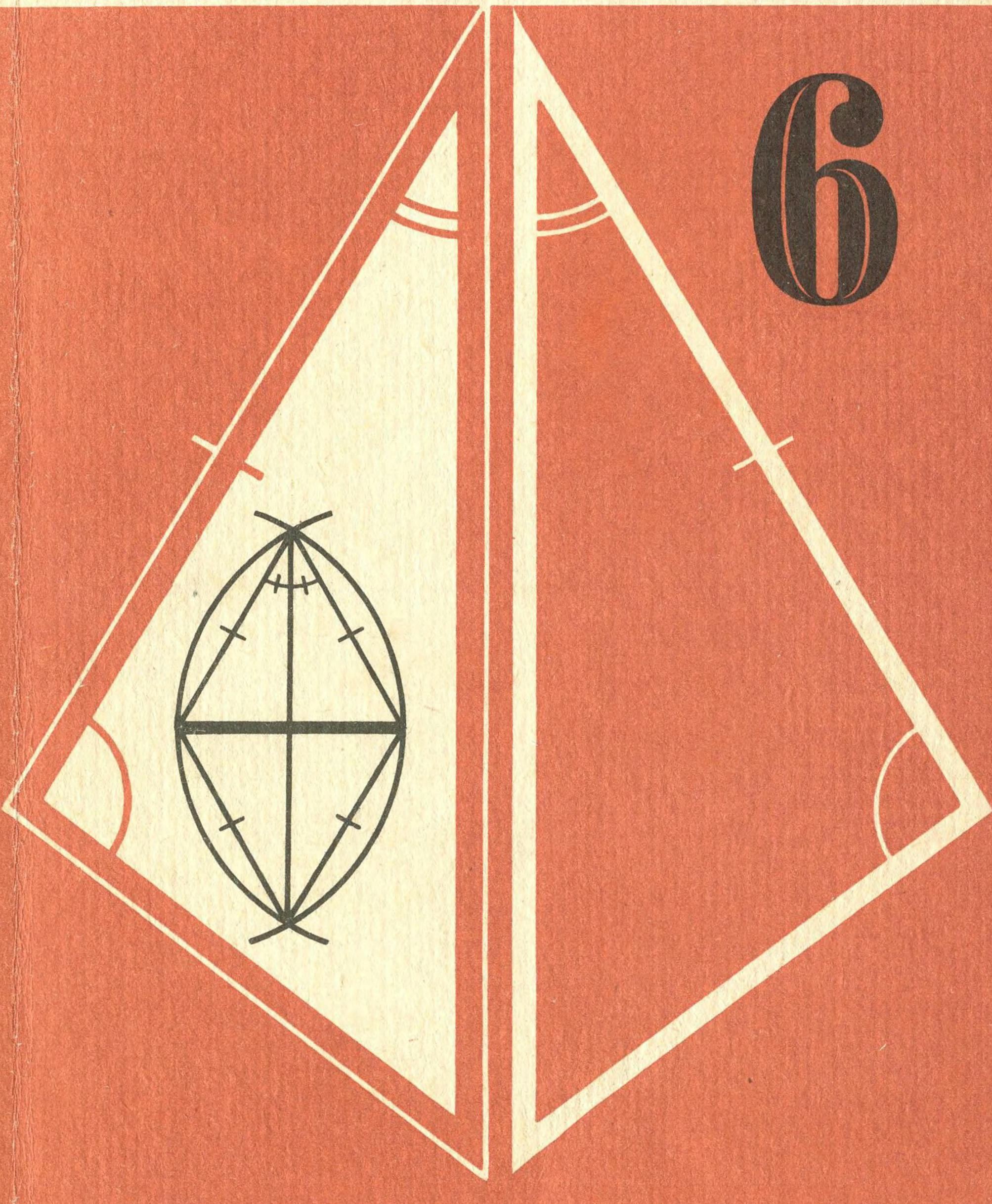
А. Д. АЛЕКСАНДРОВ, А. Л. ВЕРНЕР, В. И. РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

6



А.Д.АЛЕКСАНДРОВ,
А.Л.ВЕРНЕР,
В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОБНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ 6 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Рекомендовано
Главным управлением школ
Министерства просвещения
СССР

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1984

ББК 22.151я72
А46

Условные обозначения

■ — окончание доказательства утверждения

Александр Данилович Александров
Алексей Леонидович Вернер
Валерий Идельевич Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ

Пробный учебник для 6 класса

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Н. И. Никитина*
Мл. редакторы *Л. И. Заседателева, Н. Т. Протасова, Т. А. Феоктистова*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Е. Н. Зелянина, Р. С. Невретдинова*
Корректоры *Н. В. Бурдина, В. И. Громова*

ИБ № 8784

Сдано в набор 06.02.84. Подписано к печати 11.06.84. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 11,25. Уч.-изд. л. 9,64. Тираж 45 000 экз. Заказ 790. Цена 15 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

$$А \frac{4306020400 - 605}{103\ (03) - 84}$$ инф. письмо доп. № 1

ГЛАВА I.

НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ

§ 1. О ЧЕМ И ЗАЧЕМ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Геометрические фигуры

В геометрии изучают форму и размеры предметов, вовсе не принимая во внимание другие их свойства: массу, цвет, твердость и т. д. От всего этого отвлекаются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят «фигура». Говорят еще «геометрическая фигура», потому что слово «фигура» употребляется и в других смыслах; например, ферзь в шахматах — фигура.

Укажем некоторые геометрические фигуры: отрезок, луч, прямая, угол, окружность, круг, треугольник, квадрат и др. (рис. 1).

Все это плоские фигуры — они укладываются на плоскости. Вам известны и пространственные фигуры: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др. (рис. 2).

Объединение фигур тоже фигура. Так, например, на рисунке 3 изображена фигура, которая получается *объединением* круга и квадрата (для различных случаев их взаимного расположения).

Общая часть двух фигур, или, как говорят, *пересечение* двух фигур, тоже фигура, как, например, на рисунке 4 фигура F. Часть фигуры тоже фигура.

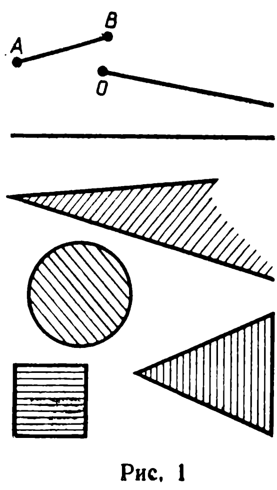


Рис. 1

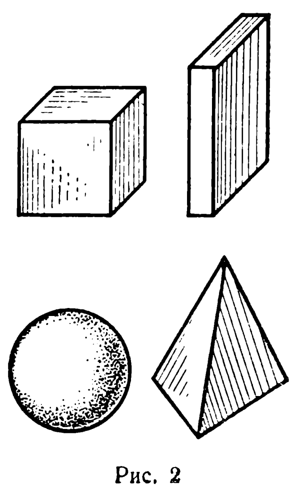


Рис. 2

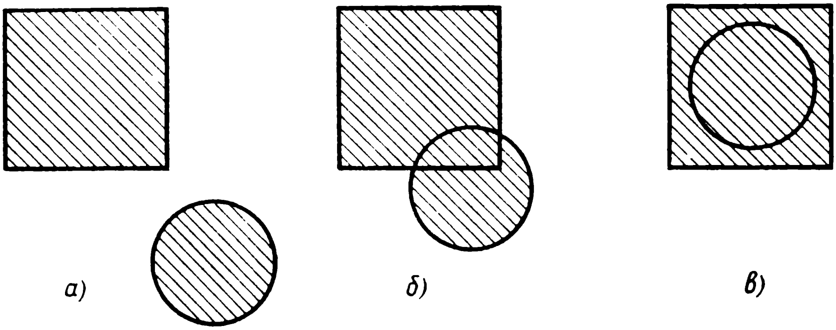


Рис. 3

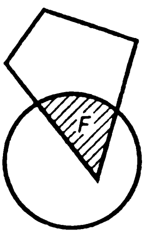


Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Любую «вещь» можно рассматривать как фигуру, если принимать во внимание только ее форму и размеры. Например, тень головы и скульптура (рис. 5, 6) могут рассматриваться как фигуры: первая — плоская, вторая — пространственная.

В геометрии изучают любые фигуры, но мы будем заниматься только простыми фигурами.

Самая простая фигура — это точка.

В геометрии отвлекаются не только от свойств предметов, кроме формы и размеров, но частично и от самих размеров. Точки мыслятся как не имеющие никаких размеров, отрезки и любые линии — как не имеющие ни ширины, ни толщины, плоскость — как не имеющая толщины.

Можно сказать, что геометрия — это наука о фигурах, а фигура — это мысленный образ предмета, в котором сохраняются только форма и размеры, и только они принимаются во внимание. Так отрезок — это мысленный образ тончайшей натянутой нити.

1.2. Первая задача геометрии

Одна из первых задач геометрии состоит в сравнении фигур (на практике в сравнении форм и размеров предметов).

Принято говорить, что в геометрии две фигуры называются равными, если они совпадут при наложении друг на друга. Часто так и поступают на практике, сравнивая реальные предметы. Например, сравнить два прямоугольных листа бумаги или два стекла можно, просто наложив их друг на друга. Или другой пример: когда вы покупаете новую пару обуви, то контролер прикладывает друг к другу подошвами ботинки или туфли из этой пары, проверяя, одинаковы ли они.

Но если каждый легко может сравнить два небольших стекла, приложив их друг к другу, то как, скажем, наложить друг на друга стекла для больших витрин? Одному человеку это не под силу. Оказывается, достаточно сравнить несколько размеров этих стекол. При этом можно обойтись без рулеток и мерных линеек, одной бечевкой. Но как с помощью бечевки сравнить два четырехугольных стекла, сколько размеров достаточно сравнить, чтобы убедиться, что стекла одинаковые? Геометрия отвечает на этот вопрос: для этого достаточно пяти сравнений — четырех сторон и одной диагонали (**диагональ** — это отрезок, соединяющий противоположные углы, рис. 7). На практике так и поступают, сравнивая края и одну диагональ.

Задача геометрии как науки и состоит в том, чтобы обосновать этот способ, показать, что такое сравнение четырехугольных фигур совершенно точно. Это мы и докажем позже.

Если трудно наложить одно большое стекло на другое, то для стен домов или участков земли это вовсе невозможно. Поэтому их сравнение можно осуществить только сравнением некоторых размеров.

Одинаковые участки земли — это, говоря языком геометрии, равные фигуры. Но равны они, конечно, не в том смысле, что их можно на самом деле наложить одна на другую. Фигуры равны,

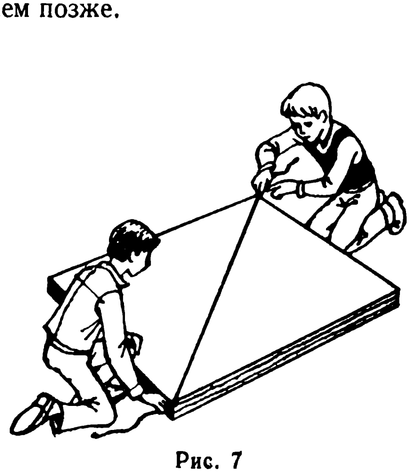


Рис. 7

если их мысленно можно наложить одну на другую так, чтобы они совпали, не изменяя при этом в них никаких размеров. Но даже мысленное наложение одного участка земли на другой требует слишком большого воображения. Поэтому в теории, как и на практике, сравнивают размеры фигур, расстояния между соответствующими точками в одной фигуре и в другой.

Таким образом, первая задача геометрии состоит в сравнении фигур путем сравнения в них отдельных размеров, т. е. в выяснении того, какие размеры достаточно знать, чтобы судить, равны фигуры или нет.

При сравнении размеров часто пользуются их измерением. Но само измерение тоже есть сравнение. Так, измеряя длину предмета, его сравнивают с тем предметом, который представляет единицу длины, например с метровой линейкой или с сантиметровым участком линейки, т. е. с образцом.

Словом, сравнение фигур включает также измерение геометрических величин, таких, как длина, величина угла, площадь. Оно основано на геометрии. Чтобы обосновать точные измерения, точное изготовление измерительных инструментов, начиная с простой линейки, нужна геометрия.

1.3. Самая первая задача геометрии. Построения

Мы только что сказали о сравнении предмета с образцом. Но чтобы иметь образец, надо его сделать. Поэтому можно сказать, что самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы указать, как делать нужные по форме и размерам образцы предметов, какие размеры необходимо выдержать, чтобы получился такой предмет, какой нужно. Такую задачу решают, когда делают разметку на заготовке для изготовления какой-нибудь детали или разметку на материале для того, чтобы скроить одежду, и т. п.

В геометрии занимаются фигурами и говорят не о том, чтобы сделать фигуру, а о том, чтобы построить ее, говорят о геометрических построениях. Например, как построить равносторонний треугольник (т. е. такой треугольник, у которого все стороны равны), как построить квадрат, у которого стороны равны данному отрезку.

Итак, самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы давать точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами.

Но часто, чтобы построить фигуру с нужными свойствами, достаточно обеспечить, чтобы она обладала лишь некоторыми из них или даже какими-то другими свойствами. Например, еще в Древнем Египте знали, что построить прямой угол можно, построив треугольник со сторонами 3, 4, 5 — «египетский треугольник». Почему один из углов этого треугольника прямой? Какие свойства фигуры надо обеспечить, чтобы оказались обеспеченными и другие ее свойства? Это типичные вопросы геометрии.

1.4. Другие задачи геометрии

Поставленный в конце предыдущего пункта вопрос представляет собой частный случай второй общей задачи геометрии: по одним свойствам фигур заключать о других их свойствах; в частности, при построении фигуры необходимо знать, какие свойства ее надо обеспечить, чтобы сами собой получались и другие нужные свойства. Можно ли, например, измерив только длины, судить об углах фигуры? Как, например, проверить, будет ли бетонная плита или верхняя крышка стола в точности прямоугольником? Как сделать такую проверку, не имея ни угольника, ни транспортира?

Плотник или столяр проверяет, будет ли крышка стола прямоугольником, сравнивая с помощью бечевки противоположные ее края, а также диагонали (рис. 8). Если противоположные края оказываются одинаковой длины и длины диагоналей тоже одинаковы, то крышка стола прямоугольная — все ее углы прямые. В самой геометрии речь идет не о плитах и крышках столов, а о фигурах, в данном случае о четырехугольниках. Если у четырехугольника противоположные стороны, как и диагонали, равны, то он прямоугольник (рис. 9).

Это утверждение мы докажем позднее. Оно вовсе не очевидно и замечательно тем, что из сравнения отрезков получается вывод об углах.

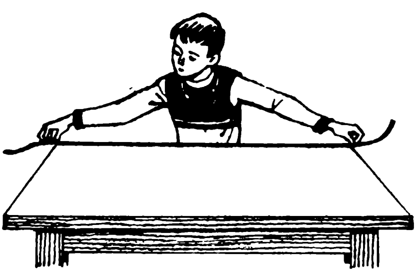


Рис. 8

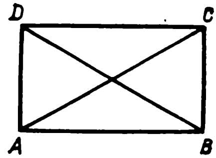


Рис. 9

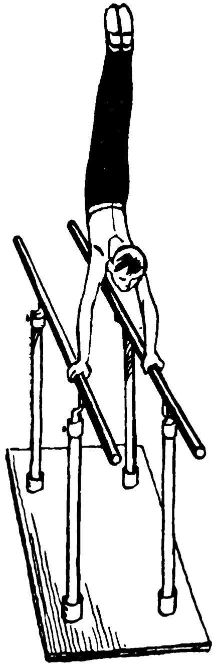


Рис. 10

Как и говорится во второй общей задаче геометрии: по одним свойствам фигуры заключаем о других ее свойствах.

Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — не пересекаются. А параллельные отрезки — это отрезки, лежащие на параллельных прямых. Реальными примерами параллельных отрезков могут служить рельсы, параллельные брусья (рис. 10) и др. Но никто не проверяет их параллельность, продолжая их до бесконечности, чтобы убедиться, что они лежат на непересекающихся прямых. Это просто невозможно.

Так как же можно на самом деле проверить параллельность отрезков? Об этом можно догадываться или знать из практики. Но мы дадим точный ответ — укажем несколько способов проверки параллельности отрезков.

К той же общей задаче геометрии относятся случаи, когда по измерению одних величин делают вывод о других величинах; например, измерив одни длины, заключают о других длинах или об углах и площадях. Мы встретим много таких примеров.

Другую задачу геометрии представляет нахождение расстояния до недоступных предметов, а также определение их размеров и формы. Как определить ширину реки, не пересекая ее? Как может артиллерист определить расстояние до цели? Ведь она ему недоступна! Как найти высоту дерева, к которому даже и подойти нельзя? Как определяют издали высоту гор? Как впервые нашли расстояние до Луны и определили ее размеры? На все эти вопросы дает ответы геометрия.

1.5. Простейшие построения

Разные правила и способы построения фигур, как и другие выводы геометрии, основываются прежде всего на пяти простейших построениях. Перечислим их.

I. ***Каждые две точки можно соединить отрезком и притом только одним*** (рис. 11).

II. ***Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов*** (рис. 12).

III. ***На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному*** (рис. 13).

IV. ***От каждого луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному*** (рис. 14).

V. ***Можно построить прямоугольник со сторонами, равными любым двум данным отрезкам*** (рис. 15).

Возможность этих построений очевидна. Высказанные пять утверждений о построениях называются аксиомами. Слово «аксиома» взято из греческого языка и переводится как «достойное признания» (от греческого «аксиос» — ценный, достойный). Наши пять утверждений о возможности простейших построений и в самом деле достойны признания.

Другие же построения и утверждения геометрии будут основываться на этих и еще нескольких аксиомах, которые мы сформулируем позднее.

Дальше мы разъясним сформулированные аксиомы и сделаем первые выводы из них.

Рис. 11

Рис. 12

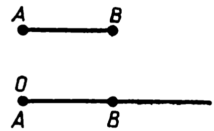


Рис. 13

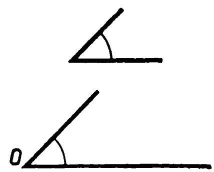


Рис. 14

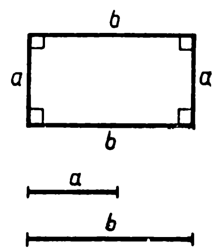


Рис. 15

1.6. Деление геометрии

Геометрия делится на два раздела: **планиметрию** — геометрию на плоскости и **стереометрию** — геометрию в пространстве (планиметрия от латинского «планум» — плоскость и греческого «метрео» — измеряю; стереометрия от греческого «стереос» — телесный, пространственный).

Мы будем изучать планиметрию, т. е. заниматься плоскими фигурами. Соответственно в теории рассматриваются фигуры, расположенные в одной какой-нибудь плоскости. В задачах вам встретятся фигуры, не лежащие в одной плоскости.

Задачи к § 1

1. Нарисуйте треугольник. Теперь нарисуйте еще один треугольник так, чтобы в пересечении с первым треугольником получились: а) точка; б) отрезок; в) треугольник; г) четырехугольник; д) пятиугольник. Какие еще фигуры могут получиться в их пересечении? Нарисуйте отдельно фигуры, которые получились в объединении этих треугольников. Какие это многоугольники? (Сколько у них сторон?)

2. Нарисуйте квадрат. Нарисуйте еще один квадрат так, чтобы в объединении с первым квадратом получились: а) прямоугольник; б) квадрат; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д) семиугольник; е) восьмиугольник. Какие еще фигуры могут получиться в их объединении? Нарисуйте отдельно фигуры, которые получились в пересечении этих квадратов. Какие это многоугольники?

3. Нарисуйте треугольник. Пристройте к нему другой треугольник так, чтобы в их объединении получились: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник. Можно ли получить пристраиванием треугольников другие многоугольники? (Пристроить два треугольника друг к другу — значит нарисовать их в таком положении, что их пересечением является либо общая сторона, либо общий отрезок — ее часть.)

4. Нарисуйте два прямоугольника так, чтобы их пересечением оказались: а) отрезок; б) прямоугольник; в) квадрат; г) пятиугольник; д) шестиугольник. Можете ли вы получить в их пересечении другие фигуры? В каждом случае установите, каким многоугольником является их объединение.

5. Может ли прямоугольник быть объединением: а) двух прямоугольников; б) двух квадратов; в) двух треугольников; г) двух пятиугольников? Объединением каких еще двух многоугольников может быть прямоугольник?

6. На сколько частей могут разбить плоскость: а) две прямые; б) три прямые; в) границы двух углов; г) границы двух треугольников; д) две окружности; е) границы двух квадратов?

7. Нарисуйте два угла так, чтобы в их пересечении оказались: а) точка; б) отрезок; в) луч; г) угол; д) треугольник; е) четырехугольник; ж) пятиугольник; з) полуплоскость. Удалось ли вам это сделать в каждой задаче? Если да, то отдельно нарисуйте фигуру, получившуюся в объединении этих углов.

8. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте углы, пересечением ко-

торых он является. Сколько таких углов? Каково их наименьшее число? Решите такую же задачу для четырехугольника, других многоугольников. Всегда ли она имеет решение?

9. Нарисуйте три треугольника так, чтобы каждые два из них давали в пересечении треугольник. Какой фигурой является пересечение всех трех треугольников? Может ли оно быть треугольником? Составьте и решите такую же задачу для квадратов.

10. Нарисуйте равносторонний треугольник. Прямолинейными отрезками (разрезами) разбейте его (разрежьте) на: а) два прямоугольных треугольника; б) три прямоугольных треугольника; в) три равнобедренных треугольника; г) четыре равносторонних треугольника; д) семь равносторонних треугольников; е) прямоугольник и три треугольника.

11. Отметьте на листе четыре любые точки. а) Расположите четыре прямых угла с вершинами в этих точках так, чтобы они покрывали всю плоскость. б) Сможете ли вы это сделать, имея четыре острых угла? в) Можно ли решить задачу, если точек три и углов три?

12. Нарисуйте куб. Укажите пересечение: а) нижней и правой граней; б) передней и верхней граней; в) задней и левой граней; г) передней, нижней и правой граней. Назовем нижнюю грань $ABCD$, а верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$, причем точка A находится на одном ребре с точкой A_1, точка B находится на одном ребре с точкой B_1, точка C находится на одном ребре с точкой C_1, точка D находится на одном ребре с точкой D_1. Пересечением каких граней является: а) ребро CD; б) ребро BB_1, в) вершина C_1? Укажите грани, которые не имеют общих точек.

§ 2. ОТРЕЗКИ

2.1. Аксиома о проведении отрезка. Внутренние точки отрезка

Каждой аксиоме мы будем давать название. Первую из аксиом назовем аксиомой о проведении отрезка. Повторим ее.

А к с и о м а о п р о в е д е н и и о т р е з к а. ***Каждые две точки можно соединить отрезком и притом только одним.***

Другими словами, от любой точки A до любой другой точки B

Рис. 16

Рис. 17

Рис. 18

можно провести, и притом единственный, отрезок — отрезок с концами в точках A и B (рис. 16).

Отрезки проводят по линейке (рис. 17) или, например, вдоль натянутой веревки.

После точки отрезок является простейшей фигурой. У каждого отрезка два конца — те две точки, которые он соединяет. Отрезок, соединяющий две точки A и B, мы будем обозначать AB или BA. Отрезки обозначают и так: a, b, c, ...

Об остальных точках отрезка говорят, что они лежат внутри него.

Так, точка C на рисунке 18 лежит внутри отрезка AB. Говорят также, что она лежит **между** A и B (или между B и A) и что отрезок AB проходит через точку C.

Если точка C лежит внутри отрезка AB, то она делит его на отрезки AC и CB, или, как еще говорят, разбивает отрезок AB на отрезки AC и CB. Сам же отрезок AB в этом случае является объединением отрезков AC и CB.

2.2. Продолжение отрезка

Во второй аксиоме говорится о возможности продолжить отрезок за каждый из его концов. Что это значит?

Если точка B лежит внутри отрезка AC (рис. 19), то отрезок AB является частью отрезка AC, а про отрезок AC говорят, что он служит **продолжением отрезка** AB за точку B. Точно так же отрезок CA будет продолжением отрезка BC за точку B.

Рис. 19

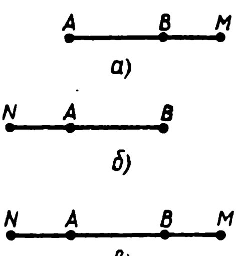


Рис. 20

Сформулируем теперь еще раз более подробно вторую аксиому.

Аксиома продолжения отрезка. ***Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов. Объединение любых двух продолжений данного отрезка снова является отрезком.***

Это значит, что, какой бы отрезок AB

мы ни взяли, всегда можно построить (провести) такой отрезок AM, который будет продолжением отрезка AB за точку B (рис. 20, *а*), т. е. AB является частью AM. Точно так же отрезок AB можно продолжить за точку A, т. е. построить такой отрезок BN, что AB будет частью BN (рис. 20, *б*). А вместе объединение отрезков AM и BN даст отрезок MN, частью которого является отрезок AB и который продолжает отрезок AB за оба конца (рис. 20, *в*).

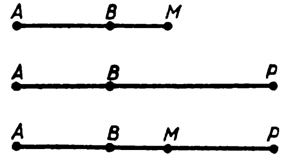


Рис. 21

Рис. 22

Fсли же взять два продолжения отрезка AB за один и тот же конец, например AM и AP (рис. 21), то их объединение тоже даст один отрезок (на рисунке 21 это отрезок AP). Об этом и говорится в аксиоме продолжения отрезка.

Отрезки AM, BN, MN и т. д. снова можно продолжать за их концы. Так будут получаться все большие и большие продолжения отрезка AB (рис. 22).

2.3. Луч

Возьмем какой-нибудь отрезок AB и продолжим его за точку B, получим некоторый отрезок AC (рис. 23). Отрезок AC снова можно продолжить за точку C, получим отрезок AC_1. Затем можно продолжить AC_1 за точку C_1 и получить отрезок AC_2 и т. д. Повторяя это построение, мы приходим к возможности неограниченного продолжения отрезка AB за точку B.

В результате получится **луч**, проведенный из точки A через точку B. Точка A называется **началом** этого **луча**. Можно сказать, что луч AB получается продолжением отрезка AB за конец B.

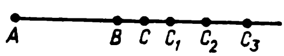


Рис. 23

О п р е д е л е н и е. **Лучом называется фигура, получающаяся при неограниченном продолжении отрезка за один из его концов.**

Здесь сказано «определение», потому что точное разъяснение того, что означает некоторое слово, и называется определением.

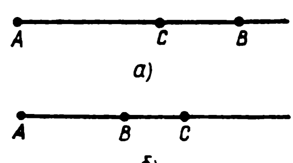


Рис. 24

Рис. 25

Рис. 26

Если на луче AB взять еще одну точку C, отличную от точек A и B, то могут представиться две возможности:

1) Точка C лежит на отрезке AB. Тогда отрезок AC является частью отрезка AB (рис. 24, *а*).

2) Точка C не лежит на отрезке AB. Тогда отрезок AC является продолжением отрезка AB (рис. 24, *б*).

В обоих случаях как отрезок AC, так и отрезок BC лежат на луче AB. Кроме того, ясно, что лучи AB и AC совпадают. Следовательно, каждый луч задается своим началом и любой своей точкой, отличной от начала.

2.4. Прямая

а) Определение прямой и способ ее задания

Мы построили луч, неограниченно продолжая отрезок за один из его концов. Если же неограниченно продолжать отрезок за оба его конца, то получим прямую (рис. 25). Это можно выразить так.

Определение. **Прямой AB называется фигура, которая получается при неограниченном продолжении отрезка AB за оба конца.**

А через каждые ли две данные точки проходит прямая? Конечно, проходит. Ведь имеется отрезок, соединяющий данные точки (поясните почему). Мысленно продолжая его в обе стороны, получим прямую, проходящую через две данные точки.

Прямую можно задать любыми двумя ее точками. Это значит, что если на прямой AB возьмем какие-нибудь другие точки M и N (рис. 26) и построим прямую MN, то получим ту же самую прямую AB. Это можно доказать, пользуясь аксиомами и определением прямой. Но доказательство не очень просто. Мы помещаем его в добавлении к этому параграфу для тех, кто захочет с ним ознакомиться. Так мы будем поступать и в дальнейшем, перенося в дополнения к параграфам непростые доказательства некоторых очевидных утверждений.

б) Пересекающиеся прямые

Теперь мы легко ответим и на такой вопрос: сколько прямых может проходить через две данные точки? Ясно, что через две данные точки проходит только одна, т. е. единственная, прямая.

Действительно, пусть через какие-то точки M и N проходят прямая AB и прямая CD (рис. 27). Тогда, как мы выяснили, и прямая AB, и прямая CD совпадают с прямой MN. Поэтому через две данные точки можно провести лишь одну прямую.

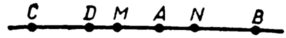


Рис. 27

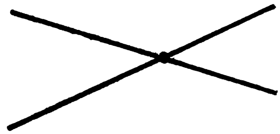


Рис. 28

Итогом проведенных рассуждений является следующее важное утверждение: ***через любые две точки проходит прямая и притом только одна.***

Из этого утверждения вытекает, что *две различные прямые могут иметь не более одной общей точки.*

Действительно, прямые, имеющие уже две общие точки, совпадают.

Определение. **Две прямые, имеющие общую точку, называются пересекающимися** (рис. 28). **Эта общая точка называется их точкой пересечения.**

Замечание. Луч и прямая мыслятся как бесконечные: луч — в одну сторону, прямая — в обе. Но в практике человек не встречается с бесконечными линиями, да и представить их себе во всей их бесконечности никто не может. Представляют отрезки, которые неограниченно продолжаются на любую длину, или, еще проще, представляют очень длинные отрезки. Когда говорят: «Проведем прямую», «На чертеже изображена прямая» и т. п., то на самом деле имеют в виду отрезки, концы которых не отмечаются.

2.5. Равенство отрезков. Откладывание отрезка

Сравнивая длины двух предметов, их часто прикладывают друг к другу. Если их концы при этом совпадают — прилегают друг к другу, то предметы равны по длине (рис. 29).

Отвлекаясь от какой бы то ни было толщины таких предметов и других их свойств, представляем их себе как отрезки и говорим: «Два отрезка равны, если один из них можно наложить на другой так, чтобы они совпали».

Равенство отрезков мы будем обозначать так: $AB = CD$, $A_1B_1 = AB$ и т. п.

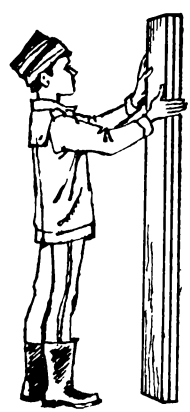


Рис. 29

Но не всегда предметы можно сравнивать, прикладывая их друг к другу. Невозможно,

Рис. 30

например, приложить друг к другу два края одного стола. Сравнить края стола можно, например, натягивая веревку сначала вдоль одного края, а потом вдоль другого (рис. 30).

Вообще, чтобы сравнить размеры двух предметов, которые нельзя приложить друг к другу, их можно сравнить с каким-нибудь третьим предметом, лучше всего с линейкой, но можно обойтись и веревкой и т. п. Если окажется, что длины двух предметов равны длине третьего предмета, то их длины равны друг другу.

Теперь перейдем от реальных предметов к отрезкам.

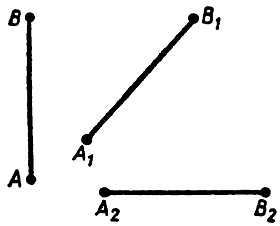


Рис. 31

А к с и о м а с р а в н е н и я о т р е з к о в. **Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.**

В обозначениях: если $A_1B_1 = AB$ и $A_2B_2 = AB$, то $A_1B_1 = A_2B_2$ (рис. 31).

Рис. 32

Как получить отрезки, равные данному? Такую задачу часто приходится решать на практике для реальных предметов: например, заготовить штакет для забора, или одинаковые доски для полок, или одинаковые полотенца и т. п. Во всех перечисленных случаях эта задача решается одинаково: от длинных предметов отпиливаются, отрезаются и т. п. более короткие предметы нужной длины (рис. 32). А для этого на длинном предмете (например, на доске, рейке и т. п.) на нужном расстоянии от его начала делают отметку, прикладывая какой-нибудь предмет нужной длины так, чтобы их начала совпадали.

Если от реальных предметов снова перейти к отрезкам, то придем к следующему геометрическому построению.

Пусть заданы луч a с началом A и отрезок CD. Отложить на луче a от точки A отрезок, равный отрезку CD, — это значит найти на луче a такуют очку B, что отрезок AB будет равен CD (рис. 33). На рисунках равные отрезки отмечаются одинаковым числом поперечных черточек. Это построение можно представить себе так: отрезок CD как бы переносится на луч a, причем одним из его концов становится точка A. О возможности построения говорится в аксиоме откладывания отрезка.

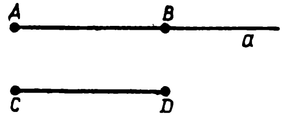


Рис. 33

Аксиома откладывания отрезка. ***На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.***

Говоря, что такой отрезок только один, мы имеем в виду следующее: если на луче a от его начала A отложен отрезок AB, то, отложив на этом луче от A отрезок AB_1, равный отрезку AB, мы получим, что точки B и B_1 совпадут.

2.6. Окружность

Представим себе, что из некоторой точки O (в данной плоскости) проведены всевозможные лучи и на них отложены отрезки OX, равные какому-нибудь данному отрезку AB (рис. 34). Тогда по аксиоме сравнения все эти отрезки равны друг другу. Их концы (отличные от точки O) образуют **окружность с центром O и радиусом, равным AB.**

Определение. **Окружностью называется фигура, образованная концами всевозможных равных отрезков, проведенных из одной точки.**

Эта точка называется **центром окружности,** а проведенные из нее равные отрезки — **радиусами окружности.**

Так как здесь речь идет об отрезках, отложенных от данной точки, то усиленную аксиому откладывания отрезка теперь можно высказать следующим образом как аксиому окружности.

Аксиома окружности. ***Вокруг каждой точки можно описать окружность любым радиусом, т. е. радиусом, равным любому данному отрезку. Окружность пересекает каждый исходящий из ее центра луч только в одной точке.***

Тем самым на каждом луче с началом в центре — в данной точке — откладывается от этой точки отрезок, равный данному.

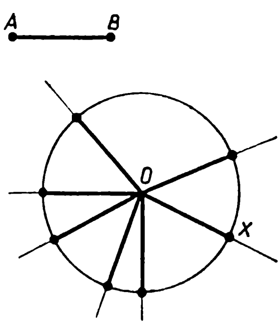


Рис. 34

В таком виде аксиома откладывания отрезка — как аксиома окружности—бывает более удобной, потому что в построениях постоянно проводят окружности или их дуги. В соответствии с этой аксиомой отрезок, равный данному, откладывают на данном луче a так. Описывают вокруг начала луча a окружность радиусом, равным данному отрезку AB. Она и пересечет луч в такой точке P, что отрезок OP равен AB. Тем самым на луче откладывается отрезок, равный данному (рис. 35).

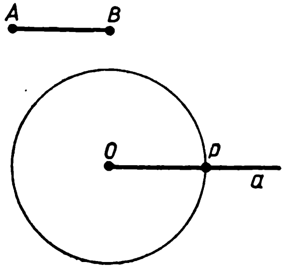


Рис. 35

Фактически не описывают всю окружность, а только ее дугу, которая пересекла бы данный луч (рис. 36).

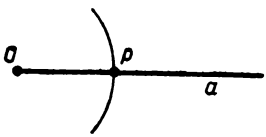


Рис. 36

2.7. Проведение отрезков и окружностей на практике

На чертежах отрезки проводят по линейке, окружность описывают с помощью циркуля (рис. 37). Поэтому в геометрии говорят о построениях циркулем и линейкой. Отрезок, равный данному, можно фиксировать ножками циркуля (рис. 38) и откладывать на чертеже любое число раз в нужных направлениях.

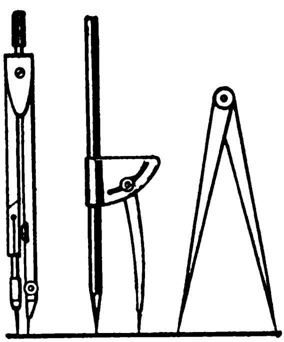


Рис. 37

Однако на практике те же построения выполняют другими средствами.

Самое простое и универсальное средство — это бечевка (или нитка, или веревка, смотря по условиям). К ней можно добавить булавки или кнопки, чтобы отмечать точки, а на земле точки отмечают колышками.

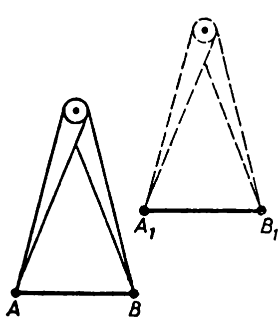


Рис. 38

Натянув бечевку между двумя кнопками (или колышками) A и B, проводят вдоль нее отрезок AB (рис. 39). Протянув бечевку, закрепленную в точке A,

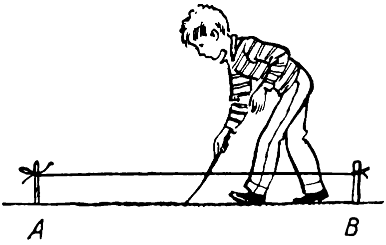


Рис. 39

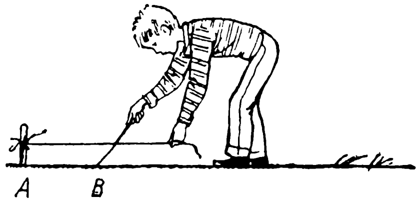


Рис. 40

за точку B, проводят вдоль нее продолжение отрезка AB (рис. 40).

Закрепим один конец бечевки в точке A и, выбрав на ней еще точку B, привяжем к бечевке в этом месте карандаш. Натянув отрезок бечевки AB и поворачивая его вокруг точки A, опишем карандашом окружность радиусом AB (рис. 41). Вместо карандаша может быть мел, если чертить надо на доске, или колышек, если чертить по земле.

Как откладывают с помощью бечевки отрезок, равный данному, очевидно. Конечно, бечевка не дает такой точности, какой можно добиться с помощью линейки и циркуля, но зато она одна служит для проведения и отрезков, и окружностей там, где нельзя воспользоваться ни циркулем, ни линейкой. Кроме того, складывая отрезок бечевки пополам, мы находим середину отрезка, а найти середину отрезка циркулем и линейкой (без делений) не так просто (см. § 5).

Для проведения отрезков на местности на расстояния, слишком большие для протягивания веревок, пользуются приемом, который называют «провешивание прямой» от слова «вéха».

В точке A стоит человек и смотрит в том направлении, в котором надо провести отрезок. Другой ставит в том направлении веху в какой-то точке B, а потом ставит еще дальше другую веху в какой-то

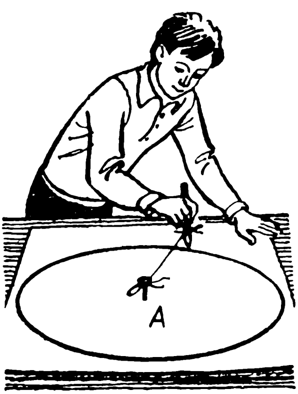


Рис. 41

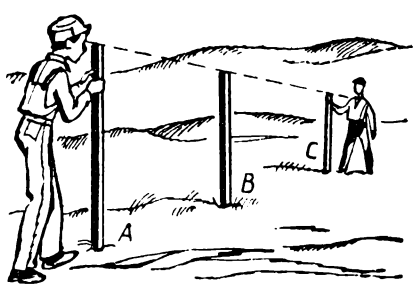


Рис. 42

точке C так, чтобы первая веха закрывала ее от человека, стоящего в точке A (рис. 42). Тогда отрезок AC будет продолжением отрезка AB.

Человек из точки A может перейти в точку B, а веху можно оттуда перенести и поставить за второй вехой. Отрезок продолжится. И так можно продолжать дальше.

З а м е ч а н и е. Проведение отрезков на земле — задача топографии и геодезии, но не геометрии. Проведение отрезков и окружностей на бумаге — задача черчения. Геометрия рассматривает эти построения только как возможные. Поэтому, говоря «проведем отрезок» и т. п., в геометрии не задумываются о том, как это можно сделать на самом деле. От этого отвлекаются, подобно тому как, говоря о фигурах, отвлекаются от всех их свойств, кроме формы и размеров.

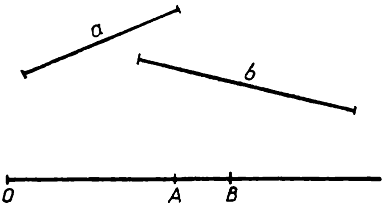


Рис. 43

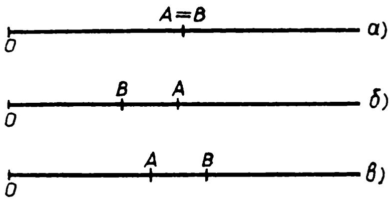


Рис. 44

Точно так же в геометрии говорят о построениях циркулем и линейкой только в том смысле, что при этих построениях опираются на аксиому окружности и на аксиомы проведения и продолжения отрезка. Эти аксиомы как раз и утверждают, что любые построения циркулем и линейкой в принципе возможны.

2.8. Сравнение отрезков

Мы уже говорили о сравнении равных отрезков. Сейчас мы будем сравнивать любые два отрезка.

Пусть даны два отрезка a и b. Отложим равные им отрезки на одном луче с началом O. Получим отрезки $OA = a$ и $OB = b$ (рис. 43). Возможны три случая.

1. Точки A и B совпадут (рис. 44, *а*). Тогда OA и OB — это один отрезок, а отрезки a и b равны ему. Значит, по аксиоме сравнения отрезков они равны друг другу: $a = b$.

2. Точка B лежит внутри отрезка OA (рис. 44, *б*). Тогда говорят, что отрезок OB меньше отрезка OA или, что то же самое, что отрезок OA больше отрезка OB. Обозначается это так: $OB < OA$ или $OA > OB$. Иначе: $b < a$ или $a > b$.

3. Точка A лежит внутри отрезка OB (рис. 44, *в*). Тогда говорят, что отрезок OA меньше отрезка OB или что OB больше OA.

Обозначения: $OA < OB$ или $OB > OA$. Иначе: $a < b$ или $b > a$.

Точно так же вы сравниваете свой рост (рис. 45).

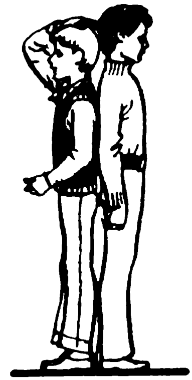


Рис. 45

2.9. О возникновении геометрии

Мы начали изучение геометрии с отрезков и действий с ними. Это не случайно. Как вы увидите в дальнейшем, все геометрические выводы и построения в конце концов сводятся к операциям с отрезками. Это же отражается и в истории геометрии.

Геометрия зародилась в Древнем Египте 5—6 тысяч лет назад как набор правил решения практических задач, возникавших в строительстве, при распределении земельных участков, измерении площадей и объемов и т. д. Например, египетские пирамиды насчитывают около 4800 лет, а их строительство требовало достаточно точных геометрических расчетов. Но особенно важной была задача распределения земельных участков.

В Египте плодородная земля тянется узкой полосой в долине Нила, а за ее пределами простирается пустыня. Ежегодно Нил разливается и наносит в долину слой ила, удобряя им почву. Поэтому земли, пригодной для земледелия, в Египте мало, но она очень плодородна, и каждый ее клочок представляет большую ценность. Поэтому, когда ежегодно разливы смывали границы участков, было важно восстанавливать их возможно точнее. Этим занимались специальные землемеры, которые были, можно сказать, первыми геометрами.

В Египте были накоплены обширные сведения о свойствах фигур. Эти сведения были заимствованы у египтян греками (в период VII—V вв. до н. э.). И так как особенно важной задачей было измерение земельных участков, то греки и назвали науку о фигурах геометрией, что, как вы знаете, означает в переводе землемерие (от греческих «ге» — земля, «метрео»—измеряю); наука же об измерении земли стала позже называться геодезией.

Греки называли египетских геометров — землемеров «герпедонаптами», т. е. «веревковязателями», и это показывает, что в своих геометрических построениях и измерениях они пользовались веревками. Поэтому тем более естественно, что мы часто говорим

Рис. 46

здесь о применении веревок для построения и сравнения фигур, ведь с их применением связано само возникновение геометрии.

Дополнение к § 2

Задание прямой любыми двумя ее точками

Покажем, что если на прямой AB взять любые две точки M и N, то прямые AB и MN совпадут.

Сначала возьмем на прямой AB одну точку M, отличную от точек A и B, и покажем, что прямые AB и AM совпадают. Пусть отрезок KL — какое-нибудь продолжение отрезка AB, а отрезок PQ — какое-нибудь продолжение отрезка AM (рис. 46). Тогда в объединении отрезки KL и PQ дадут некоторый отрезок, который будет как продолжением отрезка AB, так и продолжением отрезка AM (рассмотрите различные положения точки M на прямой AB). Таким образом, для любых заданных продолжений отрезков AB и AM найдется больший отрезок, который содержит как отрезки AB и AM, так и данные их продолжения.

Объединение всех таких одинаковых продолжений отрезков AB и AM даст как прямую AB, так и прямую AM. Следовательно, прямые AB и AM совпадают.

