векторов асимптоматических направлений.

1390. Найти условия, при которых для квадратичной функции, заданной формой $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j$: а) все направления, принадлежащие подпространству, натянутому на координатные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$, являются асимптоматическими; б) все координатные векторы имеют асимптоматические направления (см. задачу 1389).

2. Приведение квадратичной формы к нормальному виду; сигнатура

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ квадратичная форма, определяющая данную квадратичную функцию $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, имеет вид:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathscr{E}_1x_1^2 + \mathscr{E}_2x_2^2 + \ldots + \mathscr{E}_rx_r^2, \tag{1}$$

где $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_r$ равны 1 или -1, а r — ранг функции.

В этом случае говорят, что квадратичная форма имеет нормальный вид.

В каждой из задач 1391—1395 дана квадратичная форма в общем базисе пространства R_n. При помощи преобразования базиса найти нормальный вид квадратичной формы и записать формулы преобразования.

1391. R_2; $9x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

1392. R_3; $x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1393. R_3; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

1394. R_4; $4x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

1395. R_5; $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_4^2 + x_5^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_5 + 2x_2x_5 - 12x_3x_4 + 2x_4x_5 - 8x_2x_4$.

1396. Показать, что следующие квадратичные формы, заданные в общем базисе R_3, являются положительно определенными:

а) $3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$;

б) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1x_2$;

в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

1397. Найти сигнатуры квадратичных форм, заданных в задачах 1391—1396.

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в пространстве E_n. Собственные направления

В каждой из задач **1398—1402** найти характеристические числа и соответствующие собственные векторы квадратичных функций, заданных в ортонормированном базисе пространства E_n следующими квадратичными формами.

1398. E_3; $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1399. E_3; $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1400. E_4; $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

1401. E_5; $5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_4^2 + x_5^2 - 4x_2x_3 + 12x_4x_5$.

1402. E_6; $3x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$.

Пусть в ортонормированном базисе $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 \ldots \boldsymbol{g}_n$ квадратичная форма, определяющая данную квадратичную функцию $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, имеет вид:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — ненулевые характеристические числа квадратичной функции $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, а r — ранг функции. В этом случае говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид.

В каждой из задач 1403—1407 дана квадратичная форма в ортонормированном базисе пространства E_n. При помощи ортонормированного преобразования базиса найти канонический вид квадратичной формы и записать формулы преобразования.

1403. E_2; $x_1^2 - 14x_1x_2 + 49x_2^2$.

1404. E_3; $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

1405. E_3; $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1406. E_4; $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.

1407. E_5; $4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 3x_5^2 - 8x_2x_3 + 6x_4x_5$.

1408. В ортонормированном базисе пространства E_n дана квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Доказать предложение: для того чтобы вектор $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ имел одновременно асимптотическое и собственное направления, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли уравнениям (см. задачу 951):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i}p_i = 0, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}p_i = 0.$$

1409. Для того чтобы вектор собственного направления квадратичной функции имел одновременно и асимптоматическое направление, необходимо и достаточно, чтобы характеристическое число, соответствующее этому вектору, равнялось нулю. Доказать.

1410. В пространстве E_n в ортонормированном базисе дана квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Выяснить, при каких ограничениях, накладываемых на коэффициенты a_{ij}:

а) всякое направление пространства E_n является собственным;

б) вектор g_1 имеет собственное направление;

в) любой вектор подпространства $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ имеет собственное направление.

§ 61. Асимптоматические направления. Классификация квадрик в аффинном пространстве

Квадрикой пространства $\tilde{R}_n$ называется множество всех точек, координаты которых в некоторой общей декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x^ix^j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0, \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичная форма $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x^ix^j$ определяет в данном базисе некоторую квадратичную функцию $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, которая заданием квадрики (1) определяется с точностью до числового множителя.

Асимптоматические направления, сопряженные направления, ранг, абсолютная величина сигнатуры, главные направления квадратичной функции $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ называются соответственно асимптотическими направлениями, сопряженными направлениями, рангом, сигнатурой и главными направлениями квадрики (1).

Прямая l называется прямой асимптотического направления, если любой ее ненулевой вектор имеет асимптотическое направление. В этом случае прямая либо пересекается с квадрикой в одной точке, либо не имеет с ней ни одной точки, либо целиком принадлежит квадрике. Во втором случае прямая l называется асимптотой квадрики, а в третьем случае — прямолинейной образующей. Ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$ называется *вектором данной квадрики*, если любая прямая, содержащая этот вектор, является асимптотой или прямолинейной образующей. Множество всех векторов квадрики образует подпространство, которое называется **асимптотическим подпространством квадрики.** Квадрика называется S-**цилиндрической,** если она имеет S-мерное асимптотическое подпространство, где $S > 0$.

1. Пересечение квадрики с прямой и плоскостью; асимптотические направления

1411. В R_n даны квадрика и прямая уравнениями. В каждом из следующих случаев определить координаты их точек пересечений:

а) $\widetilde{R}_3$; $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2 + x_1x_3 - x_1 - x_2 = 0$; $\frac{x_1 - 3}{4} = \frac{x_2 - 3}{4} = \frac{x_3 - 3}{4}$.

б) $\widetilde{R}_4$; $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3 + x_4 = 0$.
Прямая проходит через точки (0, 0, 3, —3)) и (0, 0, 11, —11).

1412. В $\widetilde{R}_4$ дана квадрика, $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_4 - 5 = 0$. Определить сечение данной квадрики с координатными гиперплоскостями $Ox_1x_2x_3$, $Ox_1x_2x_4$, $Ox_1x_3x_4$ и $Ox_2x_3x_4$.

1413. Квадрика дана в пространстве $\widetilde{R}_3$ уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4 = 0$. Найти те прямолинейные образующие этой квадрики, которые проходят через точку (—1, —1, 1).

1414. В пространстве $\widetilde{R}_n$ даны квадрика G и m — плоскость Π_m. Показать, что если в плоскости Π_m существует хотя бы одно неасимптотическое направление квадрики G, то пересечение плоскости Π_m и квадрики G есть некоторая квадрика плоскости[1] Π_m.

1415. В пространстве $\widetilde{R}_n$ дана квадрика уравнением $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2b_1x_1 + \ldots + 2b_nx_n + c = 0$. Найти условия, при которых эта квадрика: а) имеет только одно асимптотическое направление, совпадающее с направлением оси Ox_1; б) не имеет асимптотических направлений.

В каждой из задач 1416—1420 даны квадрики в пространстве $\widetilde{R}_n$. Определить асимптотические направления и размерность σ асимптотического подпространства каждой из квадрик. По полученным условиям выделить цилиндрические квадрики.

1416. $\widetilde{R}_2$; $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = 0$.

1417. $\widetilde{R}_2$; $9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2 - 40x_1 + 30x_2 = 0$.

1418. $\widetilde{R}_3$; $x_1^2 + 2x_3^2 - 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 13 = 0$.

1419. $\widetilde{R}_3$; $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + x_2 = 0$.

1420. $\widetilde{R}_4$; $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_3x_4 + 6x_3 + 5x_4 = 0$.

---

[1] В данном случае плоскость Π_m рассматривается как некоторое $\widetilde{R}_m$.

2. Цилиндрические и конические квадрики

В каждой из следующих задач дана квадрика уравнением в общей декартовой системе координат пространства $\widetilde{R}_n$. Доказать, что данные квадрики являются цилиндрическими. Определить размерность образующих.

1421. $\widetilde{R}_3$; $x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2 + 12x_3 + 10 = 0$.

1422. $\widetilde{R}_4$; $4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_4 + 2x_1 - x_2 + x_4 + 15 = 0$.

1423. $\widetilde{R}_5$; $x_1^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_3x_4 + x_2 + 3x_3 + x_5 + 1 = 0$.

Квадрика называется конической, если она имеет хотя бы один центр, принадлежащий квадрике. В этом случае все ее центры принадлежат квадрике и называются ее вершинами.

В каждой из задач 1424—1426 дана квадрика в общей декартовой системе координат пространства $\widetilde{R}_n$. Доказать, что данные квадрики являются коническими. Определить плоскость вершин.

1424. $\widetilde{R}_3$; $x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$.

1425. $\widetilde{R}_4$; $x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_1x_4 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_4 + 10 = 0$.

1426. $\widetilde{R}_5$; $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_5^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_5 - 2x_2x_5 - 6x_2x_4 = 0$.

3. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду

Нормальным уравнением квадрики, заданной в общей декартовой системе координат пространства $\widetilde{R}_n$, называется уравнение вида $\mathscr{E}_1x_1^2 + \mathscr{E}_2x_2^2 + \ldots + \mathscr{E}_rx_r^2 = \mathscr{E}_0$ или вида $\mathscr{E}_1x_1^2 + \mathscr{E}_2x_2^2 + \ldots + \mathscr{E}_rx_r^2 + x_{r+1} = 0$, где r — ранг квадрики, $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_r$ равны 1 или — 1, а $\mathscr{E}_0$ равно 1 или нулю.

В каждой из задач 1427—1432 дана квадрика в общей декартовой системе координат пространства $\widetilde{R}_n$. При помощи преобразования системы координат найти нормальное уравнение квадрики и определить его тип.

1427. $\widetilde{R}_3$; $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3 - 5 = 0$.

1428. $\widetilde{R}_3$; $x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 - 2 = 0$.

1429. $\widetilde{R}_4$; $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4 - 6x_2 + 8 = 0$.

1430. $\widetilde{R}_4$; $4x_1^2 + 9x_2^2 - x_4^2 + 6x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_4 + 5 = 0$.

1431. $\widetilde{R}_5$; $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_3x_4 = 0$.

1432. $\widetilde{R}_5$; $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 15x_5 - 1 = 0$.

§ 62. Асимптотические и диаметральные гиперплоскости. Центры квадрик

1. Асимптотические и диаметральные гиперплоскости

1433. Пусть в пространстве $\widetilde{R}_n$ дана квадрика уравнением (1), стр. 177, и вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, \ldots, p_n\}$, удовлетворяющий условиям: а) $\boldsymbol{p}$ имеет асимптотическое направление; б) хотя бы одно из чисел $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}p^i$ при $j = 1, \ldots, n$ отлично от нуля.

Показать, что множество всех точек пространства $\widetilde{R}_n$, принадлежащих всем асимптотам или прямолинейным образующим направления $\boldsymbol{p}$, образует гиперплоскость. Она называется асимптотической гиперплоскостью квадрики, соответствующей вектору $\boldsymbol{p}$.

1434. В пространстве $\widetilde{R}_n$ даны квадрика своим уравнением и вектор $\boldsymbol{p}$ координатами. В каждом из следующих случаев показать, что вектор $\boldsymbol{p}$ удовлетворяет условиям а) и б) предыдущей задачи, и написать уравнение асимптотической гиперплоскости, соответствующей данному вектору:

а) $\widetilde{R}_3$; $\boldsymbol{P}\{1, 0, 1\}$, $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0$;

б) $\widetilde{R}_4$; $\boldsymbol{p}\{-2, 1, 1, 0,\}$, $x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 - 2 = 0$;

в) $\widetilde{R}_5$; $\boldsymbol{p}\{2, -1, 0, 1, 3\}$, $x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 - 2 = 0$.

1435. В пространстве $\widetilde{R}_3$ дана квадрика уравнением

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 5 = 0.$$

Найти уравнение той диаметральной плоскости, которая сопряжена направлению прямой

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

1436. В пространстве $\widetilde{R}_3$ дана квадрика уравнением

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 5 = 0.$$

Найти уравнение той диаметральной плоскости, которая проходит через прямую $x_1 = 1 - 3t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 2 - t$.

1437. В пространстве $\widetilde{R}_3$ дана квадрика уравнением

$$2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0.$$

Найти уравнение той диаметральной плоскости, которая проходит через прямую

$$x_1 = 1 + t,\ x_2 = -1 - t,\ x_3 = t,$$

1438. В пространстве $\widetilde{R}_3$ дана квадрика уравнением

$$x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - 4x_1 - 1 = 0.$$

Написать уравнение той диаметральной плоскости, которая проходит через точки O (0, 0, 0)) и M (1, 1, 0).

1439. Найти общую диаметральную плоскость квадрик, заданных в пространстве $\widetilde{R}_3$:

$$4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$$

и

$$x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_1 - 16x_2 + 1 = 0.$$

1440. В пространстве $\widetilde{R}_4$ дана квадрика уравнением

$$x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_3x_4 + 4x_3 + 8x_4 + 15 = 0.$$

Написать уравнение той диаметральной гиперплоскости, которая проходит через начало координат.

1441. В $\widetilde{R}_n$ дана квадрика и гиперплоскость уравнениями. В каждом из следующих случаев написать уравнение той диаметральной гиперплоскости, которая параллельна данной гиперплоскости:
а) $\widetilde{R}_3$; $6x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2 - 3 = 0$, $x_1 + 3x_2 - x_3 + 5 = 0$; б) $\widetilde{R}_4$; $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1 - 6x_3 - 2x_4 + 15 = 0$,

$$x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + 15 = 0.$$

1442. Квадрика задана своим уравнением (1), стр. 177, в пространстве $\widetilde{R}_3$. При каком условии, накладываемом на коэффициенты, плоскость Ox_1x_2 является одной из диаметральных плоскостей квадрики.

1443. Ответьте на следующие вопросы: а) Существует ли такая квадрика в $\widetilde{R}_n$, для которой все диаметральные гиперплоскости совпадают? б) Как расположены диаметральные гиперплоскости квадрики, которая распадается на пару пересекающихся гиперплоскостей?

2. Центры квадрик

1444. Найти центры следующих квадрик пространства $\widetilde{R}_3$:
а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$;
б) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 8x_3 - 8 = 0$;
в) $2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0$.

1445. Найти множество центров каждой из следующих квадрик пространства $\widetilde{R}_3$:
а) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_2 - 36x_3 = 0$;
б) $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0$;
в) $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$;
г) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2 = 0$.

1446. Показать, что следующие квадрики, заданные в пространстве $\widetilde{R}_n$, являются центральными, и определить координаты их центров:

а) $\widetilde{R}_4$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_4^2-2x_1-6x_3+4x_4+10=0$;

б) $\widetilde{R}_4$; $x_1^2+2x_2^2+10x_3^2-4x_4^2+2x_1x_2+6x_2x_3+8x_4+10=0$;

в) $\widetilde{R}_5$; $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2+x_5^2+2x_1x_2-2x_2x_3-15=0$.

1447. В пространстве $\widetilde{R}_n$ даны квадрики. Определить плоскость центров каждой квадрики:

а) $\widetilde{R}_4$; $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2-4x_1x_2+2x_2x_3+4x_1x_4-2x_2x_4+$ $+2x_1-x_2+x_4+15=0$;

б) $\widetilde{R}_5$; $x_1^2+4x_2^2-x_3^2-4x_4^2-4x_1x_2-4x_3x_4+4x_3+8x_4+15=0$;

в) $\widetilde{R}_5$; $x_1^2+x_2^2+x_5^2-2x_1x_2+2x_1x_5-2x_2x_5-4=0$.

1448. Показать, что следующие квадрики, заданные в пространстве $\widetilde{R}_n$ не имеют центров:

а) $\widetilde{R}_5$; $x_1^2+9x_3^2+x_4^2-6x_1x_3+2x_1x_4-6x_3x_4+x_2+3x_3+x_5+$ $+1=0$;

б) $\widetilde{R}_4$; $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+5x_2x_4-x_2+x_3+x_4-4=0$;

в) $\widetilde{R}_3$; $2x_1^2+10x_2^2-2x_3^2+12x_1x_2+8x_2x_3+12x_1+4x_2-8x_3-1=0$;

г) $\widetilde{R}_5$; $2x_1^2-5x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_3-3x_2x_4+x_2+x_5-3=0$;

д) $\widetilde{R}_n$; $x_1^2+x_2+x_3+\ldots+x_n=0$.

1449. В пространстве $\widetilde{R}_n$ квадрика задана уравнением (1), стр. 177. Найти квадрику, для которой гиперплоскость $Ox_1\ldots x_{n-1}$ является гиперплоскостью центров данной квадрики.

1450. В R_n квадрика дана уравнением (1), стр. 177. При каком условии ось Ox_1 является прямой центров для данной квадрики?

3. Главные диаметральные гиперплоскости и оси

1451. В пространстве $\widetilde{E}_3$ дана квадрика уравнением в прямоугольной декартовой системе координат. В каждом из следующих случаев найти уравнения главных диаметральных плоскостей и осей квадрики:

а) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3-4x_1+6x_2+2x_3-8=0$;

б) $5x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+2x_1+8x_2+6x_3-10=0$;

в) $5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3-6x_1+6x_2-7=0$;

г) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3-4x_1+4x_2-2x_3-12=0$;

д) $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+2x_1+6x_2+2x_3=0$.

§ 63. Приведение общего уравнения квадрики трехмерного евклидова пространства к каноническому виду

Каноническим уравнением квадрики, заданной в прямоугольной декартовой системе координат, называется уравнение вида $\lambda_1x_1^2+$

$+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_r x_r^2=\mathscr{E}_0$ или вида $\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots\lambda_r x_r^2=2x_{r+1}$, где r — ранг квадрики, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — отличные от нуля характеристические числа, а $\mathscr{E}_0$ равно единице или нулю.

В задачах 1452—1459 с помощью преобразования вращения прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду уравнения квадрик трехмерного евклидова пространства $\widetilde{E}_3$ и написать формулы преобразования.

1452. $5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3-24=0.$

1453. $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2-5x_3^2+2x_1x_2-15=0.$

1454. $3x_1^2+2x_2-4x_3=0.$

1455. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3-12=0.$

1456. $5x_1^2+5x_2^2-3x_3^2+8x_1x_2-9=0.$

1457. $5x_2^2+4x_1+6x_3=0.$

1458. $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3-x_2x_3=3.$

1459. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3=4.$

В задачах 1460—1468 с помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду уравнения квадрик трехмерного евклидова пространства $\widetilde{E}_3$.

1460. $x_1^2-6x_2^2+2x_3^2-2x_1+12x_2+4x_3+9=0.$

1461. $3x_1^2-2x_3^2+12x_1-2x_2+4x_3+6=0.$

1462. $2x_1^2+x_2^2+4x_3^2-4x_1+6x_2+16x_3-1=0.$

1463. $2x_1^2+3x_2^2-4x_1+12x_2-12x_3+2=0.$

1464. $x_1^2-2x_3^2+6x_1+4x_2-4x_3+3=0.$

1465. $x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1+4x_2-3=0.$

1466. $x_1^2-3x_2^2+10x_1+12x_2+13=0.$

1467. $5x_1^2+10x_2^2+2x_3^2-40x_2+50=0.$

1468. $x_1^2+14x_1+44=0.$

В задачах 1469—1476 с помощью преобразования вращения системы и переноса начала координат привести к каноническому виду уравнения следующих квадрик трехмерного евклидова пространства $\widetilde{E}_3$.

1469. $5x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+4x_1+8x_2+$ $+12x_3-4=0.$

1470. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+8x_1+4x_2-5=0.$

1471. $2x_1x_3+4x_1-6x_2+8x_3-2=0.$

1472. $5x_1^2+5x_2^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3-36x_1+36x_2-18x_3-$ $-18=0.$

1473. $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3+8x_1-4x_2+8x_3=0.$

1474. $5x_2^2-2x_1+10x_2-4x_3+1=0.$

1475. $3x_1^2+2x_2x_3-6x_1+4x_2-4x_3+1=0.$

1476. $2x_1^2-3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_3+4x_1-6x_2+8x_3-\frac{35}{3}=0.$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

В настоящем разделе помещены ответы к задачам, а также указания к решению большинства задач. В отдельных случаях приведены решения типичных и наиболее трудных задач.

Следует иметь в виду, что каждая задача, как правило, может быть решена различными способами. Указания или решения, помещенные в данном разделе, намечают один из возможных путей решения задачи. При этом избранный метод решения задачи соответствует тому разделу теории, куда помещена данная задача.

1. а) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{NP} \not\Uparrow \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{PC} \parallel \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PC} \neq \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$; е) $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{NP}=-\overrightarrow{CM}$. **2.** а) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. **3.** Указанные свойства будут выполнены для случаев а) и в). **7.** а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AP}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{0_1}$; **11.** В тросах возникают растягивающие силы: $10\sqrt{3}$ *кГ* и $20\sqrt{3}$ *кГ*. **12.** На стержень AB действует растягивающая сила 120 *кГ*, а на стержень CB — сжимающая сила $60\sqrt{3}$ *кГ*. **14.** а) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны или коллинеарны, но имеют противоположные направления, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; б) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены или хотя бы один из них нулевой, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. **16.** Да. Например, если в треугольнике ABC сторона AB меньше сторон AC и BC, то векторы $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}_1$ и $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}_1$ удовлетворяют условиям а), а векторы $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}_2$ — условиям б). **18.** Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то данное в условии задачи равенство означает, что диагонали параллелограмма, построенного на данных векторах, имеют равные длины. Этим свойством характеризуется прямоугольник, поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то условие задачи всегда выполнено. Если, наконец, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. **22.** а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{AG_1}$; в) $\overrightarrow{GA_1}$; г) $\overrightarrow{FG}$. **23.** $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$; $BL=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. **24.** $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$; $\overrightarrow{BC}=2(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$; $\overrightarrow{AC}=2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. **25.** а) -1; б) -2; в) $\dfrac{7}{2}$; г) $\dfrac{2}{3}$; д) $\dfrac{1}{3}$. **28.** Указание. Доказать, что длины векторов $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ и $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ равны и воспользоваться теоремой: диагонали ромба делят соответствующие углы ромба пополам. **30.** Указание. Воспользоваться задачей 29. **35.** Указание. При доказательстве воспользоваться предложением: если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — векторы соответственно прямых l_1 и l_2, а $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{e}_1+\beta\boldsymbol{e}_2$, то $\boldsymbol{x}'=\alpha\boldsymbol{e}_1$. **37.** Нет. **38.** Указание. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы, принадлежащие Ω; показать, что Ω состоит из тех и только тех векторов, которые линейно зависят от $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. **39.** Нет. Указание. Использовать теорему, сформулированную в задаче 38. **40.** $\boldsymbol{x}=\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y}=\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. Указание. Так как свойства суммы, разности и умножения вектора на число формально совпадают с аналогичными свойствами числовых операций, то для решения векторных уравнений можно пользоваться теми же приемами, что и при решении линейных уравнений в алгебре. **41.** Указание. Последовательно исключив $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, сначала найти $\boldsymbol{x}$. **42.** Решение. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой и A и B — различные точки. Тогда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ или $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Отсюда получаем: $\boldsymbol{r}_1(\lambda - 1) - \boldsymbol{r}_2\lambda + \boldsymbol{r}_3 = \vec{0}$. Полагая $\alpha = \lambda - 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$, получаем искомый результат. Обратно, пусть $\alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_3\boldsymbol{r}_3 = \vec{0}$ и, например, $\alpha_3 \neq 0$. Разделив предыдущее соотношение на α_3, получаем: $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \vec{0}$ или $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_2 - \frac{\alpha_1+\alpha_3}{\alpha_3}\boldsymbol{r}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Отсюда получаем: $\overrightarrow{AC} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\overrightarrow{AB}$, т. е. точки A, B и C коллинеарны. **43.** См. решение задачи 42. **44.** $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{A_1C} - 2\overrightarrow{DB_1} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$. **45.** $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \vec{0}$. **46.** Указание. Задача решается так же, как и задача 42. **47.** Указание. Сначала рассмотреть случай, когда O не лежит в плоскости ABC. Если $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — радиус-векторы точек A_1 и B_1, то согласно задаче 43 имеем: $\boldsymbol{R} = \alpha\boldsymbol{R}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{R} = \beta\boldsymbol{R}_2 + (1-\beta)\boldsymbol{r}_2$. Далее, выразив $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, подставить в эти соотношения и, учитывая, что $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ не компланарны, показать, что $\alpha = \frac{1+\mu}{\lambda+\mu+1}$. Показать, что полученная формула справедлива также в случае, когда O лежит на плоскости ABC. Для этой цели взять точку O^* вне плоскости треугольника ABC и воспользоваться уже выведенной формулой. **48.** Указание. Воспользоваться задачей 47 и теоремой о биссектрисе внутреннего угла треугольника. **49.** Указание. Воспользоваться задачей 47 и учесть, что если, например, B_1 есть основание высоты, опущенной из точки B на сторону AC, то $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}$. **50.** Указание. Воспользоваться задачей 47 и учесть, что если, например, B_1 есть точка пересечения стороны AC с прямой, проведенной через вершину B и центр описанной окружности, то $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma}$. **51.** Указание. Воспользовавшись задачами 49 и 50, проверить справедливость тождества сначала для случая, когда точка O не лежит в плоскости треугольника ABC. При этом воспользоваться тем, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линейно независимы. Далее, использовав полученное тождество, показать, что оно справедливо также и в том случае, когда полюс расположен в плоскости треугольника ABC. Если полюс совпадает с точкой P, то формула принимает вид: $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. **53.** $R = \frac{1}{k}(r_1 + r_2 + \ldots + r_k)$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **54.** Указание. Воспользоваться задачами 29, 48, 49, 50, 52. **55.** $m_1 + m_2 + \ldots + m_k - k = 0$. Сравнить с задачей 52.

56. а) $\{1, 1\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; в) $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$; г) $\{0, 1\}$; д) $\left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$; е) $\{-1, 1\}$; ж) $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$.

57. а) $\{4, -2\}$; б) $\{0, 1\}$; в) $\{3, -2\}$; г) $\{2, 0\}$; д) $\{-1, 1\}$; е) $\{0,2\}$; ж) $\{-3,2\}$.

58. $\boldsymbol{a}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$; $\boldsymbol{b}\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right\}$; $\boldsymbol{c}\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$; $\boldsymbol{d}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right\}$.

59. $\overrightarrow{AC}\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{AD}\{1, 1\}$; $\overrightarrow{AF}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{EF}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. **60.** $\overrightarrow{AB}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{BC}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{CD}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{DA}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. **61.** а) $\overrightarrow{CM}\{-1, 1\}$; $\overrightarrow{OB}\{-1, -2\}$;

$\overrightarrow{KM}\{-1, -1\}$; $\overrightarrow{CB}\{-2, -2\}$; $\overrightarrow{NC}\{1,1\}$; $\overrightarrow{AN}\{-1, -5\}$; б) $\overrightarrow{CM}\{-2, 1\}$; $\overrightarrow{OB}\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; $\overrightarrow{KM}\{-1, 1\}$; $\overrightarrow{CB}\{-2, 2\}$; $\overrightarrow{NC}\{1,-1\}$; $\overrightarrow{AN}\{1, 1\}$. **62.** $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a}e_1 + e_2$; $\overrightarrow{AC} = \frac{a-b}{a}e_1 + e_2$; $\overrightarrow{BD} = -e_1 + e_2$, где $a = AB$, $b = AD$. Указание. Предварительно доказать, что если AB — большее основание трапеции, а CD — меньшее, то $\overrightarrow{CD} = \frac{b-a}{a}e_1$. **65.** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 7\boldsymbol{v}$. Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$. Определим коэффициенты α и β. Для этой цели воспользуемся теоремой о координатах линейной комбинации векторов: $9 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1$, $1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0$. Отсюда получаем: $\alpha = 1$, $\beta = 7$. **66.** $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$. **67.** $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$. **68.** $\alpha = -2$. Указание. Выразить координаты векторов $\boldsymbol{p}\{x_1, y_1\}$ и $\boldsymbol{q}\{x_2, y_2\}$ через координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и воспользоваться условием коллинеарности векторов. **69.** а) $\alpha = 0$; б) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$; в) при любом α векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ не коллинеарны. **70.** $\overrightarrow{AM_1}\left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$; $\overrightarrow{BM_2}\left\{0, -\frac{5}{2}\right\}$; $\overrightarrow{CM_3}\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. **72.** Существует. Указание. Из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ можно составить треугольник, удовлетворяющий условиям задачи в том и только в том случае, если имеет место одно из следующих соотношений: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \vec{0}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \vec{0}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \vec{0}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \vec{0}$. Используя координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, убеждаемся в том, что для них выполнено третье соотношение. **73.** Так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} = \vec{0}$, то трапеция $ABCD$ существует. **74.** $|\boldsymbol{a}| = 5$; $|\boldsymbol{b}| = 3$; $|\boldsymbol{c}| = 4$; $|\boldsymbol{d}| = \sqrt{5}$. **75.** $\boldsymbol{a}_1\{6, 4\}$, $\boldsymbol{a}_2\{6, -4\}$. **76.** $\boldsymbol{m}_0 = \frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}$; $\boldsymbol{m}_0\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$; $\boldsymbol{n}_0\left\{-\frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}}\right\}$; $\boldsymbol{p}_0\left\{-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right\}$; $\boldsymbol{q}_0\{0, -1\}$. **77.** $\boldsymbol{m}\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right\}$; $\boldsymbol{n}\left\{-\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$; $\boldsymbol{p}\left\{\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **78.** а) 45°; б) 75°; в) —30°; г) —60°. **79.** $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_3 \perp \boldsymbol{b}_3$. **80.** $\boldsymbol{a}_1'\{-3, 1\}$; $\boldsymbol{a}_2'\{2, -1\}$; $\boldsymbol{a}_3'\{0,6\}$; $\boldsymbol{a}_4'\{-3, 0\}$; $\boldsymbol{a}_5'\{\sqrt{5}, 2\}$. **82.** $-\frac{18}{17}\sqrt{34}$. **83.** $\frac{7}{2}\sqrt{2}$; $-\frac{7}{2}\sqrt{2}$. **84.** а) 4; б) —19; в) —2; г) 2. **85.** Решение. Пусть $\boldsymbol{ij}$ — прямоугольной декартовый базис, имеющий ту же ориентацию, что и базис $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Если в базисе $\boldsymbol{ij}$ заданные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеют координаты $\boldsymbol{a}\{a_1', a_2'\}$, $\boldsymbol{b}\{b_1', b_2'\}$, $\boldsymbol{e}_1\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\boldsymbol{e}_2\{\beta_1, \beta_2\}$, то $\boldsymbol{a} = a_1'\boldsymbol{i} + a_2'\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = b_1'\boldsymbol{i} + b_2'\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_1 = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = \beta_1\boldsymbol{i} + \beta_2\boldsymbol{j}$. Из условия задачи следует, что $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$. Подставляя в последнее равенство выражения векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, получаем: $\boldsymbol{a} = (a_1\alpha_1 + a_2\beta_1)\boldsymbol{i} + (a_1\alpha_2 + a_2\beta_2)\boldsymbol{j}$, откуда $a_1' = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1$, $a_2' = a_1\alpha_2 + a_2\beta_2$. Аналогично будем иметь: $b_1' = b_1\alpha_1 + b_2\beta_1$, $b_2' = b_1\alpha_2 + b_2\beta_2$. Так как

$$S_{ab} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}, \quad S_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

то, подставив в первое из этих соотношений полученные выше выражения для a_1', a_2', b_1', b_2' и воспользовавшись теоремой об умножении определителей, получаем искомый результат. **86.** а) 22; б) 12; в) $-\frac{17}{2}$; г) —6. **87.** а), г). **88.** $\overrightarrow{AC}\{0, 1, 1\}$, $\overrightarrow{AE}\left\{\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$, $\overrightarrow{EC_1}\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$, $\overrightarrow{B_1C_1}\{0, 1, 0\}$, $\overrightarrow{FG}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\overrightarrow{GD}\left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, $\overrightarrow{CB_1}\{1, -1, 0\}$, $\overrightarrow{A_1G}\left\{-\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$. **89.** $\overrightarrow{AC}\{1, -2, 1\}$, $\overrightarrow{AE}\{0, 1, 0\}$, $\overrightarrow{EC_1}\{1, -1, 1\}$, $\overrightarrow{B_1C_1}\{1, -2, 0\}$,

$\overrightarrow{FG}\left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$, $\overrightarrow{CD}\{0, 0, -1\}$, $\overrightarrow{CB_1}\{-1, 4, 0\}$, $\overrightarrow{A_1G}\{1, -3, 1\}$. **90.** $\overrightarrow{CS}\{-2, 0, 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{4, 2, 0\}$, $\overrightarrow{CA'}\{-3, -1, 1\}$, $\overrightarrow{O'A}\{-2, -2, -1\}$, $\overrightarrow{AS}\{2, 2, 2\}$, $\overrightarrow{AC'}\{3, 2, 1\}$, $\overrightarrow{BE'}\left\{0, -\frac{5}{2}, 1\right\}$, $\overrightarrow{AE'}\left\{2, \frac{3}{2}, 1\right\}$. **91.** $\overrightarrow{CS}\{2, -4, -2\}$, $\overrightarrow{AC}\{-4, 4, 0\}$, $\overrightarrow{CA'}\{3, -4, -1\}$, $\overrightarrow{O'A}\{2, 0, 1\}$, $\overrightarrow{AS}\{-2, 0, -2\}$, $\overrightarrow{AC'}\{-3, 2, -1\}$, $\overrightarrow{BE'}\{0, 5, -1\}$, $\overrightarrow{AE'}\{-2, 1, -1\}$. **92.** $\overrightarrow{AM}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$. **93.** а) $\boldsymbol{a}_3$; б) $\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_{10}$; в) $\boldsymbol{a}_7$; г) $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_8, \boldsymbol{a}_{10}$; д) $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_9$; е) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_{10}$. **94.** $\boldsymbol{p}_1\{2, 5, 0\}$, $\boldsymbol{p}_2\{-1, 2, 4\}$, $\boldsymbol{p}_3\{5{,}5, -2\}$, $\boldsymbol{p}_4\{1, 2, -2\}$, $\boldsymbol{p}_5\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$, $\boldsymbol{p}_6\left\{1, \frac{1}{3}, -4\right\}$. **95.** а) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = 0$; б) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{d} = 0$; в) $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} - 4\boldsymbol{d} = 0$. Р е ш е н и е. а) Четыре вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ всегда линейно зависимы, поэтому существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условию $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} + \lambda_4\boldsymbol{d} = \boldsymbol{O}$. Известно, что та же линейная зависимость имеет место для координат этих векторов, поэтому

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{21}{2}\lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 + 17\lambda_4 = 0, \\ \qquad\qquad 6\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Мы получили систему однородных линейных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4. Очевидно, $\lambda_4 \neq 0$, так как в противном случае, как нетрудно видеть, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Пусть $\lambda_4 = -2$, тогда $\lambda_3 = 1$. Подставив эти значения в первое и второе уравнения, получаем: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. **96.** $\overrightarrow{AC_1}\{1, 1, 1\}$, $\overrightarrow{A_1C}\{-1, 1, 1\}$, $\overrightarrow{DB_1}\{1, -1, 1\}$, $\overrightarrow{DB}\{0, -1, 1\}$; $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{A_1C} - 2\overrightarrow{DB_1} + 2\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{0}$; см. задачу 44. **97.** б) $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$; в) $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}_2$. **98.** Р е ш е н и е. По определению векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда существуют числа ξ, η, ζ, неравные одновременно нулю и удовлетворяющие условию $\xi\boldsymbol{a} + \eta\boldsymbol{b} + \zeta\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Отсюда по теореме о координатах линейной комбинации векторов имеем:

$$\begin{cases} \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3 = 0, \\ \xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3 = 0, \\ \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Используя условие существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений, получаем искомый результат. **99.** а) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; в) $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$. **100.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 98. **101.** У к а з а н и е. Выбрать базис и воспользоваться задачей 98. **102.** У к а з а н и е. Использовать теоремы, сформулированные в задачах 98 и 38. **103.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 36. **104.** а) 22; б) 42; в) $\sqrt{10}$; г) 18; д) 20. **105.** $\varphi_1 = 60°$; $\varphi_2 = 120°$. Р е ш е н и е. Так как пары векторов $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, то $(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}) = 0$ и $(\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 0$. Отсюда $7\boldsymbol{a}^2 + 16\boldsymbol{ab} - 15\boldsymbol{b}^2 = 0$, $7\boldsymbol{a}^2 - 30\boldsymbol{ab} + 8\boldsymbol{b}^2 = 0$ или $7a^2 + 16ab\cos\varphi - 15b^2 = 0$, $7a^2 - 30\,ab\cos\varphi + 8b^2 = 0$, где $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$. Разделив эти соотношения на a^2 и введя обозначение $\lambda = \frac{b}{a}$, получим: $7 + 16\lambda\cos\varphi - 15\lambda^2 = 0$, $7 - 30\lambda\cos\varphi + 8\lambda^2 = 0$. Исключив из этих двух соотношений λ, получим одно уравнение для определения $\cos\varphi$. Вычитая из первого соотношения второе, получим: $46\lambda\cos\varphi - 23\lambda^2 = 0$, или $2\cos\varphi = \lambda$. Подставив это значение в одно из предыдущих уравнений, будем иметь: $7 + 32\cos^2\varphi - 60\cos^2\varphi = 0$ или $\cos^2\varphi = \frac{1}{4}$, $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 120°$.

106. У к а з а н и е. Воспользоваться соотношением $\cos(\widehat{\boldsymbol{ab}'}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{ab}} + \widehat{\boldsymbol{bb}'}) =$

$= \cos(90^\circ + \widehat{ab}) = -\sin(\widehat{ab})$, $\cos(\widehat{a'b}) = \cos(\widehat{a'a} + \widehat{ab}) = \cos(-90^\circ + \widehat{ab}) = \sin(\widehat{ab})$.

107. $h = b + \frac{(b-c)\,b}{(c-b)^2}(c-b)$. Решение. Вектор BH коллинеарен с вектором $\overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{BH} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda(c-b)$, $h = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = b + \lambda(c-b)$ (1). Так как векторы h и $\overrightarrow{BC}$ ортогональны, то $h\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ или $[b + \lambda(c-b)]\cdot(c-b) = 0$, откуда $\lambda = \frac{(b-c)\cdot b}{(c-b)^2}$. Подставляя найденное значение λ в выражение (1), получаем искомый результат. **108.** Указание. Воспользоваться соотношением $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CC_1}$. **109.** Указание. Данное соотношение свести к виду: $(|a| - |b|)(ab - |a|\,|b|) = 0$. **110.** $\overrightarrow{OH} = c + \frac{c\,(b-c)}{(b-c)^2}(c-b) + \frac{c\,(a-c)}{(a-c)^2}(c-a)$. Указание. Задача решается по аналогии с задачей 107. **113.** $ab = 2 - \sqrt{2}$; $ac = 0$; $ad = 2$; $bc = -24 + 2\sqrt{2}$; $bd = -9$; $cd = 11$. **114.** а) -12; б) 2; в) 6; г) 49; д) 89. **115.** $\widehat{a,b}$ — тупой; $\widehat{a,c}$ — острый; $\widehat{a,d}$ — острый; $\widehat{b,c}$ — прямой; $\widehat{b,d}$ — острый. **117.** а) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; б) $\frac{2}{15}$; в) 0. **118.** 30°, 60°, 90°. **119.** $\cos(\widehat{i,a}) = \frac{5}{6}$; $\cos(\widehat{j,a}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos(\widehat{k,a}) = \frac{1}{2}$. **120.** 60° или 120°. **121.** $\{2, 2\sqrt{2}, 2\}$ или $\{2, 2\sqrt{2}, -2\}$.