Если мы теперь на прямой AB возьмем две точки M и N, то, поскольку совпадают прямые AB и AM и точно так же совпадают прямые AM и MN, прямая AB совпадает с прямой MN.

Задачи к § 2

Задачи к пункту 2.1

1. Отметьте две точки. Соедините их линией. Потом еще одной. И еще одной. Как вы думаете, сколькими линиями их можно соединить? А сколько отрезков соединяют эти точки? А дуг окружностей? А полуокружностей?

2. Нарисуйте горизонтальный отрезок и отметьте точку повыше него. Соедините отрезком отмеченную точку и какую-либо точку нарисованного отрезка. Проведите еще несколько таких же отрезков. Какая получится фигура, если провести все такие отрезки?

3. Нарисуйте два отрезка. Отметьте на каждом из них по точке и соедините их отрезком. Проведите еще несколько таких же отрезков. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие отрезки.

4. Нарисуйте окружность и отметьте какую-нибудь точку. (Она может находиться как на окружности, так и вне ее.) Соедините отрезком отмеченную точку и какую-либо точку окружности. Проведите еще несколько таких же отрезков. Какая получится фигура, если провести все такие отрезки?

5. Нарисуйте два круга так, чтобы они не имели общих точек. Отметьте в каждом из них по точке и соедините их отрезком. Проведите еще несколько таких же отрезков. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие отрезки.

6. Через одну точку провели два отрезка так, что она лежит внутри каждого из них. Сколько отрезков получилось на рисунке? Ответьте на тот же вопрос, если отрезков будет 3, 10, 100, n, где n — некоторое число. (При этом предполагается, что других общих точек, кроме данной, отрезки не имеют. А вы поняли, зачем эта оговорка?)

7. Из трех отрезков каждые два пересекаются по отрезку. Какой фигурой является пересечение всех отрезков? А их объединение?

8. Нарисуйте куб. Отметьте одну из его вершин. Сколько отрезков соединяют ее с другими вершинами куба? Сколько из них не являются ребрами куба? Отметьте теперь две вершины куба. Соедините их отрезком. Является ли этот отрезок ребром куба? Лежит ли он в грани куба? Сколько отрезков, соединяющих две вершины куба, не лежат в его гранях?

Задачи к пункту 2.2

9. Нарисуйте отрезок AB. Продолжите его за точку B. Точку, в которой вы остановились, назовите C. Сколько отрезков на рисунке? Продолжите теперь отрезок AB за точку A. Точку, в которой вы остановились, назовите D. Сколько отрезков на рисунке теперь? Посмотрите на отрезок CD. Продолжением каких отрезков он является?

10. Нарисуйте отрезок PQ. Внутри него возьмите точку A. Продолжением каких отрезков является отрезок PQ? Теперь поставьте внутри отрезка PQ точку B. Продолжением каких отрезков является теперь отрезок PQ?

11. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте второй, являющийся продолжением первого. Нарисуйте третий, являющийся продолжением второго. Является ли он продолжением первого?

12. Нарисуйте два отрезка так, что один из них является продолжением другого. Укажите на рисунке объединение и пересечение этих отрезков. В каком случае объединение двух отрезков является продолжением одного из них?

13. а) Нарисуйте треугольник ABC. Продолжите его стороны AB за вершину B, BC за вершину C, CA за вершину A. Соедините последовательно отрезками полученные точки. Какая фигура получилась? б) Снова нарисуйте треугольник и каждую из его сторон продолжите в обе стороны. Полученные точки соедините последовательно отрезками. Какая фигура получилась теперь? в) Какие получатся фигуры, если выполнить задания а) и б) для четырехугольника?

14. а) Нарисуйте четырехугольник. Продолжите его противоположные стороны до взаимного пересечения. Обведите границу полученной фигуры. б) Нарисуйте пятиугольник. Продолжите его стороны, идущие через одну, до взаимного пересечения. Обведите границу полученной фигуры. в) Если вы сделали удачный рисунок в пункте б), то у вас получилась пятиугольная звезда. А как можно получить, действуя тем же способом, десятиугольную звезду? n-угольную звезду?

Задачи к пункту 2.3

15. Луч AM получился продолжением отрезка AB за точку B. Может ли этот же луч получиться продолжением какого-либо другого отрезка?

16. Один луч получился продолжением отрезка CD за точку D. Другой луч получился продолжением отрезка CD за точку C. Какой фигурой является пересечение этих лучей?

17. Нарисуйте луч и отметьте точку внутри него. Сколько теперь лучей на рисунке? А если взять внутри луча 2, 10, n точек, то сколько получится лучей? Какая фигура будет объединением всех этих лучей? Их пересечением?

18. Нарисуйте отрезок и возьмите точку вне его. Проведите луч через эту точку и какую-либо точку отрезка. Проведите еще несколько таких же лучей. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие лучи. (Обратите внимание на положение точки относительно отрезка. Какие тут возможны случаи, от которых зависит ответ?)

19. Нарисуйте окружность. а) Нарисуйте несколько лучей с началом в ее центре. Какая получится фигура, если провести все такие лучи? б) Ответьте на тот же вопрос, если начало всех лучей будет вне круга, а каждый из лучей будет проходить через какую-либо точку окружности. в) Ответьте на тот же вопрос, если начало всех лучей лежит на окружности, а каждый из лучей пересекает окружность.

20. а) Нарисуйте окружность с центром O. Пусть точка X движется по окружности. Какую фигуру образуют все лучи OX, когда точка X пройдет $\frac{1}{4}$ окружности? $\frac{1}{2}$ окружности? Всю окружность? б) Нарисуйте «восьмерку». Пусть точка X движется по ее границе, а начало O всех лучей OX находится в ее центре. Какая получится фигура, когда точка X, пройдя всю «восьмерку», вернется в исходное положение?

21. Сверху крепость имеет вид треугольника. Внутри нее требуется установить один прожектор так, чтобы им можно было осветить все ее стены. Где установить прожектор? А если крепость имеет вид четырехугольника? Пятиугольника? Какой вид имеет крепость, если при любой установке одного прожектора хоть одна сторона не будет освещена полностью? (Считаем, что прожектор может совершить полный оборот вокруг вертикальной оси.)

22. Сверху крепость имеет вид треугольника. За ее стенами требуется установить прожекторы так, чтобы они могли осветить все ее стены. Сколько понадобится прожекторов? А если крепость имеет вид четырехугольника? Пятиугольника? Нельзя ли уменьшить число прожекторов?

23. Ясно, что куб можно осветить снаружи шестью прожекторами (как?). Можно ли это сделать меньшим числом прожекторов?

Задачи к пункту 2.4

24. Нарисуйте несколько отрезков так, чтобы их продолжением была одна и та же прямая.

25. Какая фигура получается в объединении лучей AB и BA?

26. Нарисуйте отрезок AB и точку O вне прямой AB. По отрезку AB от A к B стала двигаться точка X. Какую фигуру образуют все прямые OX, когда точка X пройдет весь отрезок? Ответьте

на тот же вопрос, если вместо отрезка AB взять луч AB, прямую AB.

27. Нарисуйте точку. Проведите через нее 2 прямые. На сколько частей они разбили плоскость? На сколько частей разобьют плоскость 10 таких прямых, n таких прямых? Сколько было таких прямых, если плоскость оказалась разбитой на 100 частей? Вам нужно разрезать круглый торт на 6 частей. Сколько вы сделаете разрезов?

28. Сможете ли вы нарисовать два отрезка так, чтобы: а) их пересечение и объединение являлись отрезками; б) их пересечение было отрезком, а объединение не было отрезком; в) их объединение было отрезком, а пересечение не было отрезком; г) их пересечение и объединение не являлись отрезками?

29. Нарисуйте прямую. Отметьте на ней 3 точки. Сколько отрезков получилось на прямой? Ответьте на тот же вопрос, когда на прямой отмечено 4, 5, 10, n точек. Сколько надо поставить точек, чтобы на прямой образовалось 45 отрезков? 50 отрезков? 1000 отрезков?

30. Нарисуйте 4 любые точки. Соедините каждые две из них прямой. Сколько получилось прямых? Зависит ли результат от расположения точек? Найдите наибольшее число прямых, когда точек 5, 6, 10, n. Сколько надо поставить точек, чтобы получилось всего 45 прямых? 50 прямых? 1000 прямых?

31. Нарисуйте 3 прямые. Сколько они имеют точек пересечения? Может ли быть другое число точек пересечения? В случае, когда точек пересечения больше всего, сосчитайте, на сколько частей эти прямые разбили плоскость. Решите такую же задачу про 4 прямые. Для этого случая подсчитайте, сколько получилось на рисунке треугольников. Четырехугольников?

32. Нарисуйте некоторое число прямых так, чтобы они разбили плоскость на 20 частей. А теперь на 21 часть. Укажите способ разбиения плоскости прямыми на любое число частей.

33. Расположите на листе бумаги 6 точек так, чтобы через них можно было провести всего: а) 15 прямых; б) 11 прямых; в) 8 прямых; г) 6 прямых.

Задачи к пунктам 2.5, 2.6

34. Как вы определите, что такое середина отрезка?

35. Пусть три точки A, B, C расположены так, что $AB = BC$. Является ли точка B серединой отрезка AC?

36. Нарисуйте треугольник. С помощью циркуля проверьте, есть ли у него равные стороны.

37. Нарисуйте квадрат. Отложите его сторону на его диагонали (диагональ квадрата — это отрезок, соединяющий те вершины, которые не лежат на какой-либо его стороне). Сколько раз можно последовательно отложить сторону квадрата на его диагонали, начиная от вершины?

38. Нарисуйте прямоугольник. Возьмите какую-либо его сторону и начните ее откладывать последовательно на его диагонали, начиная от вершины. Сколько раз она отложилась? А сколько раз отложится другая сторона прямоугольника, если с ней проделать то же самое? Теперь отложите на диагонали последовательно, начиная от вершины, обе стороны. Что вы заметили?

39. Нарисуйте отрезок AB и точку O вне прямой AB. Возьмите точку K на отрезке AB, проведите отрезок OK и продолжите его за точку K на равный отрезок. Проделайте такое построение несколько раз. Что можно заметить? Такие же построения проделайте с точкой и треугольником, точкой и окружностью. Что можно заметить в этих случаях?

40. Нарисуйте окружность. Возьмите на ней две точки A и B. Постройте такую точку K на окружности, что $AK = AB$. Постройте такую точку L на окружности, что $BL = AB$. Объясните, почему $AK = BL$. Проверьте, будут ли равны отрезки KL и AB.

41. Нарисуйте окружность. Возьмите на ней точку A. Отметьте на ней точку B, такую, что отрезок AB равен радиусу окружности. Повторите построение в том же направлении. Сделайте так шесть раз. Что вы заметили?

42. Нарисуйте окружность с центром O и радиусом, равным отрезку a. Отметьте на ней точку A. Проведите окружность с центром A и радиусом a. Объясните, почему точка O лежит на этой окружности.

43. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте отрезок с концом в точке A и равный AB. Нарисуйте также отрезок с концом в точке B и равный AB. Могут ли такие отрезки пересекаться? Может ли точка пересечения быть их общим концом? Ответьте на те же вопросы, если из точек A и B проводить по-прежнему равные отрезки, но не равные AB. А если проводить из точек A и B неравные отрезки? Посмотрите, как располагаются точки X, такие, что отрезки XA и XB равны.

44. 1) Нарисуйте прямую. Возьмите точку A на этой прямой.

Пусть есть также отрезок a. От точки A откладываются всевозможные отрезки AX, равные a. Сколько таких точек X лежит на прямой?

2) Решите такую же задачу, если даны: а) две пересекающиеся прямые, а точка A — точка их пересечения; б) равносторонний треугольник, а точка A — его вершина; в) квадрат, а точка A — точка пересечения его диагоналей; г) окружность, а точка A лежит на ней; д) круг, а точка A лежит внутри него.

45. 1) Нарисуйте отрезок. Из каждой его точки проведены всевозможные отрезки, равные некоторому данному отрезку. Нарисуйте полученную фигуру.

2) Сделайте то же, если данная фигура: а) прямая; б) угол; в) треугольник; г) окружность.

46. Нарисуйте два отрезка a и b. Отметьте две точки A и B. Постройте такую точку X, что $XA = a$, $XB = b$. Сколько таких точек можно построить? Всегда ли это можно сделать?

47. Нарисуйте отрезок AB. С центрами в точках A и B проведите окружности равных радиусов так, чтобы они пересекались в двух точках. Соедините отрезками эти точки с точками A и B. Сколько получилось на рисунке равных отрезков?

48. Нарисуйте треугольник ABC. С центром в точке A постройте окружность радиусом BC, а с центром в точке B постройте окружность радиусом AC. Обозначьте точки их пересечения через D_1 и D_2. Пусть D_1 лежит с той стороны от прямой AB, что и точка C. Соедините точку D_1 с точками A, B и C. Какие равные отрезки есть в четырехугольнике $ABCD_1$? Пусть точка D_2 лежит с другой стороны от прямой AB, нежели точка C. Соедините D_2 отрезками с точками A и B. Какие равные отрезки есть в четырехугольнике $ACBD_2$?

49. Нарисуйте треугольник. В другом месте постройте треугольник с такими же сторонами.

Задачи к пункту 2.8

50. Нарисуйте два прямоугольника: один со сторонами, равными двум клеточкам, а другой со сторонами в одну и три клеточки. У какого из них диагональ больше?

51. Нарисуйте прямоугольник, а в нем диагональ. Требуется сравнить в нем стороны и диагональ. Как вы это сделаете?

52. Нарисуйте четырехугольник. Требуется указать его стороны в порядке возрастания. Как вы это сделаете?

53. Нарисуйте треугольник. Установите, какая сторона в нем самая большая. Отложите на ней последовательно, начиная от вершины, две другие его стороны. Что вы заметили?

54. 1) Отметьте на прямой две точки A и B. Постройте на ней такую точку X, что: а) $XA > XB$; б) $XA < XB$.

2) Отметьте теперь вне данной прямой такую точку X, что: а) $XA > XB$; б) $XA < XB$. Как расположатся все такие точки на плоскости?

3) Можете ли вы сказать, как расположатся на этой прямой все такие точки?

55. Точки A, B, C лежат на одной прямой; $AB > BC$. Можете ли вы сказать, какой отрезок больше: AC или BC?

56. Отрезок a больше отрезка b, а отрезок b больше отрезка c. Объясните, почему $a > c$.

57. Объясните, почему: а) у отрезка только одна середина; б) у окружности только один центр.

58. Нарисуйте круг. а) Внутри него возьмите точку, отличную от центра. Соедините ее с центром. Почему этот отрезок меньше радиуса? б) Вне круга возьмите точку. Соедините ее с центром. Почему этот отрезок больше радиуса? в) Какое определение вы можете дать кругу?

59. Нарисуйте два отрезка a и b, такие, что $a > b$. Возьмите точку A на плоскости. Проведите через A какую-нибудь прямую. Где на этой прямой находятся все такие точки X, что $b \leqslant XA \leqslant a$? А где на плоскости находятся все такие точки X, что $b \leqslant XA \leqslant a$?

§ 3. УГЛЫ

3.1. Определение угла

Углом называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом (рис. 47). Эти лучи называются **сторонами**, а их начало — **вершиной угла.**

Два луча с общим началом делят плоскость на два угла. В объединении эти углы дают плоскость.

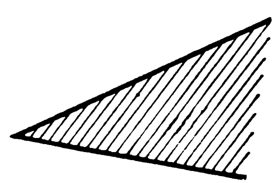


Рис. 47

Если стороны угла образуют прямую, то угол называется **развернутым** (рис. 48). Часть плоскости, ограниченная одной пря-

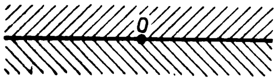


Рис. 48

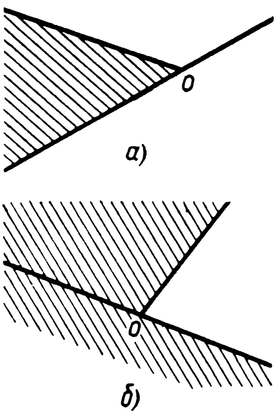


Рис. 49

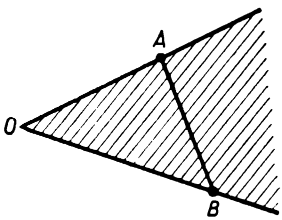


Рис. 50

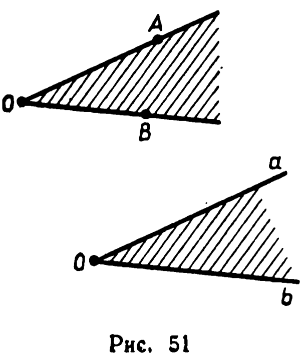


Рис. 51

мой, называется **полуплоскостью.** А развернутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — вершина развернутого угла. Прямая делит плоскость на две полуплоскости и соответственно на два развернутых угла.

Если угол не развернутый, то он может быть меньше или больше развернутого угла. Тот угол, который меньше развернутого, сам является частью развернутого угла (рис. 49, *а*). А если угол больше развернутого, то он содержит развернутый угол (рис. 49, *б*)

Мы пока не будем рассматривать углы, которые больше развернутого. Поэтому, говоря «угол», будем подразумевать, что это угол меньше развернутого. Отрезок, соединяющий точки на разных сторонах такого угла, проходит внутри угла (рис. 50).

Угол обозначают его вершиной, например $\angle O$, если нет других углов с той же вершиной, или сторонами, например $\angle ab$ или $\angle AOB$, если стороны проходят через точки A и B (рис. 51). Таким образом, знак $\angle$ заменяет слово «угол».

3.2. Равенство углов

Угол — это бесконечная часть плоскости, и потому трудно представить себе, как сравнивают углы, накладывая их один на другой, а на практике осуществить это уж никак невозможно. В жизни мы всегда имеем дело с конечными фигурами и представляем себе на самом деле какую-то конечную часть угла, как изображают на рисунках. Бесконечные же фигуры мы представляем себе либо как очень большие, либо, лучше, как неограниченно простирающиеся, например, как далеко ни пойти по лучу из его начала, а можно пойти еще дальше. Поэтому сведем сравнение углов к сравнению конечных фигур, как это и делается на практике.

Чтобы задать некоторый угол с вершиной O и сторонами a и b (см. рис. 51), надо задать лучи a и b, а для этого достаточно взять любые отрезки OA и OB на этих лучах.

Обратно, если задать два отрезка OA и OB с общим началом, то они определят два луча a и b, идущие из точки O, а следовательно, и угол со сторонами a и b.

Поэтому можно говорить про угол, образованный двумя отрезками с общим началом, или про угол между отрезками. И, рисуя угол, мы рисуем два отрезка с общим началом.

Посмотрим, как на практике можно сравнивать такие углы и как строить равные им углы в любом месте плоскости.

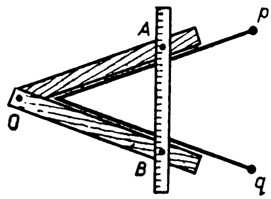


Рис. 52

Пусть угол задан двумя отрезками p и q с общим началом — точкой O (рис. 52). Мы считаем, что эти отрезки нарисованы на бумаге или на земле. Возьмем две рейки и, скрепив одни из их концов, положим на отрезки p и q. Затем закрепим любые две точки A и B этих реек поперечной рейкой.

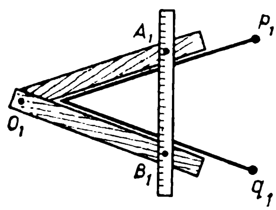


Рис. 53

Получится жесткая фигура, составленная из трех реек. Ее можно перевести куда нужно и очертить по боковым рейкам нужный угол (рис. 53). Этот угол и будет равен данному. А проведенное построение основано на том, что длины реек OA, OB и AB не меняются: прочерченные в другом месте по ним отрезки O_1A_1, O_1B_1 и A_1B_1 будут равны соответственно OA, OB и AB, т. е. $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$.

Это практическое построение дает возможность определить равенство углов следующим образом.

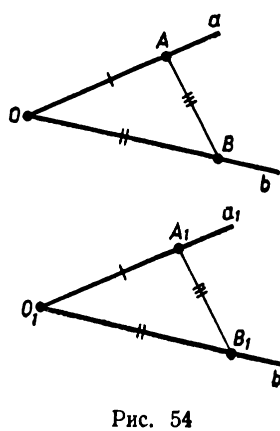


Рис. 54

О п р е д е л е н и е. **Два угла с вершинами O и O_1 и сторонами a, b и a_1, b_1 называются равными, если на их сторонах найдутся такие точки A, B и A_1, B_1**

(рис. 54), что отрезки OA, OB, AB равны соответственно отрезкам O_1A_1, O_1B_1, A_1B_1, т. е. $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$.

Равенство углов записывают так: $\angle O = \angle O_1$, или $\angle ab = \angle a_1b_1$, или $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Отрезки, соединяющие точки на разных сторонах угла, мы иногда будем называть **поперечинами**. На рисунке 54 отрезки AB и A_1B_1 — поперечины.

З а м е ч а н и е. Особый случай представляет развернутый угол. Очевидно, что все развернутые углы равны. Это согласуется с определением. Подумайте, как это объяснить и какое свойство отрезков для этого нужно. Доказательство равенства всех развернутых углов дано в дополнении к § 9.

3.3. Откладывание угла

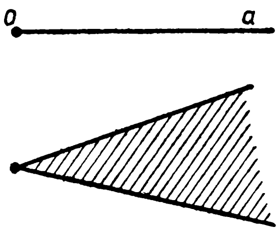


Рис. 55

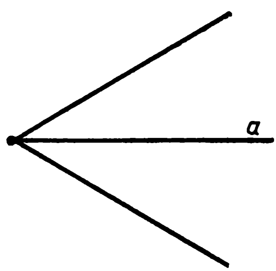


Рис. 56

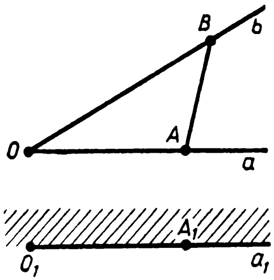


Рис. 57

Если из начала данного луча провести другой луч, то эти лучи ограничат некоторый угол. Говорят, что этот угол **отложен от данного луча**.

Пусть заданы луч a и некоторый угол (рис. 55). В предыдущем пункте описано, как можно с помощью реек построить угол, равный данному. Если вспомнить это построение, то станет ясно, что от луча a можно отложить ровно два угла, равных заданному углу (рис. 56), — по одному с каждой стороны от луча a (точнее, по разные стороны от прямой, содержащей луч a).

Эти наглядно ясные свойства угла мы применяем в геометрии как достойные признания в виде следующей аксиомы.

А к с и о м а о т к л а д ы в а н и я у г л а. ***От каждого данного луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один.***

Разберем подробнее, что это значит, вспомнив, какие углы считаются равными.

Пусть даны угол ab с вершиной O и луч a_1 с началом O_1 (рис. 57). Выберем одну из двух полуплоскостей, на границе которых лежит луч a_1, т. е. зададим одну из двух сторон от этого луча. Возьмем на лучах a и b какие-нибудь точки A и B и соединим их отрезком AB. На луче a_1 отложим отрезок O_1A_1, равный OA.

Аксиома, во-первых, утверждает, что из точки O_1 с заданной стороны от луча a_1 можно провести луч b_1 с таким свойством: если на b_1 отложить отрезок O_1B_1, равный OB, то отрезок A_1B_1 окажется равным отрезку AB (рис. 58).

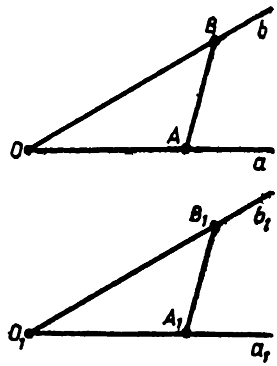


Рис. 58

Так как, кроме того, отрезок O_1A_1 равен отрезку OA, то получится, что $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$.

Поэтому согласно определению равенства углов $\angle a_1b_1 = \angle ab$, т. е. с каждой стороны от луча a_1 можно отложить угол, равный заданному углу.

Аксиома, во-вторых, утверждает, что такой угол можно отложить только один-единственный. А именно если как-то иначе строить угол, равный углу ab, с той же стороны от a_1, то получится тот же самый угол a_1b_1. Можно взять на сторонах угла ab вместо точек A и B любые другие и сделать то же построение, но, как утверждает аксиома, получится тот же угол a_1b_1.

Итак, более подробно аксиома откладывания угла формулируется так:

По любым отложенным от вершины данного угла на его сторонах отрезкам и соединяющей их поперечине можно от заданного луча в каждую сторону отложить угол, равный данному, и притом только один.

3.4. Построение угла, равного данному, циркулем и линейкой

В п. 3.2 построение угла, равного данному, мы проводили с помощью реек. Выполним такое построение с помощью циркуля и линейки и оформим его как решение задачи на построение.

З а д а ч а. *От данного луча по данную от него сторону отложить угол, равный данному углу.*

Р е ш е н и е. Запишем кратко условие задачи.

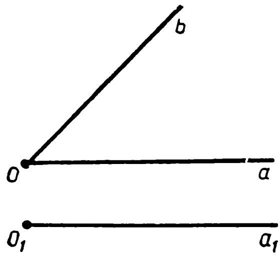


Рис. 59

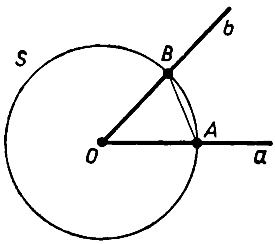


Рис. 60

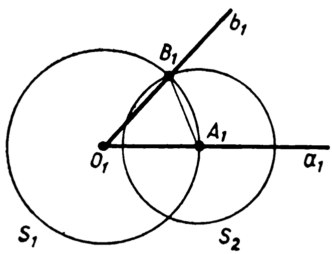


Рис. 61

Дано: 1) $\angle ab$ с вершиной O; 2) луч a_1 с началом O_1 (рис. 59).

Построить: угол a_1b_1, равный углу ab, лежащий с данной стороны от a_1.

Построение. Опишем вокруг точкк O какую-нибудь окружность S. Эта окружность пересечет лучи a и b соответственно в точках A и B (рис. 60). Отрезки OA и OB равны как радиусы окружности S. Вокруг точки O_1 опишем окружность S_1 радиусом, равным OA. Отметим точку A_1, где окружность S_1 пересечет луч a_1 (рис. 61). Получим отрезок O_1A_1, причем $O_1A_1 = OA$.

Теперь вокруг точки A_1 опишем окружность S_2 радиусом, равным отрезку AB. С нужной стороны от луча a_1 отметим точку B_1, где пересекаются S_1 и S_2.

Проведем из точки O_1 через точку B_1 луч, обозначим его b_1. Этот луч и будет стороной угла, который надо построить, т. е. мы утверждаем, что угол a_1b_1 равен углу ab.

Докажем это. Действительно, по построению окружности S_1 ее радиусы O_1A_1 и O_1B_1 равны OA, т. е. $O_1A_1 = O_1B_1 = OA$. Но так как $OA = OB$, то $O_1B_1 = OB$. Радиус A_1B_1 окружности S_2 равен AB, т. е. $A_1B_1 = AB$. Итак, имеем равенства отрезков на сторонах угла: $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$ — и равенство «поперечин»: $A_1B_1 = AB$. По определению равенства углов $\angle a_1b_1 = \angle ab$. Задача решена.

Исследуем, сколько решений имеет эта задача.

Согласно аксиоме откладывания угла эта задача имеет лишь одно решение (единственное решение), как бы мы ни проводили построение, какую бы окружность S мы ни провели в начале этого построения.

Замечание. Мы отложили от луча угол, равный данному и расположенный с указанной стороны. Между тем о том, что это можно сделать, говорится в аксиоме откладывания угла, т. е. принято без доказательства. А теперь мы как будто доказали это. Так нужно ли говорить об этом в аксиоме откладывания угла?

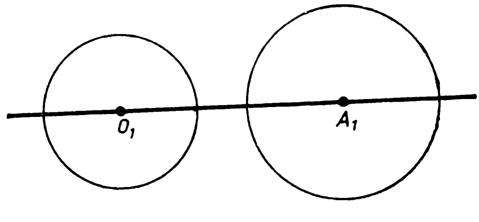


Рис. 62

Нужно! Ведь можно спросить: всегда ли получится указанное в решении построение? Всегда ли пересекутся окружности S_1 и S_2? Не будет ли так, как на рисунке 62? Не будет: построение всегда получится, в этом и состоит первое утверждение аксиомы.

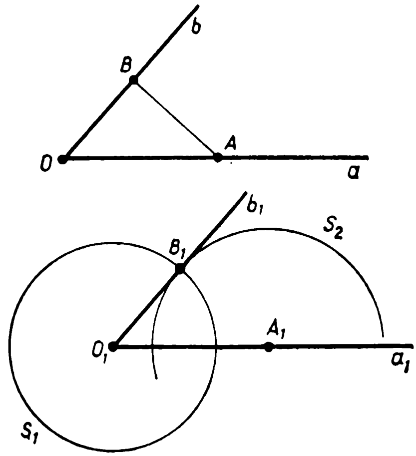


Рис. 63

Более того, на сторонах угла ab можно было отложить неравные отрезки OA и OB (рис. 63). Затем на луче a_1 отложить отрезок O_1A_1, равный отрезку OA, и описать вокруг точки O_1 окружность S_1 радиусом, равным отрезку OB, а вокруг точки A_1 окружность S_2 радиусом, равным отрезку AB. Аксиома откладывания угла утверждает, что эти окружности S_1 и S_2 пересекутся в двух точках с разных сторон от луча a_1. Выбрав одну из этих двух точек с заданной стороны от луча a_1, проводим через нее из точки O_1 луч b_1 и получаем искомый угол a_1b_1, равный углу ab.

Проведите самостоятельно еще раз это построение.

3.5. Другие построения угла

В предыдущем пункте описано построение угла циркулем и линейкой. Но при формулировке аксиом об откладывании угла говорилось о другом способе. Два стержня накладываются на стороны

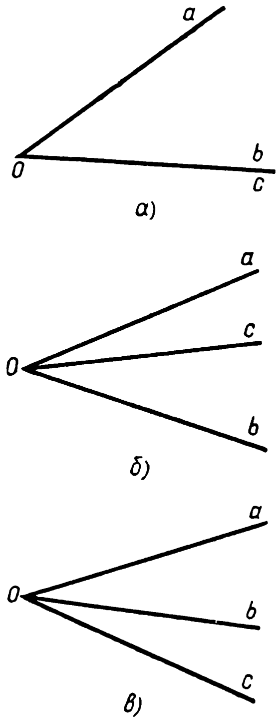


Рис. 72

2) Луч c идет внутри угла ab, т. е. угол ac является частью угла ab (рис. 72, *б*). В этом случае говорят, что угол ac, а также равный ему **угол pq меньше угла ab,** и пишут:

$$\angle ac < \angle ab \quad \text{и} \quad \angle pq < \angle ab.$$

3) Луч c идет вне угла ab, т. е. угол ab является частью угла ac (рис. 72, *в*). В этом случае говорят, что угол ac, а также равный ему **угол pq больше угла ab,** и пишут:

$$\angle ac > \angle ab \text{ и } \angle pq > \angle ab.$$

Теперь для острого и тупого угла можно дать такие определения.

Угол, меньший прямого угла, называется острым, а угол, больший прямого угла, называется тупым.

3.8. Биссектриса угла. Деление угла. Построение перпендикуляра

О п р е д е л е н и е. **Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам.**

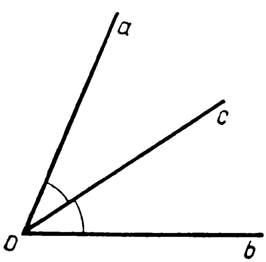


Рис. 73

Подробнее: биссектриса угла ab — это такой луч c, проходящий внутри угла ab из его вершины, что углы ac и cb равны (рис. 73).

Из этого определения следует, что *биссектриса развернутого угла делит его на два прямых угла, т. е. является перпендикуляром к сторонам развернутого угла* (см. рис. 69).

Покажем, как циркулем и линейкой построить биссектрису данного угла.

З а д а ч а. *Разделить данный угол пополам, т. е. построить его биссектрису.*

П о с т р о е н и е. Пусть дан угол ab с вершиной O. Опишем любую окружность с центром O. Она пересечет лучи a и b в каких-то точках A и B так, что $OA = OB$ (рис. 74).

Опишем вокруг точек A и B окружности радиусом, равным AB. Они пересекутся в какой-то точке C внутри угла. (Можно описать окружности любым другим, но одним и тем же радиусом, лишь бы он был достаточно большим, чтобы окружности пересеклись.) Проведем из точки O через точку C луч c. Он и будет биссектрисой угла ab. Докажем это.

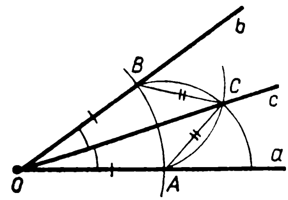


Рис. 74

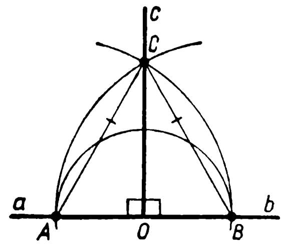


Рис. 75

Д о к а з а т е л ь с т в о. На сторонах углов ac и cb отложены от их вершины равные отрезки OA и OB, а отрезок OC у них общий. Концы отрезков OA и OC соединяет поперечина AC. Концы отрезков OB и OC соединяет поперечина BC. Так как $OC = OC$, $OA = OB$ и $AC = BC$ (как радиусы проведенных окружностей), то по определению равенства углов углы ac и cb равны. Итак, луч c — биссектриса угла ab. ■

Перпендикуляр к прямой в точке O и биссектриса развернутого угла, ограниченного этой прямой и имеющего вершиной точку O, — это одно и то же. Сделанное построение биссектрисы вместе с его обоснованием полностью годится и для развернутого угла. Ведь мы нигде не пользовались тем, что угол не развернутый. На рисунке 75 изображено то же построение для развернутого угла. Повторите еще раз для этого случая проведенное доказательство.

Таким образом, построение, изложенное выше, решает задачи: в данной точке прямой провести перпендикуляр к ней; построить прямой угол.

3.9. Задача о делении угла на равные части циркулем и линейкой

Итак, мы научились циркулем и линейкой делить пополам любой угол, а значит, мы можем разделить его циркулем и линейкой на 4, на 8, на 16 и т. д. равных частей. А можно ли циркулем и линейкой разделить любой угол, например, на три равные части? Эту задачу пытались решить еще древнегреческие математики. Она получила название задачи *о трисекции угла.* Некоторые углы, например прямой или развернутый угол, можно разделить на три равные части. Как это сделать, вы скоро узнаете. Но решения, пригодного для любого угла, подобного тому, как это было сделано для деления угла пополам, для задачи о трисекции угла ни в Древней Греции, ни позднее найти не удавалось. И лишь в XIX в. доказали, что для произвольных углов такого решения с помощью циркуля и линейки и не существует. Например, нельзя разделить циркулем и линейкой на три равные части угол в 60°. Оказалось, что вопрос о возможности решить задачу на построение циркулем и линейкой сводится к вопросу о разрешимости некоторых алгебраических задач. И ответ о неразрешимости задачи о трисекции угла циркулем и линейкой дала алгебра[1].

Задачи к § 3

Задачи к пункту 3.1

1. Нарисуйте два луча с общей вершиной O. а) Внутри одного из них возьмите точку A, внутри другого — точку B. Соедините их отрезком. Пусть точка X движется от A к B по отрезку AB. Какую фигуру образуют все лучи OX? б) Проведите окружность с центром в точке O. Пусть она пересекает стороны угла в точках C и D. Пусть точка Y движется по дуге CD от точки C к точке D. Какую фигуру образуют все лучи OY?

2. Нарисуйте угол с вершиной A. Из точки A внутри угла проведите: а) один луч; б) два луча; в) три луча. Сколько углов вы можете насчитать на каждом рисунке? Решите задачу в общем случае, когда число таких проведенных лучей равно n.

3. Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на двух данных прямых; г) два угла так, чтобы стороны одного пересекали стороны другого; д) углы ABC и ABD; е) углы BCD и BCE; ж) углы KLM и PLQ; з) углы STO, TOS и OST.

4. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух углов, отличных от развернутого? В объединении таких углов?

5. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух полуплоскостей? В их объединении?

6. а) Нарисуйте треугольник. Объясните, почему его можно считать пересечением трех углов, отличных от развернутого. Трех полуплоскостей? Двух углов, отличных от развернутого? б) Мож-

[1] Используя другие инструменты, эту задачу решить можно.

но ли дать такое объяснение для любого четырехугольника? Многоугольника?

7. Нарисуйте два угла так, чтобы: а) их пересечением и объединением были углы; б) угол получился только в их пересечении; в) угол получился только в их объединении; г) угол не получился ни в их пересечении, ни в их объединении.

Задачи к пунктам 3.2, 3.3, 3.4

А

8. Нарисуйте угол. Отложите на его сторонах от вершины два отрезка. По этим отрезкам постройте угол, равный данному. Потом выберите на его сторонах другие два отрезка, отложенные от вершины. Постройте угол, равный данному, по этим отрезкам, причем построение выполните на том же чертеже. Что вы увидели?

9. Нарисуйте угол с вершиной O и сторонами a и b.

1) Постройте угол, равный данному, с той же вершиной и так, чтобы: а) одной из сторон его был луч a; б) одной из его сторон был луч b; в) одна из его сторон лежала на прямой, проходящей через луч a.

2) Постройте угол, равный данному, так, чтобы его вершина лежала внутри данного угла, а стороны не пересекали сторон данного угла.

10. Нарисуйте окружность с центром в точке A. Отметьте на ней точки B и C. Постройте угол, равный углу BAC, так, чтобы одной его стороной был луч AC.

11. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, два угла которого равны углам данного треугольника.

12. Нарисуйте несколько поперечин данного угла. Равны ли они? Может ли угол иметь равные поперечины?

13. Отрезок AB виден из точки C под некоторым углом. (Иначе говоря, рассматривается угол ACB.) Нарисуйте другие отрезки, которые видны из точки C под тем же углом.

14. У двух углов оказались равны поперечины. Значит ли это, что углы равны?

15. Нарисуйте треугольник ABC. Для каждого из углов с вершинами в точках A, B, C укажите его поперечину.

16. Постройте угол B, равный данному углу A. Постройте угол C, равный данному углу A. Объясните, почему $\angle B = \angle C$.

Б

17. Нарисуйте отрезок PQ. Пусть из точки A он виден под некоторым углом, т. е. рассматривается угол PAQ. Постройте другие точки, из которых он виден под таким же углом.

18. Два угла имеют общую поперечину. Нарисуйте фигуру, являющуюся их пересечением, объединением. Могут ли они быть равны? Могут ли они иметь еще одну общую поперечину?

19. Однажды Феде понадобилось построить десять равных углов. Конечно, ему хотелось сделать это скучное задание побыстрее. Что бы вы ему для этого посоветовали?

20. Как построить на земле угол, равный данному, если у вас в руках один кусок веревки?

21. Нарисуйте очень маленький угол. От его стороны во внешнюю сторону отложите угол с той же вершиной и равный ему. Сделайте то же самое от стороны построенного угла. Сделайте так несколько раз. Какая получится фигура в их объединении, если продолжать делать такие построения достаточно долго?

Задачи к пункту 3.6

22. Нарисуйте угол. Постройте угол, смежный с ним. Сколько таких углов можно построить? Сравните полученные смежные углы. Какое предположение вы можете сделать? Можете ли вы его доказать?

23. а) Нарисуйте луч. Нарисуйте два луча так, чтобы вместе с данным они образовывали смежные углы. б) Нарисуйте прямую и отметьте на ней точку. Нарисуйте два луча с вершиной в этой точке. Сколько пар смежных углов вы получили? в) Нарисуйте два смежных угла. Какая фигура является их пересечением? Объединением?

24. Являются ли два угла смежными, если: а) их объединением является полуплоскость; б) их пересечением является луч; в) их объединением является полуплоскость, а пересечением — луч?

25. Нарисуйте угол, образованный лучами OA и OB. Постройте лучи OC и OD так, что $OC \perp OA$, $OD \perp OB$ (угольником). Какой по виду у вас получился угол COD? Можете ли вы дать объяснение тому, что увидели? Можете ли вы это доказать?

26. Сколько прямых углов вы можете насчитать на поверхности прямоугольного параллелепипеда?

27. На земле нарисован прямой угол. Как вы это проверите, имея в руках только кусок веревки?

Задачи к пункту 3.7

28. Нарисуйте треугольник. Выясните, какой угол в нем самый большой, а какой — самый маленький.

29. Нарисуйте прямоугольник с неравными сторонами. Проведите в нем диагональ. Установите, какой из образовавшихся острых углов больше.

30. На окружности отметьте две точки A и B. По одной из получившихся на окружности дуг движется точка X. Отметьте несколько положений этой точки и сравните углы, образованные отрезками XA и XB. Какое предположение вы можете сделать? Проведите такой же опыт для какой-нибудь другой линии.

31. Пусть угол A больше угла B, а угол B больше угла C. Докажите, что угол A больше угла C.

32. Нарисуйте угол. Нарисуйте угол, больший данного, и угол, меньший данного. Для любого ли заданного угла вы сможете построить два таких угла?

33. Нарисуйте два неравных угла. Как построить угол, больший меньшего из них, но меньший большего из них? Сколько таких углов можно построить?

34. Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то один из них острый, а другой — тупой; б) если один из двух углов острый, а другой — тупой, то они смежные?

Задачи к пункту 3.8

35. Нарисуйте угол. Разделите его на 4 равных угла. Как разделить его на 8, 16, 1024 равных угла?

36. На классной доске Федя нарисовал угол и его биссектрису. Пришел Вася и стер угол, а биссектрису оставил. Можете ли вы помочь Феде восстановить рисунок? А если Вася оставил биссектрису и точку внутри одной из сторон угла — тогда сможете?

37. Объясните, из чего следует, что биссектриса неразвернутого угла образует с каждой его стороной острый угол.

38. Нарисуйте два смежных угла. Постройте их биссектрисы. Что можно заметить на рисунке? Попробуйте это объяснить.

39. Нарисуйте угол. Продолжите его стороны за вершину. По-

стройте биссектрису угла и его продолжения. Что можно заметить на рисунке? Попробуйте это объяснить.

40. а) Нарисуйте четыре луча так, чтобы два из них были биссектрисами образовавшихся при этом углов. б) Можете ли вы нарисовать их так, чтобы каждый из них был биссектрисой какого-либо из образовавшихся углов? в) Сможете ли вы нарисовать так три луча?

41. а) На земле нарисован угол. Как разделить его пополам, имея в руках только веревку? б) На земле нарисована прямая, а на ней отмечена точка. Как с помощью веревки провести перпендикуляр к прямой через эту точку?

§ 4. ТРЕУГОЛЬНИКИ

4.1. Теоремы и доказательства

В геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все ее дальнейшие утверждения обосновываются путем логических рассуждений. Такое рассуждение, которое делает ясным, что высказанное утверждение верно, называется **доказательством**. Само же утверждение, которое доказывается, называется **теоремой.**

Мы уже получили необходимые сведения о простейших фигурах — об отрезках и углах и приняли их как аксиомы. А теперь начнем доказывать теоремы прежде всего о следующих по сложности фигурах — о треугольниках.

Геометрия, можно сказать, состоит из теорем и их доказательств, не считая аксиом, определений и задач. То, что говорится без доказательства, кроме аксиом, — это еще не геометрия, а отдельные сведения по геометрии. Фактически мы уже доказали некоторые теоремы, не называя их теоремами. Например, теорему о том, что через каждые две точки проходит прямая и притом только одна. Какие еще теоремы мы доказали в § 2 и 3?

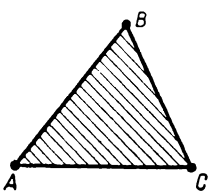


Рис. 76

4.2. Треугольник

Вспомним, что такое треугольник. Возьмем какие-нибудь три точки A, B, C, не лежащие на одном отрезке. Соединим их отрезками: AB, BC, CA (рис. 76). Получим фигуру, состоящую из этих трех отрезков и ограниченной ими части плоскости[1]. Такая фигура называется **треугольником.**

[1] Эти отрезки ограничивают, вообще говоря, две части плоскости — конечную и бесконечную. Имеется в виду конечная часть плоскости.

Точки A, B, C называются **вершинами**, а отрезки AB, BC, CA — **сторонами треугольника.** Сам треугольник называют или обозначают по его вершинам: треугольник ABC, или, короче, $\triangle ABC$.

Углы между сторонами называются **углами треугольника,** вершины углов — это вершины треугольника. Например, угол между сторонами AB и AC — это угол при вершине A. Углы треугольника обозначаются по их вершинам: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Вершина A и угол при ней называются **противолежащими стороне** BC, а сама эта сторона называется **противолежащей вершине** A. Аналогично вершина B и сторона AC — противолежащие друг другу, то же можно сказать о вершине C и стороне AB.

Углы при вершинах A и B называются **прилежащими к стороне** AB, так же как углы B и C—прилежащие к BC, а $\angle A$ и $\angle C$— к AC.

Стороны и углы треугольника называются его элементами.

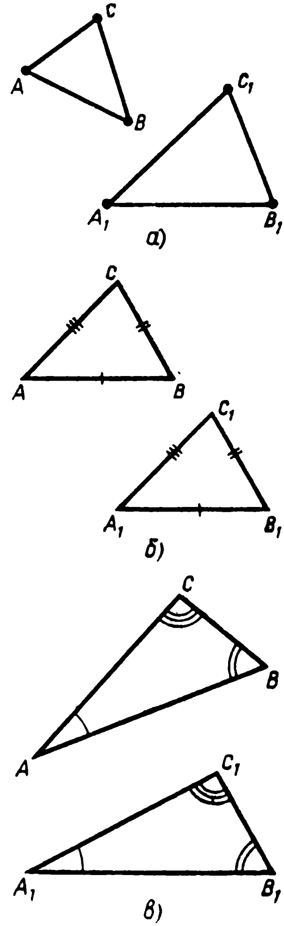


Рис. 77

4.3. Сопоставление элементов треугольников

Как было сказано еще в § 1, первая задача геометрии состоит в сравнении фигур. Мы будем сравнивать треугольники по их сторонам и углам.

При сравнении двух треугольников их вершины сопоставляются друг другу, или, другими словами, ставятся в соответствие друг другу. Удобно и принято обозначать сопоставляемые вершины одними и теми же буквами, различая их дополнительными значками: вершине A сопоставлена (соответствует) вершина A_1, вершине B — вершина B_1, а вершине C—вершина C_1 (рис. 77, *а*). Тем самым сопоставляются углы и стороны: стороне AB соответствует сторона A_1B_1 и т. д. (соответственные стороны соединяют соответственные вершины).

Часто приходится сравнивать треугольники, у которых сопоставляемые вершины обозначаются разными буквами. Например, пусть в треугольниках ABC и PQR вершине A сопоставляется вершина P, вершине B — вершина Q, а вершине C — вершина R. Укажите в этих треугольниках соответственные стороны.

Если соответственные стороны равны, то это отмечают поперечными черточками — одной, двумя, тремя, как на рисунке 77, *б*. Равные углы отмечают одинаковым числом дуг, как на рисунке 77, *в*.

4.4. Равенство углов треугольников

Можно ли по равенству одних элементов двух треугольников судить о равенстве других их элементов? Например, если соответственные стороны двух треугольников равны, то будут ли равны соответственные углы этих треугольников? Следующая теорема дает утвердительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1 *(о равенстве углов треугольников)*. ***Если у двух треугольников соответственные стороны равны, то равны и соответственные углы.***

Доказательство. Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 78) соответственные стороны равны, так что выполнены равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Нужно доказать, что тогда соответственные углы этих треугольников равны, т. е. выполняются равенства

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

Рассмотрим, например, углы A и A_1. Продолжим их стороны за точки B, C и B_1, C_1. Мы имеем два угла, на сторонах которых отложены равные отрезки: $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$.

Концы этих отрезков соединены поперечинами BC и B_1C_1. По условию теоремы они тоже равны: $BC = B_1C_1$.

А это по определению равенства углов значит, что эти углы равны. Итак, $\angle A = \angle A_1$.

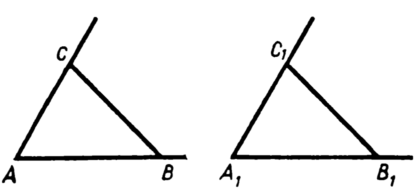


Рис. 78

Но совершенно так же, сопоставляя углы при вершинах B и B_1, а также C и C_1, убедимся, что $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Теорема доказана.

Разбор теоремы

и ее доказательства. Доказанная теорема состоит как бы из двух частей. Сначала говорится: «Если у двух треугольников стороны соответственно равны...», а потом: «...то равны и соответственные углы».

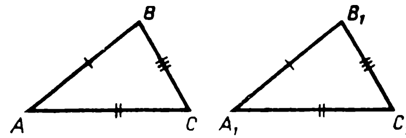


Рис. 79

Первая часть — это условие теоремы, вторая — заключение теоремы. Другими словами, можно сказать так: «При том условии, что соответственные стороны треугольников равны, выполняется заключение: соответственные их углы тоже равны». Заключение теоремы — это то, что надо доказать при данном условии.

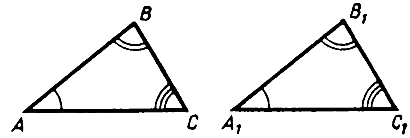


Рис. 80

Для ясности будем отдельно формулировать условие и заключение. Условие — это то, что дано, а заключение — то, что надо доказать. Тогда нашу теорему можно записать так:

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 79).

Доказать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 80).

Всегда в первую очередь надо понять, о чем идет речь, что утверждается в теореме, в аксиоме или в задаче. Ничего не заучивайте, не поняв. Надо приучиться понимать то, о чем говоришь. Геометрия может дать для этого хорошую тренировку.

Разберем доказательство нашей теоремы. Оно начинается так: «Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные стороны равны», т. е. пусть выполнено условие теоремы. И затем говорится, что надо доказать, а надо доказать, что соответственные углы равны.

Берется какая-то пара соответственных углов, например $\angle A$ и $\angle A_1$, и условие теоремы пересказывается в отношении к этим углам: мы стремимся понять, что значат условия теоремы для этих углов. А значат они, что отрезки на сторонах углов A и A_1 равны:

$$AB = A_1B_1 \text{ и } AC = A_1C_1.$$

Соединяющие их концы поперечины тоже равны:

$$BC = B_1C_1.$$

Теперь, вспомнив определение равенства углов, видим, что это и означает по определению, что углы A и A_1 равны. Для других углов вывод тот же. Теорема доказана.

Итак, разбирая доказательство, начинайте с того, что выясните, о чем идет речь в теореме, т. е. выясните, во-первых, что дано и, во-вторых, что надо доказать. Сделайте рисунок и запишите кратко условие теоремы и ее заключение. Подумайте, как определения используемых в теореме понятий, аксиомы и доказанные ранее теоремы помогут доказать данную теорему. Например, в данном случае для доказательства теоремы использовалось определение равенства углов.

Запишите таким образом доказательства утверждений, проведенные в § 2 и 3.

4.5. Равенство треугольников

По теореме 1 если у треугольников стороны равны, то и соответствующие углы равны. Значит, такие треугольники, как очевидно, совершенно одинаковы. Их называют равными. Поэтому можно дать такое определение равенства треугольников.

Определение. **Треугольники называются равными, если их соответственные стороны равны.**

Замечание. Часто, определяя равенство треугольников, говорят и о равенстве их углов. Но о равенстве углов можно не говорить, так как оно по теореме 1 следует из равенства сторон.

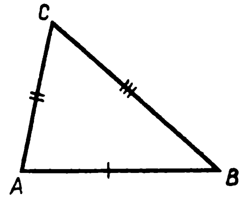
Пользуясь определением равенства треугольников, теорему 1 можно сформулировать так: ***в равных треугольниках соответственные углы равны.***

Поясним смысл определения равенства треугольников.

Представим себе, что на стороны данного треугольника наложены твердые тонкие рейки, скрепленные в концах. Получается жесткий каркас из трех реек. На него можно натянуть, скажем, кусок материи, покрывающий внутренность треугольника. Эту конструкцию можно переносить. Треугольники, на которые она будет в точности накладываться, и будут равны данному треугольнику.

Как уже говорилось, равенство фигур удобно устанавливать не наложением, а сравнением отрезков. Поэтому и равенство треугольников определяют по равенству сторон. Так же через равенство отрезков определяется равенство любых фигур, но об этом будет сказано позднее.

4.6. Построение треугольника, равного данному, по двум сторонам и углу между ними



Построить треугольник, равный данному, — задача несколько неопределенная, так как такой треугольник можно строить в разных положениях. Поставим более точную задачу.

З а д а ч а. *Пусть даны треугольник ABC, луч a и выбрана одна из сторон от луча a. Требуется построить треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, так, чтобы его вершина A_1, соответствующая A, лежала в начале луча a и сторона A_1B_1, соответствующая AB, лежала на луче a, а сам треугольник $A_1B_1C_1$ располагался с выбранной стороны от луча a* (рис. 81).

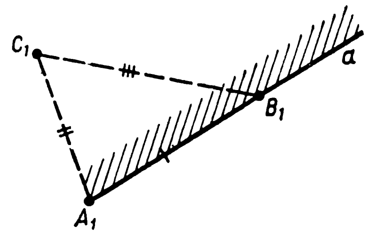


Рис. 81

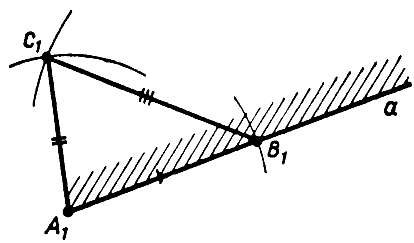


Рис. 82

Д а н о: $\triangle ABC$, луч a с началом A_1, отмечена сторона от луча a.

П о с т р о и т ь: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ так, чтобы A_1B_1 лежала на a и $\triangle A_1B_1C_1$ лежал с отмеченной стороны от a.

П о с т р о е н и е. Отложим от луча a в отмеченную сторону угол A_1, равный углу A треугольника ABC. Согласно аксиоме откладывания угла это можно сделать, отправляясь от любых отрезков на сторонах данного угла. Мы возьмем в качестве этих отрезков стороны AB и AC данного треугольника. Построение произведем так, как было сказано в п. 3.4.

Отложим на луче a отрезок A_1B_1, равный AB (рис. 82). Опишем вокруг точек A_1 и B_1 окружности радиусами AC и BC. В их пересечении (с нужной стороны от луча a) получим такую точку C_1, что $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. Проведя отрезки A_1C_1 и B_1C_1, получим треугольник $A_1B_1C_1$.

Д о к а ж е м, что $\triangle A_1B_1C_1$ искомый. Действительно, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, так как их соответственные стороны равны: $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Его вершина A_1 лежит в начале луча a, сторона A_1B_1 лежит на этом луче, а сам $\triangle A_1B_1C_1$ лежит с отмеченной стороны от a. Задача решена.

Замечание. Про угол A мы в конце и не вспомнили, это не нужно. Но аксиома об откладывании угла обеспечивает то, что описанное построение дает точку C_1, как на это было уже указано в замечании в п. 3.4.

4.7. Равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними

Теорема 2 *(признак равенства треугольников).*

Если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника равны двум сторонам и заключенному между ними углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 83).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, т. е. что, кроме равенств $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, выполняется равенство $BC = B_1C_1$.

Доказательство. Для доказательства равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ надо доказать равенство сторон BC и B_1C_1, так как по условию остальные их стороны соответственно равны.

Если построить $\triangle A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC, так, как это описано в предыдущем пункте,то сторона B_2C_2 будет равна стороне BC по построению. Тогда останется доказать, что $B_2C_2 = B_1C_1$.

Мысленно построим треугольник $A_2B_2C_2$ так, чтобы вершина A_2 совпадала с точкой A_1, сторона A_2B_2, соответствующая AB, лежала на луче A_1B_1 (т. е. лучи A_2B_2 и A_1B_1 совпали) и чтобы сам $\triangle A_2B_2C_2$ располагался с той же стороны от этого луча, что и $\triangle A_1B_1C_1$. Докажем, что в этих треугольниках стороны B_1C_1 и B_2C_2 совпадают.

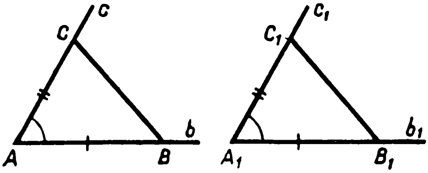


Рис. 83

Треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC. Поэтому его угол A_2 равен углу A. По условию теоремы $\angle A_1 = \angle A$.

Углы A_1 и A_2, равные углу A, отложены от луча A_1B_1 в одну сторону. Но от данного луча в данную сторону можно отложить только один угол, равный данному. Следовательно, совпадут и лучи A_2C_2 и A_1C_1. А значит, стороны A_2C_2 и A_1C_1 треугольников $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ будут лежать на одном луче, как и стороны A_2B_2 и A_1B_1, лежащие на луче A_1B_1.

Покажем, что точка B_2 совпадает с точкой B_1. По условию $A_1B_1 = AB$, а по построению $A_2B_2 = AB$. Но на одном луче A_1B_1 от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному. Поэтому точки B_1 и B_2 совпадут.

Совершенно так же убеждаемся, что совпадут и точки C_1 и C_2. Тогда $B_2C_2 = B_1C_1$, так как две точки можно соединить только одним отрезком (более того, отрезки B_2C_2 и B_1C_1 совпадают).

Отсюда получаем, что все стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны: $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ по условию, а $BC = B_1C_1$ по доказанному.

Значит, треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по определению. Теорема доказана.

4.8. Виды треугольников

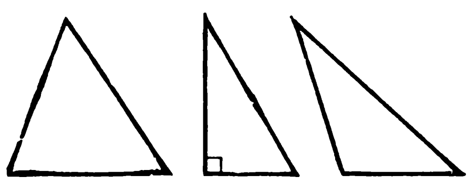
Различают три вида треугольников: 1) **остроугольные**, у которых все углы острые (рис. 84, *а*); 2) **прямоугольные**, один из углов которых прямой (рис. 84, *б*); 3) **тупоугольные**, один из углов которых тупой (рис. 84, *в*).

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются **катетами**, а сторона, противолежащая прямому углу, — **гипотенузой**.

Дополнение к § 4

I. Сравнение равных углов

Доказав признак равенства треугольников, мы сможем теперь доказать, что ***два угла, равные третьему, равны друг другу,*** т. е. доказать утверждение, аналогичное аксиоме сравнения отрезков.



а) б) в)

Рис. 84

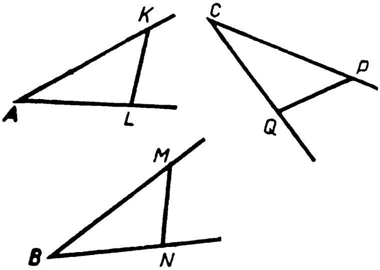


Рис. 85

Итак, пусть $\angle A = \angle B$ и $\angle A = \angle C$. Возьмем на сторонах угла A любые две точки K и L и отложим на сторонах углов B и C отрезки, соответственно равные отрезкам AK и AL (рис. 85):

$BM = AK$, $BN = AL$ и $CP = AK$, $CQ = AL$.

Так как $BM = AK$, $BN = AL$ и $\angle A = \angle B$, то по признаку равенства треугольников (теорема 2) $\triangle AKL = \triangle BMN$, и потому $MN = KL$.

Точно так же $\triangle CPQ = \triangle AKL$ (поскольку $CP = AK$, $CQ = AL$ и $\angle C = \angle A$), и потому $PQ = KL$.

По аксиоме сравнения отрезков из равенств $MN = KL$ и $PQ = KL$ вытекает, что $MN = PQ$.

На сторонах углов B и C отложены соответственно равные отрезки, и их концы соединяют равные поперечины. Поэтому $\angle B = \angle C$.

II. Равенство треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам

Докажите следующую теорему (ее называют вторым признаком равенства треугольников):

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны, т. е. если даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $AC = A_1C_1$ и $AB = A_1B_1$ (рис. 86).

Указание. Построить треугольник $A_1B_1C_2$, равный треугольнику ABC (как при доказательстве теоремы 2), и убедиться, что он совпадает с треугольником $A_1B_1C_1$.

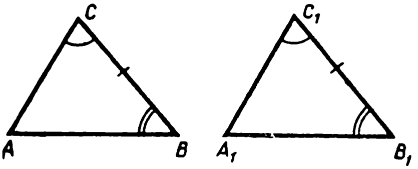


Рис. 86

Задачи к § 4

Основные задачи

1. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$.

2. Докажите, что если два угла O и O_1 равны и от их вершин на сторонах отложены равные отрезки: $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$, то $AB = A_1B_1$.

3. Два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого. Докажите, что эти треугольники равны.

4. Даны две точки A и B. Докажите, что все точки X, такие, что $XA = XB$, лежат на перпендикуляре к отрезку AB, проведенному через его середину (такой перпендикуляр называется серединным для AB).

5. Через середины двух отрезков AB, BC, не лежащих на одной прямой, проведены перпендикуляры к ним. Пусть они пересекаются в точке O. Докажите, что $OA = OB = OC$.

Задачи к пункту 4.2

6. Нарисуйте треугольник. Проведите 3 прямые, параллельные одной его стороне и пересекающие треугольник. Сколько треугольников получилось на рисунке? Ответьте на тот же вопрос, если прямых проведено 4, 5, некоторое число n.

7. На прямой взяты 3 точки, а вне ее взята точка A. Точку A соединили отрезками с точками на прямой. Сколько треугольников получилось на рисунке? Сколько получится треугольников, если на прямой взять 4, 5, n точек, где n — некоторое число?

8. 1) Сколько получится на рисунке треугольников, если: а) соединить отрезками середины сторон треугольника; б) провести диагонали в четырехугольнике; в) провести все диагонали в пятиугольнике; г) провести все диагонали в шестиугольнике?

2) Нарисуйте две параллельные прямые. На каждой из них отметьте одинаковое число точек. Каждую отмеченную точку одной прямой соедините отрезком с каждой отмеченной точкой другой прямой. Сколько получилось треугольников с вершинами в этих точках?

3) Нарисуйте какой-нибудь многоугольник, у которого много сторон. Проведите в нем все диагонали. Сколько получилось треугольников, вершинами которых являются вершины многоугольника?

9. Нарисуйте четырехугольник. Прямолинейными разрезами разделите его на 2, 3, 4, 5 треугольников. Сможете ли вы разделить его на любое указанное число треугольников? Нарисуйте такой четырехугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разделить на 3 треугольника.

10. Одним и тем же способом можно разделить четырехугольник на 4 треугольника, пятиугольник на 5 треугольников и вообще любой n-угольник на n треугольников. Что это за способ?

11. Нарисуйте треугольники ABC, BCD, CDE, ADE, BDE, BCE. Какие еще треугольники можно нарисовать с вершинами в этих точках?

12. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте треугольник A_1BD. Нарисуйте на его поверхности другой такой же треугольник, который не имеет с первым общих точек. Нарисуйте на его поверхности еще один такой же треугольник, имеющий с первым общую сторону. Сколько таких треугольников в прямоугольном параллелепипеде?

13. Нарисуйте на картоне или на плотной бумаге остроугольный треугольник. Вырежьте его. Отметьте его середины. Проведите три отрезка, соединяющие отмеченные точки. Если вы согнете эту фигуру по проведенным отрезкам и склеите между собой соседние стороны треугольников, то получите пространственную фигуру, которая называется треугольной пирамидой (тетраэдром). Треугольники на поверхности пирамиды — это ее грани. Сколько граней у треугольной пирамиды? Стороны этих треугольников — это ее ребра. Сколько ребер у треугольной пирамиды? Вершины этих треугольников — это вершины треугольной пирамиды. Сколько вершин у треугольной пирамиды?

14. На рисунке 87 выполните следующее: отметьте сами какой-

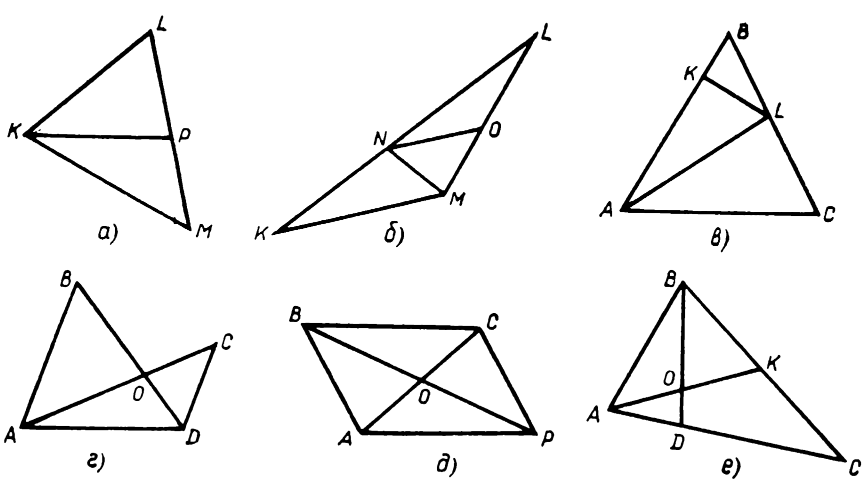


Рис. 87

нибудь угол, укажите для него противолежащую сторону в соответствующем треугольнике; отметьте какую-нибудь сторону в треугольнике и укажите для нее противолежащий угол и прилежащие углы в соответствующем треугольнике.

15. А эту задачу попробуйте сделать без рисунка. В треугольнике KPT для каждого угла назовите противолежащую сторону и для каждой стороны назовите противолежащий угол и прилежащие углы. Потом сделайте рисунок и проверьте себя.

16. Даны треугольники ABC и KLM. а) Сопоставим стороне AB сторону KL. Как могут быть сопоставлены остальные стороны этих треугольников? б) Сопоставим вершине B вершину M. Как могут быть сопоставлены другие вершины этих треугольников? Как могут быть сопоставлены его стороны? в) Сколькими способами можно сопоставить эти треугольники?

Задачи к пунктам 4.4, 4.5

17. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, ему равный.

18. На окружности с центром O взяты точки A, B, C так, что $AB = BC$. Докажите, что треугольники AOB и BOC равны. Укажите в них равные углы.

19. Укажите на рисунке 88 равные треугольники. Укажите в них равные углы.

20. Нарисуйте окружность. Отметьте на ней точки A и B. От-

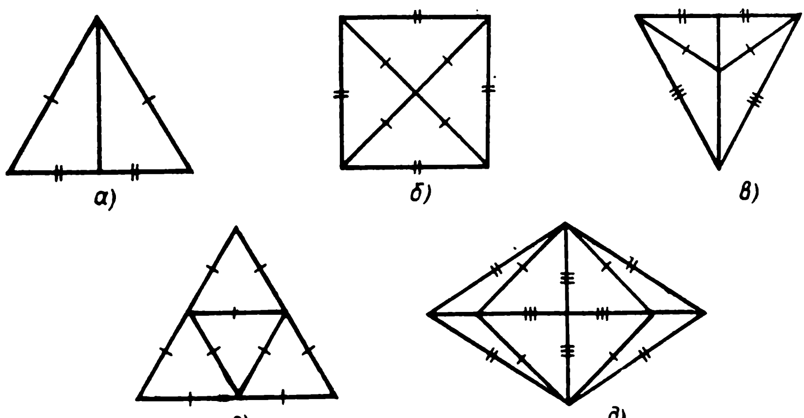


Рис. 88

метьте на ней точки C и D, такие, что $CD = AB$. Из какой точки эти отрезки видны под равными углами?

21. Четыре точки A, B, K, L таковы, что $KA = KB$, $LA = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из точек A и B под равными углами.

22. Нарисуйте отрезок и возьмите точку вне его. Из этой точки данный отрезок виден под некоторым углом. Постройте отрезок, равный данному, который виден из данной точки под таким же углом.

23. Дан четырехугольник $ABCD$. Укажите в нем равные углы, если: а) противоположные стороны равны между собой; б) $AB = BC$, $AD = CD$; в) все стороны равны; г) $AB = CD$, $AC = BD$.

24. а) Однажды Феде понадобилось построить 10 равных треугольников. Как бы это сделать побыстрее? б) В другой раз ему понадобилось построить 10 треугольников, равных данному. А как справиться побыстрее с этим заданием?

25. В треугольной пирамиде противоположные ребра равны между собой. (Таких ребер в ней три пары. Укажите их.) Докажите, что все ее грани равны.

26. Для каждой стороны треугольника ABC в треугольнике $A_1B_1C_1$ есть равная сторона. Найдется ли для каждой стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в треугольнике ABC равная сторона?

27. Для каждой стороны треугольника BCD в треугольнике $B_1C_1D_1$ есть равная сторона, и, наоборот, для каждой стороны треугольника $B_1C_1D_1$ в треугольнике BCD есть равная сторона. Равны ли эти треугольники?

28. Даны два треугольника. Известно, что для каждой стороны одного из них в другом есть меньшая сторона. Докажите, что эти треугольники не равны.

29. Сможете ли вы из шести одинаковых палочек составить четыре равных треугольника?

Задачи к пункту 4.7

30. Укажите на рисунке 89 равные треугольники. Укажите в них равные стороны и равные углы.

31. На двух сторонах угла O взяты точки K и L так, что $OK = OL$. Точка X движется по биссектрисе угла, начиная от вершины. Сравните отрезки XK и XL, а также углы, под которыми из X видны отрезки OK и OL.

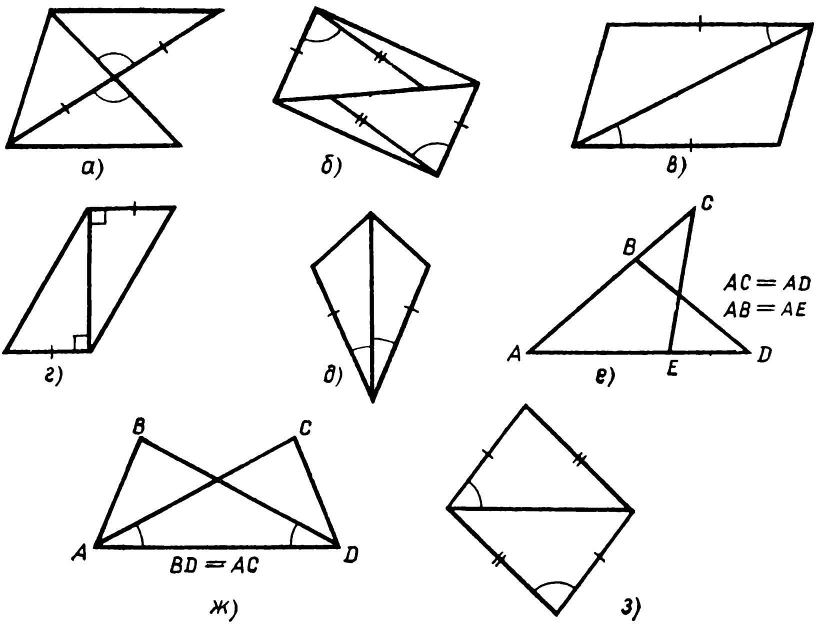


Рис. 89

32. Отрезок AB повернули два раза в одном направлении на один и тот же угол вокруг точки A. Обозначим первое положение точки B как B_1, а второе положение точки B как B_2. Докажите, что $BB_1 = BB_2$.

33. Найдите в четырехугольнике $ABCD$ равные отрезки и равные углы, кроме заданных, если: а) $AB = BC$ и BD — биссектриса угла B; б) $BC = AD$ и $\angle BCA = \angle CAD$; в) $AB = CD$ и $\angle A = \angle D$.

34. Нарисуйте отрезок PQ. Возьмите точку A, такую, что $AP \neq AQ$. Соедините точку A с серединой B отрезка PQ. Объясните, почему AB не является перпендикуляром к отрезку PQ.

35. Отметьте две точки C и D. Какой фигурой является множество точек X фигуры F, таких, что $XC = XD$, если фигура F: а) отрезок; б) прямая; в) треугольник; г) окружность; д) круг?

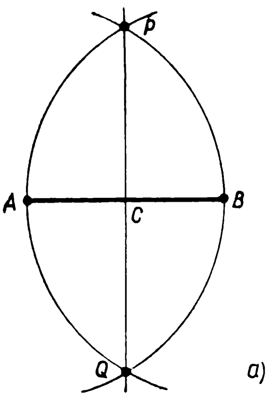
36. Мимо двух поселков проходит шоссе. На нем нужно сделать остановку автобуса для жителей поселков. Где вы предложите ее сделать? Сначала подумайте, из каких соображений выбрать место для остановки.

37. Нарисуйте треугольную пирамиду $PABC$. Пусть углы в гранях PAB, PBC, PAC при вершине P равны, а ребра PA, PB, PC равны между собой. Докажите, что в этой пирамиде равны между собой ребра AB, BC, AC.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПЕРВЫХ ТЕОРЕМ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

5.1. О значении доказанных теорем

Две доказанные теоремы о треугольниках являются самыми основными теоремами геометрии. Это связано с тем, что, не считая точек и отрезков, треугольники являются основными фигурами геометрии, так что почти все вопросы геометрии на плоскости так или иначе приводятся к вопросам, касающимся треугольников. Заметим, что большие расстояния на земле измеряют посредством так называемой триангуляции, т. е. с помощью треугольников. Доказанными теоремами мы будем пользоваться много раз в дальнейшем.



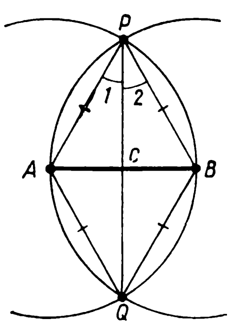


Рис. 90

5.2. Деление отрезка пополам и опускание перпендикуляра

Теоремы о треугольниках помогут нам решить две важные задачи на построение. Введем одно обозначение. Если A — точка фигуры F, то пишут $A \in F$ и говорят: «Точка A принадлежит фигуре F».

З а д а ч а. *Разделить данный отрезок пополам, т. е. найти середину отрезка.*

Д а н о: отрезок AB.

П о с т р о и т ь: точку $C \in AB$, такую, что $AC = CB$.

П о с т р о е н и е. Пусть дан отрезок AB. Опишем вокруг его концов A и B окружности одним радиусом, равным AB (рис. 90). Они пересекутся в некоторых точках P и Q с разных сторон от прямой AB. Соединим точки P и Q отрезком. Он пересечет данный отрезок AB в некоторой точке C. Эта точка и будет серединой отрезка AC.

Д о к а ж е м это. Рассмотрим треугольники APQ и BPQ. У них стороны AP, AQ, BP, BQ равны как радиусы проведенных окружностей, а сторона PQ общая.

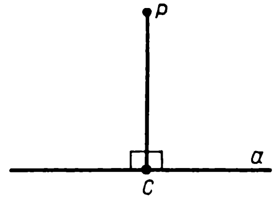


Рис. 91

Поскольку в треугольниках APQ и BPQ соответственные стороны равны ($AP = BP$, $AQ = BQ$, $PQ = PQ$), то по теореме 1 равны соответственные углы этих треугольников. В частности, равны углы при их общей вершине P:

$$\angle 1 = \angle 2.$$

Рассмотрим теперь треугольники APC и BPC. У них стороны AP и BP равны, сторона PC общая и углы при вершине P равны: $\angle 1 = \angle 2$. Поэтому по теореме 2 эти треугольники равны, т. е. равны их третьи стороны: $AC = CB$. А это и значит, что точка C — середина отрезка AB. Задача решена.

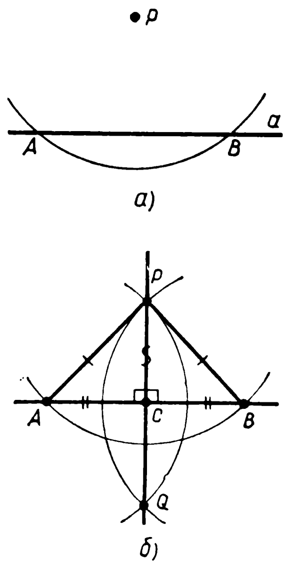


Рис. 92

З а д а ч а. *Опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую.*

Д а н о: прямая a и не лежащая на ней точка P (рис. 91).

П о с т р о и т ь: перпендикуляр PC из P на a, т. е. найти такую точку $C \in a$, что $PC \perp a$.

П о с т р о е н и е. Опишем вокруг точки P окружность, которая пересекла бы прямую a в двух точках; обозначим их A и B (рис. 92). Вокруг точек A и B опишем окружности радиусами, равными AP. Они пересекутся в двух точках (см. рис. 91). Одной из этих точек будет точка P, а другой — некоторая точка Q, лежащая не с той стороны от прямой a, где лежит точка P. Отрезок PQ пересечет AB в его середине — точке C, и отрезок PC будет искомым перпендикуляром к прямой a.

Д о к а ж е м это. Так же как в предыдущей задаче о делении отрезка пополам, получаем, что $\triangle APC = \triangle BPC$. Поэтому $\angle ACP = \angle BCP$. Так как эти углы смежные, то они прямые. Следовательно, $PC \perp a$. ■

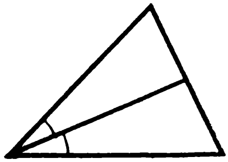


Рис. 93

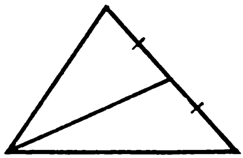


Рис. 94

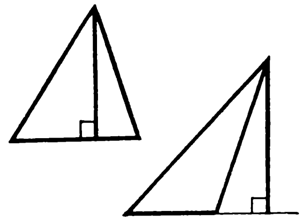


Рис. 95

5.3. Биссектриса, высота и медиана треугольника

Итак, мы теперь умеем делить пополам отрезки и углы, а также проводить перпендикуляры. Поэтому в треугольниках мы теперь можем строить биссектрисы, высоты и медианы. Напомним их определения.

В треугольнике **биссектрисой** называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны треугольника (рис. 93).

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 94).

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение (рис. 95).

Из каждой вершины треугольника исходят, таким образом, медиана, биссектриса и высота. Эти отрезки, вообще говоря, различны. Случай, когда они совпадают, рассмотрен в следующем пункте.

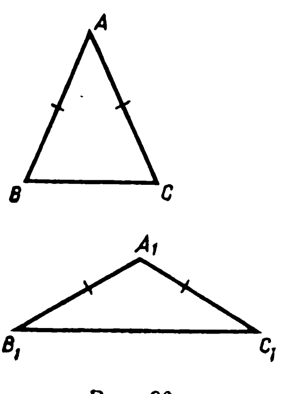


Рис. 96

5.4. Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равнобедренным,** если у него две стороны равны. Эти стороны называются **боковыми,** а третья сторона — **основанием** (рис. 96).

Если все три стороны треугольника равны, то треугольник называется **равносторонним** (любые две его стороны могут считаться боковыми).

Равнобедренный треугольник обладает замечательными свойствами, которые выражены в следующей теореме.

Т е о р е м а 3 *(о равнобедренном треугольнике).* ***В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведенная из вершины, противоположной основанию, является также биссектрисой и высотой.***

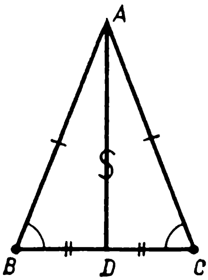


Рис. 97

Д а н о: $\triangle ABC$, $AB = AC$, AD — медиана, т. е. $BD = DC$.

Д о к а з а т ь: 1) $\angle B = \angle C$; 2) AD — биссектриса, т. е. $\angle BAD = \angle CAD$; 3) AD — высота, т. е. $AD \perp BC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим треугольники ABD и ACD (рис. 97). У них стороны равны: $AB = AC$, $BD = DC$ — и сторона AD общая. Значит, по теореме 1 у этих треугольников равны их соответственные углы, т. е.

$\angle B = \angle C$, $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC$.

Первое из этих равенств — это равенство углов при основании треугольника ABC, т. е. доказано первое утверждение теоремы.

Второе равенство означает, что отрезок AD — биссектриса, т. е. что медиана AD — биссектриса.

Третье равенство означает, что смежные углы ADB и ADC равны, т. е. $AD \perp BC$. Следовательно, медиана AD — высота. ■

Попробуйте найти другие доказательства этой теоремы.

5.5. Равнобедренные треугольники в практике

Дом с двускатной крышей выглядит с торцовой стороны как пятиугольник, составленный из прямоугольника и равнобедренного треугольника (рис. 98, *а*).


а)

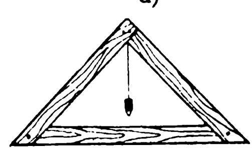

б)

Рис. 98

Крышу поддерживают наклонные балки-стропила. Каждая их пара одинаковой длины скрепляется с горизонтальной балкой, так что вместе они образуют стороны равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием (рис. 98, *б*). Углы


а)

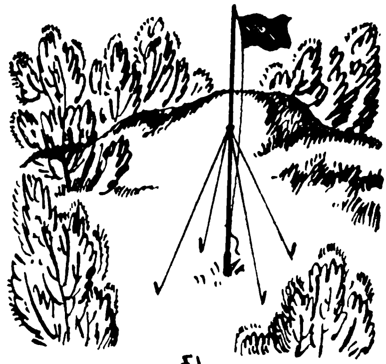

б)

Рис. 99

при основании — это углы наклона стропил, они определяют крутизну скатов крыши. Верхний угол, где сходятся стропила, расположен как раз над серединой горизонтальной балки (вертикаль — высота является медианой).

Когда ставят палатку, то с передней и задней стенки получается равнобедренный треугольник с невысоким прямоугольником снизу. Крыша продолжается крыльями, которые растягиваются растяжками по боковым сторонам равнобедренного треугольника (рис. 99, *а*). Посредине передней и задней стенок стоят стойки; если палатка стоит правильно, они перпендикулярны горизонтали — медиана является одновременно высотой.

Устанавливая вертикально мачту, прикрепляют к ней растяжки равной длины. Когда они натянуты, получаются боковые стороны равнобедренного треугольника, а мачта, упираясь в основание посредине, оказывается перпендикулярной ему (рис. 99, *б*). Растяжки в двух направлениях (в двух плоскостях) обеспечивают вертикальность мачты (перпендикулярность горизонтальному основанию).

5.6. Ось симметрии

Еще одним замечательным свойством равнобедренного треугольника является его симметричность. Прямая, проходящая через его вершину и середину его основания, является его **осью симметрии** (рис. 100). (Как доказано в теореме 3, эта прямая проходит через высоту и биссектрису из той же вершины.) Это означает следующее.

Ось симметрии разбивает равнобедренный треугольник на две равные части — два треугольника, лежащие по разные стороны от оси. Эти части — треугольники — можно мысленно совместить, как бы перегибая треугольник по оси симметрии.

Точнее можно сказать так. Возьмем любую точку A равнобедренного треугольника T, не лежащую на его оси симметрии l. Опустим перпендикуляр AB из точки A на прямую l и продолжим за точку B отрезок AB на отрезок BC, равный отрезку AB. Полученная точка C тоже лежит в треугольнике T. Про точки A и C говорят, что они симметричны относительно l. Точкам, лежащим на оси l, симметричны они сами. Вершины основания равнобедренного треугольника симметричны друг другу относительно его оси, а вершина, не лежащая на основании, симметрична сама себе.

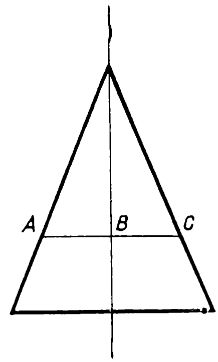


Рис. 100

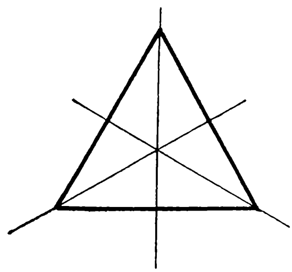


Рис. 101

У равностороннего треугольника три оси симметрии (рис. 101).

Симметричностью обладают и другие фигуры.

Оси симметрии есть у отрезка, угла, квадрата, прямоугольника, круга и других фигур (рис. 102). Например, у отрезка две оси

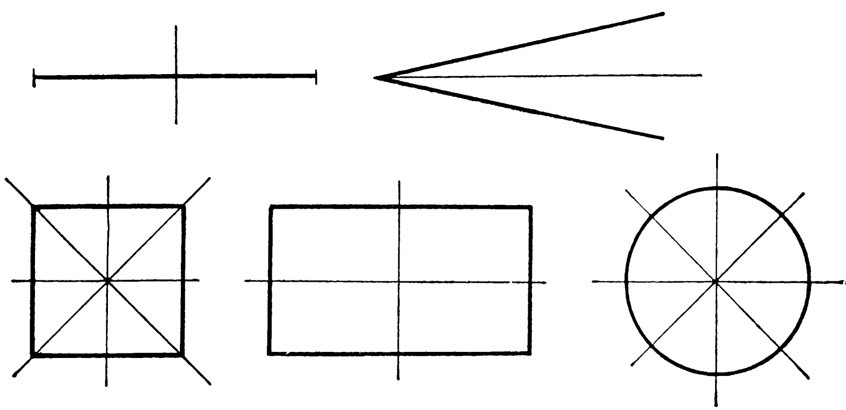


Рис. 102

симметрии — прямая, на которой лежит отрезок, и прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно ему. Эту прямую называют **серединным перпендикуляром отрезка.**

Задачи к § 5

Основные задачи

1. Пусть AB и BC — два отрезка, не лежащие на одной прямой. Постройте перпендикуляры к этим отрезкам через их середины. Точку их пересечения обозначьте O. Проведите окружность с центром в точке O и радиусом OA. а) Объясните, почему она проходит через точки B и C. (Если она у вас не проходит через эти точки, то сделайте построение снова и поточнее.) б) Постройте перпендикуляр из точки O на прямую AC. Можно заметить, и вы, конечно, это сделали, что он попадет в середину отрезка AC. Объясните, почему это произошло.

2. Постройте перпендикуляры через середины всех сторон треугольника. Что можно заметить? Что из этого следует? Нарисуйте треугольник. Как вы построите окружность, проходящую через все его вершины?

3. Докажите, что биссектриса угла треугольника, идущая между равными его сторонами, является его медианой.

4. В треугольнике одна из медиан оказалась его высотой. Докажите, что такой треугольник равнобедренный. Каким будет треугольник, у которого все медианы являются его высотами?

5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к его боковым сторонам, равны.

6. Докажите, что в равностороннем треугольнике углы равны.

7. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка O, такая, что $OA = OB = OC$. Докажите, что она лежит на биссектрисах всех углов треугольника. Что отсюда следует?

Задачи к пункту 5.2

8. Разделите данный отрезок на 4 равных отрезка. Как разделить его на 8, 16, 512 равных отрезков?

9. Нарисуйте четырехугольник. Постройте отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон (такие отрезки называются средними линиями). Пусть P — точка их пересечения. Проведите его диагонали. Постройте отрезок, соединяющий их середины. Как расположена точка P относительно этого отрезка?

10. Постройте перпендикуляр к данному отрезку в его конце.

11. Нарисуйте треугольник ABC. Постройте точку D, такую, что $DA = DC$ и $\angle DBA = \angle DBC$. Получилось ли у кого-нибудь так, что точка D лежит в треугольнике? Из построенной точки D постройте перпендикуляры на прямые AB и AC. Получилось ли у кого-нибудь так, что оба эти перпендикуляра попали на стороны треугольника?

12. Постройте окружность. Отметьте на ней несколько точек. Соедините каждые две последовательные точки отрезком. Постройте перпендикуляры через середины этих отрезков. Что вы заметили? Как вы это объясните? Можете ли вы это доказать? Изменится ли результат, если эти точки взять не на одной окружности? Что из этого следует?

Задачи к пункту 5.3

13. Федя нарисовал на доске треугольник и медиану в нем. Пришел Вася, стер почти весь треугольник, оставил только медиану и еще одну вершину. Сможет ли Федя восстановить исходный рисунок?

14. Нарисуйте треугольник. Постройте в нем три медианы. Что вы заметили?

15. а) Федя нарисовал треугольник, а в нем биссектрису. Пришел Вася, стер треугольник, оставил только биссектрису да еще одну вершину. Сможет ли Федя восстановить исходный рисунок? б) В другой раз Федя нарисовал треугольник, а в нем две биссектрисы. Но пришел Вася, стер треугольник, оставил только две вершины и точку пересечения биссектрис. Сможет ли Федя восстановить исходный рисунок?

16. Нарисуйте треугольник. Постройте биссектрисы всех его углов. Что вы заметили?

17. Может ли высота треугольника совпадать с его стороной?

18. Нарисуйте треугольник, две высоты которого выходят за его границы. Можете ли вы нарисовать такой треугольник, за границами которого находится ровно одна высота? Если у вас такого треугольника не получится, то объясните почему.

19. Нарисуйте такой треугольник, у которого точка пересечения двух его высот: а) лежит внутри треугольника; б) лежит на его границе; в) не лежит в треугольнике.

20. а) Федя нарисовал на доске треугольник и его высоту. Пришел Вася, стер треугольник, оставил только высоту и вершину. Сможете ли вы помочь Феде восстановить исходный рисунок? б) В другой раз Федя нарисовал треугольник, а в нем две высоты. Вася стер треугольник, а высоты оставил. Сможете ли вы помочь Феде восстановить исходный рисунок?

21. Нарисуйте треугольник. Постройте все его высоты. Проведите прямые, на которых они лежат. Что вы заметили?

22. Нарисуйте треугольник с неравными сторонами. Из какой-нибудь его вершины проведите медиану, биссектрису и высоту. Заметьте, в каком порядке они расположились, если смотреть от меньшей стороны. А в каком порядке они расположились у соседа?

Задачи к пункту 5.4

А

23. На медиане AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) взята точка K. Докажите, что равны треугольники: а) BDK и CDK; б) ABK и ACK.

24. Отметьте в тетради четыре вершины квадрата со стороной в две клеточки. Отметьте также середины его сторон и точку пересечения его диагоналей. У вас окажутся отмеченными девять точек. Сколько вы можете насчитать равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках?

25. В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На стороне BC взяты точки K и L так, что $BK = CL$. Докажите, что треугольник KAL равнобедренный.

26. В треугольнике ABC равны стороны BA и BC. Точка K — середина стороны AC. От вершины B на сторонах BA и BC отложены равные отрезки BL и BM. Докажите, что треугольник KLM равнобедренный.

27. Постройте равнобедренный треугольник по: а) основанию и боковой стороне; б) боковой стороне и углу при вершине; в) основанию и углу при основании; г) основанию и медиане к ней; д) боковой стороне и медиане к ней; е) медиане к основанию и углу при вершине; д) боковой стороне и высоте к основанию.