122. 10 *кгс*, 10 *кгс*, $10\sqrt{2}$ *кгс*. **123.** На стержни AO и BO действуют растягивающие силы, равные $5\sqrt{6}$ *кгс*, а на стержень СО — сжимающая сила, равная $20\sqrt{3}$ *кгс*. **125.** $\overrightarrow{BH}\{-3, -3, 1\}$, $BH = \sqrt{19}$. **126.** $\overrightarrow{OH}\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$. Указание. Использовать условия ортогональности векторов $\overrightarrow{OH}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH}$ и $\overrightarrow{AC}$ и компланарность векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AH}$. **129.** Если $a\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, а $b\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то $ab = 3\alpha_1\beta_1 + 4\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3$; $pq = 15$; $pr = 0$; $qr = 12$. Указание. Использовать формулу предыдущей задачи. **130.**

$$\cos(\widehat{ab}) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{3} g_{ij}\alpha_i\beta_j}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{3} g_{ij}\alpha_i\alpha_j\right)\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{3} g_{ij}\beta_i\beta_j\right)}}.$$

Указание. Воспользоваться задачей 128. **131.** Пусть ijk — некоторый прямоугольный декартовый базис, в котором вектор a имеет координаты $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. а) $|a|^2 - k > 0$. Множество концов искомых векторов, приложенных к некоторому полюсу O, есть сфера с центром в точке с радиус-вектором $\{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ и радиуса $R = \sqrt{|a|^2 - k}$; б) $|a|^2 - k = 0$. Данное уравнение имеет одно решение $x = -a$; в) $|a|^2 - k < 0$. Действительных решений нет. Решение. Пусть в базисе ijk вектор a имеет координаты $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Обозначим через x, y, z координаты искомого вектора x. В этом случае данное уравнение принимает вид: $(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k = 0$ или $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + (z+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k = |a|^2 - k$. Отсюда вытекает искомый результат. **132.** а) $x = a$; б) множество концов вектора x, приложенных к некоторому полюсу O, есть сфера с центром в точке с радиус-вектором $\{0, -2, 0\}$ и радиуса $R = \sqrt{3}$; в) нет решений. Указание. См. решение предыдущей задачи. **133.** а) $x = |a|^{-\frac{2}{3}}a$; б) если a и b не коллинеарны, то задача не имеет решений. При $a \parallel b$ задача сводится к задаче 131. Решение. а) Если a_0 — единичный вектор направления a, а x_0 — единичный вектор искомого вектора, то данное уравнение сводится к следующему: $x_0\,|x|^3 = a_0|a|$. Отсюда $x_0 = a_0$,

$|x|^3 = |a|$, $|x| = \sqrt[3]{|a|}$, $x = x_0|x| = a_0\sqrt[3]{|a|} = a\,|a|^{-\frac{2}{3}}$. 134. Если $b = \lambda a$, то $\beta = \lambda\alpha$. 135. Указание. Выбрав базис, записать данные уравнения в координатах и применить теорему Крамера для решения системы линейных уравнений. 136. $x\{-4, -6, 4\}$. 137. Нет. 138. $x\{1, 2, -2\}$. 139. Нет. 140. Нет. Решение. Возьмем в пространстве прямоугольный декартовый базис ijk так, чтобы векторы i и a были сонаправлены. Если x, y, z — координаты вектора x, то $x = xi + yj + zk$, поэтому данное соотношение приводится к виду: $|a|x = \alpha$ или $x = \frac{\alpha}{|a|}$. Это соотношение показывает, что если векторы x приложить к некоторой точке O пространства, то их концы будут лежать в плоскости, ортогональной a и отстоящей от нее на расстоянии $\frac{\alpha}{|a|}$. 141. Нет. 142. Нет. 143. Указание. Воспользоваться задачей 29. 144. Решение. Пусть O — полюс, расположенный вне плоскости треугольника $A'B'C'$, а $r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3$ — радиус-векторы соответственно точек A, B, C, A', B', C'. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $3\overrightarrow{AM} = -2r_1 + r_2 + r_3$, $3\overrightarrow{BM} = r_1 - 2r_2 + r_3$, $3\overrightarrow{CM} = r_1 + r_2 - 2r_3$. Из условия задачи следует, что

$$r_1 + r_2 - 2r_3 = \lambda_1(R_2 - R_1), \quad (1)$$

$$r_1 - 2r_2 + r_3 = \lambda_2(R_1 - R_3), \quad (2)$$

$$-2r_1 + r_2 + r_3 = \lambda_3(R_3 - R_2). \quad (3)$$

Сложив эти соотношения и учитывая, что R_1, R_2, R_3 не компланарны, приходим к выводу, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Умножив соотношение (1) на 2 и сложив с соотношением (2), получим: $3(r_1 - r_3) = \lambda(-R_1 + 2R_2 - R_3)$ или $3\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{M'B'}$, где M' — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$. Отсюда следует, что сторона AC параллельна медиане $M'B'$. Аналогично можно показать, что две другие медианы $M'A'$ и $M'C'$ соответственно параллельны сторонам BC и AB. 146. $k = \frac{3}{4}$. 147. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Указание. Пусть $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$ и $c = \overrightarrow{CA}$. Выразить векторы $\overrightarrow{CM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$ и $\overrightarrow{BM_3}$ через a, b и c и воспользоваться условием $a + b + c = 0$. Эта задача является обобщением задачи 144. 149. Указание. На рисунке 44 изображен треугольник ABC с построенными на сторонах параллелограммами. Для решения задачи достаточно показать, что $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 0$. 150. Указание. Если m и n — единичные векторы, направленные соответственно вдоль сторон AB и AC, то вектор $m - n$ направлен вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A треугольника ABC. 152. Указание. Пусть O — точка пересечения двух высот треугольника ABC, а r_1, r_2, r_3 — соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Утверждение теоремы легко получить, рассматривая тождество $(r_2 - r_1)r_3 + (r_3 - r_2)r_1 + (r_1 - r_3)r_2 = 0$. 153. Указание. Использовать соотношение задачи 108. 154. Указание. Воспользоваться тождеством $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. 155. Указание. Если C_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, то предварительно показать, что данное соотношение эквивалентно соотношению $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = 0$. 156. Указание. Воспользоваться задачей 155 и учесть, что если O — центр

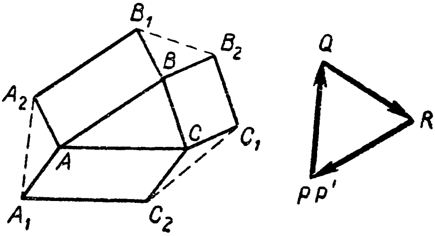


Рис. 44

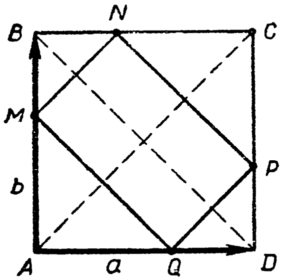


Рис. 45

описанной окружности и r — ее радиус, то $\cos 2A = \dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{r^2}$; $\cos 2B = \dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{r^2}$; $\cos 2C = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{r^2}$. **158.** Указание. Положим $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$. Так как $\overrightarrow{AM}$ направлен

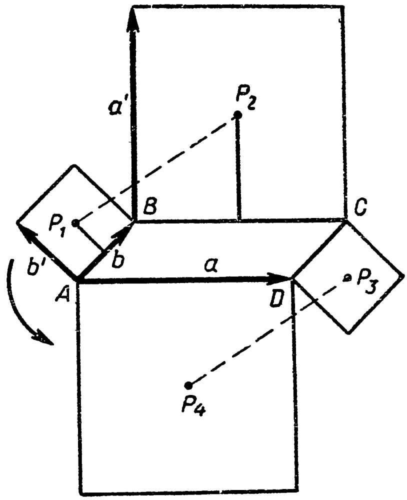


Рис. 46

вдоль биссектрисы угла BAC, получаем: $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{1+\lambda}\right| = \left|\dfrac{\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}\right|$. Отсюда определяем λ. **159.** Указание. Воспользоваться формулой для вычисления $\sin(\widehat{\boldsymbol{ab}})$ по координатам векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в прямоугольном декартовом базисе. **160.** $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$. **161.** Указание. Обозначая через $\{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\{\alpha_2, \beta_2\}$ координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в прямоугольном декартовом базисе, выразить через них координаты векторов $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{LB}$, $\overrightarrow{DC}$. Далее, пользуясь соответствующими формулами, проверить утверждения задачи. **162.** Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб. Если ввести обозначения $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, то $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$, так как $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. Отсюда вытекает, что $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$. **165.** Указание. Полагая $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, выразить векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и записать условие их коллинеарности. **166.** Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$. Так как векторы $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{NC}$ коллинеарны $\boldsymbol{a}$, то $\overrightarrow{AQ} = \alpha\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{CN} = \lambda\boldsymbol{a}$ (рис. 45). Точно так же в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CP}$ получаем: $\overrightarrow{AM} = \beta\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CP} = \mu\boldsymbol{b}$. Воспользуемся, далее, тем, что $MNPQ$ — прямоугольник. Это означает, что выполнены следующие условия:

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \text{ и } \overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN} = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b},\\
\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CN} = \mu\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a},\\
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) =\\
&= (1+\lambda)\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставив эти значения в соотношения (1), получаем:

$$\alpha \boldsymbol{a} - \beta \boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{b} - \lambda \boldsymbol{a}; \ (\alpha \boldsymbol{a} - \beta \boldsymbol{b}) [(1+\lambda) \boldsymbol{a} + (1-\lambda) \boldsymbol{b}] = 0.$$

Из первого соотношения в силу неколлинеарности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получаем: $\alpha = -\lambda, \beta = -\mu$. Из второго соотношения имеем: $\alpha (1+\lambda)\boldsymbol{a}^2 - \beta (1-\lambda)\boldsymbol{b}^2 = 0$. Отсюда в силу равенства $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$ получаем: $\alpha(1+\lambda) - \beta(1-\beta) = 0$, или $\alpha(1-\alpha) - \beta(1-\beta) = 0$, $(\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta) = 0$. Возможны два случая: а) $\alpha - \beta = 0, \alpha = \beta$. Тогда из соотношения (2) имеем: $\overrightarrow{MQ} = \alpha(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MN} = (1-\alpha)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Эти соотношения показывают, что $\overrightarrow{MQ} \parallel (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ и $\overrightarrow{MN} \parallel (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, т. е. стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата; б) $1-\alpha-\beta = 0$, $\overrightarrow{MQ}^2 = \alpha^2\boldsymbol{a}^2 + \beta^2\boldsymbol{b}^2 = (\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{a}^2$, $\overrightarrow{MN}^2 = (1-\alpha)^2\boldsymbol{a}^2 + (1-\beta)^2\boldsymbol{b}^2 = [(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2]\boldsymbol{a}^2 = [2(1-\alpha-\beta)+\alpha^2+\beta^2]\boldsymbol{a}^2 = (\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{a}^2$. Таким образом, $\overrightarrow{MQ}^2 = \overrightarrow{MN}^2$, или $MQ = MN$; в этом случае прямоугольник является квадратом. **167.** Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — векторы, полученные из $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поворотом на 90° против часовой стрелки. Легко видеть, что $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}')$; $\overrightarrow{P_1P_4} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}')$; $\overrightarrow{P_4P_3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}')$ (относительно обозначений см. рис. 46). Отсюда непосредственно следует, что $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$. Используя результат задачи 106, легко показать, что $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = 0$. Таким образом, $P_1P_2P_3P_4$ — квадрат. **170.** Указание. В данном четырехугольнике $ABCD$, полагая $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{c}$, воспользоваться векторным тождеством $2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2$. **173.** Решение. Возьмем произвольный полюс пространства и обозначим через $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ радиус-векторы соответственно точек A, B, C, D, M, M_1, M_2, M_3. Из условий задачи имеем: $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_4 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3$. Из первого и третьего соотношений получаем: $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_4 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3$, или, учитывая второе соотношение, будем иметь: $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_4 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_3$. Отсюда вытекает искомый результат. **175.** Указание. Воспользовавшись задачей 53, показать, что медианы тетраэдра пересекаются в центроиде вершин. **176.** 60°. **178.** 45°. **179.** Указание. При решении задачи использовать векторы $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ и воспользоваться задачей 159. **180.** Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, а OA и BC — рассматриваемые ребра. Введем обозначения: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a'$, $AC = b'$, $AB = c'$. Искомое соотношение может быть записано следующим образом:

$$2aa' \cos \Theta = c^2 + c'^2 - b'^2 - b'^2,$$

$$2\boldsymbol{a}\,\overrightarrow{BC} = c^2 - b^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2, \ 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2.$$

Пользуясь свойствами скалярного произведения, непосредственно убеждаемся в справедливости этого соотношения. **181.** Указание. Использовать результат предыдущей задачи. **183.** Если M и M' — середины двух противоположных ребер, длины которых равны a, a' и b, c, b', c' — длины остальных четырех ребер, то $MM'^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2)$. **184.** Указание. Воспользоваться задачей 180. **188.** а) $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ или $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, a)$; б) $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, или $(0, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$; в) $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, -b)$ или $(0, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, -a)$; г) $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ или $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, -a)$. **189.** а) $(1, 7)$; б) $(3, 0)$; в) $(-4, 4)$; г) $(2, -7)$; д) $(2, -3)$. **190.** а) (a, a), $(-a, a)$, $(-a, -a)$, $(a, -a)$; б) $(a\sqrt{2}, 0)$, $(0, a\sqrt{2})$, $(-a\sqrt{2}, 0)$, $(0, -a\sqrt{2})$. **191.** $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(1, \sqrt{3})$,

$E\ (0, \sqrt{3}), F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), O\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **192.** $A(-5, 0)$, $B(-5+2\sqrt{3}, 2)$, $C(5-2\sqrt{3}, 2)$, $D(5, 0)$, $M\left(0, \frac{25+5\sqrt{3}}{22}\right)$, $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **193.** $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{5}, 1\right)$, $D(1, 0)$, $M\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{10-2\sqrt{3}}, \frac{5}{10-2\sqrt{3}}\right)$, $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$. **194.** $A'(1, 3)$, $B'(0, -4)$, $C'(-3, -5)$, $D'(7, -2)$, $E'(-3, 2)$. **195.** $A'(5, 2)$, $B'(-5, 1)$, $C'(3, 6)$, $D'(-2, 0)$, $E'(3, 5)$. **196.** $A'(-1; -1)$, $B'(-3, 2)$, $C'(-3, 0)$, $D'(4, -3)$, $E'(2, 1)$. **197.** а) $A_1\ (5, -3)$, $B_1\ (-2, 5)$, $C_1\ (3, 2)$, $D_1\ (7, 2)$; б) $A_2\ (-5, 3)$, $B_2\ (2, -5)$, $C_2\ (-3, -2)$, $D_2\ (-7, -2)$. **201.** $D\ (-3, 12)$. **202.** Существуют два квадрата $ABCD$ и $A'B'C'D'$, удовлетворяющие условиям задачи $C\ (1, 8)$, $D\ (-4, 6)$, $C'\ (5, -2)$, $D'(0, -4)$. Указание. Для определения координат точек D и D' предварительно определить координаты векторов, полученных поворотом вектора $\overrightarrow{AB}$ на $+90°$ и $-90°$. **203.** Задача имеет два решения: $C_1\ (-1-\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$; $C_2\ (-1+\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3})$. Указание. Предварительно доказать предложение: если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{x, y\}$, то вектор $\boldsymbol{b}$, полученный из $\boldsymbol{a}$ поворотом на 60°, имеет координаты $\left\{\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y), \ \frac{1}{2}(y+\sqrt{3}x)\right\}$. **204.** $B\ (-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$, $C\ (-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, $D\ (-3, 0)$, $E\ (-2+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, $F\ (\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$. Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче. **205.** Середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 имеют координаты $(-2, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$. **206.** $\left(1, \frac{9}{2}\right)$. Указание. Центр тяжести однородного стержня находится в центроиде концов стержня, т. е. в середине стержня. **207.** а) $M\ (7, -1)$; б) $N\ (-5, 8)$. **208.** $C\ (8, 0)$, $D\ (2, -4)$. **210.** $B\ (6, 5)$, $D\ (0, -3)$. **211.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $(-4,1)$; $\left(1, \frac{8}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$. **212.** Имеются две точки, удовлетворяющие условию задачи: $C_1\ (-3, -5)$ и $C_2\ (3, -6)$. **213.** $A_1\left(3, \frac{13}{3}\right)$, $A_3\left(1, \frac{17}{3}\right)$, $A_4\left(0, \frac{19}{3}\right)$, $A_6\left(-2, \frac{23}{3}\right)$; $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_6 = -4$. **214.** а) $(1, -3)$, $(3, 4)$, $(7, -2)$; б) $(1,6)$, $(9, -2)$, $(-5, -4)$; в) $(-3, 4)$, $(9, 0)$, $(1, -8)$. **215.** а) $(1, 2)$; б) $(0, 0)$; в) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$. Указание. Воспользоваться задачей 29. **216.** $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. Указание. Центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в центроиде вершин этой пластинки, т. е. в точке пересечения медиан. **217.** $(0,3)$. Указание. См. задачу 52. **218.** Указание. Воспользоваться задачей 52. **219.** а) $(3, 4)$; б) $\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$ — центроид точек A, B, C. **220.** $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Указание. Учесть, что массы сторон треугольника пропорциональны их длинам. Для определения центра тяжести следует массу каждой стороны поместить в ее середину. **221.** $A_1A_2 = \sqrt{10}$, $D_1D_2 = 2\sqrt{5}$, $B_1B_2 = 4$, $C_1C_2 = 5$. **222.** а) $(2, -3)$; б) $(-4, 2)$; в) $(3, 1)$. **223.** $4\sqrt{2}$. **224.** $(\sqrt{5}, 2)$, $(-\sqrt{5}, 2)$, $(2\sqrt{2}, -1)$, $(-2\sqrt{2}, -1)$, $(0, 3)$, $(\sqrt{7}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$. **225.** $AD = \frac{10}{3}\sqrt{2}$. Указание. Предварительно определить координаты точки D. **226.** $\frac{\sqrt{157}}{2}$. **228.** $C\ (-6,4)$, $r = 4$. **229.** Задача имеет два решения: $C_1\ (-20, 20)$, $r_1 = 20$; $C_2\ (-4, 4)$, $r_2 = 4$. **230.** а) $S_1 = 29$; б) $S_2 = 29$; в) $S_3 = -8$. **231.** а) $S = 4$; б) $S = \frac{27}{2}$; в) $S = -13$.

232. $S=\frac{15}{2}$ Указание. Пусть AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, а S_{ACB} и S_{ACD} — площади ориентированных треугольников ACB и ACD. Возможны два случая: а) вершины B и D лежат по разные стороны от AC. В этом случае треугольники ACB и ACD имеют разные ориентации, поэтому S_{ACB} и S_{ACD} имеют разные знаки (рис. 47, *а*) и $S=|S_{ACB}-S_{ACD}|$; б) вершины B и D лежат по одну и ту же сторону от AC. В этом случае треугольники ACB и ACD имеют одну и ту же ориентацию, поэтому S_{ACB} и S_{ACD} имеют один и тот же знак (рис. 47, *б*) и $S=|S_{ACB}-S_{ACD}|$. Итак, в любом случае мы приходим к одной и той же формуле.

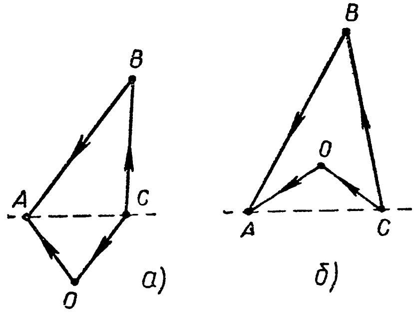


Рис. 47.

233. $C(5, 0)$. **234.** $d=13$. Указание. $d=\frac{2|S_{AM_1M_2}|}{M_1M_2}$. **235.** $2p=15+5\sqrt{5}$; $S=25$; $h_a=5$; $h_b=2\sqrt{5}$; $h_c=10$; $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **236.** $\left(\frac{31}{5}, \frac{36}{5}\right)$. Указание. Четырехугольник следует разделить на два треугольника и определить центры тяжести каждого из них. В эти центры поместить массы соответствующих треугольников, которые будут пропорциональны их площадям. Таким образом, задача сведется к определению центра тяжести системы двух материальных точек. **240.** Первый случай: $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$, $P\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$; второй случай: $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C\left(5, -\frac{\pi}{3}\right)$, $P\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$. **241.** Первый случай: $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; второй случай: $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C\left(3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$. **242.** Первый случай: $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C\left(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2a, \frac{\pi}{3}\right)$, $E\left(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(a, \frac{2}{3}\pi\right)$, $P\left(a, \frac{\pi}{3}\right)$; второй случай: $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C\left(a\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2a, -\frac{\pi}{3}\right)$, $E\left(a\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(a, -\frac{2}{3}\pi\right)$, $P\left(a, -\frac{\pi}{3}\right)$. **243.** Если обозначить через M_1', M_2', M_3', M_4' точки, симметричные данным по отношению к полюсу, а через M_1'', M_2'' M_3'' M_4'' — по отношению к полярной оси, то $M_2'\left(2, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_2'\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$; $M_3'\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4'\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$; $M_1''\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_2''\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$; $M_3''\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_4''\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$. **244.** $A(1, \sqrt{3})$; $B(-1, 1)$; $C(0,5)$; $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **245.** $M_1\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$; $M_2(2, \pi)$; $M_3\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$; $M_4\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; $M_5\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$; $M_6\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$. **246.** $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)$; а) $S_1=1$; б) $S_2=-\frac{3}{2}$; в) $S_3=\frac{15}{4}\sqrt{2}$.

247. $M_1M_2=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$; а) $\sqrt{19}$; б) 5; в) 10. Указание. Пусть Ol — данная полярная система координат. Построить вспомогательную прямоугольную декартову систему координат Oij так, чтобы вектор j был получен из вектора i поворотом последнего на угол $+90°$. В построенной системе взятые точки будут иметь координаты $M_1\ (x_1,\ y_1)$, $M_2\ (x_2,\ y_2)$, где $x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1$, $y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1$; $x_2 = \rho_2 \cos\varphi_2$, $y_2 = \rho_2 \sin\varphi_2$. Далее воспользоваться формулой $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. **248.** $AB = BC = 7$. **249.** $AB = BC = AC = 14$. **251.** $F_2(0, 0)$, $F_1(2c, 0)$, $O(c, 0)$, $A_1(a + c, 0)$, $A_2(a - c, \pi)$, $A_3\left(\frac{a^2+c^2}{a}, \arccos\frac{2ac}{a^2+c^2}\right)$, $A_4\left(\frac{a^2+c^2}{a}, -\arccos\frac{2ac}{a^2+c^2}\right)$, $A_5\left(a, \arccos\frac{c}{a}\right)$, $A_6\left(a, -\arccos\frac{c}{a}\right)$, $A_7\left(\frac{b^2}{a}, \frac{\pi}{2}\right)$, $A_8\left(\frac{b^2}{a}, -\frac{\pi}{2}\right)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Указание. Предварительно показать, что $F_1A_3 = F_1A_4 = F_2A_7 = F_2A_8 = \frac{b^2}{a}$. **252.** $O\ (c, 0)$, $F_1\ (2c, 0)$, $F_2\ (0, 0)$, $A_1\ (c + a, 0)$, $A_2\ (c - a, 0)$, $A_3\left(\frac{a^2+c^2}{a}, \arccos\frac{2ac}{a^2+c^2}\right)$, $A_4\left(\frac{a^2+c^2}{a}, -\arccos\frac{2ac}{a^2+c^2}\right)$, $A_5\left(\frac{b^2}{a}, \frac{\pi}{2}\right)$, $A_6\left(\frac{b^2}{a}, -\frac{\pi}{2}\right)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. **253.** $F\ (0, 0)$, $A_1\left(\frac{p}{2}, \pi\right)$, $A_2\left(p, \frac{\pi}{2}\right)$, $A_3\left(p, -\frac{\pi}{2}\right)$, $H\ (p, \pi)$. **254.** Точки A и D. **255.** б) и в).

256. а) $M_1(4, 4)$, $M_2(-4, -4)$; б) $M_1(1, 1)$, $M_2\left(2, \frac{9}{4}\right)$; в) точек пересечения нет; г) $M_1(0, -a)$, $M_2\left(-\frac{3}{5}a, \frac{4}{5}a\right)$. **257.** а), б) Множества не совпадают; в) множества совпадают. **258.** а) Биссектриса первого и третьего координатных углов; б) две прямые, параллельные оси Oy; в) прямая, параллельная оси Ox; г) две прямые: ось абсцисс и биссектриса второго и четвертого координатных углов; д) биссектрисы координатных углов; е) прямая, параллельная оси Oy; ж) пара прямых: ось абсцисс и прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$; з) пара прямых: прямая, параллельная оси Ox, отсекающая от оси Oy отрезок, равный 4, и прямая, параллельная оси Oy, отсекающая от оси Ox отрезок, равный -1; и) точка $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{7}{2}\right)$; к) окружность с центром в точке $(+5, -3)$ и радиусом $r = 4$; л) пустое множество. **259.** а) Пара прямых, параллельных оси Oy и проходящих через точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$; б) пара прямых, одна из которых проходит через точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, а другая — через точки $(0,0)$, $(-1, 1)$; в) пара лучей, исходящих из начала координат и содержащих соответственно точки $(1, 0)$ и $(1, 2)$; г) пара лучей, исходящих из точки $(1, 0)$ и содержащих соответственно точки $(0, 1)$ и $(2, 1)$. Указание. При рассмотрении примера в) возвести данное соотношение в квадрат и учесть, что $x \geqslant 0$. Поступить аналогично при рассмотрении примера г). **260.** Данными уравнениями соответственно задаются заштрихованные области, изображенные на рисунке 48, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*. При этом, если граница области изображена жирной линией, то она принадлежит области, а если обычной, то не принадлежит. Указание. В примере а) сначала найти области Ω_1 и Ω_2, заданные каждым из соотношений $x > 0$ и $y \leqslant 1$. Искомая область есть пересечение областей Ω_1 и Ω_2. Остальные примеры рассмотреть аналогично. **261.** Искомое множество представляет собой множество всех точек контура параллелограмма с вершинами в точках $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$. Указание. Исследовать расположение множества точек на осях координат и в каждой четверти в отдельности. Например, для точек второй координатной четверти данное соотношение эквивалентно следующему: $-x + y = a$, а для точек третьей четверти — соотношению $-x - y = a$. **262.** а) Прямая $x - 3y + 15 = 0$; б) парабола $x - 2y^2 + 24y + 71 = 0$; в) окружность $x^2 + y^2 = a^2$; г) эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

263. а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 \leqslant y \leqslant 3; \end{cases}$ б) $y \geqslant 0$; в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ y \geqslant 1; \end{cases}$

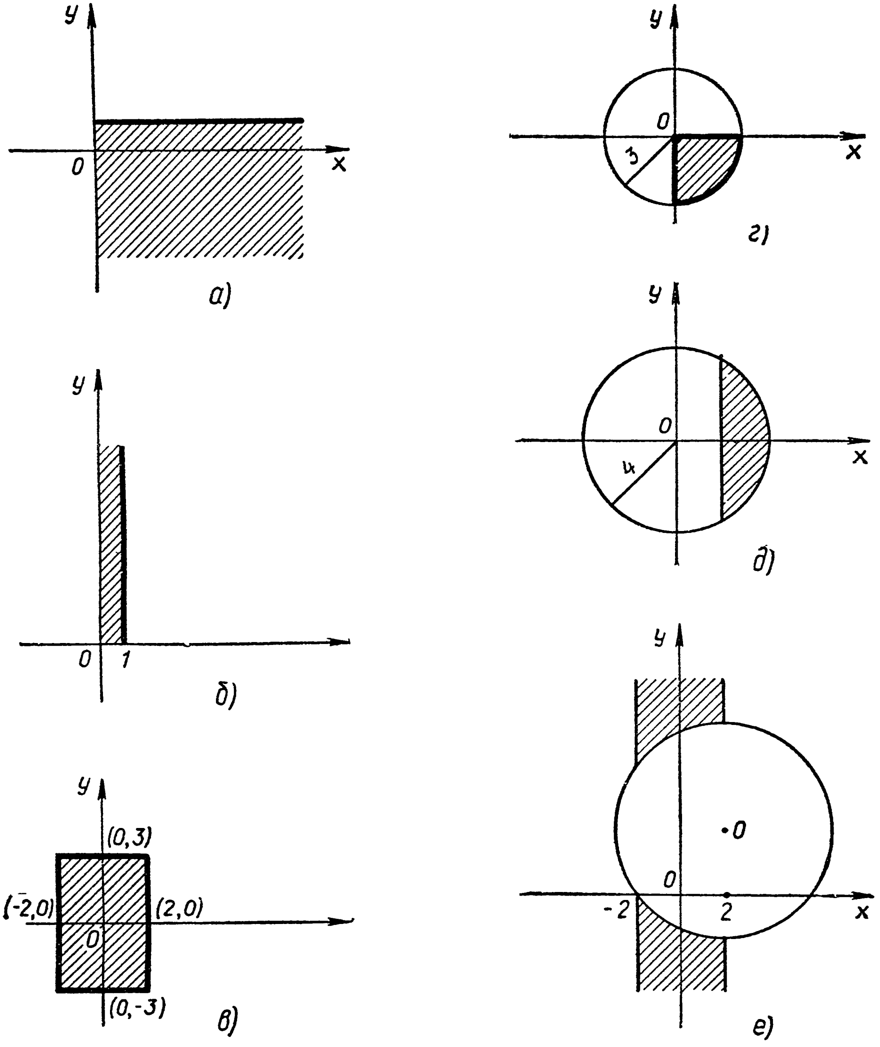


Рис. 48

г) $\begin{cases} x + y \leqslant 1, \\ x \geqslant 0; \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 8, \\ |x| \geqslant 2, \\ |y| \geqslant 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x \leqslant y. \end{cases}$

Решение. а) На рисунке 15, *а* изображен прямоугольник $OABC$, измерения которого соответственно равны 5 и 3. Очевидно, первые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OA и CB вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 5$, вторые же координаты этих точек произвольны. Аналогично вторые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OC и AB вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant y \leqslant 3$, а первые координаты этих точек произвольны. Данный четырехугольник есть пересечение рассматриваемых двух полос, поэтому координаты точек четырехугольника удовлетворяют системе неравенств $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 3$. Остальные примеры решаются аналогично. **264.** Множество всех точек контура квадрата, вершины которого находятся в точках $(8, 0)$, $(0, 8)$, $(-8, 0)$, $(0, -8)$. Указание. См. задачу 261. **265.** а) $2x - 3y + 8 = 0$ — прямая, проходящая через середину $(-1, 2)$ отрезка A_1B_1; б) $5x + 2y - 16 = 0$ — прямая, проходящая через середину $(2, 3)$ отрезка A_2B_2. **266.** $x^2 + y^2 = 5$ — окружность с центром в начале координат радиуса $r = \sqrt{5}$. **268.** $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0$. **269.** Пусть h — расстояние между параллельными прямыми, а α — данное число. Возможны три случая: а) $\alpha < h$ — искомое множество не существует; б) $\alpha = h$ — искомое множество представляет собой совокупность всех точек, расположенных на заданных прямых и в полосе между ними; в) $\alpha > h$ — искомое множество представляет собой пару прямых l_1 и l_2, параллельных данным. Прямые l_1 и l_2 расположены симметрично относительно данных прямых; расстояние между ними равно α. **270.** Прямые, соединяющие середины противоположных сторон прямоугольника. Указание. За оси координат принять прямые, соединяющие середины противоположных сторон. **271.** $2x - 3y = 0$ — прямая, проходящая через начало координат и перпендикулярная прямой AB. **272.** Прямая, перпендикулярная к прямой AB. Указание. Составить уравнение множества, выбрав точку A за начало координат, а направленную прямую AB за ось Ox. **273.** Две параллельные прямые, перпендикулярные к прямой AB и симметричные относительно середины отрезка AB. **274.** Две гиперболы $xy = a^2$ и $xy = -a^2$, асимптотами которых являются оси координат. **275.** а) Окружность с центром в полюсе и радиусом $r = 3$; б) окружность с центром в полюсе и радиусом $r = 5$; в) луч, исходящий из полюса и образующий с полярной осью угол $60°$; г) луч, исходящий из полюса и образующий с полярной осью угол $45°$; д) прямая, перпендикулярная к полярной оси и отстоящая от полюса на расстоянии $h = 5$; е) прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от полюса на расстоянии $h = 3$. Указание. Для определения искомого множества точек д) и е) целесообразно перейти к прямоугольной декартовой системе координат. **276.** а) Окружность с центром в полюсе и радиусом $r = 4$; б) прямая, перпендикулярная к полярной оси и проходящая через точку с полярными координатами $(2, 0)$; в) окружность радиуса 5 с центром в точке $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$; г) прямая, проходящая через полюс и образующая с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$; д) прямая, параллельная полярной оси и проходящая через точку $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; е) две прямые, проходящие через полюс и образующие с полярной осью углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; ж) прямая, проходящая через полюс и образующая с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$; з) прямая, проходящая через полюс и образующая с полярной осью угол $-\frac{\pi}{3}$. Указание. В примерах б), в), д), е), ж) целесообразно перейти к прямоугольной декартовой системе координат. **277.** а) $\varphi = \operatorname{arctg} 1/3$; б) $\rho \sin \varphi + 5 = 0$; в) $\rho = 4$; г) $\rho = a \cos \varphi$; д) $\rho^2 \sin 2\varphi = 20$; е) $\rho^2 \cos 2\varphi = a^2$; ж) $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$; з) $\rho^2 = \sin^2 2\varphi$. **278.** а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; в) $y = x$; г) $x = 2$; д) $y = 6$; е) $x^2 + y^2 - 3x = 0$; ж) $(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$; з) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$; и) $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$. **279.** а) $x = 4x' + 3$; $y = 3x' + 5y' - 1$; б) $x = x' + 2$, $y = y' + 5$; в) $x = 4x' + y'$, $y = -x' + y'$; г) $x = x' + y' + 2$, $y = 2y'$; д) $x = -x'$, $y = y' - 5$. **280.** а) $x = -x' - y + 1$, $y = x'$; б) $x = y'$, $y = x'$; в) $x = y'$, $y = -x' - y' + 1$. **281.** $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$;

$y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}$. **282.** а) $x=x'+5$, $y=y'+\sqrt{2}$; б) $x=x'-1$, $y=y'$; в) $x=x'-1$, $y=y'-3$; г) $x=x'+5$, $y=y'+\frac{1}{2}$.
283. а) $x=2x'-2y'$, $y=x'+y'$; б) $x=x'+2y'$, $y=-\sqrt{2}y'$; в) $x=y'$, $y=x'$; г) $x=y'$, $y=-5x'+y$. **285.** (1, 1). **286.** Решение. Формулы преобразования координат при аффинном повороте имеют вид: $x=\alpha_1x'+\alpha_2y'$, $y=\beta_1x'+\beta_2y'$. Отсюда следует, что координаты точек, имеющих одни и те же координаты в двух системах, определяются из условий $(\alpha_1-1)x+\alpha_2y=0$, $\beta_1x+(\beta_2-1)y=0$. Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $(\alpha_1-1)(\beta_2-1)-\beta_1\alpha_2=0$. **287.** Да; $O'(0, 1)$, $e_1'\{2, 0\}$, $e_2'\left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$. **288.** Нет. Решение. Пусть $Oe_1'e_2'$ — искомая система. Если $e_1'\{\alpha_1,\beta_1\}$, $e_2'\{\alpha_2,\beta_2\}$, то формулы преобразования имеют вид: $x_1=\alpha_1x'+\alpha_2y'$, $y_1=\beta_1x'+\beta_2y'$. Так как точка A в обеих системах имеет координаты (1, 1), то $1=\alpha_1+\alpha_2$, $1=\beta_1+\beta_2$ (1). С другой стороны, точка B в старой системе имеет координаты (2, 2), а в новой системе — координаты (—1, —2), поэтому $2=-\alpha_1-2\alpha_2$, $2=-\beta_1-2\beta_2$. Из первых уравнений (1) и (2) получаем: $\alpha_1=4$, $\alpha_2=-3$. Из вторых уравнений (1) и (2) получаем: $\beta_1=4$, $\beta_2=-3$. Таким образом, векторы e_1' и e_2' имеют координаты $e_1'\{4, 4\}$, $e_2'\{-3, -3\}$. Отсюда следует, что e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно. **289.** а) $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{-3, 1\}$, $O'(0, 1)$; б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(3, -4)$; в) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{-1, 1\}$, $O'(1, 0)$; г) $e_1'\{0, 1\}$, $e_2'\{1, -1\}$, $O'(5, -6)$; д) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(0, 1)$; е) $e_1'\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, $e_2'\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, $O'(0, 0)$. Указание. В примерах б), г) и е) сначала выразить x, y через x', y'. **290.** а) $x=\frac{\sqrt{2}}{10}x'-\frac{7\sqrt{2}}{10}y'-3$, $y=\frac{7\sqrt{2}}{10}x'+\frac{\sqrt{2}}{10}y'+\sqrt{2}$; б) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$, $y=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-2$; в) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$; г) $x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+2$, $y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'-12$.
291. а) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'+\frac{a}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'+\frac{a}{2}$; б) $x=-x'+a$, $y=-y'+a$; в) $x=x'$, $y=y'+a$. **292.** $d=6$. **293.** а), в), г). **294.** а) $7x'-4y'+2=0$; б) $-2x'+8y'+1=0$; в) $-3x'+4y'-3=0$. **295.** $x'^2-2y'^2-1=0$. **296.** $11x'^2+9y'^2+14x'y'-1=0$. **297.** $x'^2+9y'^2-9=0$. **298.** а) $(Ox')\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $(Oy')\ y=-\sqrt{3}x$; б) $(Ox)y'=-\frac{\sqrt{3}}{3}x'$, $(Oy)y'=\sqrt{3}x'$. **299.** $x'+y'+2=0$, $x'-y'-8=0$. **300.** $x'y'=\frac{a^2}{2}$.
301. Перенести начало координат в точку $\left(-\frac{14}{33}, \frac{31}{33}\right)$. **302.** Если начало координат перенести в точку (2, —1), то уравнение кривой примет вид: $x'^2+y'^2=6$. **303.** а) Перенести начало координат в точку (3, —5); б) перенести начало координат в точку (1, —6). **304.** $y'^2=2px'+p^2$. **305.** $x'^2-y'^2+2ax'=0$. **306.** Нет. Решение. Рассмотрим параболу $y^2=2px$ в канонической системе координат Oij и поставим задачу: найти такую систему координат $O'e_1'e_2'$, в которой уравнение рассматриваемой параболы не содержало бы членов первой степени. Пусть $O'(x_0, y_0)$, $e_1'\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e_2'\{\alpha_2, \beta_2\}$, тогда формулы преобразования имеют вид: $x=\alpha_1x'+\alpha_2y'+x_0$, $y=\beta_1x'+\beta_2y'+y_0$. Подставив эти значения в уравнение $y^2=2px$, получаем

уравнение параболы в новой системе координат: $(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0)^2 = 2p(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)$ или $\beta_1^2 x'^2 + \beta_2^2 y'^2 + 2\beta_1\beta_2 x'y' + 2(\beta_1 y_0 - p\alpha_1)x' + 2(\beta_2 y_0 - p\alpha_2)y' + y_0^2 - 2px_0 = 0$. Так как в этом уравнении коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то $\beta_1 y_0 - p\alpha_1 = 0$, $\beta_2 y_0 - p\alpha_2 = 0$, откуда $\alpha_1 = \frac{y_0}{p}\beta_1$, $\alpha_2 = \frac{y_0}{p}\beta_2$. Но тогда $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, т. е. векторы e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно. **307.** Если $O'ij$ — исходная каноническая система координат, в которой эллипс имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $O' = O$, $e_1\{a, 0\}$, $e_2\{0, b\}$. **308.** Указание. См. задачу 307. **309.** $x'y' = \gamma \neq 0$. Решение. Вектор e_1 параллелен асимптоте $y = \frac{b}{a}x$, поэтому этот вектор в базисе i, j имеет координаты $\{\alpha a, \alpha b\}$, где $\alpha \neq 0$. Аналогично e_2 в этом же базисе имеет координаты $\{\beta a, -\beta b\}$, где $\beta \neq 0$. Формулы преобразования имеют вид: $x = \alpha a x' + \beta a y'$, $y = \alpha b x' - \beta b y'$. Подставив эти значения в каноническое уравнение гиперболы, после элементарных преобразований, полагая $\gamma = \frac{1}{4\alpha\beta}$, получаем искомый результат. **310.** Указание. В качестве осей новой прямоугольной декартовой системы координат взять биссектрисы координатных углов системы Oe_1e_2 и воспользоваться решением задачи 309. **311.** а) Гипербола. Указание. Записать данное уравнение в виде: $x(2y - x) = 1$ и выбрать новую систему так, чтобы $x' = x$, $y' = 2y - x$. Далее воспользоваться задачей 310; б) эллипс. Указание. Записать данное уравнение в виде $5(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) + 12 = 0$ и выбрать новую систему так, чтобы оси были направлены по биссектрисам координатных углов старой системы; в) пара пересекающихся прямых $x = 0$, $1 - 5y = 0$; г) парабола; д) пара слившихся прямых. **312.** а) $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 2x = 0$; в) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$: г) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$. **313.** а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, $C(1, -2)$, $r = 5$; д) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $C(1, 0)$, $r = 1$; ж) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, $C(2, 1)$, $r = 2$. Остальные уравнения не определяют окружность. **314.** При $\lambda = 5$ — точка $M_0(1, -2)$, а при $\lambda < 5$ — концентрические окружности с центром в точке M_0. **315.** При $k_1 = \sqrt{6}$ и при $k_2 = -\sqrt{6}$ — точки с координатами $M_1(2, -\sqrt{6})$, $M_2(2, \sqrt{6})$, а при $k > \sqrt{6}$ или при $k < -\sqrt{6}$ — окружности, центры которых лежат на лучах, исходящих из точек M_1 и M_2, параллельных оси Oy и не пересекающих ось Ox. **316.** а) $A^2 = 4c$; б) $B^2 = 4c$; в) $A^2 = B^2 = 4c$. **317.** а) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$. **318.** $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$. **319.** $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. **320.** Задача имеет два решения: $x^2 + y^2 - 6y = 0$ и $x^2 + y^2 + 6y = 0$. **321.** $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$. **322.** а) $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$; в) $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$; г) $x^2 + y^2 + x + 7y = 0$. **323.** а) $\rho = a$; б) $\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = a^2$. Указание. Для вывода уравнения б) воспользоваться ответом задачи 247. **325.** а) $\rho = 8\cos\varphi$; б) $\rho = 6\sin\varphi$; в) $\rho^2 - 5\cos\varphi - 5\sqrt{3}\rho\sin\varphi + 21 = 0$. **326.** Центр окружности имеет координаты $\left(4, \frac{2}{3}\pi\right)$; радиус равен 6. **327.** При $\lambda \neq 1$ искомое множество представляет собой окружность, центр которой лежит на прямой AB, а при $\lambda = 1$ — прямую, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину. Указание. Если начало прямоугольной декартовой системы координат поместить в точку B, а направление оси Ox определить вектором $\overrightarrow{BA}$, то уравнение искомого множества будет иметь вид: $x^2(1 - \lambda^2) + y^2(1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0$, где a — длина отрезка AB. **328.** Пусть $AB = 2a$, а α^2 — данная сумма квадратов. а) $\alpha^2 > 2a^2$. Искомое множество есть окружность с центром в середине отрезка AB; б) $\alpha^2 = 2a^2$. Искомое множество представляет собой точку — середину отрезка AB; в) $\alpha^2 < 2a^2$. На плоскости не существует ни одной точки, удовлетворяющей условию задачи. **329.** $x^2 + (y-3)^2 = 9$. **330.** Окружность с центром в точке пересечения данных прямых и радиусом $|\lambda|$. Указание.