Б

28. а) Из каких-нибудь двух равнобедренных треугольников составьте один равнобедренный треугольник. б) Из каких-нибудь трех равнобедренных треугольников составьте равнобедренный треугольник.

29. Треугольники ABC, BCD, ACD, ABD равнобедренные. Сделайте рисунок.

30. Треугольники ABC и BCD равнобедренные с общим основанием BC. Докажите, что треугольники ABD и ACD равны. Какие два случая возможны для взаимного расположения треугольников ABC и DBC?

31. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$ и $BC = CD$. Точка X движется по диагонали AC от A к C. Докажите, что треугольник XBD всегда равнобедренный.

32. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$. Из точек A и C к вершине B движутся с одной скоростью точки X и Y. Сравните отрезки CX и AY.

33. Если в основании пирамиды $PABC$ равносторонний треугольник ABC, а боковые ребра PA, PB, PC равны, то пирамида называется правильной треугольной. а) Пусть K, L, M — середины ребер AC, AB, BC. Докажите, что $PK = PL = PM$. б) Пусть точка N — середина ребра PA. Докажите, что треугольник CNB равнобедренный. Будет ли он равнобедренным, если N — другая точка внутри этого ребра? в) Пусть точка O — середина ребра PB. Докажите, что треугольник CNO равнобедренный.

34. В треугольной пирамиде $PABC$ все углы при вершине P прямые, а ребра PA, PB, PC равны между собой. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

35. Пусть в треугольной пирамиде $PABC$ все ребра равны. а) Докажите, что она является правильной. б) Пусть точка K лежит внутри ребра AC. Докажите, что треугольник PKB равнобедренный. в) Пусть точка N — середина ребра PA, точка M — середина ребра BC. Нарисуйте отрезок MN. Нарисуйте два треугольника на поверхности этой пирамиды, в которых этот отрезок является высотой.

36. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите такие его вершины, которые являются вершинами равностороннего треугольника. Какие вы выберете точки K и L на ребрах DA и DC, чтобы треугольник D_1KL оказался равнобедренным?

§ 6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

6.1. Четырехугольник и его элементы

За треугольниками по сложности следуют четырехугольники. **Четырехугольник** — это часть плоскости, ограниченная четырьмя

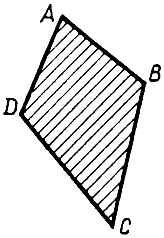


Рис. 103

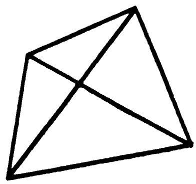


Рис. 104

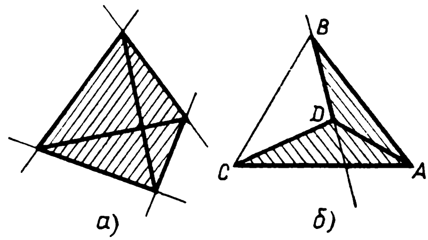


Рис. 105

отрезками, из которых никакие два не имеют общих точек, кроме концов, и не являются один продолжением другого[1] (рис. 103). Эти отрезки называются **сторонами четырехугольника,** а их концы — **вершинами четырехугольника.**

Стороны четырехугольника, имеющие общие концы, называются **смежными,** а не имеющие общих концов — **противоположными.** Аналогично вершины, соединенные стороной, называются **соседними,** а не соединенные стороной — **противоположными.** Так что в четырехугольнике имеется по две пары противоположных сторон и противоположных вершин. (На рисунке 103 укажите пары противоположных сторон и вершин.)

Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырехугольника, называются его **диагоналями** (рис. 104). Четырехугольник принято обозначать его вершинами, выписывая их в порядке обхода; например, $ABCD$ на рисунке 103.

Четырехугольники делятся на два существенно различных вида: **выпуклые и невыпуклые.**

Выпуклый четырехугольник располагается целиком по одну сторону от каждой прямой, которая содержит его сторону (рис. 105, *а*). Кроме того, у него обе диагонали проходят внутри него и пересекаются, и все углы меньше развернутого.

У **невыпуклого четырехугольника** (рис. 105, *б*) есть стороны, продолжения которых заходят внутрь его, одна диагональ проходит вне его и есть угол, больший развернутого (угол D на рисунке 106).

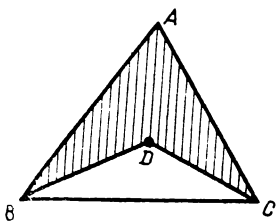


Рис. 106

[1] Так же как в случае треугольника, имеется в виду конечная часть плоскости и ограничивающие отрезки к ней причисляются.

6.2. Разбиение четырехугольника на треугольники

Диагональ, проходящая внутри четырехугольника, делит его на два треугольника. Соответственно любой четырехугольник можно составить из двух треугольников. Для выпуклого это можно сделать двумя способами (соответственно двум диагоналям), а для невыпуклого только одним. Зато невыпуклый четырехугольник можно получить, если от треугольника «отнять» треугольник (рис. 106).

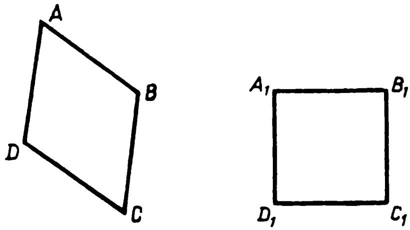


Рис. 107

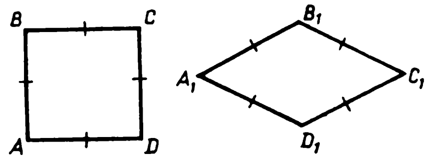


Рис. 108

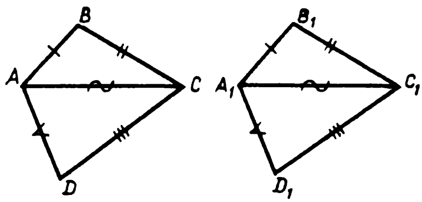


Рис. 109

Очевидно, свойства четырехугольников можно характеризовать свойствами составляющих их треугольников. Сопоставим вершины четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 107). Сравниваем соответствующие стороны; допустим, они равны. Но четырехугольники могут быть разными (как на рис. 108). Однако если равны проходящие внутри них диагонали: $AC = A_1C_1$ (рис. 109), то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$, и мы заключаем, что и четырехугольники одинаковы. Если представить себе, что один из них накладывается на другой, то они совпадут.

Но, по-разному прикладывая треугольники, можно получить из двух треугольников различные четырехугольники (рис. 110).

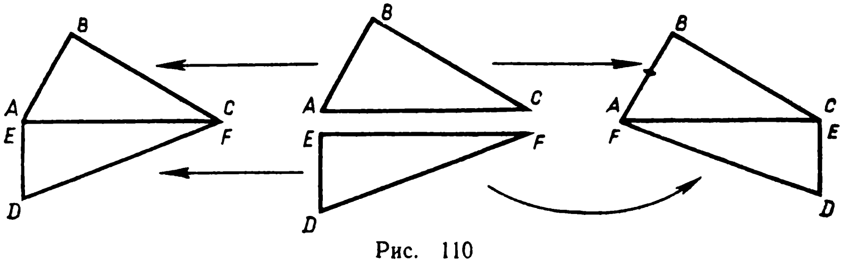


Рис. 110

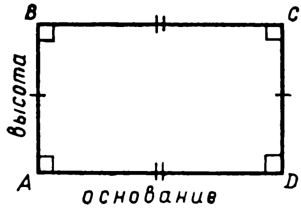


Рис. 111

6.3. Прямоугольник. Аксиома прямоугольника

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые, а противоположные стороны равны (рис. 111). Если одна из сторон прямоугольника принята за «основание», то смежная с ней сторона будет «высотой» прямоугольника.

А можно ли построить прямоугольник? Из тех аксиом, которыми мы пока пользовались, это не следует. Поэтому и принимается особая аксиома о построении прямоугольника. Ее можно формулировать так.

Аксиома прямоугольника. ***На всяком отрезке как на основании можно построить прямоугольник любой данной высоты.***

Под этим подразумевается следующее построение. Дан отрезок AB; из его концов проводятся в одну сторону от прямой AB под прямым углом к AB два равных отрезка AD и BC и их концы соединяются отрезком CD (рис. 112).

Аксиома утверждает, что отрезок CD равен AB и углы при вершинах C и D прямые (т. е. при отрезке CD все так же, как при отрезке AB, рис. 112). Таким образом, проведенные отрезки AD, BC, CD вместе с данным отрезком AB ограничивают прямоугольник: углы A и B прямые и стороны AD и BC равны по построению, а углы C и D прямые и стороны AB и CD равны по аксиоме.

Поэтому аксиому прямоугольника можно формулировать и так:

Если из концов данного отрезка проведены в одну сторону под прямым углом равные отрезки и концы их соединены отрезком, то получается прямоугольник.

Описанное построение постоянно употребляется на практике.

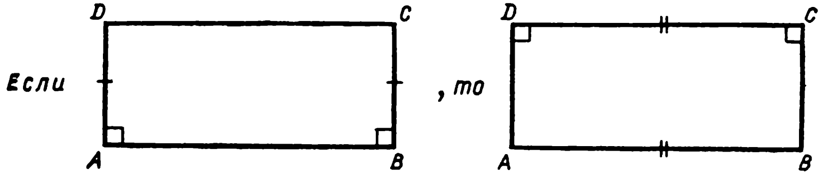


Рис. 112

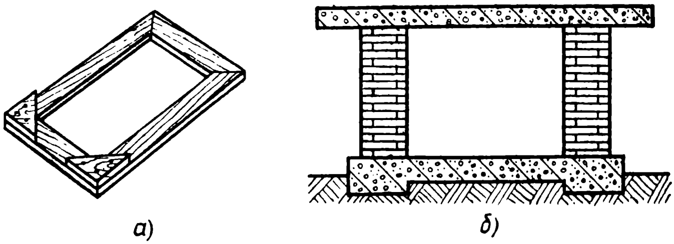


Рис. 113

Например, скрепляя прямоугольную рамку у концов одной планки, прикрепляют две планки равной длины под прямыми углами (рис. 113, *а*). После этого к свободным концам этих двух планок прикладывают такую же планку, как первая. Точно так же в пространстве, поставив две вертикальные опоры равной высоты, кладут на них балку или плиту той же длины, как та, на которой они поставлены (рис. 113, *б*). Еще пример: рельсы, скрепленные шпалами.

Замечание. Прямоугольник можно было бы определить просто как четырехугольник, у которого все углы прямые. А то, что у такого четырехугольника противоположные стороны равны, можно доказать. Но это мы доказывать не будем.

6.4. Центр симметрии

Прямоугольник, как мы уже знаем, — симметричная фигура. У него имеются две оси симметрии (а если он квадрат, то даже четыре). Но, кроме осей симметрии, прямоугольник имеет еще и замечательную точку — **центр симметрии.** Такой точкой является точка пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 114). Действительно, если разрезать прямоугольник любой прямой, проходящей через точку O, то получатся две равные части. Чтобы совместить их, достаточно повернуть одну из них вокруг точки O так, чтобы прямая разреза совместилась сама с собой.

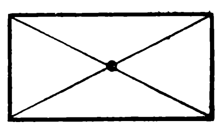


Рис. 114

Точнее можно сказать так: если один из концов отрезка AB, серединой которого является точка O, принадлежит прямоугольнику, то и другой конец этого отрезка тоже принадлежит прямоугольнику (рис. 115).

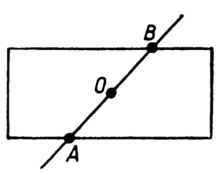


Рис. 115

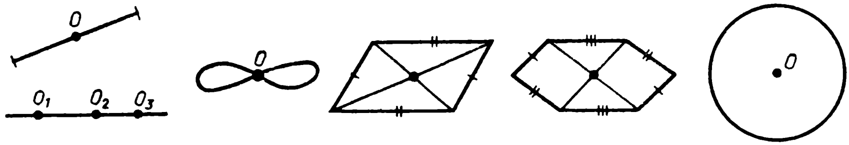


Рис. 116

Если точка O является серединой отрезка AB, то про точки A и B говорят, что они **симметричны относительно точки** O.

Центр симметрии имеется также у окружности — центр окружности, у круга — центр круга, у отрезка — середина отрезка, у прямой — любая точка прямой и у других фигур (рис. 116).

6.5. Евклид

Геометрия зародилась, как уже было сказано, в Древнем Египте. Накопленные там сведения были заимствованы греками в VII—V в. до н. э., значительно расширены и приведены в известную систему, в которой отдельные свойства фигур и правила построения выводились одни из других. Геометрия складывалась уже не как совокупность отдельных правил, а как последовательность доказываемых теорем. Первое систематическое ее изложение было написано еще в V в. до н. э., но оно не сохранилось, возможно, потому, что позже, около 300 г. до н. э., появилось другое, гораздо более совершенное. Оно было написано греческим ученым Евклидом и известно под названием «Начала» (имеются в виду начала — основы геометрии).

Изложение, данное Евклидом, оказалось столь совершенным, что на протяжении более 2000 лет — до XIX в. — оно служило образцом не только в геометрии, но и в других науках.

Наш учебник во многом следует Евклиду. В частности, Евклид начинает с тех же аксиом проведения и продолжения отрезка, аксиомы окружности, аксиомы о равных отрезках... После аксиом у Евклида следуют «предложения» — задачи на построение и теоремы. Первое из них: на данном отрезке построить равносторонний треугольник. Второе: из данной точки провести отрезок, равный данному. Третье: построить разность двух данных отрезков. (Решите эти задачи.) Потом идут теоремы о равнобедренном треугольнике, о равенстве треугольников и др. (хотя доказываются они иначе, чем у нас в учебнике).

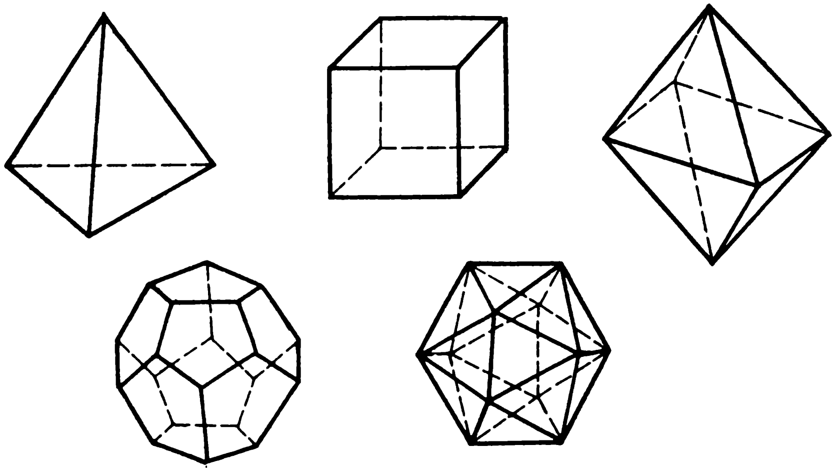


Рис. 117

«Начала» Евклида содержат значительную часть всего школьного курса геометрии и завершаются рассмотрением правильных многогранников (рис. 117); их всего пять видов: четырехгранник (правильная треугольная пирамида), шестигранник (куб), восьмигранник, двенадцатигранник, двадцатигранник. Называют их греческими словами: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр, что и значит в переводе четырехгранник, шестигранник и т. д.

Евклид жил в Александрии. Рассказывают, что царь однажды спросил у Евклида, нельзя ли для него изложить геометрию попроще. На что Евклид ответил гордыми словами: «В геометрии нет царского пути».

Путь науки труден. Все значительное достигается путем больших усилий — сделать совершенную машину, написать картину, взойти на гору, доказать новую теорему... Овладеть геометрией тоже нелегко.

Дополнение к § 6

I. Упрощенная аксиома прямоугольника

В той формулировке аксиомы прямоугольника, которая была дана в п. 6.3, требуется, чтобы $AB = CD$ и углы D и C были прямыми (рис. 112). Но можно аксиому упростить и потребовать, например, выполнения лишь первого равенства: $AB = CD$.

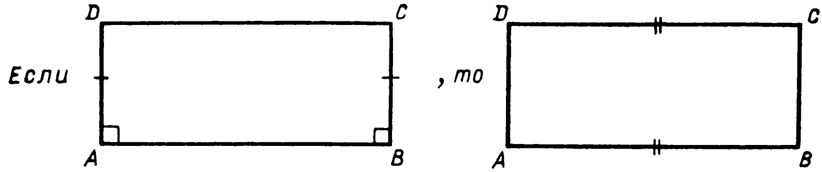


Рис. 118

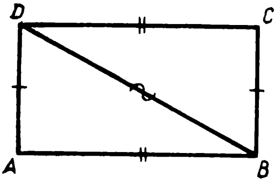


Рис. 119

Упрощенная аксиома прямоугольника ***Если у четырехугольника ABCD стороны AD и BC равны, а углы A и B прямые, то AB = CD*** (рис. 118).

Докажем, что из этой аксиомы уже следует, что углы C и D прямые.

Проведем диагональ BD. Получим треугольники ABD и BCD (рис. 119). Они равны, так как сторона BD у них общая, $AD = BC$ по условию, а $AB = CD$ по аксиоме. Следовательно, равны и соответственные углы этих треугольников. В частности, $\angle A = \angle C$. А так как угол A прямой, то и угол C прямой[1].

Проведя диагональ AC, так же докажем, что и угол D — прямой.

Можно дать и другие упрощенные формулировки аксиомы прямоугольника.

1) *Если у четырехугольника ABCD стороны AD и BC равны и углы A и B прямые, то угол C (или угол D) прямой.*

2) *Если у четырехугольника три угла прямые, то и четвертый угол тоже прямой.*

Доказать, что из этих формулировок следует первоначальная формулировка аксиомы прямоугольника, сложнее, и мы не будем приводить эти доказательства.

11. Параллелограмм

Четырехугольник, у которого противоположные стороны равны, называется **параллелограммом** (рис. 120). Выведем несколько свойств параллелограмма.

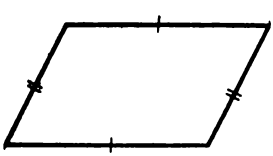


Рис. 120

[1] Здесь мы воспользовались тем, что угол, равный прямому углу, прямой. Это утверждение будет доказано в § 9 без использования аксиомы прямоугольника.

С в о й с т в о 1. ***Параллелограмм — выпуклый четырехугольник.***

Допустим, что найдется невыпуклый параллелограмм $ABCD$ (рис. 121). Тогда одна из его диагоналей, допустим диагональ AC, лежит вне его. Рассмотрим треугольники ABC и DCA. Они равны, так как $AB = DC$, $BC = DA$ и сторона AC у них общая. По теореме 1 равны соответственные углы этих треугольников: $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle BCA = \angle DAC$. Но это невозможно, так как угол DAC меньше угла BAC, а равный углу DAC угол BCA больше угла DCA, равного углу BAC. Противоречие получилось из-за того, что мы предположили, что существуют невыпуклые параллелограммы. Значит, таких параллелограммов нет — все параллелограммы выпуклые.

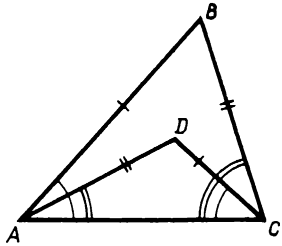


Рис. 121

С в о й с т в о 2. ***Каждая диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.***

Действительно, диагональ AC разбивает параллелограмм $ABCD$ на равные треугольники ABC и ADC, так как в этих треугольниках $AB = CD$, $BC = AD$, а сторона AC у них общая (рис. 122).

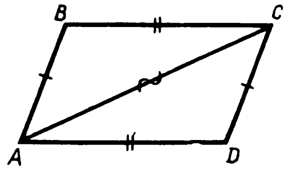


Рис. 122

С в о й с т в о 3. ***Противоположные углы параллелограмма равны.***

Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle B = \angle D$ как соответственные углы равных треугольников ABC и ADC (рис.123).

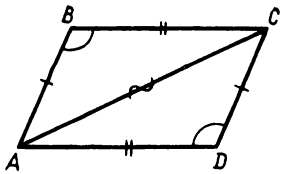


Рис. 123

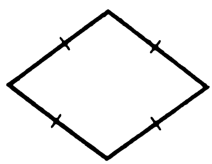


Рис. 124

III. Ромб

Четырехугольник называется **ромбом,** если все его стороны равны (рис. 124).

Из этого определения вытекает, что *ромб является параллелограммом и обладает всеми свойствами параллелограмма.* Но диагонали ромба имеют специальные свойства, которыми диагонали

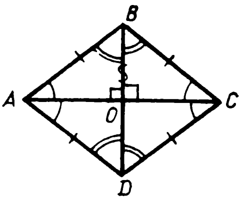


Рис. 125

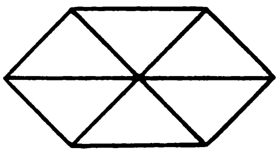


Рис. 126

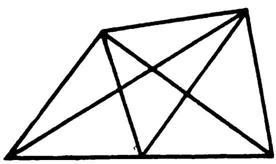


Рис. 127

других параллелограммов, отличных от ромбов, не обладают.

Свойства диагоналей ромба. ***Диагонали ромба являются биссектрисами его углов и взаимно перпендикулярны.***

Пусть $ABCD$ — ромб, а его диагонали пересекаются в точке O (рис. 125). Тогда $\triangle ABC = \triangle ADC$, так как $AB = AD$, $BC = DC$, а сторона AC у них общая. Поэтому $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle DCA$, т. е. диагональ AC — биссектриса углов A и C. Аналогично, BD — биссектриса углов B и D.

Далее, $\triangle AOB = \triangle AOD$, так как $AB = AD$, $\angle BAO = \angle DAO$ и сторона AO у них общая. Поэтому $\angle AOB = \angle AOD$, т. е. смежные углы равны. Следовательно, эти углы прямые, т. е. $AC \perp BD$.

Задачи к § 6

Основные задачи

1. Докажите, что диагональ прямоугольника разбивает его на два равных треугольника.

2. Докажите, что диагонали прямоугольника равны. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

3. В прямоугольнике провели среднюю линию, т. е. отрезок между серединами противоположных сторон. Докажите, что при этом получилось два прямоугольника.

Задачи к пунктам 6.1 и 6.2

А

4. Сколько четырехугольников вы можете насчитать на рисунке 126? На рисунке 127? Сколько из них выпуклых?

5. Нарисуйте такие два четырехугольника, которые дают в пересечении: а) треугольник; б) два треугольника; в) четырехугольник; г) два четырехугольника; д) пятиугольник; е) шестиугольник.

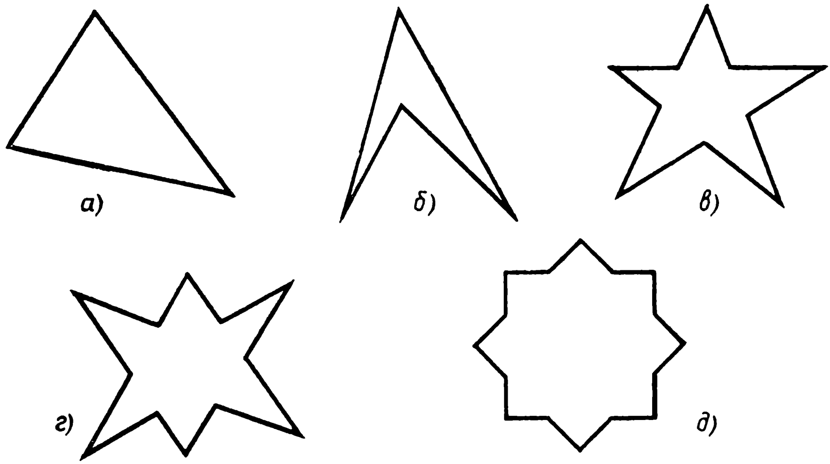


Рис. 128

6. Какой многоугольник может получиться в результате объединения двух четырехугольников? Сколько у него сторон? Будет ли он выпуклым?

7. Представьте как объединение двух четырехугольников фигуры на рисунке 128.

8. Нарисуйте четырехугольник. а) Проверьте, есть ли такая точка плоскости, которая равноудалена от его вершин. б) Если такая точка нашлась, то обязательно ли она лежит в четырехугольнике? Может ли она лежать на его стороне? В его вершине? в) Приведите пример такого четырехугольника, для которого такая точка обязательно найдется. Нарисуйте несколько таких четырехугольников. Есть ли среди них выпуклые? Можете ли вы объяснить увиденное? г) Нарисуйте такой четырехугольник, для которого такой точки не существует. Попытайтесь объяснить, по какой причине это происходит.

9. У четырехугольника противоположные стороны равны между собой. Докажите, что его противоположные углы тоже равны между собой. Верно ли обратное утверждение, а именно: если в четырехугольнике противоположные углы равны, то и его противоположные стороны равны?

10. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $CD = DA$. Докажите, что: а) одна из его диагоналей является биссектрисой его угла; б) одна его диагональ перпендикулярна другой. При каком дополнительном условии и вторая его диагональ является биссектрисой его угла?

11. Рассмотрим задачу, обратную задаче 10. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и диагональ BD является биссектрисой угла B. Верно ли, что: а) $AD = CD$; б) BD — биссектриса угла D; в) одна его диагональ перпендикулярна другой?

12. У двух четырехугольников соответственно равны стороны и диагонали. Какие еще элементы этих четырехугольников равны?

Б

13. Нарисуйте четырехугольник, в котором каждая диагональ: а) больше любой его стороны; б) меньше любой его стороны.

14. Может ли в выпуклом четырехугольнике уместиться отрезок больший, чем каждая его сторона? Каждая его диагональ? Может ли такое быть в невыпуклом четырехугольнике?

15. Некий четырехугольник разделили одной прямой на: а) три треугольника; б) треугольник и пятиугольник; в) два треугольника и шестиугольник. Нарисуйте такой четырехугольник.

16. Вам нужно в столярной мастерской сделать чертежный треугольник. Заготовки имеют вид четырехугольников. Какие это четырехугольники? Сколько их? Можно ли уменьшить число четырехугольников?

17. В вершинах четырехугольника сделали шарниры. Будет ли такой четырехугольник жесткой фигурой? Если нет, то как сделать его жесткой фигурой? Сколько различных четырехугольников можно построить по четырем сторонам?

18. Проверьте такое утверждение: если прямая делит выпуклый четырехугольник на два четырехугольника, то они оба выпуклые. А теперь проверьте обратное утверждение: если прямая делит четырехугольник на два выпуклых четырехугольника, то исходный четырехугольник выпуклый.

19. Может ли объединение двух выпуклых четырехугольников быть невыпуклым четырехугольником? Может ли быть выпуклым четырехугольником объединение двух невыпуклых четырехугольников?

20. Поставьте в тетради четыре точки. Сколько четырехугольников с вершинами в этих точках вы можете построить?

21. На плотной бумаге или на картоне нарисуйте выпуклый четырехугольник. Назовите его $ABCD$. На его сторонах во внешнюю сторону постройте треугольники P_1AB, P_2BC, P_3CD, P_4DA так, чтобы $P_1B = P_2B$, $P_2C = P_3C$, $P_3D = P_4D$, $P_4A = P_1A$. Вырежьте эту фигуру. Согните ее по сторонам четырехугольника и склейте равные стороны треугольников. Если вам это удалось, то точки P_1, P_2, P_3, P_4 совпадут. Обозначим полученную точку как P. В результате получается пространственная фигура $PABCD$, которую называют четырехугольной пирамидой. Сколько вершин, ребер и граней у четырехугольной пирамиды? Для каждой вершины укажите, какие ребра и грани ее содержат. Для каждого ребра укажите, какие грани его содержат. Нарисуйте треугольник, все стороны которого лежат на поверхности такой пирамиды, но не в одной ее грани. Нарисуйте отрезок, который лежит в треугольниках PAC и PBD.

Задачи к пункту 6.3

А

22. К прямоугольнику приставили другой прямоугольник так, что их пересечением является общая сторона. Докажите, что в результате получился прямоугольник.

23. Постройте прямоугольник по: а) стороне и диагонали; б) диагонали и ее углу со стороной; в) стороне и точке пересечения диагоналей.

24. Федя нарисовал на доске прямоугольник. Но пришел Вася, нарисовал его среднюю линию, а сам прямоугольник стер. Сможет ли Федя восстановить исходный прямоугольник? А если Вася оставит не только среднюю линию, но еще и точку на одной из его сторон?

25. В прямоугольнике провели две средние линии. а) Докажите, что они разбивают прямоугольник на 4 равных прямоугольника. б) Докажите, что в точке пересечения они делятся пополам.

26. Придумайте приспособление для измерения толщины бревна в любом его месте.

27. Вы идете лесом по прямой и вдруг — болото. Как его обойти так, чтобы выйти на ту же прямую, по которой вы шли?

28. Нарисуйте квадрат. Отметьте его вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей, всего 9 точек. Сколько есть прямоугольников с вершинами в этих точках? Сколько из них различных?

Б

29. Как разрезать прямоугольник на: а) четыре равных треугольника; б) шесть равных треугольников; в) пять равных прямоугольников; г) две части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник?

30. На сторонах прямоугольного равнобедренного треугольника постройте квадраты, имеющие с этим треугольником только общую сторону. На сколько треугольников, равных данному, вы можете разбить меньший из квадратов?

31. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Ее боковые ребра PA, PB, PC, PD равны. а) Для каждой ее треугольной грани укажите равную ей грань. б) Пусть KL — средняя линия основания. Докажите, что треугольник PKL равнобедренный. в) Пусть от вершин A и D отложены на ребрах AB и DC равные отрезки AM и DN. Докажите, что треугольник PMN равнобедренный. г) Тот же результат получится, если отрезок, равный AM, отложить на ребре CD от точки C. Докажите это.

32. Пусть в основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а его боковые ребра PA, PB, PC, PD равны. Такая пирамида называется правильной четырехугольной. а) Докажите, что ее боковые грани равны между собой. б) Пусть точки K и L — середины ребер AB и AD. Докажите, что треугольник PKL равнобедренный. в) Какую точку M на ребре PA вы можете указать, чтобы треугольник KLM был равнобедренным? г) Какую точку N на ребре PC вы можете указать, чтобы треугольник BDN был равнобедренным? д) Какие отрезки на ребрах DA, DC, DP отложить так, чтобы треугольник с вершинами в их концах был равнобедренным?

33. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед. Из скольких прямоугольников состоит его поверхность? Сколько из них разных? Нарисуйте несколько фигур, сгибанием и склеиванием которых можно получить прямоугольный параллелепипед. Нарисуйте также несколько фигур, сгибанием и склеиванием которых можно получить куб.

34. Докажите, что равны: а) противоположные грани прямоугольного параллелепипеда; б) все грани куба.

Задачи к главе I

1. Рассмотрим три утверждения: 1) отрезки AB и CD пересекаются; 2) лучи AB и CD пересекаются; 3) прямые AB и CD пересекаются. Возьмите любые два из них и проверьте, будет ли выполняться третье. Возьмите любое из них и проверьте, будут ли выполняться другие два.

2. Нарисуйте квадрат. Отметьте его вершины, середины его сторон и точку пересечения диагоналей, всего девять точек. Одну из них назовите точкой A. Сколько вы можете насчитать треугольников с вершиной в точке A, если другие их вершины лежат в отмеченных точках?

3. Нарисуйте два равных треугольника так, чтобы, приложенные друг к другу по стороне, они составили: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

4. Стороны BC, B_1C_1 равных треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ разделены на равные отрезки: $BD = B_1D_1$, $DC = D_1C_1$. Докажите, что треугольники ABD, ACD равны соответственно треугольникам $A_1B_1D_1$, $A_1C_1D_1$. Попробуйте составить более общую задачу. Сможете ли вы ее решить?

5. а) Нарисуйте треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$. б) Пусть в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Равны ли они?

6. Пусть даны точка O и фигура F. Постройте фигуру F_1, симметричную фигуре F относительно точки O, если фигура F: а) отрезок; б) треугольник; в) четырехугольник; г) круг; д) угол, в том числе полуплоскость. При этом рассмотрите разные случаи положения точки O и данной фигуры.

7. Даны прямая и фигура F. Постройте фигуру F_1, симметричную фигуре F относительно данной прямой, если F: а) точка; б) отрезок; в) треугольник; г) четырехугольник; д) круг; е) угол, в том числе полуплоскость. При этом рассмотрите разные случаи расположения данной прямой и фигуры.

8. 1) Постройте треугольник по: а) стороне, медиане на другую сторону и углу между ними; б) стороне, медиане к ней и углу между ними; в) стороне, биссектрисе прилежащего угла и этому прилежащему углу; г) двум сторонам и медиане к одной из них.

2) Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. При этом рассмотрите два случая, когда

угол лежит против большей из данных сторон и когда он лежит против меньшей из данных сторон. В последнем случае есть три возможности: строятся два треугольника (чем они отличаются?), только один треугольник, построение невозможно.

9. Постройте прямоугольный треугольник по: а) двум катетам; б) катету и гипотенузе; в) катету и медиане к нему; г) катету и биссектрисе прямого угла; д) гипотенузе и острому углу.

10. Постройте равнобедренный треугольник, вписанный в данную окружность: а) с данной боковой стороной; б) с данным основанием (какие случаи возможны?).

11. Постройте треугольник с двумя данными сторонами, вписанный в данную окружность (какие случаи возможны?)

12. Даны два отрезка AB и CD. Постройте точку X, такую, что треугольники XAB и XCD равны.

13. Как на тетрадном листе одними только сгибаниями получить: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник?

14. а) Лист бумаги имеет форму равностороннего треугольника. Как одними только сгибаниями получить на этом листе четыре равных между собой равносторонних треугольника? б) Лист бумаги имеет форму прямоугольного треугольника. Как одними сгибаниями получить из него квадрат?

15. Треугольники ABC, BCD равны и расположены по разные стороны от прямой BC. Тогда для треугольников ABD, ACD верно одно из двух: 1) они равнобедренные; 2) они равны. Докажите это. А когда (при каком условии?) будет и то и другое?

16. В треугольной пирамиде все ребра равны. Какие взять точки на ее ребрах, чтобы они были вершинами равностороннего треугольника?

17. Поставьте на листе бумаги любые пять точек, но так, чтобы они не лежали на одной прямой. Докажите, что среди них всегда можно выбрать такие четыре точки, что они являются вершинами выпуклого четырехугольника.

18. Постройте четырехугольник по: а) четырем сторонам и одной из диагоналей; б) трем сторонам и двум диагоналям; в) трем сторонам и одной диагонали; г) двум сторонам и двум диагоналям; д) трем сторонам и двум углам между ними; е) четырем сторонам и одному углу между ними; ж) диагонали и четырем углам, которые она образует с его сторонами.

19. Нарисуйте четырехугольник. а) Постройте круг, внутри которого умещается данный четырехугольник. Можете ли вы построить меньший круг, вмещающий данный четырехугольник? А наименьший из всех таких кругов? б) Постройте круг, который умещается в данном четырехугольнике. Можете ли вы построить больший круг, умещающийся в данном четырехугольнике? А наибольший из всех таких кругов?

20. Нарисуйте четырехугольник. На самой большой его стороне как на диаметре постройте круг. Посмотрите, уместился ли четырехугольник внутри круга. Если нет, то постройте аналогичный круг на следующей по величине стороне четырехугольника и опять посмотрите, уместился ли четырехугольник внутри объединения этих кругов. И так далее. а) Нарисуйте четырехугольник, который умещается уже внутри первого круга. б) Нарисуйте четырехугольник, который покрывается ровно двумя кругами, ровно тремя кругами, четырьмя кругами. в) Можете ли вы нарисовать такой четырехугольник, который не покрывается даже четырьмя такими кругами?

21. Сколько точек может получиться в пересечении границ двух четырехугольников?

22. Стрелки будильника показывают 12 ч 15 мин. Стрелка звонка будильника расположена так, что все три стрелки образуют смежные углы. В какое время зазвонит будильник?

23. Стрелки часов будильника и стрелка его звонка расположены так, что одна из стрелок идет по биссектрисе угла, образованного двумя другими стрелками. Сколько времени показывает будильник и когда прозвенит звонок?

24. Из точки внутри прямого угла опустили перпендикуляры на его стороны. Какую фигуру вместе со сторонами угла ограничивают эти перпендикуляры?

25. Докажите, что прямоугольник можно получить как пересечение двух прямых углов.

26. Дан равнобедренный треугольник. Постройте прямоугольник так, чтобы его вершины лежали на сторонах этого треугольника.

Задачи о параллелограмме

27. Постройте параллелограмм. Объясните, как такими же параллелограммами покрыть всю плоскость. А как ее покрыть равными треугольниками?

28. Федя и Вася взяли по два соответственно равных треугольника, и каждый составил параллелограмм из этих треугольников. Равны ли полученные ими параллелограммы?

29. Нарисуйте три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько параллелограммов с вершинами в этих точках вы сможете построить?

30. Является ли прямоугольник параллелограммом? Может ли он быть ромбом?

31. Постройте параллелограмм, в котором нет прямых углов. Сможете ли вы провести окружность через все его вершины? Как вы это объясните? Сможете ли вы это доказать?

32. Нарисуйте параллелограмм. Разделите его на два равных: а) треугольника; б) четырехугольника.

ГЛАВА II.

ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН

§ 7. ОПЕРАЦИИ С ОТРЕЗКАМИ

7.1. Сложение отрезков

Как измерить длину линейкой, известно. Но нас интересует вопрос, на чем, вообще, основано измерение длин. Если люди пользуются готовыми инструментами и средствами для измерения, то сами эти инструменты были кем-то изготовлены, а делают их по правилам геометрии. В этих правилах мы и разберемся.

Случается, что предметы, которые нужно сравнивать, слишком велики и их приходится сравнивать по частям. Отложив на обоих одинаковые отрезки (линейкой, циркулем или натянутой веревкой), делают заметки, а потом сравнивают оставшиеся части (рис. 129). Если длины частей, на которые таким образом делятся предметы, по отдельности равны, то и длины предметов в целом тоже равны.

В геометрии это принимается как аксиома для отрезков.

Аксиома сложения отрезков. ***Отрезки, составленные из соответственно равных отрезков, равны.***

Отрезок, состоящий из нескольких отрезков, можно понимать как их **сумму.** Поэтому и говорится о **сложении отрезков.** Отрезки — **слагаемые** не перекрываются, а только последовательно прилегают один к другому концами. На рисунке 130 отрезки AB и A_1B_1 слагаются из соответственно равных отрезков $AC=A_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DB=D_1B_1$. Аксиома утверждает, что тогда $AB = A_1B_1$.

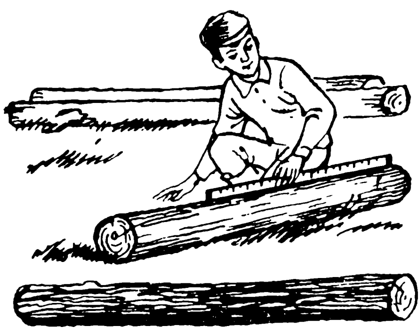


Рис. 129

А можно ли сложить произвольно расположенные отрезки (рис. 131)? Конечно, можно. И это постоянно делается в

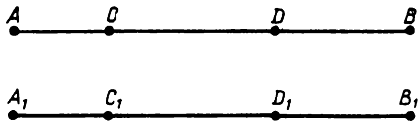


Рис. 130

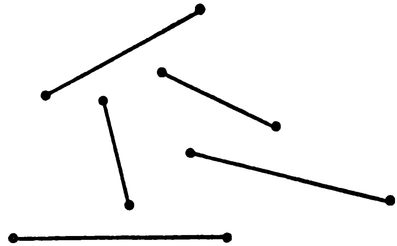


Рис. 131

практике, когда, например, сваривают трубы газопровода. В теории это делается так.

Пусть даны, например, пять отрезков a, b, c, d, e (можно взять и любое другое число отрезков). Их сумму можно построить так.

Возьмем любой луч l с началом O. Отложим на l сначала от точки O отрезок $OA = a$ (рис. 132). Затем дальше на луче от точки

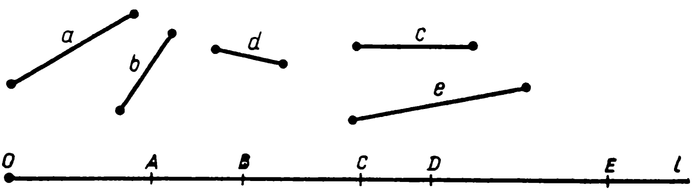


Рис. 132

A отложим отрезок $AB = b$, затем отрезок $BC = c$, потом отрезок $CD = d$ и, наконец, отрезок $DE = e$. Отрезок OE называется суммой отрезков a, b, c, d, e:

$$OE = OA + AB + BC + CD + DE,$$

и так как

$$OA = a,\ AB = b,\ BC = c,\ CD = d,\ DE = e,$$

то

$$OE = a + b + c + d + e.$$

Среди слагаемых отрезков могут быть равные. Если, например, отрезок p слагается из некоторого числа n отрезков, равных отрезку a (рис. 133), то пишем:

$$p = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} = na.$$

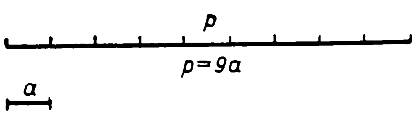


Рис. 133

Если к n отрезкам, равным a, прибавляется m отрезков, равных b, то в результате получим некоторый отрезок $q =$

$= na + mb$. Так, например, отрезок в 2 см 5 мм слагается из двух отрезков, равных отрезку в 1 см, и пяти отрезков, равных миллиметровому отрезку.

7.2. Вычитание отрезков

Операцией, обратной операции сложения отрезков, будет их вычитание. Как для чисел, найти **разность** $a - b$ **отрезков** a и b — это значит найти такой отрезок c, что $b + c = a$, т. е. такой отрезок, который в сумме с вычитаемым отрезком дает уменьшаемое.

Разность отрезков находится так. На отрезке AB, равном данному отрезку a, откладывается отрезок AC, равный отрезку b. Тогда отрезок CB и будет разностью $a - b$ (рис. 134).

Понятно, чтобы отрезок b можно было вычесть из данного отрезка a, надо, чтобы b можно было отложить на отрезке a, т. е. чтобы отрезок b был меньше отрезка a.

7.3. Деление отрезков

Если отрезок q равен сумме n отрезков, равных отрезку a, т. е. если $q = na$, то это равносильно тому, что **отрезок** q **разделен на** n **равных частей** (рис. 135). Тогда можно написать:

$$a = \frac{1}{n} q.$$

Вообще, если c — какой-нибудь отрезок и n — натуральное число, то $\frac{1}{n} c$ называется такой отрезок, что отрезок c есть сумма n отрезков, равных $\frac{1}{n} c$.

Циркулем и линейкой можно разделить любой отрезок на любое число равных частей. Мы уже умеем делить отрезок пополам, т. е. на 2, а значит, и на 4, на 8, на 16 и т. д. Как циркулем и линейкой производится деление отрезка на произвольное число равных частей, будет сказано в VII классе.

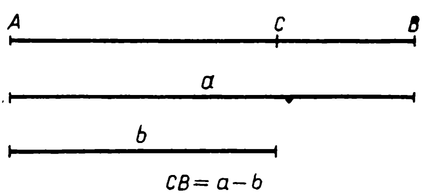


Рис. 134

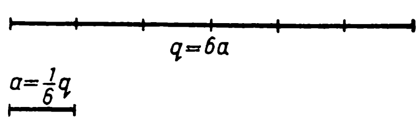


Рис. 135

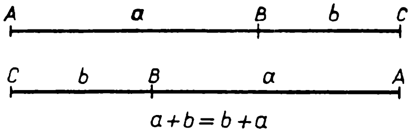


Рис. 136

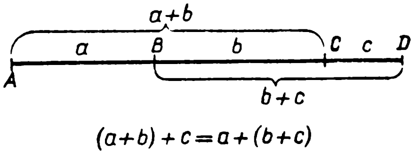


Рис. 137

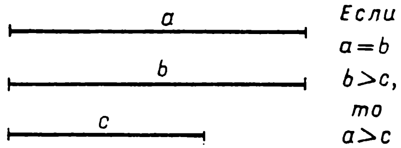


Рис. 138

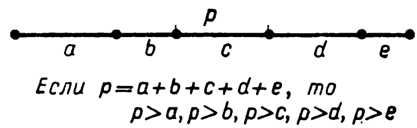


Рис. 139

7.4. Свойства действий с отрезками

Для отрезков определены равенство, сложение, вычитание и отношение «больше—меньше», а также деление на натуральные числа. Выполняются те же свойства (или, как иногда говорят, законы), что и для чисел. Перечислим их.

1. *Результат сложения двух отрезков не зависит от порядка, т. е.*

$$a + b = b + a$$

для любых отрезков a и b (переместительный закон, рис. 136).

2. *Для любых трех отрезков a, b, c*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(сочетательный закон, рис. 137).

Благодаря переместительному и сочетательному законам сложения отрезков можно переставлять слагаемые в любом порядке, а результат — сумма при этом не изменится.

3. *Если a, b, c — отрезки и $a = b$, $b > c$, то $a > c$* (рис. 138).

4. *Если отрезок является суммой нескольких отрезков, то он больше каждого из слагаемых отрезков* (рис. 139).

Эти свойства отрезков аналогичны соответствующим свойствам положительных чисел. Из свойства 4 можно сделать такой вывод: *если отрезок CD является частью отрезка AB, то $AB > CD$* (рис. 140). Действительно, $AB = AC + CD + DB$, и по свойству 4 $AB > CD$.