Записать уравнение искомого множества точек в прямоугольной декартовой системе координат, оси которой совпадают с данными прямыми. **331.** Окружность действительного, нулевого или мнимого радиуса, центр которой совпадает с центроидом точек A, B и C (см. задачу 53). **332.** Окружность. Указание. Записать уравнение искомого множества точек в полярной системе координат, приняв точку A за полюс, а диаметр, проходящий через эту точку, за полярную ось. **333.** Две окружности. Указание. Задача решается аналогично предыдущей. После получения полярного уравнения искомого множества точек перейти к прямоугольной декартовой системе координат. **334.** а) Окружность с центром в середине основания BC и радиусом $r = \frac{b}{2}$; б) окружность с центром в точке, делящей основание BC в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$, и радиусом $r = \frac{b}{3}$. **335.** а) Окружность действительного, нулевого или мнимого радиуса, центр которой совпадает с центром квадрата; б) окружность, центр которой совпадает с центром квадрата (см. задачу 330). **336.** Окружность, концентрическая данной, если $\alpha \neq -R^2$, и центр данной окружности, если $\alpha = -R^2$. **337.** Указание. Записать уравнение искомого множества точек в прямоугольной декартовой системе координат, приняв за ось Ox линию центров данных окружностей. **341.** Указание. Если O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а M — точка их пересечения, то один из искомых углов равен углу O_1MO_2. Для определения косинуса угла M треугольника O_1MO_2 использовать теорему косинусов (см. задачу 154). **342.** Параметрическое задание: $x = r(\varphi - \sin\varphi)$, $y = r(1 - \cos\varphi)$, в декартовых координатах циклоида имеет уравнение $x + \sqrt{y(2r - y)} = r \arccos\frac{r - y}{r}$. Решение. Сначала напишем параметрическое задание циклоиды. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка циклоиды, S — центр катящейся окружности, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на ось абсцисс (рис. 16). Примем в качестве параметра угол, который образует луч SM с лучом SH, т. е. $\varphi = \angle MSH$. Если M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс, а M_2 — основание перпендикуляра, опущенного из той же точки на ось ординат (точки M_1 и M_2 на рисунке 16 не изображены), то, очевидно, $x = OM_1 = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$; $y = OM_2 = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi)$. Мы получили параметрическое задание циклоиды. Отсюда, исключая φ, получаем уравнение циклоиды в прямоугольных декартовых координатах. Заметим, что циклоида периодическая кривая: период (базис циклоиды) равен $2\pi r$.

343. $x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\frac{R + r}{r}\varphi$, $y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\frac{R + r}{r}\varphi$.

344. а) $\rho = 2r - 2r\cos\varphi$; б) $\rho = 2r + 2r\cos\varphi$. Указание. Если M — точка катящейся окружности, описывающей траекторию, то при любом положении катящейся окружности прямая AM и линия центров OC катящейся и неподвижной окружностей параллельны (рис. 18). **345.** $x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\frac{R - r}{r}\varphi$, $y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\frac{R - r}{r}\varphi$. Уравнение астраиды: $x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi$, $y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi$. **346.** Уравнение кривой в обобщенных полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + b$. Указание. Если $\rho = f(\varphi)$ — уравнение данной кривой в полярных координатах, то $\rho = f(\varphi) \pm b$ — уравнение ее конхоиды, где b — длина отрезков, откладываемых от точек данной кривой. При выводе уравнения конхоиды Никомеда учесть, что система координат обобщенная полярная. **347.** а) $\rho = b - 2r\cos\varphi$; б) $\rho = b + 2r\cos\varphi$. Указание. Воспользоваться указанием к задаче 346. **348.** Указание. Воспользоваться задачами 344 и 347. **349.** $\varphi^2 = x^2\frac{b + x}{b - x}$. **350.** $\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ — уравнение циссоиды Диоклеса в полярной системе координат; $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ — уравнение циссоиды Диоклеса в прямоугольной декартовой системе координат Oij (рис. 22). **351.** $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=b^4-c^4$ — уравнение овала Кассини; $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$ — уравнение лемнискаты Бернулли. Р е ш е н и е. Выведем уравнение овала Кассини. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка рассматриваемого множества. Если $F_1F_2=2c$, то точки F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, поэтому соотношение $F_1M \cdot F_2M = b^2$ в координатах запишется так: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=b^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $[(x+c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2]=b^4$. После элементарных преобразований получаем: $[(x^2+y^2+c^2)+2xc][(x^2+y^2+c^2)-2xc]=b^4$. Отсюда имеем: $(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2=b^4$ или $(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)c^2+c^4-4x^2c^2=b^4$. Отсюда получаем уравнение овала Кассини; а при $b=c$ — уравнение лемнискаты Бернулли. **352.** $\rho = a\sin 2\varphi$. **353.** $\rho = a\varphi$, где $a=\frac{v}{\omega}$.

354. $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$. У к а з а н и е. Воспользоваться соотношением $OB : BS = OC : BM$ (рис. 26). **355.** У к а з а н и е. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы катеты треугольника лежали на осях координат. **358.** Р е ш е н и е. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем точку M_0, а за ось Ox — прямую l. Пусть в этой системе координат точки A, B, C имеют соответственно координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); тогда точки A', B' и C' будут иметь координаты $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$. Отсюда получаем: $\overrightarrow{AA'}\{0, -y_1\}$, $\overrightarrow{BB'}\{0, -y_2\}$, $\overrightarrow{CC'}\{0, -y_3\}$. Согласно задаче 215 $x_1+x_2+x_3=0$ и $y_1+y_2+y_3=0$, поэтому $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=0$. **359.** У к а з а н и е. Взять точку A за начало, а $\overrightarrow{AB}=e_1$ и $AC=e_2$ за координатные векторы. Если ввести обозначения $\lambda_3=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$, $\lambda_1=\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}$, $\lambda_3=\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}$, то легко выразить координаты точек A_1, B_1, C_1 через λ_1, λ_2, λ_3. Далее воспользоваться условием коллинеарности этих точек. **360.** Р е ш е н и е. Обозначим через P точку пересечения отрезков BB_1 и CC_1, а через ν_1 и ν_2 отношения $\frac{BP}{PB_1}=\nu_1$ и $\frac{CP}{PC_1}=\nu_2$. Выберем точку A за начало координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ — за координатные векторы e_1 и e_2 (рис. 49). В этой системе координат вершины треугольника, очевидно, будут иметь следующие координаты: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$. Далее, пользуясь соотношениями $\lambda=\frac{AC_1}{C_1B}$ и $\mu=\frac{AB_1}{B_1C}$, определяем координаты точек B_1 и C_1: $B_1\left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $C_1\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$. Определим координаты точки $P(x, y)$, учитывая, что $\frac{BP}{PB_1}=\nu_1$. Получим: $P\left(\frac{1}{1+\nu_1}, \frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)}\right)$. Определим координаты той же точки, учитывая, что $\frac{CP}{PC_1}=\nu_2$, получим: $P\left(\frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}, \frac{1}{1+\nu_2}\right)$. Итак, для определения искомых величин ν_1 и ν_6 получаем соотношения $\frac{1}{1+\nu_1}=\frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}$; $\frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)}=\frac{1}{1+\nu_2}$. Из этих соотношений после элементарных преобразований получаем: $\nu_1=\frac{1+\mu}{\lambda}$, $\nu_2=\frac{1+\lambda}{\mu}$.

Если $\lambda=\mu=1$, т. е. если BB_1 и CC_1 являются медианами треугольника, то $\nu_1=\nu_2=2$. Таким образом, мы доказали, что если P — точка пересечения любых двух медиан треугольника ABC, то этой точкой каждая медиана делится в отноше-

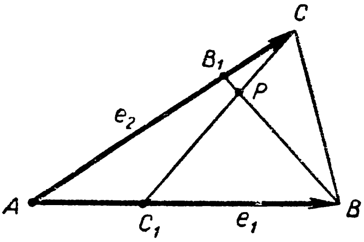


Рис. 49

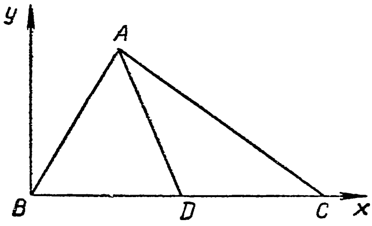


Рис. 50

нии 2 : 1. Отсюда непосредственно следует известная теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1. **361.** Указание. Воспользоваться задачей 47. **362.** Решение. Систему прямоугольных декартовых координат возьмем так, как указано на рисунке 50. Введем обозначения для координат точек A, C и D: $A\ (\alpha, \beta)$, $C\ (\gamma,\ 0)$, $D\ (\delta,\ 0)$. При данном выборе системы координат $BD = \delta$, $BC = \gamma$. Далее вычислим все величины, входящие в формулу Стюарта: $AB^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $BC = \gamma$, $AC^2 = (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2$, $BD = \delta$, $AD^2 = (\alpha - \delta)^2 + \beta^2$, $DC = \gamma - \delta$. Подставив эти значения в левую часть формулы Стюарта, получаем: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma - \delta) + [(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2]\,\delta - [(a - \delta)^2 + \beta^2]\,\gamma = \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \beta\gamma - \beta^2\gamma + \alpha^2\delta + \gamma^2\delta + \beta^2\delta - 2\alpha\gamma\delta - \alpha^2\gamma - \delta^2\gamma - \beta^2\gamma + 2\alpha\delta\gamma = \gamma^2\delta - \delta^2\gamma = \gamma\delta\,(\gamma - \delta) = BC \cdot BD \cdot DC$. **363.** Указание. Точку A взять за начало, а $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ — за базисные векторы общей декартовой системы координат и воспользоваться задачей 215. **364.** Указание. Взять точку O за начало координат и воспользоваться задачей 215. **365.** Указание. Пусть A лежит между O и B. Примем точку O за начало прямоугольной декартовой системы координат, а вектор $\overrightarrow{OA}$ за единичный вектор $\boldsymbol{i}$. В этой системе координат вершины четырехугольника могут быть записаны так: $A\ (1,\ 0)$, $B\ (\lambda,\ 0)$, $D\ (\alpha, \beta)$, $C\ (\mu\alpha,\ \mu\beta)$, причем $\lambda > 1$, $\mu > 1$. Вычислить площади треугольников OAD, OBC, OSP и показать, что $S_{OBC} - S_{OAD} = 4S_{OSP}$. **366.** Указание. Если систему координат выбрать так, как указано на рисунке 51, то из условия $AC = BD$ получаем: $\alpha + \beta = 0$. **373.** а) $4x - 3y + 7 = 0$; б) $5x - 2y = 0$; в) $x + y + 4 = 0$; г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; д) $y - 5 = 0$; е) $x + 1 = 0$; ж) $x - 3y - 16 = 0$; з) $x + y - 4 = 0$. **374.** $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$. **375.** $x + 1 = 0$. **376.** $2x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x - 4y + 13 = 0$. **377.** а) и в). **378.** а) $a = -2$, $b = 3$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$; б) $a = -6$, $b = -6$, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$; в) $a = -\frac{3}{2}$, $b=3$, $\frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{3} = 1$. **379.** а) $x = -2 + 5t$, $y = 3 - t$; б) $x = 3t$, $y = -2 - 2t$; в) $x = t$, $y = t$; г) $x = t$, $y = -3$; д) $x = 1$, $y = t$. **380.** а) $p\{4,\ -1\}$; б) $M_1\ (11,\ -1)$, $M_2\ (-1,\ 2)$, $M_3\ (-9,\ 4)$,

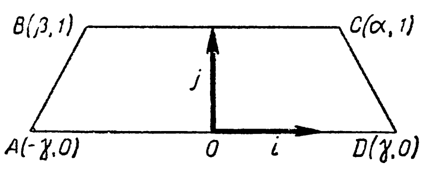


Рис. 51

$M_4(-5, 3)$; в) $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = 2$; г) M_2, M_3, M_4. **381.** а) $\{-7, 3\}$; б) $\{0, 1\}$; в) $\{3, 2\}$; г) $\{2, 1\}$; д) $\{1, 0\}$. **382.** а) $x = -2 + t$, $y = -1 + 3t$; б) $x = 2 - t$, $y = 1 + t$; в) $x = -\frac{5}{2}$, $y = t$; г) $x = 1 - 5t$, $y = -2 + 4t$; д) $x = -3t$, $y = t$.

385. а) $x + 3y - 10 = 0$; б) $y - 2 = 0$; в) $3x - y - 15 = 0$. **387.** а) $2x + y = 0$; б) $x = 0$; в) $5x + y - 6 = 0$. **388.** $AB \parallel CD$, $3x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$, $y - 1 = 0$. **389.** $(AB)\ 2x - y - 4 = 0$, $(BC)\ x + y - 5 = 0$, $(CD)\ 2x - y + 2 = 0$, $(DA)\ x + y + 1 = 0$. Указание. Сначала определить координаты вершин C и D. **390.** $x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$. **391.** $3x - 2y - 8 = 0$, $x + 3y + 12 = 0$, $2x - 5y + 2 = 0$. Указание. Через каждую из данных точек провести прямую, параллельную вектору, образованному двумя другими точками. **392.** а) $3x - y - 1 = 0$; б) $y + 2x = 0$; в) $x - y = 0$; г) $3y - \sqrt{3}x = 0$; д) $y + \sqrt{3}x = 0$; е) $y = -3x + 2$; ж) $y = x - 3$. **393.** а) $k = -2$, $b = -5$; б) $k = \frac{1}{3}$, $b = 2$; в) $k = -1$, $b = 0$; г) $k = 0$, $b = -\frac{5}{2}$; д) k и b не существуют.

394. а) 135°; б) 45°; в) 150°. **395.** а) $2x + y - 1 = 0$; б) $x + y - 15 = 0$; в) $3x + 2y = 0$. **396.** $x + y - 3 = 0$, $x - y + 1 = 0$. **397.** а) $\{3, -5\}$; б) $\{2, -1\}$; в) $\{0, 1\}$; г) $\{6, -1\}$; д) $\{3, -2\}$; е) $\{1, 0\}$. **398.** $p\{5, 2\}$, $n\{2, -5\}$, $k = \frac{2}{5}$, $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{5}$. **399.** б), г) и д). **400.** а) 5; б) (15, —10); в) $t = 4$. Указание. Если уравнение движения точки имеет вид: $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, то скорость v точки вычисляется по формуле $v = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. **401.** $x = 2 - 12t$, $y = -3 + 9t$, $t_0 = \frac{21}{15}$.

402. $2x - 5y + 29 = 0$. **403.** $2x + 3y - 12 = 0$. **404.** $2x - 4y - 21 = 0$. **405.** (—3, 2). **406.** $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ и (0, —8). **407.** а) $x - 1 = 0$, $2x - 3y + 8 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$; б) $y - 5 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$. **408.** $3x + 4y - 17 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$, $2x - 5y + 27 = 0$. **409.** $2x - 2y + \sqrt{2}a = 0$, $2x + 2y - \sqrt{2}a = 0$, $2x - 2y - \sqrt{2}a = 0$, $2x + 2y + \sqrt{2}a = 0$. **410.** а) (3, 1); б) (3, 3); в) (3, 7). **411.** (—2, 8). **412.** (5, 7). **413.** $Q(4, -2)$. Указание. Найти координаты точки N', симметричной точке N относительно данной прямой l. Q есть точка пересечения l и MN'. **414.** $(AB)\ y = 0$, $(BC)\ \sqrt{3}x - y - a\sqrt{3} = 0$, $(CD)\ \sqrt{3}x + y - 2a\sqrt{3} = 0$, $(DE)\ y - a\sqrt{3} = 0$, $(EF)\ \sqrt{3}x - y + a\sqrt{3} = 0$, $(AF)\ y + \sqrt{3}x = 0$. **415.** а) $13x - 9y + 7 = 0$; б) $36x - 23y + 29 = 0$; в) $4x + 3y - 19 = 0$. Указание. а) Вектор $p = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ является направляющим вектором биссектрисы внутреннего угла A. **416.** $(AM)\ 2x + y - 4 = 0$, $(AP)\ 2x - y = 0$, $(MN)\ 6x - 3y + 16 = 0$, $(NP)\ 6x + 3y - 28 = 0$. **417.** (0, —4), (—4, 4), (2, 2), (—6, —2). **419.** а) Пересекаются в точке $M(3, 0)$; б) параллельны; в) совпадают; г) пересекаются в точке $M(-3, 3)$; д) параллельны; е) параллельны; ж) совпадают. **420.** $t_1 = -\frac{2}{3}$; $t_2 = 2$.

421. Да; $\lambda = -9$, $\mu = 6$. **422.** а) Две прямые параллельны, третья их пересекает; б) прямые попарно пересекаются и не проходят через одну точку; г) прямые проходят через одну точку (—5, 1). **423.** $3\lambda + 7\mu + 3 = 0$. **424.** а) Пучок параллельных прямых, пересекающих ось Oy и имеющих угловой коэффициент k; б) пучок пересекающихся прямых с центром в точке $(0, b)$, за исключением оси ординат. **425.** $x + y - 7 = 0$. Указание. Пусть $y - 6 = k(x - 1)$ — уравнение искомой прямой. Определить координаты точек пересечения M и N этой прямой с данными параллельными прямыми и потребовать, чтобы середина отрезка MN лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$. Из полученного условия определить k. **426.** $2x + y - 4 = 0$. **427.** $x + 11y - 15 = 0$. **428.** $5x - 3y + 6 = 0$. **429.** $x - y = 0$.

430. $y+1=0$. 431. $13x-13y+4=0$. Решение. Уравнение пучка, определяемого заданными прямыми, имеет вид: $3x-y+\lambda(x+4y-2)=0$, или $(3+\lambda)x+(4\lambda-1)y-2\lambda=0$. Записывая далее условие перпендикулярности прямой пучка и прямой $x+y=0$, получим: $1\cdot(3+\lambda)+1\cdot(4\lambda-1)=0$. Откуда получаем: $5\lambda+2=0$, или $\lambda=-\frac{2}{5}$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем искомое уравнение. 432. а) $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$; б) $x+2y-7=0$, $5x+4y+7=0$, $x-4y-13=0$. 433. а) $y+17=0$; б) $2x+13=0$; в) $34x-13y=0$. 434. $(-1, 0)$. 435. $(1, 1)$. 436. $(1, 1)$. 437. а) Пучок параллельных прямых, определяемый вектором $\{-B, A\}$; б) все прямые пучка пересекающихся прямых с центром в точке $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$, за исключением оси Ox; в) все прямые пучка пересекающихся прямых с центром в точке $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$, за исключением оси Oy. 438. $3x-y+2=0$, $3x-6y+14=0$. 439. $\lambda=-5$, $\mu=-5$, $13x+39y+5=0$. 440. $7x-y-6=0$, $x+8y-21=0$. 441. а) и в). 442. Указание. Пусть $Ax+By+C=0$ — произвольная прямая плоскости. Задача сводится к определению коэффициентов α, β, γ и k, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3&=kA,\\ \alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3&=kB,\\ \alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3&=kC.\end{aligned}$$

Пользуясь результатом предыдущей задачи, показать, что при любом $k\neq 0$ существуют действительные числа α, β, γ, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие этой системе. 443. а) $\lambda=1$; б) $\lambda=-\frac{9}{5}$; в) $\lambda=0$; г) $\lambda=-\frac{13}{2}$. 444. а) M_1, M_2, M_3, M_4, M_6; б) M_1, M_3, M_5, M_6; в) M_2, M_3, M_4, M_6; г) M_1, M_3, M_5, M_6; д) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. 445. Пары A_1 и A_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2. 446. а) AC и BC; б) AB и BC; в) AC и AB. 447. Ось Ox пересекает отрезки AC и BC соответственно в точках M_1 и M_2, при этом $\frac{AM_2}{M_2C}=\frac{1}{2}$, $\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{5}{3}$. Ось Oy пересекает отрезки AB и AC соответственно в точках M_3 и N_2, при этом $\frac{AM_3}{M_3B}=\frac{3}{4}$, $\frac{AN_2}{N_2C}=3$. 449. M_2, M_3, M_4. Указание. Точка M лежит внутри угла ACB, если одновременно выполнены следующие два условия: а) M и A лежат по одну и ту же сторону от прямой BC; б) M и B лежат по одну и ту же сторону от прямой AC. 450. а) $3x-y-2<0$; б) $3x-y-2>0$. 451. $x>0$, $4x-3y+12>0$, $x-3y-6<0$. 452. $x-y+5<0$ и $2x+y-3<0$. Решение. Четыре угла, определяемые данными пересекающимися прямыми, характеризуются следующими неравенствами: а) $x-y+5>0$ и $2x+y-3>0$; б) $x-y+5>0$ и $2x+y-3<0$; в) $x-y+5<0$ и $2x+y-3>0$; г) $x-y+5<0$ и $2x+y-3<0$. Подставив координаты данной точки в эти неравенства, убеждаемся в том, что имеет место случай в). 453. Решение. Прямые l_1 и l_2, пересекаясь в точке P, образуют четыре угла, внутренние области которых обозначим через Ω_1, Ω_1', Ω_2, Ω_2' (рис. 52). Пусть Ω_1 и Ω_1' — внутренние области острых углов, а Ω_2, Ω_2' — внутренние области тупых углов. Приложим векторы $\boldsymbol{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{A_2, B_2\}$ к точке P. Так как $\boldsymbol{n}_1\perp l_1$ и $\boldsymbol{n}_2\perp l_2$, то концы этих векторов будут лежать либо в Ω_2, либо в Ω_2'. Возможны два случая: а) концы векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ лежат в одной и той же области, скажем в Ω_2 (рис. 52,*а*). В этом случае угол между $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен острому углу, образованному данными прямыми, поэтому $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2=A_1A_2+B_1B_2>0$. С другой стороны, в этом случае область Ω_2 характеризуется неравенствами $A_1x+B_1y+C_1>0$ и $A_2x+B_2y+C_2>0$, а область Ω_2' — неравенствами $A_1x+B_1y+C_1<0$ и $A_2x+B_2y+C_2<0$. Итак, для всех внутренних точек

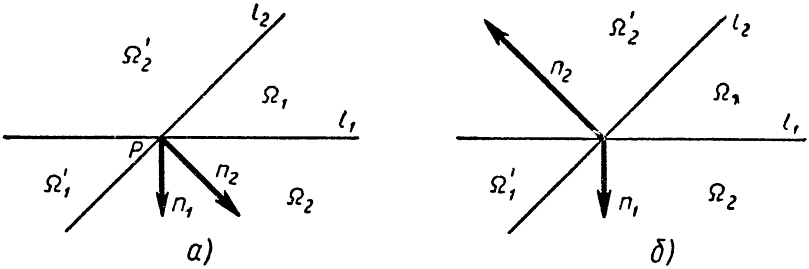


Рис. 52

областей Ω_2 и Ω_2' имеем: $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) > 0$. Область Ω_1 характеризуется неравенствами $A_1x + B_1y + C_1 < 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 > 0$, а область Ω_1' — неравенствами $A_1x + B_1y + C_1 > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 < 0$ (см. задачу 384). Таким образом, для всех внутренних точек областей Ω_1 и Ω_1' имеем: $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0$; б) конец вектора n_1 лежит в Ω_2, а конец n_2 — в Ω_2' (рис. 52, *б*). В этом случае угол между n_1 и n_2 равен тупому углу, образованному данными прямыми, поэтому $n_1n_2 = A_1A_2 + B_1B_2 < 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем тот же результат. **454.** M_1, M_3, M_4, M_6. Указание. См. предыдущую задачу. **455.** а) $3x + 8y - 9 > 0$, $3x - y - 9 < 0$, $3x - 10y + 45 > 0$; б) (Ω_1) $3x - 10y + 45 < 0$, $3x + 8y - 9 < 0$; в) (Ω_2) $3x + 8y - 9 < 0$, $3x - y - 9 < 0$, $3x - 10y + 45 > 0$. Указание. Сначала определить координаты вершин треугольника и воспользоваться неравенствами, которые характеризуют полуплоскости, определяемые сторонами треугольника. **456.** Точки M_1, M_3 и M_6 принадлежат Ω_0, M_2 и M_7 — Ω_1, M_4, M_5 — Ω_2. **457.** Внутренняя область пятиугольника с вершинами A (—2, 3), B (2, 7), C (7, 8), D (7, 3), E (1, 0). **458.** Область, изображенная на рисунке 53. Точки, указанные на этом рисунке, имеют координаты A (—3, 5), B (—4, 2), C (—2, —2), D (2, —2). Прямая l_1 имеет уравнение $x - y + 8 = 0$, а l_2 — уравнение $x - 4y - 10 = 0$. **459.** Точек, координаты которых удовлетворяли бы данной системе неравенств, не существует. **460.** а) и в). **461.** Указание. Воспользоваться задачей 448. **462.** а) $x - 2y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, $y + 2 \geqslant 0$; б) $x - y \geqslant 0$, $2x + y - 6 \leqslant 0$, $x + 2y - 3 \geqslant 0$; в) $2x + 5y - 15 \geqslant 0$, $x - y + 3 \geqslant 0$, $4x + 3y - 23 \leqslant 0$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 461. **463.** M_1, M_3, M_5, M_6. **464.** M_1, M_4, M_5. **465.** Указание. Воспользоваться задачей 448. **466.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 465. **467.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 465. **469.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 468. **470.** $3x + 4y + 5 > 0$, $10x + y - 45 < 0$, $2x - 7y + 27 > 0$, $x + 3 > 0$. Указание. Воспользоваться задачей 468. **471.** При любых фиксированных i и j, не равных друг другу, $n - 2$ числа $\delta_{ij}(x_\alpha, y_\alpha)$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, n$, имеют один и тот же знак. (Относительно обозначений см. задачу 465). Указание. Задача решается по аналогии с задачей 465. **473.** а) $6x - 5y - 64 < 0$, $11x + 7y - 85 < 0$, $5x - 7y + 53 > 0$, $10x + y + 46 > 0$, $x + 4y + 28 > 0$; б) $7x - 10y - 29 > 0$, $8x + 3y - 62 < 0$, $8x - 5y - 110 < 0$, $x + 4y + 51 > 0$, $x + 3 > 0$. **474.** $y > 0$,

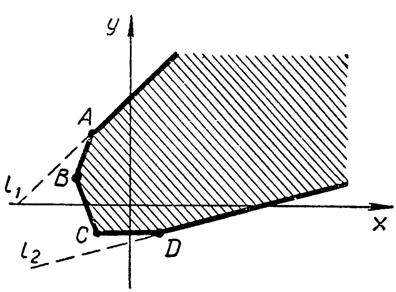


Рис. 53

$3x-\sqrt{3}y-3<0$, $3x+\sqrt{3}y-6<0$, $y-\sqrt{3}<0$, $3x-\sqrt{3}y+3>0$, $\sqrt{3}x+y>0$. **475.** Указание. Воспользоваться задачей 471 и учесть, что любая внутренняя точка отрезка $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет координаты $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, где $\lambda>0$. **476.** -66. Указание. Так как пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ выпуклый, то его площадь равна сумме площадей ориентированных треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ и $A_1A_4A_5$. **477.** а) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{6}{5}=0$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$; в) $-x-\frac{3}{2}=0$; г) $-y-1=0$; д) уравнение прямой записано в нормальном виде; е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-2=0$. **478.** а) $\frac{6}{5}$; б) 3; в) $\frac{8}{5}\sqrt{5}$; г) $\frac{11}{2}$. **479.** $\frac{4}{5}$; $\frac{14}{5}$; 4. **480.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$; $\frac{36\sqrt{137}}{137}$; 4. Указание. Определить координаты вершин треугольника и вычислить расстояния от вершин треугольника до противоположных сторон. **481.** $(x-6)^2+(y+3)^2=9$. Указание. Радиус окружности равен расстоянию от точки P до прямой. **482.** $(x-2)^2+(y+3)^2=25$. **483.** $x^2+y^2-26x-2y+45=0$ и $x^2+y^2-2x-10y+21=0$. **484.** а) 8; б) $\frac{13}{20}\sqrt{10}$; в) $\frac{9}{5}$; г) $\frac{19}{4}\sqrt{2}$. Указание. На одной из прямых выбрать произвольную точку и найти расстояние до второй прямой. **485.** $h=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. а) $h=5$; б) $h=\frac{9}{2}\sqrt{2}$; в) $h=\frac{8}{5}\sqrt{5}$. **486.** $5x+12y-43=0$, $y-4=0$. Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(-1, 4)$, имеет вид: $y-4=k(x+1)$ или $kx-y+(k+4)=0$. Среди прямых данного пучка необходимо найти такую прямую, которая находится от точки $Q(-2, -1)$ на расстоянии 5. Используя формулу для вычисления расстояния от точки до прямой, получим: $\frac{|k(-2)-(-1)+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=5$. Возводя полученное уравнение в квадрат, будем иметь: $12k^2+5k=0$, откуда $k_1=0$, $k_2=-\frac{5}{12}$. Подставляя найденные угловые коэффициенты в уравнение пучка, получим уравнения искомых прямых. **487.** $x-y=0$, $x+y-2=0$. Указание. См. решение предыдущей задачи. **488.** $3x+4y+30=0$, $3x+4y-20=0$. Указание. Для решения задачи полезно сформулировать ее следующим образом: провести прямые, параллельные прямой $3x+4y+1=0$ и отстоящие от точки $(1, -2)$ на расстоянии 5. **489.** $4x+3y-26=0$. **490.** $x-3y+10=0$, $x-3y-30=0$. **491.** $(x+2)^2+(y-1)^2=20$, $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{37}{5}\right)^2=20$. **492.** $4x-3y-22=0$, $4x-3y+8=0$. **493.** а) $2x-5y-1=0$; б) $3x+5y+5=0$. **494.** $(0, 6)$, $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. Решение. Искомая точка (x', y') лежит на прямой $x+2y-12=0$, поэтому

$$x'+2y'-12=0. \tag{1}$$

Точка (x', y') находится на одинаковом расстоянии от прямых $x+y-5=0$ и $7x-y+11=0$, поэтому $\frac{|x'+y'-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x'-y'+11|}{5\sqrt{2}}$. Последнее уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x'+y'-5}{\sqrt{2}}=\dfrac{7x'-y'+11}{5\sqrt{2}}, & (2)\\ \dfrac{x'+y'-5}{\sqrt{2}}=-\dfrac{7x'-y'+11}{5\sqrt{2}}. & (3)\end{cases}$$

Решая системы, состоящие из уравнений (1), (2) и (1), (3), получим две точки (0,6) и $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. **495.** а) $2x+4y-3=0$ и $4x-2y+1=0$; б) $2x-6y-13=0$ и $6x+2y+7=0$; в) $11x+(8-5\sqrt{3})y+30=0$ и $x+(8+5\sqrt{3})y-90=0$. Решение. а) Биссектриса есть множество точек, равноудаленных от данных прямых. Если (x, y) — произвольная точка, лежащая на одной из биссектрис, то

$$\frac{|x-3y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x+y-1|}{\sqrt{10}}.$$

Обратно, если координаты точки (x, y) удовлетворяют этому уравнению, то она равноудалена от данных прямых и, следовательно, лежит на одной из биссектрис. Таким образом, записанное выше соотношение есть уравнение двух биссектрис углов, образованных данными прямыми. Оно эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}=\frac{3x+y-1}{\sqrt{10}}, \quad \frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}=-\frac{3x+y-1}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда получаем искомый результат. Остальные примеры решаются аналогично. **496.** $6x-13=0$. **497.** $9x-9y+13=0$. **498.** $64x+112y-9=0$. **499.** $2x-2y+17=0$. **500.** Задача имеет четыре решения: 1) $\left(x-\frac{72}{7}\right)^2+\left(y-\frac{29}{28}\right)^2=25$; 2) $\left(x+\frac{3}{7}\right)^2+\left(y+\frac{24}{7}\right)^2=25$; 3) $\left(x+\frac{68}{7}\right)^2+\left(y-\frac{99}{28}\right)^2=25$; 4) $(x-1)^2+(y-8)^2=25$. **501.** $(x-3)^2+(y-1)^2=5$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$. **502.** $x^2+y^2-30x+6y+109=0$, $x^2+y^2-70x+46y+309=0$. **503.** $x^2+(y-4)^2=5$, $\left(x+\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{12}{5}\right)^2=5$. **504.** $9x-13y-90=0$, $2x+11y-20=0$, $7x+y-70=0$, точка (10, 0). **505.** $x-3y=0$, $2x+4y-25=0$, $7x-y-50=0$. **506.** $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ — уравнение вписанной окружности; $(x+1)^2+y^2=9$, $(x-8)^2+(y-3)^2=36$, $(x-4)^2+(y+5)^2=4$ — уравнение вневписанных окружностей. **507.** а) 135°; б) 30°; в) 90°. **508.** $4x-y+9=0$, $x-4y+21=0$. Указание. Записать уравнения искомых прямых с угловыми коэффициентами и воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. **509.** $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **510.** Уравнения диагоналей: $x-2y+2=0$, $2x+y+4=0$. Уравнения сторон: $x+3y+7=0$, $3x-y+11=0$, $3x-y+1=0$, координаты вершин: (−3, 2), (0, 1), (−1, −2), (−4, −1). **512.** $x-2y-5=0$; $2x-y-6=0$. **513.** $x-7y-5=0$. **514.** а) $x-1=0$, $x-y+2=0$, $3x-y+2=0$; б) $x-1=0$, $x+y-4=0$, $3x+y-8=0$. **515.** $2x+11y+31=0$. **516.** $\operatorname{tg}A=\frac{5}{3}$, $\operatorname{tg}B=-\frac{14}{5}$, $\operatorname{tg}C=\frac{1}{5}$. **517.** $\operatorname{tg}A=\frac{29}{63}$, $\operatorname{tg}B=\frac{29}{11}$, $\operatorname{tg}C=\frac{29}{2}$. **518.** $S=\frac{26}{5}$. **519.** (20, −1), (22, 4). **520.** (AB) $x-y+5=0$, (BC) $3x+y-5=0$, (CA) $5x+3y-7=0$. **521.** $x-y+7=0$, $5x-y-13=0$. Указание. Воспользоваться уравнением пучка прямых с центром в точке P. **522.** $2x+3y-23=0$, $2x+3y+1=0$.

Указание. Записать уравнение пучка прямых, параллельных третьей прямой, в виде $2x+3y+m=0$. **523.** $S=\frac{C^2}{2AB}$. **524.** $\frac{23}{2}$. **525.** $3x+3y+8=0$, $3x+y+8=0$. Указание. Использовать уравнение пучка, определяемого двумя данными прямыми. **526.** $x+y+3=0$. **527.** $x-y-2=0$. **528.** Задача имеет два решения: а) $3x+4y-11=0$; б) $9x+10y-27=0$. **529.** $y+5=0$ (BC); $A(-5, 4)$, $B(-3, -5)$, $C(5, -5)$. Указание. Сначала определить координаты вершины A, а затем координаты середины стороны BC, используя тот факт, что точка пересечения медиан треугольника делит медиану в отношении $\lambda=2$. **530.** Задача имеет три решения: 1) (2, 1), (0, 5), (1, 6), $x-y+5=0$, $5x+y-11=0$; 2) (2, 1), $(-2, 9)$, (3, 2), $x-y-1=0$, $7x+5y-31=0$; 3) (0, 5), $(4, -3)$, $(-1, 10)$, $5x+y=0$, $13x+5y-37=0$. **531.** (AC) $x+y-3=0$, (AB) $x-2y-3=0$, (BC) $5x-y+21=0$. Указание. Сначала определить координаты точки пересечения медиан, затем найти координаты середины стороны BC (см. указание к решению задачи 529). **532.** $x-5y-3=0$, $5x-y-27=0$, $23x+11y-249=0$. Указание. Данные биссектрисы не проходят через A; точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно этих биссектрис, лежат на стороне BC. **533.** $3x+y-2=0$, $x+3y-7=0$. Указание. Если M' — точка, симметричная M относительно данной биссектрисы, то прямая $M'N$ является одной из искомых прямых. **534.** $x+3y-12=0$. Указание. Заметим, что данная биссектриса не проходит через точку пересечения M данных прямых, поэтому точка M', симметричная M относительно биссектрисы, лежит на искомой стороне треугольника. **535.** Существуют два квадрата, удовлетворяющие условиям задачи: а) $x-3y+7=0$, $x-3y+18=0$, $3x+y+7=0$, $3x+y+18=0$; б) $7x+y+5=0$, $7x+y-6=0$, $x-7y+17=0$, $x-7y+6=0$. **536.** Искомое множество представляет собой множество всех точек контура параллелограмма M_1, M_2, M_3, M_4, вершины M_1, M_3 которого лежат на прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$, а две другие вершины M_2 и M_4 — на прямой $A_2x+B_2y+C_2=0$. Указание. Выполнить преобразование общей декартовой системы координат $x'=A_1x+B_1y+C_1$, $y'=A_2x+B_2y+C_2$ и воспользоваться указанием к задаче 261. **537.** Искомое множество представляет собой множество всех точек контура квадрата $M_1M_2M_3M_4$, вершины M_1, M_3 которого лежат на прямой $x\cos\varphi+y\sin\varphi+C_1=0$, а две другие M_2 и M_4 — на прямой $-x\sin\varphi+y\cos\varphi+C_2=0$. Указание. Выполнить преобразование прямоугольной декартовой системы координат $x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi+C_1$, $y'=-x\sin\varphi+y\cos\varphi+C_2$ и воспользоваться указанием к задаче 261. **538.** Уравнение высоты, опущенной на сторону l_3, имеет вид: $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2A_3+B_2B_3)=(A_2x+B_2y+C_2)(A_1A_3+B_1B_3)$. Аналогичные уравнения имеют высоты, опущенные на стороны l_1 и l_2. Указание. Для вывода, например, приведенного выше уравнения, следует записать уравнение пучка, определяемого сторонами l_1 и l_2. Затем использовать условие перпендикулярности искомой высоты и стороны l_3. **539.** Уравнение медианы m, проходящей через точку пересечения сторон l_1 и l_2, имеет вид: $(A_1x+B_1y+C_1)\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}=(A_2x+B_2y+C_2)\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}$. Аналогичные уравнения имеют две другие медианы. Указание. Для вывода, например, приведенного выше уравнения медианы m, можно воспользоваться методом, предложенным в указании к решению задачи 536. Рассмотрим преобразование системы координат $x'=\lambda(A_1x+B_1y+C_1)$, $y'=\mu(A_2x+B_2y+C_2)$ (1). При этом, как легко видеть, прямые l_1 и l_2 переходят соответственно в новые координатные оси $O'x'$ и $O'y'$. Коэффициенты λ и μ подберем так, чтобы медиана m в новой системе имела уравнение $x'=y'$. (2). Для этого достаточно потребовать, чтобы прямая l_3 в новой системе $O'x'y'$ содержала вектор $\{1, -1\}$. Подставив найденные значения λ и μ в соотношения (1) и воспользовавшись соотношением (2), получаем искомое уравнение медианы m в исходной системе. **540.** Указание. Если ABC — данный треугольник, то точку A принять за начало, а вектор $\overrightarrow{AB}$ — за единичный вектор i прямоугольной декартовой системы координат. В этой системе записать уравнения высот и воспользоваться условием принадлежности трех прямых одному пучку (см. задачу 152, где предлагается решение той же задачи средствами векторной алгебры). **541.** Указание. Если

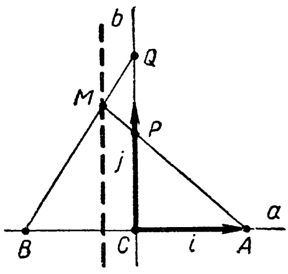


Рис. 54

ABC — данный треугольник, то точку A принять за начало, а вектор $\overrightarrow{AB}$ — за единичный вектор i прямоугольной декартовой системы координат. **542.** Указание. Если прямые a и b пересекаются, то за начало общей декартовой системы координат взять точку их пересечения O и положить $e_1 = \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OD}$. Если прямые a и b параллельны, то за начало общей декартовой системы координат взять точку A и положить $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AD}$. **543.** Указание. За начало общей декартовой системы координат принять точку A и положить $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$. **544.** Указание. Пусть ABC— данный треугольник. Точку A принять за начало общей декартовой системы координат и положить $\overrightarrow{AB} = e_1$, $\overrightarrow{AC} = e_2$. Далее выразить координаты точек A_1, B_1 и C_1 через координаты точек A, B и C, записать уравнения прямых AA_1, BB_1, CC_1 и использовать условие их принадлежности одному пучку. **545.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Указание. Диагонали ромба принять за оси прямоугольной декартовой системы координат и вычислить расстояние от вершины ромба до противоположной стороны. **546.** $d = \frac{14}{\sqrt{29}}$. **547.** Прямая, параллельная l. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой l. **548.** Множество всех точек отрезка MN вместе с его концами. Здесь точки M и N — соответственно точки пересечения биссектрис углов B и C с противоположными сторонами треугольника. Указание. Выбрав начало прямоугольной декартовой системы координат так, чтобы оно принадлежало внутренней области треугольника записать нормальные уравнения сторон: $\alpha_1 (x\ y) = 0$, $\alpha_2 (x, y) = 0, \alpha_3 (x,y) = 0$. Далее, используя условие задачи, вывести уравнение искомого множества. При этом важно учесть, что в силу указанного выше условия выбора начала координат для любой внутренней точки (x_0, y_0) треугольника числа $\alpha_1 (x_0, y_0), \alpha_2 (x_0, y_0)$ и $\alpha_3(x_0, y_0)$ имеют один и тот же знак. **549.** Прямая, параллельная прямой b. Решение. Прямоугольную декартову систему координат возьмем так, как указано на рисунке 54. Если α — абсцисса точки B, а λ — переменная ордината точки Q, то, учитывая условие $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CQ}$ в силу выбора системы координат, получаем: $A(1, 0)$, $B(\alpha, 0)$, $P(0, k\lambda)$, $Q(0, \lambda)$. Уравнения прямых AP и BQ имеют вид: $k\lambda x + y - k\lambda = 0$, $\lambda x + \alpha y - \alpha\lambda = 0$. Решая совместно эти уравнения, определяем координаты точки пересечения прямых:

$$x = \frac{\alpha(k-1)}{\alpha k - 1}, \quad y = \frac{k\lambda(\alpha - 1)}{k\alpha - 1}.$$

Так как x не содержит λ, то $x = \frac{\alpha(k-1)}{\alpha k - 1}$ является уравнением искомого множества точек. **550.** Прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых l_1 и l_2. Указание. Данные прямые l_1 и l_2 принять за оси общей декартовой системы координат. **551.** Прямая, проходящая через точку O. **552.** Прямая, параллельная данным. **553.** Две прямые, проходящие через точку пересечения прямых l_1 и l_2. **554.** Прямая, проходящая через точку O. **555.** Прямая, проходящая через точку O. Указание. Точку O принять за начало общей декартовой системы координат и положить $e_1 = \overrightarrow{OA_0}$, $e_2 = \overrightarrow{OB_0}$, где A_0B_0 — одна из прямых пучка $\{m\}$. **556.** в), г), ж). **557.** б), г), д), и). **558.** $\rho = 1$. Указание. Взяв векторы e_1 и e_2, принадлежащие соответственно прямым l_1 и l_2, за базисные, написать аналитическое задание преобразования в этом базисе. **559.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **560.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Остальные преобразования не являются линейными. **563.** а) $\{2, 1\}$, $\{-1, 3\}$; б) $\left\{\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right\}$, $\left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right\}$; в) $\{5, 6\}$, $\{10, -2\}$, $\{3,5\}$; г) $\{1,1\}$, $\{1,0\}$, $\{1, -1\}$. **564.** $a'\{-1,2\}$, $a'_2\{-9,8\}$, $a'_3\{-8, -4\}$, $a'_4\{24, -3\}$, $a'_5\{-7,4\}$. **565.** Матрицы данных преобразований имеют вид: а) $\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-2, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}-2, & 1\\ -1, & 1\end{pmatrix}$. **566.** $x' = 2x - 3y, y' = 6x - 9y$. **567.** $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. **568.** б), в) и д). **569.** а), в). **570.** Указание. Сначала доказать, что образы любых двух векторов коллинеарны, а затем воспользоваться задачей 36. **571.** Пусть O — произвольная точка плоскости. Множество Ω состоит из тех и только тех векторов плоскости, концы которых лежат на прямой, заданной в системе Oe_1e_2 уравнением $3x - 8y + 2 = 0$. При этом предполагается, что все векторы приложены к точке O. **572.** Указание. Пусть Ω — множество всех векторов, удовлетворяющих условию задачи. Показать, что Ω — система коллинеарных векторов, и воспользоваться задачей 36. **573.** Пусть e — вектор, удовлетворяющий условию $A(e) \neq 0$. Возможны два случая: а) $A(e)$ и $\boldsymbol{a}$ не коллинеарны. В этом случае множество Ω пустое; б) $A(e)$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. В этом случае Ω состоит из тех и только тех векторов плоскости, концы которых лежат на некоторой прямой l, если векторы приложены к некоторой точке O. При этом точка O не лежит на прямой l. **574.** а) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$; два собственных направления, определяемых векторами $p_1\{1, 3\}$ и $p_2\{-3, 1\}$; б) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$; два собственных направления, определяемых векторами $p_1\{1, 1\}$ и $p_2\{1, -4\}$; в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$; два собственных направления, определяемых векторами $p_1\{3, 2\}$ и $p_2\{1, 2\}$; г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$; одно собственное направление, определяемое первым координатным вектором $\boldsymbol{i}\{1, 0\}$. **575.** Преобразования а) и в) не имеют собственных направлений; любой ненулевой вектор преобразования б) является собственным. **576.** При $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ любой вектор плоскости является собственным вектором с характеристическим числом -1; при $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ собственными векторами являются $\boldsymbol{p}$ с характеристическим числом $\varphi(\boldsymbol{p}) - 1$ и любой ненулевой вектор $\boldsymbol{q}$, удовлетворяющий условию $\varphi(\boldsymbol{q}) = 0$, с характеристическим числом -1. **578.** Указание. Пусть e_1, e_2 — базис, где e_1 является собственным вектором данного линейного преобразования. Если $A(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$, то базис $e'_1 = \alpha e_1$, $e'_2 = e_2$ является искомым. **579.** Числа α и β определяются из соотношений $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения данного линейного преобразования. **581.** Если $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ — матрица в базисе e_1 e_2, то в новом базисе матрица того же преобразования имеет вид: $\begin{pmatrix}a_{22} & a_{21}\\ a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}$.

582. Решение. Введем обозначения для координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$. Имеем: $\boldsymbol{a}\{a_1, a_2\}$, $\boldsymbol{b}\{b_1, b_2\}$, $\boldsymbol{a}'\{a'_1, a'_2\}$, $\boldsymbol{b}'\{b'_1, b'_2\}$, согласно задаче 85. $S = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} S_0$, $S' = \begin{vmatrix}a'_1 & b'_1\\ a'_2 & b'_2\end{vmatrix} S_0$, где S_0 — площадь параллелограмма, построенного на векторах e_1 и e_2. Очевидно, $a'_1 = a_{11}a_1 + a_{12}a_2$, $a'_2 = a_{21}a_1 + a_{22}a_2$, $b'_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2$, $b'_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2$. Подставив эти значения в выражение для S' и воспользовавшись теоремой об умножении определителей, получим искомый результат. **583.** Указание. Воспользоваться задачей 582. **584.** Указание. Пусть $\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$. Сначала показать, что $A(e'_1) = k_{11}e_1 + k_{21}e_2$, $A(e'_2) = k_{12}e_1 + k_{22}e_2$. **585.** а) $\begin{pmatrix}38 & -81\\ 16 & -34\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}15 & -36\\ 6 & -14\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}9 & -19\\ 3 & -6\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}14 & -28\\ 6 & -12\end{pmatrix}$. Указание. Воспользоваться задачей 584. **586.** Указание. Воспользоваться задачей 584. **587.** а) $\begin{pmatrix}4 & \sqrt{2}\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & -7\\ -7 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Указание. Воспользьзоваться задачей 581. **588.** Пусть A и B имеют матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Тогда φ и ψ имеют соответственно матрицы $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$. **589.** а) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \sqrt{2}+2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3\sqrt{2} & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 2\sqrt{2}-6 & 6 \end{pmatrix}$. **590.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$. **591.** $AB\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA\begin{pmatrix} -34 & -68 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}$. **593.** У к а з а н и е. По аналитическим заданиям преобразований A и B найти аналитическое задание преобразования AB. **594.** $A^{-1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, C^{-1} не существует, D^{-1} существует при условии $k \neq 0$ и имеет вид: $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$, F^{-1} существует при условии $k^2 - a^2 \neq 0$ и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k}{k^2-a^2} & \dfrac{a}{a^2-k^2} \\ \dfrac{a}{a^2-k^2} & \dfrac{k}{k^2-a^2} \end{pmatrix}.$$

595. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$. **596.** У к а з а н и е. Выбрав базис, записать матрицы преобразований A, B, E и воспользоваться задачей 593. **597.** A^n и B^n имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

599. У к а з а н и е. Сначала показать, что $B = CA$. **601.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 593. **602.** Пусть ρ — ранг преобразования A. а) $\rho = 2$, $x = 0$; б) $\rho = 0$, X — любое преобразование; в) $\rho = 1$; в этом случае при $c = \lambda a$, $d = \lambda b$ преобразование X имеет матрицу $\begin{pmatrix} -b\alpha & a\alpha \\ -b\beta & a\beta \end{pmatrix}$, где α и β — произвольные числа. **603.** 1) а), д), и); 2) в), е), ж). **604.** а) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$; б) $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$; в) $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$; г) $x' = -x$, $y' = -y$. **605.** а) $x' = x$, $y' = -y$; б) $x' = -x$, $y' = y$; в) $x' = y$, $y' = x$; г) $x' = -y$, $y' = -x$; д) $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$. У к а з а н и е. Сначала записать аналитическое задание преобразования S_e в общем виде: $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$ и учесть, что при этом преобразовании $\boldsymbol{e} = S_e(\boldsymbol{e})$ и $-\boldsymbol{e}' = S_e(\boldsymbol{e}')$, где $\boldsymbol{e}'$ — вектор, ортогональный $\boldsymbol{e}$. **606.** $x' = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}y$, $y' = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}x + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}y$. У к а з а н и е. Сначала записать аналитическое задание преобразования S_a в новом базисе $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, где $\boldsymbol{i}'$ сонаправлен с $\boldsymbol{a}$. **607.** $\boldsymbol{e}\{3, -1\}$. **608.** а) $x' = 3x$, $y = -3y$; б) $x' = 4y$, $y' = 4x$; в) $x' = 24x + 7y$, $y' = 7x - 24y$. **609.** а) $x' = x - y$, $y' = x + y$; б) $x' = 2x - 2\sqrt{3}y$, $y' = 2\sqrt{3}x + 2y$; в) $x' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y$, $y' = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y$; г) $x' = -2x + 2y$, $y' = -2x - 2y$.

610. а) Преобразование центрально-подобной симметрии kS_e, где $k = 5$, $e\{2, -1\}$; б) преобразование симметрии S_e, где $e\{1, -1\}$. **611.** а) Преобразование центрально-подобной симметрии kS_e, $k = 5$, $e\{1, 0\}$; б) преобразование гомотетии $\Gamma_\text{к}$, $k = 3$; в) преобразование центрально-подобного вращения kV_φ, $k = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; г) преобразование гомотетии $\Gamma_\text{к}$, $k = -\sqrt{2}$; д) преобразование центрально-подобной симметрии kS_e, $k = 5$, $e\{-2, 1\}$; е) преобразование симметрии S_e, $e\{1, 3\}$. Указание. Для определения вида каждого из преобразований необходимо воспользоваться теоремой 2, стр. 77. **612.** а) $x' = -5y$, $y' = 5x$ — преобразование центрально-подобного вращения kV_φ, $k = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $x' = 3x - \sqrt{3}y$, $y' = -\sqrt{3}x - 3y$ — преобразование центрально-подобной симметрии kS_e, $k = 2\sqrt{3}$, $e\{\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}\}$; в) $x' = 2x - 2y$, $y' = 2x + 2y$ — преобразование центрально-подобного вращения kV_φ, $k = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; г) $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y$, $y' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y$ — преобразование симметрии S_e, $e\{2, -3\}$. Указание. См. указание к предыдущей задаче. **613.** а) $x' = -x$, $y' = -y$ — преобразование отражения Γ_{-1}; б) $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$ — преобразование симметрии S_e, $e\{\sqrt{3} + 2, \ -1\}$; в) $x' = -y$, $y' = x$ — преобразование вращения V_φ, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; г) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$ — преобразование вращения V_φ, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. **614.** Преобразование вращения $x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y$, $y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y$. **615.** Указание. Если $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ — попарно неколлинеарные собственные векторы данного преобразования с характеристическими числами λ_1, λ_2 и λ_3, то сначала показать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Далее воспользоваться задачей 577. **616.** Решение. Аналитическое задание вращения V_φ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ имеет вид:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \tag{1}$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{2}$$

По определению вращения имеем: $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$. Легко видеть, что эти соотношения выражают формулы преобразования векторов также и в том случае, когда $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, так как, подставив эти значения в соотношения (1) и (2), получаем: при $\varphi = 0$, $x' = x$, $y' = y$ — тождественное преобразование; при $\varphi = \pi$ $x' = -x$, $y' = -y$ — преобразование отражения. Выведем сначала формулы для вычисления $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$. Возьмем единичный вектор $\boldsymbol{p}$ так, чтобы $(\widehat{\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}}) = \varphi_1$, и рассмотрим образ $\boldsymbol{p}'$ этого вектора при вращении V_{φ_2}: $x' = x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2$, $y' = x\sin\varphi_2 + y\cos\varphi_2$ (3). Так как $(\widehat{\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}'}) = (\widehat{\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}}) + (\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'})$, то $\Theta = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\Theta = (\widehat{\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}'})$. Но $\boldsymbol{p}\{\cos\varphi_1, \sin\varphi_1\}$, $\boldsymbol{p}'\{\cos\Theta, \sin\Theta\}$, поэтому, подставив значения координат векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$ в соотношения (3), получаем: $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\sin\varphi_1$, $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1$. Так как эти выражения верны для любых значений φ_1 и φ_2, то, положив $-\varphi_2$ вместо φ_2, получаем остальные формулы. **617.** а) Преобразование симметрии S_m, где $\boldsymbol{m}$ получен из $\boldsymbol{e}$ поворотом на угол $-\frac{\varphi}{2}$; б) тождественное преобразование. **618.** Если базис выбрать так, чтобы векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{e}$ были сонаправлены, то преобразования $\Gamma_\text{к}S_e$ и $S_e\Gamma_\text{к}$ имеют одно и то же аналитическое задание: $x' = kx$, $y' = -ky$. Это преобразование является: а) при $k > 0$ преобразованием центрально-подобной симметрии kS_e; б) при $k = -1$ преобразованием симметрии S_m относительно вектора $\boldsymbol{m}$, ортогонального $\boldsymbol{e}_1$; в) при $k < 0$ и $k \neq -1$ преобразованием центрально-подобной симметрии $|k|\, S_m$. **619.** Если базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ выбран так, что $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{e}$ сонаправлены, то $Sm\, Se$ и $Se\, Sm$ имеют аналитические задания: $(S_m S_e)\; x' = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x - \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}y,\; y' = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}x + \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}y$; $(S_e\, S_m) x' = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x + \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}y,\; y' = -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}x + \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}y$. Здесь $\{\alpha, \beta\}$ — координаты вектора $\boldsymbol{m}$. Эти преобразования совпадают тогда и только тогда, когда $\alpha\beta = 0$. Пусть $\varphi = \angle(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{m})$. 1) $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$; $S_m\, S_e = S_e\, S_m = E$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; $S_m S_e = S_e\, S_m = \Gamma_{-1}$; 3) $\varphi \neq 0, \varphi = \pi, \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \varphi \neq -\dfrac{\pi}{2}$; $S_m S_e = V_{2\varphi}$, $S_e S_m = V_{-2\varphi}$. Указание. Воспользоваться ответом задачи 606 и учесть, что $\cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. **620.** Указание. В прямоугольном декартовом базисе преобразование AB имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Исследовать эту матрицу при различных предположениях задачи. **621.** $AB = klV_\varphi$ — преобразование центрально-подобного вращения; $AC = kmS_e$ — преобразование центрально-подобной симметрии, если $km \neq 1$, и симметрии, если $km = 1$; $BC = mlS_r$ — преобразование центрально-подобной симметрии, если $lm \neq 1$, или симметрии, если $lm = 1$ относительно вектора $\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ получен из $\boldsymbol{e}$ поворотом на угол $\dfrac{\varphi}{2}$. **624.** $x' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{2}{5}y,\; y' = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{1}{5}y$; нет. **625.** $x' = x + \sqrt{x^2+y^2}$, $y' = y$; нет. **626.** Области определения и значений совпадают с множеством всех точек плоскости, за исключением точки C:

$$x' = \frac{r^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + x_0, \quad y' = \frac{r^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + y_0.$$

Указание. Для того чтобы показать, что данное отображение является инверсным, использовать полученные формулы для случая, когда начало координат совпадает с точкой C. **627.** Области определения и значений гиперболической инверсии совпадают со множеством всех точек плоскости, за исключением точек оси l_0: $x' = x$, $y' = \dfrac{k}{y}$. **628.** Указание. Записать аналитическое задание отображения, взяв общую декартову систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с прямой l_0, а ось Oy содержала вектор $\boldsymbol{p}$. **629.** Если O — полюс, а $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k$ — радиус-векторы точек $M_1, \ldots, M_k$, то при $k = m_1 + \ldots + m_k$ все точки плоскости переходят в точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + m_k\boldsymbol{r}_k}{m_1 + \ldots m_k}$. Если $m_1, \ldots, m_k$ — положительные числа, то M_0 есть центр тяжести материальных точек $M_1, \ldots, M_k$, в которых сосредоточены массы $m_1, \ldots, m_k$ (см. задачу 52). Указание. Выбрав произвольную систему координат, записать аналитическое задание отображения. **630.** а), в) и д). **631.** а) $O'(1, 0)$, $M_1'(-3, 5)$, $M_2'(14, -18)$, $M_3'(8, -14)$; $\boldsymbol{a}_1'\{-8,3\}$, $\boldsymbol{a}_2'\{2, 8\}$, $\boldsymbol{a}_3'\{7, 14\}$, $\boldsymbol{a}_4'\{-2, -1\}$; б) $M_1(1, 3)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(-2, 3)$, $M_4(0, -1)$, $\boldsymbol{a}_1\{1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2\{0, 1\}$, $\boldsymbol{a}_3\{1, -2\}$, $\boldsymbol{a}_4\{-3, 2\}$. **632.** а) 1) $2x - y - 7 = 0$; 2) $x + 3y + 7 = 0$; 3) $x - 4y - 16 = 0$; 4) $y + 1 = 0$; б) 1) $2x + y - 3 = 0$; 2) $x - 3y + 2 = 0$; 3) $22x - 3y - 33 = 0$; 4) $x + 11y - 13 = 0$. **633.** $x' = x + 1 \cdot y' = 4 - 2$. а) $O'(1, -2)$; б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$; в) Ось Ox переходит в прямую $y = -2$, а ось Oy—

в прямую $x = 1$. **634.** $x' = kx + x_0(1-k)$, $y' = ky + y_0(1-k)$. а) $O_1(x_0(1-k), y_0(1-k))$, $e_1'\{k, 0\}$, $e_2'\{0, k\}$; б) ось Ox переходит в прямую $y = y_0(1-k)$, а ось Oy — в прямую $x = x_0(1-k)$. **635.** а) $\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = 3x + 5y + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y - 5, \\ y' = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 3x + 5y - 1, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ **636.** а) $\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = x - 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x. \end{cases}$ **637.** а) $\begin{cases} x' = x - 4y + 1, \\ y' = -2x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ **638.** $\begin{cases} x' = -x - y + 1, \\ y' = x. \end{cases}$ **640.** а) Единственное направление $\{1, 0\}$; б) нет собственных направлений; в) любое направление является собственным; г) два направления: $\{1, 1\}$ и $\{2, -1\}$. **641.** а) $(1, 1)$; б) прямая неподвижных точек $2x - 3y + 1 = 0$; в) нет неподвижных точек. **642.** а) Единственная неподвижная точка $(0, 0)$; инвариантных прямых нет; б) ось Ox состоит из неподвижных точек; всякая прямая, параллельная ей, является инвариантной прямой; других инвариантных прямых нет; в) неподвижных точек нет; имеется единственная инвариантная прямая $x - y - 1 = 0$. **643.** $x' = 10x + 12y + 3$, $y' = 6x + 9y + 2$. **644.** Косая симметрия (см. задачу 628). Неподвижными точками будут все точки прямой CM, где M — середина AB. Инвариантными прямыми являются все прямые пучка параллельных прямых, определяемого вектором $\overrightarrow{AB}$. **645.** а) Неподвижной точкой является точка пересечения медиан треугольника ABC. б) Указание. Записать координатное задание преобразования П в системе Ae_1e_2, где $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$ (ср. с задачей 638). **646.** Указание. Показать, что если преобразование не имеет неподвижных точек, то $\lambda_0 = 1$ является корнем характеристического уравнения. **647.** $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$, $y' = y$, $a_{11} \neq 0$. **648.** $x' = ax$, $y' = by$, где $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 0$. Начало координат является единственной неподвижной точкой. **649.** Указание. Воспользоваться задачей 582. **650.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **651.** Указание. Аффинное преобразование $x' = A_1x + B_1y + C_1$, $y' = A_2x + B_2y + C_2$ прямые (M_3M_1) и (M_2M_3) переводит соответственно в оси Ox и Oy. Пользуясь задачей 639, найти уравнение образа прямой M_1M_2. Далее воспользоваться задачами 523 и 649. **652.** а) $x' = x - 3$, $y' = y + 5$; б) $x' = x + 1$, $y' = y + 7$; в) $x' = x - 1$, $y' = y + 4$; г) $x' = x$, $y' = y - 6$. **653.** а) $x' = -x + 2$, $y' = -y + 6$; б) $x' = -x - 4$, $y' = -y + 10$; в) $x' = -x - 4$, $y' = -y$; г) $x' = -x$, $y' = -y + 6$. **654.** а) $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$; б) $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$; в) $x' = -y + 1$, $y' = x - 3$. **655.** а) $x' = y$, $y' = x$; б) $x' = y - 4$, $y' = x + 4$; в) $x' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{12}{5}$, $y' = -\frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{16}{5}$; г) $x' = \frac{119}{169}x + \frac{120}{169}y + \frac{270}{169}$, $y' = \frac{120}{169}x - \frac{119}{169}y - \frac{648}{169}$. Указание. Сначала найти матрицу ассоциированного преобразования, воспользовавшись задачей 606. Далее использовать теорему 1, стр. 86. **656.** а) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{22}{5}$; б) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{21}{5}$, $y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{13}{5}$; в) $x' = -x - 7$, $y' = y + 3$. **657.** а) $x' = 3x + 4$, $y' = 3y - 2$; б) $x' = \frac{5}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{5\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{2}y$; в) $x' = -2x + 6$, $y' = 2y - 1$. **658.** $x' = -x + 2x_0$, $y' = -y + 2y_0$. **659.** $x' = \frac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2}x - \frac{2AB}{A^2 + B^2}y - \frac{2AC}{A^2 + B^2}$, $y' = -\frac{2AB}{A^2 + B^2}x - \frac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2}y - \frac{2BC}{A^2 + B^2}$. Указание. Первый способ. Если точка $M(x, y)$

переходит в точку $M'(x', y')$, то отрезок MM' перпендикулярен данной прямой и середина этого отрезка лежит на этой прямой. Эти два условия аналитически запишутся так: $-B(x'-x)+A(y'-y)=0$, $(x+x')A+(y+y')B+2C=0$. Отсюда выразить x', y' через x, y. Второй способ. Воспользоваться результатом задачи 606. **660.** $x'=\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\frac{2BA}{A^2+B^2}y-\frac{2AC}{A^2+B^2}-B\lambda$, $y'=-\frac{2AB}{A^2+B^2}x-$ $-\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2}y-\frac{2BC}{A^2+B^2}+A\lambda$. Указание. Сначала записать аналитическое задание осевой симметрии с осью $Ax+By+C=0$ (см. задачу 659). **661.** 1) г), е); 2) а), д). **662.** а) Вращение; б) осевая симметрия относительной прямой $x+3=0$; в) центральная симметрия с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; г) скользящая симметрия. **663.** а) Центрально-подобное вращение на угол $\varphi=\frac{\pi}{2}$ с центром в начале координат и коэффициентом $k=5$; б) гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $k=3$; в) центрально-подобное вращение с центром в начале координат на угол $\varphi=$ $=\frac{\pi}{6}$ и коэффициентом $k=3$; г) центрально-подобная симметрия относительно оси Ox с центром в начале координат и коэффициентом $k=2$; д) центрально-подобная симметрия относительно оси $y=\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и коэффициентом $k=5$; е) центрально-подобное вращение на угол $\varphi=\frac{\pi}{2}$ с центром $(-1, -2)$ и коэффициентом $k=3$. **664.** $x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi$, $y'=x\sin\varphi-y\cos\varphi$. Да; осевая симметрия относительно прямой $x\sin\frac{\varphi}{2}-y\cos\frac{\varphi}{2}=0$. **665.** Указание. Выбрав систему координат, записать аналитические задания преобразований. Заметим, что при m_1+ $+m_2+\ldots+m_к=0$ условие $m_1\overrightarrow{OM_1}+\ldots+m_к\overrightarrow{OM_к}=0$ (или $m_1OM_1+\ldots+$ $+m_к\overrightarrow{OM_к}\neq 0$) не зависит от выбора точки O. **666.** Указание. Предварительно доказать, что преобразование векторов $\overrightarrow{\Pi}$, ассоциированное с данным точечным преобразованием, является отражением $\overline{\Gamma}_{-1}$. Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{\Pi}(p)=-p$, $\overrightarrow{\Pi}(q)=-q$, где $p=\overrightarrow{AB}$, а $q=\overrightarrow{AC}$. Далее воспользоваться теоремой 2, стр. 86. **667.** Указание. Если $\overline{\Pi}$ — преобразование, ассоциированное с данным, то $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{\Pi}(\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{\Pi}(\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{\Pi}(\overrightarrow{AC})$. Отсюда, учитывая теорему о средней линии треугольника, приходим к выводу, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ являются собственными векторами преобразования. Далее следует воспользоваться задачей 615 и теоремой 2; стр. 86. **668.** Центральная симметрия. Решение. Пусть Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 и Π_5 — центральные симметрии с центрами соответственно в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5. Очевидно, $\Pi=\Pi_5\Pi_4\Pi_3\Pi_2\Pi_1$. Так как $\overline{\Pi}_1=\overline{\Gamma}_{-1}$, $\overline{\Pi}_2=\overline{\Gamma}_{-1}$, $\overline{\Pi}_3=\overline{\Gamma}_{-1}$, $\overline{\Pi}_4=\overline{\Gamma}_{-1}$, $\overline{\Pi}_5=\overline{\Gamma}_{-1}$, то $\overline{\Pi}=$ $=\overline{\Gamma}_{-1}\overline{\Gamma}_{-1}\overline{\Gamma}_{-1}\overline{\Gamma}_{-1}\overline{\Gamma}_{-1}=\overline{\Gamma}_{-1}$. Из теоремы 2, стр. 86, следует, что Π — центральная симметрия. Для определения центра симметрии достаточно найти, например, образ A_1' вершины A_1. Середина отрезка A_1A_1 будет искомым центром. **669.** Указание. Рассмотреть векторное преобразование, ассоциированное с данным точечным преобразованием, и применить к нему результат задачи 615. **670.** Пусть O — полюс, а $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{R}$ — радиус-векторы точек E_1, E_2 и C, где C — центр гомотетии. Тогда $R=$ $=\frac{\boldsymbol{r}_2-k\boldsymbol{r}_1}{1-k}$. **671.** Решение. а) Пусть Π — искомое вращение, а $\overline{\Pi}$— ассоциированное векторное преобразование. Из условий задачи следует, что $\overline{\Pi}=\overline{V}_\varphi$. Согласно теореме 1, стр. 86, Π определяется однозначно. Если M_0 и M_0' совпадают, то они определяют центр. Если же M_0 и M_0' не совпадают, то для построения центра необходимо построить множество точек, для каждой из которых отношение расстояний до точек M_0' и M_0 равно единице, и другое множество точек, из которых отрезок M_0M_0' виден под данным углом (рис. 55, *а*). Одна из двух точек пересечения A_0 и B_0 является искомой. Ее выбор определяется заданием направления угла φ. На рисунке 55,*а* точка A_0 является искомой, так как в этом случае ориентация угла $M_0A_0M_0'$ совпадает с положительным направлением ориентированной плоскости; б) задача решается аналогично предыдущей. Построение центра показано на рисунке 55, *б*. Здесь в соответствии с условиями задачи прямая l заменена окружностью ω (см. задачу 327). **672.** Указание. Воспользоваться теоремой 1, стр. 86. Построение оси и центра. Если M_0 и M_0' совпадают, то они определяют центр преобразования; прямая, проходящая через эту точку и содержащая вектор $\boldsymbol{p}$, —ось преобразования. Если M_0' и M_0 не совпадают, то для построения центра необходимо построить множество точек ω, для каждой из которых отношение расстояний до точек M_0' и M_0 равно k (см. задачу 327). Пусть A — точка пересечения окружности ω с отрезком M_0M_0' (рис. 56), тогда осью l будет прямая, проходящая через точку A и содержащая вектор $\boldsymbol{p}$, а центром O — другая точка пересечения окружности ω с прямой l. Заметим, что это построение по существу пригодно также и в том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_0'}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны. Здесь осью l будет прямая $\overrightarrow{M_0M_0'}$. **673.** Решение. Если $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ — векторные преобразования, ассоциированные с Π_1 и Π_2, то $\overline{\Pi}_1 = \overline{S_e}$, $\overline{\Pi}_2 = \overline{S_m}$, где $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{m}$ — векторы прямых l_1 и l_2. Отсюда следует, что $\overline{\Pi} = \overline{S_m}\,\overline{S_e} = \overline{V}_{2\varphi}$, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ и $\overline{\Pi} = \overline{S_m}\,\overline{S_e} = \Gamma_{-1}$, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. решение задачи 619). Учитывая, что O — неподвижная точка преобразования Π, и принимая во внимание теорему 2, стр. 86, получаем искомый результат. **674.** Вектор $\boldsymbol{a}$ параллельного переноса ортогонален данным прямым, направлен от прямой l_1 к прямой l_2 и $|\boldsymbol{a}| = 2d$, где d — расстояние между данными осями. **675.** Указание. Пусть $\Pi = \Pi_3\Pi_2\Pi_1$. Легко видеть, что $\overline{\Pi} = \overline{E}$, где $\overline{E}$ — тождественное преобразование векторов. Из теоремы 2, стр. 86, следует, что Π есть тождественное преобразование или параллельный перенос. Далее следует рассмотреть каждый случай в отдельности. а) Легко видеть, что $\Pi(A_2) = A_2$, поэтому Π является тождественным преобразованием; б) так как треугольник $B_1B_2B_3$ согласно условиям задачи имеет положительную ориентацию, то $\Pi\,(B_1) \neq B_1$, поэтому Π в данном случае есть параллельный перенос. Можно показать, что вектор параллельного переноса равен $3\overrightarrow{B_1B_3}$. **676.** Центр C_1 гомотетии $\Pi_2\Pi_1$ определяется условием $\overrightarrow{OC_1} = \dfrac{\boldsymbol{a}_0}{1-\lambda}$, а центр C_2 гомотетии $\Pi_1\Pi_2$ — условием $\overrightarrow{OC_2} = \dfrac{\lambda \boldsymbol{a}_0}{1-\lambda}$. Нет. Указание. Задача решается так же, как и задача 673. Для определения центров преобразований воспользоваться результатом задачи 670. **677.** а) Вращение на угол φ; б) центрально-подобное вращение с углом поворота φ и коэффициентом k_1k_2. Указание. Задача решается так же, как и задача 673. Воспользоваться результатом задачи 621. Для определения центров преобразований сначала найти образ точки O_1, а затем воспользоваться задачей 671. **678.** а) Возможны три случая: 1) O_1 и O_2 совпадают — симметрия относительно прямой l; 2) O_1 и O_2 различны и лежат на перпендикуляре к l — симметрия относительно прямой l', параллельной l и проходящей через середину отрезка O_1O_1', где O_1' — образ точки O_1; 3) прямая $O_1\,O_2$ не перпендикулярна l — скользящая симметрия, ось l' которой параллельна l и проходит через середину отрезка O_1O_1', где O_1' — образ точки O_1. Вектором параллельного перенесения является составляющая вектора $\overrightarrow{O_1O_1'}$ по оси l; б) центрально-подобная симметрия. Для определения оси и центра необходимо найти образ O_1' точки O_1 и воспользоваться