5. *Если a, b, c, d — отрезки и $a > c$, $b > d$, то*

$$a + b > c + d.$$

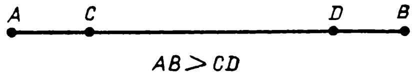


Рис. 140

6. *Пусть a и b — отрезки, n — натуральное число. Тогда если $a = b$, то $na = nb$, а если $a > b$, то $na > nb$.*

7. *Пусть a и b — отрезки, n — натуральное число. Тогда если $a = b$, то $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$, а если $a > b$, то $\frac{1}{n}a > \frac{1}{n}b$.*

В частности, при $n = 2$ получаем, что *половины равных отрезков равны*. Следовательно, *у каждого отрезка лишь одна середина.*

8. *Если от равных отрезков отнять равные, то получатся равные отрезки.*

Доказательства всех этих очевидных свойств мы проведем в дополнении к этому параграфу, опираясь на аксиомы сравнения и сложения отрезков.

Дополнение к § 7

Доказательство свойств действий с отрезками

1. Переместительный закон. Построим сумму отрезков a и b: $AB = a$, $BC = b$ и $AC = AB + BC = a + b$ (рис. 136). Но тогда

$$CA = CB + BA = b + a.$$

А поскольку AC и CA — это один и тот же отрезок, то $AC = CA$. Поэтому $a + b = b + a$.

2. Сочетательный закон. Пусть отрезки $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$ отложены один за другим так, что получился отрезок AD (рис. 137). Он слагается как из отрезков $AC = a + b$ и $CD = c$, так и из отрезков $AB = a$ и $BD = b + c$. Значит, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. Чтобы доказать свойство 3, ответим сначала на такой вопрос: всегда ли один и тот же результат дает сравнение неравных отрезков (оно было определено в п.2.8)? Не может ли возникнуть такая ситуация: сначала мы отложим на каком-то луче p от его начала O отрезки $OA = a$ и $OB = b$, и окажется, что точка B внутри отрезка OA (рис. 141), т. е. $a > b$? А затем отложим те

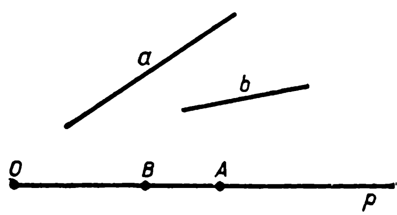


Рис. 141

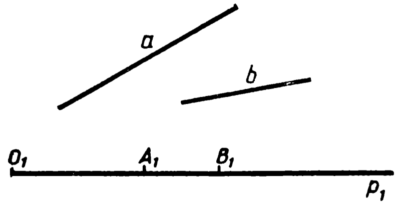


Рис. 142

же отрезки на другом луче p_1 от его начала O_1: $O_1A_1 = a$ и $O_1B_1 = b$, и окажется, что A_1 внутри O_1B_1 (рис. 142), т. е. $a < b$.

Конечно, скажете вы, такого быть не может. Но можно ли это вывести из аксиомы? Да, можно. Сейчас мы докажем, что такой ситуации возникнуть не может.

Действительно, предположим, что получилось так, как изображено на рисунках 141 и 142. Отложим тогда от точки A на продолжении за нее отрезка OA отрезок $AC = A_1B_1$ (рис. 143). Получим, что отрезки OC и O_1B_1 являются суммами соответственно равных отрезков: $OC = OA + AC$ и $O_1B_1 = O_1A_1 + A_1B_1$, причем $OA = O_1A_1$ и $AC = A_1B_1$. Поэтому по аксиоме сложения отрезков $OC = O_1B_1$. На луче p точки B и C не совпадают. А это противоречит аксиоме откладывания отрезка, так как $OB = b$ и $OC = O_1B_1 = b$. Следовательно, если точка B лежит между O_1 и A, то и точка B_1 лежит между O_1 и A_1.

Итак, мы доказали, что если имеются два равных отрезка $OA = a$ и $PB = b$ и известно, что один из них, например отрезок b, больше некоторого отрезка c, то, отложив на луче OA от точки O отрезок $OC = c$ (рис. 144), мы получим, что отрезок OC будет частью отрезка OA, т. е. $a > c$. В этом и состоит свойство 3.

4. Докажем теперь, что если отрезок является суммой нескольких отрезков, то он больше каждого из слагаемых отрезков. Пусть, например, a, b, c, d, e — некоторые отрезки и отрезок $p = a + b + c + d + e$ (рис. 145). Тогда отрезки a и p имеют общий конец и a — часть p. Поэтому согласно определению, данному в п. 6.2, $a < p$. Аналогично $e < p$. Чтобы доказать, например, что $b < p$, надо в сумме переставить слагаемые так: $p = b + a + c + d + e$ (рис. 146). Получим, что $b < p$. Так доказательство проводится для любого из слагаемых.

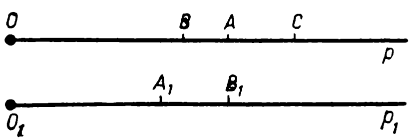


Рис. 143

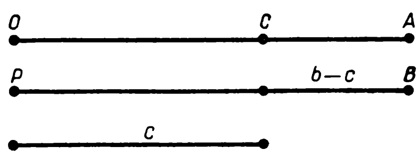


Рис. 144

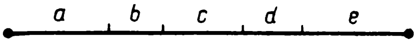


Рис. 145

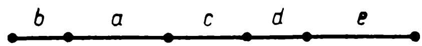


Рис. 146

5. Пусть a, b, c, d — отрезки, причем $a > c$ и $b > d$. Докажем, что тогда $a + b > c + d$. Построим сумму отрезков a и b, обозначив их общий конец через O (рис. 147): $AO = a$, $OB = b$, $AB = a + b$. Отложим отрезок $c = OC$ на отрезке OA и отрезок $d = OD$ на отрезке OB. Получим отрезок $CD = CO + OD = c + d$. Так как CD — часть отрезка AB, то $AB > CD$, т. е. $a + b > c + d$.

6. Пусть a и b — отрезки, а n — натуральное число. Если $a = b$, то равенство $na = nb$ вытекает из аксиомы сложения отрезков. Если $a > b$, то неравенство $na > nb$ вытекает из предыдущего свойства.

7. Пусть снова a и b — отрезки, а n — натуральное число. Если $a = b$, то $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$. Действительно, допустим, что $\frac{1}{n}a \neq \frac{1}{n}b$. Тогда либо $\frac{1}{n}a > \frac{1}{n}b$, либо $\frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b$. В первом случае мы получим, что $n\left(\frac{1}{n}a\right) > n\left(\frac{1}{n}b\right)$, т. е. $a > b$. Во втором случае придем к неравенству $a < b$. В обоих случаях получили противоречие с данным равенством $a = b$. Итак, допущение, что $\frac{1}{n}a \neq \frac{1}{n}b$, ведет к противоречию. Поэтому $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$.

Если дано, что $a > b$, то неравенство $\frac{1}{n}a > \frac{1}{n}b$ доказывается аналогично, т. е. допускаем, что оно не выполняется, и приходим к противоречию с данным неравенством $a > b$. Проведите это рассуждение самостоятельно.

8. Докажем теперь, что если от равных отрезков отнять равные, то получаются равные отрезки.

Пусть даны равные отрезки AB и A_1B_1 и из них вычитаются равные отрезки AC и A_1C_1 (рис. 148). Допустим, что их раз-

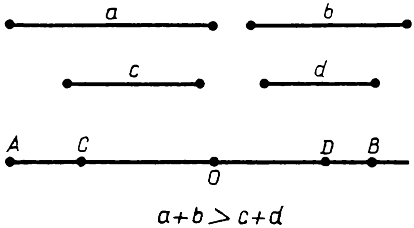


Рис. 147

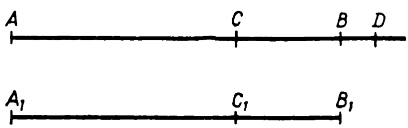


Рис. 148

ности CB и C_1B_1 не равны. Отложим на луче CB отрезок $CD = C_1B_1$. Так как $C_1B_1 \neq CB$, то точки B и D различны. Поскольку $AD=AC + CD$, $A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $CD=C_1B_1$, то по аксиоме сложения отрезков $AD = A_1B_1$. Так как и $AB = A_1B_1$, то по аксиоме откладывания отрезка точки D и B должны совпадать. Итак, пришли к противоречию, предположив, что $C_1B_1 \neq CB$. Поэтому $C_1B_1 = CB$.

Задачи к § 7

1. Нарисуйте два отрезка a и b, причем $a > b$. Постройте их сумму и разность.

2. Нарисуйте квадрат. Обозначьте его сторону через a, а его диагональ через b.

1) Постройте отрезки: а) $a + b$; б) $b - a$; в) $2a + b$, $2b + a$; г) $3a - \frac{1}{2}b$, $b - \frac{1}{4}a$.

2) Можно ли построить такие отрезки: $2a - b$, $2b - 3a$?

3. а) Точка K — середина отрезка AB. Запишите это утверждение, используя действия с отрезками. б) Два отрезка лежат на одной прямой и имеют общую середину. Запишите это, используя действия с отрезками.

4. С центром в точке A проведена окружность радиусом AB. Какую фигуру образуют середины всех ее радиусов? Какую фигуру образуют все точки X, такие, что $AX = k \cdot AB (k > 0)$?

5. а) Федя нарисовал на доске два отрезка, а потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер два исходных отрезка, а сумму и разность оставил. Сможет ли Федя восстановить исходные отрезки? б) Постройте треугольник, если известны суммы каждых двух его сторон.

6. Сторону AC равностороннего треугольника ABC разделите точками на три равные части. Эти точки соедините отрезками с вершиной B. а) Сколько треугольников на рисунке? б) Сколько из них равнобедренных? в) Какие из полученных треугольников равны? Решите такую же задачу, если сторона разделена на четыре равные части.

7. Докажите, что в равных треугольниках соответственные медианы равны.

8. а) Докажите, что в равнобедренном треугольнике есть две равные медианы. б) Сколько равных медиан будет в равностороннем треугольнике? в) Про равнобедренный треугольник составьте задачу более общую, чем а). Именно: если от его вершины отложить два равных отрезка, то...

9. Нарисуйте два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На их равных сторонах AC и A_1C_1 возьмите такие точки D и D_1, что $AD = A_1D_1$.

1) Докажите: а) что если треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны, то треугольники CBD и $C_1B_1D_1$ тоже равны; б) обратное утверждение.

2) Исходя из рисунка к этой задаче, составьте сами новую задачу.

3) Составьте более общую задачу, когда на сторонах AC и A_1C_1 взято по две точки.

4) Составьте более общую задачу, увеличив число точек на этих сторонах. Сможете ли вы ее решить?

10. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки D и D_1, такие, что $AD = A_1D_1$, а на сторонах AC и A_1C_1 взяты точки K и K_1, такие, что $AK = A_1K_1$. Докажите, что равны такие треугольники: ADK и $A_1D_1K_1$, BDK и $B_1D_1K_1$, CBK и $C_1B_1K_1$.

11. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AB и A_1B_1 взяты точки K и K_1, такие, что $AK = A_1K_1$, на сторонах BC и B_1C_1 взяты точки L и L_1, такие, что $BL = B_1L_1$, на сторонах CA и C_1A_1 взяты точки M и M_1, такие, что $CM = C_1M_1$. Докажите, что треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ равны.

12. На трех сторонах равностороннего треугольника ABC взяты точки K, L, M, такие, что $AK = BL = CM$. Сделайте рисунок. Что можно доказать по этому рисунку?

§ 8. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ

8.1. Длина

В геометрии принято говорить о равных отрезках, о том, что отрезки складываются. Но ни в обыденной жизни, ни на производстве никогда никто не говорит так о реальных предметах: никто, например, не скажет, что две доски равны, а скажет, что они одинаковые, или одного размера, или одной длины. Вытянутые предметы сравнивают по длине. Говорят, например, что два провода одной длины или один длиннее другого. А если провод состоит из двух кусков, то говорят, что длины их складываются, или что его длина равна сумме длин этих кусков.

Длина — это величина, характеризующая протяженность предмета. В отношении к реальным предметам она является одной из физических величин наряду с такими, как площадь, объем, масса, скорость и т. д. В отношении же к фигурам длина, площадь, объем — это «геометрические величины».

В геометрии длина — это величина, характеризующая протяженность отрезка (а также других линий; в старину даже говорили, что «линия — это длина без ширины»).

Длина отрезка обладает следующими основными свойствами.

1. ***Равные отрезки имеют одну и ту же длину. У большего отрезка длина больше.***

2. ***Длина суммы отрезков равна сумме их длин.***

Можно дать такое определение: **длиной отрезка называется величина, обладающая высказанными свойствами 1 и 2.**

Каждому понятно, что когда отрезки прикладываются один к другому, образуя один отрезок, то длины их складываются, как складываются длины укладываемых друг за другом рельсов, длины отмеряемых один за другим отрезков веревки и т. д. Это ясно без всякого измерения; измеряем ли мы длины метрами, или старыми русскими аршинами, или английскими футами — это не играет никакой роли.

Длина отрезка называется также **расстоянием между его концами, т. е. расстояние между двумя точками — это длина соединяющего их отрезка.**

Длины отрезков AB, CD, a и т. д. мы будем обозначать так: $|AB|$, $|CD|$, $|a|$ и т. д., или так же, как сами отрезки: AB, CD, a и т. д. (если это не поведет к путанице).

8.2. Измерение длины отрезков

Измерение длины отрезка состоит в сравнении этого отрезка с отрезком, принятым за масштаб — единицу длины. В результате измерения получается число — «численное значение длины отрезка в данном масштабе». Оно показывает, сколько раз масштаб и данные его доли укладываются в данном отрезке.

На практике сравнительно небольшие длины измеряют с помощью линейки, на которой размечены, скажем, сантиметры и миллиметры (а могли бы быть футы, дюймы и т. п.). Линейку прикладывают к измеряемому предмету и смотрят, сколько в нем укладывается сантиметров и еще сколько миллиметров, если сантиметры не укладываются целое число раз. Если на отрезке AB (рис. 149) уложилось ровно 3 см и 4 мм, то говорят: «Длина отрезка AB равна 3 см 4 мм, или 3,4 см» и пишут: $AB = 3{,}4$ см.

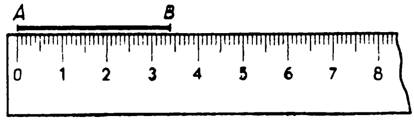


Рис. 149

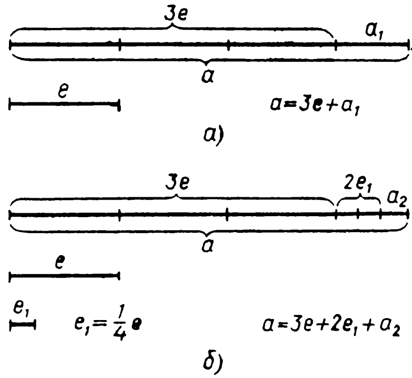


Рис. 150

Единица измерения и данные ее доли, как сантиметры, миллиметры, могут не укладываться на отрезке — на предмете целое число раз. Тогда если нужно более точное измерение, то пользуются долями миллиметра. Например, микрон — одна тысячная доля миллиметра.

В геометрии измерение длин отрезков осуществляют тем же способом, что и на практике, только отвлеченно, абстрактно.

Выбирают какой-нибудь отрезок e и принимают его за единицу измерения. Его называют также единичным отрезком. Кроме того, берут все меньшие и меньшие его доли — $e_1, e_2, \ldots$, например, $e_1 = \frac{1}{10}e$, $e_2 = \frac{1}{100}e, \ldots$. Если e — это метр, то $e_1 = 10$ дм, $e_2 = 1$ см и т. д.

Длину данного отрезка a измеряют так. На отрезке a от одного из его концов откладывают последовательно отрезки, равные e, пока это возможно. Допустим, отрезки, равные e, отложились n раз. Если остался еще остаток (рис. 150), то на нем откладывают отрезки, равные отрезку e_1, т. е. первой из выбранных долей отрезка e. Они отложились, допустим, n_1 раз. Если остался еще остаток, то на нем откладываем отрезки, равные e_2. И так продолжают дальше. Получается значение длины: n единиц e плюс n_1 единиц e_1 плюс n_2 единиц e_2 и т. д. Например, 5 м 3 дм 6 см.

Так длину любого отрезка a можно измерить с любой точностью, стоит лишь взять достаточно малые доли единичного отрезка e, e_1, e_2 и т. д.

В практике этого совершенно достаточно, потому что абсолютно точное измерение и невозможно. Измерение всегда происходит с некоторой точностью.

В геометрии же мыслятся сколь угодно точные измерения, которые могут продолжаться и неограниченно.

Замечание. За основную единицу длины принят метр, его делят на 10, на 100 и т. д. равных частей. Это очень удобно, так как значение длины можно выписать в виде десятичной дроби: $n,\ n_1\ n_2\ \ldots$.

Например, 5,36... м.

8.3. Свойства длин отрезков

Рассмотрим основные свойства численных значений длины.

1. ***При выбранной единице измерения длина каждого отрезка выражается положительным числом, и для каждого положительного числа есть отрезок, длина которого выражается этим числом.***

Первая часть означает, что путем измерения мы получаем положительное число — численное значение длины. Оно, вообще говоря, является приближенным, но мыслится, что это приближение может быть сколько угодно точным.

Вторая часть означает, что если дано число $\frac{m}{n}$, то, откладывая m раз одну n-ю долю единицы измерения, получим отрезок длиной $\frac{m}{n}$.

Сформулируем теперь дальнейшие свойства численных значений длины. Эти свойства известны из практики и формулируются здесь для того, чтобы представить их более четко. Мы предполагаем, что выбрана какая-то единица измерения. Численное значение длины в этой единице будем называть просто длиной.

2. ***Если два отрезка равны, то их длины равны,*** и обратно: ***если длины двух отрезков равны, то отрезки равны.***

3. ***Если один отрезок больше другого, то его длина больше,*** и обратно: ***если длина одного отрезка больше длины другого, то сам отрезок больше.***

4. ***Если данный отрезок есть сумма некоторых отрезков, то его длина равна сумме их длин,*** и обратно: ***если длина отрезка равна сумме длин некоторых отрезков, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков.***

5. ***Если данный отрезок есть разность двух отрезков, то его длина равна разности их длин,*** и обратно: ***если длина отрезка равна разности длин двух отрезков, то сам отрезок равен разности этих отрезков.***

Перечисленными свойствами длины мы постоянно пользуемся, когда сравниваем, складываем и вычитаем не сами отрезки, а числа, выражающие их длины. Например, когда говорим о спортивных результатах — о прыжках в длину, о расстоянии, на которое было брошено копье: «Спортсмен К. метнул копье на 81 м, а спортсмен П. — на 83,5 м, т. е. на 2,5 м дальше» и т. п.

Все перечисленные свойства длины можно выразить одной фразой: между равенством, отношением «больше — меньше», сложением и вычитанием самих отрезков, с одной стороны, и их длин, с другой стороны, есть полное взаимное соответствие.

Это взаимное соответствие точное для отрезков с точными значениями длины (в данной единице), а вообще, оно приближенное, насколько приближенны значения длины. Но это приближение может быть сколь угодно точным, а значит, соответствие сколь угодно близко к точному.

Мы докажем перечисленные свойства длин (2—5) в дополнении к этому параграфу. Они логически вытекают из указанного в п. 8.2 процесса измерения длины отрезка и из принятых нами аксиом откладывания, сравнения и сложения отрезков.

8.4. Замена единицы измерения

Численное значение длины в миллиметрах в 10 раз больше, чем численное значение ее в сантиметрах, потому что в каждом сантиметре содержится 10 мм. Вообще, если новая единица содержится в старой, скажем, n раз, то в данном отрезке новых единиц будет как раз в n раз больше. (Например, длина 4,3 см — это то же, что 43 мм.)

Поэтому выполняется правило:

При замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

Вывод этого правила для общего случая содержится в дополнении к § 8.

8.5. Метр — единица длины

За основную единицу длины для практических измерений в физике и в технике принят метр. Стандартный метр представлен отрезком между серединами черточек, нанесенных на металлическом стержне, хранящемся в Институте метрологии. Метрология — наука об измерениях не только длин, но и времени, массы и др. Институт метрологии находится в Ленинграде. Хранящиеся там два экземпляра метра являются копиями с оригинала, находящегося в Париже. Первоначально, во время французской революции в конце XVIII в., за метр приняли $\frac{1}{40000000}$ длины земного меридиана. Но потом выяснилось, что сделанный тогда образец отличен от этой длины, и так как меридиан точно измерить трудно, то за метр приняли длину, какую давал образец. Теперь и эта точность считается недостаточной и метр определяют через длину волны света, испускаемого химическим элементом криптоном. Метровые линейки, метры на рулетке и пр. — это копии стандартного метра, отрезки, ему равные. Сантиметровые отрезки равны $\frac{1}{100}$ метра.

Дополнение к § 8

I. Вывод свойств длины

Представим себе, что выбрана единица измерения — единичный отрезок e_0 — и дано некоторое число отрезков: a, b, ..., которые мы должны сравнивать или складывать и вычитать. Выберем мысленно достаточно малую долю отрезка e_0, например $e = \frac{1}{n} e_0$, где $n = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$, так, чтобы она укладывалась в каждом из наших отрезков очень большое число раз и неточностью в одну такую долю можно было бы пренебречь. (Например, если в отрезке a содержится больше миллиона долей e, то ошибка на одно e меньше одной миллионной всей длины отрезка.)

Каждый отрезок a можно представить как слагающийся из целого числа малых единиц e и, может быть, еще остатка. Остаток меньше e, и им можно при взятой точности пренебречь. Тогда отрезок a представляется состоящим из целого числа малых единиц e, т. е. $a \approx pe$ (знак $\approx$ показывает, что равенство приближенное). Число единиц измерения, укладывающихся на отрезке, и есть численное значение его длины с точностью до единицы. Стало быть, длина отрезка a в малой единице e равна p с точностью до этой единицы.

Итак, в пределах принятой точности каждый отрезок можно заменить отрезком, состоящим из целого числа малых единиц измерения. Это число и будет в пределах принятой точности длиной отрезка, измеренной в этой единице. Поэтому сравнение отрезков или их длин, а также сложение и вычитание сводится просто к сравнению, сложению и вычитанию соответствующих численных значений их длин.

Равенство отрезков — это равенство их длин, т. е. равенство чисел, содержащихся в них единиц e. Больше или меньше один отрезок другого — это то же, что больше или меньше число заключенных в нем единиц e, т. е. больше или меньше длина одного отрезка по сравнению с другим.

Точно так же сложение отрезков — это то же, что сложение содержащихся в них малых отрезков e, а значит, сложение соответствующих длин. Покажем это.

Если даны два отрезка $a = pe$, $b = qe$, то сумма их $a + b$ получается так, что мы откладываем отрезки, равные e, сначала p раз, а потом еще q раз. Получается $p + q$ — длины складываются.

Если же, напротив, мы складываем длины p и q, то это значит, что откладываем $p + q$ раз отрезок e и получаем отрезок $(p + q)e = pe + qe = a + b$. Следовательно, если длины складываются, то и соответствующие отрезки складываются.

Вывод для вычитания будет аналогичным.

Таким образом, все свойства длин, указанные в п. 8.3 под номерами 2—5, доказаны, когда длины выражаются целыми числами в малой единице с требуемой точностью.

То же верно для длин, выраженных в исходной единице e_0. В ней укладывается n малых единиц: $e = \frac{1}{n} e_0$. Поэтому значение длины в единице e_0 будет в n раз меньше, чем в единице e. Следовательно, если $a = me$, то, так как $e = \frac{1}{n} e_0$, получаем, что $a = \frac{m}{n} e_0$.

Длины отрезков в исходной единице равны их длинам в малой единице, деленным на одно и то же число n. Это дроби с общим знаменателем n. Поэтому сравнение, сложение и вычитание длин в исходной единице, как для дробей с общим знаменателем, сводится к сравнению, сложению и вычитанию числителей, т. е. длин в малой единице.

Таким образом, убеждаемся, что свойства длины, указанные в п. 8.3, выполняются при любой единице измерения.

Замечание. Во всех проведенных рассуждениях мы пользовались аксиомами откладывания, сравнения и сложения отрезков, не упоминая об этом явно. Их обычно не упоминают, настолько они очевидны. Но все же обратим на них внимание, чтобы логически обосновать наши выводы.

Представляя данный отрезок как составленный из малых единиц e и остатка, мы пользуемся аксиомой откладывания: откладываем на данном отрезке a отрезки, равные e. Все отложенные отрезки по аксиоме сравнения равны между собой, так как равны одному и тому же отрезку e.

Если даны два отрезка a и b и $a = b$, а длина a равна p, т. е. $a = pe$, то по аксиоме сравнения из того, что $a = b$ и $a = pe$, следует, что $b = pe$, т. е. длина отрезка b тоже равна p.

Не будем дальше указывать все пункты наших выводов, где использовалась та или иная аксиома. Попробуйте сделать это сами. Можно предложить своего рода «игру в аксиомы»: кто больше укажет применений аксиом в данном или каком-либо другом выводе. Это полезно с точки зрения выяснения оснований проводимых рассуждений.

11. Теорема о замене единицы измерения

Что происходит с длинами, когда новая единица измерения больше (меньше) старой в целое число раз, уже было сказано в п. 8.4.

Вообще же при любой замене единицы измерения выполняется следующее.

Теорема *(о замене единицы).* ***При замене единицы измерения численные значения длин умножаются на одно и то же число — на длину старой единицы, выраженную в новой единице.***

Обозначим длину отрезка a в единице e так: $|a|_e$. Тогда теорему можно выразить так: ***для любого отрезка a и единиц измерения e_0 и e_1***

$$|a|_{e_1} = |a|_{e_0} \cdot |e_0|_{e_1}.$$

Доказательство. Пусть имеются две единицы измерения: e_0 и e_1. Возьмем какой-нибудь отрезок a и малую долю единицы измерения e_0:

$$e = \frac{1}{n} e_0.$$

Возьмем ее столь малой, чтобы длины отрезков e_1 и a выражались в ней целыми числами с какой мы хотим точностью. С этой точностью $a = me$, $e_1 = ke$, т. е. $e = \frac{1}{k} e_1$.

Так как $a = me$ и $e = \frac{1}{n} e_0 = \frac{1}{k} e_1$, то

$$a = \frac{m}{n} e_0 = \frac{m}{k} e_1,$$

т. е. длина отрезка a в единицах e_0 и e_1 будет

$$|a|_{e_0} = \frac{m}{n} \text{ и } |a|_{e_1} = \frac{m}{k}. \qquad (1)$$

Вместе с тем так как $e_0 = ne$ и $e = \frac{1}{k} e_1$, то

$$e_0 = \frac{n}{k} e_1,$$

т. е. длина отрезка e_0 в единице e_1 будет

$$|e_0|_{e_1} = \frac{n}{k}.$$

Сравнивая это с (1), видим, что

$$|a|_{e_1} = \frac{m}{k} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{k} = |a|_{e_0} |e_0|_{e_1},$$

что и требовалось доказать.

Задачи к § 8

Основные задачи

1. Что представляет собой фигура, все точки которой удалены от данной точки на расстояние, равное данному? Не большее, чем данное?

2. Какую фигуру образуют все точки плоскости, равноудаленные от двух данных точек?

3. Нарисуйте треугольник. Постройте точку, равноудаленную от всех его вершин.

Задачи к пунктам 8.2, 8.4

4. Измерьте длину своего шага, своей ступни, расстояние между кончиками пальцев вытянутых рук, вытянутыми пальцами одной руки, длину большого пальца от нижнего сустава до конца и длину ногтя на мизинце. (Постарайтесь запомнить эти длины.) С их помощью найдите длину и ширину комнаты, высоту шкафа, размеры письменного стола, размеры самой большой и самой маленькой книги, которая у вас есть.

5. За единицу измерения длины приняли стороны самого маленького квадрата в тетради. Найдите в этой единице длины длину: а) диагонали этого квадрата; б) диагональ квадрата, у которого сторона равна 5 единицам длины; в) диагонали прямоугольника, у которого стороны равны 3 и 4 единицам длины.

6. Нарисуйте на одной прямой три равных отрезка AB, BC, CD. Пусть за единицу длины принят отрезок AB. Чему равны длины отрезков, получившихся на этой прямой? Чему равны их же длины, если за единицу длины будет принят отрезок AC? AD?

7. Как изменится значение длины отрезка: а) при уменьшении единицы длины в 10 раз; б) при увеличении единицы длины в 5 раз?

8. Измерив два отрезка некоторой единицей длины, мы получили, что один из них длиннее другого в два раза. После этого мы захотели сравнить их длины поточнее и решили для этого уменьшить единицу длины в 10 раз. Добьемся ли мы цели?

9. Отрезок, измеренный единицей e_1, имеет значение длины 5. Он же, измеренный единицей e_2, имеет значение длины 4. Сравните между собой единицы e_1 и e_2.

10. Федя и Вася измеряли два разных отрезка. Федя измерял в сантиметрах и получил длину 122 см. Вася измерял в миллиметрах и получил длину 1223 мм. После этого Вася сказал, что его отрезок длиннее. Прав ли он?

Задачи к пунктам 8.1, 8.3

А

11. На отрезке AB взяты точки C и D. Выразите расстояние CD через расстояния между данными точками прямой AB.

12. На прямой AB вам нужно отметить точку, которая к точке A в два раза ближе, чем к точке B. Как вы это сделаете?

13. На прямом участке ограды длиной 20 м через каждый метр врыт столб. Сколько врыто столбов? Какое расстояние между первым столбом от начала и пятым от конца? Десятым от начала и десятым от конца? Составьте и решите более общую задачу.

14. $|AB| = 5$ см. 1) Постройте точку X, такую, что: а) $|XA| = 3$ см, $|XB| = 4$ см; б) $|XA| = 3$ см, $|XB| = 2$ см. в) $|XA| = 3$ см, $|XB| = 8$ см. 2) Нарисуйте фигуру, каждая точка которой удовлетворяет условиям: а) $|XA| \leqslant 3$ см, $|XB| \leqslant 4$ см; б) $|XA| \geqslant 3$ см, $|XB| \geqslant 4$ см; в) 1 см $\leqslant |XA| \leqslant 2$ см, 3 см $\leqslant$ $\leqslant |XB| \leqslant 4$ см.

15. Постройте прямоугольный треугольник, если: а) он равнобедренный и сумма его катетов равна 10 см; б) один катет равен 2 см, а другой — в два раза больше его; в) гипотенуза равна 4 см, а один из катетов в два раза ее меньше.

16. Постройте треугольник: а) со сторонами 4 см, 5 см, 6 см; б) со стороной 4 см, медианой к ней, равной 3 см, и еще одной стороне, равной 2 см.

17. Как вы будете искать длину ломаной? Сколько вы нашли для этого способов? Какой из них точнее? (Длина ломаной — это сумма длин всех ее звеньев.)

18. Периметр треугольника — это сумма длин его сторон. а) Пусть сторона равностороннего треугольника равна 6 см. Чему равен его периметр? б) Пусть периметр равностороннего треугольника равен 31 см. Чему равна его сторона? в) Периметр треугольника 60 мм, одна из его сторон 20 мм. Будет ли такой треугольник равносторонним? Если нет, то каким могут быть длины других его сторон?

19. Даны четыре равных треугольника. Один из них имеет сторону 3 см, второй имеет сторону 4 см, третий имеет сторону 6 см. Каков периметр четвертого треугольника?

20. В прямоугольнике провели диагональ. Известен периметр прямоугольника (сумма длин всех его сторон) и периметр одного из полученных при этом треугольников. Можете ли вы найти длину диагонали?

21. Два прямоугольных треугольника имеют катеты длиной 3 см и 4 см. Их равные катеты лежат на одной прямой, сами треугольники лежат с одной стороны от этой прямой и имеют единственную общую точку — вершину острого угла. Чему равно расстояние между другими вершинами острых углов этих треугольников?

22. Два равносторонних треугольника со стороной 2 см расположены так, что одна сторона каждого из них лежит на данной прямой, сами они лежат с одной стороны от данной прямой и имеют единственную общую точку. Чему равно расстояние между их вершинами, не лежащими на данной прямой? Придумайте сами похожую задачу про равнобедренные треугольники.

23. В прямоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин. Какая это точка?

24. Даны фигура F и две точки A и B. Найдите точки фигуры F, равноудаленные от точек A и B, если: а) F — это круг, A и B взяты на его окружности; б) F — это квадрат, A и B — две его соседние вершины; в) F — это прямоугольник, A и B — две его противоположные вершины.

25. Вам надо найти расстояние между двумя объектами в разных концах озера. Как вы будете действовать?

26. Эпицентр землетрясения определяют, вычисляя расстояния от него до трех сейсмических станций. Объясните, как это происходит.

27. а) Можете ли вы найти толщину тетрадного листа? б) Возьмите лист бумаги и сложите его пополам. Полученный лист опять сложите пополам и т. д. Представьте себе, что вы можете повторять эту процедуру достаточно долго. Как вы думаете, после скольких сгибаний получится лист толщиной 1 см? 10 см? 1 м? (Листы бумаги плотно сжаты.)

Б

28. Отрезок AB длиной 5 см разделен точкой D пополам. а) Чему равно расстояние между серединами отрезков AD и BD? б) Сможете ли вы найти расстояние, если точка D не будет серединой данного отрезка? в) Сможете ли вы определить положение точки D на отрезке AB, если будет известно расстояние между серединами отрезков AD и BD?

29. 1) Точка C — середина отрезка AB. Точка D взята на продолжении отрезка AB. Вычислите $|CD|$, если: а) $|DA| = 10$ см, $|DB| = 2$ см; б) $|DA| = d_1$, $|DB| = d_2$.

2) А теперь решите задачу б), если точка D находится на самом отрезке AB.

30. Три отрезка, длиной 6 см каждый, лежат на одной прямой. Первый и второй отрезки имеют общую часть, равную 4 см. Такую же общую часть имеют второй и третий отрезки. Можете ли вы вычислить длину общей части первого и третьего отрезков?

31. Сумма двух любых сторон треугольника равна 10 см. Вычислите его периметр.

32. В треугольнике ABC провели отрезок BD на противоположную сторону. Периметр данного треугольника 20 см, периметры полученных треугольников 10 и 12 см. Вычислите $|BD|$.

33. Из точки на гипотенузе прямоугольного треугольника провели перпендикуляры к его катетам. Известны периметры двух полученных при этом треугольников. Можете ли вы найти периметр данного треугольника? Составьте и решите обратную задачу.

34. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB через середину AC провели перпендикуляр к AC. Он пересек отрезок AB в точке K. На сколько больше периметр ABC, чем периметр KBC, если $|AC| = 1$ см?

35. а) В четырехугольнике провели диагональ. Известна ее длина, периметры двух образовавшихся треугольников. Можете ли вы найти периметр четырехугольника (сумму длин всех его сторон)? б) Своими диагоналями четырехугольник разбивается на треугольники. Известен периметр каждого из них. Можете ли вы найти периметр четырехугольника?

36. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Каждое ребро этих многогранников равно 1 см. Какова наименьшая длина такой проволоки?

§ 9. ОПЕРАЦИИ С УГЛАМИ

9.1. Сложение углов

Углы можно складывать подобно отрезкам, только отрезки прикладывают друг к другу концами, а углы — сторонами.

Сложение данных углов состоит в том, что из равных им углов составляется один угол — их сумма, как на рисунке 151 $\angle ab$ составляется из углов, равных углам α, β, γ. Это можно представить себе так. Где-то строится угол, равный одному из данных, затем от одной из его сторон откладывается угол, равный другому из данных.

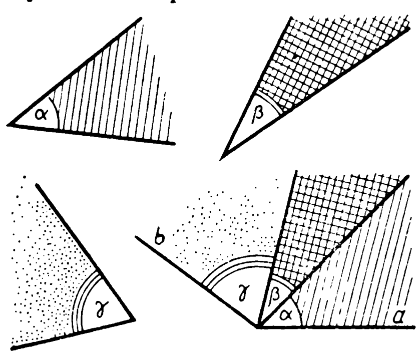


Рис. 151

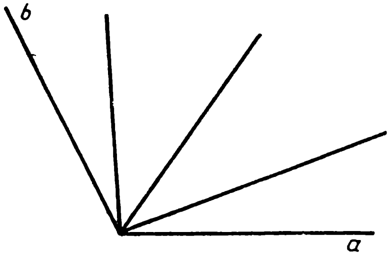


Рис. 152

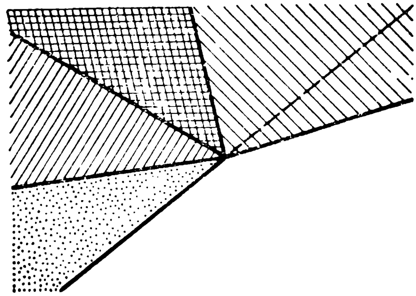


Рис. 153

При этом откладывается он по другую сторону от первого угла. Затем к полученному углу аналогично пристраивается угол, равный третьему из данных углов (если такой есть), и т. д. Полученный угол и называется **суммой** данных **углов**.

С другой стороны, любой данный угол ab можно разделить лучами, идущими внутри него из вершины, на некоторые углы; угол ab будет их суммой (рис. 152).

Прикладывая углы друг к другу, можно получить в сумме угол, больший развернутого (рис. 153). Можно не исключать такие углы. При этом углы, бо́льшие развернутого, будем считать равными, если они получаются из развернутого прибавлением равных углов.

Сложение углов сходно со сложением отрезков. Однако обратим внимание на одно существенное различие; оно состоит в том, что суммы отрезков ничем не ограничены, а суммы углов ограничены. Даже если допускать углы, бо́льшие развернутого, то больше двух развернутых, т. е. больше угла, покрывающего всю плоскость, угол быть не может (если, конечно, не обобщать понятие угла).

Как и при сложении равных отрезков, если угол α слагается из n углов, равных углу β, то пишем: $\alpha = \underbrace{\beta + \beta + \ldots + \beta}_{n \text{ раз}} = n\beta$.

9.2. Свойства сложения углов

Свойство 1. *Углы, полученные при сложении равных углов, равны.*

Аналогичное утверждение для отрезков принималось как аксио-

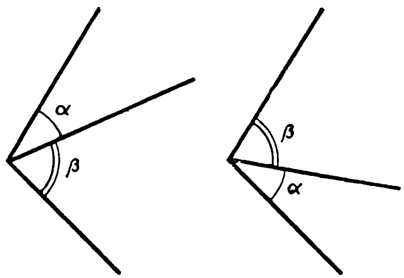


Рис. 154

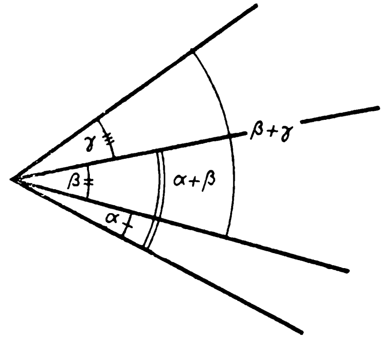


Рис. 155

ма сложения отрезков. Утверждение, что суммы равных углов равны, может быть доказано. Его доказательство не просто. Мы приводим его в дополнении к этому параграфу.

Свойство 2. ***Для сложения углов верны переместительный и сочетательный законы*** (рис. 154 и 155).

Свойство 3. ***В неравенствах между углами можно заменять углы равными им углами, не изменяя смысла неравенства, т. е. если*** $\angle A = \angle B$ ***и*** $\angle B > \angle C$, ***то*** $\angle A > \angle C$.

Свойство 4. ***Если угол является суммой нескольких углов, то он больше каждого из слагаемых углов*** (рис. 156).

Как и в случае отрезков, из этого свойства вытекает, что ***если два угла имеют общую вершину и один из них является частью другого, то первый угол меньше второго*** (рис. 157).

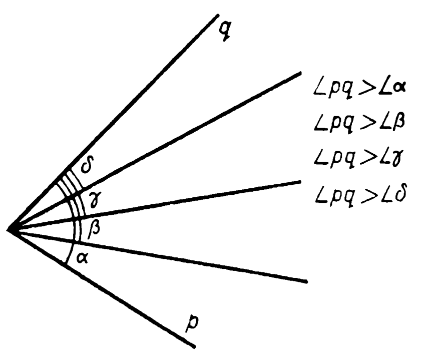


Рис. 156

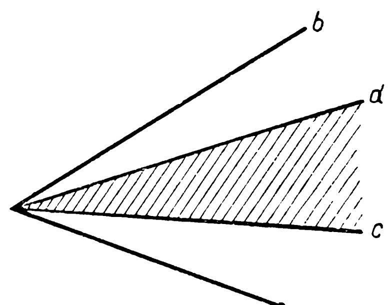


Рис. 157

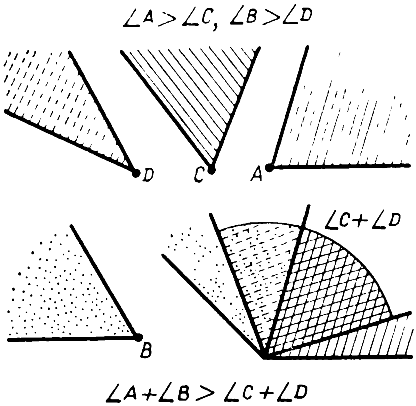


Рис. 158

Свойство 5. ***Сумма бóльших углов больше, т. е. если угол A больше угла C и угол B больше угла D, то сумма углов A и B больше суммы углов C и D*** (рис. 158).

Доказательства свойств 2—5 проводятся дословно так же, как доказываются аналогичные свойства отрезков в дополнении к § 7. Надо лишь в этих доказательствах заменять слово «отрезок» словом «угол», а слова «конец отрезка» словами «сторона угла». Эти доказательства вы можете провести самостоятельно.

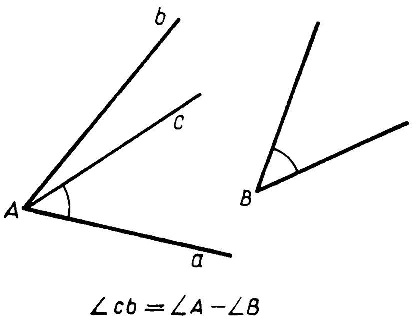


Рис. 159

9.3. Вычитание углов

Вычитание одного угла из другого — операция, обратная сложению углов. Поэтому найти **разность углов** A и B — это значит найти такой угол C, что сумма углов B и угла C равна углу A.

Разность углов находится так. От одной из сторон угла A в ту сторону, где лежит угол A, откладывается угол B', равный углу B (рис. 159). Тогда тот угол, стороны которого — несовпадающие стороны углов A и B', и есть разность углов A и B.

Ясно, что угол B можно вычесть из угла A лишь тогда, когда угол A больше угла B.

При вычитании углов выполняется следующее правило: ***если от равных углов отнять равные, то получатся равные углы.***

Доказать его можно так же, как было доказано аналогичное правило для разности отрезков в дополнении к § 7.

Поскольку все развернутые углы равны, то из сформулированного свойства разности углов вытекает следующее утверждение:

Если углы равны, то смежные с ними углы также равны (рис. 160).

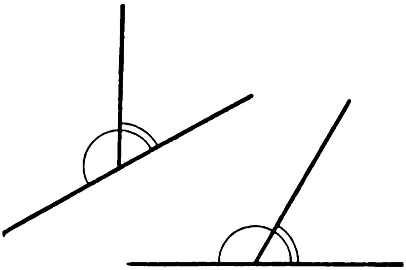


Рис. 160

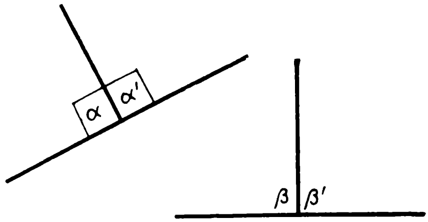


Рис. 161

Из этого свойства и равенства всех прямых углов вытекает, что ***угол, равный прямому, прямой.*** Действительно, пусть α — прямой угол, а угол β равен углу α (рис. 161). Тогда угол α', смежный с углом α, равен углу β', смежному с углом β. Так как $\alpha' = \alpha$, то $\beta' = \beta$, т. е. углы β и β' — прямые.

9.4. Вертикальные углы

Определение. **Два угла называются вертикальными, если стороны каждого из этих углов дополняют до прямых линий стороны другого из них** (рис. 162).

Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на две пары вертикальных углов, имеющих общую вершину в точке пересечения этих прямых.

Свойство вертикальных углов. ***Вертикальные углы равны.***

Доказательство. Пусть даны вертикальные углы: угол α и угол β. Оба они имеют один и тот же смежный с ними угол — угол γ (рис. 163). Поэтому угол α равен углу β по свойству смежных углов, доказанному в предыдущем пункте. ■

Из свойства вертикальных и смежных углов вытекает, что ***если при пересечении двух прямых оказалось, что один из образованных углов прямой, то и остальные три угла прямые.***

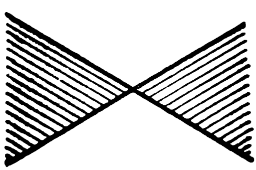


Рис. 162

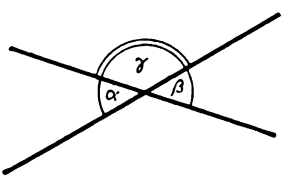


Рис. 163

Такие прямые называются **взаимно перпендикулярными** (рис. 164).

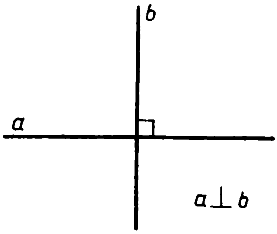


Рис. 164

9.5. Деление углов

Аналогично делению отрезков определяется деление углов на натуральные числа. А именно если α — некоторый угол и n — натуральное число, то $\frac{1}{n}\alpha$ называется такой угол, что угол α есть сумма n углов, равных $\frac{1}{n}\alpha$. О делении углов мы уже говорили в § 3.

Ясно, что выполняются следующие свойства: ***если*** $\alpha \doteq \beta$, ***то*** $\frac{1}{n}\alpha \doteq \frac{1}{n}\beta$, ***а если*** $\alpha > \beta$, ***то*** $\frac{1}{n}\alpha > \frac{1}{n}\beta$ ***для любых натуральных чисел*** n.

Из этого следует, что ***половины равных углов равны.***

Так как половины равных углов равны, то *каждый угол можно разделить пополам лишь единственным образом*, т. е. *у каждого угла имеется лишь одна биссектриса.* А поскольку перпендикуляр — это биссектриса развернутого угла, то *из каждой точки прямой в каждую сторону от нее можно провести лишь один луч, перпендикулярный этой прямой.* Вместе эти два луча образуют единственную прямую, перпендикулярную данной прямой в данной ее точке (рис. 165).

Дополнение к § 9

I. Равенства развернутых и прямых углов

Очевидно, что ***все развернутые углы равны.*** Но теперь мы может показать, что это согласуется с определением равенства углов, данным в п. 3.2.

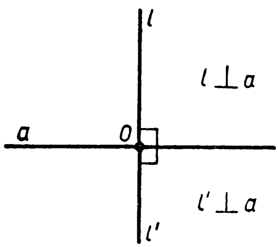


Рис. 165

Пусть даны два развернутых угла с вершинами в точках O и O_1 (рис. 166). Отложим на их сторонах отрезки OA, OB, O_1A_1, O_1B_1, причем $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$. Тогда отрезки AB и A_1B_1 будут поперечинами. По аксиоме отрезков $AB = A_1B_1$, как того и требует определение равенства углов.

Так как, во-первых, прямые углы — это половины равных друг другу развернутых углов и, во-вторых, половины равных углов равны, то все прямые углы равны.

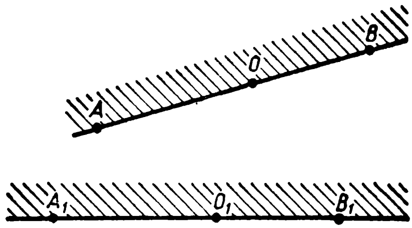


Рис. 166

II. Равенство суммы равных углов

Т е о р е м а. ***Суммы равных углов равны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть углы ab и a_1b_1 с вершинами O и O_1 составлены из углов ac, cb и a_1c_1, c_1b_1, причем $\angle ac = \angle a_1c_1$ и $\angle cb = \angle c_1b_1$. Докажем, что $\angle ab = \angle a_1b_1$ (рис. 167).

Допустим, что хотя бы один из углов ab или a_1b_1 меньше развернутого. Пусть это будет угол ab. Отложим на его сторонах какие-нибудь отрезки OA, OB ($A \in a$, $B \in b$) и проведем отрезок AB. Луч OC пересекает его в какой-то точке C (рис. 168).

Построим $\triangle O_1A_1B_1$, равный $\triangle OAB$, так, чтобы сторона O_1A_1 лежала на луче a_1 и треугольник $O_1A_1B_1$ лежал с той стороны от a_1, где лежит угол a_1b_1. На стороне A_1B_1 возьмем такую точку C_1, что $A_1C = AC$ и, стало быть, $B_1C_1 = BC$.

По построению $\triangle O_1A_1B_1 = \triangle OAB$, так что $\angle A_1 = \angle A$. Кроме того, $O_1A_1 = OA$, $A_1C_1 = AC$. Стало быть, $\triangle O_1A_1C_1 = \triangle OAC$.

Раз треугольники равны, то равны и их углы при вершинах O_1 и O. Но угол AOC — это угол ac. Поэтому и угол $A_1O_1C_1$ равен углу ac.

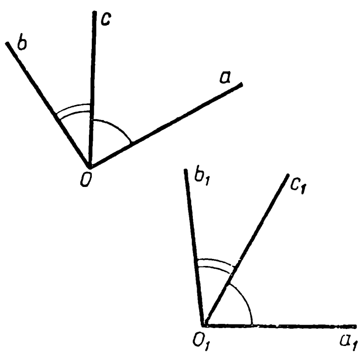


Рис. 167

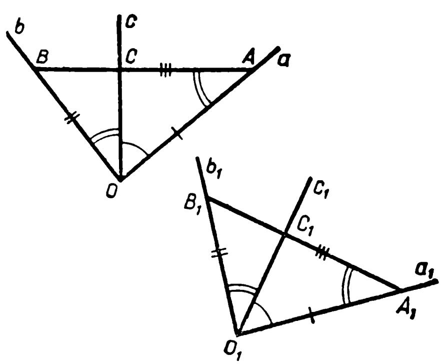


Рис. 168

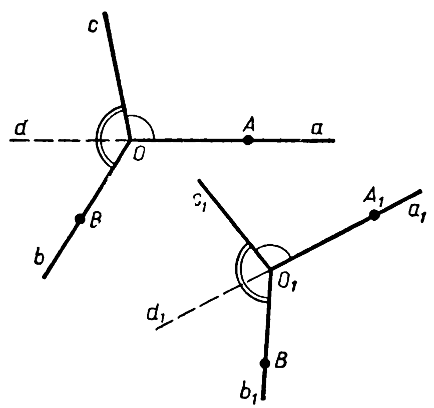


Рис. 169

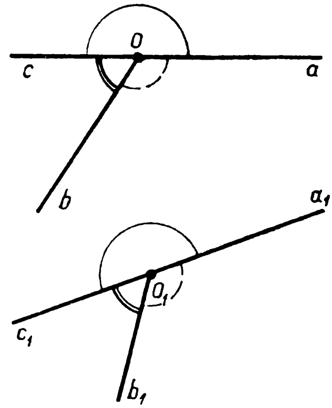


Рис. 170

Точно так же, рассматривая треугольник $O_1B_1C_1$, докажем, что его угол при вершине O_1 равен углу bc.

Таким образом, получается, что угол $A_1O_1B_1$ в треугольнике $A_1O_1B_1$ составлен из углов, равных углам ac и cb, т. е. он есть их сумма. Вместе с тем по построению он равен углу ab. Значит, сумма построенных углов, равных ac и bc, равна их сумме — углу ab.

Углы эти лежат от луча a_1 с той же стороны, где лежат данные углы a_1b_1 и c_1b_1, равные соответственно углам ac и cb. И так как в одну сторону от данного луча можно отложить лишь один угол, равный данному, то угол a_1c_1 совпадает с углом $A_1O_1C_1$, а угол c_1b_1 совпадает с углом $C_1O_1B_1$. Стало быть, угол a_1b_1 совпадает с углом $A_1O_1B_1$. А так как доказано, что угол $A_1O_1B_1$ равен углу ab, то угол a_1b_1 равен углу ab. Для первого случая теорема доказана.

Из уже доказанного следует, что разности равных углов равны (для углов, меньших развернутого). Это доказывается буквально так же, как соответствующее свойство для разности отрезков в дополнении к § 7.

Подробного доказательства для случая, когда среди рассматриваемых углов есть угол, больший развернутого или развернутый, мы приводить не будем. Идея доказательства видна из рисунков 169 и 170.

Задачи к § 9

Основные задачи

1. Какой угол образуют биссектрисы: а) двух смежных углов; б) двух вертикальных углов?

Составьте обратные утверждения и проверьте их.

2. Нарисуйте острый угол. Через вершину угла проведите два луча, перпендикулярные сторонам угла, причем так, чтобы угол между ними тоже был острый. а) Докажите, что полученный угол равен данному. б) Проделайте такую же работу, если будет дан тупой угол. в) Снова нарисуйте острый угол. Теперь через вершину этого угла проведите два луча так, чтобы они были перпендикулярны сторонам угла, но образовывали между собой тупой угол. Докажите, что в сумме с данными он дает развернутый угол. г) Решите аналогичную задачу, если будет дан тупой угол.

3. а) Два отрезка AB и CD имеют общую середину. Докажите, что $AC = BD$, $AD = BC$. б) Нарисуйте теперь четырехугольник, в котором диагонали имеют общую середину. Что отсюда следует для этого четырехугольника?

Задачи к пунктам 9.1—9.3

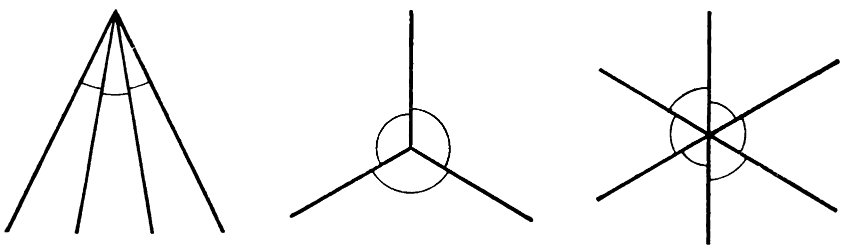
А

4. Постройте треугольник. Постройте сумму его углов. Что вы заметили? Проделайте такую же работу с четырехугольником.

5. Постройте прямоугольный треугольник. Из большего его угла вычтите сумму двух меньших его углов. Что вы заметили?

6. Нарисуйте угол и внутри его проведите луч из вершины данного угла. Каждый из углов на получившемся рисунке запишите как сумму или разность двух других углов.

7. На рисунке 171 дугами отмечены равные углы. Какие еще равные углы есть на этом рисунке?



а) *б)* *в)*

Рис. 171

8. Нарисуйте три равнобедренных треугольника с одним и тем же основанием. Укажите на рисунке равные углы. Рассмотрите разные случаи: а) все треугольники в одной полуплоскости; б) треугольники находятся в разных полуплоскостях.

9. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Каждый из углов на этом рисунке представьте как сумму или разность других углов.

10. Федя нарисовал два угла, потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер исходные углы, а сумму и разность оставил. Помогите Феде восстановить исходные углы.

11. Два равнобедренных треугольника ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание AB. Докажите, что треугольники AC_1C_2 и BC_1C_2 равны.

Б

12. Треугольник ABC равносторонний. На продолжениях его сторон взяты точки K, L, M. Точка A находится между M и B, точка B находится между K и C, точка C находится между A и L. $AM = BK = CL$. Докажите, что треугольник KLM равносторонний.

13. Треугольник ABC равносторонний. На его сторонах построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники (их основаниями являются стороны данного треугольника). Вершины полученных треугольников соединили отрезками. Докажите, что получился равносторонний треугольник. Изменится ли результат, если треугольники строить во внутреннюю сторону?

14. Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ составлены из двух соответственно равных треугольников с общими вершинами в точках A и A_1, причем у этих равных треугольников углы при вершинах A, A_1 соответственно равны. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Обобщите задачу.

15. Если два выпуклых четырехугольника составлены из соответственно равных треугольников, то они равны (т. е. равны их стороны, углы и диагонлаи). Докажите это. Обратите внимание на то, что четырехугольники могут быть составлены не только из двух соответственно равных треугольников.

16. Даны два выпуклых четырехугольника. У них соответственно равны по три стороны и углы между этими сторонами. Докажите, что эти четырехугольники равны, т. е. равны все их стороны, углы и диагонали.

17. Даны два выпуклых четырехугольника. Их стороны и по одной диагонали соответственно равны. Докажите, что равны другие их диагонали и углы. Верно ли это, если один из четырехугольников не является выпуклым? Оба не являются выпуклыми?

18. Докажите, что угол, равный прямому, прямой. Составьте и решите такую же задачу про острые и тупые углы.

Задачи к пункту 9.4

19. Про два угла известно следующее: а) у них есть общая вершина; б) стороны лежат на двух данных прямых; в) сторона одного из них является продолжением стороны другого; г) они равны. Из условия какого пункта следует, что они вертикальные? Может быть, одного условия недостаточно и надо взять два из них? Но тогда какие?

20. Через центр окружности проведены два диаметра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$, $AD = BC$.

21. Отрезки AC и BM пересекаются в точке O. При этом $AO = OB$, $MO = OC$. Докажите, что $AM = BC$. Может ли $AB = CM$?

22. Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем B лежит между A и C. Углы ABK и CBM равны. Следует ли из этого, что точки K, B, M лежат на одной прямой? При каком дополнительном условии они обязательно лежат на одной прямой?

23. Каждая из сторон равностороннего треугольника продолжена за его вершину на одно и то же расстояние. Получилось 6 точек. Укажите, какие расстояния между ними равны.

24. У двух треугольников равны по две стороны и медианы к третьей стороне. Докажите, что эти треугольники равны.

25. В равнобедренном треугольнике провели медиану к основанию. Через его вершину провели прямую, перпендикулярную этой медиане. Потом нарисовали угол, смежный с углом при вершине этого треугольника, и построили его биссектрису. Оказалось, что она лежит на проведенной прямой. Выполните все эти построения и проверьте, получается ли у вас то же. Если получится, то докажите это.

Задачи к пункту 9.5

26. Нарисуйте угол. Нарисуйте на глаз угол, который: а) в три раза больше данного; б) в три раза меньше данного. Как вы проверите свою работу?

27. Луч b является биссектрисой угла между лучами a и c. Как это можно сказать иначе?

28. На листе бумаги нарисуйте острый угол. Только сгибанием листа получите угол, в два раза меньший данного; в два раза больший данного; дополняющий его до прямого угла.

29. Какой угол от увеличения в два раза: а) все еще остается острым; б) становится тупым; в) становится больше, чем развернутый?

§ 10. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

10.1. Величина угла и ее градусная мера

У каждого угла есть его **величина**, или, другими словами, **мера угла**. Она обладает следующими свойствами:

1) **равные углы имеют равные величины, величина большего угла больше;**

2) **при сложении углов их величины складываются** (т. е. все как у величины отрезков — у длины).

Однако обычно вместо выражения «величина угла» говорят «угол», подразумевая при этом не только фигуру, но и величину.

Измерение углов подобно измерению отрезков; оно состоит в сравнении измеряемого угла с углом, принятым за единицу измерения. Этот угол, а если нужно — и его доли, откладывается на измеряемом угле; в результате получается **численная мера угла** при данной единице измерения, т. е. число, показывающее, сколько раз угол, принятый за единицу измерения, и его доли укладываются на данном угле.

За единицу измерения углов принимают **градус** — $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Стало быть, угол в один градус — это такой угол, что прямой угол является суммой 90 равных ему углов. Один градус записывают: 1°.

Прямой угол — 90°, *развернутый угол* — 180°.

Градус делится на 60 минут, а минута — на 60 секунд. Одну минуту обозначают $1'$, одну секунду — $1''$, так что, например, угол в 17 градусов 25 минут 34 секунды записывают: $17^\circ25'34''$. При большей точности берутся и доли секунды. Если угол измеряется в градусах, минутах и секундах (и их долях), то говорят о **градусной мере угла.**

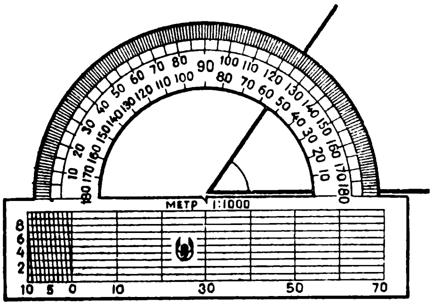


Рис. 172

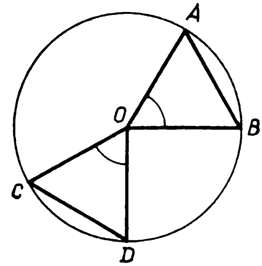


Рис. 173

Практически углы измеряют с помощью транспортира, при более точных измерениях пользуются другими приборами. Измерение производится так же, как измерение длины отрезков. Откладывают или отсчитывают на транспортире как на линейке целые градусы. Допустим, отложилось $n°$. Если остался остаток, а нужна точность больше чем в $1°$, то на остатке откладывают минуты, и если еще остался остаток, то его измеряют секундами. Так получается величина угла с соответствующей точностью, например, $n°k'$ или $n°k'l''$.

В приборах, служащих для измерения углов, углы отмечают на окружности, как это делается на транспортире, т. е. отмечают углы, которые образуют радиусы, идущие в отмеченные точки окружности, с некоторым фиксированным радиусом (рис. 172).

Если точки A, B и C, D лежат на одной окружности с центром O (рис. 173) и отрезки AB, CD равны, то углы, образуемые отрезками OA, OB и OC, OD, равны. Действительно, отрезки OA, OB, OC, OD равны как радиусы окружности. Следовательно, $\triangle OAB = \triangle OCD$, и потому $\angle AOB = \angle COD$.

Отметить циркулем на окружности точки на равных расстояниях несложно. В общем, разметка приборов для измерения углов основана на правилах геометрии.

10.2. Замечание о единице измерения углов

Полный угол вокруг точки состоит из двух развернутых и, стало быть, составляет $360°$. Возможно, выбор такого числа связан с тем, что в году примерно 360 дней, и с системой счисления в Древнем Вавилоне, в которой особое место занимало число 60.

Кроме градусов, минут, секунд, принята также другая единица измерения углов, но с нею мы познакомимся позже.

10.3. Свойства численной меры углов

Для численной меры, в частности для градусной меры, угла выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков (см. п. 8.3).

1. ***Если два угла равны, то их численные меры равны,*** и обратно: ***если численные меры углов равны, то углы равны.***

2. ***Если один угол больше другого, то его численная мера больше,*** и обратно: ***если численная мера одного угла больше численной меры другого, то сам угол больше.***

3. ***Если данный угол есть сумма некоторых углов, то его численная мера равна сумме их численных мер,*** и обратно: ***если численная мера угла равна сумме численных мер некоторых углов, то и сам угол равен сумме этих углов.***

4. ***Если данный угол есть разность двух углов, то его численная мера равна разности их численных мер,*** и обратно: ***если численная мера угла равна разности численных мер углов, то сам угол равен разности этих углов.***

Доказываются эти свойства дословно так же, как доказываются свойства длины в дополнении к § 9. Как и в случае отрезков, все перечисленные свойства численной меры угла можно коротко выразить одной фразой: ***между равенством, отношением «больше — меньше», сложением и вычитанием самих углов, с одной стороны, и их численных мер, с другой стороны, есть полное взаимное соответствие.***

Это взаимное соответствие точное для углов с точными значениями численных мер (в данной единице), а вообще, оно приближенное, насколько приближенны значения численных мер. Но это приближение может быть сколько угодно точным, а значит, соответствие сколь угодно близко к точному.

10.4. О формулах с численными значениями величин

Как сказано о свойствах численных значений величин отрезков и углов, соотношения между ними, соответствующие соотношениям между самими отрезками и углами, выполняются точно или приближенно в зависимости от самих численных значений — точные они или приближенные. Однако это приближение может быть сколь угодно точным. Поэтому соотношения между численными значениями можно считать просто точными.

Так будут пониматься все соотношения, все формулы с численными значениями геометрических величин — длин, углов, площадей.

Формула верна — это значит, что она выполняется с любой степенью точности, стоит лишь достаточно точно измерить — определить численные значения входящих в нее величин.

Дополнение к § 10. **О величинах**

I. Общее понятие величины

Длина и величина угла — это частные случаи величин. В курсе физики было названо много других величин, таких, как объем, масса, скорость, сила, промежуток времени, температура... Примером не из физики может служить стоимость.

Величины играют очень большую роль в науке, особенно в физике; почти все законы физики выражают связи между теми или иными величинами.

Величина — это такое свойство предмета или явления, которое может быть в каком-то смысле больше или меньше и которое можно соответственно точно оценивать. Например, температура может быть больше или меньше, так же как масса тела, скорость движения и т. д.

Точная оценка величины называется **измерением.** И так как величина — это такое свойство, которое можно точно оценивать, то нередко говорят: величина — это то, что можно измерить.

Геометрические величины — это свойства тел, характеризующие их форму и размеры; это — длина, площадь, объем, величина угла... В геометрии они относятся к фигурам, а в физике — к физическим телам вместе с другими физическими величинами, как масса, запас энергии, температура и т. д.

II. Сложение и измерение

Среди величин особо выделяют те, для которых определено сложение, как, например, длина или масса. Когда отрезки складываются, т. е. когда, образно говоря, одно вытянутое тело прикладывают к другому, то длины складываются. Когда два тела соединяются в одно, их массы складываются. Не всякие величины обладают таким свойством, им не обладает, например, температура. Можно поднять температуру на один градус, но для этого прибавляют некоторое количество теплоты, а не сам по себе один градус температуры. К массе же прибавить массу в один грамм можно.

В § 7 мы подробно рассмотрели измерение и само понятие длины потому, что оно аналогично для других величин. Рассмотрим, например, массу. Ее можно определить так.

Масса — это такое свойство тела, такая величина, которая одинакова у тел, уравновешивающих друг друга на весах, и складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс[1].

Измерение массы производится, как известно, с помощью весов. Выбирается тело e, масса которого $|e|$ принимается за основную единицу массы, скажем килограмм. Берутся также доли этой массы

$$|e_1| = \frac{1}{m}|e|, \ |e_2| = \frac{1}{m}|e_1|,$$

как, скажем, грамм: $1 \text{ г} = \frac{1}{1000}$ кг. На одну чашку весов кладут тело, массу которого хотят измерить, на другую кладут тела массой $n\,|e|$, скажем гири в килограмм. Допустим, положили $n\,|e|$, n кг, но когда положили еще одно $|e|$, еще 1 кг, всего $(n+1)\,|e|$, то гири перевесили. Тогда к n кг прибавляют меньшие доли.

И так получают численное значение массы тела с точностью до единицы $|e_1|$:

$$M \approx n\,|e| + n_1\,|e_1|,$$

как, например, 2 кг 350 г.

Измерение можно уточнять дальше. Но сколь угодно высокая точность реального измерения невозможна (например, отлетела одна молекула, и масса тела уже другая). Численные значения физических величин всегда более или менее приближенные. С учетом этого для них выполняется то же, что для численных значений длины: соотношениям равенства, «больше — меньше», сложения и вычитания величин соответствуют такие же соотношения их численных значений и обратно.

В общем, измерение массы, как и других физических величин, формально математически сходно с измерением длины, хотя физические действия для разных величин могут быть совершенно раз-

[1] Это определение массы несовершенно хотя бы потому, что такие тела, как молекулы или планеты, на весах не взвешивают, но практически для тел приемлемых размеров оно годится.

личны. Эти действия соответствуют тому, как для данной величины определяется равенство и сложение. Масса — это величина, для которой равенство определяется уравновешиванием на весах, а сложение — соединением тел. Длина — это величина, для которой равенство определяется совпадением концов тел при прикладывании их друг к другу, а сложение — прикладыванием тел концами одного к другому в одну линию. Кроме исходных простейших способов измерения длины и массы, которые мы тут рассматриваем, применяются другие, более точные и более сложные, но общие свойства самих величин и их численных значений от этого не зависят.

III. Аксиомы величины

Измерение массы (как и других физических величин, для которых определено сложение) опирается на правила или законы, аналогичные тем, какие выполняются для длины и были сформулированы как аксиомы для отрезков.

Прежде всего для всяких величин выполняется закон (или правило):

две величины, равные третьей, равны друг другу.

Конкретно для массы это значит, что если два тела по отдельности уравновешиваются на весах третьим телом, то они также уравновешивают и друг друга.

Для величин, для которых определено сложение (масса, длина, промежуток времени и др.), выполняется то же, что говорится в аксиоме сложения для длины:

суммы равных равны.

Это правило хорошо известно из практики для массы, так же как для длины. Например, если что-нибудь разделили поровну, а потом еще прибавили поровну, то получается опять поровну.

Вычитание обратно сложению и для массы состоит в том, что от тела отделяется какая-то его часть.

Для длины есть еще правило, принятое в геометрии: аксиома откладывания отрезка. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

На этой аксиоме основано само определение сложения отрезков: отрезки, равные данным, откладываются на одном луче друг за другом. На этой же аксиоме основано сравнение отрезков: отрезки, равные данным, откладываются на одном луче от его начала; тот отрезок больше, который перекроет другой.

Для массы этому соответствует аксиома, что любые грузы можно в принципе положить на весы (по отдельности или вместе). Это обеспечивает возможность сложения масс и их сравнение.

Вообще, для величин любого рода, для которых определено сложение, выполняются два основных правила или закона:

1) **Величины одного рода можно складывать: для любых двух (и больше) определена их сумма.**

2) **Каждые две величины одного рода сравнимы: либо они равны, либо одна больше другой.** Если a и b — две величины одного рода, то либо $a = b$, либо $a > b$, либо $a < b$. (Первое из этих правил выполняется для углов с ограничением, поскольку сумма не должна выходить за развернутый угол или полный угол в 360°.)

IV. Свойство численных значений величин

Численные значения любых величин (для которых определено сложение) обладают свойствами, аналогичными тем, которыми обладают численные значения длины (они перечислены в п. 7.3). Например, для массы зерна: если содержимое двух мешков ссыпается в один, то численные значения масс складываются. Сравните это со сложением отрезков и проведите аналогии с другими свойствами.

Правило пересчета численных значений при замене единицы измерения, указанное для длины в п. 7.4, также верно для всех величин, будь то пересчет миль на километры, пудов на центнеры, долларов на франки и т. п.

Задачи к § 10

А

1. Нарисуйте на глаз углы в 10, 30, 70, 130, 160°. Проверьте себя с помощью транспортира. После этого опять на глаз нарисуйте углы в 20, 50, 80, 120, 150°.

2. а) Сколько градусов на глаз образуют стрелки часов в 13.00, 14.45, 15.30, 10.55, 21.01? Проверьте себя, измерив эти углы. б) В какое время стрелки часов образуют угол в 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150°? В 1°?

3. а) Два угла, равные 40 и 50°, имеют общую сторону. Какой угол образуют между собой другие их стороны? б) Пусть угол между лучами a и b равен 40°, угол между лучами b и c равен 50°, угол между лучами c и d равен 60°. Какой угол образуют между собой лучи a и c, b и d, a и d? в) Решите такую же задачу, если данные углы равны 110, 120, 130°. (В задаче — несколько случаев!)

4. а) Два угла имеют пересечением общую сторону и в сумме составляют угол, равный 90°. Вычислите угол между их биссектрисами. б) Решите такую же задачу, если сумма равна 120°. в) Решите задачу в общем случае.

5. Постройте: а) прямоугольный треугольник по катету 3 см и острому углу 35°, который этот катет образует с гипотенузой; б) равнобедренный треугольник по основанию 4 см и углу при основании, равному 20°; в) треугольник со стороной 5 см и прилежащими к ней углами в 40 и 60°.

6. Два угла дают в сумме 90° и при этом таковы, что: а) один из них в два раза больше другого; б) половина меньшего из них равна одной трети большего из них. Вычислите эти углы.

Б

7. Попробуйте, ничего не рисуя и без часов, ответить, когда угол между стрелками часов больше: а) в 13.00 или в 14.00; б) в 15.00 или в 9.00; в) в 18.00 или в 14.45; г) в 12.55 или в 11.50; д) в 8.10 или в 9.15. Свои результаты проверьте.

8. Углы BAK и CAM прямые. Угол CAK равен 10°. Вычислите угол BAM.

9. Федя и Вася, каждый у себя, нарисовали отрезок AB, взяли внутри него точку O и построили прямой угол KOM. Потом они занялись углами AOK и BOM. Федя установил, что сумма их равна 90°. Вася же настаивает на том, что 90° равна их разность. Кто из них прав?

10. Участник соревнований по ориентированию на местности со старта пробежал 180 м по азимуту 40°, затем 100 м по азимуту 100°, потом 300 м по азимуту 240°, затем 150 м по азимуту 0°. Теперь ему надо попасть на финиш. По какому азимуту ему теперь двигаться и какое расстояние ему придется преодолеть? (Азимут — это угол между направлением движения и направлением на север.)

11. а) С помощью транспортира постройте угол в 70°. Уберите транспортир и постройте угол в 10°. б) С помощью транспортира постройте угол в 17°. Уберите транспортир и постройте угол в 7°. в) С помощью транспортира постройте угол в 65°. Уберите транспортир и постройте угол в 20°. (Убрав транспортир, вы можете пользоваться другими инструментами.)

12. Задачам 11—13 и 28—30 из § 8 соответствуют задачи об углах. Чтобы самому сочинить такую же задачу про углы, надо вместо отрезков взять углы, вместо их длин или расстояний — градусные меры углов. Попробуйте это сделать, а потом и решить эти задачи. Численные меры углов можете выбирать сами.

13. Один любознательный муравей заинтересовался геометрией. Он прополз прямо 10 см, потом повернул направо под углом 90° и опять прополз 10 см, потом опять повернул направо под углом 90° и опять прополз 10 см. Когда он вновь повернул направо под углом 90° и прополз 10 см, то оказался там, где был в самом начале. В следующий раз он решил, проползая одинаковые расстояния, поворачивать каждый раз вправо на 120°. И опять попал на то место, откуда начал путешествие. Тогда он решил попробовать другие углы через 30°: 60 и 150°. И опять вернулся на прежнее место!

Во-первых, проверьте, попадал ли он туда, откуда начинал. Во-вторых, попытайтесь найти другие углы с таким же удивительным свойством. В-третьих, попытайтесь обнаружить все такие углы, для чего полезно поразмышлять и установить зависимость между величиной угла поворота и числом таких поворотов. Очень важно при этом понять с точки зрения измерения углов, что значит вернуться на прежнее место.

§ 11. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема о том, что сумма углов треугольника равна развернутому углу, т. е. 180° — одна из важнейших теорем геометрии. Мы докажем ее сначала для частного случая — для прямоугольного треугольника.

11.1. Сумма углов прямоугольного треугольника

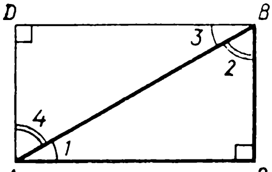


Рис. 174

Т е о р е м а *(о сумме углов прямоугольного треугольника)*. ***Сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой (рис. 174). Пользуясь аксиомой прямоугольника, построим на отрезке AC прямоугольник $ADBC$ с высотой BC. В прямоугольнике противоположные стороны равны. Поэтому $AC = DB$ и $AD = CB$. Следовательно, треугольники ADB и BCA равны (сторона AB у них общая). В этих треугольниках соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Но в сумме угол 1 и угол 4 составляют угол прямоугольника $ADBC$, т. е. прямой угол.

Поэтому $\angle 1 + \angle 4 = 90°$. Заменяя в этом равенстве угол 4 равным ему углом 2, получаем, что $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.

Поскольку в треугольнике ABC угол C прямой, а сумма двух других углов равна 90°, то в этом треугольнике сумма углов равна 180°.

Следствие. ***В прямоугольном треугольнике два угла острые. Их сумма равна 90°.***

Действительно, если бы в прямоугольном треугольнике, кроме прямого угла, был хотя бы еще один угол, больший или равный 90°, то сумма всех его углов оказалась бы больше 180°, что невозможно. Поэтому два других угла в прямоугольном треугольнике острые. Их сумма равна 180° — 90° = 90°. Заметим еще, что именно это мы и доказали, доказывая теорему.

11.2. Сумма углов произвольного треугольника

Теперь докажем теорему для любых треугольников.

Теорема *(о сумме углов треугольника)*. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC. Проведем из его вершины B высоту BD. Возможны три случая.

1) Точка D совпадает с одним из концов стороны AC, например с точкой C (рис. 175). Тогда треугольник ABC прямоугольный и, как доказано, сумма его углов равна 180°.

2) Точка D лежит внутри стороны AC (рис. 176). Тогда высота

Рис. 175

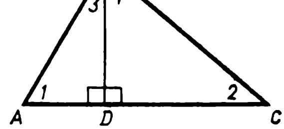


Рис. 176

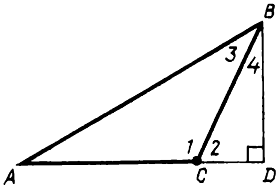


Рис. 177

BD разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ABD и BCD с прямыми углами в их общей вершине D. Сумма двух острых углов каждого из получившихся прямоугольных треугольников равна 90°. Поэтому сумма всех четырех этих острых углов равна 180°. Но в сумме эти четыре острых угла и дают сумму всех углов треугольника ABC, т. е. сумма его углов равна 180°.

3) Точка D лежит вне стороны AC, т. е. на продолжении отрезка AC (рис. 177). Допустим, что точка C лежит между A и D. Снова получили два прямоугольных треугольника ABD и BCD. В каждом из них сумма их острых углов равна 90°. Поэтому $\angle A + \angle 3 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 4$, а потому $\angle 2 = \angle A + \angle 3$.

Но углы 1 и 2 смежные. Следовательно, $\angle 2 = 180° - \angle 1$. Из последних двух равенств получаем, что $180° - \angle 1 = \angle A + \angle 3$. Поэтому $\angle A + \angle 1 + \angle 3 = 180°$, а это и есть сумма углов треугольника ABC.

Теорема доказана для всех возможных случаев.

11.3. Некоторые следствия теоремы о сумме углов треугольника

Следствием какой-либо теоремы называют утверждение, которое вытекает из данной теоремы непосредственно, не требуя пространного доказательства. Укажем несколько следствий теоремы о сумме углов треугольника.

Следствие 1 *(об углах треугольника).* ***Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые, прямой же или тупой угол может быть только один.***

Доказательство. Если бы в треугольнике два угла были прямые или тупые, то их сумма была бы уже не меньше 180°, тогда как сумма всех углов треугольника равна только 180°.

Следствие 2 *(о единственности перпендикуляра).* ***Из данной точки на данную прямую можно опустить только один перпендикуляр.***

Доказательство. Если бы из точки A на какую-либо прямую можно было опустить два перпендикуляра AB и AC (рис. 178), то получался бы треугольник ABC с двумя прямыми углами, что невозможно.

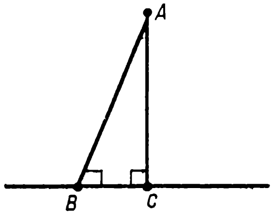


Рис. 178

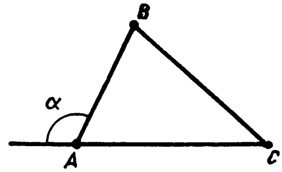


Рис. 179

Замечание. При построении перпендикуляра к прямой мы не задумывались над тем, нельзя ли опустить на прямую из данной точки несколько перпендикуляров. А между тем заранее неясно, почему бы из очень далекой точки нельзя было бы опустить два перпендикуляра. Теперь доказано, что это невозможно. Для перпендикуляра, проведенного из точки на самой прямой, уже было доказано, что он только один, так как он делит развернутый угол пополам, а пополам можно разделить угол единственным образом.

Определение. **Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом треугольника.**

Так, например, на рисунке 179 угол α — смежный с углом A треугольника ABC.

Следствие 3 *(о внешнем угле треугольника).* ***Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, с ним не смежных, и потому больше каждого из этих углов.***

Говорят еще так: внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним не смежного.

Доказательство. Если $\angle\alpha$ — внешний угол при вершине A треугольника ABC, то $\angle\alpha = 180° - \angle A$. Но $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, или $180° - \angle A = \angle B + \angle C$. Поэтому $\angle\alpha = \angle B + \angle C$.

Задачи к § 11

Основные задачи

1. а) Нарисуйте равносторонний треугольник, а в нем одну медиану. Вычислите углы двух полученных треугольников. б) Нарисуйте прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен 30°. Докажите, что катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы. в) Пусть в прямоугольном треугольнике один из катетов в два раза меньше гипотенузы. Докажите, что он лежит против угла в 30°.

2. Две прямые пересекаются. Возьмите точку, не лежащую на этих прямых. Проведите через нее прямые, перпендикулярные данным прямым. Докажите, что угол между проведенными прямыми равен углу между данными прямыми.

3. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту на гипотенузу. Докажите, что исходный треугольник и два получившихся треугольника имеют соответственно равные углы. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

4. В равнобедренном треугольнике провели высоту к основанию. Докажите, что она является также медианой и биссектрисой.

5. а) В треугольнике два угла равны. Докажите, что он равнобедренный. б) В треугольнике три угла равны. Докажите, что он равносторонний.

6. В квадрате провели две диагонали. Докажите, что: а) они делят его углы пополам; б) они перпендикулярны; в) в точке пересечения они делятся пополам; г) они разбивают квадрат на четыре равных треугольника. Сформулируйте верные обратные утверждения.

7. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин. Как это можно сформулировать иначе?

8. В прямоугольнике провели две диагонали. Докажите, что в точке пересечения они делятся пополам.

9. Докажите, что в треугольнике сумма двух любых сторон больше третьей, а разность двух любых сторон меньше третьей.

10. Вычислите сумму углов четырехугольника.

Задачи к пункту 11.1

11. Вычислите острые углы прямоугольного треугольника, если известно, что: а) треугольник равнобедренный; б) один из углов в два раза больше другого; в) один из углов в полтора раза меньше другого; г) один из углов на один градус больше другого.

12. Вычислите неизвестный угол в фигурах на рисунке 180. (известные углы отмечены дужками).

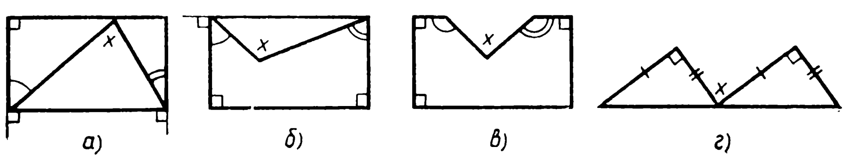


Рис. 180

Задачи к пункту 11.2

А

13. Вычислите углы: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного треугольника, у которого угол при вершине равен 20°; в) равнобедренного треугольника, у которого угол при основании равен 20°.

14. Вычислите неизвестный угол в фигуре на рисунке 181.

15. Какой формулой связаны угол при основании равнобедренного треугольника и угол, противолежащий основанию? Получив эту формулу, выразите каждый из этих углов через другой из них. Является ли эта зависимость линейной? Теперь вы можете найти новое условие, при котором равны два равнобедренных треугольника.

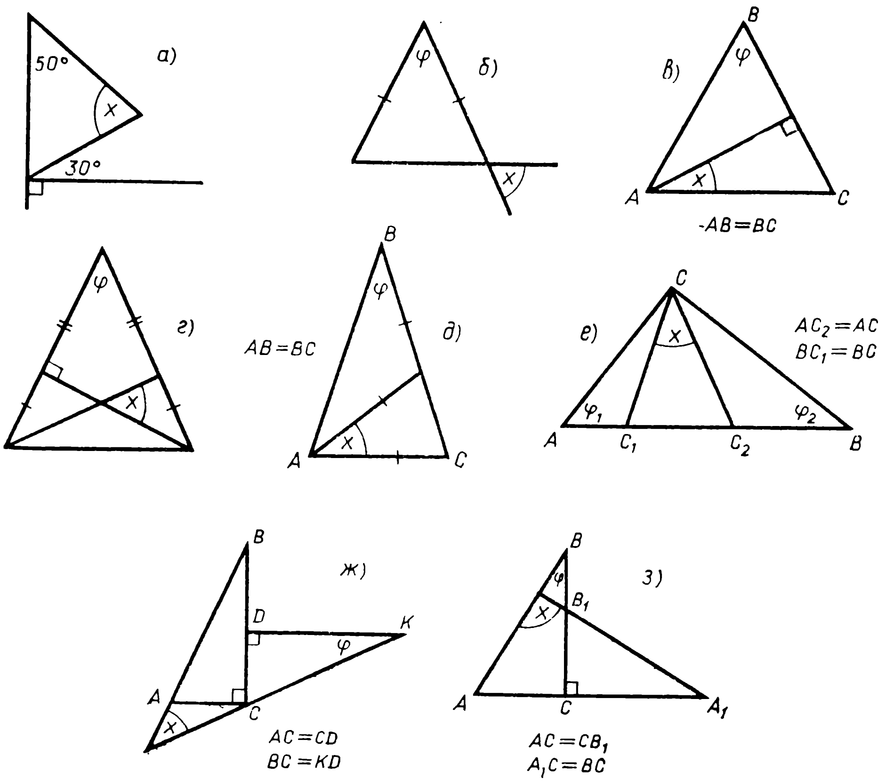


Рис. 181

16. Чему равен угол между биссектрисами двух углов треугольника, если третий угол равен: а) 20°; б) 160°? Решите теперь задачу в общем случае, обозначив величину этого угла φ.

Б

17. На сторонах равностороннего треугольника постройте три таких же треугольника. Какой фигурой является объединение всех четырех треугольников?

18. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (можно взять чертежные угольники), совместите так, чтобы равные катеты совпали, а другие равные катеты лежали на одной прямой. Какой угол образуют между собой их гипотенузы? Теперь один из треугольников начните двигать вдоль прямой, на которой лежали совпавшие катеты. Какой теперь угол будут составлять их гипотенузы (точнее, их продолжения)? Верните треугольники в исходное положение. Начните теперь двигать один из них вдоль прямой, на которой лежали несовпавшие катеты. Какой угол будут составлять гипотенузы теперь?

19. Посмотрите на рисунок 182. Сколько надо знать углов на этом рисунке, чтобы найти все остальные?

20. а) Треугольник ABC равносторонний. Некоторая прямая образует с прямой AB угол 45°. Какие углы составляет эта прямая с прямыми AC и BC? б) Решите эту задачу, если данный угол равен φ. в) Составьте и решите аналогичную задачу для произвольного треугольника; для прямоугольника.

21. Границы двух равносторонних треугольников имеют 6 общих точек. Требуется выяснить, какие углы составляют пары прямых, на которых лежат его стороны. Ясно, что для этого надо знать какие-то углы в образовавшейся фигуре. Какие?

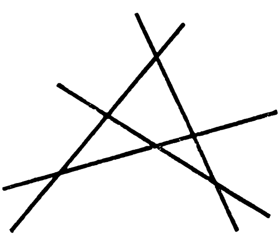


Рис. 182

22. Докажите, что наибольший угол треугольника не меньше 60°, а наименьший угол треугольника не больше 60°.

23. В равнобедренном треугольнике провели биссектрису угла при основании. Вычислите углы треугольника, если она оказалась равна: а) основанию; б) боковой стороне.

24. На медиане к основанию равнобедренного треугольника найдите такую точку, из которой основание видно под прямым углом.

25. Лучи a и b образуют угол с вершиной O. а) На луче a возьмите точку A, отличную от O. Пусть по лучу b от вершины O движется точка X. Докажите, что угол, под которым из нее виден отрезок OA, уменьшается. б) Пусть теперь по сторонам этого угла движутся концы отрезка, причем один конец отрезка движется к вершине, а другой — от нее. Как изменяются углы, которые он образует со сторонами угла?

26. Как из четырех равных равнобедренных треугольников сложить один равнобедренный треугольник?

Задачи к пункту 11.3

Единственность перпендикуляра. Высота треугольника

А

27. Как расположены по отношению к треугольнику его высоты, если он: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный?

28. Какой вид имеет треугольник, если известно, что ему принадлежат: а) все его высоты; б) не все его высоты?

29. Высота треугольника составляет со сторонами треугольника, проведенными из той же вершины, углы в 70 и 40°. а) Какой угол она составляет с биссектрисой треугольника, выходящей из той же вершины? б) Составьте и решите задачу в общем случае.

30. Нарисуйте треугольник. Возьмите точку внутри его. Проведите из нее перпендикуляры на каждую сторону треугольника или на ее продолжение. Получилось ли у вас так, что все эти перпендикуляры лежат внутри треугольника? Обязательно ли так получается? Как это зависит от вида треугольника; от положения точки внутри его?

Б

31. Вы стоите на ровном участке склона. Придумайте способ для нахождения угла, который он составляет с горизонтальной поверхностью.

32. Перпендикулярно диагонали квадрата через каждую его вершину проводится прямая. Какую фигуру ограничивают эти прямые?

33. Два угла в треугольнике равны 30 и 80°. Какой угол образуют между собой биссектриса и высота, проведенные из вершины третьего угла?

34. В двух равных треугольниках ABC и ABD $AC = AD$, $BC = BD$. Докажите, что высоты этих треугольников, проведенные к прямой AB, лежат на одной прямой.

35. Три прямые попарно пересекаются в точках A, B, C. Возьмите точку внутри какой-либо части плоскости, но не в треугольнике ABC. Проведите из нее перпендикуляры на данные прямые. Сколько из них попало на стороны треугольника? Зависит ли полученный результат от вида треугольника ABC? От выбора точки?

36. Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Ее боковые ребра PA, PB, PC, PD равны между собой. Пусть точка Q — точка пересечения диагоналей квадрата, лежащего в основании.

1) Докажите что: а) PQ — высота в треугольниках PAC и PBD; б) треугольники PAQ, PBQ, PCQ, PDQ равны.

2) Нарисуйте треугольник со сторонами на поверхности пирамиды, в котором PQ — высота.

37. а) В треугольной пирамиде $PABC$ все ребра равны. Точка X движется по ребру AP от A к P. Каждый раз из нее проводится перпендикуляр на ребро BC. Нарисуйте несколько таких перпендикуляров. Какую фигуру заполняют все эти перпендикуляры? б) Такую же задачу решите и для четырехугольной пирамиды $PABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$, а все ребра равны между собой. Точка X движется тут по ребрам BP и PD, а перпендикуляры проводятся на отрезок AC. в) Такую же задачу решите и для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка X движется тут по отрезкам AA_1, A_1C_1, C_1C, а перпендикуляры проводятся на отрезок BD.