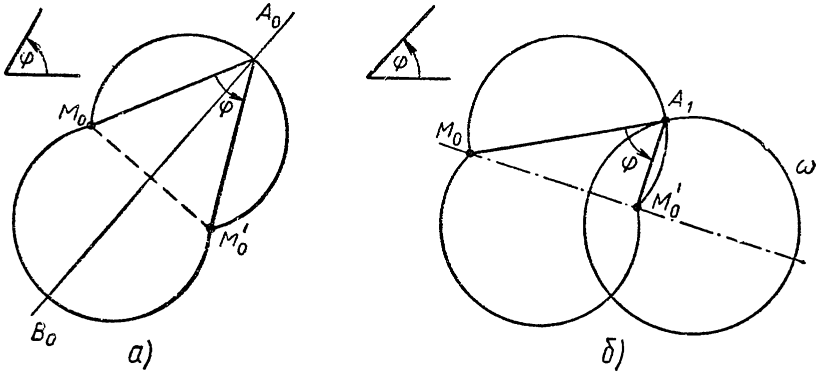


Рис. 55

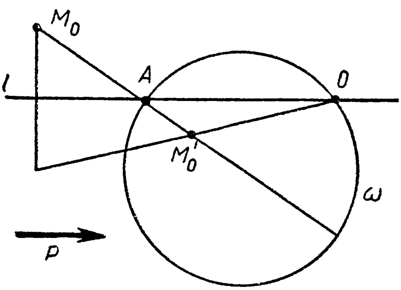


Рис. 56

задачей 672. Указание. Задача решается так же, как и задача 673. Воспользоваться результатом задачи 621. **679.** а) Если O_1 и O_2 совпадают, то искомое преобразование есть симметрия, ось которой получена из l поворотом вокруг точки O на угол $\frac{\varphi}{2}$. Если O_1 и O_2 не совпадают, то $\Pi_2\,\Pi_1$ есть симметрия или скользящая симметрия, ось которой проходит через середину отрезка O_1O_1' и составляет с l угол $\frac{\varphi}{2}$; здесь O_1' образ точки O_1. б) Центрально-подобная симметрия, ось которой составляет с l угол $\frac{\varphi}{2}$. Для определения оси и центра необходимо найти образ O_1' точки O_1 и воспользоваться задачей 672. Указание. Задача решается так же, как и задача 673, при этом необходимо воспользоваться результатом задачи 621. **680.** а) $x' = 7x - 2y + 2$, $y' = 3x + 1$; первого рода; б) $x' = -3x - y - 3$, $y' = 16x + 5y + 12$; второго рода; в) $x' = 2x + 5$, $y' = 2x + y + 10$; первого рода; г) $x' = x - y + 1$, $y' = y$; второго рода. **681.** б) и в) — первого рода; а) и г) — второго рода. **682.** $x' = (A\lambda + 1)x + B\lambda y + c\lambda$, $y' = A\mu x + (B\mu + 1)\,y + C\mu$. Здесь λ и μ — произвольные параметры, удовлетворяющие условию $A\lambda + B\mu + 1 \neq 0$. **683.** $x' = x + a_{12}y$, $y' = a_{22}y$, где $a_{22} \neq 0$ и при $a_{22} = 1$, $a_{12} \neq 0$. а) $a_{22} \neq 1$; б) $a_{22} = 1$, $a_{12} \neq 0$; в) $a_{22} = -1$. **684.** $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Указание. Записать координатное задание преобразования в общем декартовом базисе Oe_1e_2, где $e_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$. **685.** Параллельный перенос или перспективно-аффинное преобразование. Указание. Не нарушая общности, можно считать, что A, A', B не коллинеарны. Если систему координат выбрать так, чтобы начало совпало с точкой A, $e_1 = \overrightarrow{AA'}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$, то отсюда и из условия задачи следует: $A\,(0, 0)$, $B\,(0, 1)$, $C\,(b_1\, c)$, $A'(1, 0)$, $B'(a, 1)$, $C'(b_2\,, c)$, где a, b_1, b_2, c — произвольные параметры и $b_1 \neq 0$. В выбранной системе координат данное преобразование имеет следующее координатное задание: $x' = \dfrac{b_2 + (1-a)c - 1}{b_1}\,x + (a-1)y + 1$, $y' = y$. Определяя неподвижные точки, установить тип преобразования. **687.** а) $2x - a_{12}y - x_0 = 0$; б) $y = 0$. **689.** Указание. Записать координатное задание преобразования и воспользоваться задачей 687. Систему координат удобнее взять так, чтобы в этой системе $O(0, 0)$, $A_1(0, 1)$, $B_1(1, 1)$. **690.** Решение. Пользуясь результатом задачи 683, запишем координатное задание преобразования, приняв координатную ось Ox за ось преобразования: $x' = x + a_{12}y$, $y' = a_{22}y$. Так как оно инверсное, то $x = x' + a_{12}y$, $y = a_{22}y'$. Отсюда получаем: $(a_{12} + a_{12}a_{22})y = 0$, $(1 - a_{22}^2)y = 0$. Эти соотношения имеют место для любого y, поэтому $a_{12}(1 + a_{22}) = 0$ $1 - a_{22}^2 = 0$. Отсюда следует, что $1 + a_{22} = 0$, так как в противном случае $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, что означает, что преобразование является тождественным. Таким образом, $a_{22} = -1$, поэтому данное преобразование является косой симметрией (см. задачу 687, б). **691.** Решение. Пусть соотношения $x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0$ (1) являются координатным заданием инверсного аффинного преобразования. Тогда $x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0$, $y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0$. Подставив сюда значения x' и y' из (1), получим соотношения, которые выполняются при любых x и y. Отсюда следует, что имеют место следующие условия:

$$(a_{11} + 1)x_0 + a_{12}y_0 = 0,$$
$$a_{21}x_0 + (a_{22} + 1)y_0 = 0;$$
$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 1, \quad a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0,$$
$$a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 1; \quad a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0.$$

Эти ограничения, накладываемые на коэффициенты преобразования (1), необходимы и достаточны для того, чтобы оно было инверсным. Возможны два случая: 1) $a_{11} + a_{22} = 0$. Если $a_{11} = \alpha$, то $a_{22} = -\alpha$, поэтому соотношения (1) принимают вид: $x' = \alpha x + a_{12}y + x_0$, $y' = a_{21}x - \alpha y + y_0$. Здесь α — произвольное число, а a_{12}, a_{21}, x_0, y_0 удовлетворяют условиям $a_{12}a_{21} = 1 - \alpha^2$, $(\alpha + 1)x_0 + a_{12}y_0 = 0$, $a_{21}x_0 + (1 - \alpha)y_0 = 0$. 2) $a_{11} + a_{22} \neq 0$. Из предыдущих условий получаем: $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{11}^2 = 1$, $a_{22}^2 = 1$, т. е. $a_{11} = \pm 1$ и $a_{22} = \pm 1$. Так как $a_{11} + a_{22} \neq 0$, то возможны два подслучая: $a_{11} = a_{22} = 1$ и $a_{11} = a_{22} = -1$. В первом случае $x_0 = y_0 = 0$ и соотношения (1) принимают вид: $x' = x$, $y' = y$. Во втором случае имеем: $x' = -x + x_0$, $y' = -y + y_0$. **692.** $a_{11} + a_{22} = 0$, $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 1$, $(a_{11} + 1)x_0 + a_{12}y_0 = 0$, $a_{21}x_0 + (a_{22} + 1)y_0 = 0$. Указание. См. решение задачи 691 и задачу 690. **693.** Указание. Инверсное аффинное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку, так как, если M' — образ точки M, то середина отрезка MM' переходит сама в себя. Взяв эту точку за начало координат, записать аналитическое задание преобразования, пользуясь результатом задачи 691; исследовать все возможные случаи, при этом воспользоваться задачей 690. **694.** Воспользоваться задачами 693 и 583. **695.** Данные преобразования есть произведение перспективно-аффинных преобразований: $x' = \lambda_1 x$, $y' = y$ и $x' = x$, $y' = \lambda_2 y$. **696.** Воспользоваться результатами задачи 683. **697.** Указание. Пусть при данном аффинном преобразовании Π вершины треугольника ABC переходят соответственно в вершины треугольника $A'B'C'$. Рассмотреть преобразование подобия Π_1, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C_1, и перспективно-аффинное преобразование Π_2 с осью $A'B'$, при котором точка C_1 переходит в C'. Далее показать, что $\Pi = \Pi_2\Pi_1$. **698.** Пусть l — ось перспективно-аффинного преобразования, отличного от осевой симметрии, а A и A' — пара соответственных точек. Возможны два случая: а) прямые l и AA' перпендикулярны. В этом случае направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ однозначно определяются этими прямыми; б) прямые l и AA' не перпендикулярны. В этом случае направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ однозначно определяются прямыми AM_1 и AM_2, где M_1M_2 — диаметр окружности с центром на прямой l, проходящей через точки A и A'. Для осевой симметрии любая пара взаимноперпендикулярных направлений является парой главных направлений. **699.** Для преобразования подобия любая пара взаимно перпендикулярных направлений является парой главных направлений. Указание. Использовать задачу 697. **700.** $x' = \dfrac{r^2x}{x^2 + y^2}$, $y' = \dfrac{r^2y}{x^2 + y^2}$; $M_1'(0, 4)$, $M_2'(1, 0)$, $M_3'\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$, $M_4'\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$,

$M_5'(0, 2)$, $M_6'(2, 2)$, $M_7'\left(-\frac{1}{26}, \frac{5}{26}\right)$. Указание. Если $M'(x'y')$ есть образ точки $M(x, y)$, то по определению инверсии имеем: $\overrightarrow{OM'} = \lambda\,\overrightarrow{OM}$, или $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ и $\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OM'} = r^2$. Умножая первое из этих соотношений скалярно на $\overrightarrow{OM}$ и используя последнее соотношение, определить λ (ср. с задачей 626). **701.** $x' = \frac{4x+4}{(x+1)^2+(y-3)^2} - 1$, $y' = \frac{4y-12}{(x+1)^2+(y-3)^2} + 3$ (ср. с задачей 626). $M_1'\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $M_2'(-1, 2)$, $M_3'\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $M_4'\left(-\frac{9}{5}, \frac{23}{5}\right)$, $M_5'(-3, 5)$, $M_6'(-1, 5)$. **703.** Решение. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с центром инверсии, прямая l имеет уравнение $Ax+By+C=0$. Используя координатное задание инверсии (см. ответ задачи 700), запишем уравнение образа прямой l: $A\left(\frac{x'r^2}{x'^2+y'^2}\right) + B\left(\frac{y'r^2}{x'^2+y'^2}\right) + C = 0$ или $x'^2+y'^2+\frac{Ar^2}{C}x'+\frac{Br^2}{C}y' = 0$. Получили уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке $P\left(-\frac{Ar^2}{2C}, -\frac{Br^2}{2C}\right)$. Вектор $\overrightarrow{OP}\left\{-\frac{Ar^2}{2C}, -\frac{Br^2}{2C}\right\}$, как легко видеть, является нормальным вектором прямой l. Отсюда следует, что прямая l перпендикулярна к прямой OP и образом точки H является точка H' (см. рис. 57). **704.** а) Пусть M лежит вне окружности инверсии ω. Провести через M касательную к окружности ω и через точку касания провести перпендикуляр h к OM. Точка M' пересечения прямых h и OM есть образ точки M (см. рис. 58, *а*). Если M лежит внутри окружности инверсии, то построение выполняется в обратном порядке (см. рис. 58, *б*); б) построить проекцию H точки O на прямую l и найти образ H' точки H (см. выше, п. а). Окружность Ω, построенная на отрезке OH', как на диаметре, является образом прямой l. На рисунках 59, *а*, *б*, *в* дано построение образа прямой l при различных случаях взаимного расположения l и ω. **705.** а) Прямая $2x - 5y = 0$; б) окружность $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = 0$; в) окружность $x^2 + y^2 + 6x = 0$; г) окружность $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$. **706.** а) Две окружности, имеющие общую касательную в точке O, параллельную данным прямым; б) пучок окружностей, попарно касающихся друг друга в точке O, и прямая l. Все окружности пучка касаются прямой l, которая принадлежит данному пучку параллельных прямых; в) пучок пересекающихся прямых с центром в точке O; г) пучок окружностей, проходящих через точки O и M', и прямая OM'. Здесь M' есть образ точки M при данной инверсии. **707.** Фигура, состоящая из двух лучей h_1 и h_2, исходящих соответственно из точек P и O, и дуги k — образа луча k (см. рис. 60). **710.** Указание. Воспользоваться задачами 709 и 704. **711.** а) Окружность $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$; б) прямая $3x - 2 = 0$; в) окружность $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$. **712.** а) $x^3 = y^2\left(\frac{1}{2p} - x\right)$; б) $(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{a^2}(x^2 - y^2)$; в) $\frac{1}{p^2}(x^2 + y^2) = \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{p}x\right)^2$; г) $y^2 = x^2\,\frac{\frac{1}{2a}+x}{\frac{1}{2a}-x}$. **713.** Указание. Воспользоваться задачей 341. **714.** Указание. Использовать преобразование инверсии с центром в точке P. **715.** $\rho' = \frac{r^2}{\rho}$, $\varphi' = \varphi$; $M_1'\left(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3'\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$. **716.** а) $\rho = \frac{r^2}{a}\cos\varphi$ — окружность, проходящая через полюс, центр которой лежит на полярной оси; б) $\rho = \frac{r^2}{b}\sin\varphi$ — окружность, касающаяся полярной оси в центре инверсии; в) $\rho^2 = \frac{r^4}{k^2}$ — окружность; эта окружность, ее прообраз и окружность инверсии являются концентрическими. **717.** $\rho = \frac{r^2}{p} - \frac{\varepsilon r^2}{p}\cos\varphi$. Указание. Использовать ответ задачи 715. **718.** Указание. Записать уравнение параболы в канонической системе координат и воспользоваться задачами 712, а) и 350. **719.** Указание. Записать каноническое уравнение равнобочной гиперболы и воспользоваться задачами 712, б) и 351. **720.** Указание. Пользуясь задачей 305, записать уравнение гиперболы в прямоугольной декартовой системе координат,

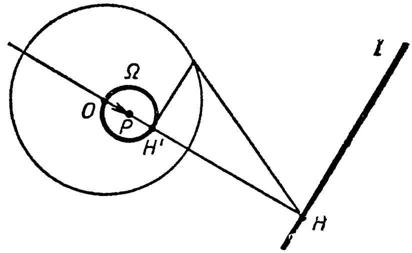


Рис. 57

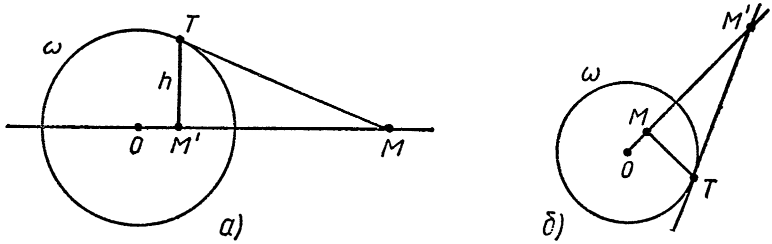


Рис. 58

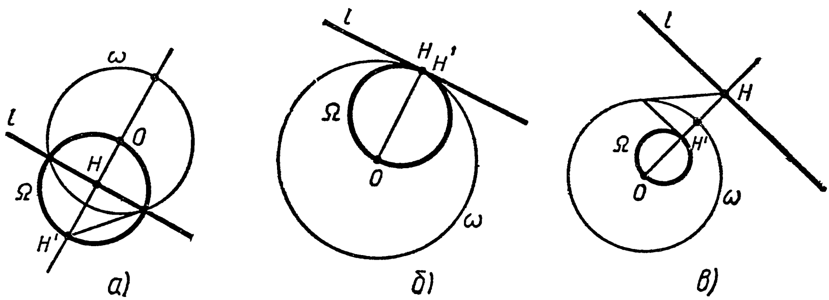


Рис. 59

изображенной на рисунке 35. Далее воспользоваться задачами 712, г) и 349. **721.** Указание. Воспользоваться задачами 717 и 347, а). **722.** Указание. Воспользоваться задачами 717 и 347, а). **723.** Указание. Воспользоваться задачами 717, 344, а). **724.** $M_1'(1, -2)$, $M_2'\left(3, \frac{4}{5}\right)$, $M_3'(-2, 1)$, $M_4'\left(3, -\frac{4}{7}\right)$, $M_5'\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$.

725. а) $xy = \frac{1}{2}$; б) $3xy - 5y - 6 = 0$; в) $x^2y^2 - 9y^2 + 9 = 0$; г) $2xy^2 - 9 = 0$. **726.** а) Прямая, совпадающая с данной; б) прямая, параллельная оси инверсии и отстоящая от нее на расстоянии $\frac{k}{a}$. **727.** Равнобочная гипербола, для которой прямые l_0 и l_0' являются асимптотами (рис. 61). Здесь l_0' — перпендикуляр к прямой l_0, восста-

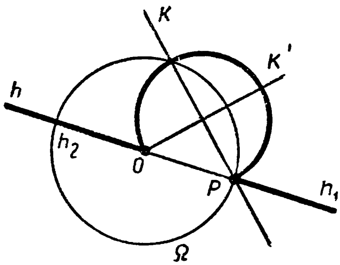


Рис. 60

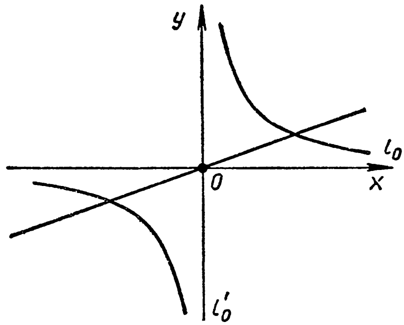


Рис. 61

новленный в точке O пересечения данной прямой и прямой l_0. Указание. Показать, что если за оси координат принять прямые l_0 и l_0', то уравнение гиперболы в этой системе имеет вид: $xy=\frac{k}{a}$ (см. решение задачи 309). **728.** Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке O. **729.** Указание. Задача решается аналогично задаче 413. **730.** Пусть ρ_1 и ρ_2 — расстояния от точек A и B до прямой l. Если $\rho_1 \neq \rho_2$, то существует единственная точка M_0, удовлетворяющая условиям задачи; если $\rho_1 = \rho_2$, то такой точки не существует. **731.** Если M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла, то H_0 и K_0 являются точками пересечений лучей h и k с прямой M_1M_2. **732.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию с центром в точке M_0. **733.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию с центром в точке P. **734.** Указание. Рассмотреть образ прямой l при симметрии с центром в точке A. **735.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию с центром в точке O. **736.** Указание. Пусть две различные точки A и B являются центрами симметрии данной фигуры. Рассмотреть центральные симметрии Π_1 и Π_2 с центрами в точках A и B и, пользуясь теоремой 2, стр. 86, доказать, что $\Pi = \Pi_2\Pi_1$ есть параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{AB}$. Затем, взяв произвольную точку M данной фигуры, показать, что $M' = \Pi^k(M)$ при любом натуральном k также принадлежит фигуре. **737.** Указание. Воспользоваться задачей 668. **738.** Указание. Доказательство провести от противного. Рассмотреть симметрию относительно центра параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ и применить утверждение задачи 736 к параллелограмму $ABCD$. **739.** Указание. Рассмотреть вращение вокруг центра окружности на угол 120°. **740.** Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке C и коэффициентом $k = 2$. **741.** Указание. Рассмотреть движение Π, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B', C'. Далее использовать теорему о классификации движений, учитывая при этом, что Π не меняет ориентацию плоскости. Для построения неподвижной точки рассмотреть перпендикуляры, восставленные в серединах отрезков AA' и BB'. **742.** Указание. а) При центральной гомотетии высоты треугольника переходят в перпендикуляры, восставленные в серединах соответствующих сторон. **743.** Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $k = 2$. **744.** Указание. При центральной гомотетии Γ_0 треугольника ABC (задача 667) окружность Ω, описанная вокруг треугольника ABC, преобразуется в окружность Ω', проходящую, очевидно, через середины сторон треугольника ABC (см. рис. 62). Для того чтобы показать, что окружности Ω' принадлежат середины отрезков HA, HB и HC, следует, пользуясь задачей 742, б), показать, что центром окружности Ω' является середина отрезка HO, где O — центр окружности Ω, и затем рассмотреть гомотетию Γ с центром в точке H и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Наконец, для того чтобы доказать, что основания высот лежат на окружности Ω', следует показать, что середина высоты, проведенной из некоторой

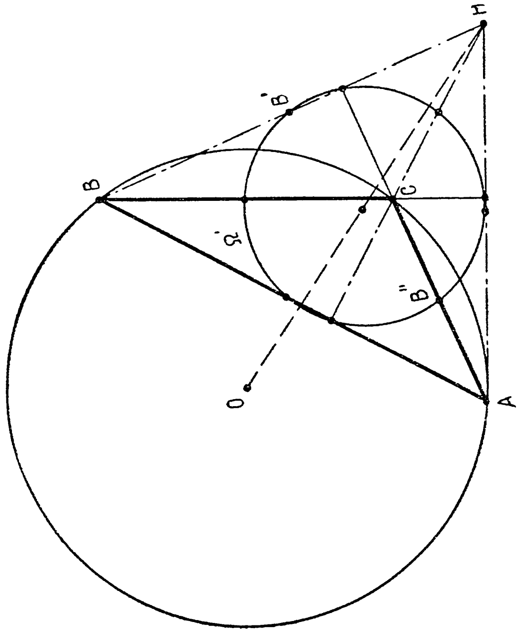


Рис. 62

вершины треугольника ABC, и середина стороны, противоположной этой вершине, являются диаметрально противоположными точками окружности Ω' (например, для вершины B точки B' и B'' на рис. 62). Для этого рассмотреть образы касательных к окружности Ω в вершинах треугольника ABC при преобразованиях Γ_0 и Γ. **745.** Указание. Рассмотреть центральную гомотетию треугольника ABC и, пользуясь задачей 744, показать, что при этой гомотетии точка Q переходит в точку P. **746.** Указание. Воспользоваться задачей 675. **747.** Указание. Рассмотреть вращение на угол 60° с центром в точке B. **748.** Указание. Воспользоваться задачей 666. **749.** Указание. Рассмотреть аффинное преобразование, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки B, C и A. Доказательство провести от противного, используя утверждение б) задачи 645. **750.** Решение. Для решения задачи достаточно показать, что $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \boldsymbol{0}$. Пусть Π — аффинное преобразование, при котором A, B и C переходят соответственно в точки B, C и A. При этом, очевидно, A_1, B_1 и C_1 переходят соответственно в точки B_1, C_1 и A_1. Если $\overline{\Pi}$ — векторное преобразование, ассоциированное с Π, то $\overline{\Pi}(\overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{BB_1}$, $\overline{\Pi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{CC_1}$, $\overline{\Pi}(\overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{AA_1}$. Поэтому $\overline{\Pi}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ или $\overline{\Pi}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$. Из результата задачи 645 следует, что $\overline{\Pi}$ не имеет инвариантных направлений, поэтому предыдущее соотношение может иметь место только при условии $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$. **751.** Указание. Рассмотреть аффинное преобразование Π, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. Показать, что ассоциированное преобразование $\overline{\Pi}$ имеет по крайней мере три собственных направления, и воспользоваться задачей 615. **752.** Указание. Воспользоваться задачей 685. **753.** Указание. Пусть средняя линия M_1M_2, соединяющая середины сторон AB и CD, проходит через P. Первый способ. Рассмотреть центральную симметрию с центром в точке P. При этом, очевидно, точка M_1 переходит в точку M_2, а прямые PB и PA переходят сами в себя. Используя, далее, задачу 732, показать, что прямая AB переходит в прямую CD. Второй способ. Рассмотреть аффинное преобразование, при котором точки P, A, B переходят соответственно в точки P, C, D. Пользуясь задачей 615, показать, что это преобразование является центральной симметрией. **754.** Указание. Если точка пересечения O диагоналей лежит на M_1M_2, то точки P, Q и O совпадают и задача сводится к задаче 753. Если O не лежит на прямой M_1M_2, то рассмотреть аффинное преобразование, при котором точки O, M_1, P переходят соответственно в точки O, M_2, Q. Далее воспользоваться задачей 689 и инверсным свойством косой симметрии. Используя задачу 732, показать, что при этом преобразовании сторона AB переходит в сторону CD, так как M_2 — середина отрезка CD. **755.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **756.** $MF_2=5$; $M_1(-2, 2\sqrt{6})$, $m_2(-2, -2\sqrt{6})$, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. **757.** а) $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$; б) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$; в) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. **758.** а) $a=3$, $b=2$; $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$; б) $a=12$, $b=2$; $F_1(-2\sqrt{35}, 0)$, $F_2(2\sqrt{35}, 0)$; в) $a=3$, $b=1$; $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(2\sqrt{2}, 0)$; г) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{5}$; $F_1\left(-\frac{4}{15}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{4}{15}, 0\right)$. **759.** а) $M_1(2, \sqrt{3})$, $M_2(2, -\sqrt{3})$; б) $M_1\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_2\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; в) $M_1\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. **761.** $\frac{2b^2}{a}$. **762.** $F_2M_1=F_2M_2=\frac{a^2+c^2}{a}$. **763.** а) $(0, b)$, $(0, -b)$; б) $\left(\frac{a^2}{3c}, \frac{b}{3c}\sqrt{9c^2-a^2}\right)$, $\left(\frac{a^2}{3c}, -\frac{b}{3c}\sqrt{9c^2-a_2}\right)$. **764.** а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$; г) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{4}=1$; д) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **765.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; б) $\frac{8x^2}{143}+\frac{15y^2}{143}=1$; в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; г) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{11}=1$. **766.** $x-15=0$, $x+15=0$, $d=30$. **767.** а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{15}=1$; г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{\frac{16}{3}}+\frac{y^2}{4}=1$. **769.** а) Эллипсу принадлежат точки M_3, M_8; б) внутри эллипса лежат точки M_2, M_4, M_5, M_{10}; в) вне эллипса лежат точки M_1, M_6, M_7, M_9. **771.** 4. **772.** $F_1M_1=4$, $F_2M_1=8$, $F_1M_2=\frac{22}{3}$, $F_2M_2=\frac{14}{13}$. **773.** $a=\frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$, $b=\frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $c=\frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. **774.** Указание. Воспользовавшись предыдущей задачей, найти a и b. **775.** $\frac{5}{4}$, $\frac{45}{4}$. **776.** $\sqrt{5}x+10y-25=0$. **777.** $\frac{1+\sqrt{7}}{20}x+\frac{\sqrt{7}-1}{16}y=1$, $\frac{1-\sqrt{7}}{20}x+\frac{1+\sqrt{7}}{16}y=1$. Указание. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка касания. Касательная к эллипсу в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $\frac{x_0x}{25}+\frac{y_0y}{16}=1$. Из условия задачи следует, что $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$ и $\frac{10x_0}{25}-\frac{8y_0}{16}=1$. Решив совместно эту систему, определить координаты точки касания. **778.** $x+y-5=0$, $x+y+5=0$. **779.** $4x-9y-13=0$. **780.** $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $2c=2\sqrt{2}$. **781.** а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. **782.** а) $\rho=\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$. **783.** Окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$. **784.** Решение. Пусть эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Фокусы F_1 и F_2 этого эллипса имеют координаты F_1 (с, 0) и F_2 $(-c, 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Возьмем произвольную точку M_0 (x_0, y_0) данного эллипса и запишем уравнение касательной к этой точке: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$, или $xx_0 b^2+yy_0a^2-a^2b^2=0$ (I). Расстояния этой касательной до фокусов F_1 и F_2 определяются соотношениями $\rho_1=\frac{|x_0cb^2-a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4+y_0^2a^4}}$; $\rho_2=\frac{|x_0cb^2+a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4+y_0^2a^4}}$. Отсюда $\rho_1\rho_2=\frac{|x_0cb^2-a^2b^2|\cdot|x_0cb^2+a^2b^2|}{x_0^2b^4+y_0^2a^4}=\frac{|x_0^2cb^4-a^2b^4|}{|x_0^2b^4+y_0^2a^4|}$. Учитывая, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=$ $=1$, получаем: $y_0^2a^2=a^2b^2-x_0^2b^2$. Подставив это значение в предыдущее соотношение, будем иметь: $\rho_1\rho_2=\frac{|x_0^2cb^4-a^4b^4|}{|x_0^2b^4+a^4b^2-x_0^2b^2a^2|}=\frac{|x_0^2c^2b^4-a^4b^4|}{|a^4b^2-x_0^2b^2c^2|}=b^2$.

786. Р е ш е н и е. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$ $=1$. Касательная в точке M_0 имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. Очевидно, вектор $n\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}$ перпендикулярен касательной. Нам необходимо доказать, что вектор n направлен вдоль биссектрисы угла $F_1M_0F_2$. Другими словами, необходимо доказать, что $p \parallel n$, где $p=\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{F_1M_0}+\frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{F_2M_0}$. Имеем: $\overrightarrow{F_1M_0}$ $\{x_0-c, y_0\}$, $\overrightarrow{F_2M_0}$ $\{x_0+c, y_0\}$, $\frac{\overrightarrow{F_1M_0}}{F_1M_0}\left\{\frac{x_0-c}{a-\varepsilon x_0}, \frac{y_0}{a-\varepsilon x_0}\right\}$, $\frac{\overrightarrow{F_2M_0}}{F_2M_0}\left\{\frac{x_0+c}{a+\varepsilon x_0}, \frac{y_0}{a+\varepsilon x_0}\right\}$. Отсюда получаем: $p\left\{\frac{2x_0b^2}{a(a^2-\varepsilon^2x_0^2)}, \frac{2ay_0}{a^2-\varepsilon^2x_0^2}\right\}$. Векторы n и p коллинеарны, так как их координаты пропорциональны. **787.** У к а з а н и е. Доказать, что для данных окружностей выполнено условие касания: расстояние между их центрами равно либо сумме их радиусов, либо модулю разности. **788.** У к а з а н и е. В канонической системе координат выразить координаты точек M и M_1 через угол наклона прямой OM к оси Ox, при этом учесть, что если прямая OM наклонена к оси Ox под углом α, то прямая OM' составляет с осью Ox угол $\alpha\pm\frac{\pi}{2}$.
789. Отрезок MM' имеет минимальную длину для прямой, перпендикулярной большой оси эллипса. У к а з а н и е. Воспользоваться следующим уравнением эллипса в полярной системе координат: $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. **790.** У к а з а н и е. См. указание к предыдущей задаче. **791.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. **792.** а) $a=2$, $b=3$; $F_1(\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-\sqrt{13}, 0)$; б) $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$; $F_1\left(\frac{\sqrt{41}}{20}, 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{41}}{20}, 0\right)$; в) $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$; $F_1(\sqrt{10}, 0)$, $F_2(-\sqrt{10}, 0)$; г) $a=1$, $b=\sqrt{5}$; $F_1(\sqrt{6}, 0)$, $F_2(-\sqrt{6}, 0)$. **793.** $S=$ $=4\varepsilon b^2$, $S=20\sqrt{6}$. **794.** а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.
795. а) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{13}$; $F_1(\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-\sqrt{13}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $y=\pm\frac{2}{3}x$,

$x = \pm \frac{9\sqrt{13}}{13}$; б) $a = 3$, $b = 4$; $F_1(+5, 0)$, $F_2(-5, 0)$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, $y = \pm \frac{4}{3}x$, $x = \pm \frac{9}{5}$.

796. а) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; б) $x^2 - y^2 = 16$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $x^2 - y^2 = 1$.

797. а) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$. **798.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **799.** $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} = 1$.

800. $-\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$. Для гиперболы $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x \pm 4 = 0$ — уравнения директрис, $x \pm \sqrt{2}y = 0$ — уравнения асимптот. Для сопряженной гиперболы $\varepsilon = \sqrt{3}$, $y \pm 2 = 0$ — уравнения директрис, $x \pm \sqrt{2}y = 0$ — уравнения асимптот. **801.** а) 90°; б) 120°; в) 60°. **804.** $x - y - 4 = 0$. **805.** $a^2k^2 - b^2 - x_0^2 = 0$. Решение. Потребуем, чтобы данная прямая пересеклась с гиперболой в двух слившихся точках. Абсциссы точек пересечения данной прямой и гиперболы определяются из уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx + x_0)^2}{b^2} = 1$, которое легко привести к виду: $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kx_0x - a^2x_0^2 - a^2b^2 = 0$. Так как данная прямая не параллельна асимптотам гиперболы, то $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Приравняв дискриминант этого квадратного уравнения к нулю, после элементарных преобразований получаем искомый результат. **806.** $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 = 0$. Указание. Рассмотреть два случая: а) $B \neq 0$; в этом случае уравнение прямой записать в виде $y = kx + x_0$ и воспользоваться результатом предыдущей задачи; б) $B = 0$; в этом случае задача решается по аналогии с предыдущей задачей. **807.** Существуют четыре касательные, удовлетворяющие условиям задачи: а) $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$, $\left(-4, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\left(4, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $x + \sqrt{3}y + 3 = 0$, $\left(-4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

810. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. **811.** Окружность, если $a > b$; точка, если $a = b$; в случае $a < b$ множества точек не существует. Указание. Показать, что в канонической системе координат гиперболы уравнение множества точек имеет вид: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. **812.** Указание. См. решение задачи 784. **814.** $d = b$. **815.** Директриса, соответствующая фокусу F. **820.** Окружность, центр которой совпадает со вторым фокусом и радиус которой равен $2a$. Указание. Если F' — точка, симметричная фокусу F_1 относительно касательной в произвольной точке M гиперболы, то пользуясь результатом задачи 817, показать, что $F_2F' = F_2M - F_1M$. **821.** Указание. См. указание к задаче 787. **822.** $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $x + \frac{3}{2} = 0$; б) $F(0, -1)$, $y - 1 = 0$; в) $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x - \frac{1}{2} = 0$; г) $F\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $y + \frac{3}{4} = 0$; д) $F\left(0, \frac{3}{8}\right)$, $y + \frac{3}{8} = 0$; е) $F\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ $x - \frac{4}{3} = 0$. **823.** а) $y^2 = 16x$; б) $y^2 = 4x$; в) $x^2 = 25y$. **824.** а) $y^2 = 12x$; б) $x^2 = 20y$; в) $y^2 = 60x$; г) $x^2 = 48y$. **825.** 10. **826.** $M_1(6\sqrt{2}, -6)$, $M_2(-6\sqrt{2}, -6)$. **827.** $p = 12M$. **828.** p^2. **829.** $4\sqrt{3}p$. **830.** $2p\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$. **831.** а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = 14x$.

832. а) $\rho = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{5}{1 - \cos\varphi}$. **833.** $2x - y - 5 = 0$. **834.** Прямая, параллельная оси параболы: $ky - p = 0$. **835.** Указание. См. решение задачи 805. **836.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **837.** $x + y + 2 = 0$. **838.** $y = kx + \frac{p}{2k}$. Указание. Воспользоваться задачей 835. **839.** а) $x - 2y + 5 = 0$; б) $36x + 12y + 5 = 0$; в) $4x - 4y + 5 = 0$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **842.** $2\sqrt{2}$. Указание. Провести касательную к параболе, параллельную данной прямой. **843.** Касательная к параболе в ее вершине. **844.** Директриса параболы. Указание. Воспользоваться задачей 843. **845.** Директриса параболы. **847.** Указание. См. решение задачи 786. **848.** Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение данной параболы, а $B_1(x_1, y_1)$, $B_2(x_2, y_2)$ и $B_3(x_3, y_3)$ — точки, в которых соответственно прямые l_1, l_2 и l_3 касаются параболы. При этих обозначениях прямые l_1, l_2 и l_3 имеют уравнения

$$(l_1) \quad yy_1 = p(x + x_1), \tag{1}$$

$$(l_2) \quad yy_2 = p(x + x_2), \tag{2}$$

$$(l_3) \quad yy_3 = p(x + x_3). \tag{3}$$

Определим уравнение высоты h_1, проведенной через точку A_1. Если A_1 есть точка пересечения прямых l_2 и l_3, то высоту h_1 можно определить как прямую пучка, определяемого прямыми l_2 и l_3, перпендикулярную к прямой l_1. Пучок, определяемый прямыми l_2 и l_3, имеет уравнение $\lambda[(yy_2 - p(x + x_2)] + [yy_3 - p(x + x_3)] = 0$. (4) Прямые (1) и (4) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $y_1(\lambda y_2 + y_3) + p(\lambda p + p) = 0$. Отсюда получаем: $\lambda = -\dfrac{p^2 + y_1y_3}{y_1y_2 + p^2}$. Далее, $x_2 = \dfrac{y_2^2}{2p}$, $x_3 = \dfrac{y_3^2}{2p}$. Подставив значения λ, x_2 и x_3 в соотношение (4), после элементарных преобразований получаем уравнение высоты h_1: $xy_1 + yp - \dfrac{y_1y_2y_3}{2p} - \dfrac{py^2}{2} - \dfrac{py^3}{2} = 0$. Эта прямая пересекается с директрисой $x = -\dfrac{p}{2}$ в точке $Q\left(-\dfrac{p}{2}, \dfrac{y_1y_2y_3}{2p^2} + \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right)$. Координаты точек B_1, B_2 и B_3 входят в полученное выражение симметрично, поэтому для других высот треугольника $A_1A_2A_3$ получим те же значения координат точек пересечений с директрисой. Таким образом, все высоты проходят через току Q, лежащую на директрисе. **849.** $\dfrac{FA \cdot FB}{AB} = \dfrac{p}{2}$. Указание. Записать уравнение конического сечения в полярных координатах и учесть, что если A и B имеют полярные координаты (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2), то $\varphi_2 = \varphi_1 + 180°$ и $\dfrac{FA \cdot FB}{AB} = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$. **851.** Решение. Пусть парабола дана каноническим уравнением $y^2 = 2px$. В этом случае, как известно, вершина параболы совпадает с началом координат O. Возьмем две произвольные ортогональные прямые, проходящие через начало координат: $y = kx$, $y = -\dfrac{1}{k}x$. Определим точки P и Q пересечения рассматриваемых прямых с данной параболой. Решая следующие системы:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = -\dfrac{1}{k}x, \end{cases}$$

получим: $P\left(\dfrac{2p}{k^2}, \dfrac{2p}{k}\right)$, $Q(2pk^2, -2pk)$. Напишем уравнение прямой PQ:

$$\begin{vmatrix} x - 2pk^2 & y + 2pk \\ 2p(k^4 - 1) & -2pk(k^2 + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получаем: $xk + y(k^2 - 1) - 2pk = 0$. Положение этой прямой на плоскости зависит от k, т. е. от положения прямого угла POQ. Она пересекает ось параболы ($y = 0$) в точке $R(2p, 0)$, которая не меняется при изменении k. Таким образом, при вращении угла POQ вокруг точки O прямая вращается вокруг точки R. **852.** Указание. Пользуясь задачей 835, найти угловые коэффициенты прямых PM и PM' и использовать их при решении задачи. **854.** Эллипс. Решение. Данные взаимно перпендикулярные прямые примем за координатные оси. Пусть в некоторый произвольный момент времени концы скользящего отрезка AB имеют координаты $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$. Если (x, y) — координаты произвольной точки M искомого множества точек, l — длина отрезка AB, а λ — отношение, в котором точка M делит отрезок AB, то $x = \frac{\alpha}{1+\lambda}$, $y = \frac{\lambda\beta}{1+\lambda}$, $l^2 = \alpha^2 + \beta^2$(1). Из этих соотношений, исключив α и β, получаем: $l^2 = (1+\lambda)^2x^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}y^2$, или $\frac{x^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}} = 1$ (2). Таким образом, если точка $M(x, y)$ принадлежит искомому множеству точек, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2). Докажем обратное предложение. Пусть $M(x, y)$ — некоторая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (2). Положим: $\alpha = x(1+\lambda)$, $\beta = \frac{y(1+\lambda)}{\lambda}$ (3), где λ — данное отношение, в котором точка, описывающая искомую траекторию, делит отрезок AB. Из соотношений (3) следует: $x = \frac{\alpha + \lambda \cdot 0}{1+\lambda}$, $y = \frac{0 + \lambda\beta}{1+\lambda}$. Если обозначить через M_1 и M_2 точки с координатами $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$, то предыдущие соотношения показывают, что M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Точка M_1 лежит на оси абсцисс, а M_2 — на оси ординат; кроме того, в силу соотношений (3) и (2) имеем: $M_1M_2 = \sqrt{x^2(1+\lambda)^2 + \frac{y^2(1+\lambda)^2}{\lambda^2}} = \sqrt{l^2} = l$. Отсюда следует, что M принадлежит искомой траектории. Уравнением (2) задается эллипс; в частном случае при $\lambda = 1$ — окружность. **855.** Эллипс с центром в точке O. Указание. Задачу свести к предыдущей, предварительно доказав, что точка B лежит на другом отрезке AC постоянной длины $2r$, скользящем своими концами по прямым l и k, где k — перпендикуляр, восставленный в точке O. **856.** Эллипс. Указание. Если прямые l и m принять за оси координат, а радиусы окружностей обозначить через R и r, то уравнение искомого множества точек имеет вид: $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$. **857.** Гипербола. Если прямые l и m принять за оси координат, то уравнение гиперболы имеет вид: $(1+\lambda)^2 xy = 2\lambda\delta$. **858.** Две сопряженные гиперболы, для которых данные прямые служат асимптотами. Указание. Если оси координат направить по биссектрисам углов, образованных данными прямыми, то уравнение искомого множества имеет вид: $\frac{k^2x^2 - y^2}{1+k^2} = \pm a$, где k — модуль углового коэффициента данных прямых в выбранной системе координат, а a — постоянное произведение расстояний. **859.** Равносторонняя гипербола. Если оси координат направить по двум данным перпендикулярным прямым, то уравнение гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. **860.** Равносторонняя гипербола. Если начало координат поместить в середину отрезка $AB = 2a$ и ось Ox направить по прямой AB, то уравнение гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$. **861.** Парабола, для которой точка A является фокусом, а прямая l — директрисой. Указание. Центры рассматриваемых окружностей равноудалены от точки A и прямой l. **862.** Эллипс. Решение. Пусть O — центр данной окружности, а M — произвольная точка искомого множества (рис. 63). Если окружность $M(MA)$[1] касается данной окружности $O(r)$ в точке R, то, очевидно, $r = OR = OM + MR = OM + MA$ (1). Докажем обратное предложение, т. е. докажем, что если для некоторой точки M плоскости имеет место соотношение (1), то M принадлежит искомому множеству точек. Так как $OA < r$, то точка M не совпадает с точками O и A. В самом деле, если бы, например, M и O совпали, то из (1) следовало бы, что $r = OO + OA =$

[1] $M(MA)$ — окружность с центром в точке M и радиусом MA.

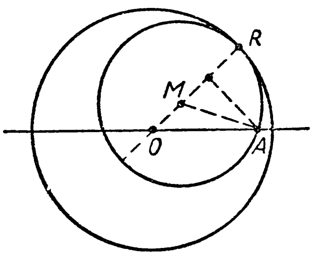


Рис. 63

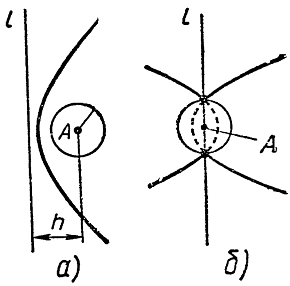


Рис. 64

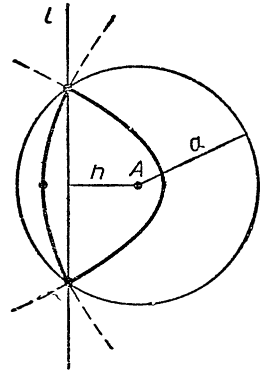
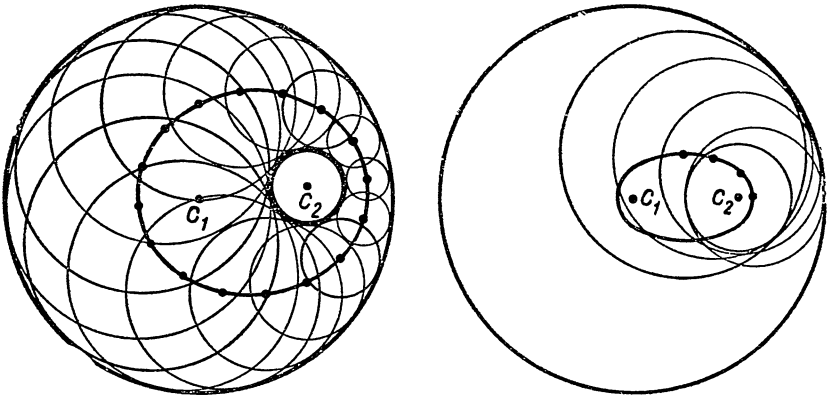
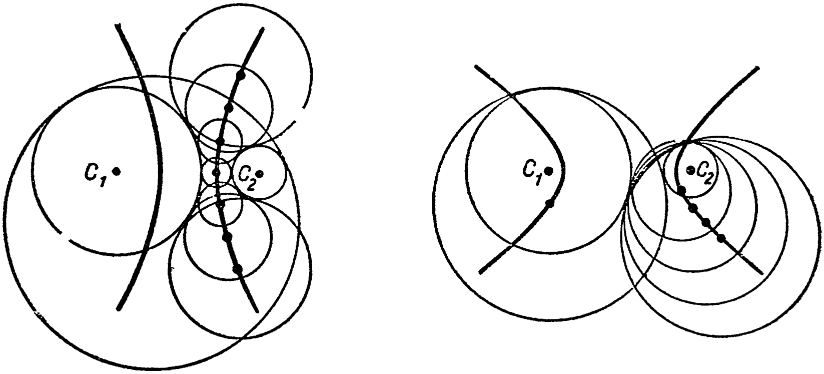


Рис. 65

$= OA$. Таким образом, $MA > 0$ и $OM < r$, т. е. M является внутренней точкой окружности. Рассмотрим луч OM и обозначим через R точку пересечения этого луча с данной окружностью. Так как $OM + MR = r$ и $OM + MA = r$, то $MA = MR$. Это означает, что окружность M (MR), которая касается окружности O (OR), проходит через точку A. Таким образом, искомое множество совпадает с множеством точек, удовлетворяющих условию (1). Этим условием задается эллипс, фокусами которого являются точки A и O, а большая ось равна r. **863.** Гипербола. **864.** Пусть h — расстояние от точки A до прямой l. Возможны два случая: а) $h \geqslant a$. Парабола, осью которой служит перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую l (рис. 64, *а*); б) $h < a$. Части двух парабол, изображенных на рисунке 64, *б* сплошной линией. **865.** Парабола. Если оси прямоугольной декартовой системы координат выбрать так, чтобы ось Oy совпала с прямой l, а ось Ox проходила через точку A и была направлена от прямой l к точке A, то в этой системе уравнение данного множества будет иметь вид: $y^2 = 2ax - a^2 + k^2$, где a — расстояние от точки A до данной прямой, а k^2 — данное число. **866.** Парабола, ось которой проходит через точку A перпендикулярно прямой l. Указание. Показать, что для точек M данного множества выполнено условие $AM^2 - HM^2 = \frac{a^2}{4}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Далее, воспользоваться задачей 865. **867.** Пусть h — расстояние от точки A до прямой l. Возможны три случая: а) $h < a$. Части двух парабол, изображенных на рисунке 65 сплошной линией; б) $h = a$. Точки отрезка HA, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l; в) $h > a$. Множество точек пустое. **868.** Парабола с вершиной в точке A и с осью AC, где C — центр окружности Ω. **869.** Пусть перпендикуляр h, опущенный из центра окружности на прямую l, пересекает l в точке H, а Ω — в точках A_1 и A_2. Искомое множество точек есть две параболы с общей осью h и вершинами в серединах отрезков HA_1 и HA_2. **870.** Если C_1 (r_1) — внешняя окружность, а C_2 (r_2) — внутренняя, то искомое множество точек есть два эллипса с фокусами в точках C_1 и C_2, причем большая ось первого эллипса равна $r_1 + r_2$, а второго равна $r_1 - r_2$ (рис. 66 *а*), *б*)). **871.** Пусть $C_1(r_1)$ и $C_2(r_2)$—данные окружности. Если $r_1 \neq r_2$, то искомое множество есть две гиперболы с фокусами в точках C_1 и C_2, причем действительная ось одной гиперболы равна $r_1 + r_2$, а другой $|r_1 - r_2|$ (рис. 67). Если $r_1 = r_2$, то искомое множество есть гипербола с фокусами в точках C_1 и C_2 и действительной осью $r_1 + r_2$ и прямая, перпендикулярная C_1C_2 и проходящая через середину отрезка C_1C_2. **872.** Возможны два случая: а) $AB \neq BC$; гипербола с фокусами в точках A и C, одна из вершин которой совпадает с точкой B, а действительная полуось равна OB, где O — середина отрезка AC; б) $AB = BC$; прямая, проходящая через точку B перпендикулярна l. **873.** Эллипс с полуосями $a + b$ и $a - b$, фокальная ось которого совпадает с прямой l, а центр — с точкой A. **874.** Решение. Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни: $s^2 - 10s + 9 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 9$. Относительно новой системы координат, единичные векторы которой имеют главные



а) Рис. 66 б)



а) б)

Рис. 67

направления, данная кривая определяется уравнением $x'^2+9y'^2-9=0$. Отсюда, разделив на 9, получаем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{1}=1$. Для того чтобы написать формулы преобразования системы координат, найдем угловые коэффициенты главных направлений $k_1=\frac{1-5}{4}=-1$, $k_2=\frac{9-5}{4}=1$. Таким образом, $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1=-1$, $\alpha_1=-45°$; $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2=1$, $\alpha_2=45°$. Формулы преобразования будут иметь вид: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$. На рисунке 68 изображен данный эллипс. **875.** Парабола: $y'^2=x'$, $x=\frac{1}{\sqrt{10}}x'-\frac{3}{\sqrt{10}}y'$, $y=\frac{3}{\sqrt{10}}x'+$ $+\frac{1}{\sqrt{10}}y'$. **876.** Гипербола: $x'^2-2y'^2=1$, $x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y$, $y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$. **877.** Пара параллельных прямых: $y'^2=3$, $x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$. **878.** Парабола: $y'^2=x'$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. **879.** Мнимый эллипс: $\frac{1}{8}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=-1$,

$2x=\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'$, $2y=\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'$. 880. Эллипс: $x'^2+2y'^2=1$; $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$. 881. Парабола: $y'^2=2x'$, $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$. 882. Гипербола: $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4}=1$, $5x'=x-2y$, $\sqrt{5}y'=2x+y$. 883. Пара слившихся прямых: $x'^2=0$, $2x'=\sqrt{2}(x+y)$, $2y'=\sqrt{2}(x-y)$. 884. Пара пересекающихся прямых: $x'^2-y'^2=0$, $6x'=x+\sqrt{35}y$, $6y'=-\sqrt{35}x+y$, 885. Пара мнимых параллельных прямых: $x'^2+1=0$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. 886. Решение. Сгруппируем члены левой части данного уравнения относительно x и y следующим образом: $2(x^2-4x+4)+4\left(y+\frac{1}{4}\right)=0$, или $2(x-2)^2+4\left(y+\frac{1}{4}\right)=0$. Введем обозначения: $x'=x-2$, $y'=y+\frac{1}{4}$. Отсюда получаем формулы переноса начала координат в точку $O'\left(2,-\frac{1}{4}\right)$: $x=x'+2$, $y=y'-\frac{1}{4}$. Уравнение данной кривой в новой системе $O'x'y'$ имеет вид: $2x'^2+4y'=0$, или $x'^2=-2y'$. На рисунке 69 дано изображение этой параболы. 887. Эллипс: $x'^2+6y'^2-2=0$, $x=x'+3$, $y=y'-1$. 888. Пара мнимых пересекающихся прямых: $x'^2+y'^2=0$, $x=x'+1$, $y=y'-2$. 889. Окружность: $x'^2+y'^2=1$, $x=x'+1$, $y=y'-3$. 890. Гипербола: $x'^2-\frac{1}{4}y'^2=-1$, $x=x'+\frac{1}{2}$, $y=y'-3$. 891. Парабола: $y'^2=2x'$, $x=x'-5$, $y=y'$. 892. Парабола: $x'^2-4y'=0$, $x=x'+3$, $y=y'-1$. 893. Мнимый эллипс: $x'^2+2y'^2+1=0$, $x=x'+2$, $y=y'+3$. 894. Пара мнимых параллельных прямых: $x'^2+1=0$, $x=x'+5$, $y=y'+a$. 895. Эллипс: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $x=x'+1$, $y=y'$. 896. Гипербола: $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=1$, $x=x'+2$, $y=y'-1$. 897. Пара пересекающихся прямых: $x'^2-2y'^2=0$, $x=x'-\sqrt{3}$, $y=y'+5$. 898. Равнобочная гипербола: $x'^2-y'^2=5$, $x=x'$, $y=y'-10$. 899. Гипербола: $5x'^2-y'^2=1$, $5x'=3x+4y$, $5y'=4x-3y+5$. 900. Эллипс: $52x'^2+13y'^2=1$, $x=\frac{3}{\sqrt{13}}x'-\frac{2}{\sqrt{13}}y'-\frac{1}{26}$, $y=\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}y'+\frac{42}{13}$. 901. Равнобочная гипербола: $x'^2-y'^2=1$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-1$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-2$. 902. Парабола: $\tilde{y}^2=2\tilde{x}$, $5x=-4\tilde{x}+3\tilde{y}+18$, $5y=-3\tilde{x}+4\tilde{y}+1$. 903. Пара па-

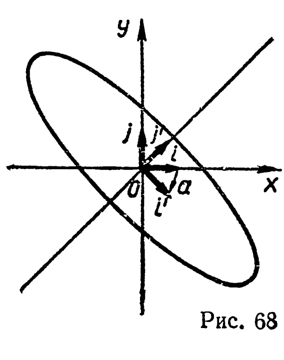


Рис. 68

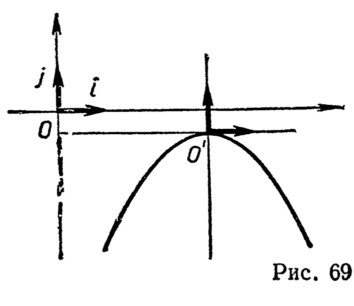


Рис. 69

раллельных прямых: $\tilde{x}^2-2=0$, $5\tilde{x}=3x-4y-5$, $5\tilde{y}=4x+3y$. **904.** Пара пересекающихся прямых: $\tilde{x}\,\tilde{y}=0$, $2\tilde{x}=\sqrt{3}x-y-2$, $2\tilde{y}=x+\sqrt{3}y$. **905.** Эллипс: $\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2=1$, $\sqrt{5}\,\tilde{x}=x-2y+1$, $\sqrt{5}\,\tilde{y}=2x+y$. **906.** Парабола: $\tilde{y}^2=3\tilde{x}$, $\sqrt{10}\,\tilde{x}=$ $=x+3y-3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}\,\tilde{y}=-3x+y$. **907.** Пара мнимых пересекающихся прямых: $\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2=0$, $\sqrt{13}\,\tilde{x}=3x-2y+5$, $\sqrt{13}\,\tilde{y}=2x+3y-4$. **908.** Пара слившихся прямых: $\tilde{x}^2=0$, $5\tilde{x}=-4x+3y+11$, $5\tilde{y}=3x-4y+5$. **909.** Пара мнимых параллельных прямых: $x'^2+3=0$, $x'=\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y$, $y'=\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y+a$. **910.** а) $M_1\,(1;0)$, $M_2\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$; б) прямая касается кривой в точке $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$. **911.** а) (1, 1), (2, 0); б) ось Ox касается кривой в точке (2, 0); в) действительных точек пересечений нет. **912.** Существуют две касательные: $2x+5y-2=0$ и $2x+y-2=0$. **913.** Существуют две касательные: $5x-11y=0$, $3x-5y=0$. **914.** $2x-4y+5=0$. **915.** Угловые коэффициенты векторов асимптотического направления имеют следующие значения: а) $k_1=4$, $k_2=1$; б) $k_1=k_2=\frac{1}{3}$; в) нет асимптотических направлений; г) $\alpha_1=0$, β_1 произвольно, $k=\frac{1}{2}$; д) $k_1=k_2=0$; е) $k_1=-4$, $k_2=1$. **916.** а) $2x+y+4=0$ и $x+y-3=0$; б) $2x-3y+1=0$ и $x-1=0$; в) $6x+14y+11=0$ и $2x+2y-1=0$; г) асимптот нет; д) все прямые, параллельные вектору $\{1;-1\}$. **917.** Указание. Используя условия $I_2=0$ и $I_3=0$, предварительно доказать, что $a_{31}p_1+a_{32}p_2=0$. Далее воспользоваться формулой (3), стр. 117. **919.** а) $a_{11}=0$; б) $a_{11}=a_{13}=0$; в) $a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$. **920.** $2x^2-xy-x+y+5=0$. **921.** а) $xy=0$; б) $xy-2=0$. Указание. Воспользоваться задачей 919, в). **922.** а) $4x-5y+8=0$; б) $7x-10y-6=0$; в) $13x-18y-2=0$. **923.** $7x-4y+4=0$. **924.** а) $x-y-3=0$; б) $x-4y-$ $-1=0$. **926.** а) Парабола; б) пара параллельных или слившихся прямых; в) существует вектор $\{\alpha,\beta\}$ не асимптотического направления, координаты которого удовлетворяют условиям $\alpha a_{11}+\beta a_{21}=0$; $\alpha a_{13}+\beta a_{23}=0$. **927.** а) (3, —2); б) нет центров; в) линия центров: $x-y-3=0$; г) $\left(0,\ \frac{1}{6}\right)$; д) $(-1,-1)$; е) линия центров: $x+2y=0$. **928.** $a_{13}=a_{23}=0$. **929.** Указание. Сначала показать, что кривая является центральной. Далее воспользоваться формулой (3), стр. 117. **930.** $4x-7y+$ $+17=0$. **931.** $x-y-1=0$. **932.** Для того чтобы кривая имела линию центров, совпадающую с осью Ox, необходимо и достаточно, чтобы $a_{11}=a_{21}=a_{13}=a_{23}=$ $=0$. **933.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **934.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы начало координат совпало с точкой M_0, и воспользоваться задачей 928. **935.** Указание. Общую декартову систему координат выбрать так, чтобы оси координат совпадали с диагоналями параллелограмма, и воспользоваться задачей 928. **936.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **937.** $\boldsymbol{a}_1'\,\{-5,3\}$, $\boldsymbol{a}_2'\,\{-2,1\}$, $\boldsymbol{a}_3'\,\{3,1\}$, $\boldsymbol{a}_4'\,\{-1,2\}$. **938.** $k=0$. **939.** $x-1=$ $=0$, $x-2y+3=0$. **940.** $x-10y-12=0$, $7x-28y-30=0$. **941.** $19x-12y-$ $-5=0$, $64x+48y+55=0$. **942.** а) $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$; б) $kk'=\frac{b^2}{a^2}$. **943.** $x-3y=$ $=0$, $4x+3y=0$; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$. **944.** Две пары сопряженных диаметров: а) $x+2y=$ $=0$, $3x+y=0$; б) $x-2y=0$, $3x-y=0$. **945.** $2y+3=0$. **946.** а) $\{1,-2\}$, $\{2,1\}$; б) $\{1,1\}$, $\{-1,1\}$; в) $\{1,1\}$, $\{1,-1\}$; г) $\{1,-2\}$, $\{2,1\}$; д) $\{1,1+\sqrt{2}\}$, $\{1,1-\sqrt{2}\}$. **947.** а) $2x-4y-5=0$; б) $x+y-2=0$ и $x-y=0$; в) $x+y-$ $-1=0$ и $x-y+3=0$; г) $2x-4y-1=0$; д) $7(1+\sqrt{2})x-7y-18-13\sqrt{2}=$ $=0$ и $7(1-\sqrt{2})x-7y-18+13\sqrt{2}=0$. Указание. Воспользоваться теоремой о том, что ось есть диаметр, соответствующий хордам главного, но не асимптотического направления. **948.** $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$. Указание. Воспользоваться теоремой: для того чтобы ненулевой вектор $\{p_1, p_2\}$ имел главное направление относительно кривой второго порядка, заданного уравнением (1), стр. 116, необходимо и достаточно, чтобы $(a_{22}-a_{11})\,p_1p_2+a_{12}\,(p_1^2-p_2^2)=0$. **949.** а) $a_{12}=0$, $a_{23}=0$, $a_{22}\neq 0$; б) диаметр коллинеарен вектору $\{a_{13}, a_{23}\}$. **950.** а) Биссектрисы углов, образованных данными прямыми; б) прямая, проходящая между данными параллельными прямыми на равном расстоянии от них. **952.** Парабола; пара параллельных действительных прямых; пара параллельных комплексных прямых; пара слившихся прямых. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **953.** а) $4x+4y+3=0$; б) $10x-5y-2=0$; в) $x+y-2=0$; г) $26x-39y-11=0$. **954.** Пары слившихся или параллельных прямых. **955.** Указание. Воспользоваться задачей 949. **956.** Указание. Определить число асимптотических направлений данных кривых. **957.** Решение. Запишем уравнение кривой (1), стр. 116, в следующем виде:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\,x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})y+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})=0. \qquad (1)$$

Возможны два случая: $I_2\neq 0$ и $I_2=0$; а) $I_2\neq 0$. Из условия $I_3=0$, учитывая, что $I_2\neq 0$, следует, что элементы третьей строки определителя I_3 (см. задачу 917) являются линией комбинаций элементов первых двух строк: $a_{31}=\lambda a_{11}+\mu a_{21}$, $a_{32}=\lambda a_{12}+\mu a_{22}$, $a_{33}=\lambda a_{13}+\mu a_{23}$. Подставив эти соотношения в уравнение (1), получаем:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\,(x+\lambda)+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})\,(y+\mu)=0. \qquad (2)$$

Из условия $I_2\neq 0$ следует, что кривая имеет центр $M_0(x_0, y_0)$. Из соотношения (2) следует, что точка M_0 принадлежит кривой. Поэтому согласно задаче 934 кривая является распадающейся; б) $I_2=0$. Возьмем точку $M_0\,(x_0, y_0)$ (действительную или комплексную), принадлежащую кривой, и ненулевой вектор $p\{p_1\ p_2\}$, координаты которого удовлетворяют условиям $a_{11}p_1+a_{12}p_2=0$, $a_{21}p_1+a_{22}p_2=0$. Прямая l, проходящая через точку M_0 и содержащая вектор p, согласно задаче 917 является асимптотой. Так как точка M_0 принадлежит кривой, то эта прямая целиком принадлежит кривой. Отсюда следует, что кривая является распадающейся. В самом деле, эллипс, гипербола, парабола и мнимый эллипс либо не имеют асимптот, либо точки асимптот не принадлежат кривой. **958.** Указание. Принимая во внимание, что при $I_2<0$ кривая имеет два асимптотических направления (см. стр. 117), воспользоваться предыдущей задачей и учесть, что всего существует девять типов кривых второго порядка. **959.** Указание. Задача решается по аналогии с предыдущей. **960.** Указание. См. решение задачи 957. **961.** Решение. Согласно задаче 957 кривая не является распадающейся. Так как она не имеет ни одного асимптотического направления, то является либо действительным, либо мнимым эллипсом. Учитывая, что кривая содержит действительные точки (например, (1, 0)), приходим к выводу, что она является действительным эллипсом. **962.** Указание. Использовать задачу 958. **963.** Указание. Использовать задачу 959. **964.** а) $2x-y+1=0$ и $x+y+2=0$; б) $x-1=0$ и $2x+2y+5=0$; в) $x-2y+3=0$ и $x-2y-1=0$; г) $x+3y=0$ и $x+3y-6=0$; д) $2x+3y+2=0$ и $2x+3y-5=0$. Указание. Воспользоваться задачей 957. **965.** а) $I_2>0$, $I_3\neq 0$; эллипс; б) $I_2=0$, $I_3\neq 0$; парабола: в) $I_2<0$, $I_3\neq 0$; гипербола; г) $I_2=I_3=0$; пара параллельных прямых. Указание. г) Рассмотреть точки пересечения кривой с осью Ox. **966.** Решение. а) Определим образ эллипса $Э$ при данном аффинном преобразовании П. Согласно задаче 307 существует система координат Oe_1e_2, в которой эллипс $Э$ имеет уравнение $x^2+y^2=1$. Если $O'e_1'\,e_2'$ — образ системы Oe_1e_2 при преобразовании $П$, то, как известно из теории преобразований, образ $Э'$ эллипса $Э$ в системе $O'e_1'\,e_2'$ имеет то же уравнение. Из задачи 961 следует, что $Э'$ — эллипс. Задачи б) и в) решаются аналогично. Для их решения надо использовать задачи 962 и 963. **967.** Указание. Если $Э$ и $Э'$ — данные эллипсы, то, пользуясь задачей 307, записать их уравнения в виде $x^2+y^2=1$ и $x'^2+y'^2=1$ и рассмотреть аффинное преобразование, которое первую систему координат переводит во вторую. **968.** Указание. Задача решается аналогично задаче 967. **971.** Указание. Пусть O и O' — центры данных эллипсов, а a, b и a', b' — их полуоси. По условию задачи существует такое число $k > 0$, что $a' = ka$, $b' = kb$. Если $k \neq 1$, то сначала рассмотреть гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k. **972.** Указание. Предварительно доказать, что полуоси данных эллипсов (гипербол) пропорциональны, и воспользоваться задачей 971. **973.** Указание. Пусть $y^2 = 2px$, а $y^2 = 2p'x$, канонические уравнения данных парабол. Если $p' = kp$ и $k \neq 1$, то сначала рассмотреть гомотетию с центром в вершине первой параболы и коэффициентом k. **974.** $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$, где коэффициенты при x и y удовлетворяют условию: матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{b}{a} a_{12} \\ \frac{a}{b} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является ортогональной. **975.** $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$, где коэффициенты при x и y удовлетворяют условию: матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -i\frac{b}{a} a_{12} \\ i\frac{a}{b} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является ортогональной, где i — мнимая единица, т. е. $i^2 = -1$. **976.** $x' = \alpha^2 x + \frac{\alpha y_0}{p} y + x_0$, $y' = \alpha y + y_0$, где α, x_0, y_0 — параметры, удовлетворяющие условиям $\alpha \neq 0$, $y_0^2 = 2px_0$. **977.** Четыре преобразования: тождественное преобразование, центральная симметрия с центром в центре эллипса и две осевые симметрии относительно осей эллипса. Да. **978.** $x' = \alpha^2 x$, $y' = \alpha y$, где α — произвольный параметр, отличный от нуля. Указание. Воспользоваться задачей 976. Эллипс, имеющий с данным эллипсом общую касательную в точке M_0 с центром в середине отрезка M_0O, где O — центр искомого эллипса. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке M_0. **980.** Гипербола с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA. Здесь O — центр, A — выбранная вершина, а a и b — полуоси данной гиперболы. Указание. См. указание к предыдущей задаче. **981.** $\varepsilon' = \sqrt{1 - k^2 + k^2\varepsilon^2}$. Так как $\varepsilon'^2 - \varepsilon^2 = (1 - k^2)(1 - \varepsilon^2) > 0$, то $\varepsilon' > \varepsilon$. **982.** Указание. Построить окружность на отрезке A_1A_2, как на диаметре, и рассмотреть сжатие с осью A_1A_2, которое точку B_1 переводит в точку окружности. **983.** Указание. Задача решается по аналогии с предыдущей. **985.** $D(6, 5, 7)$. **986.** $B_1(3, 6, 3)$, $C_1(7, 7, 3)$, $D_1(8, 3, 0)$, $C(5, 4, 4)$. **987.** а) $(-2, 1, -1)$; б) $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 1)$, $(-2, -1, 1)$; в) $(2, 1, -1)$, $(-2, -1, -1)$, $(-2, 1, 1)$. **988.** а) $A_1(-2, -3, 1)$, $B_1(-3, 0, 1)$, $C_1(-1, -1, -1)$; б) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$, $C_1(1, 1, -1)$; $A_2(2, -3, -1)$, $B_2(3, 0, -1)$, $C_2(1, -1, 1)$; $A_3(-2, 3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, 1, 1)$; в) $A_1(2, -3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$; $C_1(1, -1, -1)$; $A_2(-2, 3, 1)$, $B_2(-3, 0, 1)$, $C_2(-1, 1, -1)$; $A_3(-2, -3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, -1, 1)$. **989.** а) A_1, B_1, C_1; в) A_3, B_3, C_3. **990.** а) A_1, B_1, C_1, D_1; г) A_4, B_4, C_4, D_4. **991.** $(1, 2, 4)$. **992.** а) $A_1A_2 = 5$, $B_1B_2 = \sqrt{50}$, $C_1C_2 = \sqrt{30}$; б) $OM = 5$, $ON = \sqrt{13}$, $OP = 5$, $OQ = \sqrt{62}$. **993.** $AB = BC$. **995.** $r = \sqrt{26}$. **996.** 7. **997.** $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$. **998.** $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$. **999.** $A_1(0, -3, 8)$; $A_2\left(\frac{1}{2}, -2{,}5\right)$; $A_4\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$; $A_6\left(\frac{5}{2}, 2, -7\right)$. **1000.** $C(7, -3, -2)$. **1001.** $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = \frac{7}{2}$. **1002.** а) $(1, -2, 2)$; б) $\left(4, 1, \frac{7}{3}\right)$. **1003.** а) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{13},\right.$

$\frac{14}{13}$, 3). Указание. Воспользоваться задачей 52. **1004.** $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$, $\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}$. **1005.** Указание. Массы, пропорциональные длинам сторон, поместить в серединах сторон тетраэдра и воспользоваться предыдущей задачей. **1006.** а) $x'=x-\frac{1}{2}y+7z$, $y'=\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z$, $z'=2z$ б) $x'=x+2y-5$, $y'=x+y-5$, $z'=\frac{1}{5}z+\frac{2}{5}$; в) $x'=-x+1$, $y'=y-1$, $z'=-z+2$; г) $x'=x-2$, $y'=y-5$, $z'=z+1$, д) $x'=\frac{5}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{3}{8}z$, $y'=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z+1$, $z'=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}y-\frac{3}{8}z$. **1007.** $x=-\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$. **1008.** $x'=-x-y-z+1$, $y'=y$, $z'=y$. **1009.** а) $e_1'\{1, 1, 1\}$, $e_2'\{-3, 1, 0\}$, $e_3'\{1, 0, 0\}$, $O'(0, 0, 1)$; б) $e_1'\{1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, 1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(-1, 3, 0)$; в) $e_1'\{1, -1, 0\}$, $e_2'\{-1, -1, 0\}$, $e_3'\{1, 2, 1\}$, $O'(1, 2, -3)$; г) $e_1'\{0, 1, 1\}$, $e_2'\{1, 0, 1\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(0, 0, 1)$; д) $e_1'\{-1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, -1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(1, 1, 1)$. **1010.** $x=-z'+a$, $y=-x'+a$, $z=-y'+a$. **1011.** $x'=\sqrt{2}x$, $y'=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$, $z'=-x-y+z$. **1012.** а) $2[\boldsymbol{ab}]$; б) $4[\boldsymbol{ba}]+[\boldsymbol{ac}]+2[\boldsymbol{cb}]$; в) $[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$. **1013.** а) $\{3, 0, -2\}$, $\sqrt{13}$; б) $\{-2, 0, 0\}$, 2; в) $\{-3, 9, 5\}$, $\sqrt{115}$; г) $\{3, 0, 1\}$, $\sqrt{10}$; д) $\{-3, 0, -1\}$, $\sqrt{10}$; е) $\{-13, 4, 10\}$, $\sqrt{285}$. **1014.** а) $\{-6, 6, -1\}$; б) $\{-1, 5, 2\}$. **1015.** а) $\frac{\sqrt{2331}}{2}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $\frac{\sqrt{1326}}{2}$. Указание. Площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле $S=\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}{2}$. Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C\{x_3, y_3, z_3)$,

то
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

1016. $\frac{2}{5}$. Указание. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, разделить на длину вектора $\overrightarrow{AB}$. **1017.** а) $\{15, -3, -14\}$; б) $\{0, 0, 0\}$; в) $\{-3, 11, 9\}$. **1019.** Указание. Если $ABCA'B'C'$ — данная призма, то построенные векторы можно выразить при помощи векторного произведения через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA'}$. **1020.** См. указание к предыдущей задаче. **1021.** а) Левая; б) правая; в) левая; г) левая; д) левая. **1022.** $\alpha=0$, $\beta=-10$, $\gamma=-20$. **1023.** а) -29; б) 68; в) 19. **1024.** $\boldsymbol{abc}=-29$, $\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}]=29$. **1028.** Указание. Сначала показать, что $[\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3]=\lambda\boldsymbol{a}_1$, $[\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_1]=\mu\boldsymbol{a}_2$, $[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2]=\gamma\boldsymbol{a}_3$, где $\lambda>0$, $\mu>0$, $\gamma>0$. Для доказательства, например, первого соотношения прямоугольный декартовый базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ выбрать так, чтобы $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}_1$, и ввести в рассмотрение координаты векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$. **1029.** $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2=\frac{(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1)-(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)}{\sqrt{1-(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)^2}\sqrt{1-(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1)^2}}$. Аналогично выражаются остальные произведения. Указание. Воспользоваться задачей 1026, а), г). **1030.** Указание. а) Записать вектор $\overrightarrow{A_0B_1}$ в виде $\overrightarrow{A_0B_1}=\boldsymbol{a}_1+\lambda\boldsymbol{p}$ и, используя условие $\overrightarrow{A_0B_1}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3=0$, определить λ, б) записать вектор $\overrightarrow{A_0B_0}$ в виде $\overrightarrow{A_0B_0}=$

$= \lambda p$ и, используя условие компланарности векторов $\overrightarrow{A_0B_0} - a_1$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, определить λ. **1031.** а) $V_1 = 0{,}5$; б) $V_2 = 22{,}5$. **1032.** $AH = 3$. **1033.** а) $V = 12$; б) $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{626}$, $S_{ADD'A'} = \sqrt{338}$; в) $h = \dfrac{6}{\sqrt{26}}$; г) $\cos\varphi_1 = \dfrac{4}{5\sqrt{10}}$; д) $\cos\varphi_2 = \dfrac{46}{13\sqrt{13}}$. **1034.** а) $V = \dfrac{17}{2}$; б) $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{34}$, $S_{ACC'A} = \sqrt{357}$, $S_{BCC'B'} = \sqrt{561}$; в) $h = \sqrt{17}$; г) $\cos\varphi = 0$. **1035.** а) $V = \dfrac{8}{3}$; б) $S_{ABC} = 4$, $S_{ACD} = 5$, $S_{ABD} = 2\sqrt{5}$, $S_{BCD} = \sqrt{33}$; в) $h = 2$; г) $\cos\varphi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$; д) $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. **1036.** а) $S = \sqrt{51}$; б) $\cos A = \dfrac{7}{10}$, $\cos B = -\dfrac{3}{2\sqrt{15}}$, $\cos C = \dfrac{18}{5\sqrt{5}}$; в) $BH = \dfrac{\sqrt{102}}{5}$, $\overrightarrow{BH}\left\{-\dfrac{29}{25}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{22}{25}\right\}$; г) $a\{8, 5, -9\}$; д) $M\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}, 0\right)$. **1037.** а) $S = \dfrac{75}{2}$; б) $\cos A = 0$, $\cos B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos D = 0$; в) $a\{-3, 4, 5\}$; г) $\overrightarrow{BH}\left\{6, -\dfrac{28}{3}, -\dfrac{10}{3}\right\}$; д) $M\left(-\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{7}{2}\right)$. **1038.** Если $b \perp a$, то все решения параллельны плоскости, перпендикулярной вектору b. Если a и b не перпендикулярны, то данное уравнение не имеет решений. **1039.** Р е ш е н и е. а) Второе уравнение разрешимо только в том случае, когда $a \perp b$ и $a \neq 0$ (см. предыдущую задачу). Возьмем вспомогательный единичный вектор c, перпендикулярный к плоскости векторов a и b так, чтобы $abc > 0$. Разложим искомый вектор x по реперу: a, b и c, векторы которого взаимно перпендикулярны:

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c. \tag{1}$$

Подставив это значение в данные уравнения, получаем:

$$x_1 (aa) = \alpha;\ x_2 [ba] + x_3 [ca] = b. \tag{2}$$

Отсюда будем иметь: $x_1 = \dfrac{\alpha}{a^2}$. Умножив уравнение (2) скалярно на c, получаем: $x_2 (bac) + x_3 (cac) = bc$. Отсюда $x_2 = 0$. Для определения x_3 умножим соотношение (2) скалярно на b, $x_3 (cab) = b^2$, так как $(abc) = |a|\,|b|$, то $x_3 = \dfrac{|b|}{|a|}$.