Виды треугольников

38. Отрезок AB параллелен прямой a. Точка X движется по прямой в одном направлении. Каким по виду будет получаться треугольник AXB по мере продвижения точки?

39. Известно, что в тупоугольном треугольнике два угла острые. Верно ли обратное утверждение? Известно, что в прямоугольном треугольнике два угла острые. Верно ли обратное утверждение?

40. Каким по виду является треугольник, если в нем: а) сумма двух углов равна третьему; б) сумма двух любых углов больше третьего; в) сумма двух любых углов меньше третьего?

41. Каким по виду является треугольник, если в нем нашлись такие два угла, которые в сумме дают: а) больше, чем третий угол; б) меньше, чем третий угол?

42. Нарисуйте квадрат, а в нем отметьте 9 точек: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Рассматриваются всевозможные треугольники с вершинами в этих точках. Сколько из них являются равнобедренными, равносторонними, прямоугольными, остроугольными, тупоугольными?

43. Два равнобедренных треугольника приложены друг к другу боковыми сторонами, а две другие их боковые стороны служат продолжением друг друга. Какой фигурой является их объединение?

44. В некотором треугольнике провели медиану. И оказалась она в два раза меньше, чем сторона, которую она разделила пополам. А теперь скажите, каким по виду был этот треугольник.

45. Дан прямоугольный треугольник. Докажите, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

46. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ основанием является квадрат $ABCD$. Все ее ребра равны. Каким по виду является треугольник: а) PCD; б) PQC; в) APC; г) BPD (Q — точка пересечения диагоналей квадрата)?

Внешний угол треугольника

47. Сколько внешних углов можно построить у данного треугольника? Сколько из них могут быть тупыми? Прямыми? Острыми?

48. Треугольник ABC прямоугольный. Гипотенузу AC продолжили до отрезка KL так, что $KA = AB$, $LC = CB$. Вычислите угол KBL.

49. Из точки A опустили перпендикуляр AB на прямую. Из точки K этой прямой отрезок AB виден под углом 30°. Из точки L этой прямой он виден под углом 45°. Под каким углом виден из точки A отрезок KL?

50. Объясните, почему, приближаясь к высокому предмету, вы видите его под бóльшим углом.

51. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30°. а) Чему равен внешний угол при основании треугольника? б) Какой угол образуют между собой биссектрисы внешних углов при основании? в) Какой угол образуют между собой биссектриса внешнего угла при основании и биссектриса внешнего угла при вершине? г) Предположим, вам известен угол между биссектрисами внешних углов при основании. Сможете ли вы найти угол между биссектрисами углов треугольника при основании?

52. Нарисуйте треугольник ABC. Отметьте точку X в этом треугольнике. Докажите, что угол AXC не меньше угла ABC.

53. На земле начерчен угол. Как с помощью веревки начертить угол, в два раза меньший данного? Конечно, можно построить биссектрису угла, но, может быть, можно проще?

54. Постройте треугольник по его периметру и двум его углам.

55. Нарисуйте две перпендикулярные прямые. Внутри одного из образовавшихся углов возьмите точку. Постройте прямую, проходящую через эту точку и пересекающую данные прямые под равными углами.

Соотношения в треугольнике

А

56. В равнобедренном прямоугольном треугольнике провели медиану на гипотенузу. Докажите, что она разделила этот треугольник на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника.

57. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 60°. Докажите, что он является равносторонним.

58. а) Докажите, что против большей стороны треугольника лежит больший его угол. б) Докажите обратное утверждение.

59. а) В треугольнике есть тупой угол. Какая сторона треугольника является наибольшей? б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. в) Какая сторона является наибольшей в прямоугольном треугольнике?

60. Нарисуйте отрезок AB и его серединный перпендикуляр. Точка X движется по этому перпендикуляру, удаляясь от середины отрезка. Докажите, что периметр треугольника AXB увеличивается.

61. Докажите, что в треугольнике против меньшей стороны лежит угол меньший 60°.

62. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, не больше ее половины.

63. а) Одна сторона треугольника 1 см, другая — 2 см. В каких границах лежит длина третьей его стороны? б) Две стороны равнобедренного треугольника равны 4 и 7 см. Вычислите его периметр. в) Две стороны равнобедренного треугольника равны 4 и 8 см. Вычислите его периметр.

Б

64. а) Внутри сторон треугольника ABC взяты точки K, L, M, по одной на каждой стороне. Докажите, что периметр треугольника KLM меньше периметра треугольника ABC. б) Может ли внутри треугольника находиться треугольник с бóльшим периметром?

65. Нарисуйте треугольник. Пусть a, b, c — его стороны. Внутри его возьмите точку и соедините ее с вершинами треугольника. Полученные отрезки обозначим a_1, b_1, c_1. Докажите, что $a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c < 2(a_1 + b_1 + c_1)$.

66. Нарисуйте четырехугольник. Докажите, что каждая его сторона меньше суммы других его сторон. Верно ли это для любого многоугольника?

67. Нарисуйте четырехугольник $ABCD$. Пусть точки K, L, M, N — середины его последовательных сторон. Обозначим его периметр через P. Докажите, что: а) сумма диагоналей меньше P; б) сумма диагоналей больше суммы двух любых его сторон; в) сумма диагоналей больше $\frac{1}{2}P$; г) $2 \cdot KM < P$; д) $KM + LN < P$.

68. Длина куска проволоки имеет целое число сантиметров. Из нее стали делать треугольник. Одну сторону треугольника взяли длиной 1 см, другую — 10 см. После чего получился равнобедренный треугольник. Почему?

69. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше, чем половина его периметра.

70. Периметр треугольника равен 10 см. В каких границах лежит его наибольшая сторона?

71. Нарисуйте выпуклый четырехугольник. Докажите, что концы наибольшего отрезка, умещающегося в нем, находятся в его вершинах. Верно ли это для выпуклого многоугольника?

72. В треугольной пирамиде $PABC$ грани PCA и PCB — прямоугольные треугольники, имеющие общий катет PC, а грань ABC — равнобедренный треугольник, в котором $CA = CB$. (Такую пирамиду легко себе представить, если совместить два равных чертежных треугольника.) Кроме того, $PC = AB$. Какое ребро в этой пирамиде самое большое?

73. Попытайтесь из четырех прямоугольных треугольников составить пирамиду. Если это удалось, найдите в ней наибольшее ребро.

74. Могут ли все грани треугольной пирамиды быть тупоугольными треугольниками?

Сумма углов четырехугольника

75. В четырехугольнике три угла прямые. Докажите, что четвертый угол тоже прямой.

76. Как найти четвертый угол четырехугольника, если известны три его угла?

77. Может ли в четырехугольнике один из углов: а) равняться сумме трех оставшихся; б) быть больше суммы трех оставшихся?

78. Сколько острых углов может быть в четырехугольнике? А тупых?

79. Из точки A внутри угла провели на его стороны перпендикуляры. Установите вид угла A в зависимости от вида данного угла.

80. Из некоторой точки треугольника проведены перпендикуляры на все его стороны. Известны два угла между ними. Сможете ли вы, зная их, вычислить углы треугольника? Выберите сами числовые данные и получите результат. Составьте и решите обратную задачу.

81. а) Может ли в четырехугольнике один из углов равняться 359°? б) Могут ли углы четырехугольника иметь целое число градусов и отличаться последовательно на одно и то же число градусов?

82. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике наибольший угол тупой, а наименьший — острый. Зачем в условии дана выпуклость четырехугольника?

§ 12. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

12.1. Ломаные

Если прикладывать друг к другу отрезки не вдоль одной прямой, то получится ломаная линия, или, просто, **ломаная,** — фигура, состоящая из отрезков, последовательно прилегающих друг к другу концами: один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т. д. (рис. 183). Концы крайних отрезков, к которым уже не прилегают другие отрезки, называются **концами ломаной.** Говорят, что она соединяет их. Так, ломаная на рисунке 183 соединяет точки A и G.

Ломаную обозначают и называют по последовательным концам ее отрезков. Например, на рисунке 183 изображена ломаная $ABCDEFG$.

Концы крайних — первого и последнего отрезков ломаной — могут совпадать. Тогда ломаная называется замкнутой (рис. 184). У замкнутой ломаной нет концов и любой ее отрезок можно считать первым. Самая простая замкнутая ломаная состоит из трех отрезков. Она ограничивает треугольник (рис. 185).

Не исключается, что ломаная может пересекать сама себя, как на рисунке 186, или коснуться сама себя, как на рисунке 187.

Если таких особенностей у ломаной нет, то она называется

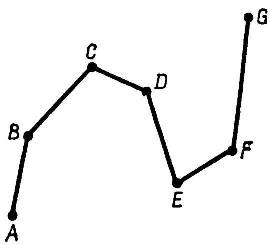


Рис. 183

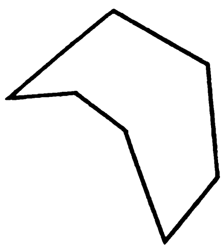


Рис. 184

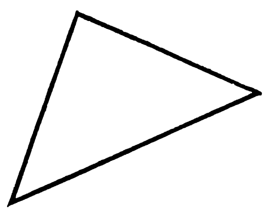


Рис. 185

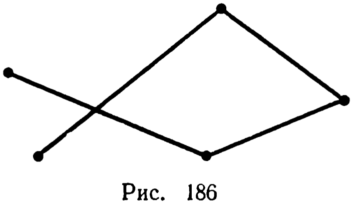


Рис. 186

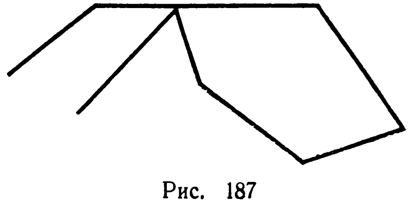


Рис. 187

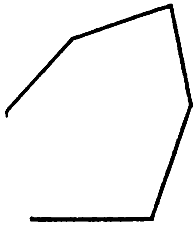


Рис. 188

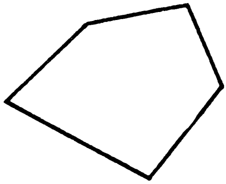


Рис. 189

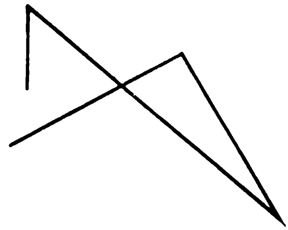


Рис. 190

простой (рис. 188, 189). Замкнутая ломаная из трех отрезков всегда простая. Но уже замкнутая ломаная, состоящая из четырех отрезков, может не быть простой (рис. 190). Простая замкнутая ломаная, состоящая из четырех отрезков, ограничивает на плоскости четырехугольник (рис. 191).

12.2. Многоугольники и многоугольные фигуры

Часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, называется **простым многоугольником** (рис. 191). Сама ломаная называется границей этого простого многоугольника, составляющие ее отрезки — его **сторонами**, а концы этих отрезков — его **вершинами**.

У простого многоугольника число сторон равно числу вершин. В каждой вершине простого многоугольника его стороны определяют некоторый **угол многоугольника**. Он может быть как меньше развернутого (рис. 192), так и больше развернутого (рис. 193).

Простые многоугольники называют по числу углов, т. е. по числу его вершин: треугольник, четырехугольник, пятиугольник

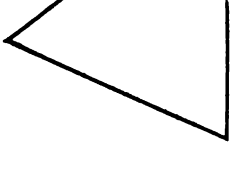


Рис. 191

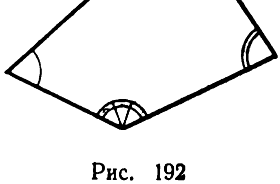


Рис. 192

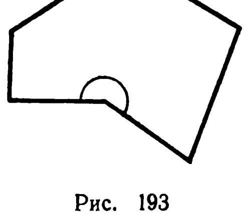


Рис. 193

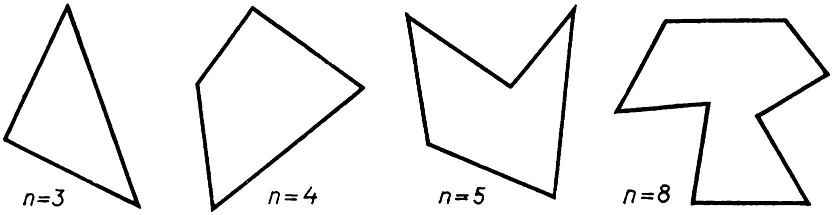


Рис. 194

и т. д. (рис. 194). Когда число вершин простого многоугольника равно n, то говорят «n-угольник» (читается «эн-угольник»).

О точках простого многоугольника, не лежащих на его границе, говорят, что они лежат **внутри многоугольника,** или называют их его **внутренними точками.** Например, точка A на рисунке 195 лежит внутри многоугольника.

Мы пока говорили о простых многоугольниках. А какие фигуры еще относят к многоугольникам? Их можно получить так.

Возьмем внутри некоторого простого многоугольника P один или несколько простых многоугольников (рис. 196). Удалим из P все их внутренние точки (можно было бы сказать, вырежем из P эти простые многоугольники). Оставшуюся фигуру назовем **многоугольником.** Ясно, что такое вершины, стороны и углы такого многоугольника.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий вершины многоугольника, не соединенные стороной (как, например, AD на рис. 197).

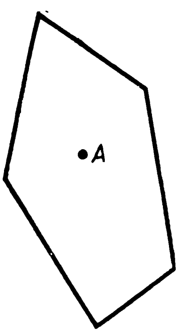


Рис. 195

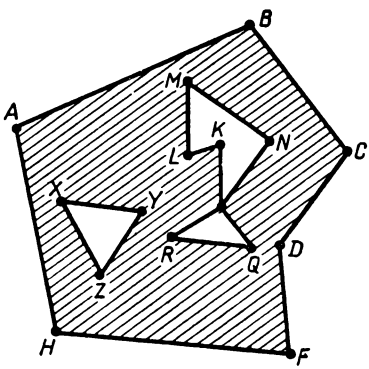


Рис. 196

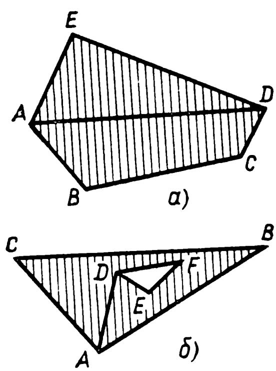


Рис. 197

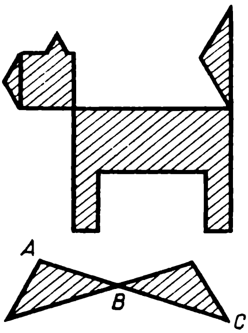


Рис. 198

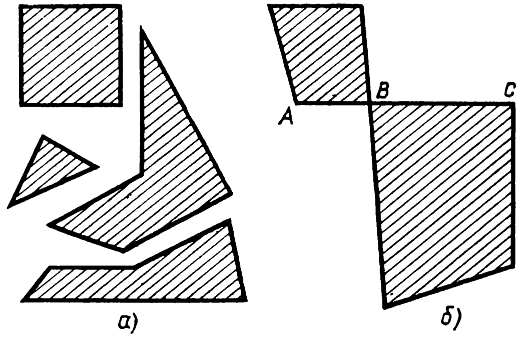


Рис. 199

Многоугольной фигурой называется объединение конечного числа многоугольников (рис. 198). Многоугольная фигура может состоять из многоугольников, вовсе не имеющих общих точек (рис. 199, *а*) или имеющих только отдельные общие точки на границе (рис. 199, *б*), как архипелаг состоит из островов или как земли колхоза могут слагаться из отдельных полей.

З а м е ч а н и е. Можно было бы определить многоугольную фигуру как часть плоскости, ограниченную конечным числом отрезков (имеется в виду, естественно, конечная часть плоскости). А тогда многоугольник — это многоугольная фигура, у которой любые две точки внутри фигуры можно соединить ломаной, лежащей внутри фигуры, т. е. многоугольник — это многоугольная фигура, которая состоит из одной части, не распадается на отдельные куски.

12.3. Выпуклые многоугольники

Рассматривая в § 6 четырехугольники, мы выяснили, что они могут быть двух видов: выпуклые (рис. 200, *а*) и невыпуклые (рис. 200, *б*). Напомним, что четырехугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, которая содержит его сторону. А у невыпуклого четырехугольника есть стороны, продолжения которых заходят внутрь его.

Точно так же и другие многоугольники (с числом вершин, большим трех) бывают выпуклыми и невыпуклыми. Соответствующее определение повторяется почти дословно.

О п р е д е л е н и е. **Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, которая содержит его сторону** (рис. 201).

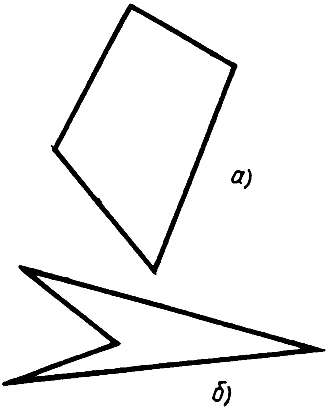


Рис. 200

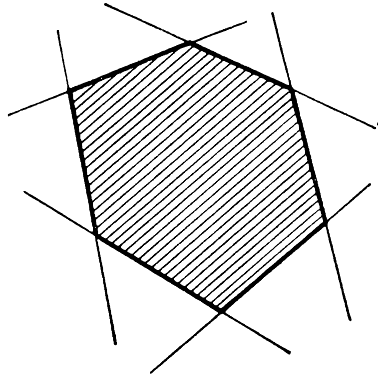


Рис. 201

12.4. Сложение и разбиение многоугольных фигур

Сложные фигуры можно составлять из простых, как более сложные вещи слагаются из более простых, из деталей.

Будем говорить, что многоугольная фигура слагается или составляется из данных многоугольных фигур, если она служит их объединением и сами эти фигуры не перекрываются, т. е. никакие две из них не имеют общих внутренних точек (на рисунке 202 фигуры P и Q перекрываются, а R, S и T не перекрываются). Когда говорят, что фигура **разбита** (или **разделена**) на некоторые многоугольные фигуры, то это значит то же, что она из них составлена.

Обратным сложению фигур будет их **вычитание:** фигура F получена из G вычитанием фигуры H, если G слагается из F и H (рис. 203, *а*), как, например, невыпуклый четырехугольник $ABCD$ получается вычитанием треугольника ADC из треугольника ABC (рис. 203, *б*).

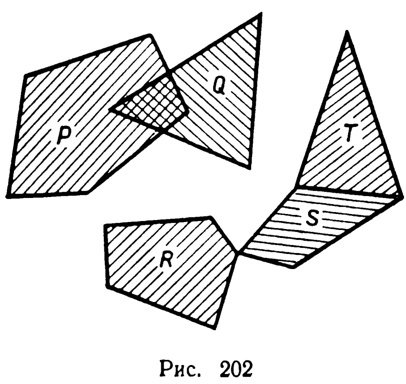


Рис. 202

Мы уже встречались со сложением и разбиением фигур: всякая многоугольная фигура слагается из многоугольников, четырехугольник разбивается на

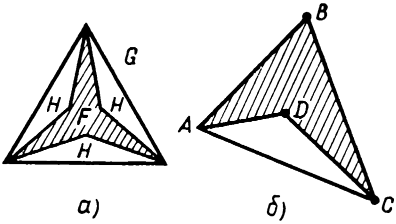


Рис. 203

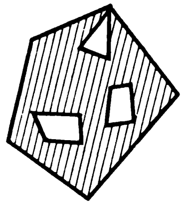


Рис. 204

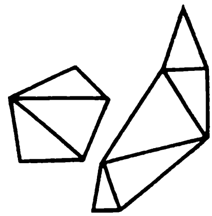


Рис. 205

треугольники диагональю, выпуклый многоугольник также разбивается на треугольники диагоналями, проведенными из любой его вершины.

Вычитание мы использовали при определении многоугольников: всякий непростой многоугольник получается из простого вычитанием одного или нескольких содержащихся в нем простых многоугольников (на их месте образуются как бы «дыры», рис. 204).

Оказывается, не только выпуклый, но и любой многоугольник можно разбить на треугольники диагоналями (но уже, конечно, не обязательно идущими из одной вершины, рис. 205). Доказательство этого утверждения сложно, и мы его не проводим.

Поскольку каждый многоугольник составляется из треугольников, а каждая многоугольная фигура составляется из многоугольников, то *каждую многоугольную фигуру можно составить из треугольников*. Верно и обратное: *каждая фигура, составленная из треугольников, будет многоугольной* (по определению многоугольной фигуры). Объединяя эти два утверждения, короче говорят так: *многоугольные фигуры — это те и только те фигуры, которые составляются из треугольников.*

Когда известно, как фигура составляется из треугольников, ее свойства определяются свойствами этих треугольников и строить фигуру можно путем построения составляющих ее треугольников. Таким образом, изучение любых многоугольных фигур основывается на изучении свойств треугольников. Мы изучаем главным образом треугольники не только потому, что они самые простые фигуры (после точек и отрезков), но и потому, что они самые основные.

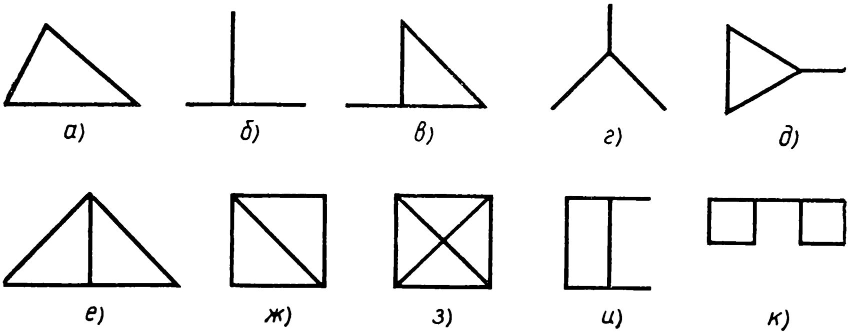


Рис. 206

Задачи к § 12

Задачи к пункту 12.1

А

1. Является ли ломаной фигура на рисунке 206?

2. Нарисуйте печатным шрифтом те буквы из русского алфавита, которые состоят из отрезков. Какие из них являются ломаными? Замкнутыми ломаными? Простыми ломаными?

3. Посмотрите на рисунок 207. Какие ломаные начинаются в точке A и кончаются в точке A? Какие из них простые? Какие ломаные начинаются и кончаются в точке O?

4. Нарисуйте квадрат. Отметьте в нем 9 точек: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Сколько ломаных соединяет две противоположные вершины квадрата? При этом ломаная имеет вершинами только отмеченные точки, а ее отрезки идут по сторонам квадрата или параллельно им.

5. Нарисуйте куб. а) Нарисуйте ломаную, которая проходит через все его вершины. Попробуйте нарисовать самую короткую такую ломаную. б) Сможете ли вы нарисовать ломаную, которая проходит через все ребра куба, причем каждое ребро по одному разу? в) Сколько ломаных, идущих по ребрам куба, соединяет две противоположные его вершины?

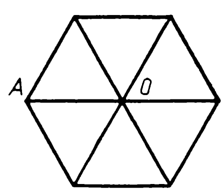


Рис. 207

Б

6. Является ли ломаной фигура на рисунке 208?

Отрезки, образующие ломаную, называются также ее **звеньями**, а ломаные по числу в них звеньев так: трехзвенная, четырехзвенная и т. д.

7. Может ли внутри треугольника находиться четырехзвенная ломаная с большим периметром?

8. Сможете ли вы нарисовать: а) замкнутую пятизвенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено два раза; б) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое свое звено пересекает два раза; в) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое звено пересекает один раз?

9. Какое наибольшее число точек самопересечения может быть у замкнутой ломаной из пяти звеньев? Из семи звеньев? Попробуйте решить эту задачу для ломаной, в которой любое нечетное число звеньев. Почему в условии задачи говорится о замкнутой ломаной? Изменится ли результат, если это условие отбросить? Если вы разобрались с ломаными, в которых число звеньев нечетно, переходите к ломаным, у которых число звеньев четно, и постарайтесь ответить на те же вопросы.

10. а) По ребрам куба идет простая ломаная. В ней 4 звена. А спереди она выглядит так, как на рисунке 209. Как расположена эта ломаная в кубе? Нарисуйте куб и нарисуйте эту ломаную.

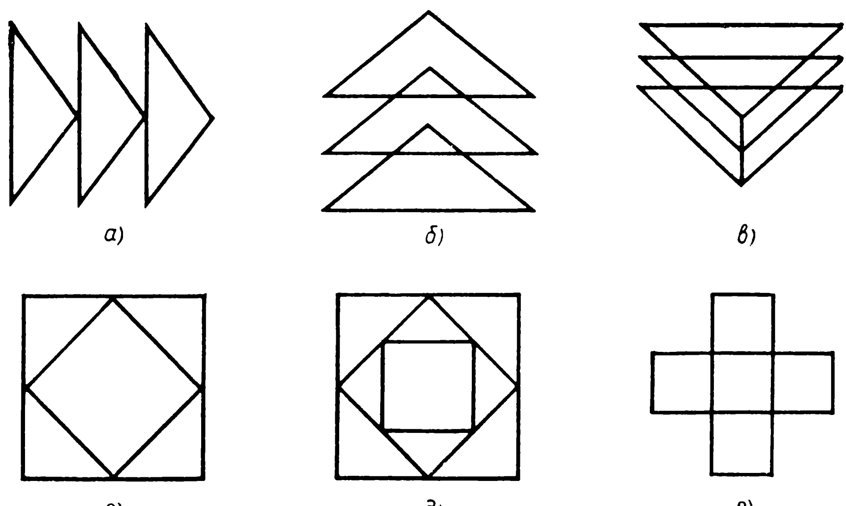


Рис. 208

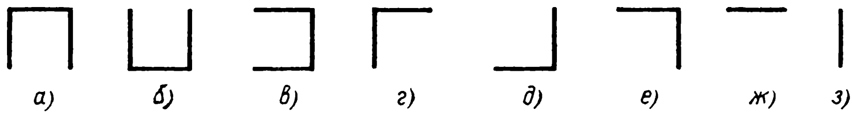


Рис. 209

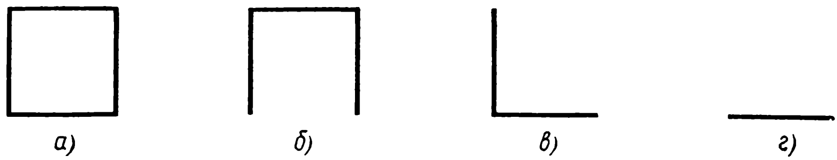


Рис. 210

б) Пусть теперь по ребрам куба идет простая ломаная из пяти звеньев. Может ли она спереди выглядеть так, как на рисунке 210? в) Пусть теперь по ребрам куба идет простая ломаная из шести звеньев. Как она может выглядеть спереди? Сверху? Может ли она спереди и сверху выглядеть одинаково? Может ли она выглядеть одинаково спереди, сверху и сбоку?

11. Фигура состоит из некоторого числа отрезков, и требуется узнать, является ли она ломаной. Эту задачу можно сформулировать иначе, именно: некоторая фигура состоит из отрезков и ее надо обвести карандашом, проходя по каждому отрезку один раз и не отрывая карандаша от фигуры. Для решения этой задачи обратите внимание на то, сколько отрезков фигуры подходит к каждой ее вершине, особенно понаблюдайте за вершинами, к которым подходит нечетное число отрезков.

Задачи к пунктам 12.2 и 12.3

А

12. Нарисуйте различные по форме многоугольные фигуры, которые могут образовать два треугольника. Сколько вершин и сторон в полученной многоугольной фигуре? Какие из них являются многоугольниками, простыми многоугольниками, выпуклыми многоугольниками?

13. Нарисуйте выпуклый многоугольник с числом вершин, не меньшим пяти. Убедитесь в том, что: а) любая его диагональ проходит внутри него; б) отрезок, соединяющий две любые его точки, ему принадлежит; в) из каждой внутренней его точки видны все его стороны. Сможете ли вы нарисовать хоть один невыпуклый

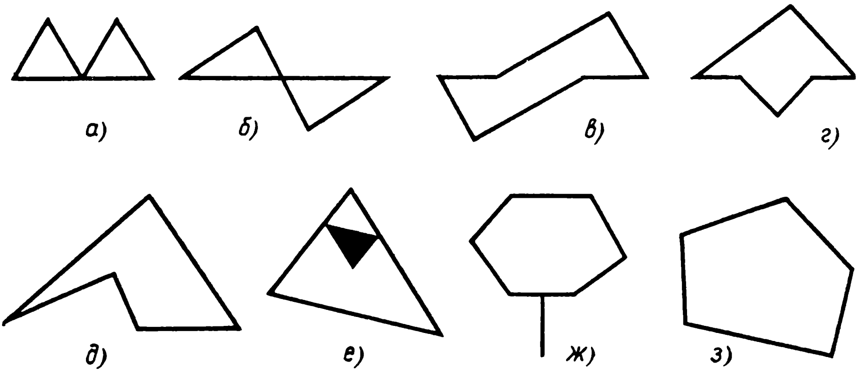


Рис. 211

многоугольник, у которого выполняется свойство а)? Какое предположение можно теперь сделать? Проделайте такую же работу со свойствами б) и в).

14. На рисунке 211 изображены различные фигуры. а) Какие из них являются многоугольными? б) Какие из них являются многоугольниками? в) Подсчитайте число вершин и сторон в каждой из них. г) Какие из многоугольников являются простыми? д) Какие из многоугольников являются выпуклыми?

15. Отметьте на листе бумаги шесть точек — где хотите. а) Нарисуйте многоугольную фигуру с вершинами в этих точках. Является ли она многоугольником? Если да, то какой это многоугольник: простой, выпуклый? Если нет, то можете ли вы нарисовать простой многоугольник с вершинами в этих точках? А выпуклый многоугольник? б) Сколько простых и сколько выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках вы можете нарисовать?

16. Два треугольника расположены так, что каждая сторона любого из них пересекает границу другого в двух точках. Сделайте рисунок. Какие многоугольники вы можете указать на рисунке?

17. Нарисуйте пятиугольник. Из одной его вершины проведите все диагонали. Сколько получилось диагоналей? Сколько из них лежит в пятиугольнике? Сколько треугольников получилось на рисунке? Рассмотрите два случая, когда пятиугольник выпуклый и невыпуклый.

18. Нарисуйте пятиугольник. Проведите в нем все диагонали. Сколько получилось диагоналей? Сколько из них лежит в пятиугольнике? Можете ли вы нарисовать пятиугольник с другим числом принадлежащих ему диагоналей?

19. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Проведите в нем все диагонали. Сколько многоугольников разных видов, включая треугольники, вы можете насчитать на рисунке?

20. Может ли в многоугольнике число вершин быть больше числа сторон? А число сторон быть больше числа вершин?

Б

21. а) Придумайте способ подсчета диагоналей в выпуклом многоугольнике с произвольным числом вершин. б) Сколько диагоналей можно провести в выпуклом многоугольнике? в) Изменится ли число диагоналей в многоугольнике, если он не будет выпуклым? г) Сколько всего шахматных партий будет сыграно в турнире с девятью участниками? А в турнире, где число участников — некоторое число n?

22. Нарисуйте два таких невыпуклых многоугольника, что в их пересечении получаются три выпуклых четырехугольника. Сколько выпуклых четырехугольников может получиться в пересечении двух невыпуклых четырехугольников?

23. а) Нарисуйте окружность. Возьмите на ней несколько точек (больше двух). Соедините последовательно идущие точки отрезками. В результате должен получиться многоугольник, который мы будем называть вписанным в окружность (или в круг). Саму окружность (или круг) будем называть описанной около этого многоугольника. б) Нарисуйте многоугольник, около которого нельзя описать окружность. в) Докажите, что центр окружности, описанной около многоугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к его сторонам через их середины. г) Нарисуйте 10 треугольников, которые имеют одну и ту же описанную окружность.

24. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. а) Найдется ли такая точка плоскости, из которой видны все стороны пятиугольника? б) Найдутся ли две такие точки, что наблюдатели увидят из них все стороны пятиугольника? в) Составьте и решите аналогичную задачу для выпуклых многоугольников других видов. г) Изменится ли результат, полученный вами, если отказаться от выпуклости многоугольника?

25. На тетрадном листе отметьте точку.

1) Нарисуйте вокруг нее такой многоугольник, чтобы из нее были видны: а) все его стороны; б) только одна его сторона.

2) Нарисуйте такой многоугольник вокруг нее, чтобы ни одна его сторона не была из нее видна.

26. В пятиугольнике из одной вершины проведите две диагонали. Известны периметры образовавшихся треугольников и четырехугольников. Можете ли вы найти периметр пятиугольника? Выберите сами числовые данные и получите результат.

27. В основании пирамиды лежит пятиугольник. Сколько у этой пирамиды вершин, ребер и граней? Ответьте на тот же вопрос для пирамиды, в основании которой лежит n-угольник.

Задачи к пункту 12.4

А

28. Нарисуйте многоугольные фигуры, которые могут получиться от сложения двух треугольников.

29. Из двух треугольников можно сложить прямоугольник. Какие еще многоугольники можно сложить из этих треугольников?

30. Из трех прямоугольных треугольников можно сложить квадрат. Какие еще многоугольники можно сложить из этих треугольников?

31. Нарисуйте равносторонний треугольник. Как его разбить на: а) два прямоугольных треугольника; б) три прямоугольных треугольника; в) четыре равносторонних треугольника?

32. Нарисуйте выпуклый пятиугольник.

1) Разбейте его на треугольники такими способами: а) соединив одну вершину с остальными; б) соединив точку внутри одной из сторон с вершинами; в) соединив внутреннюю точку со всеми вершинами.

2) Можно ли его разбить на большее число треугольников?

3) Можно ли его разбить на любое число треугольников?

4) Сколько получится треугольников при разбиении выпуклого n-угольника на треугольники способами, указанными в пунктах а) — в)?

33. Нарисуйте невыпуклый пятиугольник. Разбейте его на треугольники любым способом. Можете ли вы его разбить на меньшее число треугольников? Есть ли такой пятиугольник, который можно разбить на два треугольника?

34. Оказывается, прямоугольник можно разбить на два любых по виду многоугольника: треугольника, четырехугольника, пятиугольника и т. д., даже на два тысячеугольника и еще больше. Как это сделать?

Б

35. На рисунке 212 укажите те многоугольные фигуры, которые являются суммой или разностью двух других фигур.

36. Какая фигура может получиться в результате вычитания одного треугольника из другого?

37. В выпуклом многоугольнике с тридцатью последовательно занумерованными вершинами соединили диагональю первую и десятую вершины. При этом разбиении получилось два многоугольника. Сколько сторон в каждом из них? Сколько будет сторон, если соединить диагональю первую и двадцатую вершины? Десятую и двадцатую вершины?

§ 13. ПЛОЩАДЬ

13.1. Понятие площади

Понятие о площади имеет каждый: площадь комнаты, площадь участка земли... Если участок земли состоит из нескольких участков, то его площадь слагается из их площадей. Площадь квартиры слагается из площади комнат и площади прочих помещений. У одинаковых участков одна и та же площадь, как и у одинаковых комнат; у большего участка площадь больше.

Это представление о площади кладется в основу ее определения в геометрии. Пока мы будем рассматривать площадь только многоугольных фигур и воспользуемся понятием об их сложении, как оно определено в § 12.

Можно сказать, что *площадь — это величина той части*

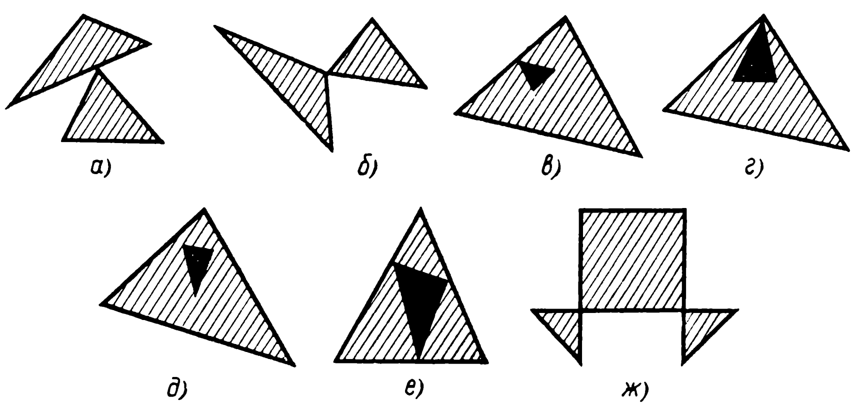


Рис. 212

плоскости, которую занимает фигура. Она должна обладать теми свойствами, о которых уже было сказано. Поэтому дается такое определение.

Определение. **Для многоугольных фигур площадью называется величина, обладающая следующими двумя свойствами:**

1. Если фигура слагается из нескольких многоугольных фигур, то ее площадь равна сумме их площадей.

2. Равные треугольники имеют одну и ту же площадь; у большей фигуры бо́льшая площадь, т. е. если одна фигура содержит другую и не совпадает с ней, то ее площадь больше.

Сравните это определение с определениями длины отрезка и величины угла в § 8 и 10, они сходны[1].

Площадь фигуры F будем обозначать $|F|$ или $S(F)$.

Из свойства 1 сложения площадей следует, что нахождение площади любой многоугольной фигуры сводится к тому, чтобы, разбив фигуру на треугольники, найти их площади и сложить. Стало быть, нужно определить площадь любого треугольника.

13.2. Об измерении площади

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью фигуры, принятой за единицу измерения; оно дает **численное значение площади при данной единице.** Можно сказать, что *численное значение площади — это число, показывающее, во сколько раз площадь данной фигуры больше площади фигуры, принятой за единицу измерения.*

За единицу измерения принимают площадь подходящего квадрата. Жилую площадь измеряют в квадратных метрах, площадь государства — в квадратных километрах, площадь участков земли — в гектарах или сотках.

В геометрии за единицу площади принимают площадь единичного квадрата, т. е. квадрата со стороной, равной тому отрезку e, длина которого принята за единицу. Если длина его обозначается $|e|$, то площадь квадрата обозначается $|e|^2$, пишут: м^2 — квадратный метр, см^2 — квадратный сантиметр и т. п. Очевидно, у равных квадратов площадь одна и та же. Это вытекает из следующей лем-

---

[1] В условии 2 обычно говорят о любых равных многоугольниках, но в этом нет необходимости, так как всякий многоугольник составляется из треугольников. Кроме того, мы пока не определили равенство любых многоугольников.

мы, лежащей в основе измерения площадей. (**Леммой** называется теорема, имеющая значение не столько сама по себе, сколько для доказательства других теорем.)

Лемма *(о площади фигур, разбитых на равные треугольники).* ***У двух фигур, составленных из попарно равных треугольников, площади равны.***

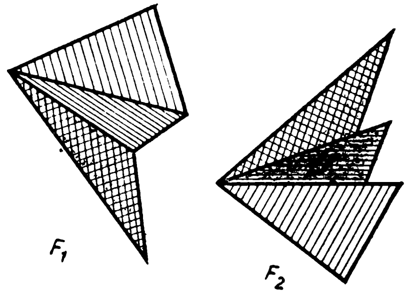


Рис. 213

Доказательство. Пусть многоугольные фигуры F_1 и F_2 составлены из попарно равных треугольников (рис. 213). По свойству 2 площади равных треугольников равны. А по свойству 1 площади фигур F_1 и F_2 равны суммам площадей составляющих их треугольников. Таким образом, площади фигур F_1 и F_2 слагаются из равных площадей и, значит, равны.

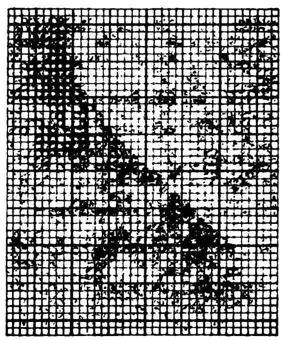
Равные прямоугольники составляются из равных треугольников. Поэтому из доказанной леммы вытекает такое следствие.

Следствие. ***Площади равных прямоугольников, в частности равных квадратов, равны.***

13.3. Сложение прямоугольников

Из курса V класса вы знаете, что легко найти площадь треугольника, если умеешь измерять площадь прямоугольника. А площадь прямоугольника измеряется с помощью сложения прямоугольников. Этим мы сейчас и займемся.

Сложение прямоугольников постоянно встречается на практике, когда покрывают плитами стены или пол, когда складывают из бетонных плит покрытие дороги или взлетной полосы аэродрома, стены домов или междуэтажные перекрытия. Разбиение на прямоугольники (квадраты) мы видим на клетчатой бумаге (рис. 214).


а)

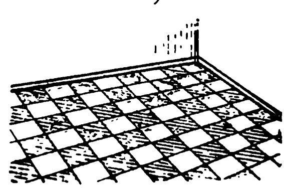

б)

Рис. 214

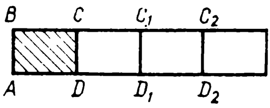


Рис. 215

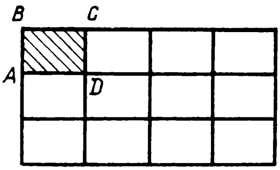


Рис. 216

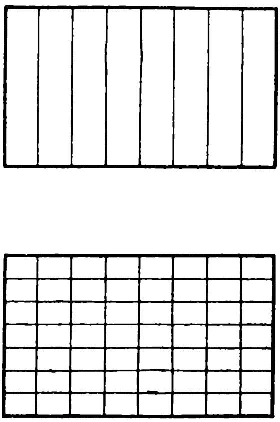


Рис. 217

Лемма 1 *(о сложении прямоугольников).* ***Из равных прямоугольников, приложенных друг к другу равными сторонами, можно складывать сколь угодно большие прямоугольники. Если у этих равных прямоугольников стороны равны отрезкам a и b, то можно складывать прямоугольники со сторонами ma и nb с любыми натуральными m и n.***

Доказательство. Пусть дан какой-нибудь прямоугольник $ABCD$. На его стороне CD как на основании можно построить новый прямоугольник CDD_1C_1, равный $ABCD$ (по аксиоме прямоугольника, рис. 215).

Так как углы при вершинах C и D прямые, то в сумме они дают развернутые углы. Тем самым стороны прямоугольников служат продолжением друг друга и прямоугольники образуют один прямоугольник ABC_1D_1.

Пристраивая к этому прямоугольнику по стороне C_1D_1 еще один прямоугольник $C_1D_1D_2C_2$, равный $ABCD$, снова получим прямоугольник.

Продолжая это построение, можно получить «сколь угодно длинный» прямоугольник, составленный из любого числа n прямоугольников, равных данному, приложенных последовательно один к другому равными сторонами.

К этому длинному прямоугольнику можно точно так же пристроить по его длинной стороне (состоящей из сторон, равных AD) равный ему прямоугольник (рис. 216). К этому прямоугольнику пристраивают следующий и т. д.

Так можно построить прямоугольник со сторонами в любое число раз большими, чем стороны AB и AD. ■

Доказанную лемму естественно дополнит другая.

Лемма 2 *(о разбиении прямоугольника).* ***Каждый прямоугольник можно разбить на сколь угодно малые равные прямоугольники. В частности, каждый квадрат можно разбить на сколь угодно малые равные квадраты.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим две противоположные стороны данного прямоугольника на равные части. Соединяя точки деления — первую с первой, вторую со второй и т. д. (рис. 217), получим «узкие» прямоугольники (как это следует из аксиомы прямоугольника). Потом аналогично разделим эти узкие прямоугольники (рис. 218).

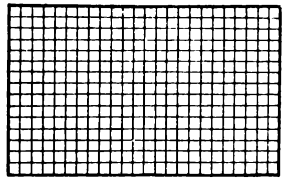


Рис. 218

Если разделить одну сторону на m равных частей, а другую — на n, то прямоугольник разобьется на mn равных прямоугольников. Квадрат можно разбить на m^2 равных квадратов. ■

Об отношении площадей прямоугольников, рассмотренных в этих двух леммах, речь идет в следующей простой лемме.

Л е м м а 3 *(об отношении площадей прямоугольников).* ***Если стороны прямоугольника P в m и n раз больше сторон прямоугольника Q (с какими-то натуральными m и n), то площадь P в mn раз больше площади Q:***

$$|P| = mn\,|Q|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямоугольник P составляется из mn прямоугольников, равных Q (по лемме о разбиении прямоугольника). Площади равных прямоугольников равны (по лемме предыдущего пункта). А площадь прямоугольника P равна сумме их площадей (по первому свойству площади). Следовательно,

$$|P| = mn\,|Q|. \ ■$$

В частности, когда прямоугольники — квадраты, получаем такой вывод:

С л е д с т в и е. ***Если сторона одного квадрата в m раз больше, чем сторона другого, то площадь его в m^2 раз больше.*** Отсюда и происходит название второй степени числа «m-квадрат».

13.4. Площадь прямоугольника

Т е о р е м а *(о площади прямоугольника).* ***Численное значение площади прямоугольника равно произведению численных значений длин его сторон.***

Подразумевая под площадью и длинами их численные значения, теорему кратко формулируют так:

Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, т. е. если P — прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь

$$|P| = ab. \qquad (1)$$

Подробно это означает следующее.