Учитывая, что $c = \dfrac{[ab]}{|[ab]|} = \dfrac{[ab]}{|a|\,|b|}$, из (1) окончательно получаем:

$$x = \frac{\alpha}{a^2} a + \frac{[ab]}{|a|^2} = \frac{\alpha a + [ab]}{a^2}. \tag{3}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что вектор x, определяемый соотношением (3), является решением исходной системы. Таким образом, при $a \perp b$ и $a \neq 0$ система имеет единственное решение (3). Если хотя бы одно из условий $a \perp b$ или $a \neq 0$ не выполняется, то система не имеет решений; б) если векторы a и b не коллинеарны, то $x = \alpha[ab]$, где α — произвольный числовой множитель. Если a и b коллинеарны, то одно из уравнений есть следствие второго. В этом случае задача сводится к задаче 140. Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат и если $a\{a_1, a_2, a_3\}$, $b\{b_1, b_2, b_3\}$, $x\{x_1, x_2, x_3\}$, то данные уравнения в координатах запишутся так: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$. Отсюда следует, что если векторы $a\{a_1, a_2, a_3\}$ и $b\{b_1, b_2, b_3\}$ не коллинеарны, то $x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$. **1040.** Если положить $p = [ab]$, то данное уравнение сводится к следующему: $px = \alpha$; см. задачу 140. **1041.** а) Нет; б) да. **1045.** У к а з а н и е. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD и DA. Доказать, что $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. **1047.** Р е ш е н и е. Пусть система координат выбрана так, что A — начало координат, а $\overrightarrow{AB}=e_1$, $\overrightarrow{AD}=e_2$, $\overrightarrow{AA_1}=e_3$. Тогда центр тяжести G_1 треугольника A_1BD имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а центр тяжести G_2 треугольника B_1D_1C — координаты $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Очевидно, точки $A(0, 0, 0)$, $G_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и $C_1(1, 1, 1)$ лежат на одной прямой. **1048.** У к а з а н и е. См. решение предыдущей задачи. **1049.** У к а з а н и е. Пусть $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы A совпало с началом, а ребра AB, AC и AD — с осями. Показать, что в этой системе центр сферы имеет координаты $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. **1050.** У к а з а н и е. Ввести в рассмотрение радиус-векторы или координаты рассматриваемых точек и, пользуясь ими, доказать, что точка M, делящая отрезок A_1C_1 в отношении μ, совпадает с точкой N, делящей отрезок D_1B_1 в отношении λ. **1051.** У к а з а н и е. Систему координат выбрать так, чтобы начало совпадало с точкой A и $\overrightarrow{AB}=e_1$, $\overrightarrow{AC}=e_2$, $\overrightarrow{AD}=e_3$. Если $(\lambda, 0, 0)$ — координаты точки S в этой системе, то середины отрезков AD, BC, SD, SC будут иметь соответственно координаты $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\lambda}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Далее показать, что эти точки лежат в одной плоскости. **1052.** $\frac{1}{12}$. **1053.** $\frac{1}{3}$. **1054.** $\frac{16}{27}$. У к а з а н и е. Если r_i — радиус-вектор точки A_i, то, пользуясь задачей 53, предварительно показать, что $3\overrightarrow{A_1B_1}=-3r_1+r_2+r_3+r_4$, $3\overrightarrow{A_2B_2}=r_1-3r_2+r_3+r_4$, $3\overrightarrow{A_3B_3}=r_1+r_2-3r_3+r_4$, $3\overrightarrow{A_4B_4}=r_1+r_2+r_3-3r_4$. Для облегчения выкладок при вычислении объемов полюс выбрать в одной из вершин исходного тетраэдра или в центроиде тетраэдра. **1055.** У к а з а н и е. Приняв вершину A_4 за полюс и полагая $\overrightarrow{A_4A_i}=a_i$, пользуясь задачей 1030, выразить радиус-векторы точек B_1, B_2, B_3, B_4 через a_1, a_2, a_3. **1057.** (1, 0, 4). **1058.** а) $x+y-z+1=0$; б) $x+3y-z+1=0$. **1059.** а) $6x+2y-5z+5=0$; б) $x-z+1=0$; в) $y-z=0$. **1060.** а) $x+y-4z+9=0$; б) $x-2y+z=0$. **1061.** $ABC: z=0$, $ABD: y=0$, $ACD: x=0$, $BCD: x+y+z=1$, $CDE: 2x+y+z=1$. **1062.** а) Нет; б) да: $x+y+z-2=0$; в) нет; г) нет. **1063.** а) $10x+9y+5z-50=0$; б) $6x+5y+3z-30=0$. **1065.** а) Параллельна оси Oy; б) проходит через начало координат; в) параллельна оси Oz; г) содержит ось Oy; д) параллельна плоскости Oyz; е) параллельна оси Ox; ж) параллельна плоскости xOz; з) содержит ось Ox; и) совпадает с плоскостью xOy. **1066.** а) $x=1$, $y=2$, $z=-1$; б) $y+2z+6=0$, $x-z-5=0$, $2x+y-4=0$; в) $5y+z=0$, $5x+2z=0$, $x-2y=0$. **1067.** $3y+2z=0$, $3x-z=0$, $2x+y=0$. **1068.** а) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-\frac{2}{3}}=1$; б) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{1}{3}}+\frac{z}{-1}=1$; в) $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{-3}=1$. **1069.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{6}{11}}+\frac{z}{1}=1$. **1070.** а) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; б) $\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$.

1071. $x+y+z=9$, $-x+y+z=3$, $x-y+z=5$, $x+y-z=1$. **1073.** Векторы p_2 и p_4 параллельны, а p_1 и p_3 не параллельны данной плоскости. **1075.** а) $x+2y-4z-12=0$; б) $3y-4z=0$. **1076.** $x-6y+11=0$, $3x-6y+4z-7=0$, $x+2z-9=0$. **1077.** $x+3y-3z-9=0$. **1078.** а) $\{1, 2, -1\}$; б) $\{1, 0\ -3\}$; в) $\{0, 1, 0\}$; г) $\{1, -3, 1\}$. **1079.** $3x+y-3z+7=0$. **1080.** а) $-7x+y+5z=0$; б) $3x+y-2z-8=0$. **1081.** $2x-3y+6z-49=0$. У к а з а н и е. Через точку M_0 провести плоскость, перпендикулярную к вектору $\overrightarrow{OM_0}\ \{2, -3, 6\}$, где O — центр сферы, совпадающий с началом координат. **1082.** $x+y-2z+5=0$. **1084.** а) $2x-4y+5z=0$; б) $2y-7z=0$; в) $x=0$. **1085.** а) $3x-y+z-11=0$; б) $x-3y-10=0$; в) $z-5=0$. **1086.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1072. **1087.** а) На линии пересечения лежит, например, точка $(1, -2, -4)$; б) $p\{-1, 3, 5\}$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **1088.** $(2, 1, 1)$. **1092.** $\left(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11}\right)$. **1093.** $\begin{vmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0$. Указание. Написать условие, при котором система уравнений имеет единственное решение, и если x_0, y_0, z_0 — решение, то потребовать, чтобы $z_0 = 0$. **1094.** Выполняется одно из условий: 1) $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$; 2) хотя бы один из коэффициентов C_1 и C_2 отличен от нуля и $\begin{vmatrix} C_1 D_1 \\ C_2 D_2 \end{vmatrix} = 0$. **1095.** $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$. **1096.** $x - z + 1 = 0$. Решение. Напишем уравнение пучка, определяемого плоскостями π и Oxz: $(x + y - z + 1) + \lambda y = 0$ (1), и подберем λ так, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к плоскости $x - 3y + z = 0$. Условие перпендикулярности плоскостей $x + (1 + \lambda)y - z + 1 = 0$, $x - 3y + z = 0$ запишется так: $1 \cdot 1 - 3(1 + \lambda) - 1 \cdot 1 = 0$. Отсюда будем иметь: $\lambda = -1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (1), получаем уравнение искомой плоскости. **1097.** $-66x + 61y + 89z - 134 = 0$, $x - 3y - z + 1 = 0$, $14x + 95y - 37z - 82 = 0$. **1098.** а) $9x + 3y + 5z = 0$; б) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; в) $21x + 14z - 3 = 0$. **1099.** $5x + 3y - z + 4 = 0$. **1100.** $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $9x + 24y + 13z + 34 = 0$. **1101.** $Az_0 x + Bz_0 y - C(z - z_0) = 0$. Указание. Прямую l принять за ось пучка, определяемого плоскостями $z = 0$ и $Ax + By + C = 0$. **1102.** а) M_1, M_2, M_3, M_5, M_6; б) M_2, M_3, M_6; в) M_2; г) нет точек; д) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. **1103.** Пары O и A, B_1 и B_2. **1104.** Плоскость xOy пересекает AC и BC; плоскость yOz пересекает AC и BC; плоскость xOz пересекает AB и BC. **1105.** $2x + 5y + 2z - 5 < 0$, и $2x + 5y + 2z - 5 > 0$. **1106.** $x - y + z + 1 > 0$, $2x - 2y + 2z - 5 < 0$. **1107.** $5x - y + z + 1 > 0$, $x + y - 5z + 1 < 0$. Указание. Задача решается аналогично задаче 452. **1108.** Воспользоваться условием параллельности вектора и плоскости (см. задачу 1072). **1109.** Область Ω: $(Ax + By + Cz + D_1)(Ax + By + Cz + D_2) < 0$. Область Ω_1: $Ax + By + Cz + D_1 > 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 > 0$. Область Ω_2: $Ax + By + Cz + D_1 < 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 < 0$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **1110.** Указание. Задача решается аналогично задаче 453. **1111.** A, B и E. **1112.** а) Полупространство, определяемое плоскостью $2x - y + z - 3 = 0$ и не содержащее точек плоскости $2x - y + z + 5 = 0$; б) множество внутренних точек того двугранного угла, определяемого плоскостями $x - y + 3z + 6 = 0$ и $2x + y + z + 4 = 0$, которому принадлежит точка $(1, 1, 1)$; в) множество внутренних точек того трехгранного угла, определяемого плоскостями $x + y - z + 5 = 0$, $2x - 3y + z - 1 = 0$, $3x + y - z - 6 = 0$, которому принадлежит начало координат. **1114.** а) 10; б) $\frac{3}{\sqrt{38}}$. **1115.** $5x + 7y - 17z + 22 = 0$, $x - y - z + 2 = 0$. Решение. Так как искомая плоскость не проходит через начало координат, то ее уравнение можно записать в виде $Ax + By + Cz + 1 = 0$. Искомые коэффициенты A, B и C должны удовлетворять следующим уравнениям: $A \cdot (-1) + C \cdot 1 + 1 = 0$ (точка M_1 принадлежит искомой плоскости), $A + B + 2C + 1 = 0$ (точка M_2 принадлежит искомой плоскости), $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (искомая плоскость отстоит от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$). Решая данную систему уравнений, получаем два решения: $A_1 = \frac{5}{22}$, $B_1 = \frac{7}{22}$, $C_1 = -\frac{17}{22}$; $A_2 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. **1116.** а) 1; б) $\frac{14}{13}\sqrt{13}$; в) $\frac{3}{2}$. **1117.** а) Плоскость проходит вне сферы; б) плоскость пересекает сферу; в) плоскость касается сферы; г) плоскость пересекает сферу и проходит через ее центр. **1118.** $6x + 2y + 3z - 42 = 0$. Указание. Написать уравнение искомой плоскости в отрезках. **1119.** $4x + 3y - 15 = 0$, $58x + 33y + 6z - 201 = 0$. Указание. В пучке, определяемом данными плоскостями, выбрать плоскость, отстоящую от центра сферы на расстоянии, равном радиусу сферы. **1120.** $\rho=\frac{1}{2\sqrt{14}}$. **1121.** $\rho=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **1122.** а) 8; б) $\frac{1}{2}$; в) $9\sqrt{3}$; г) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **1123.** $M_1\left(0, 0, \frac{6+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(0, 0, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$. **1124.** $M_1(0, 3, 0)$, $M_2(0, -2, 0)$. **1125.** $6x-3y+2z+7=0$ и $6x-3y+2z-35=0$. **1126.** $6x+3y+2z-14=0$ и $6x+3y+2z+28=0$. **1127.** а) $4x-2y+6z-9=0$; б) $x+y-2z+2=0$; в) $3x-y+z+10=0$. **1128.** $(x+3)^2+y^2+z^2=\frac{225}{29}$; $(x-7)^2+y^2+z^2=\frac{1225}{29}$. **1129.** а) $x+2y-6z+3=0$, $4x+y+z-1=0$; б) $2x+3y+5z-12=0$, $4x-13y+5z=0$. **1130.** а) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; б) $\alpha=90°$. **1132.** а) (3, 4, 5); б) (—22, —1, —20). **1134.** а) $x=-t$, $y=0$, $z=t$; б) $x=t$, $y=t+1$, $z=-3t-1$; в) $x=0$, $y=-t$, $z=t$. **1135.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{7}$. **1136.** а) Прямая проходит через начало координат; б) прямая параллельна оси Ox; в) прямая пересекает ось Ox и параллельна координатной плоскости Oyz; г) прямая лежит в координатной плоскости Oyz. **1137.** а) (0, 1, 0); б) (0, 2, 1), $\left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, (—2, —1, 0). **1138.** а) Прямая пересекает плоскости xOy и xOz в точке (2, 0, 0), а плоскость yOz — в точке (0, —3, 1); б) (0, 7, 18), $\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{15}{2}\right)$, (6, —5, 0). **1139.** а) $A_1=0$, $A_2=0$; б) $B_1=0$, $D_1=0$, $B_2=0$, $D_2=0$, в) $A_1B_2-B_1A_2=0$, $D_1=D_2=0$. **1140.** а) Пересекаются; б) совпадают; в) скрещиваются; г) параллельны. **1141.** $5x-22y+19z+9=0$. **1142.** $y+z=0$. **1143.** а) $x+2y-1=0$; б) $x+2y+z+4=0$. **1144.** $2x-y+z+12=0$. **1145.** $x-4y+7z+24=0$. **1146.** $2x-y-z+8=0$. **1147.** $4x+3y-z=0$, $13x+2y-8z=0$ или в параметрическом виде $x=22t$, $y=-19t$, $z=31t$. Решение. Первый способ. Искомая прямая является линией пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через начало координат и через одну из данных прямых. Так как первая проходит через точку $M(0, 1, 3)$ и параллельна вектору $p\{1, -1, 1\}$, то плоскость, проходящая через эту прямую и начало координат, имеет уравнение $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, или $4x+3y-z=0$. Аналогично получаем уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую и начало координат: $13x+2y-8z=0$. Следовательно, искомая прямая имеет уравнения $4x+3y-z=0$, $13x+2y-8z=0$. Второй способ. Так как искомая прямая проходит через точку O (0, 0, 0), то для составления ее уравнения достаточно определить координаты направляющего вектора $p(\alpha, \beta, \gamma)$. Записывая условия пересечения искомой прямой с данными прямыми, получим уравнения, откуда определяются координаты вектора p: p (22, —19, 31). **1148.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$. **1149.** $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **1151.** $\frac{x+5}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$. **1152.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-3}{4}$. **1153.** а) $2x-3y+5z-31=0$; б) $2x-5y-3z-5=0$.

1154. $\begin{cases} 3x+4y+3z-15=0, \\ 7x-6y+z+5=0. \end{cases}$ **1155.** $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{8}$. **1156.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+1}{9}$. **1157.** (2, —4, 8). **1158.** (—3, 7, 4).

1159. а) $x+2y+9=0$, $x-2z-1=0$, $y+z+5=0$;

б) $x-4y-6=0, \quad x+4z-10=0, \quad y+z-1=0;$
в) $5x+2y+14=0, \quad 3x+2z+4=0, \quad 3y-5z+11=0.$

1160. а) $\begin{cases} x+2y+9=0, \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2z-1=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y+z+5=0, \\ x=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-4y-6=0, \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+4z-10=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y+z-1=0, \\ x=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x+2y+14=0, \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2z+4=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3y-5z+11=0, \\ x=0. \end{cases}$

1161. а) $\begin{cases} 3y+3z+5=0, \\ 3x-y+z-4=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y-5z+5=0, \\ 3x-y+z-1=0. \end{cases}$ **1162.** $x-3y-7z=0.$

1163. $2x+3y-5z+14=0.$ **1164.** $\begin{cases} 2x-y+3z-4=0, \\ x-11y-3z-44=0. \end{cases}$ **1165.** $\sqrt{22}$. **1166.** 6.

1167. б) $2x-3y-6z-7=0$, $2x-3y-6z+14=0$; в) 3. **1168.** $\arcsin\dfrac{3}{133}$.

1169. 90°. **1170.** $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. **1171.** Доказательство. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат данные прямые l и l' и плоскость α имеют уравнения (l) $\dfrac{x-x_0}{p_1}=\dfrac{y-y_0}{p_2}=\dfrac{z-z_0}{p_3}$, (l') $\dfrac{x-x_1}{p_1'}=\dfrac{y-y_1}{p_2'}=\dfrac{z-z_1}{p_3'}$, (α) $Ax+By+$ $+Cz+D=0$. Так как $l\perp l'$, то $p_1p_1'+p_2p_2'+p_3p_3'=0$. (1) С другой стороны, в силу того что $\alpha\perp l'$, имеем: $p_1'=\lambda A$, $p_2'=\lambda B$, $p_3'=\lambda C$. Подставив эти выражения в (1), получаем: $Ap_1+Bp_2+Cp_3=0$. Это соотношение показывает, что направляющий вектор прямой l параллелен плоскости α. Таким образом, прямая l либо параллельна плоскости α, либо принадлежит этой плоскости. **1172.** Доказательство. Пусть в некоторой системе координат данные плоскости α и α' и прямая l имеют уравнения

$$(\alpha)\quad Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

$$(\alpha')\quad A'x+B'y+C'z+D'=0 \tag{2}$$

$$(l)\quad \frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}. \tag{3}$$

Так как $l\parallel\alpha$ и $l\parallel\alpha'$, то

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3=0,\ A'p_1+B'p_2+C'p_3=0. \tag{4}$$

В силу того что плоскости α и α' пересекаются, коэффициенты в уравнениях (1) и (2) не пропорциональны, поэтому хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ не равен нулю. Пусть, например, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\neq 0$. Решив систему (4) относительно p_1 и p_2, получаем: $p_1=-\dfrac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}p_3$, $p_2=-\dfrac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}p_3$. Если ввести обозначение $\dfrac{p_3}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}=$ $=\lambda$, то предыдущие соотношения запишутся так: $p_1=\lambda\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $p_2=\lambda\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$, $p_3=$ $=\lambda\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$. Таким образом, векторы $\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\left\{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\right\}$ коллинеарны. Задача решена (см. задачу 1086). **1174.** Указание. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы плоскость α совпала с плоскостью Oxy. **1175.** Решение. Пусть прямые l_1 и l_2 даны своими уравнениями в прямоугольной декартовой системе:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2} \tag{1}$$

Сначала предположим, что через прямую l_1 можно провести плоскость $Ax+By+$ $+Cz+D=0$, перпендикулярную прямой l_2. Так как эта плоскость проходит через прямую l_1, то $A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1=0$. Кроме того, плоскость перпендикулярна l_2, поэтому векторы $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ и $\{A, B, C\}$ коллинеарны, т. е. $A=\lambda\alpha_2$, $B=\lambda\beta_2$, $C=\lambda\gamma_2$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\lambda(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=0$. В силу условия $\lambda\neq 0$ будем иметь:

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0. \tag{2}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что если через l_1 проходит плоскость, перпендикулярная l_2, то $l_1\perp l_2$. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $l_1\perp l_2$. Рассмотрим плоскость

$$\alpha_2(x-x_1)+\beta_2(y-y_1)+\gamma_2(z-z_1)=0. \tag{3}$$

Очевидно, прямая l_1 лежит в плоскости (3), так как точка (x_1, y_1, z_1) принадлежит этой плоскости и вектор $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ параллелен ей. Последнее утверждение следует из условия (2) (см. задачу 1072). Кроме того, направляющий вектор плоскости (3) совпадает с направляющим вектором прямой l_2, поэтому плоскость (3) перпендикулярна l_2. Итак, для того чтобы через l_1 можно было провести плоскость, перпендикулярную l_2, необходимо и достаточно, чтобы прямые l_1 и l_2 были перпендикулярны.
1177. Указание. Вершину трехгранного угла принять за начало координат, а одну из граней—за плоскость Oxy. **1178.** Прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. **1179.** Плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через данные точки. **1180.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы данная плоскость совпала с плоскостью Oxy, а концы диагонали, лежащей в этой плоскости, имели координаты (0, 0, 0) и (1, 0, 0). Ввести в рассмотрение координаты концов другой диагонали и вычислить расстояние от этих концов до плоскости Oxy. **1181.** Решение. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем основание H высоты SH, опущенной из вершины S на плоскость $ABCD$ (рис. 70), а за координатные оси — диагонали AC, BD и высоту SH. Положительные направления осей выберем так, как указано на рисунке 70. Если $AC=BD=2a$, $SH=h$, то вершины пирамиды и точка K будут иметь координаты: $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(-a, 0, 0)$, $D(0, -a, 0)$, $S(0, 0, h)$, $K\left(0, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right)$. Запишем уравнения плоскостей SAB, ABC и AKC. Плоскость ABC совпадает с координатной плоскостью Oxy, поэтому она имеет уравнение

$$z=0. \tag{1}$$

Плоскость SAB отсекает на координатных осях отрезки a, a, h, поэтому она имеет уравнения «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1. \tag{2}$$

Уравнение третьей плоскости AKC легко записать как уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку K:

$$-hy+az=0. \tag{3}$$

По уравнениям (1), (2) определяем:

$$\cos\beta=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{a}{\sqrt{2h^2+a^2}}. \tag{4}$$

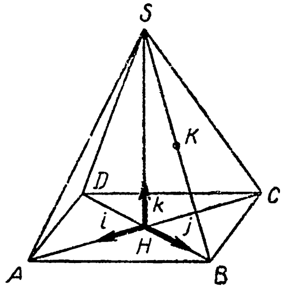


Рис. 70

По уравнениям (2) и (3) определяем:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{h}{a}+\frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\cdot\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{a^2-h^2}{\sqrt{2h^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Если ввести обозначение $k=\frac{h}{a}$, то из предыдущих соотношений легко получить:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}},\ \cos\varphi = \frac{1-k^2}{\sqrt{2k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}} = \frac{1-k^2}{\sqrt{1+k^2}}\cos\beta.$$

Из первого соотношения получаем: $k^2=\frac{1-\cos^2\beta}{2\cos^2\beta}$. Подставив это выражение во второе соотношение, после элементарных преобразований получаем: $\cos\varphi=\frac{3\cos^2\beta-1}{\sqrt{2(1+\cos^2\beta)}}$.

1182. $\cos\varphi = \frac{3h^2-2a^2}{\sqrt{3h^2+4a^2}\sqrt{12h^2+a^2}}$. **1183.** Указание. Боковые ребра принять за координатные оси и написать уравнение основания «в отрезках», далее вычислить расстояние от начала координат до этой плоскости. **1184.** Указание. Пусть O — точка пересечения ребер A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3'. Принять точку O за начало общей декартовой системы координат, а векторы $e_1=\overrightarrow{OA_1}$, $e_2=\overrightarrow{OA_2}$, $e_3=\overrightarrow{OA_3}$ за координатные векторы. **1185.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **1186.** а) Внутренняя область тетраэдра с вершинами (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1); б) внутренняя область треугольной призмы $AOBA_1O_1B_1$, изображенной на рисунке 71; вершины A, B и O_1 имеют координаты A (0, 3, 0), B (0, 0, 3), O_1 (—2, 0, 0); в) параллелепипед $MNPQM'N'P'Q'$, изображенный на рисунке 72; вершины M, N, P, Q, M' имеют координаты M (5, 5, 0), N (5, 3, 0), P (7, 3, 0), Q (7, 5, 0), M'(5, 5, 10). **1187.** $x\geqslant 0$, $x-5\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $y+z-2\leqslant 0$. **1188.** $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}-1\leqslant 0$. **1189.** а) $z\geqslant 0$, $7x+7y-4z-14\leqslant 0$, $7x-z\geqslant 0$, $7x-7y+4z\leqslant 0$; б) $z-1\geqslant 0$, $y-1\geqslant 0$, $x-1\geqslant 0$, $x+y+\frac{z}{2}-\frac{7}{2}\leqslant 0$. **1190.** M_2 и M_4. **1191.** а) Не выпуклый; б) выпуклый. Указание. Для каждой грани F многогранника показать, что все вершины, не лежащие в грани F, расположены в одном полупространстве, определяемом этой гранью. **1192.** Указание. Пусть $A_1A_2 \dots A_k$ — одно из оснований призмы. Общую декартову систему координат взять так, чтобы это основание лежало в плоскости Oxy, а боковые ребра были параллельны оси Oz. Доказать, что для каждой боковой грани $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ все вершины, не лежащие в этой грани, расположены в одном полупространстве, определяемом этой гранью. Для этого записать уравнение грани в виде $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ и, учитывая, что это уравнение есть одновременно уравнение прямой A_iA_{i+1} в плоскости Oxy, воспользоваться условием выпуклости многоугольника $A_1A_2 \dots A_k$. **1193.** Указание. Пусть $SA_1A_2 \dots A_k$ — данная пирамида с вершиной в точке S. Общую декартову систему координат взять так, чтобы S лежала на оси Oz, а многоугольник $A_1A_2 \dots A_k$ — в плоскости Oxy. Доказать, что для каждой боковой грани SA_iA_{i+1} все вершины, не лежащие в ней, расположены в одном полупространстве, определяемом этой гранью. Для этого, пользуясь задачей 1101, записать уравнение грани SA_iA_{i+1} и воспользоваться условием выпуклости многоугольника $A_1A_2 \dots A_k$. **1194.** Указание. Достаточно показать, что все ребра попарно равны друг другу. **1196.** Указание. Показать, что указанные отрезки пересекаются в центроиде вершин тетраэдра (см. задачу 53). **1197.** Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр. Примем за начало координат точку O, а за координатные векторы $e_1=\overrightarrow{OA}$, $e_2=\overrightarrow{OB}$, $e_3=\overrightarrow{OC}$. Обозначив середины ребер OA, OB, OC, AB, BC, CA соответственно через $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$, будем иметь: $M_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $M_2\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $M_3\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $M_5\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Отсюда получаем уравнение данных плоскостей:

(OAM_5) $y-z=0$, (ABM_3) $x+y+2z=1$,
(OBM_6) $x-z=0$, (BCM_1) $2x+y+z=1$,
(OCM_4) $x-y=0$, (CAM_2) $x+2y+z=1$.

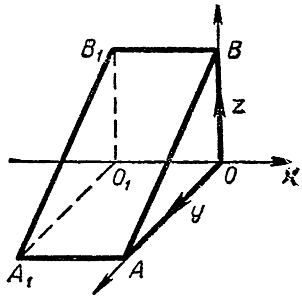


Рис. 71

Легко убедиться в том, что все плоскости проходят через точку $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Других общих точек плоскости не имеют. **1200.** Указание. Если $A_1DB_1CBC_1AD_1$ — описанный параллелепипед тетраэдра $ABCD$, а E и F — середины ребер AB и DC (см. рис. 43), то показать, что вектор $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB_1}$. **1201.** Указание. Предварительно показать, что перпендикуляры к двум соседним граням правильного многогранника, восставленные в центрах этих граней, пересекаются в одной точке на расстоянии $a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ от своих оснований. Здесь a — апофема грани, а φ — двугранный угол этих граней. **1202.** Указание. а) Показать, что все прямые, соответствующие сторонам одной грани, проходят через некоторую точку прямой, соединяющей центр многогранника с центром этой грани; б) показать, что все прямые, соответствующие ребрам, исходящим из одной вершины P, лежат в плоскости, перпендикулярной OP, где O — центр многогранника. **1203.** Указание. Воспользоваться задачами 1201 и 1202. **1204.** Указание. Ввести в рассмотрение единичные векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, сонаправленные с ребрами трехгранного угла $SABC$ так, чтобы $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3>0$, и воспользоваться задачей 1028. **1206.** Указание. Воспользоваться задачей 1205. **1207.** Указание. а) Воспользовавшись задачей 1029, показать, что углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ однозначно определяются заданием углов $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$; б) этот случай свести к случаю а). Для этого, воспользовавшись задачей 1029, показать, что все соответствующие плоские углы данных трехгранных углов равны; в) и г) ввести в рассмотрение полярные трехгранные углы и, пользуясь задачей 1205 и утверждением б) или а), показать, что они равны; далее воспользоваться задачей 1206. **1208.** Указание. Воспользоваться задачей 1207. **1210.** Указание. Для того чтобы получить первое неравенство, следует рассмотреть число ребер каждого многогранного угла и все эти числа сложить; для вывода второго соотношения поступить аналогично с числом сторон каждой грани. **1211.** Указание. Если через l_3 и l_4 обозначить число трехгранных и четырехгранных углов многогранника, а через f_3 и f_4 — числа треугольных и четырехугольных граней, то предварительно показать, что $2k = 3l_3 + 4l_4$ и $2k = 3f_3 + 4f_4$, где k — число ребер. Далее воспользоваться теоремой Эйлера для многогранников. **1212.** Указание. Воспользоваться теоремой Эйлера для многогранников и предыдущей задачей. **1213.** а) $x^2+(y-1)^2+z^2=25$; б) $x^2+y^2+z^2=36$; в) $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$.

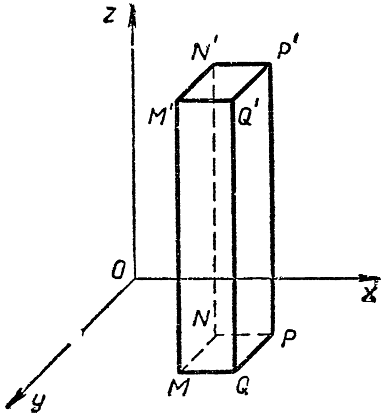


Рис. 72

1214. а) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$; б) $(x+4)^2+(y-7)^2+(z+9)^2=225$. **1216.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=4$. **1217.** а) $(-1, 0, 5)$, $R=2$; б) $(3, -4, -1)$, $R=4$; в) $(-6, 3, 0)$, $R=2\sqrt{2}$. **1218.** $(x^2+y^2+z^2+15)^2=64(x^2+y^2)$. Эта поверхность называется т о р о м. **1219.** $(x^2+y^2+z^2)^2=4r^2(x^2+y^2)$. **1220.** $z^4=100(x^2+y^2)$. **1221.** $z^2+25=10\sqrt{x^2+y^2}$. **1222.** а) $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; г) $x^2+z^2=2py$. **1223.** $z^2=\sin^2\sqrt{x^2+y^2}$. **1224.** а) Поверхность образована вращением кривой $\begin{cases} y^4+y^2+z=0 \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oz; б) поверхность образована вращением окружности радиуса 2 около хорды, стягивающей дугу 60°; в) однополостный гиперболоид, образованный вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy. **1225.** Поверхность представляет собой тор (см. задачу 1218). Сечение — две концентрические окружности с центром в начале координат: $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-49)=0$. **1227.** Однополостный гиперболоид. Р е ш е н и е. Ось Oz совместим с прямой l_1, а ось Oy направим вдоль общего перпендикуляра данных скрещивающихся прямых. В этой системе прямая l_2 имеет уравнения $y=a$, $x=kz$, где a — кратчайшее расстояние между прямыми. Согласно предыдущей задаче уравнение искомой поверхности имеет вид: $x^2+y^2-k^2z^2=a^2$. **1228.** а) Трехосный эллипсоид, оси которого лежат на осях координат; $a=5$, $b=4$, $c=2$; б) эллипсоид вращения с центром в точке $(-2, 0, 0)$, первая ось которого принадлежит оси Ox, а две другие параллельны соответствующим координатным осям; $a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2\sqrt{3}$; в) трехосный эллипсоид с центром в точке $(2, -1, 2)$, оси которого соответственно параллельны координатным осям; $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $c=3\sqrt{2}$; г) мнимая сферическая поверхность. **1229.** (Oxy) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, (Oyz) $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, (Oxz) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

1230. а) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$; в) $\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$.

1231. $4x^2+y^2+z^2=36$. **1232.** Р е ш е н и е. Пусть $x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$, $z=z_0+\gamma t$ (1) — параметрические уравнения произвольной касательной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Подставив выражения x, y, z в уравнение поверхности и потребовав, чтобы точки пересечения прямой с поверхностью совпали, приходим к соотношению $\frac{x_0\alpha}{a^2}\pm\frac{y_0\beta}{b^2}\pm\frac{z_0\gamma}{c^2}=0$. Отсюда следует, что прямая (1) параллельна плоскости $\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}\pm\frac{z_0z}{c^2}=1$ (2) (см. задачу 1072), а так как прямая (1) и плоскость (2) проходят через одну и ту же точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то прямая (1) принадлежит плоскости (2). Таким образом, любая прямая, касательная к поверхности и проходящая через точку M_0, лежит в плоскости (2). Отсюда следует, что плоскость (2) является касательной. **1233.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1232. **1234.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1232. **1235.** а) Однополостный гиперболоид, действительные оси которого совпадают с осями Ox и Oz, а мнимая ось — с осью Oy, $a=1$, $b=2$, $c=3$; б) двуполостный гиперболоид с центром в точке $(2, 1, -3)$, действительная ось которого параллельна оси Ox, а две другие— осям Oy и Oz; $a=2$, $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $c=2$; в) однополостный гиперболоид с центром в точке $(0, 0, -1)$, оси которого параллельны осям координат; $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$. **1236.** Эллипс $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$. **1237.** Две прямые $y-4=0$ и $y+4=0$.

1238. а) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2+y^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$. **1239.** $x^2+2y^2-3z^2+1=0$.

1240. Двуполостный гиперболоид, уравнение которого в данной системе координат имеет вид: $-\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1$. **1241.** а) Эллиптический параболоид с вершиной в начале координат, для которого координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии; $p=2$, $q=8$; б) эллиптический параболоид вращения с вершиной в точке $\left(0,\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$, ось вращения которого параллельна оси Oz; $p=q=1$; в) гиперболический параболоид, плоскости симметрии которого параллельны координатным плоскостям Oxz и Oyz; $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{4}$. **1242.** $4x^2+9y^2=36z$. **1243.** $x^2-3z^2=y$. **1244.** Два эллиптических параболоида вращения с осью l и вершинами в точке O пересечения прямой l и плоскости α; эти параболоиды симметричны относительно плоскости α. **1245.** Указание. Задача решается аналогично задаче 1232. **1246.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **1247.** Уравнения систем прямолинейных образующих:

$$\begin{cases} x+3\lambda y-z=3\lambda, \\ \lambda x-3y+\lambda z=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3\mu y-z=3\mu, \\ \mu x+3y+\mu z=3. \end{cases}$$

1248. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. **1250.** Гиперболический параболоид $3xz-2yz+2x-y=0$. Решение. Пусть $M\ (x,\ y,\ z)$ — произвольная точка искомого множества Ω, а $\boldsymbol{p}\ \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ — направляющий вектор прямой l, параллельной плоскости Oxy, на которой лежит точка M. Так как $\boldsymbol{p} \parallel Oxy$, то $p_3=0$. Принимая M за начальную точку прямой l, напишем ее уравнение $X=x+p_1t$, $Y=y+p_2t$, $Z=z$. Эта прямая пересекает данные прямые, поэтому

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Мы получили систему уравнений относительно p_1 и p_2:

$$\left.\begin{array}{l} yp_1-xp_2=0, \\ (y-3z-2)p_1+(-x+2z+1)\,p_2=0 \end{array}\right\}$$

Так как p_1 и p_2 одновременно не равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} y & -x \\ y-3z-2 & -x+2z+1 \end{vmatrix}=0,$$

или в развернутом виде

$$3xz-2yz+2x-y=0. \tag{1}$$

Итак, если точка $M\ (x,\ y,\ z)$ принадлежит множеству Ω, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Легко показать, что любая точка поверхности (1) принадлежит данному множеству Ω. **1251.** $xz+2y-2z=0$. **1252.** $20x^2+13y^2+25z^2-24xy-12xz-16yz-220x+190y-50z+641=0$. Решение. Все точки $M\ (x,\ y,\ z)$ круговой цилиндрической поверхности находятся на одинаковом расстоянии ρ от ее оси, где ρ — расстояние от точки $M_0\ (2,\ -1,\ 0)$ до данной прямой. Как известно, $\rho=\frac{|[\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\boldsymbol{p}|}$, где M_1 — данная точка, M_0 — начальная точка, а $\boldsymbol{p}$ — направляющий вектор прямой. Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что $\rho=3$. Для того чтобы точка $M\ (x,\ y,\ z)$ лежала на круговой цилиндрической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{|[\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{M_0M}]|}{|\boldsymbol{p}|}=3$. Подставив сюда координаты данных точек и вектора $\boldsymbol{p}$, после элементарных преобразований получаем уравнение поверхности. 1253. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0$. 1254. а) $(x-z)^2+2(x-z)y+3y^2-(x-z)=0$; б) $y^2-yz+5=0$; в) $\frac{(x+z)^2}{5}-\frac{(y+2z)^2}{4}=1$; г) $(x-1)^2+z^2=4$. 1255. $x^2+y^2=25$. 1256. $2x^2+(y+z)^2-18=0$. 1257. а) $(x-z)^2+y^2-y(1-z)=0$; б) $x^2+y^2-16(1-z)^2=0$. 1258. $x^2+y^2+7z^2-16xy-8xz-8yz+62x+44y-32z-11=0$. Решение. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на конической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{SM}$ составлял с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ данной плоскости угол $\Theta=90^\circ-\varphi=45^\circ$. Так как $\overrightarrow{SM}\{x-1, y-2, z-4\}$ и $\boldsymbol{n}\{2, 2, 1\}$, то $\cos\Theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2(x-1)+2(y-2)+(z-4)}{3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}}$. Отсюда получаем уравнение искомой поверхности. 1259. $27[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2]=4(2x+2y-z-3)^2$. 1260. а) $\frac{x^2}{20}+\frac{2y^2}{15}-\frac{6z^2}{5}=0$; б) $\frac{x^2}{2}+3z^2-xy+4xz-2yz=0$. 1261. $x^2\left(\frac{r}{a^2}-c\right)+y^2\left(\frac{r}{b^2}-c\right)-cz^2=0$. 1264. Коническая поверхность с центром в точке пересечения прямых l_1 и l_2, ось которой совпадает с прямой l_2. Указание. Вывести уравнение искомого множества точек в прямоугольной декартовой системе координат, две оси которой совпадают с прямыми l_1 и l_2. 1265. $r=n$; например, $\{1, 0, \ldots, 0\}$, $\{0, 1, \ldots, 0\}$, $\{0, 0, \ldots, 1\}$. 1266. $r=9$; например, девять матриц $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, \ldots, M_{33}$, где M_{ij} есть матрица третьего порядка, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен 1. 1267. Указание. Воспользоваться ответом задачи 1266 и обобщить на случай произвольного n. 1268. $r=1$; любое положительное число, отличное от 1. Нулевым вектором будет единица. 1269. Нет, так как существуют такие векторы $\boldsymbol{a}\not\subset\Omega$, $\boldsymbol{b}\not\subset\Omega$, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\subset\Omega$. 1270. Например, функции $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2, \ldots \ldots, f_k(x)=x^k, \ldots$ линейно независимы при любом k. 1271. $\boldsymbol{p}_1\{1, -6, 7, 2\}$, $\boldsymbol{p}_2\{1, 1, 8, 7\}$, $\boldsymbol{p}_3\{-2, -9, -3, 3\}$, $\boldsymbol{p}_4\left\{-\frac{7}{2}, \frac{13}{3}, -\frac{19}{6}, -4\right\}$. 1274. $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$. 1275. $\boldsymbol{x}\{3, 1, -1, 0\}$, $\boldsymbol{y}\{1, -1, 3, 4\}$. 1276. а) $r=3$; например, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{d}_1$; б) $r=2$; например, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{d}_2$; в) $r=3$; например, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{e}_3$; г) $r=2$, например, $\boldsymbol{a}_4$ $\boldsymbol{c}_4$. 1277. $r=\frac{n(n+1)}{2}$. Базисом могут служить матрицы $A_{ij}(i\leqslant j,\ i, j=1, 2, \ldots, n)$, у каждой из которых элементы a_{ij} и a_{ji} равны единице, а все остальные — нулю. Например, при $n=2$ имеем:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1278. $r=\frac{n(n-1)}{2}$. Базис образуют, например, матрицы A_{ij} $(i<j,\ i, j=1, 2, \ldots, n)$, у каждой из которых элемент a_{ij} равен единице, a_{ji} равен -1, а все остальные элементы равны нулю. Например, при $n=2$ базис состоит из одного вектора $A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 1279. а) Да; $r=n-1$. Базисом, например, служат следующие векторы: $\{1, -1, 0, \ldots, 0\}$, $\{1, 0, -1, \ldots, 0\}$, $\ldots$, $\{1, 0, \ldots, 0, -1, 0\}$, $\{2, 0, 0, \ldots, -1\}$; б) нет; в) да; $r=n-2$. Базис образует, например, векторы $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$, $\{0, 0, 1, \ldots, 0, 0\}$, $\{0, 0, 0, 1, \ldots, 0, 0\}$, $\ldots \ldots$, $\{0, 0, 0, \ldots, 1, 0\}$; г) да; $r=\left[\frac{n}{2}\right]$, где знак $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a. Базис образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Здесь $\boldsymbol{a}_i$ — вектор, у которого координата с номером $2i$ равна единице, а остальные равны нулю. Например, при $n=5$ имеем: $r=2$, а базисными будут следующие векторы: $\{0, 1, 0, 0, 0\}$, $\{0, 0, 0, 1, 0\}$; д) да; $r=2$. Базис образуют векторы $(1, 0, 1, 0 \ldots)$ и $(0, 1, 0, 1)$; е) нет. 1282. Пусть V_σ —

сумма, а V_π — пересечение подпространств. а) V_σ совпадает с R_3, а V_π — множество всех векторов, коллинеарных линии пересечения плоскостей π_1 и π_2; б) V_σ совпадает с множеством векторов, принадлежащих плоскости π_1, а V_π — с множеством векторов прямой l_3; в) V_π — совпадает с множеством всех векторов плоскости, параллельной прямым l_4 и l_5; V_π — нулевой вектор; г) V_σ совпадает с R_3, V_π — нулевой вектор. **1283.** Указание. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_\pi$ — базис подпространства V_π. Дополнить эти векторы до полного базиса пространства V_l: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_\pi, \boldsymbol{b}_{\pi+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_l$; далее дополнить те же векторы до полного базиса пространства V_k: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_\pi, \boldsymbol{c}_{\pi+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ и доказать, что система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_\pi, \boldsymbol{b}_{\pi+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_l, \boldsymbol{c}_{\pi+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ является базисом подпространства V_σ. Отсюда будет следовать, что $\sigma = \pi + (l - \pi) + (k - \pi) = l + k - \pi$.

1284. Указание. Использовать указание к задаче 1283. **1285.** Указание. а) Использовать результат задачи 1284, а также учесть задачу 1283; б) использовать задачу 1284 и, кроме того, показать, что векторы $\boldsymbol{p}_{s+1}, \boldsymbol{p}_{s+2}, \ldots, \boldsymbol{p}_e$ линейно независимы. Далее воспользоваться задачей 1283. **1286.** Пусть V_σ — сумма, а V_π — пересечение данных подпространств: а) V_σ — трехмерное пространство с базисом $\{-1, 0, -2, 3\}$, $\{1, 2, -5, 3\}$, $\{3, 1, 0, 1\}$; V_π — одномерное пространство, натянутое на вектор $\{0, 2, -7, 6\}$; б) V_σ совпадает с R_4, а V_π — одномерное подпространство, натянутое на вектор $\{1, 3, 12, -1\}$. **1287.** а) Базис суммы V_σ образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$, а базис произведения V_π состоит из одного вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$. Вектор $\boldsymbol{c}$ имеет координаты $\{3, 5, 1\}$; б) базис суммы образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1$, а базис произведения — вектор $\boldsymbol{b}_2 = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$; в) Базис суммы состоит, например, из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3$, а базис произведения, состоит например, из векторов $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{c}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$; $\boldsymbol{c}_1\{1, 2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{c}_2\{2, 2, 2, 2\}$. **1288.** а) Подпространство V_σ совпадает с V; базисными векторами являются, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$. Подпространство W_π совпадает с W; базисными векторами являются, например, векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$; б) подпространство V_σ совпадает с R_5; подпространство W_π содержит только **0**-вектор. **1290.** Указание. Воспользоваться задачей 1283. **1292.** Нет, так как, например, распределительное свойство не всегда выполняется. **1294.** а) -16; б) 12; в) 6; г) -39; д) 119. **1295.** $\widehat{\boldsymbol{ab}}$ — прямой; $\widehat{\boldsymbol{ac}}$ — тупой; $\widehat{\boldsymbol{ad}}$ — тупой; $\boldsymbol{bc}$ — острый; $\widehat{\boldsymbol{bd}}$ — тупой; $\widehat{\boldsymbol{cd}}$ — прямой. **1296.** Указание. Использовать тождество $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{xx} + 2\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yy}$. **1297.** Записать линейную зависимость данных векторов в виде $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = 0$ и умножить скалярно это соотношение соответственно на $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. **1298.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **1300.** Указание. Сначала показать, что $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ — ненулевые векторы, далее показать, что $\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j = 0$, если $i \neq j$. Для последнего применить метод математической индукции. **1301.** Например: а) $\{-1, 8, 5, 0\}$, $\{4, -2, 4, 3\}$; б) $\{3, 0, -1, 0\}$, $\{1, 0, 3, -2\}$. Указание. Можно воспользоваться задачей 1300. **1304.** Двумерное подпространство, натянутое на векторы: а) $\{1, -1, 1, -1\}$, $\{2, -2, 0, 0\}$; б) $\{3, 0, 3, -2\}$, $\{0, 3, 9, -4\}$. **1305.** Указание. Рассмотреть ортогональное дополнение пространства V_k и использовать задачу 1302. **1307.** а) $O\,(0, 0, 0, 0)$, $E_i(\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3; \delta_i^4)$; б) середина отрезка OE_i имеет координаты $\left(\frac{1}{2}\delta_i^1, \frac{1}{2}\delta_i^2, \frac{1}{2}\delta_i^3, \frac{1}{2}\delta_i^4\right)$. Середины остальных отрезков имеют координаты E_1E_2: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$; E_2E_3: $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\right)$; E_3E_4: $\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; E_4E_1: $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$; E_1E_3: $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Здесь $\delta_i^j = 1$, если $i = j$, и $\delta_i^j = 0$, если $i \neq j$. **1308.** $M_1\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$, $M_2\left(1, \frac{3}{2}, 1, -2\right)$, $M_3\left(-1, -\frac{3}{2}, 5, -6\right)$. **1310.** Если $P\,(y_1,$

$y_2, \dots, y_n)$, то $y_i = \dfrac{m_1x_{1i} + m_2x_{2i} + \dots + m_kx_{ki}}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Замечание. Ср. с задачей 52. **1311.** $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{41}{12}, \frac{7}{3}\right)$. **1312.** Если $P(y_1, y_2, \dots, y_n)$— центроид точек $M_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, $M_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$, ..., $M_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, то $y_i = \dfrac{x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{ki}}{k}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Указание. Воспользоваться задачей 1310. **1314.** $O(0, 0, \dots, 0)$, $E_1(1, 0, \dots, 0)$, $E_2(0, 1, \dots, 0)$, ..., $E_n(0, 0, \dots, 1)$, $M_0\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$. **1315.** Указание. Ввести в рассмотрение систему координат и, пользуясь задачей 1312, показать, что общей точкой рассматриваемых отрезков будет центроид вершин. **1316.** 4-параллелепипед имеет 16 вершин: $A_0(0, 0, 0, 0)$, $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 1)$, $A_{12}(1, 1, 0, 0,)$, $A_{13}(1, 0, 1, 0)$, $A_{14}(1, 0, 0, 1)$, $A_{23}(0, 1, 1, 0)$, $A_{24}(0, 1, 0, 1)$, $A_{34}(0, 0, 1, 1)$, $A_{123}(1, 1, 1, 0)$, $A_{124}(1, 1, 0, 1)$, $A_{134}(1, 0, 1, 1)$, $A_{234}(0, 1, 1, 1)$, $A_{1234}(1, 1, 1, 1)$. **1317.** Указание. Дополнить векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ до полного базиса и вычислить координаты всех вершин данного m-параллелепипеда в системе $A_0\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n$ (см. задачу 1316). Показать, что серединой каждой диагонали является точка с координатами $x_1 = x_2 = \dots = x_m = \frac{1}{2}$, $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$. **1319.** $A_{135}(3, -1, 4, 4, 1)$, $A_{1235}(3, 0, 4, 4, 1)$, $A_{1345}(3, -1, 4, 5, 1)$, $A_{35}(2, -1, 4, 4, 1)$, $A_{15}(3, -1, 3, 4, 1)$, $A_{13}(3, -1, 4, 4, 0)$. Векторы, соединяющие вершину A_{135} со смежными вершинами, равны $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4$, $-\boldsymbol{e}_1$, $-\boldsymbol{e}_3$, $-\boldsymbol{e}_5$. **1320.** Указание. Пусть $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ — некоторая вершина $(m-1)$-параллелепипеда $[M_0\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{i-1}\,\boldsymbol{a}_{i+1} \dots \boldsymbol{a}_m]$ (относительно обозначений см. задачу 1316). Если $i_1 < i_2 < \dots i_{s-1} < i < i_s < \dots < i_k$, то показать, что эта вершина является серединой стороны $A_{i_1 i_2 \dots i_k} A_{i_1 i_2 \dots \dots i_{s-1} i i_s \dots i_k}$ исходного m-параллелепипеда. **1321.** а) $\sqrt{122}$; б) 7; в) $\sqrt{38}$. **1322.** $\rho_1 = \sqrt{17}$, $\rho_2 = \sqrt{30}$, $\rho_3 = 5$, $\rho_4 = 5$, $\rho_5 = \sqrt{26}$. **1323.** Указание. Показать, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **1324.** $\cos\alpha_1 = \frac{2}{7}$, $\cos\alpha_2 = 0$, $\cos\alpha_3 = -\frac{3}{7}$, $\cos\alpha_4 = \frac{6}{7}$. **1326.** $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $\rho = \frac{\sqrt{n}}{2}$. **1327.** Указание. а) Воспользоваться задачей 1318, б). **1328.** Квадрат и обычный куб. Указание. Воспользоваться задачей 1318. **1329.** $\sqrt{k}\,a$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{k}}$. **1330.** Центр совпадает с серединой любой диагонали; $\rho = \frac{\sqrt{n}\,a}{2}$. Указание. Воспользоваться задачами 1317 и 1329. **1331.** Если векторы $\boldsymbol{e}'_i$ имеют координаты[1] $\boldsymbol{e}'_i\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}, \alpha_{i5}\}$, то $x_i = \sum_{i=1}^{5} \alpha_{ji} y_j$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. **1332.** $x_1 = 2y_1 + y_3 - y_4$, $x_2 = -3y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4$, $x_3 = y_1 - 2y_2 + 2y_3 - y_4$, $x_4 = y_1 - y_2$. **1333.** Если O' имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то $y_i = x_i - \alpha_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$. **1334.** Если в $\widetilde{R}_n \boldsymbol{e}'_i$ и O' имеют координаты $\boldsymbol{e}'_i\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}\}$, $O'\{\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0n}\}$, то $x_i = \sum \alpha_{ji} y_j + \alpha_{0i}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. **1335.** а) $\boldsymbol{e}'_1\{1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{e}'_2\{-3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{e}'_3\{1, 0, 0\}$,. $O'(0, 0, 1)$; б) $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $O'(1, -1, 5, 0)$; в) $\boldsymbol{e}'_1\{1, 0, \dots, 0\}$, $\boldsymbol{e}'_2\{1, 1, 0, \dots, 0\}$, ..., $\boldsymbol{e}'_n\{1, 1, \dots, 1\}$, $O'(1, 2, 3, \dots, n)$. **1336.** $x_1 = y_2$, $x_2 = -y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 1$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$. **1337.** Нет, так как опреде-

[1] В задачах 1331 — 1341 $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координаты — точки или вектора в старой системе координат, $y_1, y_2, \dots, y_n$ координаты точки или вектора в новой системе.

литель, составленный из коэффициентов при переменных y^i, равен нулю. **1338.** а), б) и г). **1339.** а) Да; б) нет. **1340.** Да. **1341.** $x_1 = -y_3+1$, $x_2 = y_1$, $x_3 = -y_4+1$, $x_4 = y_2$, $x_5 = -y_5+1$. Так как матрица коэффициентов при y_i ортогональная, то новая система координат прямоугольная декартова. **1343.** б) и в). **1344.** M_1, M_4 и p_2. **1345.** M_2, M_3 и p_3. **1346.** $E_m, E_{m+1}, \ldots, E_n$; $e_m - e_n$, $e_{m+1} - e_n$, …, $e_{n-1} - e_n$. **1347.** $(Ox_1): x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $(Ox_2): x_1 = x_3 = x_4 = 0$; $(Ox_3): x_1 = x_2 = x_4 = 0$; $(Ox_4): x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $(Ox_1x_2x_3): x_4 = 0$; $(Ox_1x_2x_4): x_3 = 0$; $(Ox_1x_3x_4): x_2 = 0$; $(Ox_2x_3x_4): x_1 = 0$. **1348.** Π_2; $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$. **1349.** Π_3; $x_1 - x_2 + x_4 + 2 = 0$. **1350.** Π_2; $x_3 = -1$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. **1351.** Π_1; $x_1 = 3t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 3-3t$, $x_4 = 4-3t$, $x_5 = 1$. **1352.** Π_{n-1}; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. **1353.** Координатная k-плоскость: $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$. **1354.** Доказательство. Пусть $M_1 M_2, \ldots, M_{k+2}$ лежат в плоскости $\Pi_s = \{M_1, V_s\}$, где $s \leqslant k$. По определению имеем: $\overrightarrow{M_1M_2} \subset V_s$, $\overrightarrow{M_1M_3} \subset V_s$, …, $\overrightarrow{M_1M_{k+2}} \subset V_s$, т. е. $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_{k+2}}$ линейно зависимы:

$$\alpha_2\overrightarrow{M_1M_2} + \ldots + \alpha_{k+2}\overrightarrow{M_1M_{k+2}} = 0, \qquad (1)$$

или

$$\alpha_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \alpha_3(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) + \ldots + \alpha_{k+2}(\boldsymbol{r}_{k+2} - \boldsymbol{r}_1) = 0. \qquad (2)$$

Если обозначить через α_1 число $-\alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_{k+2}$, то получим искомый результат. Теперь докажем обратное утверждение. Из условия задачи следует, что $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 \ldots - \alpha_{k+2}$, причем хотя бы одно из чисел $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k+2}$ отлично от нуля. Подставив это значение в соотношение $\alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \alpha_{k+2}\boldsymbol{r}_{k+2} = 0$, получаем (2) или (1). Пусть, например, $\alpha_2 \neq 0$, тогда из соотношения (1) получим:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\overrightarrow{M_1M_3} - \frac{\alpha_4}{\alpha_2}\overrightarrow{M_1M_4} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_2}\right)\overrightarrow{M_1M_{k+2}}.$$

Если V_s — подпространство, натянутое на векторы $\overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_{k+2}}$, то это соотношение показывает, что $M_2 \subset \{M_1, V_s\}$. Очевидно, $s \leqslant k$. **1355.** Указание. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты точки M, то $x_1 = \dfrac{\alpha_1 + \lambda\beta_1}{1+\lambda}$, $x_2 = \dfrac{\alpha_2 + \lambda\beta_2}{1+\lambda}$, …, $x_n = \dfrac{\alpha_n + \lambda\beta_n}{1+\lambda}$. Далее воспользоваться условием $M \subset \Pi_{n-1}$. **1356.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы гиперплоскость Π_{n-1} имела уравнение $x^n = 0$. И, пользуясь задачей 1355, определить отношения, в которых гиперплоскость Π_{n-1} делит отрезки AB, BC, и CA. **1357.** $I = 0$; пересекаются в единственной точке (1, 2, 0, 0). **1358.** $I = 1$; плоскости полностью параллельны. **1359.** $I = 0$; плоскости скрещиваются. **1360.** $I = \frac{2}{3}$; пересекаются по плоскости $\Pi_2: x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$. **1361.** $I = 1$; гиперплоскости полностью параллельны. **1362.** $I = \frac{1}{2}$; плоскости частично параллельны. **1363.** Указание. Доказательство провести рассуждением от противного. **1364.** Указание. Ввести в рассмотрение систему координат так, чтобы первые m векторов системы принадлежали плоскости Π_m, а остальные—подпространству V_{n-m}, и воспользоваться задачей 1312. **1365.** Указание. Предварительно показать, что базисы данных плоскостей, вместе взятых, образуют базис всего пространства. Доказательство единственности разложения провести рассуждением от противного. **1366.** Указание. Для доказательства первой части теоремы рассмотреть плоскость $\{A_0, V_\sigma\}$, где A_0 — одна из точек пересечений, а V_σ — сумма подпространств данных плоскостей Π_1 и Π_2, и доказать, что эта плоскость является объединением данных плоскостей. Для доказательства второй части предварительно показать, что если $M_1 \subset \Pi_1$, а $M_2 \subset \Pi_2$, то $\overrightarrow{M_1M_2} \subset V_\sigma$. **1367.** а) $\frac{12}{7}$; б) $\frac{35}{9}$; в) 0; г) $\frac{11}{8}$. **1368.** $d = \dfrac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$. **1369.** а) 4; б) 12. **1370.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Указание. Записать уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $E_1, E_2, \dots, E_n$ и вычислить расстояние от начала координат до этой плоскости. **1374.** а) $2x_1+4x_2-x_4-9=0$; б) $(1, 2, 0, 1)$; в) $\sqrt{30}$. **1375.** а) $x_3-x_4=-1$, $x_1+2x_2=0$; б) $(0, 0, 0, 1)$; в) $\sqrt{13}$. **1376.** Указание. б) если A и B — две из данных точек, то систему координат выбрать так, чтобы точка A была началом, а вектор $\overrightarrow{AB}$ — первым координатным вектором. **1380.** Указание. Если V_k и V_l — подпространства плоскостей Π_k и Π_l, а V_σ — сумма этих подпространств, то сначала показать, что $\sigma=n-1$. Далее взять ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$, ортогональный V_σ, и показать, что подпространство V_{k+1}, содержащее V_k и $\boldsymbol{p}$, является подпространством искомой плоскости. **1381.** а) $(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2+\dots+(x_n-x_{0n})^2=\rho^2$; б) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j})=\rho^2$. Указание. Сначала показать, что векторное уравнение данной гиперсферы имеет вид: $(r-r_0)(r-r_0)=\rho^2$. Далее воспользоваться задачей 1299. **1382.** а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4x_1-6x_3+2x_4-11=0$; б) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4=0$; в) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1-6x_4+9=0$. **1383.** а) $(0, 0, 7, 0)$, $\rho=7$; б) $(2, -1, 0, -3)$, $\rho=5$; в) $(5, 0, -1, 0, 1)$, $\rho=1$; г) $(2, 0, 1, -1, 3)$, $\rho=2$; д) $(1, 2, 3, \dots, n)$, $\rho=4$. Указание. Воспользоваться формулой $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$.

1384. Гиперсфера, центр которой лежит на прямой AB. **1385.** $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2-x_1-x_2-\dots-x_n=0$. Указание. Воспользовавшись задачей 1314, найти координаты всех вершин данного симплекса, а далее использовать задачу 1381, а). **1386.** Указание. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n$ — данные точки. В системе координат $Oe_1e_2\dots, e_n$, где $e_i=\overrightarrow{A_0A_i}$, пользуясь задачей 1381, записать уравнение искомой сферической гиперповерхности в виде $\sum\limits_{ij} g_{ij}(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j})=\rho^2$. Далее, пользуясь условиями задачи, показать, что $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ и ρ определяются однозначно. **1387.** а) $a_{11}=3$, $a_{22}=a_{33}=1$, $a_{13}=a_{31}=1$, $a_{12}=a_{21}=1$, $a_{23}=a_{32}=2$, $r=3$; б) $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{13}=a_{31}=a_{24}=a_{42}=0$, остальные элементы равны единице, $r=2$; в) $a_{11}=3$, $a_{22}=-1$, $a_{33}=1$, $a_{44}=5$, остальные элементы равны нулю, $r=4$; г) $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{21}=a_{31}=a_{41}=\frac{1}{2}$, остальные элементы равны нулю, $r=3$; д) $a_{11}=1$, $a_{22}=4$, $a_{12}=a_{21}=2$, $r=1$. **1388.** а) $3x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_3+x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2+x_1y_2+x_2y_1$; б) $x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_4+x_4y_3+x_4y_1+x_1y_4$; в) $3x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3+5x_4y_4$; г) $x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}x_2y_1+\frac{1}{2}x_1y_3+\frac{1}{2}x_3y_1+\frac{1}{2}x_1y_4+\frac{1}{2}x_4y_1$; д) $x_1y_1+4x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1$. **1389.** а) Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **1390.** а) $a_{ij}=0$, если $i<n$ и $j<n$; б) $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=0$. **1391**[1]. $y_1^2+y_2^2$; $y_1=3x_1-x_2$, $y_2=2x_2$. **1392.** $y_1^2-y_2^2$; $y_1=x_1-3x_2+x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$. **1393.** y_1^2; $y_1=x_1+2x_2-x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$. **1394.** $y_1^2-y_3^2+y_4^2$; $y_1=2x_1+x_2+x_3+x_4$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3+x_4$, $y_4=x_4$. **1395.** $y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2-y_5^2$, $y_1=2x_1+x_2+x_5$, $y_2=2x_2+2x_4$, $y_3=2x_3-3x_4$, $y_4=x_4+x_5$, $y_5=x_5$. **1397.** (1391) 2; (1392) 0; (1393) 1; (1394) 1; (1395) 1; (1396) а), б) в) 3. **1398.** $\lambda_1=0$, $\{1, 2, 1\}$; $\lambda_2=6$, $\{1, 0, -1\}$; $\lambda_3=-6$, $\{1, -1, 1\}$. **1399.** $\lambda_1=\lambda_2=0$, подпространство, натянутое на векторы $\{1, -1, 0\}$, $\{1, 1, -1\}$; $\lambda_3=6$, $\{1, 1, 2\}$. **1400.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$, трехмерное подпространство: $p_1-p_2-p_3+p_4=0$; $\lambda_4=-\frac{3}{2}$, $\{1, -1, -1, 1\}$. **1401.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=5$, трехмерное подпространство, определяемое соотношениями: $2p_2+p_3=0$, $-3p_4+2p_5=0$; $\lambda_4=-8$, $\{0, 0, 0, 3, -2\}$; $\lambda_5=0$, $\{0, 2, 1, 0, 0\}$. **1402.** $\lambda_1=3$, e_1; $\lambda_2=4$, e_2; $\lambda_3=-1$, e_3;

$\lambda_4 = 1$; e_4; $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$, $\alpha e_5 + \beta e_6$, где $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ — данный базис, а α и β — произвольные числа, не равные одновременно нулю. **1403.** $50y_1^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}(y_1 + 7y_2)$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}(-7y_1 + y_2)$. **1404.** $3y_1^2 + 9y_2^2 + 6y_3^2$; $x_1 = \frac{y_1 + 2y_2 + 2y_3}{3}$, $x_2 = \frac{2y_1 - 2y_2 + y_3}{3}$, $x_3 = \frac{2y_1 + y_2 - 2y_3}{3}$. **1405.** $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 - 2x_3)$, $y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$. **1406.** $y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$; $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $y_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$. **1407.** $4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 - 6y_4^2 - 6y_5^2$; $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 + 2y_4)$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2y_2 + y_4)$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_3 + 3y_5)$, $x_5 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3y_2 - y_5)$.
1409. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **1410.** а) $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$; остальные коэффициенты равны нулю; б) $a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0$; в) $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{kk}$, $a_{ij} = 0$, где $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а $j = 1, 2, \ldots, n$. **1411.** а) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$; б) данная прямая является прямолинейной образующей. Указание. Записать параметрические задания прямых. **1412.** Квадрика пересекает гиперплоскость $Ox_1x_2x_3$ по эллипсоиду, а остальные координатные гиперплоскости — по однополостному гиперболоиду.

1413. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0, \\ x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2 = 0. \end{cases}$

1414. Указание. Систему координат $Oe_1e_2 \ldots e_n$ выбрать так, чтобы $\Pi_m \equiv \{O, e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Записать в этой системе координат уравнение квадрики G. **1415.** а) $a_{11} = 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, ..., $a_{nn} > 0$ или $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, ..., $a_{nn} < 0$; б) $a_{ii} > 0$ или $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. **1416.** Два асимптотических направления $\{1, 1\}$ и $\{1, -1\}$, $\sigma = 0$. **1417.** Имеется только одно асимптотическое направление $\{-4, 3\}$, $\sigma = 0$. **1418.** Асимптотические направления определяются из условия $p_1^2 + 2p_3^2 = 0$, $\sigma = 0$. Векторов квадрики не существует. **1419.** Асимптотические направления определяются из условия $2p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2 = 0$. $\sigma = 1$. Асимптотическое подпространство определяется вектором $\{0, 0, 1\}$. 1-цилиндрическая квадрика. **1420.** Асимптотические направления определяются из условия $p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 - 2p_3^2 - 2p_4^2 - 4p_3p_4 = 0$, $\sigma = 1$. Асимптотическое подпространство определяется вектором $\{1, -1, 0, 0\}$. 1-цилиндрическая квадрика. **1421.** 1-цилиндрическая квадрика. **1422.** 2-цилиндрическая квадрика. **1423.** 3-цилиндрическая квадрика. **1424.** Одна вершина $(1, 0, 0)$. **1425.** Двумерная плоскость вершин: $x_1 + x_4 - 1 = 0$, $x_2 - 3 = 0$. **1426.** Двумерная плоскость вершин: $x_1 - x_2 + x_5 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$, $x_1 + 2x_4 + x_5 = 0$. **1427.** Однополостный гиперболоид: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4 = 0$. **1428.** Две параллельные плоскости: $y_1^2 - 2 = 0$. **1429.** Эллипсоид: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1 = 0$. **1430.** Параболоид: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4 = 0$. **1431.** Пара пересекающихся гиперплоскостей: $y_1^2 - y_3^2 = 0$. **1432.** 2-цилиндрическая квадрика: $y_1^2 + y_2^2 - y_3 = 0$. **1433.** Указание. Сначала показать, что множество G_p всех точек пространства $\tilde{R}_n$, принадлежащих всем асимптотам или прямолинейным образующим направления p, определяется уравнением $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ip_i = 0$. Так как по условию б) не все координаты при $x_1, \ldots, x_n$ равны нулю, то этим уравнением определяется гиперплоскость. **1434.** а) $x_1 + 5x_2 - x_3 + 5 = 0$; б) $x_2 - x_3 = 0$; в) $x_2 + x_4 = 0$. **1435.** $6x_2 - 1 = 0$. **1436.** $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$. Указание. Использовать центр

[1] Ответы к задачам 1391—1395 неоднозначны.

квадрики. **1437.** $3x_1+5x_2+2x_3+2=0$. **1438.** $x_1-x_2-x_3=0$. **1439.** $38x_1+$ $+39x_2-20x_3-1=0$. **1440.** $x_1-2x_2=0$. **1441.** а) $x_1+3x_2-x_3-1=0$; б) $4x_1+x_2+x_3+x_4-2=0$. Решение. а) Найдем координаты вектора $\boldsymbol{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, сопряженного искомой диаметральной плоскости: $\frac{a_{11}a_1+a_{12}a_2+a_{13}a_3}{A}=\frac{a_{21}a_1+a_{22}a_2+a_{23}a_3}{B}=\frac{a_{31}a_1+a_{32}a_2+a_{33}a_3}{C}$. Для данной задачи получаем: $\frac{6a_1+3a_2+2a_3}{1}=\frac{3a_1+9a_2}{3}=\frac{-2a_1+a_3}{-1}$,

отсюда будем иметь: $\boldsymbol{a}\{2, -1, 5\}$. Записав уравнение диаметральной гиперплоскости, сопряженной вектору $\boldsymbol{a}$, получим искомый результат. **1442.** Решение. Пусть $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — вектор, который сопряжен диаметральной плоскости Ox_1x_2. Задача сводится к тому, чтобы подобрать такие α, β, γ, для которых

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha+a_{21}\beta+a_{31}\gamma&=0,\\ a_{12}\alpha+a_{22}\beta+a_{32}\gamma&=0,\\ a_{13}\alpha+a_{23}\beta+a_{33}\gamma&\neq 0,\\ a_{14}\alpha+a_{24}\beta+a_{34}\gamma&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $P=(a_{11}\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma)\alpha+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta+a_{23}\gamma)\beta+(a_{31}\alpha+a_{32}\beta+$ $+a_{33}\gamma)\gamma\neq 0$. Последнее условие означает, что вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ не имеет асимптотического направления. Из соотношений (1) следует, что условие $P\neq 0$ равносильно условию $\gamma\neq 0$. Разделив уравнение (1) на γ и обозначив $\frac{\alpha}{\gamma}=p$, $\frac{\beta}{\gamma}=q$, получаем:

$$a_{11}p+a_{21}q+a_{31}=0, \tag{2}$$

$$a_{12}p+a_{22}q+a_{32}=0, \tag{3}$$

$$a_{14}p+a_{24}q+a_{34}=0, \tag{4}$$

$$a_{13}p+a_{23}q+a_{33}\neq 0. \tag{5}$$

Таким образом, плоскость Oxy является одной из диаметральных плоскостей тогда и только тогда, когда существует такое число $A\neq 0$, что система

$$a_{11}p+a_{21}q+a_{31}=0, \qquad a_{12}p+a_{22}q+a_{32}=0,$$
$$a_{14}p+a_{24}q+a_{34}=0, \qquad a_{13}p+a_{23}q+a_{33}-A=0$$

имеет хотя бы одно решение, т. е. совместна. Мы пришли к следующему выводу: для того чтобы плоскость Ox_1x_2 была одной из диаметральных плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $A\neq 0$, чтобы ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\\ a_{14} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-A\end{pmatrix}$$

совпадали. **1443.** а) Да; например, пара параллельных гиперплоскостей $x_1^2-1=0$. Эта квадрика имеет единственную диаметральную гиперплоскость $x_1=0$; б) все диаметральные гиперплоскости проходят через $(n-2)$-мерную плоскость пересечения данной пары гиперплоскостей. **1444.** а) $(1, 1, -1)$; б) $(0, 2, -2)$; в) $\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$. **1445.** а) Прямая центров: $3x_1-2x_2=0$, $x_2-3x_3+6=0$; б) нет центров; в) единственный центр $(0, 0, 0)$; г) плоскость центров: $x_1+4x_2-4x_3+5=0$. **1446.** а) $\left(1, 0, 3, -\frac{1}{2}\right)$; б) $(0, 0, 0, 1)$; в) $(0, 0, 0, 0, 0)$. **1447.** а) Прямая центров: $4x_1+$ $+2x_4+1=0$; $x_2=0$, $x_3=0$; б) трехмерная плоскость: $x_1-2x_2=0$, $x_3+2x_4-2=$ $=0$; в) гиперплоскость: $x_1-x_2+x_5=0$. **1449.** Уравнение квадрики имеет вид: $x_n^2+\alpha=0$. **1450.** $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$; $a_{ii}=a_{i1}=0$, $i=1, 2, \ldots, n$. **1451.** а) Главные диаметральные плоскости: $2x_1+2x_2-1=0$, $3x_1-3x_2+3x_3-$ $-4=0$, $6x_1-6x_2-12x_3-7=0$; оси:

$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 - 12x_3 - 7 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x_1 - 6x_2 - 12x_3 - 7 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4 = 0; \end{cases}$

б) главные диаметральные плоскости: $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7 = 0$, $x_1 = -2x_2\ x_3 + 5 = 0$; ось $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0; \end{cases}$

в) главные диаметральные плоскости: $x_1 - x_3 - 1 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; ось:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 1 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$$

г) главные диаметральные плоскости: $x_1 + x_2 = 0$, $3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 1 = 0$, $3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5 = 0$, оси:

$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 1; \end{cases}$

д) главные диаметральные плоскости: $x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$, $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 = 0$; ось: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 = 0. \end{cases}$

1452. $y_2^2 + y_3^2 = 4$; $x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{6}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} - \frac{y_3}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{2y_1}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \frac{y_1}{\sqrt{6}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}} - \frac{y_3}{\sqrt{3}}$. **1453.** $\frac{y_1^2}{15} + \frac{y_2^2}{5} - \frac{y_3^2}{3} = 1$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}\,y_1 + \sqrt{2}\,y_2}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}\,y_2 - \sqrt{2}\,y_1}{2}$, $x_3 = y_3$. **1454.** $y_1^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{3} y_2$; $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{y_2 - 2y_3}{\sqrt{5}}$, $x_3 = \frac{-2y_2 - y_3}{\sqrt{5}}$. **1455.** $\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{6} = 1$ $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -2)$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_2$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$. **1456.** $\frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{9} = 1$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_3 = y_3$. **1457.** $5y_2^2 + 2\sqrt{13}\,y_1 = 0$; $x_1 = \frac{2y_1 + 3y_3}{\sqrt{13}}$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \frac{3y_1 - 2y_2}{\sqrt{13}}$. **1458.** $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} = 1$; $x_1 + x_2 = \sqrt{2}\,y_1$, $x_1 - x_2 + x_3 = \sqrt{3}\,y_2$, $x_1 - x_2 - 2x_3 = \sqrt{6}\,y_3$. **1459.** $3y_3^2 = 4$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$; $x_1 + x_2 = \sqrt{2}\,y_1$, $x_1 - x_2 - 2x_3 = \sqrt{6}\,y_2$, $x_1 - x_2 + x_3 = \sqrt{3}\,y_3$. **1460.** $-\frac{y_1^2}{12} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{6} = 1$. **1461.** $3y_1^2 - 2y_3^2 = 2y_2$. **1462.** $\frac{y_1^2}{14} + \frac{y_2^2}{28} + \frac{y_3^2}{7} = 1$. **1463.** $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} = 2y_3$. **1464.** $-\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_3^2}{1} = 2y_2$. **1465.** $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 = 0$. **1466.** $y_1^2 - 3y_2^2 = 0$. **1467.** $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{1} + \frac{y_3^2}{5} = -1$. **1468.** $y_1^2 - 5 = 0$. **1469.** $\frac{y_1^2}{15} + \frac{y_2^2}{5} + \frac{y_3^2}{10} = 1$. **1470.** $y_1^2 = -\frac{\sqrt{5}}{3} y_2$. **1471.** $\frac{y_1^2}{3} - \frac{y_3^2}{3} = 2y_2$. **1472.** $y_1^2 + y_3^2 = 2y_2$. **1473.** $\frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{2} = 1$. **1474.** $y_2^2 = \frac{2}{\sqrt{5}} y_3$. **1475.** $-\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{6} - \frac{y_3^2}{6} = 1$. **1476.** $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{1} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968.
2. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. Атанасян Л. С. Аналитическая геометрия. М., «Просвещение», т. I, 1967, т. II, 1970.
4. Атанасян Л. С. Геометрия, ч. I. М., «Просвещение», 1973.
5. Атанасян Л. С. Основы многомерной геометрии. М., изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1963.
6. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. М., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия, изд. 3. М., «Просвещение», 1965.
7. Болтянский В. Г. и Яглом И. М. Преобразования. Векторы. М., «Просвещение», 1964.
8. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике, изд. 9. М., «Наука», 1969.
9. Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1963.
10. Делоне Б. Н. и Райков Д. А. Аналитическая геометрия. М.—Л., Гостехиздат, т. I, 1948, т. II, 1949.
11. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. М., Гостехиздат, 1948.
12. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии, изд. 10. М., «Наука», 1969.
13. Ефимов Н. В. Квадратические формы и матрицы.
14. Лопшиц А. М. Аналитическая геометрия. М., Учпедгиз, 1948.
15. Люстерник Л. А. Выпуклые тела. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
16. Минорский В. П. и Улановский В. П. Векторная алгебра. М., Гостехиздат, 1951.
17. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. М., изд-во МГУ, 1955.
18. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1947.
19. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. М.—Л., Гостехиздат, т. I, 1948, т. II, 1949.
20. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966.
21. Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, «Вышэйная школа», 1968.
22. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М.—Л., 1952.
23. Яглом И. М. и Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
24. Энциклопедия элементарной математики, т. IV. Геометрия. М., Физматгиз, 1963.
25. Адамов А. А. Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению. 1924.
26. Атанасян Л. С., Атанасян В. А. Сборник задач по аналитической геометрии. М., «Просвещение», 1968.
27. Атанасян Л. С., Васильева М. В., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Козьмина Т. Л., Редозубова О. С. Сборник задач по элементарной геометрии, изд. 2. М., «Просвещение», 1964.
28. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии, изд. 3. М., «Наука», 1964.
29. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. М., Гостехиздат, 1957.
30. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.
31. Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по элементарной геометрии. М., Учпедгиз, 1962.
32. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии, изд. 29. М., «Наука», 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел второй

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ, ПЛОСКОСТИ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВЫХ И АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Левон Сергеевич Атанасян, Вера Алексеевна Атанасян

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть 1

Редактор *В. Г. Долгополов*. Художник *Б. Л. Николаев*. Художественный редактор *Е. Н. Карасик*. Технический редактор *Л. Я. Медведев*. Корректор *Р. Б. Штутман*.

Сдано в набор 6/IX 1972 г. Подписано к печати 8/VI 1973 г. $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типогр. № 2. Печ. л., 16,0. Уч.-изд. л. 18,89. Тираж 85 тыс. экз. А07092.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского полиграфкомбината на Калининском полиграфкомбинате детской литературы Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Калинин, проспект 50-летия Октября, 46. Заказ № 290. Цена без переплета 53 к., переплет 10 к.