Пусть выбран единичный отрезок e и соответственно единичный квадрат e^2. Численное значение площади прямоугольника в единице e^2 равно произведению численных значений длин его сторон в единице e, если эти значения точные; если же они приближенные, то численное значение площади прямоугольника приближенно равно произведению приближенных значений длин его сторон. Это приближение можно сделать сколь угодно точным. Поэтому согласно общему условию, высказанному в п. 10.4, равенство (1) понимается как точное.

Доказательство теоремы. Пусть выбрана некоторая единица длины — отрезок e_0 и соответствующая ей единица площади — единичный квадрат e_0^2. Возьмем некоторый прямоугольник P со сторонами a и b. Рассмотрим сначала случай, когда длины этих сторон, измеренные единичным отрезком e_0, выражаются целыми числами m и n, т. е.

$$a = me_0, \; b = ne_0.$$

Тогда по лемме об отношении площадей прямоугольников

$$|P| = m \cdot n \, |e_0^2|. \qquad (2)$$

Для рассматриваемого случая равенство (2) и есть утверждение теоремы, так как произведение m и n является численным значением площади прямоугольника P в единице e_0^2.

Рассмотрим теперь случай, когда в достаточно малой доле e отрезка e_0 стороны a и b измеряются целыми числами p и q, т. е.

$$a = pe, \; b = qe.$$

Для определенности будем считать, например, что $e = \frac{1}{100} e_0$ (так, если e_0 — один метр, то e — один сантиметр). Квадрат со стороной e обозначим e^2.

Тогда снова по лемме об отношении площадей прямоугольников имеем:

$$|P| = pq\ |e^2|,$$

а по следствию этой леммы

$$|e^2| = \frac{1}{100^2}\ |e_0^2|.$$

Из последних двух равенств получаем:

$$|P| = pq \cdot \frac{1}{100^2} |e_0^2|,$$

т. е.

$$|P| = \frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100} |e_0^2|. \qquad (3)$$

Но числа $\frac{p}{100}$ и $\frac{q}{100}$ — это численные значения длин сторон a и b в единице e_0 (например, если $a = 73$ см, то $a = 0{,}73$ м).

Снова в равенстве (3) произведение $\frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100}$, с одной стороны, является произведением численных значений длин сторон a и b в единице e_0, а с другой стороны, оно является численным значением площади прямоугольника P в единице e_0^2. Следовательно, мы доказали теорему и для второго случая.

Может оказаться, что стороны a и b не измеряются целыми числами ни в какой малой доле e единицы e_0. Об этом случае подробно сказано в дополнении к этому параграфу. И для него утверждение теоремы остается справедливым. ■

13.5. Площадь треугольника

Сначала решим вопрос о площади прямоугольного треугольника.

Лемма *(о площади прямоугольного треугольника).* ***Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.***

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник T с катетами a и b (рис. 219).

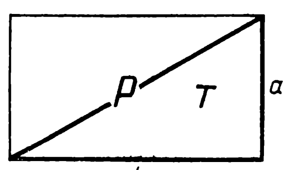


Рис. 219

Его можно достроить до прямоугольника P со сторонами a и b (по лемме 2 п. 13.4.) Площадь этого прямоугольника равна ab (по теореме о площади прямоугольника). Этот прямоугольник состоит из данного треугольника T и другого, ему равного, а площадь прямоугольника P равна сумме площадей этих треугольников. У равных треугольников площади равны. Поэтому площадь треугольника T равна половине площади прямоугольника P, т. е. $S(T) = \frac{1}{2}ab$. ■

Теперь рассмотрим любой треугольник.

Теорема *(о площади треугольника).* ***Площадь треугольника равна половине произведения длины любой из его сторон на длину проведенной к ней высоты.***

Сторону, к которой проводится высота, обычно называют **основанием** и теорему формулируют совсем кратко: ***площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.***

Надо при этом понимать, что здесь подразумеваются численные значения площади и длин основания и высоты в соответствующих единицах.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC и обозначим его T. Сторону треугольника T, противоположную вершине C, обозначим через c, а опущенную из вершины C высоту CH — через h_c. Мы должны доказать, что

$$S(T) = \frac{1}{2}ch_c. \tag{1}$$

Для точки H возможны три случая ее расположения.

1) Точка H совпадает с одним из концов основания c, например с точкой A (рис. 220). В этом случае высота h_c совпадает со стороной b, так что треугольник T — прямоугольный. Его катеты — отрезки $CH = h_c$ и $AB = c$. По лемме о площади прямоугольного треугольника получаем, что $S(T) = \frac{1}{2}ch_c$, т. е. выполняется доказываемое равенство (1).

2) Точка H лежит внутри основания c (рис. 221). Тогда высота CH делит треугольник T на два прямоугольных треугольника T_1 и T_2 с катетами $AH = c_1$, $HB = c_2$ и общим катетом $CH = h_c$.

Площадь этих прямоугольных треугольников вычисляются по формулам

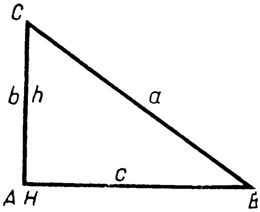


Рис. 220

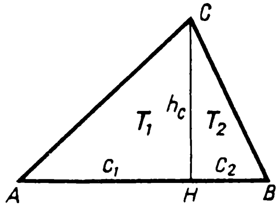


Рис. 221

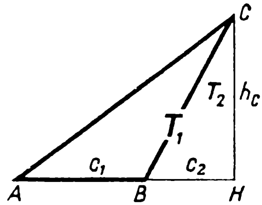


Рис. 222

$$S(T_1) = \frac{1}{2} c_1 h_c, \ S(T_2) = \frac{1}{2} c_2 h_c. \qquad (2)$$

А так как

$$S(T) = S(T_1) + S(T_2), \qquad (3)$$

то

$$S(T) = \frac{1}{2} c_1 h_c + \frac{1}{2} c_2 h_c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) h_c = \frac{1}{2} c h_c,$$

т. е. утверждение теоремы — формула (1) — доказано и во втором случае.

3) Точка H лежит вне основания c, например, так, что точка B лежит между A и H (рис. 222). Тогда треугольник T оказывается разностью прямоугольных треугольников $T_1 = \triangle AHC$, $T_2 = \triangle BHC$ с катетами $c_1 = AH$, $c_2 = BH$ и общим катетом $CH = h_c$. Так как

$$S(T_1) = S(T) + S(T_2),$$

то

$$S(T) = S(T_1) - S(T_2).$$

Поскольку

$$S(T_1) = \frac{1}{2} c_1 h_c, \ S(T_2) = \frac{1}{2} c_2 h_c \ \text{ и } \ c = c_1 - c_2,$$

то

$$S(T) = \frac{1}{2} c_1 h_c - \frac{1}{2} c_2 h_c = \frac{1}{2}(c_1 - c_2) h_c = \frac{1}{2} c h_c.$$

Утверждение теоремы доказано для всех случаев. ■

З а м е ч а н и е. Принято стороны треугольника ABC, противолежащие вершинам A, B, C, обозначать через a, b, c, а опущенные на них высоты — через h_a, h_b, h_c.

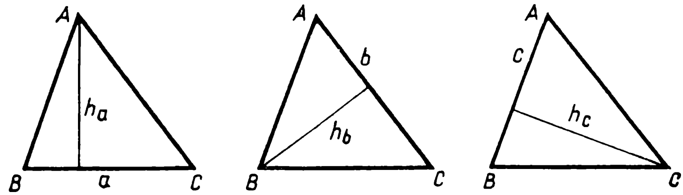


Рис. 223

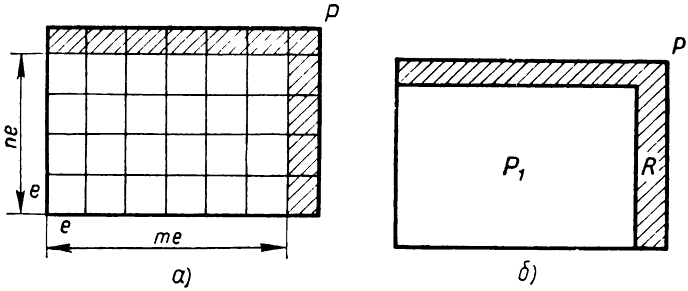


Рис. 224

Согласно доказанной теореме $S(T) = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$ (рис. 223).

Дополнение к § 13

Площадь прямоугольника в случае приближенных численных значений длин его сторон

Рассмотрим этот случай в теореме о площади прямоугольника, когда значения длин его сторон могут и не выражаться целыми числами в малой единице e. Как и раньше, считаем, что, например, $e = \frac{1}{100} e_0$.

Пусть отрезок e укладывается на сторонах a и b прямоугольника P по m и n раз, но уже не укладывается по $m+1$ и $n+1$ раз. Отложив на сторонах прямоугольника P от одной вершины отрезки me и ne, построим на них прямоугольник P_1 (рис. 224). Он будет содержаться в прямоугольнике P. Если P не совпадает с P_1, то он выступает из него на один или два узких прямоугольника шириной меньше e. Поэтому если отрезок e мал, то и разность площадей прямоугольников P и P_1 мала. Иначе говоря, площадь прямоугольника P_1 подходит к площади прямоугольника P тем точнее, чем меньше отрезок e.

Площадь прямоугольника P_1, как доказано, в исходной единице равна:

$$|P_1| = \frac{m}{100} \cdot \frac{n}{100} |e_0^2|.$$

Поэтому

$$|P| = \frac{m}{100} \cdot \frac{n}{100} |e_0^2| + |R|, \tag{1}$$

где $|R|$ — разность площадей прямоугольников P и P_1, т. е. площадь фигуры R, которая дополняет P_1 до P ($|R|$ можно назвать поправкой в равенстве (1)).

В равенстве (1) числа $\frac{m}{100}$ и $\frac{n}{100}$ — это численные значения длин сторон с точностью до длины малой единицы $e = \frac{1}{100} e_0$. А их произведение $\frac{m}{100} \cdot \frac{n}{100}$ — это приближенное численное значение площади прямоугольника P с точностью до поправки $|R|$.

Таким образом, из равенства (1) следует:

Численное значение площади прямоугольника приближенно равно произведению приближенных численных значений длин его сторон, причем эти приближения могут быть сколь угодно точными—тем точнее, чем в меньшей доле e основной единицы e_0 ведется измерение.

А согласно соглашению, принятому в п. 9.4, это и означает, что верна формула для площади прямоугольника:

$$|P| = ab.$$

Задачи к § 13

Основные задачи

1. Рассмотрите всевозможные прямоугольники, имеющие один и тот же периметр. Докажите, что наибольшую площадь имеет среди них квадрат.

2. Рассмотрите всевозможные равновеликие прямоугольники. Докажите, что наименьший периметр имеет среди них квадрат.

3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе. Какие следствия вы можете получить из этой формулы?

4. Два треугольника имеют общий угол. Докажите, что отношение их площадей равно отношению произведений сторон, прилежащих к этому углу.

Задачи к пункту 13.1

А

5. Площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2. Значит ли это, что фигура F составлена из фигур F_1 и F_2?

6. Фигура F получена вычитанием фигуры F_2 из фигуры F_1. Выразите площадь фигуры F через площадь фигур F_1 и F_2.

7. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

8. Площадь фигуры F_1 больше площади фигуры F_2. Следует ли из этого, что фигура F_2 содержится в фигуре F_1?

9. Фигура F составлена из n равных треугольников. Какую часть составляет площадь каждого из этих треугольников от площади фигуры F?

10. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Точка K — середина стороны CD, точка L — середина стороны BC, точка M — середина стороны AD, точка N — середина стороны AB. Какую часть от площади прямоугольника составляют площади таких фигур: а) ABD; б) ABM; в) $ABKD$; г) $ABLKD$; д) $ABLKM$; е) $KLNM$?

11. Дан квадрат. Докажите, что площадь заштрихованной фигуры на рисунке 225 равна площади квадрата.

12. Два равных прямоугольных треугольника ABC и DBC с общим катетом BC расположены в одной полуплоскости. Их гипотенузы AC и BD пересекаются в точке K.

1) Докажите, что: а) $|ABC| = |BCD|$; б) $|ABK| = |CDK|$.

2) Пусть углы ABC и DCB останутся равными, но не прямыми. Будут ли верны полученные результаты в этом случае?

13. В треугольнике ABC $AB = AC$. На сторонах AB и AC от вершины A отложены равные отрезки AK и AL. Докажите, что: а) $|ABL| = |AKC|$; б) $|KBP| = |LPC|$. (Точка P — точка пересечения CK и BL.)

14. Площадь поверхности куба (прямоугольного параллелепипеда, пирамиды) — это сумма площадей всех его граней. (Похоже на периметр ломаной — в чем это сходство?) а) Во сколько раз площадь поверхности куба больше площади одной его грани?

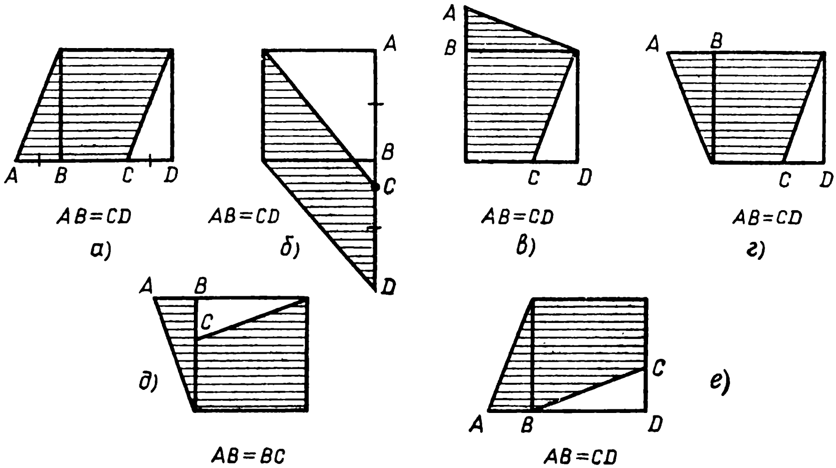


Рис. 225

б) Куб разрезали на два равных прямоугольных параллелепипеда. (Что это значит?) Будут ли равны площади поверхностей этих параллелепипедов? в) Какую часть будет составлять площадь поверхности одного такого параллелепипеда от площади поверхности исходного куба?

15. Пусть F_1 и F_2 — многоугольные фигуры, G_1 — многоугольная фигура, являющаяся их объединением, G_2 — многоугольная фигура, являющаяся их пересечением. Докажите, что $|F_1| + |F_2| = |G_1| + |G_2|$.

Б

16. Дан невыпуклый четырехугольник. Можно ли построить выпуклый четырехугольник с тем же периметром, но большей площади?

17. Даны два квадрата, площадью S каждый. Их наложили друг на друга так, что получился прямоугольник площадью $1{,}5\ S$. Какова площадь их общей части?

18. Сравните площади таких фигур: а) квадрата, построенного на гипотенузе, и квадрата, построенного на катете прямоугольного треугольника; б) двух неравных равносторонних треугольников; в) двух равнобедренных треугольников, из которых один имеет большее основание и больший угол при вершине.

19. Сравните площади фигур, изображенных на рисунке 226.

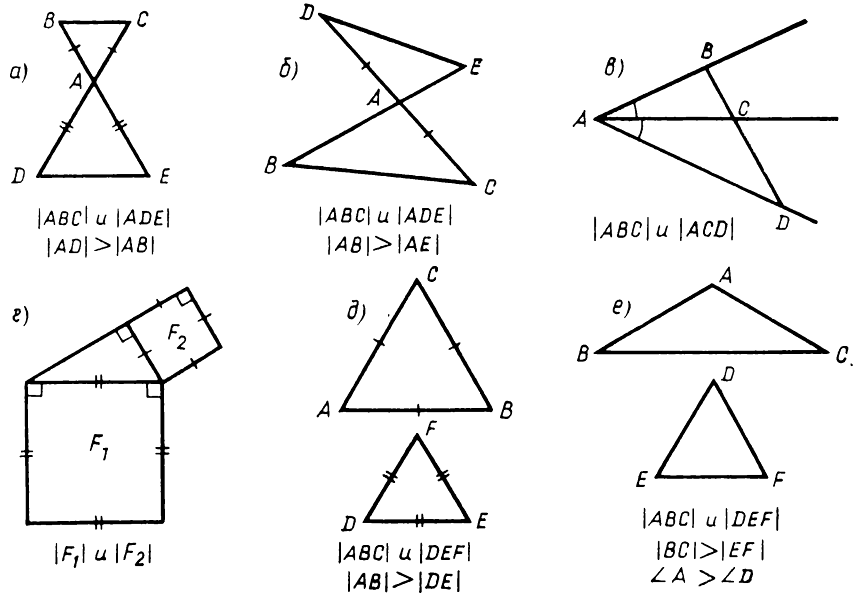


Рис. 226

20. Из равных равносторонних треугольников составили равносторонний треугольник. При этом обошлись наименьшим возможным числом треугольников. Какую часть от площади полученной фигуры составляет площадь исходного равностороннего треугольника?

21. Нарисуйте отрезок BC. В разных полуплоскостях постройте два равных отрезка BA и CD под прямым углом к данному отрезку. Прямая AD пересекает (BC) в точке K. Докажите, что $|ABK| = |CDK|$.

22. Пусть $ABCD$ — квадрат, точки K, L, M, N — середины сторон AD, BA, CB, DC соответственно. Какую часть от площади квадрата составляют площади таких фигур: а) CDK; б) DAL; в) $AKCM$; г) объединения $AKCM$ и $BLDN$; д) пересечения $AKCM$ и $BLDN$?

23. Пусть в треугольной пирамиде: а) все ребра равны; б) противоположные ребра попарно равны. Можете ли вы найти площадь всей поверхности пирамиды, если известна площадь одной из ее граней?

24. а) Прямоугольный параллелепипед T разрезали на два прямоугольных параллелепипеда T_1 и T_2. Верно ли, что площадь поверхности T равна сумме площадей поверхностей T_1 и T_2? б) Будет ли это верно, если пирамиду T разрезать на две пирамиды T_1 и T_2? в) Какое предположение вы сможете высказать, исходя из этих примеров?

Задачи к пунктам 13.2, 13.3

А

25. Предположим, что у вас есть достаточное число прямоугольников размером 2×1. Какие прямоугольники можно сложить из двух таких прямоугольников? Из трех таких прямоугольников? Сможете ли сложить из таких прямоугольников прямоугольники с размерами 8×6, 8×7, 7×7?

26. Какие многоугольники вы можете сложить из четырех квадратов? Из пяти квадратов? Из шести квадратов? В этой задаче правило складывания такое: каждый новый квадрат имеет общую сторону с одним или двумя уже уложенными квадратами. Особенно интересно складывание таким образом шести квадратов. Как их сложить так, чтобы из полученного многоугольника можно было образовать с помощью сгибаний и склеивания поверхность куба?

27. Две фигуры составлены из попарно равных многоугольников. Откуда следует, что их площади равны?

28. Фигура F_1 составлена из k_1 равных треугольников, а фигура F_2 составлена из k_2 таких же треугольников. Сравните площади фигур F_1 и F_2. Изменится ли результат сравнения, если фигуры F_1 и F_2 будут составлены соответственно из k_1 и k_2 равных прямоугольников?

29. а) Что произойдет с площадью квадрата, если его сторону увеличить в два раза? А если уменьшить в три раза? б) Как изменится сторона квадрата, если его площадь увеличить в 100 раз? А если уменьшить в 10 000 раз?

30. Нарисуйте прямоугольник. Пусть его площадь равна S. Постройте прямоугольник площадью: а) $2S$; б) $3S$; в) $\frac{1}{2}S$; г) $\frac{1}{3}S$; д) $\frac{S}{4}$.

31. В квадрате $ABCD$ провели диагональ AC. Затем от него с угла C отрезали квадрат. Докажите, что два четырехугольника, граничащие по части диагонали AC, равновелики (т. е. имеют равные площади). Составьте из них прямоугольник.

32. Для облицовки стены дома имеются равные прямоугольные плитки. Как вы узнаете, сколько понадобится плиток? Такую же задачу можно сочинить и про оклейку стен комнаты обоями. Сделайте это. Как вы решите эту задачу?

33. К кубу пристроили такой же куб так, что две их грани совпали. Во сколько раз площадь поверхности полученной фигуры больше площади поверхности куба? Каков будет результат, если таким образом выложить последовательно 100 кубов? Можно ли, выкладывая кубы таким образом, получить прямоугольный параллелепипед с площадью поверхности в 1000 раз большей, чем площадь поверхности куба?

34. Куб разрезали на 8 равных кубов. а) Сравните площадь поверхности данного куба и площадь поверхности полученного куба. б) Сравните площадь поверхности данного куба и площадь поверхности всех восьми кубов. в) Пусть каждую сторону данного куба разделили на 10 равных частей. На сколько кубов разделится данный куб? Выполните задания а) и б) для этого случая.

35. На гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника построили квадрат. Квадрат построили и на его катете. Докажите, что площадь первого квадрата в два раза больше площади второго квадрата. Используйте результат этой задачи для построения квадрата площадью в два раза большей, чем площадь данного квадрата.

Б

36. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Через точку K — середину стороны CD — провели отрезок PQ так, что точка P лежит на стороне BC, а точка Q — на прямой AD. Докажите, что $|ABPQ| = |ABCD|$. Аналогичное построение выполнили для точки L — середины стороны AB, проведя отрезок RS. Докажите, что $|SRPQ| = |ABCD|$.

37. Из данного квадрата надо вырезать квадрат, равный по площади оставшейся части. Как это сделать?

38. Нарисуйте какой-нибудь выпуклый многоугольник. Постройте другой выпуклый многоугольник, равновеликий данному.

39. Нарисуйте квадрат. Как его разделить на две равновеликие части: а) одним отрезком; б) одной ломаной; в) одной кривой линией; г) одной замкнутой линией?

40. Одним прямым разрезом разделите площадь прямоугольника пополам. Предложите несколько способов решения.

41. Нарисуйте прямоугольник. Где-нибудь поставьте точку. Можете ли вы провести через данную точку прямую так, чтобы она делила пополам площадь прямоугольника? Можно ли одной прямой разделить пополам площади двух прямоугольников? Трех прямоугольников?

42. Из прямоугольной полосы металла шириной d делают заготовки такого вида, как на рисунке 227. Сколько можно сделать таких заготовок из полосы длиной $120\,d$?

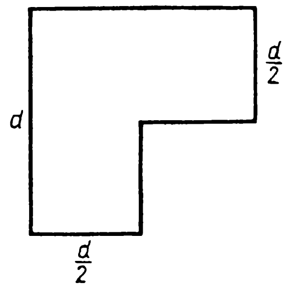


Рис. 227

43. Перед вами лист бумаги из тетради. Как получить из него лист бумаги площадью в два раза меньшей? Федя и Вася получили такие листы. Как вы думаете, у них обязательно получаются равные листы или нет? Как получить из того же листа бумаги лист площадью в четыре раза меньшей? Перегните лист пополам пять раз. Сравните площадь полученного листа с данным. Можете ли вы получить из данного листа лист площадью в три раза меньшей?

Задачи к пункту 13.4

А

44. Пусть стороны прямоугольника равны d_1 и d_2. Запишите формулу площади прямоугольника. а) Какие величины составляют формулу? б) Выразите из формулы длину каждой стороны прямоугольника. в) Пусть одна из величин в формуле постоянна. Какой зависимостью связаны между собой оставшиеся величины? г) Вам понадобилось увеличить площадь прямоугольника в несколько раз. Как вы будете действовать? А если потребуется уменьшить площадь прямоугольника в несколько раз? д) Вам нужно построить прямоугольник, равновеликий данному, но не равный ему. Как вы будете действовать? е) Может ли прямоугольник иметь одну из сторон в 1 км, а площадь меньшую, чем 1 мм^2? ж) Как изменилась площадь прямоугольника, если одна из сторон увеличилась в два раза, а другая уменьшилась в три раза? Обобщите эту задачу. з) У вас в руках линейка с делениями в 1 см. Вам требуется найти площадь длинной и узкой, много уже чем 1 см, полосы. Как вы будете действовать? и) Три величины: a, b и c, из которых одна — площадь прямоугольника, а две — длины его сторон. Известно, что $a = b : c$. Можете ли вы узнать, где что? А если a, b, c — численные значения этих величин, тогда сможете?

45. Пусть в пропорции $a : b = c : d$ все числа положительные. Перепишите ее в виде равных произведений. Дайте ей геометрическое истолкование.

46. Верны ли такие утверждения: а) если квадраты равновеликие, то они равны; б) если прямоугольники равновеликие, то они равны; в) если площадь одного квадрата больше площади другого квадрата, то и сторона его больше; г) если площадь одного прямоугольника больше площади другого прямоугольника, то и стороны первого больше сторон другого; д) если площади двух квадратов равны, то и периметры их равны; е) если прямоугольники равновелики, то периметры их равны?

47. Какая зависимость существует между площадью квадрата и его периметром? Имеет ли она место для прямоугольника?

48. Как вы будете искать площади фигур, изображенных на рисунке 228?

49. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 1 см. Докажите, что его площадь увеличилась больше чем на 1 см^2.

50. Прямоугольный участок земли размером 130×60 м окопали рвом шириной 1 м, причем ров выкопали на участке. Какова новая площадь участка?

51. Даны два прямоугольника. Зависит ли отношение их площадей от выбора единицы измерения?

52. Известны все измерения прямоугольного параллелепипеда. Как найти площадь его поверхности? Выберите сами числовые данные и получите результат.

53. Все ребра куба удвоили. Как изменилась его площадь поверхности? А как она изменится, если все ребра куба уменьшить в 3 раза?

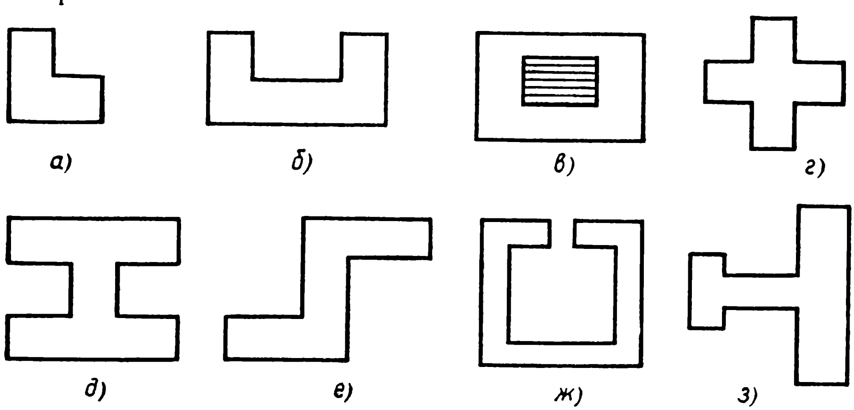


Рис. 228

В

54. Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны. Их длины равны d_1 и d_2. Найдите его площадь. Изменится ли результат, если четырехугольник не будет выпуклым? Если диагонали не будут перпендикулярны?

55. Известна диагональ квадрата. Как найти его площадь?

56. Докажите, что площадь прямоугольника не больше чем половина площади квадрата, построенного на его диагонали. Может ли площадь этого квадрата быть больше площади прямоугольника в 1000 раз? В каком случае площадь прямоугольника равна именно половине площади такого квадрата?

57. Нарисуйте две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке A. Прямая KL пересекает их в точках K и L. Внутри одного из прямых углов по этой прямой движется точка X. XX_1 и XX_2 — перпендикуляры из точки X на данные прямые. Проследите, как изменяется площадь прямоугольника XX_1AX_2.

58. Есть ли такие прямоугольники, у которых стороны измеряются целым числом сантиметров, а площадь численно равна периметру?

59. Из листа картона размером 60×40 см хотят сделать коробку в виде прямоугольного параллелепипеда высотой 10 см. Коробка крышки не имеет. Допустимые операции: разметка, сгибание, склеивание. Как вы будете действовать? Какова площадь поверхности нужной коробки? Пусть теперь коробка той же высоты должна быть закрытой. Как вы будете действовать теперь?

60. В кубе с ребром 10 см сделали сквозную дыру сверху вниз. Эта дыра имеет форму прямоугольного параллелепипеда, ее края параллельны ребрам куба, а сама она выглядит сверху как квадрат. Сторона этого квадрата равна 2 см. Центр этого квадрата совпадает с центром грани куба. Вычислите площадь поверхности получившейся фигуры. Сможете ли вы это сделать, если в кубе сделали еще одну такую же дыру слева направо; от передней грани к задней?

Задачи к пункту 13.5
Площадь прямоугольного треугольника

А

61. Как изменилась площадь прямоугольного треугольника, если: а) один катет увеличили в два раза, а другой — в три раза; б) один катет уменьшили в два раза, а другой уменьшили в три раза; в) один катет уменьшили в три раза, а другой увеличили в четыре раза?

62. Каждый катет прямоугольного равнобедренного треугольника увеличили в два раза. Его первоначальная площадь равнялась S. Чему равно приращение его площади?

63. Нарисуйте прямоугольный треугольник. Нарисуйте потом треугольник: а) равновеликий ему, но не равный ему; б) с площадью в два раза большей; в) с площадью в два раза меньшей.

64. Треугольник ABC прямоугольный. Его катеты AB и BC, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Прямую BC пересекает луч AK, такой, что $\angle KAB = 45°$, причем $K \in (BC)$. Вычислите $|AKC|$.

Б

65. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник со стороной d. Каждый его катет увеличили на величину x. Найдите площадь нового треугольника. Найдите приращение площади прямоугольного треугольника. Пусть теперь каждый катет уменьшили на величину x. Найдите площадь получившегося треугольника. Найдите приращение площади, вычтя из площади полученного треугольника площадь данного треугольника. (Здесь приращение отрицательное.)

66. Дан прямоугольный треугольник с катетами d_1 и d_2. Каждый его катет получил приращение $x > 0$. Найдите площадь полученного треугольника и приращение площади. Пусть теперь катеты нового треугольника получают приращение $x > 0$. Найдите площадь второго полученного треугольника и новое приращение площади. Сравните эти два приращения. Какое можно сделать предположение, решив эту задачу?

67. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника расположены так, что вершина прямого угла каждого из них находится на гипотенузе другого. В их пересечении получился квадрат площадью 1. Вычислите площадь их объединения.

68. Гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника увеличили в два раза. Во сколько раз увеличилась его площадь? Получится ли у вас тот же результат, если увеличить в два раза гипотенузу произвольного прямоугольного треугольника?

69. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{1}{4}$, а высота на гипотенузу не превосходит $\frac{1}{2}$.

70. Из куска материи в виде равнобедренного прямоугольного

треугольника хотят вырезать заплату в форме квадрата. При этом заплата должна иметь наибольшую возможную площадь. Как это сделать?

71. Поверхность треугольной пирамиды $PABC$ состоит из четырех прямоугольных треугольников: PAB с прямым углом при вершине B, PBC с прямым углом при вершине B, BAC с прямым углом при вершине A, PAC с прямым углом при вершине A. Требуется найти площадь ее поверхности. Длины каких ребер достаточно для этого знать?

Площадь произвольного треугольника

А

72. За единицу площади выбран квадрат со стороной в одну клеточку вашей тетради. Нарисуйте квадрат площадью 9 таких квадратных единиц. Внутри его нарисуйте треугольники площадью: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

73. Как вы будете искать площади фигур, изображенных на рисунке 229?

74. а) Какие величины составляют формулу площади треугольника? б) Выразите из этой формулы такие величины: удвоенную площадь, произведение высоты и основания, основание, высоту. в) Пусть основание треугольника постоянно. Какая по виду получается зависимость оставшихся величин? Ответьте на тот же вопрос, если постоянна высота; площадь. г) Нарисуйте треугольник. Как вы построите треугольник площадью в 6 раз большей? В 2 раза большей? В 3 раза меньшей? д) Нарисуйте треугольник.

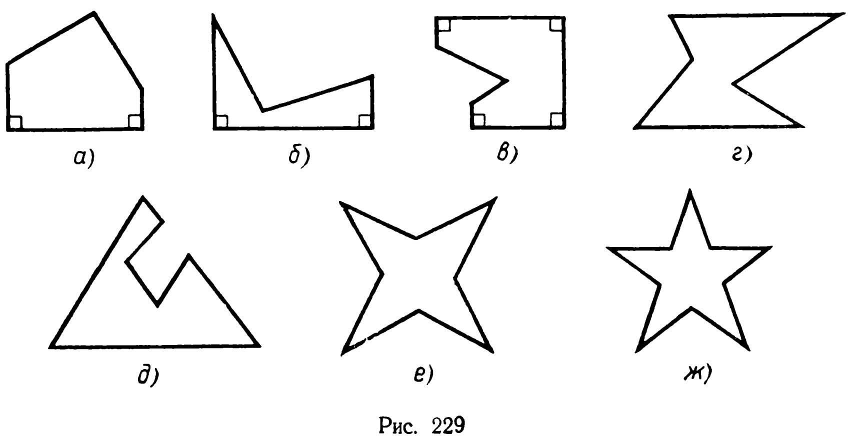


Рис. 229

Постройте треугольник, равновеликий данному, но не равный ему. е) Может ли треугольник с очень большими сторонами иметь очень маленькую площадь? Например, треугольник не умещается в квартире, а его площадь равна 1 мм². ж) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB > A_1B_1$, $BC > B_1C_1$, $CA > C_1A_1$. Следует ли отсюда, что $|ABC| > |A_1B_1C_1|$. з) Перед вами треугольная металлическая пластина. Как вы вычислите ее площадь? и) Известно, что p, q, r — три величины в треугольнике: площадь, длина одной из сторон и длина одной из высот. Кроме того, известно, что $p \cdot r = 2q$. Можете ли вы узнать, какая из величин обозначена этими буквами? А если p, q, r не величины, а их численные значения? к) Нарисуйте круг, а в нем два радиуса с маленьким углом между собой. Придумайте способ для приближенного нахождения площади фигуры, ограниченной этими радиусами и дугой, которая лежит внутри маленького угла.

75. Площадь одного треугольника больше площади другого треугольника. Будет ли и периметр его больше?

76. Два треугольника имеют одинаковую высоту. Докажите, что их площади относятся как основания. Придумайте сами похожую задачу.

77. В треугольнике ABC провели медиану AA_1. а) Докажите, что площади полученных частей треугольника равны. б) Возьмите на медиане какую-нибудь точку и соедините ее с вершинами B и C. Укажите на рисунке треугольники, равные по площади.

78. Какой бы треугольник ни нарисовал Федя, Вася может, ничего не измеряя, нарисовать треугольник, равновеликий этому, но не равный ему. Как он это делает?

79. На стороне AC треугольника ABC взята точка K, а на отрезке BK — точка L. Проведены отрезки LA и LC. Сравните площади образовавшихся треугольников, если: а) K — середина AC, $|BL| : |LK| = 2 : 1$; б) $|AK| : |KC| = 2 : 1$, L — середина BK; в) $|AK| : |KC| = 2 : 1$, $|BL| : |LK| = 2 : 1$.

80. На рисунке 230 найдите неизвестную площадь треугольника.

В

81. Докажите, что треугольник с двумя равными высотами равнобедренный.

82. Докажите, что равны соответственные высоты двух равных треугольников.

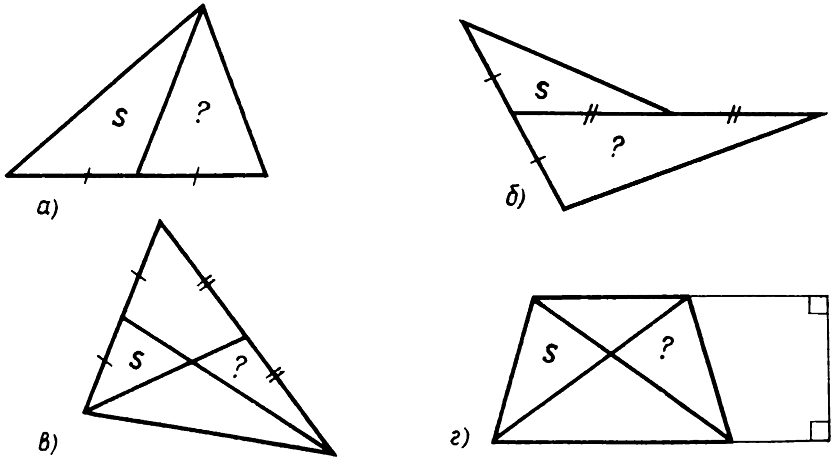


Рис. 230

83. $ABCD$ — прямоугольник. X — переменная точка стороны BC. Докажите, что площадь треугольника AXD постоянна.

84. Рассмотрим равнобедренные треугольники с данной боковой стороной. Докажите, что наибольшую площадь из всех таких треугольников имеет прямоугольный треугольник.

85. Рассмотрим равновеликие треугольники с одним и тем же основанием. Докажите, что наименьший периметр среди них имеет равнобедренный треугольник. Докажите далее, что из всех равновеликих равнобедренных треугольников наименьший периметр имеет равносторонний треугольник.

86. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Возьмите точку X на основании. Из нее на боковые стороны проводятся перпендикуляры. Докажите, что их сумма не зависит от выбора точки X на стороне AC. Останется ли это верным, если точку X брать внутри равнобедренного треугольника? А если ее брать внутри равностороннего треугольника и проводить перпендикуляры на все его стороны?

87. Если в треугольнике ABC угол C и одна из прилежащих к нему сторон AC не изменяются, а другая BC изменяется, то отношение $h_b : a$ не изменяется. Докажите это.

88. В треугольнике провели среднюю линию, т. е. отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь полученного треугольника?

89. Две стороны треугольника имеют длины d_1 и d_2. Каково наибольшее значение площади этого треугольника?

90. В треугольнике со сторонами a, b, c $a > b > c$. Расположите в порядке возрастания его высоты h_a, h_b, h_c.

91. Может ли в треугольнике одна высота: а) равняться сумме других высот; б) быть больше суммы других высот?

92. Сторона равностороннего треугольника увеличилась в два раза. Как изменилась его площадь?

93. На стороне AB треугольника ABC взята середина — точка K, на стороне AC взята точка L, такая, что $|AL| : |LC| = 2 : 1$. Найдите отношение $|AKL| : |BKLC|$. Обобщите задачу.

94. На стороне данного треугольника Федя нарисовал прямоугольник, равновеликий этому треугольнику. Но пришел Вася и, конечно, стер треугольник. Сможете ли вы его восстановить?

95. В прямоугольном треугольнике с углом 30° через середину гипотенузы провели прямую, ей перпендикулярную. а) Какую часть площади треугольника составляет площадь меньшей полученной части? б) Составьте и решите обратную задачу.

96. В треугольной пирамиде $ABCD$ через середины ребер AB, AC, AD провели отрезки. Какую часть от площади поверхности данной пирамиды составляет площадь поверхности образовавшейся пирамиды?

97. В треугольной пирамиде $PABC$ грани PAC и PAB — прямоугольные треугольники ($\angle A$ — прямой). $AB = AC$. Докажите, что $|PBC| > |ABC|$.

98. В треугольной пирамиде $PABC$ все углы при вершине P прямые и все боковые ребра равны. Докажите, что грань ABC самая большая по площади из всех ее граней.

Задачи к главе II

1. Нарисуйте выпуклый четырехугольник. Найдите в нем такую точку, для которой сумма расстояний до всех его вершин наименьшая. Сможете ли вы найти такую точку в невыпуклом четырехугольнике?

2. Нарисуйте выпуклый четырехугольник. а) Пусть вершины другого четырехугольника лежат внутри сторон первого. Докажите,что периметр первого четырехугольника больше периметра второго четырехугольника. б) Пусть вершины второго четырехугольника лежат внутри первого. Докажите, что периметр первого четырехугольника больше, чем периметр и этого четырехугольника.

в) Составьте и решите аналогичную задачу для других выпуклых многоугольников. г) Изменятся ли полученные результаты, если внутри будут находиться невыпуклые многоугольники? д) Изменятся ли полученные результаты, если будет дан невыпуклый многоугольник?

3. Перед вами металлический предмет в форме круга. Как вы найдете его центр?

4. Пусть ABC и KLC — два прямоугольных треугольника с прямым углом при вершине C. Катеты CK и CL одного являются продолжением катетов CB и CA другого (соответственно), причем $CK = CA$, $CL = CB$. В треугольнике ABC проведена высота из вершины C, а в треугольнике KLC проведена медиана из вершины C. Докажите, что эти отрезки лежат на одной прямой.

5. На сторонах квадрата во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что их вершины, не лежащие на сторонах данного квадрата, являются вершинами нового квадрата. Изменится ли этот результат, если треугольники строить вовнутрь квадрата? Изменится ли результат, если вместо равносторонних треугольников строить равные равнобедренные треугольники с основанием на стороне квадрата?

6. Три равнобедренных треугольника PAB, PBC, PCD имеют основаниями отрезки AB, BC, CD. Они расположены так, что прямая AD пересекает отрезки PB и PC. Обозначим точки пересечения K и L. Докажите, что треугольник PKL равнобедренный.

7. Нарисуйте отрезок. Возьмите циркуль. Постройте только с его помощью отрезок, который в два раза больше данного. (Достаточно построить концы такого отрезка.)

8. Нарисуйте окружность и проведите в ней диаметр. Ответьте, под каким углом виден этот диаметр из произвольной точки: а) окружности; б) внутри круга; в) вне круга. (В любом случае точка не берется на диаметре или его продолжении.)

9. Дан отрезок. Какую фигуру образуют все точки, из которых он виден под прямым углом?

10. Дан прямоугольник площадью S. Два прямоугольника, площадью $\frac{S}{2}$ каждый, наложили на данный прямоугольник так, что каждый из них имеет с данным общую сторону. Какова площадь оставшейся части?

11. Через вершины квадрата перпендикулярно его диагоналям проведены прямые до их взаимного пересечения. Сравните площадь

полученного четырехугольника с площадью квадрата. Сможете ли вы решить аналогичную задачу, если будет дан не квадрат, а прямоугольник? А для произвольного выпуклого четырехугольника?

12. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами d_1 и d_2 провели биссектрисы углов A и D. Они пересеклись в точке M, а сторону BC пересекли в точках K и L. Чему равна площадь треугольника KLM?

13. В прямоугольнике провели биссектрисы всех его углов. Четыре точки их пересечения являются вершинами некоторого многоугольника. Можете ли вы найти его площадь, если известна площадь данного прямоугольника?

14. Прямая, перпендикулярная одной из сторон прямоугольника, делит пополам его площадь. Докажите, что она делит пополам и его периметр. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. Будет ли верно исходное утверждение, если прямая будет делить пополам площадь, не будучи перпендикулярной стороне прямоугольника? А обратное?

15. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, равновеликий ему и при этом: а) равнобедренный; б) равносторонний.

16. Каждая из высот треугольника меньше 1. Может ли площадь треугольника быть больше 1? Больше 1000? Больше любого наперед заданного числа?

17. Нарисуйте треугольник ABC. На его сторонах BA и BC отметьте середины K и L. По стороне AC движется точка X (от A к C). Какие значения принимает площадь четырехугольника $XKBL$?

18. Внутри квадрата находится треугольник. Докажите, что его площадь не больше половины площади квадрата.

19. Пусть AB — диаметр данного круга с центром O. Через середину K радиуса OA проведена хорда LM. Какую часть составляет площадь треугольника OLM от площади четырехугольника $AMBL$?

20. Внутри выпуклого многоугольника с равными сторонами каким-то образом движется точка. Из нее проводятся перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от положения точки.

21. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Диагональ AC делит его площадь пополам.

1) Докажите, что: а) перпендикуляры, проведенные из точек B и D на эту диагональ, равны; б) диагональ BD делится диагональю AC пополам.

2) Сформулируйте и проверьте утверждение, обратное б).

22. Четырехугольный участок земли требуется разделить пополам. Сможете ли вы это сделать?

23. Пусть ABC — правильный треугольник площадью S. Каждая его сторона продолжается на равный отрезок: AB — за вершину B, BC — за вершину C, CA — за вершину A. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются концы продолженных отрезков. Составьте и решите такую же задачу для квадратов. Попробуйте это сделать для других многоугольников.

24. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, точки K и L — середины его сторон: а) BC и CD; б) BC и AD. Вычислите отношение $|BKDL| : |ABCD|$.

25. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K взята на стороне AB, причем $|AK| : |KB| = 2 : 1$, а точка L взята на стороне CD, причем $|CL| : |LD| = 2 : 1$. Вычислите $|AKCL| : |ABCD|$.

26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K и L делят сторону AB на три равные части, точки M и N делят сторону CD на три равные части. Вычислите $|KLMN| : |ABCD|$.

27. В выпуклом четырехугольнике каждая сторона разделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками так, что внутри данного четырехугольника образовался другой четырехугольник. Вычислите отношение площадей полученного и данного четырехугольников.

28. Стороны выпуклого четырехугольника разделены пополам. Середины его сторон являются вершинами другого четырехугольника. Докажите, что его площадь составляет половину площади данного четырехугольника. Пусть теперь на каждой стороне взяты точки, которые делят стороны в одном отношении (по обходу границы — в одном направлении). Докажите, что площадь полученного многоугольника не меньше половины площади данного четырехугольника.

29. Ясно, что куб можно разбить на прямоугольные параллелепипеды. А на сколько? Куб можно разбить и на кубы. Как? На сколько? Сможете ли вы разбить куб на пирамиды? Попробуйте сначала на четырехугольные, а потом на треугольные. Сможете ли вы разбить куб на три четырехугольные пирамиды?

30. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ все ребра равны d. Чему равна площадь треугольника PAC?

31. Почему линия сгиба листа бумаги — отрезок?

ОГЛАВЛЕНИЕ